Structural Control

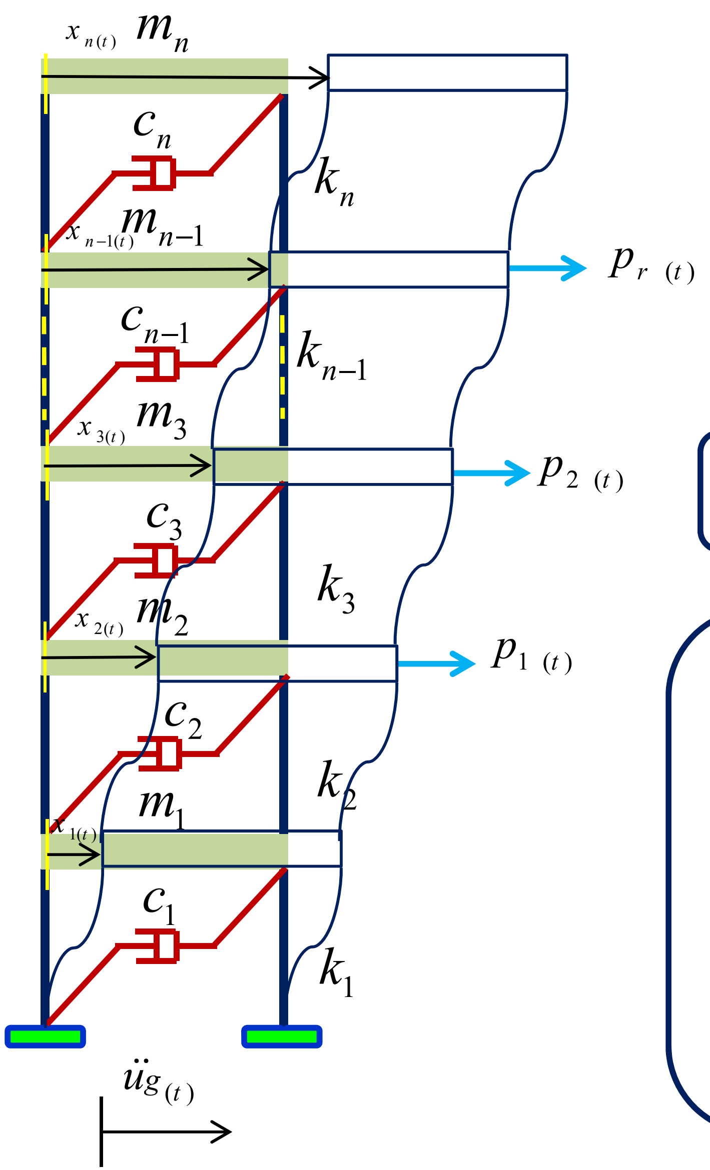
Equations of motion in state space form

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

در قاب n درجه آزاد نشان داده شده در صورتی که جابجایی و سرعت هر طبقه در هر لحظه در دسترس باشد؛ می‌توان با کمک آن‌ها و نیروهای خاص جواب سیستم را در هر لحظه‌ای دیگر تعیین کرد. بنابراین در مجموع تعداد حداقل $2n$ پارامتر برای تعیین حالات قاب لازم است. معادله حرکت سازه n درجه آزاد تحت اثر بار خارجی و تحریک زمین به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$\boxed{\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{k}\mathbf{x}_{(t)}=-\mathbf{m}\mathbf{L}\ddot{u}g_{(t)}+\mathbf{B_r}\mathbf{p}_{(t)}} \qquad (1)$$

که در آن

$$\begin{gathered}
\mathbf{p}_{(t)}=\left\{p_{1(t)} \quad p_{2(t)} \quad \cdots \quad p_{r(t)}\right\}^T \in \mathbb{R}^r \\
\mathbf{L}=\{1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\}^T \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{m}\in\mathbb{R}^{n\times n} \qquad \mathbf{x}_{(t)}\in\mathbb{R}^n \\
\mathbf{c}\in\mathbb{R}^{n\times n} \qquad \dot{\mathbf{x}}_{(t)}\in\mathbb{R}^n \qquad \mathbf{B_r}\in\mathbb{R}^{n\times r} \\
\mathbf{k}\in\mathbb{R}^{n\times n} \qquad \ddot{\mathbf{x}}_{(t)}\in\mathbb{R}^n \qquad \ddot{u}g_{(t)}\in\mathbb{R}
\end{gathered} \qquad (2)$$

$\mathbf{B_r}$: موقعیت قرارگیری نیروهای خارجی

r : تعداد ورودی‌ها (نیروهای خارجی) سیستم

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

می‌توان معادله حرکت را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} &= \dot{\mathbf{x}}_{(t)}\\ \ddot{\mathbf{x}}_{(t)} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x}_{(t)} - \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} - \mathbf{L}\ddot{u}g_{(t)} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{r}}\mathbf{p}_{(t)}\end{aligned} \qquad (3)$$

فرم ماتریسی معادله (3) به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_{(t)}\\ \ddot{\mathbf{x}}_{(t)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}_{(t)}\\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r}\\ -\mathbf{L} & \mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}g_{(t)}\\ \mathbf{p}_{(t)}\end{Bmatrix} \qquad (4)$$

که در آن

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad (5)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

با تعریف بردار حالت **q** به صورت زیر:

$$\mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{(t)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \qquad (6)$$

معادله (4) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)} \qquad (7)$$

(8)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r} \\ -\mathbf{L} & \mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times (r+1)} \quad \mathbf{U}_{(t)} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}g_{(t)} \\ \mathbf{p}_{(t)} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1)}$$

A : ماتریس سیستم

B : ماتریس موقعیت مکانی نیروهای خارجی (ورودی) سیستم

$\mathbf{U}_{(t)}$: بردار نیروهای خارجی (ورودی) سیستم

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

با حل معادله (7) و تعیین بردار حالت $\mathbf{q}$، می‌توان خروجی سیستم $\mathbf{y}_{(t)} \in \mathbb{R}^{m}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

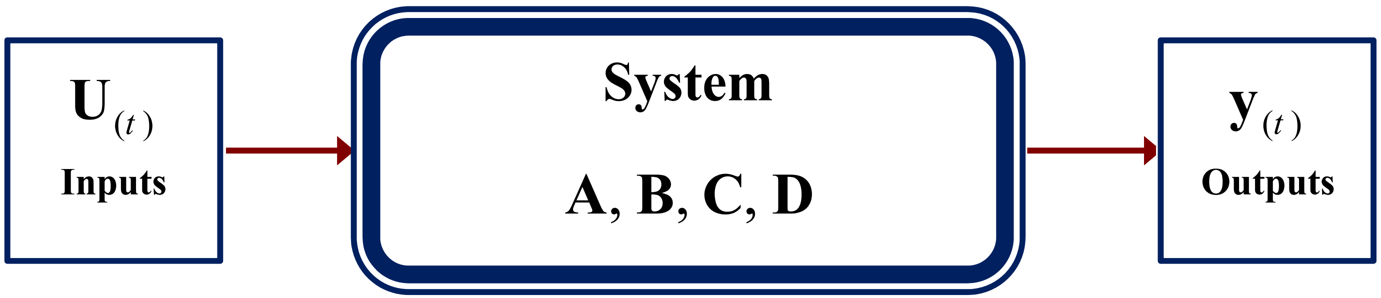
$$\boxed{\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)}} \qquad (9)$$

(10)

خروجی شتاب	خروجی سرعت	خروجی جابجایی
$\mathbf{C} = \left[-\mathbf{c_s}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} \quad -\mathbf{c_s}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\right] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[-\mathbf{c_s}\mathbf{L} \quad \mathbf{c_s}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{B_r}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\mathbf{C} = \left[\mathbf{O}_{m\times n} \quad \mathbf{c_s}\right] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\mathbf{C} = \left[\mathbf{c_s} \quad \mathbf{O}_{m\times n}\right] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$

$\mathbf{c_s} \in \mathbb{R}^{m\times n}$: ماتریس موقعیت قرارگیری حسگرهای (خروجی‌های) سیستم

m: تعداد حسگرها (خروجی‌های) سیستم



EOM in state space form

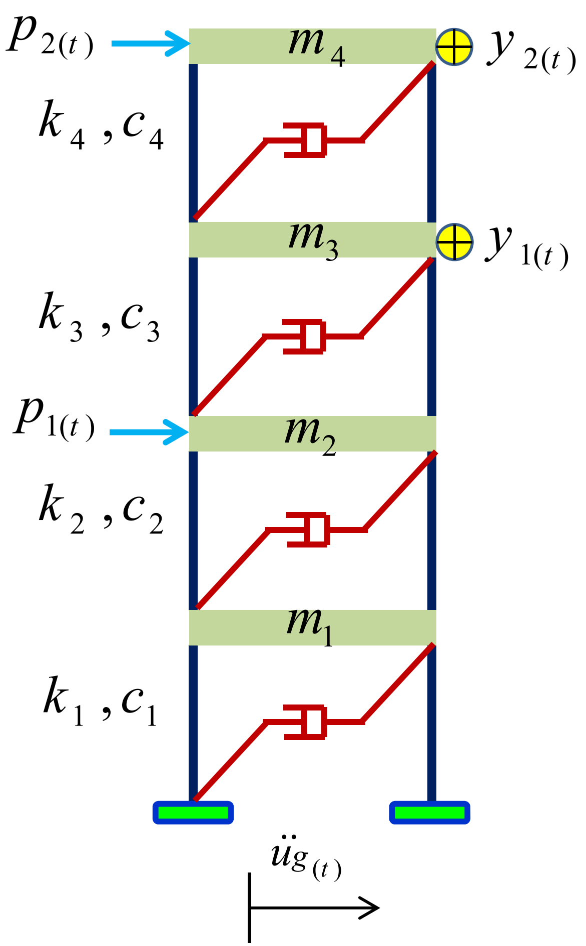
❑ معادلات حرکت در فضای حالت

مثال 1– معادله حرکت سازه نشان داده شده را در فضای حالت بنویسید.

الف– خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

ب– خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

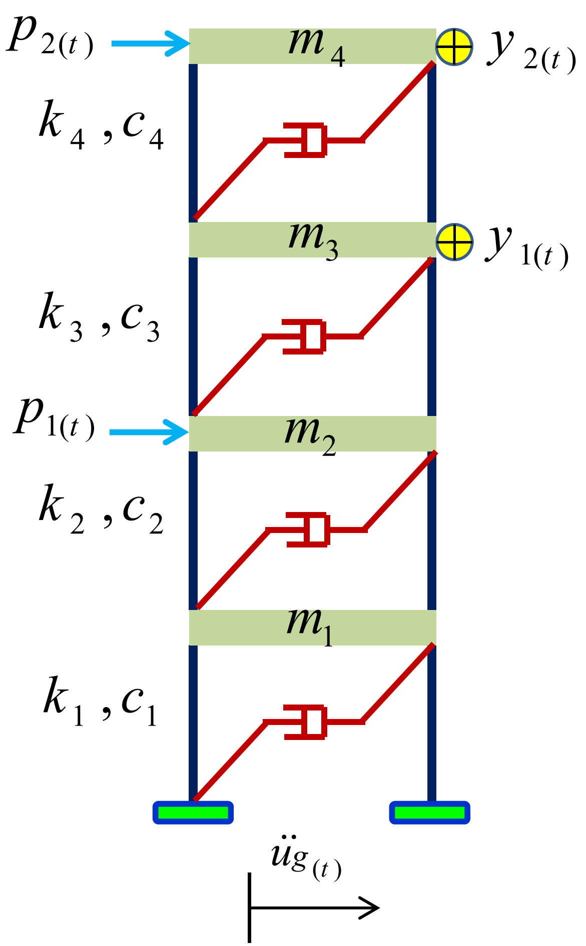
ج– خروجی سیستم شتاب می‌باشد.



EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 1-



$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

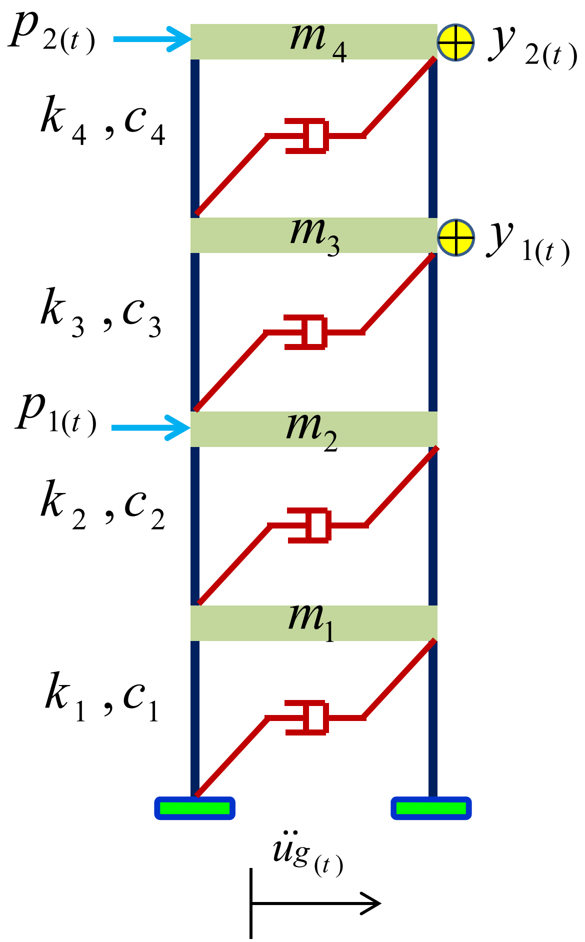
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 1-



$$\mathbf{B_r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 1-

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 1-

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 1-

الف- خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 1-

ب- خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(10) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)} \right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 1-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

EOM in state space form

□ معادلات حرکت در فضای حالت

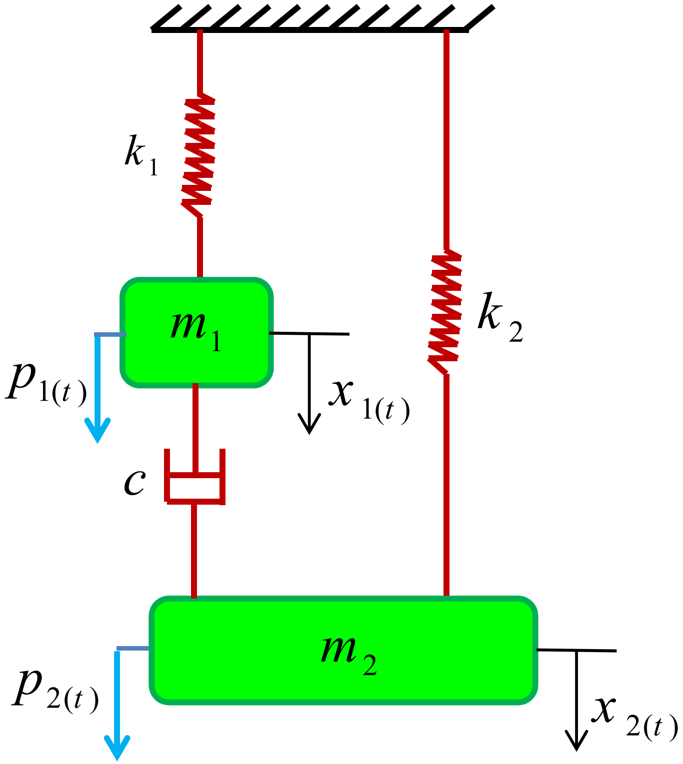
پاسخ مثال 1-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3+k_4}{m_3} & \frac{k_4}{m_3} & 0 & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{c_3+c_4}{m_3} & \frac{c_4}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{k_4}{m_4} & -\frac{k_4}{m_4} & 0 & 0 & \frac{c_4}{m_4} & -\frac{c_4}{m_4} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ x_{3(t)} \\ x_{4(t)} \\ \hline \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \\ \dot{x}_{3(t)} \\ \dot{x}_{4(t)} \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c:cc} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{m_4} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \ddot{u}g_{(t)} \\ \hdashline p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{3(t)} \\ \ddot{x}_{4(t)} \end{Bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت



مثال 2- معادله حرکت سازه نشان داده شده را در فضای حالت بنویسید.

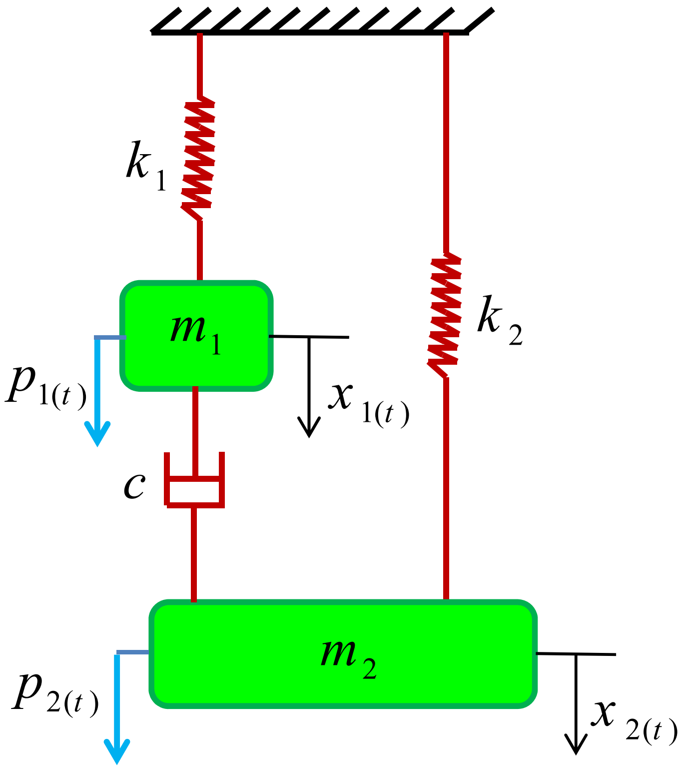
الف- خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

ب- خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

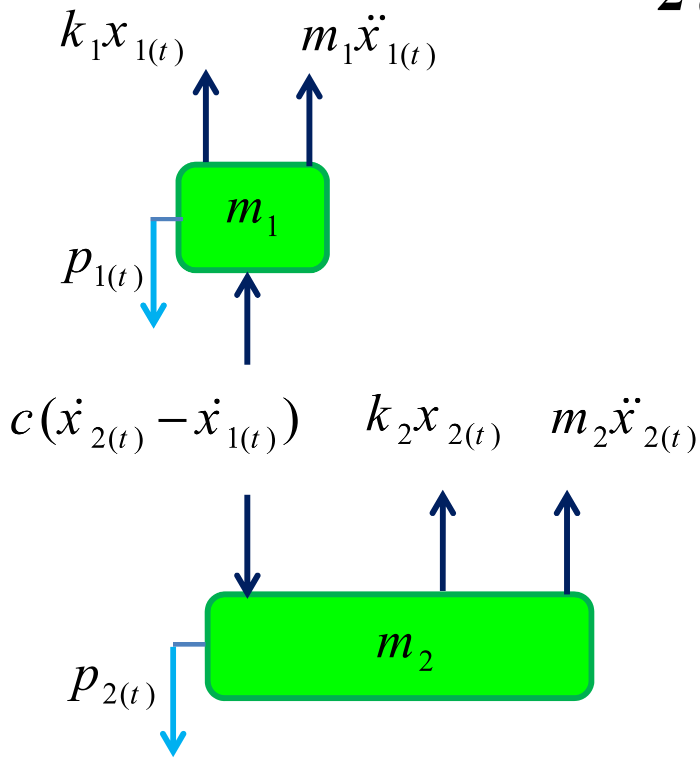
ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت



پاسخ مثال 2-



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{1(t)} \\ \ddot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -c & c \\ c & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 2-

با تعریف پارامترهای زیر

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{(t)}=\begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} -c & c \\ c & -c \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}}_{(t)}=\begin{Bmatrix} \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{U}_{(t)}=\begin{Bmatrix} p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{x}}_{(t)}=\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{1(t)} \\ \ddot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

معادله حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\boxed{\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{k}\mathbf{x}_{(t)}=\mathbf{U}_{(t)}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 2-

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2\times2} & \mathbf{I}_{2\times2} \\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{(t)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2\times2} \\ \mathbf{m}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{U}_{(t)}}$$

با تعریف بردار حالت به صورت زیر:

$$\boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{(t)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 2-

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 2-

الف- خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

$$(10) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{2\times 2}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ \hline \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 2-

ب- خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

$$(10) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{2\times 2}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ \hline \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 2-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال 2-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} -\dfrac{k_1}{m_1} & 0 & \dfrac{c}{m_1} & -\dfrac{c}{m_1} \\ 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{c}{m_2} & \dfrac{c}{m_2} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ \hline \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{1(t)} \\ \ddot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

معادله (7) در حالت ارتعاش آزاد با فرض $\mathbf{U}_{(t)} = 0$ به صورت زیر است:

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)}} \qquad (11)$$

ابتدا معادله (11) را در حالت اسکالر بررسی می‌نماییم:

$$\boxed{\dot{\mathrm{q}}_{(t)} = \alpha \mathrm{q}_{(t)}} \qquad (12)$$

جواب معادله (12) را می‌توان به صورت چند جمله‌ای زیر نوشت:

$$\boxed{\mathrm{q}_{(t)} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots + b_j t^j + \cdots} \qquad (12.1)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

$$\boxed{q_{(t)} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots + b_j t^j + \cdots} \quad (12.1)$$

$$@t = 0 \quad \overset{(12.1)}{\Rightarrow} \quad b_0 = q_{(0)}$$

$$(12) \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_{(t)} = \alpha q_{(t)} \quad \Rightarrow$$

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + j b_j t^{j-1} + \cdots = \alpha b_0 + \alpha b_1 t + \alpha b_2 t^2 + \alpha b_3 t^3 + \cdots + \alpha b_j t^j + \cdots$$

$$\begin{aligned}
&b_1 = \alpha b_0 && \overset{b_0 = q_{(0)}}{\Rightarrow} && \boxed{b_1 = \alpha q_{(0)}} \\
&2b_2 = \alpha b_1 && \overset{b_1 = \alpha q_{(0)}}{\Rightarrow} && \boxed{b_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 q_{(0)}} \\
&3b_3 = \alpha b_2 && \overset{b_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 q_{(0)}}{\Rightarrow} && \boxed{b_3 = \frac{1}{3!}\alpha^3 q_{(0)}} \\
&\vdots && && \\
&j b_j = \alpha b_{j-1} && \overset{b_{j-1} = \frac{1}{(j-1)!}\alpha^{(j-1)} q_{(0)}}{\Rightarrow} && \boxed{b_j = \frac{1}{j\,!}\alpha^j q_{(0)}}
\end{aligned} \quad (12.2)$$

EOM in state space form

□ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

با جایگذاری روابط (12.2) در رابطه (12.1) می‌توان جواب معادله (12) را به صورت چند جمله‌ای زیر نوشت:

$$\mathrm{q}_{(t)}=\left(1+\alpha t+\frac{1}{2!}\alpha^2t^2+\frac{1}{3!}\alpha^3t^3+\cdots+\frac{1}{j!}\alpha^jt^j+\cdots\right)\mathrm{q}_{(0)}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\alpha^jt^j\right)\mathrm{q}_{(0)}$$

$$or$$

$$\mathrm{q}_{(t)}=e^{\alpha t}\mathrm{q}_{(0)} \qquad (13)$$

جواب معادله حرکت در فضای حالت، معادله (11)، را می‌توان به طور مشابه به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{q}_{(t)}=\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3+\cdots+\frac{1}{j!}\mathbf{A}^jt^j+\cdots\right)\mathbf{q}_{(0)}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\mathbf{A}^jt^j\right)\mathbf{q}_{(0)}$$

$$or$$

$$\mathbf{q}_{(t)}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}_{(0)} \qquad (14)$$

$e^{\mathbf{A}t}$: ماتریس نمایی

که در آن

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3+\cdots+\frac{1}{j!}\mathbf{A}^jt^j+\cdots=\mathbf{T}_{(t)} \qquad (15)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

پارامتر $e^{\mathbf{A}t}$ را ماتریس تبدیل $\mathbf{T}_{(t)}$ در فضای حالت می‌نامیم. زیرا این ماتریس بردار حالت در زمان t_0 را به بردار حالت در لحظه t تبدیل می‌کند. بنابراین رابطه (14) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{q}_{(t)} &= \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} \\ \mathbf{T}_{(t)} &= e^{\mathbf{A}t} \end{aligned}} \qquad (16)$$

روش‌های مختلفی برای محاسبه ماتریس تبدیل (Transform Matrix) $\mathbf{T}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t}$ وجود دارد:

1- بسط دادن

2- قطری کردن

3- تبدیل لاپلاس

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

1- روش بسط دادن:

به کمک رابطه (15) ماتریس تبدیل (Transform Matrix) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$(15) \quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{T}_{(t)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j\,!} \mathbf{A}^{j} t^{j}} \qquad (17)$$

این روش به دلیل حجم بالای محاسبات و طولانی بودن، کمتر مورد استفاده قرارگرفته است.

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

2- روش قطری کردن:

هنگامی که ماتریس سیستم **A** دارای مقادیر ویژه متمایز (معکوس پذیر) باشد می‌توان معادلات حرکت در فضای حالت را به صورت قطری درآورد.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{eig}(\mathbf{A}) = [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Psi}] \\ &(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\boldsymbol{\Psi}_i = \mathbf{0} \\ &\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \end{aligned}} \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$: مقادیر ویژه (Eigen values) ماتریس سیستم (به صورت مختلط)

$\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$: بردارهای ویژه (Eigen vectors) ماتریس سیستم

با معرفی بردار حالت تعمیم‌یافته $\mathbf{z}_{(t)} \in \mathbb{R}^{2n}$ به کمک رابطه زیر می‌توان معادله حرکت در فضای حالت را که همبسته می‌باشند از هم جدا نمود:

$$\boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_{(t)}} \qquad (19)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

2- روش قطری کردن:

با جایگذاری رابطه (19) در رابطه (7) خواهیم داشت:

$$(19) \rightarrow (7) \quad \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)}} \quad (20)$$

با پیش‌ضرب طرفین رابطه (20) در $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$

$$(20) \quad \overset{\times\boldsymbol{\Psi}^{-1}}{\Rightarrow} \boxed{\dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_{(t)} + \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)}} \quad (21)$$

با تعریف پارامترهای زیر

$$\boxed{\bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad \bar{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{B}} \quad (22)$$

رابطه (21) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(22) \rightarrow (21) \quad \Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_{(t)} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{U}_{(t)}} \quad (23)$$

EOM in state space form

معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

2- روش قطری کردن:

با حل معادله (23) و تعیین بردار حالت $\mathbf{z}$، می‌توان خروجی سیستم $\mathbf{y}_{(t)} \in \mathbb{R}^m$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\mathbf{y}_{(t)} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)}} \qquad (24)$$

که در آن

$$\boxed{\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi}} \qquad (25)$$

(26)

خروجی شتاب	خروجی سرعت	خروجی جابجایی
$\bar{\mathbf{C}} = \left[-\mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} \quad -\mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\right]\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[-\mathbf{c}_s\mathbf{L} \quad \mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_r\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\bar{\mathbf{C}} = \left[\mathbf{O}_{m\times n} \quad \mathbf{c}_s\right]\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\bar{\mathbf{C}} = \left[\mathbf{c}_s \quad \mathbf{O}_{m\times n}\right]\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$

$\mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^{m\times n}$: ماتریس موقعیت قرارگیری حسگرهای (خروجی‌های) سیستم

m: تعداد حسگرها (خروجی‌های) سیستم

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

2- روش قطری کردن:

مثال 3- معادلات حرکت زیر را به صورت قطری بنویسید:

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -4\end{bmatrix}\mathbf{q}_{(t)}+\begin{Bmatrix}0\\ 2\end{Bmatrix}\mathbf{u}_{(t)}$$

$$\mathbf{y}_{(t)}=\{3 \quad 1\}\mathbf{q}_{(t)}$$

حل مثال 3-

$$\boxed{\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-3\end{cases}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

2- روش قطری کردن:

حل مثال 3-

$$\boxed{\mathbf{\Psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

$$(18) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{\Psi}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & -1 \\ 5 & -4-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \overset{\lambda_2=-3}{\Rightarrow} \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 5\psi_{12} - \psi_{22} = 0 \\ 5\psi_{12} - \psi_{22} = 0 \end{cases} \quad \overset{if\ \psi_{22}=1}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{\Psi}_2 = \begin{Bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

2- روش قطری کردن:

حل مثال 3-

$$=\begin{bmatrix}1.25 & -0.25\\ -1.25 & 1.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}=\lambda}$$

$$=\begin{bmatrix}1.25 & -0.25\\ -1.25 & 1.25\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 2\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{B}}=\begin{Bmatrix}-0.5\\ 2.5\end{Bmatrix}}$$

$$=\{3 \quad 1\}\begin{bmatrix}1 & 0.2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{C}}=\{4 \quad 1.6\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{(t)}&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\mathbf{z}_{(t)}+\begin{Bmatrix}-0.5\\ 2.5\end{Bmatrix}\mathbf{u}_{(t)}\\ \mathbf{y}_{(t)}&=\{4 \quad 1.6\}\mathbf{z}_{(t)}\end{aligned}}$$

Matlab Code (L01Example03.m)

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

رابطه (23) معادله فضای حالات در مختصات تعمیم یافته در حالت ارتعاش آزاد به صورت زیر است:

$$(23)\ \xRightarrow{\mathbf{U}_{(t)}=0}\ \boxed{\dot{\mathbf{z}}_{(t)}=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_{(t)}}\quad (27)$$

رابطه (27) را بسط می‌دهیم:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_{1(t)} \\ \dot{z}_{2(t)} \\ \dot{z}_{3(t)} \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1(t)} \\ z_{2(t)} \\ z_{3(t)} \\ \vdots \\ z_{2n(t)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \dot{z}_{1(t)} = \lambda_1 z_{1(t)} \\ \dot{z}_{2(t)} = \lambda_2 z_{2(t)} \\ \dot{z}_{3(t)} = \lambda_3 z_{3(t)} \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n(t)} = \lambda_{2n} z_{2n(t)} \end{matrix}} \quad (28)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

مشابه با رابطه (12) که پاسخ آن در رابطه (13) آمده بود پاسخ معادلات (28) نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(28)\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{z}_{1(t)} &= \lambda_1 z_{1(t)} \\ \dot{z}_{2(t)} &= \lambda_2 z_{2(t)} \\ \dot{z}_{3(t)} &= \lambda_3 z_{3(t)} \\ &\vdots \\ \dot{z}_{2n(t)} &= \lambda_{2n} z_{2n(t)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} z_{1(t)} &= e^{\lambda_1 t} z_{1(0)} \\ z_{2(t)} &= e^{\lambda_2 t} z_{2(0)} \\ z_{3(t)} &= e^{\lambda_3 t} z_{3(0)} \\ &\vdots \\ z_{2n(t)} &= e^{\lambda_{2n} t} z_{2n(0)} \end{aligned}} \quad (29)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

فرم ماتریسی رابطه (29) به صورت مقابل است:

$$\begin{Bmatrix} z_{1(t)} \\ z_{2(t)} \\ z_{3(t)} \\ \vdots \\ z_{2n(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{2n} t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1(0)} \\ z_{2(0)} \\ z_{3(0)} \\ \vdots \\ z_{2n(0)} \end{Bmatrix} \qquad (30)$$

که می‌توان رابطه (30) را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{z}_{(t)} = e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{z}_{(0)}$$

$$e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{2n} t} \end{bmatrix} \qquad (31)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

با جایگذاری رابطه (31) در رابطه (19) بردار حالت به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$(19) \rightarrow (31) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathrm{A}}t} \mathbf{z}_{(0)}} \qquad (32)$$

همچنین بردار حالت اولیه در مختصات تعمیم یافته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(19) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{z}_{(0)} = \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{q}_{(0)}} \qquad (33)$$

با جایگذاری رابطه (33) در رابطه (32) بردار حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(33) \rightarrow (32) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathrm{A}}t} \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{q}_{(0)}} \qquad (34)$$

با مقایسه رابطه (34) با رابطه (16) می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس تبدیل را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\boxed{\mathbf{T}_{(t)} = e^{\mathrm{A}t} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathrm{A}}t} \mathbf{\Psi}^{-1}} \qquad (35)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

می‌توان ماتریس بردارهای ویژه سیستم را به صورت زیر نشان داد:

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}\psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \psi_{1,3} & \cdots & \psi_{1,2n}\\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \psi_{2,3} & \cdots & \psi_{2,2n}\\ \psi_{3,1} & \psi_{3,2} & \psi_{3,3} & \cdots & \psi_{3,2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_{2n,1} & \psi_{2n,2} & \psi_{2n,3} & \cdots & \psi_{2n,2n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \boldsymbol{\psi}_3 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n}\end{bmatrix} \quad (36)$$

به طور مشابه:

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}^{-1}=\begin{bmatrix}\bar{\psi}_{1,1} & \bar{\psi}_{1,2} & \bar{\psi}_{1,3} & \cdots & \bar{\psi}_{1,2n}\\ \bar{\psi}_{2,1} & \bar{\psi}_{2,2} & \bar{\psi}_{2,3} & \cdots & \bar{\psi}_{2,2n}\\ \bar{\psi}_{3,1} & \bar{\psi}_{3,2} & \bar{\psi}_{3,3} & \cdots & \bar{\psi}_{3,2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{\psi}_{2n,1} & \bar{\psi}_{2n,2} & \bar{\psi}_{2n,3} & \cdots & \bar{\psi}_{2n,2n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\psi}}_1 & \bar{\boldsymbol{\psi}}_2 & \bar{\boldsymbol{\psi}}_3 & \cdots & \bar{\boldsymbol{\psi}}_{2n}\end{bmatrix} \quad (37)$$

□ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

با جایگذاری روابط (36) و (37) در رابطه (34) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} q_{1(t)} \\ q_{2(t)} \\ q_{3(t)} \\ \vdots \\ q_{2n(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 & \boldsymbol{\Psi}_2 & \boldsymbol{\Psi}_3 & \cdots & \boldsymbol{\Psi}_{2n} \end{bmatrix} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Psi}}_1 & \bar{\boldsymbol{\Psi}}_2 & \bar{\boldsymbol{\Psi}}_3 & \cdots & \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{1(0)} \\ q_{2(0)} \\ q_{3(0)} \\ \vdots \\ q_{2n(0)} \end{Bmatrix} \qquad (38)$$

رابطه (38) را می توان به صورت ساده شده مقابل نوشت:

$$q_{i(t)} = \sum_{j=1}^{2n} \boldsymbol{\Psi}_i^{\ T} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \bar{\boldsymbol{\Psi}}_j^{\ T} q_{j(0)} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, 2n) \qquad (39)$$

از آنجا که مقادیر ویژه ماتریس سیستم به صورت مختلط است از این رو بردار حالت به دست آمده در رابطه (34) یا (39) به صورت مختلط است. اما به این نکته باید توجه کرد که بخش موهومی آن تقریبا برابر با صفر است (بسیار ناچیز است).

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

مثال 4- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مربوطه را به روش قطری کردن محاسبه نمایید.

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{y}_{(t)} = \{1 \quad 1\} \mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Matlab Code (L01Example04.m)

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

پاسخ مثال 4-

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن: پاسخ مثال 4-

$$\boxed{\mathbf{\Psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن: پاسخ مثال 4-

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}=\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{\bar{\mathbf{A}}t}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0 & -0.5\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{T}_{(t)}=\begin{bmatrix}1 & 0.5-0.5e^{-2t}\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.5-0.5e^{-2t}\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{q}_{(t)}=\begin{Bmatrix}2-e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{Bmatrix}}$$

$$=\{1 \quad 1\}\begin{Bmatrix}2-e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{y}_{(t)}=2+e^{-2t}}$$

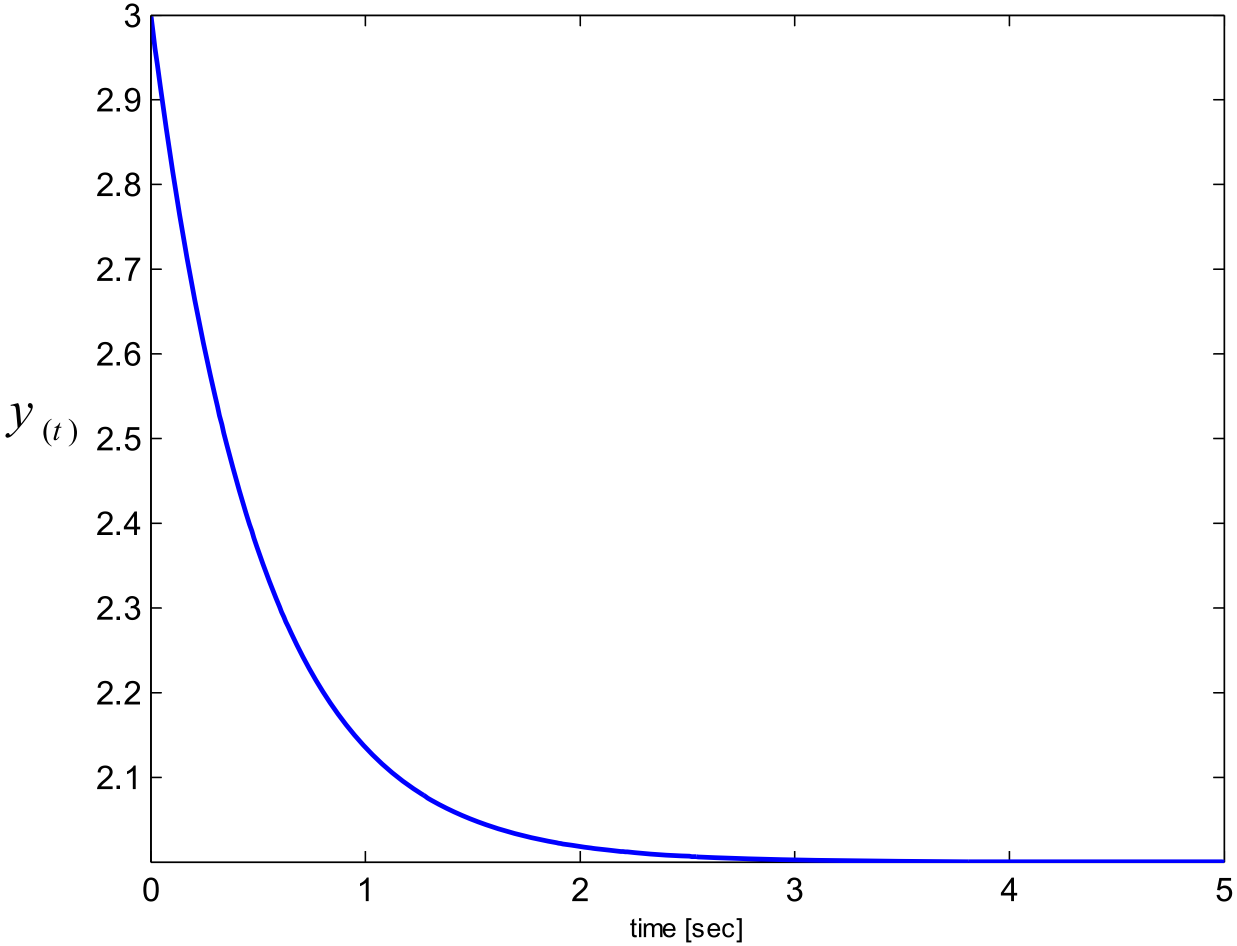
EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

پاسخ مثال 4-



پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مورد نظر

EOM in state space form

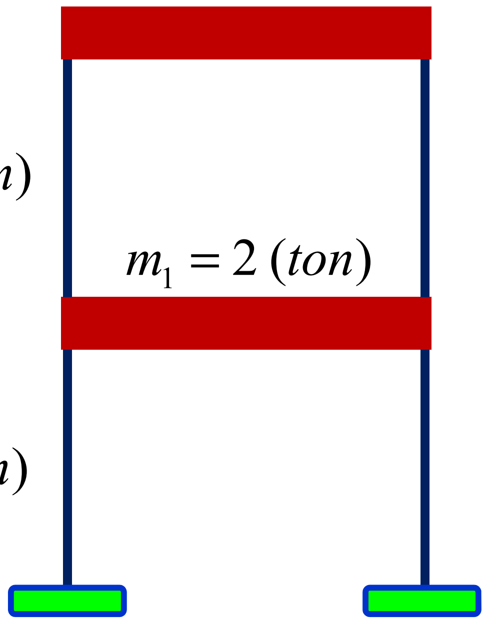
❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

مثال 5- پاسخ ارتعاش آزاد سازه نشان داده شده در شکل زیر را با توجه به شرایط اولیه آن به دست آورید.

$$m_2 = 1.5\ (ton)$$



$$k_2 = 1200\ (kN/m)$$

$$m_1 = 2\ (ton)$$

$$k_1 = 1800\ (kN/m)$$

$$\xi = 0.05$$

$$\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.015 \end{Bmatrix}\ (m) \qquad \{\dot{x}_0\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{Bmatrix}\ (m/s)$$

Matlab Code (L01Example05.m)

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

پاسخ مثال 5-

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\times 10^{3}(kg)\quad ,\quad \mathbf{k}=\begin{bmatrix}3 & -1.2\\ -1.2 & 1.2\end{bmatrix}\times 10^{6}\,(N/m)$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}7.4294 & -1.8981\\ -1.8981 & 3.9113\end{bmatrix}\times 10^{3}\,(N.\sec/m)$$

$$(8)\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1500 & 600 & -3.7147 & 0.94903\\ 800 & -800 & 1.2654 & -2.6075\end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{D}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_{(0)}=\begin{Bmatrix}0.01\\ 0.015\\ 0.02\\ 0.04\end{Bmatrix}$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

پاسخ مثال 5-

(18) $\Rightarrow$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 0.0016038 + 0.032036i & 0.0016038 - 0.032036i & -0.0013778 - 0.027522i & -0.0013778 + 0.027522i \\ -0.0011392 - 0.022756i & -0.0011392 + 0.022756i & -0.0025862 - 0.051659i & -0.0025862 + 0.051659i \\ -1.4078 - 6.7489e{-}017i & -1.4078 + 6.7489e{-}017i & 0.53276 + 2.3618e{-}017i & 0.53276 - 2.3618e{-}017i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}^{-1} = \begin{bmatrix} -4.5223e{-}016 - 11.323i & 1.3288e{-}016 + 6.0322i & -0.25766 - 0.012899i & 0.13727 + 0.0068722i \\ -4.5169e{-}016 + 11.323i & 1.2292e{-}016 - 6.0322i & -0.25766 + 0.012899i & 0.13727 - 0.0068722i \\ 4.5655e{-}016 + 4.9878i & -1.2235e{-}016 + 7.0216i & 0.25766 + 0.012899i & 0.36273 + 0.018159i \\ 4.5243e{-}016 - 4.9878i & -1.2631e{-}016 - 7.0216i & 0.25766 - 0.012899i & 0.36273 - 0.018159i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\lambda} = \begin{bmatrix} -2.1944 + 43.834i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.1944 - 43.834i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.96668 + 19.309i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.96668 - 19.309i \end{bmatrix}$$

(31) $\Rightarrow$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2.1944 + 43.834i & -2.4425e{-}015 + 3.5527e{-}015i & 1.5506e{-}016 + 1.8031e{-}015i & 5.1107e{-}016 - 5.3558e{-}015i \\ -2.4425e{-}015 - 3.5527e{-}015i & -2.1944 - 43.834i & 4.0005e{-}016 + 3.5794e{-}015i & 4.4038e{-}017 - 2.6708e{-}017i \\ -1.6912e{-}015 + 2.2541e{-}015i & 1.4692e{-}015 - 2.2541e{-}015i & -0.96668 + 19.309i & 4.0523e{-}015 + 8.8818e{-}015i \\ 1.1361e{-}015 + 3.5863e{-}015i & -1.3582e{-}015 - 3.5863e{-}015i & 4.1633e{-}015 - 1.4211e{-}014i & -0.96668 - 19.309i \end{bmatrix}$$

EOM in state space form

□ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

پاسخ مثال 5-

$$\begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \times \left\{ \begin{array}{l} (0.7286+0.0256i)e^{(-2.1944-43.834i)t} + (0.7286-0.0256i)e^{(-2.1944+43.834i)t} \cdots \\ (-0.5175-0.0182i)e^{(-2.1944-43.834i)t} + (-0.5175+0.0182i)e^{(-2.1944+43.834i)t} \cdots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdots + (4.2714+0.7563i)e^{(-0.96668-19.309i)t} + (4.2714-0.7563i)e^{(-0.96668+19.309i)t} \\ \cdots + (8.0175+1.4197i)e^{(-0.96668-19.309i)t} + (8.0175-1.4197i)e^{(-0.96668+19.309i)t} \end{array} \right\}$$

$x_{1(t)}\ (m)$	$x_{2(t)}\ (m)$
0.01 + 6.734e-020i	0.015 +7.7981e-021i
0.0092508 -1.8962e-018i	0.014958 -2.8526e-018i
0.0067062 -1.1808e-018i	0.013095 - 7.598e-018i
0.0034458 -6.1331e-018i	0.0092929 -2.7129e-018i
0.00044817 + 4.383e-018i	0.0038356 -9.8454e-019i
-0.0018651 -1.5658e-020i	-0.0024218 +6.0467e-020i
-0.0036266 + 3.312e-019i	-0.0082288 +1.2375e-018i
-0.0051409 +1.0236e-017i	-0.012379 +9.9275e-018i
-0.006453 +9.3888e-018i	-0.014152 +2.7511e-017i
-0.0071993 -9.9935e-018i	-0.013511 -1.8296e-017i
-0.0068376 -7.3011e-018i	-0.010963 -2.0032e-017i
-0.0050706 +4.4621e-018i	-0.0072288 +1.2197e-020i
-0.0021452 +2.3571e-018i	-0.0029377 +1.0535e-017i
0.0011886 -7.6363e-019i	0.0014679 - 2.544e-018i
0.0040296 -5.8655e-018i	0.0056317 -1.5466e-017i
⋮	⋮

همان‌طور که مشاهده می‌شود پاسخ‌های به دست آمده به صورت مختلط می‌باشند. اما مقادیر بخش موهومی پاسخ‌ها بسیار ناچیز و تقریبا برابر با صفر است.

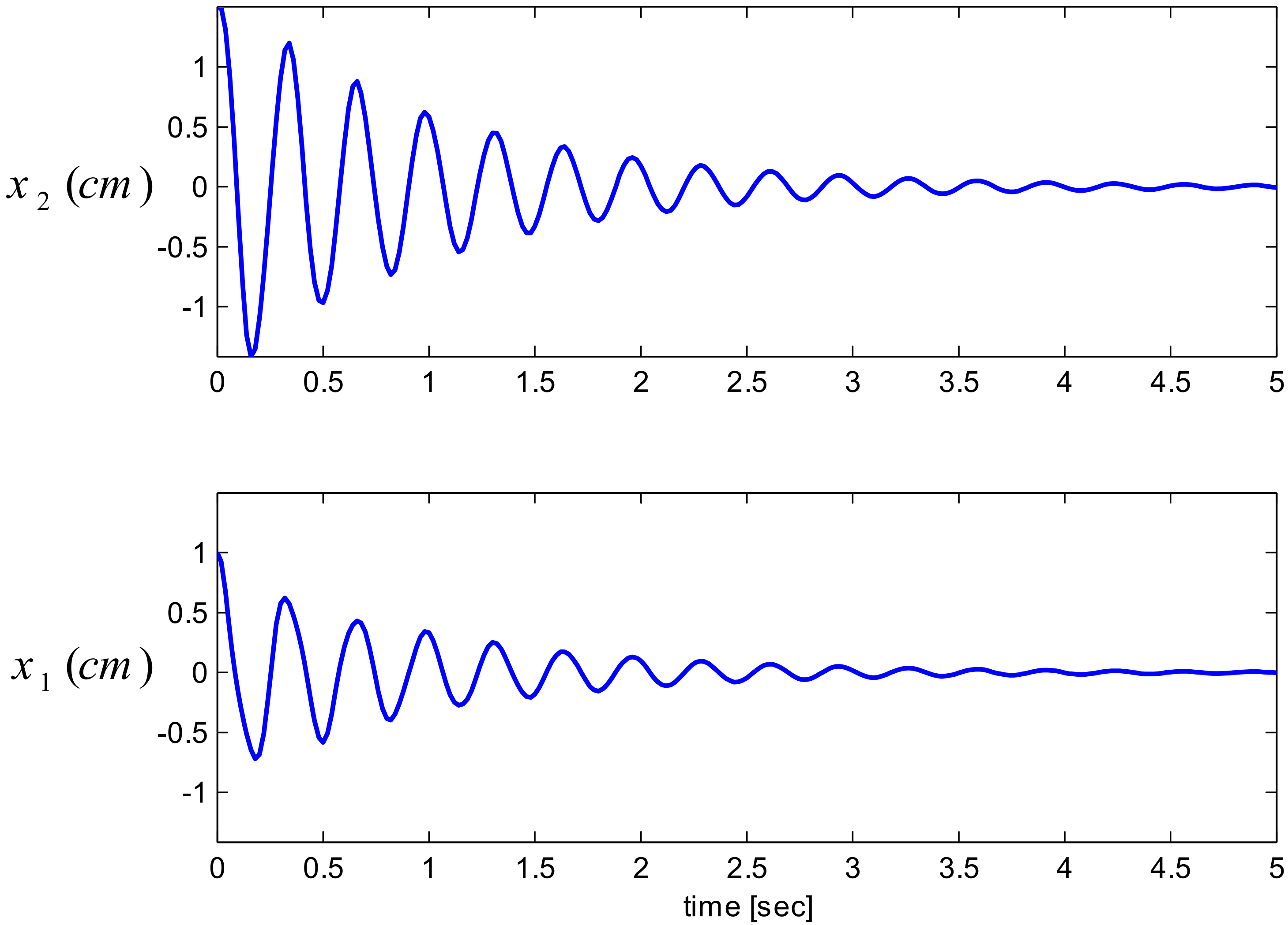
EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش قطری کردن:

پاسخ مثال 5-



پاسخ ارتعاش آزاد سازه دو طبقه با میرایی

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

3- روش تبدیل لاپلاس:

با روش تبدیل لاپلاس نیز می‌توان جواب سیستمی که معادلات حرکت آن در فضای حالت نوشته شده است را به دست آورد:

تعریف: $F_{(s)} = L(f_{(t)})$ تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ است که به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$F_{(s)} = L(f_{(t)}) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_{(t)} dt \qquad (40)$$

تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس $f_{(t)} = L^{-1}(F_{(s)})$ دارای خاصیت خطی است

$$\begin{aligned} L[\alpha f_{1(t)} + b f_{2(t)}] &= \alpha F_{1(s)} + b F_{2(s)} \\ L^{-1}[\alpha F_{1(s)} + b F_{2(s)}] &= \alpha f_{1(t)} + b f_{2(t)} \end{aligned} \qquad (41)$$

تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم در جدول زیر آمده است:

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

3- روش تبدیل لاپلاس:

تابع $F_{(s)}$ تبدیل لاپلاس در فضای s	تابع $f_{(t)}$ در فضای زمانی
$\frac{\alpha}{s} \quad (s>0)$	α
$\frac{\alpha n!}{s^{n+1}} \quad (s>0) \quad , \quad n =$ عدد صحیح	αt^n
$\frac{\beta}{s-\alpha} \quad (s>\alpha)$	$\beta e^{\alpha t}$
$\frac{\beta\alpha}{s^2+\alpha^2} \quad (s>0)$	$\beta \sin(\alpha t)$
$\frac{\beta s}{s^2+\alpha^2} \quad (s>0)$	$\beta \cos(\alpha t)$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

3- روش تبدیل لاپلاس:

تابع $F_{(s)}$ تبدیل لاپلاس در فضای s	تابع $f_{(t)}$ در فضای زمانی
$sF_{(s)} - f_{(0)}$	$\dot{f}_{(t)}$
$s^2 F_{(s)} - sf_{(0)} - \dot{f}_{(0)}$	$\ddot{f}_{(t)}$
$\frac{1}{s} F_{(s)}$	$\int_0^t f_{(\tau)} d\tau$
$F_{(s-\alpha)}$	$e^{\alpha t} f_{(t)}$
$F^{(n)}{}_{(s)}$	$-t^n f_{(t)}$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

3- روش تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس معادله فضای حالت- ارتعاش آزاد در رابطه (11) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(11):\quad \dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} \quad \overset{L}{\Rightarrow} \quad \boxed{L(\dot{\mathbf{q}}_{(t)}) = L(\mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)})} \quad (42)$$

با حل رابطه (42) خواهیم داشت:

$$(42) \quad \Rightarrow \quad s\,\mathbf{Q}_{(s)} - \mathbf{q}_{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{(s)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q}_{(s)} = \mathbf{q}_{(0)}} \quad (43)$$

چنانچه طرفین رابطه (43) را در $(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ضرب کنیم:

$$(43) \quad \overset{\times(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{Q}_{(s)} = (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}_{(0)}} \quad (44)$$

اگر از طرفین رابطه (44) معکوس تبدیل لاپلاس بگیریم بردار حالت $\mathbf{q}_{(t)}$ به دست می‌آید:

$$(44) \quad \overset{\times L^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = L^{-1}\left[(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{q}_{(0)}} \quad (45)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

3- روش تبدیل لاپلاس:

رابطه (45) را می‌توان به صورت دیگری نوشت که در آن تابع تبدیل به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{(t)} &= \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} \\ \mathbf{T}_{(t)} &= L^{-1}\left[(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]\end{aligned} \qquad (46)$$

بنابراین برای پیدا کردن جواب در فضای حالت، $\mathbf{q}_{(t)}$ ، لازم است ابتدا ماتریس انتقال را محاسبه نمود. برای این منظور باید $(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ را اول تعیین کرده و سپس از تمامی عناصر آن معکوس تبدیل لاپلاس گرفته شود.

با توجه به رابطه (16) می‌توان نشان داد که:

$$\mathbf{T}_{(t)} = L^{-1}\left[(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] = e^{\mathbf{A}t} \qquad (47)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش تبدیل لاپلاس :

مثال 6- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مربوطه را به روش تبدیل لاپلاس محاسبه نمایید.

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{y}_{(t)} = \{1 \quad 1\} \mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Matlab Code (L01Example06.m)

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش تبدیل لاپلاس :

پاسخ مثال 6-

$$= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش تبدیل لاپلاس :

پاسخ مثال 6-

$$\boxed{\mathbf{T}_{(t)}=\begin{bmatrix}1 & 0.5(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5-0.5e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{\mathbf{q}_{(t)}=\begin{Bmatrix}2-e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{Bmatrix}}$$

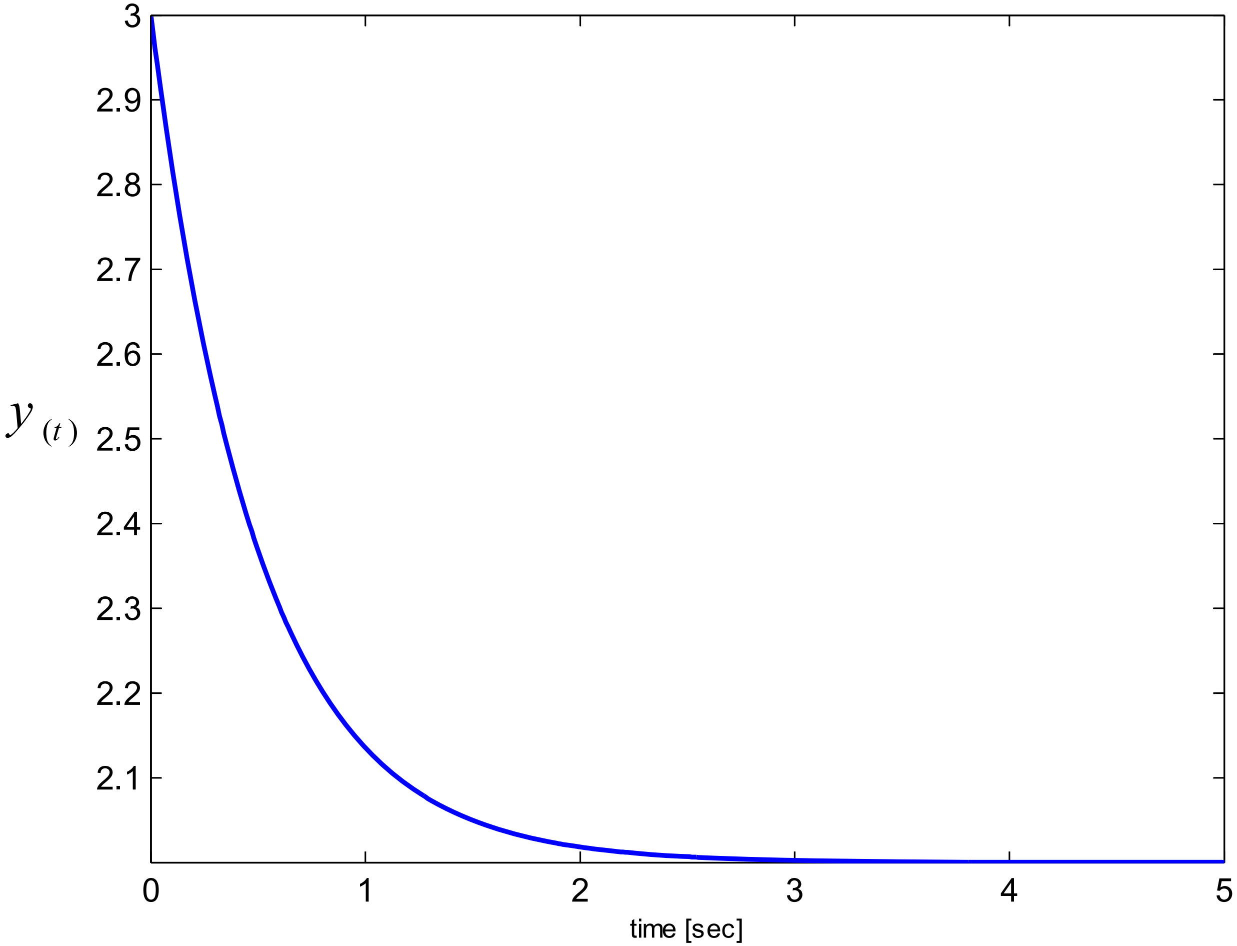
$$=\{1\quad 1\}\begin{Bmatrix}2-e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{\mathbf{y}_{(t)}=2+e^{-2t}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

2- روش تبدیل لاپلاس :

پاسخ مثال 6-



پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مورد نظر

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

معادله (7) در حالت اسکالر در لحظه τ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\dot{\mathrm{q}}_{(\tau)} = \alpha \mathrm{q}_{(\tau)} + \mathrm{bu}_{(\tau)}} \quad (48)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{-\alpha\tau}$ خواهیم داشت:

$$(48) \quad \overset{\times e^{-\alpha\tau}}{\Rightarrow} \quad \boxed{e^{-\alpha\tau}\dot{\mathrm{q}}_{(\tau)} - e^{-\alpha\tau}\alpha \mathrm{q}_{(\tau)} = e^{-\alpha\tau}\mathrm{bu}_{(\tau)}} \quad (49)$$

سمت چپ رابطه (49) تعریف مشتق $e^{-\alpha\tau}\mathrm{q}_{(\tau)}$ است. بنابراین:

$$(49) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{d\tau}(e^{-\alpha\tau}\mathrm{q}_{(\tau)}) = e^{-\alpha\tau}\mathrm{bu}_{(\tau)}} \quad (50)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

اگر از طرفین رابطه (50) از بازه 0 تا t انتگرال‌گیری نماییم در این صورت خواهیم داشت:

$$(50)\quad \overset{\int_0^t}{\Rightarrow}\quad \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau}(e^{-\alpha\tau}\mathrm{q}_{(\tau)})\right)d\tau = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{bu}_{(\tau)}d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-\alpha t}\mathrm{q}_{(t)} = \mathrm{q}_{(0)} + \int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{bu}_{(\tau)}d\tau} \quad (51)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{\alpha t}$ خواهیم داشت:

$$(51)\quad \overset{\times e^{\alpha t}}{\Rightarrow}\quad \boxed{\mathrm{q}_{(t)} = \underbrace{e^{\alpha t}\mathrm{q}_{(0)}}_{\text{پاسخ ناشی از ارتعاش آزاد}} + \underbrace{e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{bu}_{(\tau)}d\tau}_{\text{پاسخ ناشی از تحریک ورودی}}} \quad (52)$$

EOM in state space form

معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

حال معادله (7) در حالت برداری در لحظه τ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}}_{(\tau)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(\tau)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}} \quad (53)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{-\mathbf{A}\tau}$ خواهیم داشت:

$$(53) \quad \overset{\times e^{-\mathbf{A}\tau}}{\Rightarrow} \quad \boxed{e^{-\mathbf{A}\tau}\dot{\mathbf{q}}_{(\tau)} - e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{A}\mathbf{q}_{(\tau)} = e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}} \quad (54)$$

سمت چپ رابطه (54) تعریف مشتق $e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{q}_{(\tau)}$ است. بنابراین:

$$(54) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{q}_{(\tau)}\right) = e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}} \quad (55)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

اگر از طرفین رابطه (55) از بازه 0 تا t انتگرال‌گیری نماییم در این صورت خواهیم داشت:

$$(55) \quad \overset{\int_0^t}{\Rightarrow} \quad \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau} (e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{q}_{(\tau)}) \right) d\tau = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{BU}_{(\tau)} d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{BU}_{(\tau)} d\tau} \quad (56)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{\mathbf{A}t}$ خواهیم داشت:

$$(56) \quad \overset{\times e^{\mathbf{A}t}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{BU}_{(\tau)} d\tau} \quad (57)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

از رابطه (35) می‌توان نتیجه گرفت:

$$(35):\quad \mathbf{T}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{\Psi}^{-1} \quad \overset{@time=(t-\tau)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{T}_{(t-\tau)} = e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)}\mathbf{\Psi}^{-1}} \qquad (58)$$

با جایگذاری روابط (35) و (58) در رابطه (57) خواهیم داشت:

$$(35)\,\&\,(58) \rightarrow (57) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}\,d\tau} \qquad (59)$$

شکل دیگر رابطه (59) براساس تعریف تابع تبدیل در رابطه (35) به صورت زیر است:

$$(35)\,\&\,(58) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t \mathbf{T}_{(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}\,d\tau} \qquad (60)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

مثال 7- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ سیستم مربوط را به روش محتوای زمانی در دو حالت زیر محاسبه نمایید: الف- $\mathrm{u}_{(t)}=1$ ب- $\mathrm{u}_{(t)}=20e^{-t}\sin(-10t)$

فرض می‌شود:

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\mathbf{q}_{(t)}+\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}\mathrm{u}_{(t)}$$

$$\mathbf{y}_{(t)}=\begin{Bmatrix}1 & 1\end{Bmatrix}\mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)}=\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- الف

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- الف

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \lambda$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- الف

$$\Rightarrow \boxed{e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{T}_{(t)} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{T}_{(t-\tau)} = \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- الف

$$\mathbf{q}_{(t)}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 2e^{-2t}-2e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ 2e^{-2(t-\tau)}-2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}(1)d\tau$$

$$\boxed{\mathbf{q}_{(t)}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2}+3e^{-t}-\dfrac{5}{2}e^{-2t}\\ 5e^{-2t}-3e^{-t}\end{Bmatrix}}$$

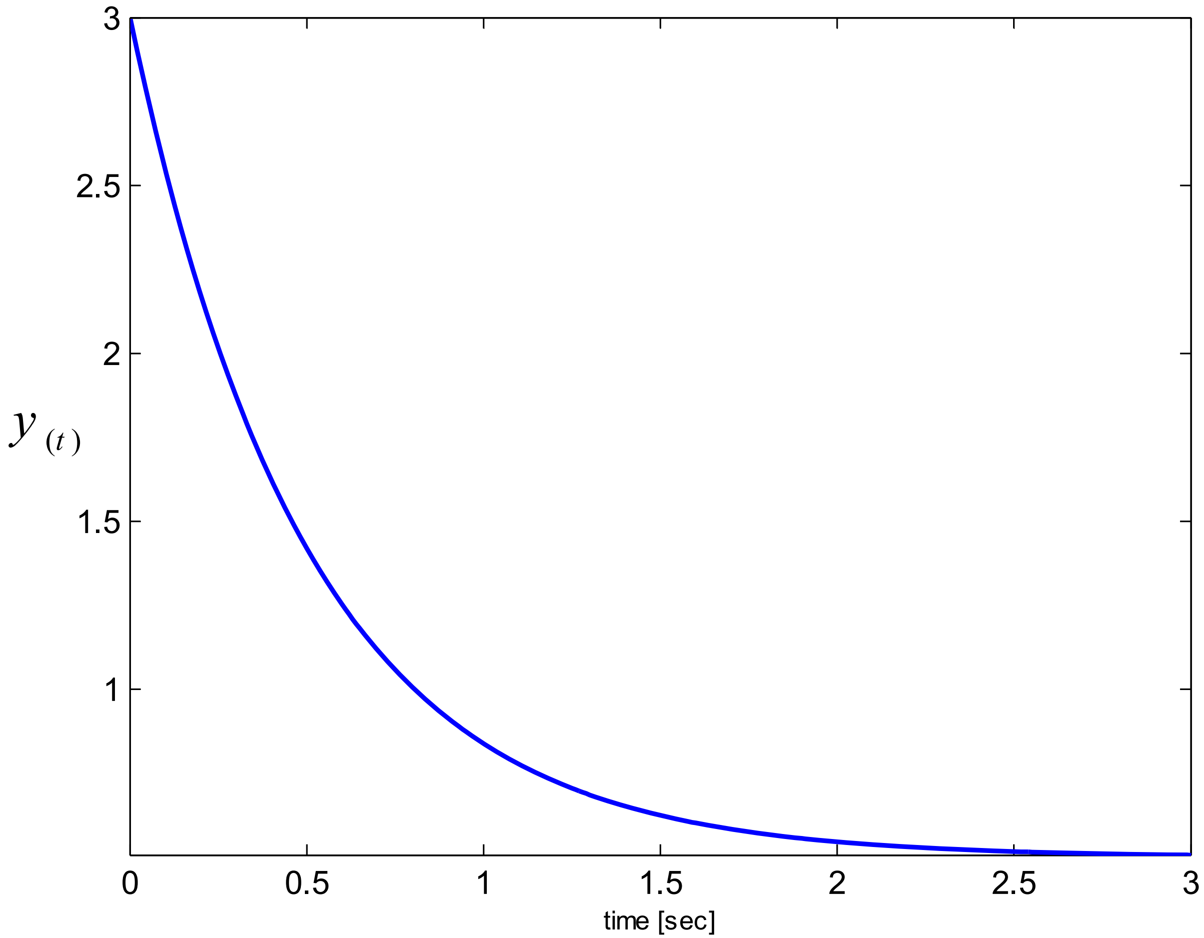
$$=\{1\quad 1\}\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2}+3e^{-t}-\dfrac{5}{2}e^{-2t}\\ 5e^{-2t}-3e^{-t}\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{\mathbf{y}_{(t)}=\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- الف



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $u_{(t)}=1$

Matlab Code (L01Example07a.m)

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- ب

$$(60)\quad \Rightarrow\quad \mathbf{q}_{(t)}=\mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)}+\int_0^t \mathbf{T}_{(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}d\tau \quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{q}_{(t)}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 2e^{-2t}-2e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ 2e^{-2(t-\tau)}-2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}(20e^{-t}\sin(-10t))d\tau$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)}=\begin{Bmatrix}2e^{-t}-\dfrac{103}{101}e^{-2t}+\dfrac{2}{101}e^{-t}\cos(10t)+\dfrac{20}{101}e^{-t}\sin(10t)\\ \dfrac{206}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\dfrac{198}{101}e^{-t}\cos(10t)-\dfrac{40}{101}e^{-t}\sin(10t)\end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- ب

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} = \{1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 2e^{-t} - \dfrac{103}{101}e^{-2t} + \dfrac{2}{101}e^{-t}\cos(10t) + \dfrac{20}{101}e^{-t}\sin(10t) \\ \dfrac{206}{101}e^{-2t} - 2e^{-t} + \dfrac{198}{101}e^{-t}\cos(10t) - \dfrac{40}{101}e^{-t}\sin(10t) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{y}_{(t)} = \frac{103}{101}e^{-2t} + \frac{200}{101}e^{-t}\cos(10t) - \frac{20}{101}e^{-t}\sin(10t)}$$

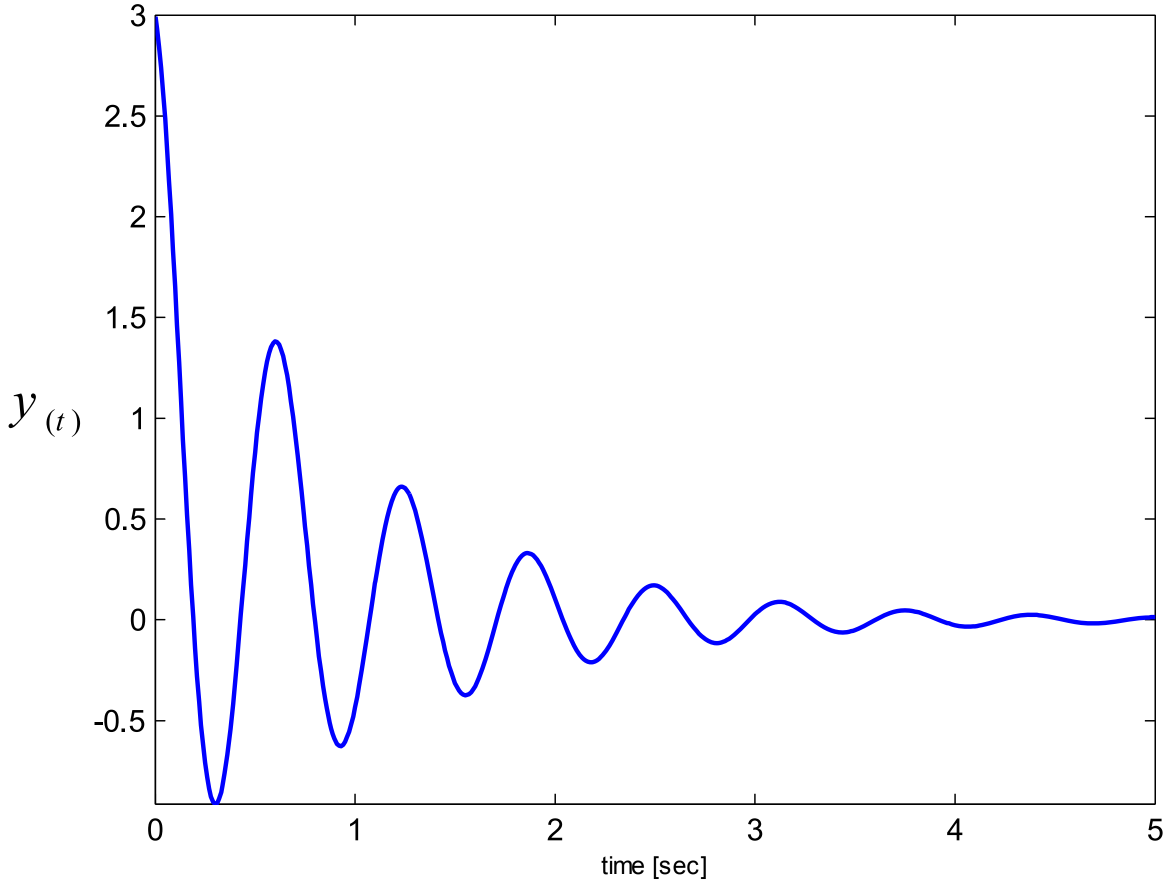
EOM in state space form

□ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 7- ب



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $u_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$

Matlab Code (L01Example07b.m)

EOM in state space form

□ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

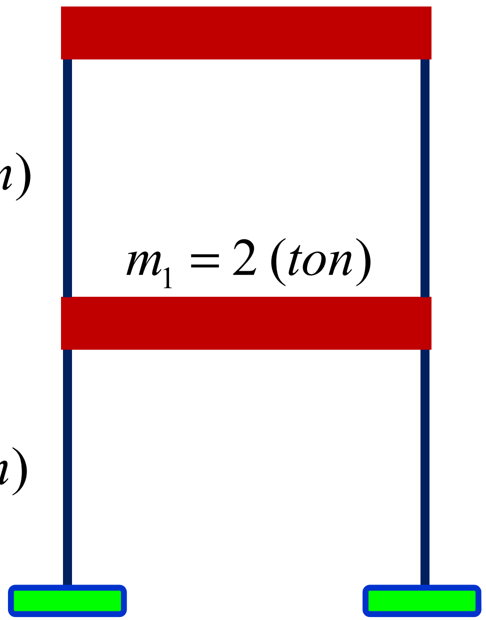
مثال 8- پاسخ سازه نشان داده شده تحت اثر تحریک پایه $u_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$ را به دست آورید.

$m_2 = 1.5\ (ton)$

$k_2 = 1200\ (kN/m)$

$m_1 = 2\ (ton)$

$k_1 = 1800\ (kN/m)$



$\xi = 0.05$

$$\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.015 \end{Bmatrix} \quad (m) \qquad \{\dot{x}_0\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{Bmatrix} \quad (m/s)$$

Matlab Code (L01Example08.m)

EOM in state space form

معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 8-

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\times 10^{3}(kg)\quad ,\quad \mathbf{k}=\begin{bmatrix}3 & -1.2\\ -1.2 & 1.2\end{bmatrix}\times 10^{6}\ (N/m)$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}7.4294 & -1.8981\\ -1.8981 & 3.9113\end{bmatrix}\times 10^{3}\ (N.\sec/m)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1500 & 600 & -3.7147 & 0.94903\\ 800 & -800 & 1.2654 & -2.6075\end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{B}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ -1\end{Bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{D}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_{(0)}=\begin{Bmatrix}0.01\\ 0.015\\ 0.02\\ 0.04\end{Bmatrix}$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 8-

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 0.0016038 + 0.032036i & 0.0016038 - 0.032036i & -0.0013778 - 0.027522i & -0.0013778 + 0.027522i \\ -0.0011392 - 0.022756i & -0.0011392 + 0.022756i & -0.0025862 - 0.051659i & -0.0025862 + 0.051659i \\ -1.4078 -6.7489e-017i & -1.4078 +6.7489e-017i & 0.53276 +2.3618e-017i & 0.53276 -2.3618e-017i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}^{-1} = \begin{bmatrix} -4.5223e-016 - 11.323i & 1.3288e-016 + 6.0322i & -0.25766 - 0.012899i & 0.13727 + 0.0068722i \\ -4.5169e-016 + 11.323i & 1.2292e-016 - 6.0322i & -0.25766 + 0.012899i & 0.13727 - 0.0068722i \\ 4.5655e-016 + 4.9878i & -1.2235e-016 + 7.0216i & 0.25766 + 0.012899i & 0.36273 + 0.018159i \\ 4.5243e-016 - 4.9878i & -1.2631e-016 - 7.0216i & 0.25766 - 0.012899i & 0.36273 - 0.018159i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\lambda} = \begin{bmatrix} -2.1944 + 43.834i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.1944 - 43.834i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.96668 + 19.309i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.96668 - 19.309i \end{bmatrix}$$

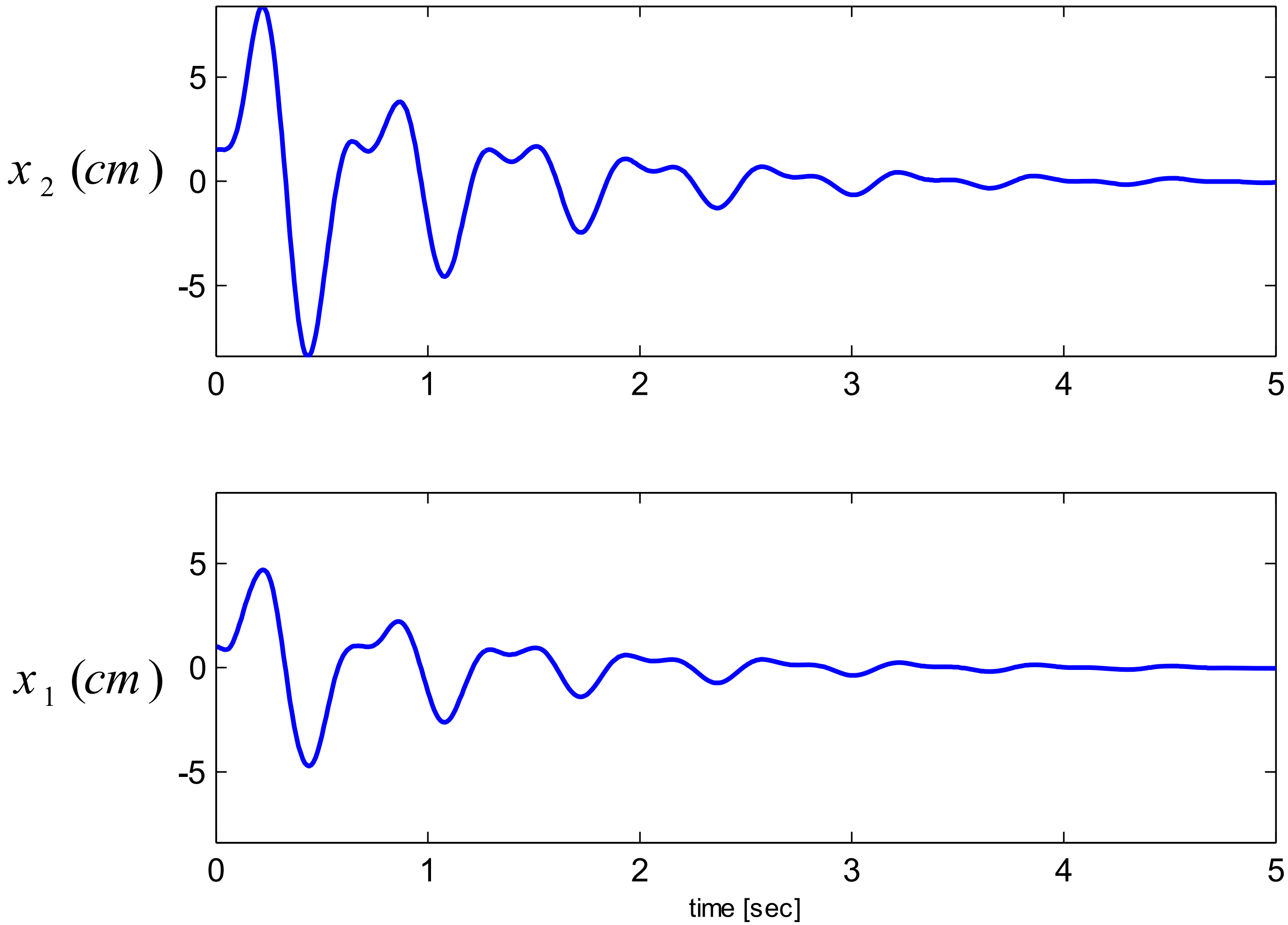
$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2.1944 + 43.834i & -2.4425e-015 +3.5527e-015i & 1.5506e-016 +1.8031e-015i & 5.1107e-016 -5.3558e-015i \\ -2.4425e-015 -3.5527e-015i & -2.1944 - 43.834i & 4.0005e-016 +3.5794e-015i & 4.4038e-017 -2.6708e-017i \\ -1.6912e-015 +2.2541e-015i & 1.4692e-015 -2.2541e-015i & -0.96668 + 19.309i & 4.0523e-015 +8.8818e-015i \\ 1.1361e-015 +3.5863e-015i & -1.3582e-015 -3.5863e-015i & 4.1633e-015 -1.4211e-014i & -0.96668 - 19.309i \end{bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال 8-



پاسخ ارتعاش آزاد سازه دو طبقه با میرایی تحت اثر تحریک پایه

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

معادله (7) در حالت اسکالر در لحظه t در زیر آمده است:

$$\boxed{\dot{q}_{(t)} = \alpha q_{(t)} + b u_{(t)}} \quad (61)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر طرفین رابطه (61) خواهیم داشت:

$$(61) \quad \overset{L}{\Rightarrow} \quad \boxed{L(\dot{q}_{(t)}) = L(\alpha q_{(t)}) + L(b u_{(t)})} \quad (62)$$

با حل رابطه (62) خواهیم داشت:

$$(62) \quad \Rightarrow \quad s\,Q_{(s)} - q_{(0)} = \alpha Q_{(s)} + bU_{(s)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{(s)} = \frac{q_{(0)}}{s-\alpha} + \frac{bU_{(s)}}{s-\alpha}} \quad (63)$$

اگر از رابطه (63) معکوس لاپلاس گرفته شود، مقدار $q_{(t)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(63) \quad \overset{L^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{q_{(t)} = L^{-1}\left(\frac{q_{(0)}}{s-\alpha}\right) + L^{-1}\left(\frac{bU_{(s)}}{s-\alpha}\right)} \quad (64)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

با اعمال تبدیل لاپلاس بر طرفین رابطه (7) خواهیم داشت:

$$(7):\quad \dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)} \quad \overset{L}{\Rightarrow} \quad \boxed{L(\dot{\mathbf{q}}_{(t)}) = L(\mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)}) + L(\mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)})} \quad (65)$$

با حل رابطه (65) خواهیم داشت:

$$(65) \quad \Rightarrow \quad s\,\mathbf{Q}_{(s)} - \mathbf{q}_{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{(s)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q}_{(s)} = \mathbf{q}_{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}} \quad (66)$$

طرفین رابطه (66) را در $(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$(66) \quad \overset{(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{Q}_{(s)} = (s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}_{(0)} + (s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}} \quad (67)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

با اعمال معکوس تبدیل لاپلاس بر طرفین رابطه (67) خواهیم داشت:

$$(67)\quad \overset{L^{-1}}{\Rightarrow}\quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right)\mathbf{q}_{(0)} + L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)} \quad (68)$$

با جایگذاری رابطه (46) در رابطه (68) نتیجه می‌شود:

$$(46)\rightarrow(68)\quad \Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} + L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)} \quad (69)$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

مثال 9- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ سیستم مربوطه را به روش محتوای فرکانسی در دو حالت زیر محاسبه نمایید: الف- $\mathrm{u}_{(t)} = 1$ ب- $\mathrm{u}_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$

فرض می‌شود:

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{q}_{(t)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathrm{u}_{(t)}$$

$$\mathbf{y}_{(t)} = \{1 \quad 1\} \mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Matlab Code (L01Example09.m)

معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-الف

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C}=\{1 \quad 1\} \quad , \quad \mathbf{B}=\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{D}=0$$

$$=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}}$$

$$=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}}$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-الف

برای آنکه بتوان به راحتی معکوس لاپلاس ماتریس $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ را محاسبه نمود درایه‌های آن را به صورت $\dfrac{\beta}{s-\alpha}$ می‌نویسیم. برای این منظور خواهیم داشت:

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

	α	b	$c=b-\alpha$	$d=2\alpha-b$
1	0	1	1	-1
-2	0	-2	-2	2
s	1	0	-1	2

$$\Rightarrow (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-الف

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} \\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{T}_{(t)} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} \\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{1}{s}\right) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{s(s+1)}-\dfrac{1}{s(s+2)} \\ -\dfrac{1}{s(s+1)}+\dfrac{2}{s(s+2)} \end{Bmatrix}$$

EOM in state space form

□ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-الف

$$\Rightarrow \boxed{(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2s}-\dfrac{1}{(s+1)}+\dfrac{1}{2(s+2)}\\ \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\end{Bmatrix}}$$

$$=L^{-1}\left(\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2s}-\dfrac{1}{(s+1)}+\dfrac{1}{2(s+2)}\\ \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\end{Bmatrix}\right)\Rightarrow \boxed{L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2}-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-الف

$$\boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 3e^{-t} - \dfrac{5}{2}e^{-2t} + \dfrac{1}{2} \\ -3e^{-t} + 5e^{-2t} \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{\mathbf{y}_{(t)} = \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}}$$

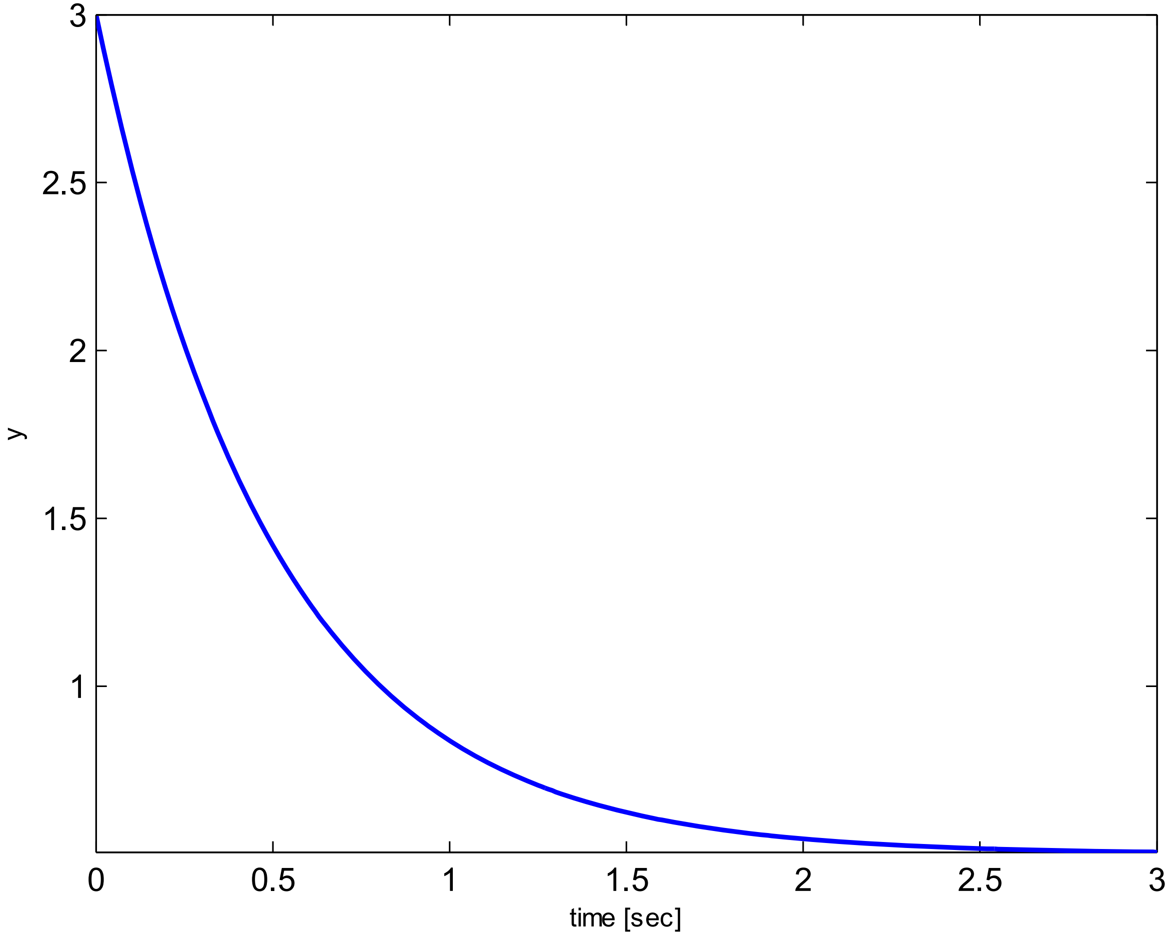
EOM in state space form

معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-الف



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $u_{(t)} = 1$

Matlab Code (L01Example09a.m)

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-ب

$$(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}=\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\left(-\frac{200}{(s+1)^2+100}\right)$$

$$\Rightarrow\quad (s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}=\begin{Bmatrix} -\dfrac{200}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)} \\ -\dfrac{200s}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)} \end{Bmatrix}$$

EOM in state space form

□ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-ب

$$L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)=L^{-1}\left(\begin{Bmatrix}-\dfrac{200}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)}\\ -\dfrac{200s}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)}\end{Bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)=\begin{Bmatrix}\dfrac{200}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\dfrac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)+10\sin(10t)\right)\\ -\dfrac{400}{101}e^{-2t}+2e^{-t}+\dfrac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)-\dfrac{20}{99}\sin(10t)\right)\end{Bmatrix}}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-ب

$$(69)\quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} + L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{200}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\frac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)+10\sin(10t)\right) \\ -\frac{400}{101}e^{-2t}+2e^{-t}+\frac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)-\frac{20}{99}\sin(10t)\right) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} -\frac{103}{101}e^{-2t}+2e^{-t}+\frac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)+10\sin(10t)\right) \\ \frac{206}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\frac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)-\frac{20}{99}\sin(10t)\right) \end{Bmatrix}}$$

معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-ب

$$(9)\quad \Rightarrow\quad \mathbf{y}_{(t)}=\mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)}=\{1\quad 1\}\begin{Bmatrix} -\dfrac{103}{101}e^{-2t}+2e^{-t}+\dfrac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)+10\sin(10t)\right) \\ \dfrac{206}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\dfrac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)-\dfrac{20}{99}\sin(10t)\right) \end{Bmatrix}$$

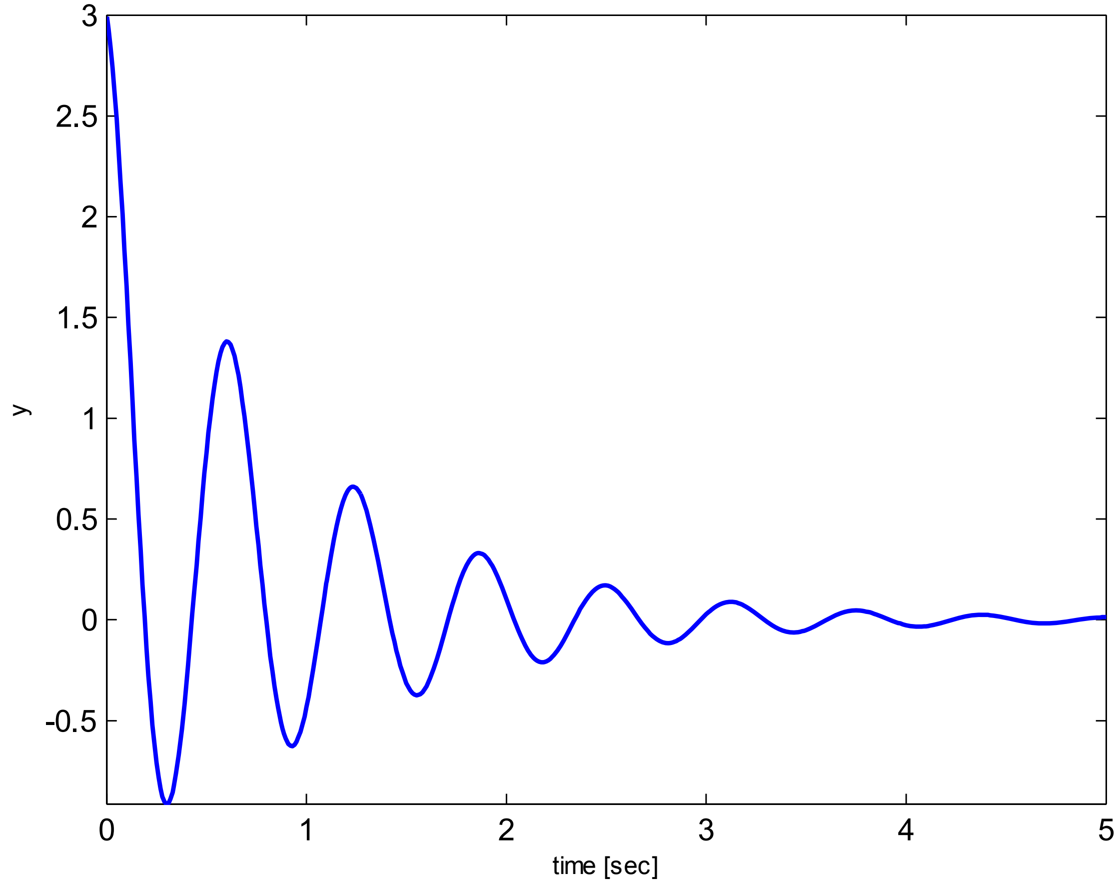
$$\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{y}_{(t)}=\frac{103}{101}e^{-2t}+\frac{200}{101}e^{-t}\cos(10t)-\frac{20}{101}e^{-t}\sin(10t)}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال 9-ب



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $u_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$

Matlab Code (L01Example09b.m)

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- در MATLAB

دستور lsim در MATLAB تاریخچه زمانی پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی را تحت اثر ورودی دلخواه شبیه سازه می‌کند. خروجی این دستور همان y یا بردار خروجی سیستم است.

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)}$$

$$\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)}$$

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$
$$\mathbf{y}_{(t)} = \text{lsim}(\text{sys}, \mathbf{U}_{(t)}, t, \mathbf{q}_{(0)})$$