



دانشگاه کردستان  
University of Kurdistan  
زانکۆی کوردستان

# Structural Control

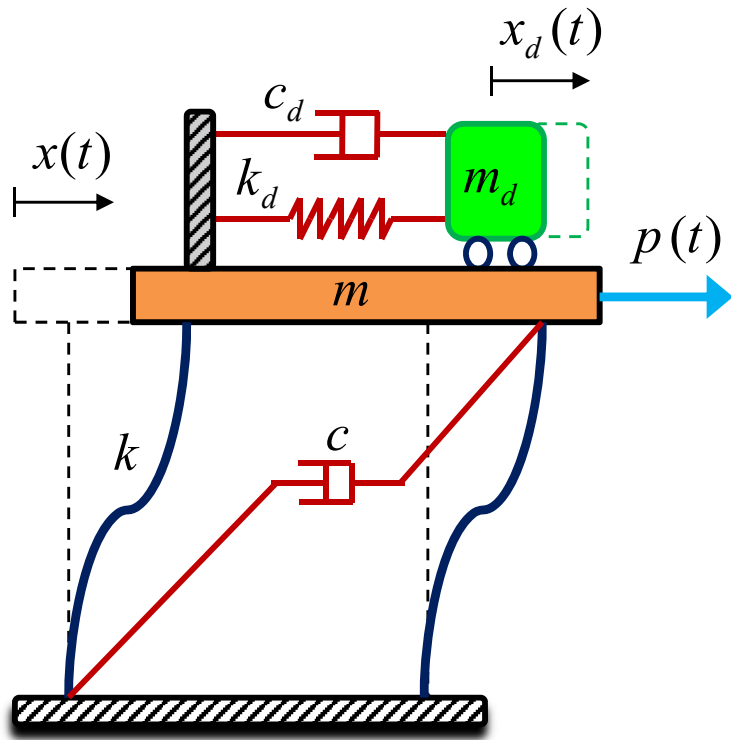
## Tuned Mass Damper (TMD) Systems

By: Kaveh Karami

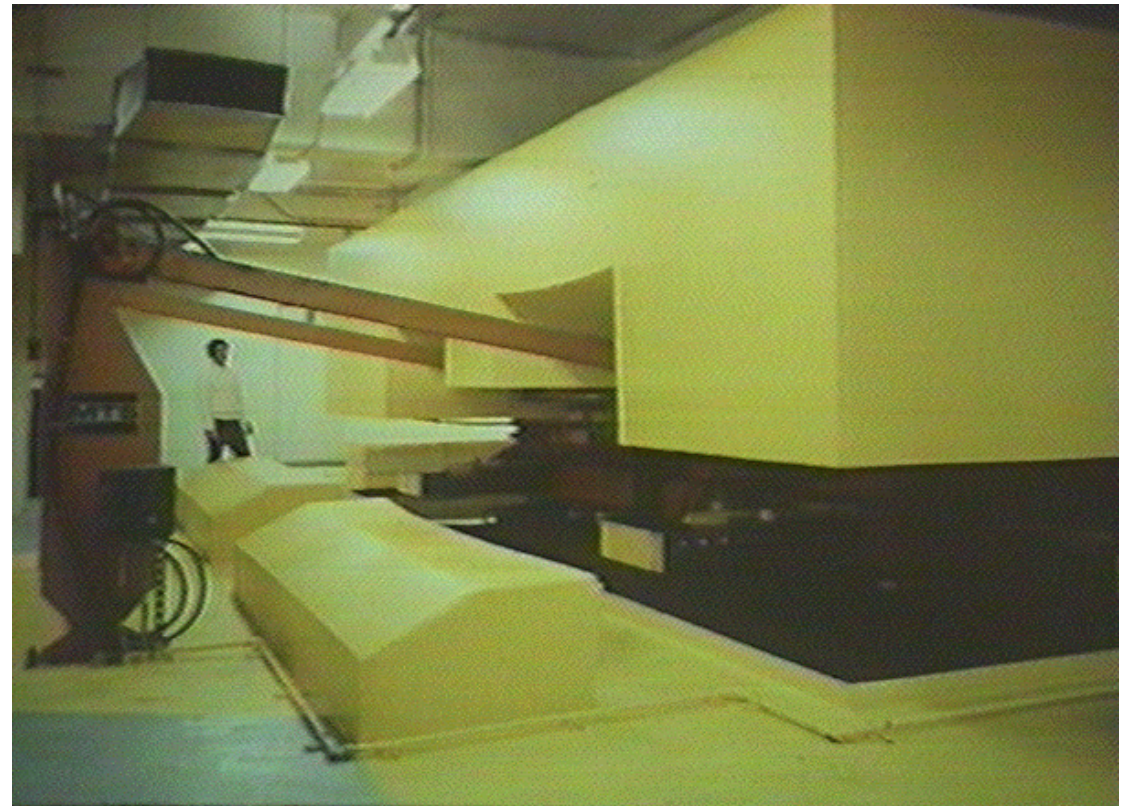
Associate Prof. of Structural Engineering

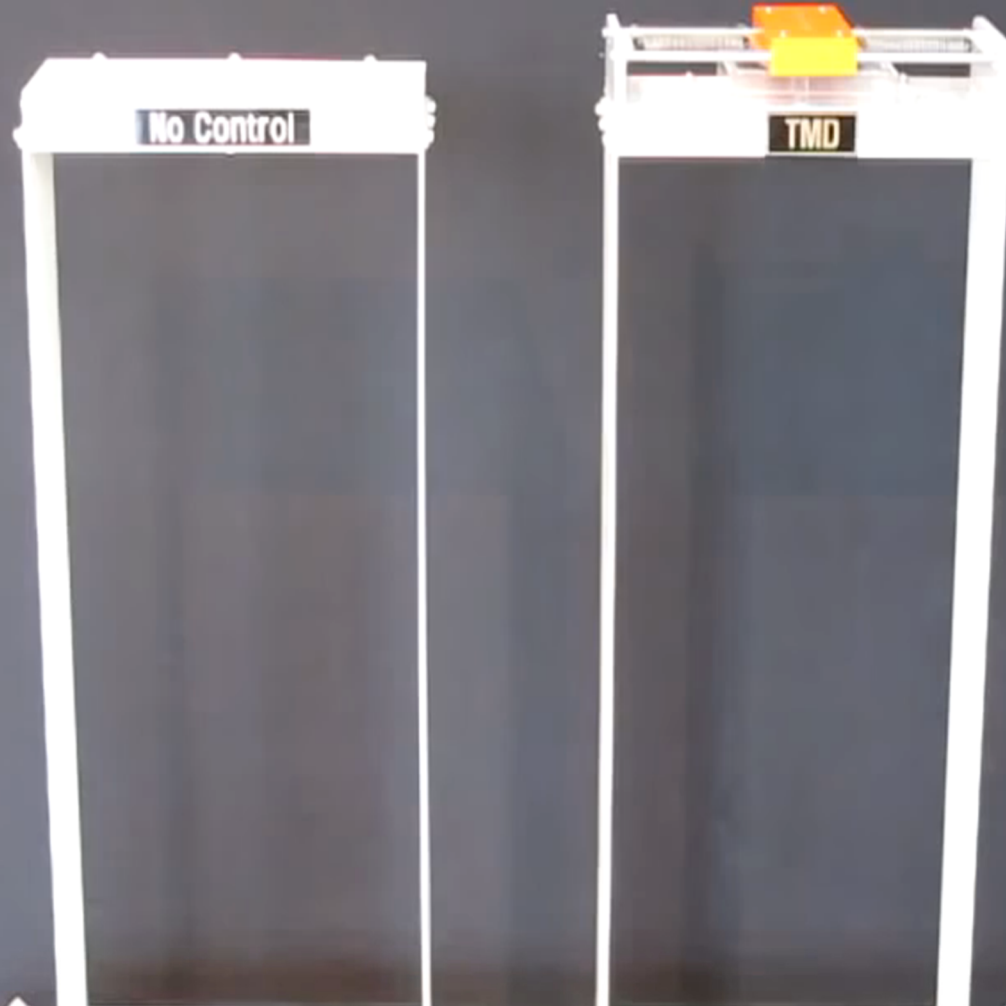
<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

میراگر جرمی تنظیم شونده (TMD): شامل یک جرم (معمولا کمتر از یک درصد وزن کل سازه) است که توسط یک فنر و یک میراگر به منظور کاهش ارتعاش سازه به آن متصل می‌شود. برای این منظور لازم است که فرکانس TMD، با فرکانس اصلی سازه تقریبا یکسان در نظر گرفته شود. در این صورت پدیده تشدید (همگامی) با اختلاف فاز بین سازه و TMD اتفاق می‌افتد. معمولا در حالت تشدید (بدترین حالت) پارامترهای TMD را طراحی می‌کنیم که بحرانی‌ترین سناریو را هم دیده باشیم.



سازه دارای TMD







first natural vibration period of 6.8 seconds.

Total height to 508m.

Total weight: 95,000 tones



## TAIPEI FINANCIAL CENTER



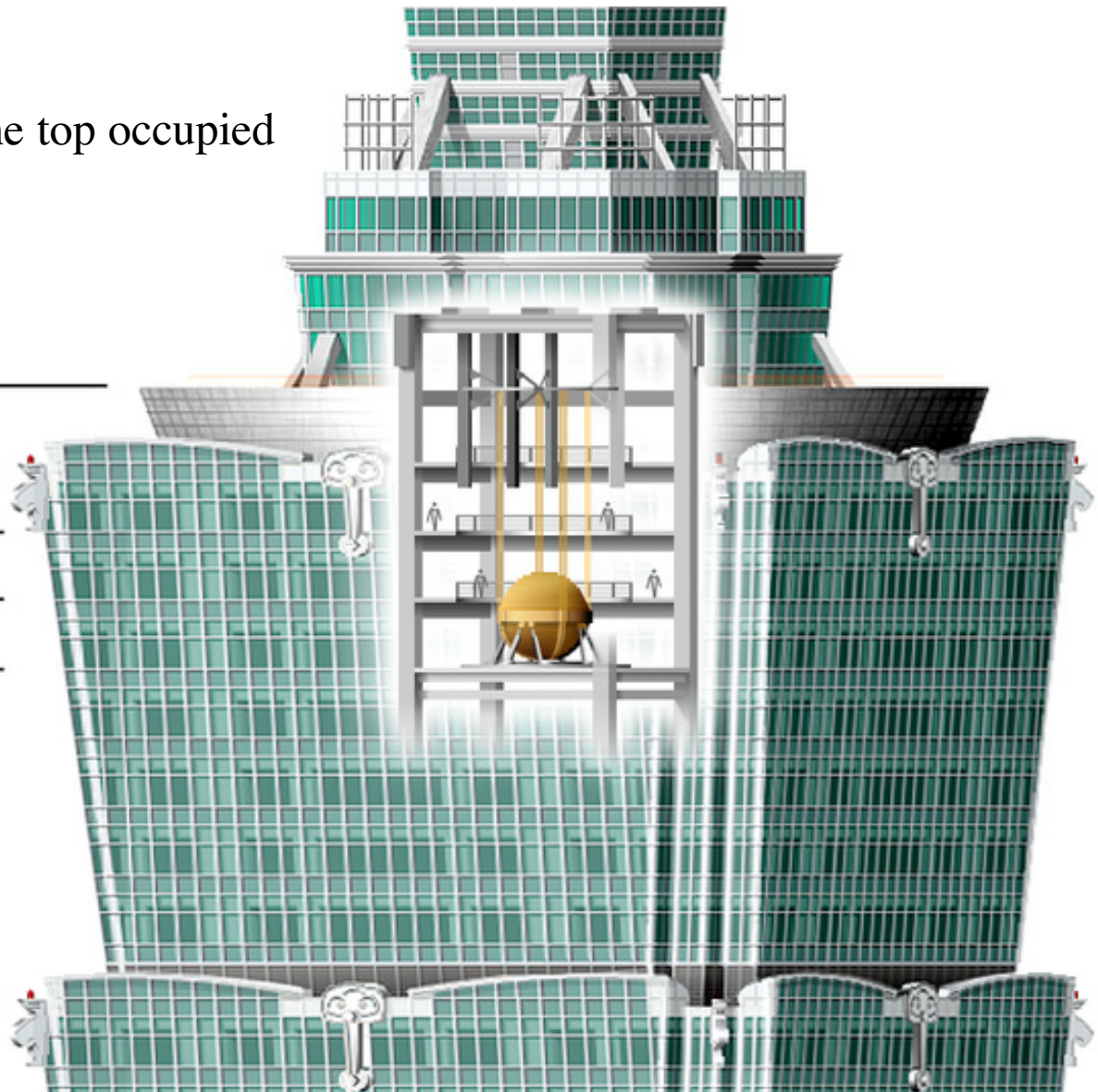
- A pendulum that spans 5 floors.
- 660 tonne steel ball
- Reduce the peak acceleration of the top occupied floor from 0.079g to 0.05g.

**91st Floor** [390.60 m]  
(Outdoor Observation Deck)

**89th Floor** [382.20 m]  
(Indoor Observation Deck)

**88th Floor**

**87th Floor**



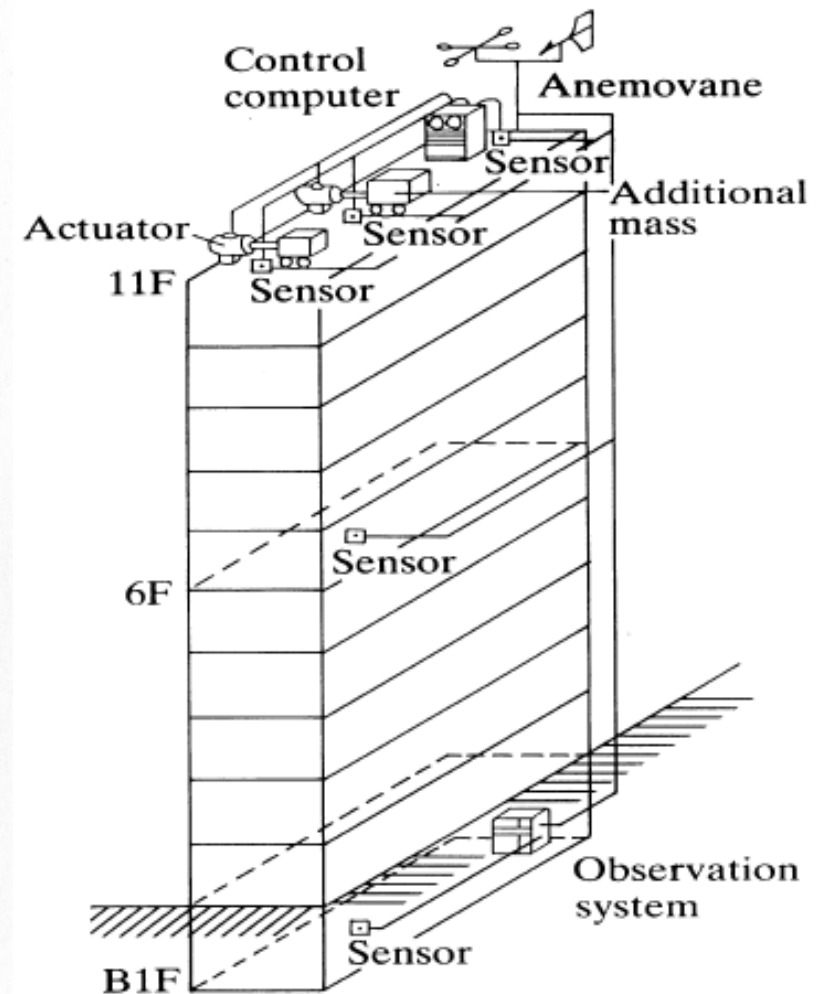
## TAIPEI FINANCIAL CENTER

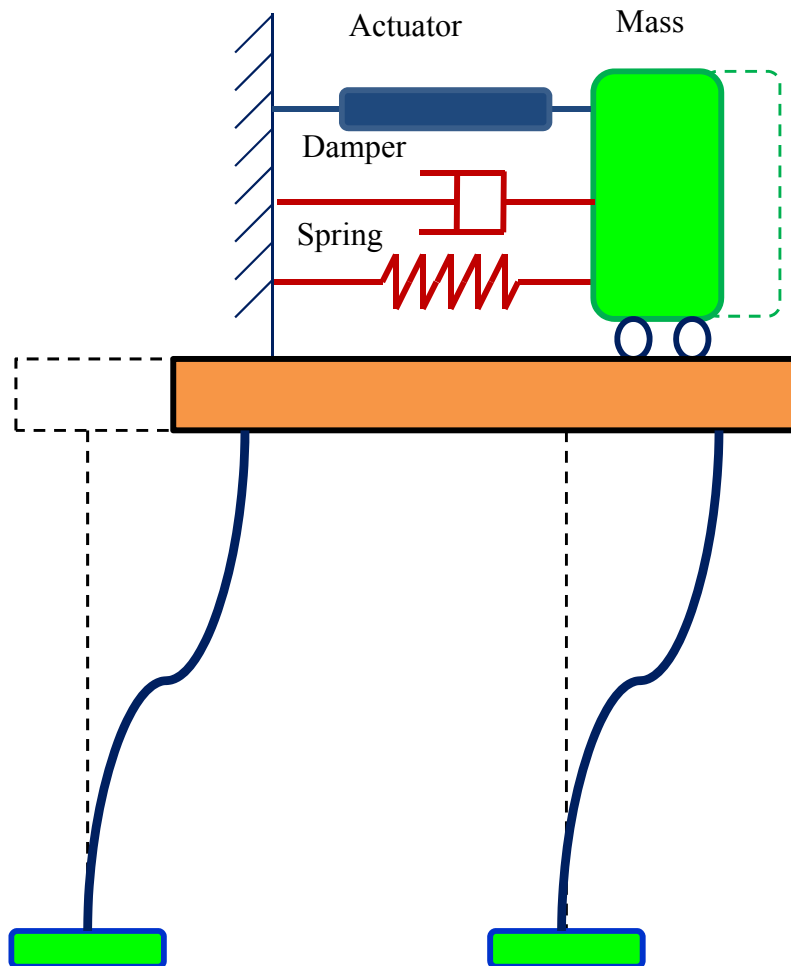


در سازه‌هایی که مد پیچشی حاکم است کاربرد TMD به تنهایی مفید نیست. در این حالت استفاده از حداقل دو عدد TMD عمود برهم موثر بوده و باعث خنثی شدن عملکرد پیچشی سازه می‌گردد.

## Kyobashi Center Building

- 11-story.
- Consists of two AMDs 4 and 1 tons





Active TMD system

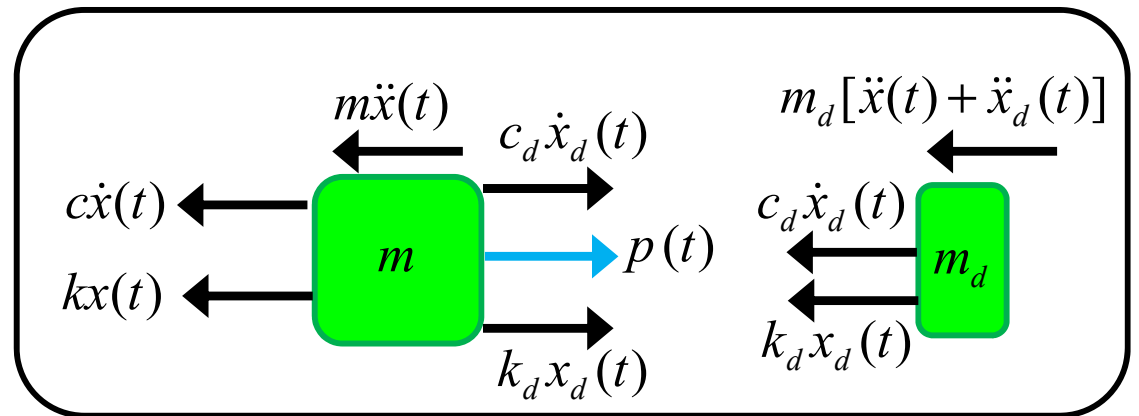
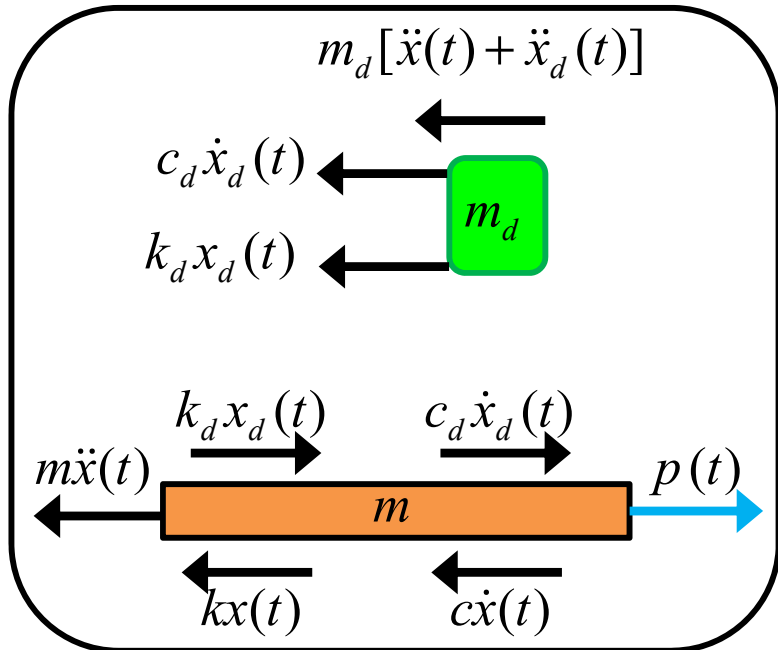
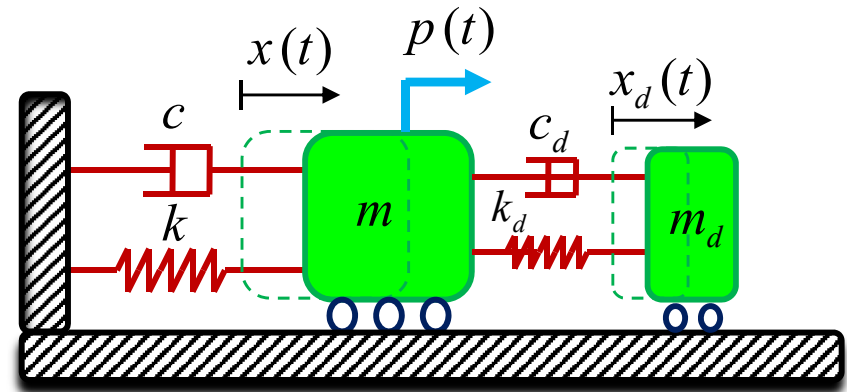
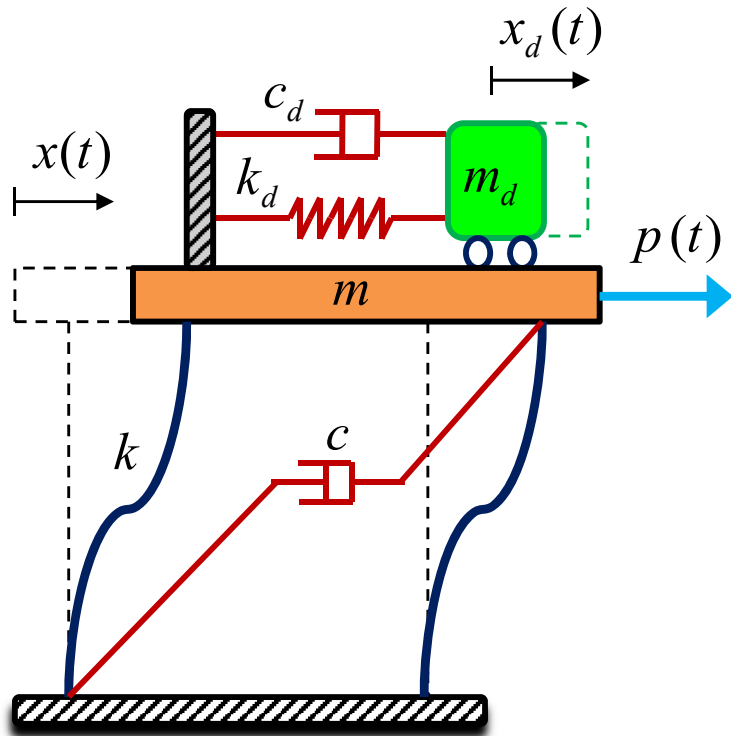
در حرکات رفت و برگشتی، TMD یک اختلاف فاز (به طور مثال  $\pi/2$ ) با حرکت سازه دارد. اگر سازه به سمت راست حرکت کند TMD به سمت چپ و بالعکس. اگر توسط یک مولد نیرو به TMD نیروی کنترل وارد شود در این حالت کنترل فعال خواهیم داشت.

اغلب مطالعه‌های اولیه انجام شده بر اساس حرکت هارمونیکی Base صورت گرفته است. اما در ژاپن به دو صورت غیرفعال و فعال TMD مورد استفاده قرار گرفته و نتایج به دست آمده حاکی از آن است که این سیستم برای بار زلزله نیز مفید واقع شده است.

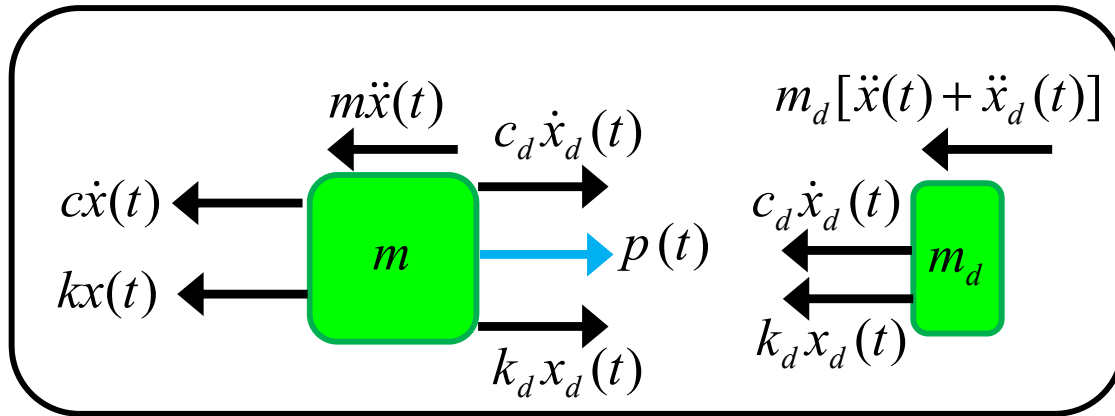
در یک دهه اخیر نیز مطالعات فراوانی بر روی TMDهای نیمه‌فعال انجام شده و عملکرد مناسب آنها تحت اثر تحریکات محیطی شدید نظیر زلزله و باد قوی بررسی شده است.

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

مجموعه سازه و TMD شامل دو درجه آزادی ( $x$  و  $x_d$ ) است. با در نظر گرفتن دیاگرام جسم آزاد می‌توان معادله دیفرانسیل حرکت این مجموعه را به دست آورد:



$x_d(t)$ : جابجایی TMD نسبت به سازه



معادله دیفرانسیل حرکت:

معادله دیفرانسیل حرکت سازه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) - c_d\dot{x}_d(t) - k_d x_d(t) = p(t) \quad (1)$$

معادله دیفرانسیل حرکت TMD نیز برابر است با:

$$m_d[\ddot{x}(t) + \ddot{x}_d(t)] + c_d\dot{x}_d(t) + k_d x_d(t) = 0 \quad (2)$$

از معادله (2) می‌توان نتیجه گرفت:

$$(2) \Rightarrow -c_d\dot{x}_d(t) - k_d x_d(t) = m_d[\ddot{x}(t) + \ddot{x}_d(t)] \quad (3)$$

با جاگذاری رابطه (3) در معادله (1) خواهیم داشت:

$$(3) \rightarrow (1) \Rightarrow (m + m_d)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) - m_d\ddot{x}_d(t) \quad (4)$$

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

با تقسیم طرفین رابطه (2) و (4) به ترتیب بر جرم میراگر و جرم سازه:

$$(2) \xrightarrow{\div m_d} \ddot{x}_d(t) + 2\xi_d \omega_d \dot{x}_d(t) + \omega_d^2 x_d(t) = -\ddot{x}(t) \quad (5)$$

$$(4) \xrightarrow{\div m} (1 + \bar{m})\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{p(t)}{m} - \bar{m}\ddot{x}_d(t) \quad (6)$$

که در آن

$$\xi_d = \frac{c_d}{2m_d\omega_d} \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k_d}{m_d}}, \quad \bar{m} = \frac{m_d}{m} \quad (7)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

روابط (5) و (6) معادلات دیفرانسیل حرکت سازه و TMD هستند که هم‌بسته می‌باشند. برای طراحی TMD لازم است که مشخصات مکانیکی میراگر شامل  $m_d$ ،  $c_d$  و  $k_d$  مشخص شوند. از این رو لازم است سه فرض یا رابطه مشخص گردد تا بتوان سه مقدار فوق را تعیین کرد.

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

فرض کنید:

$$\omega = \omega_d \quad (8)$$

در این حالت در اصطلاح گفته می‌شود سیستم TMD با فرکانس اصلی سازه تنظیم شده است.

$$(7), (8) \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{k_d}{m_d} \quad \bar{m} = \frac{m_d}{m} \Rightarrow k_d = \bar{m}k \quad (9)$$

با در نظر گرفتن نیروی خارجی به صورت هارمونیک از نوع سینوسی:

$$p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (10)$$

بحرانی‌ترین سناریو بارگذاری حالت تشدید  $\bar{\omega} = \omega$  است. در این حالت پاسخ دائم سازه و TMD به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \sin(\bar{\omega}t + \theta_1) \\ x_d(t) &= \rho_d \sin(\bar{\omega}t + \theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (11)$$

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

در حالت بحرانی تشدید که  $\omega = \bar{\omega}$  است مقادیر دامنه ارتعاش و اختلاف فاز سازه و TMD به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho = \frac{p_0}{k\bar{m}} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\xi}{\bar{m}} + \frac{1}{2\xi_d}\right)^2}} \quad (12)$$

$$\rho_d = \frac{1}{2\xi_d} \rho \quad (13)$$

$$\tan(\theta_1) = -\left(\frac{2\xi}{\bar{m}} + \frac{1}{2\xi_d}\right) \quad (14)$$

$$\tan(\theta_2) = -\frac{\pi}{2} \quad (15)$$

رابطه (15) نشان می‌دهد که جابجایی TMD با اختلاف فازی معادل  $\pi/2$  نسبت به جابجایی سازه انجام می‌گیرد. این اختلاف فاز باعث استهلاک انرژی گردیده و جواب سازه را بهبود می‌بخشد.

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

مقایسه سازه کنترل شده (مجهز به TMD) با سازه کنترل نشده (بدون TMD)

دامنه ارتعاش و اختلاف فاز پاسخ سازه در حالت کنترل نشده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{uncontrol case: } \xi_d = 0, \bar{m} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{(12)}{\Rightarrow} \rho_{uncon} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \\ \stackrel{(14)}{\Rightarrow} \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (16)$$

$$(12) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_e = \frac{\bar{m}}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{2\xi}{\bar{m}} + \frac{1}{2\xi_d} \right)^2} \\ \rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi_e} \end{array} \right. \quad (17)$$

برای مقایسه حالت کنترل شده با کنترل نشده رابطه (12) بر حسب ضریب میرایی معادل بازنویسی می‌گردد:

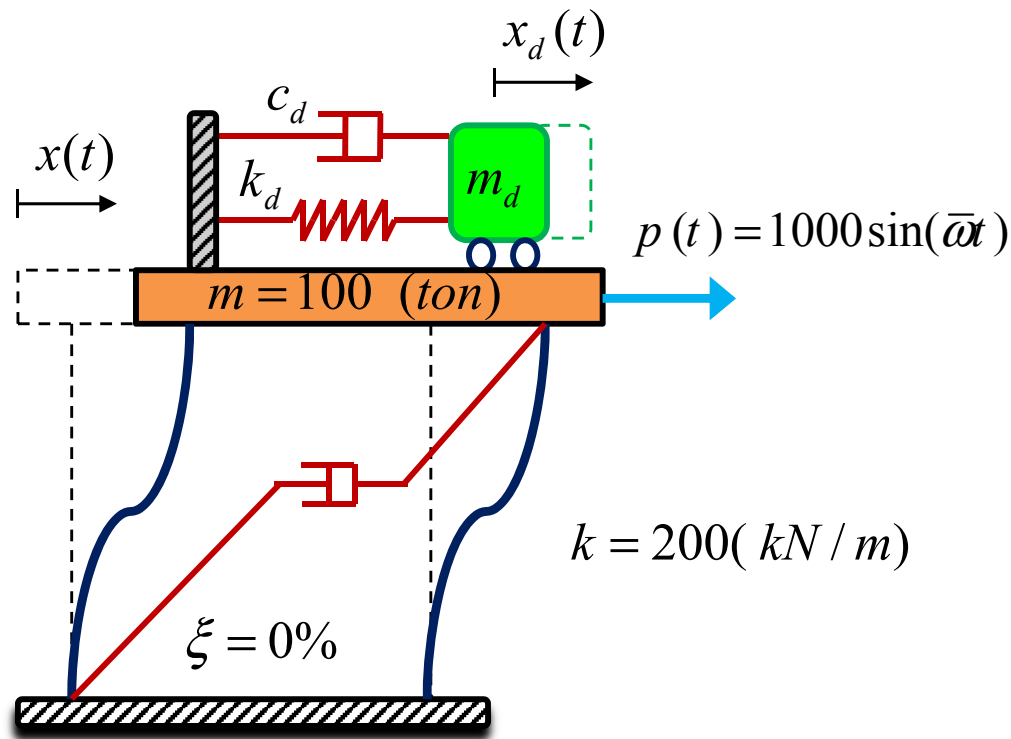
$\xi_e$ : ضریب میرایی معادل

$$m_d \uparrow \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \bar{m} \uparrow \stackrel{(17)}{\Rightarrow} \xi_e \uparrow \stackrel{(17)}{\Rightarrow} \rho \downarrow \Rightarrow O.K. \quad \text{در نتیجه افزایش ضریب میرایی معادل خوب است.}$$

$$\xi_d \downarrow \stackrel{(17)}{\Rightarrow} \xi_e \uparrow \stackrel{(17)}{\Rightarrow} \rho \downarrow \stackrel{(13)}{\Rightarrow} \frac{\rho_d}{\rho} \uparrow \Rightarrow O.K.$$

همچنین

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF



مثال 1- شکل مقابل یک سیستم SDOF مجهز به TMD را نشان می‌دهد. مطلوب است طراحی TMD مورد نظر در حالت زیر:

$$\xi_e = 10.05\%$$

$$\frac{\rho_d}{\rho} = 10$$

Matlab Code (L05Example01.m)

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

پاسخ مثال 1-

$$\bar{\omega} = \omega = 1.4142$$

$$\xi_d = 0.05$$

$$\bar{m} = 0.02$$

$$m_d = 2 \text{ (ton)}$$

$$k_d = 4 \text{ (kN / m)}$$

## □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

پاسخ مثال 1-

$$\rho = 2.4876 \text{ (cm)}$$

$$\rho_d = 24.876 \text{ (cm)}$$

$$\theta_1 = -1.4711^{\text{rad}}$$

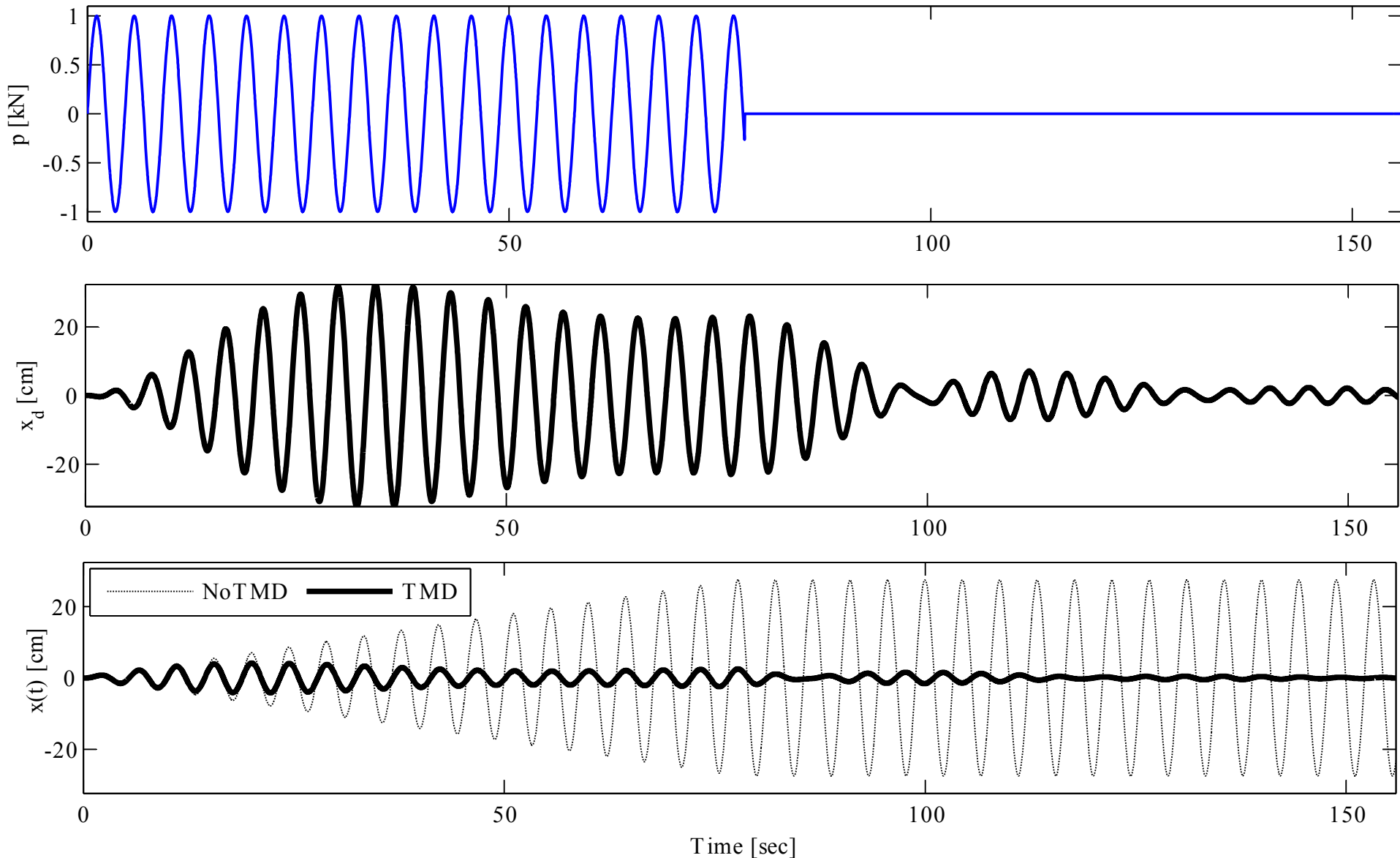
$$\theta_2 = -1.0039^{\text{rad}}$$

$$x(t) = 2.4876 \times 10^{-2} \sin(1.4142t - 1.4711)$$

$$x_d(t) = 24.876 \times 10^{-2} \sin(1.4142t - 2.475)$$

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF

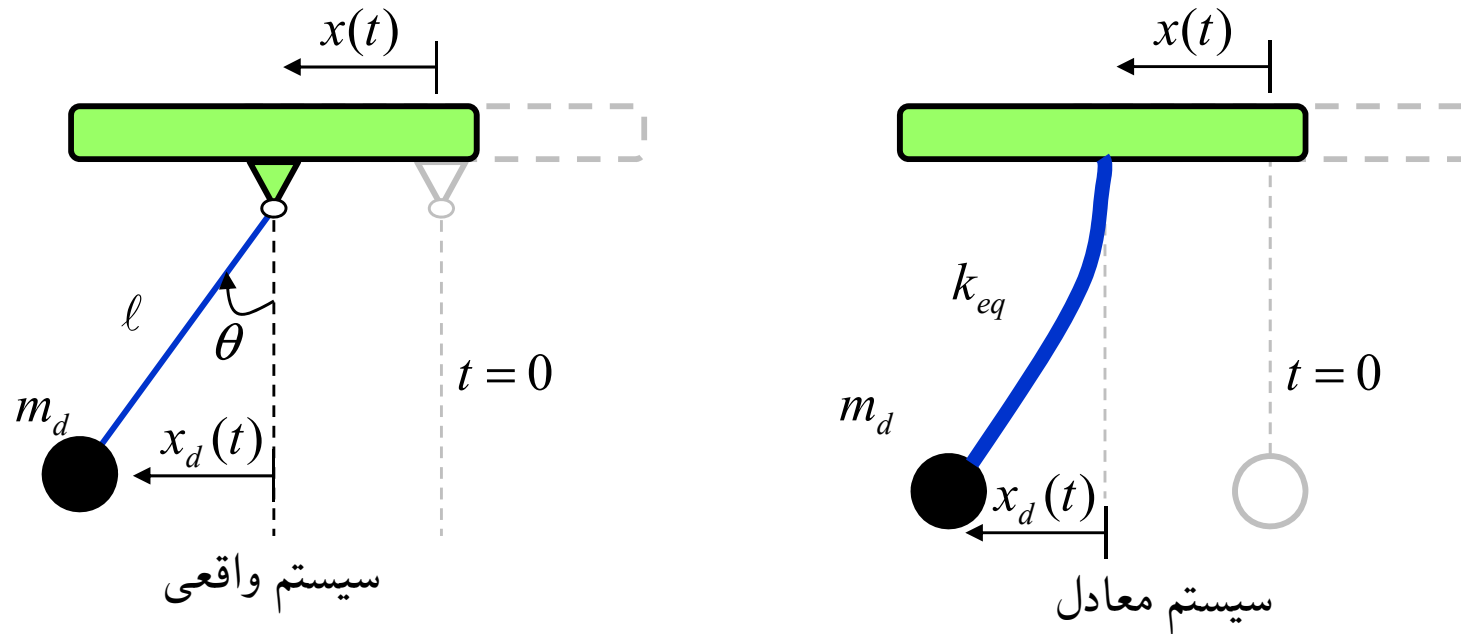
پاسخ مثال 1-



نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم SDOF در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر بار هارمونیک در حالت تشدید.

# □ میراگر جرمی تنظیم شونده آونگی Pendulum TMD

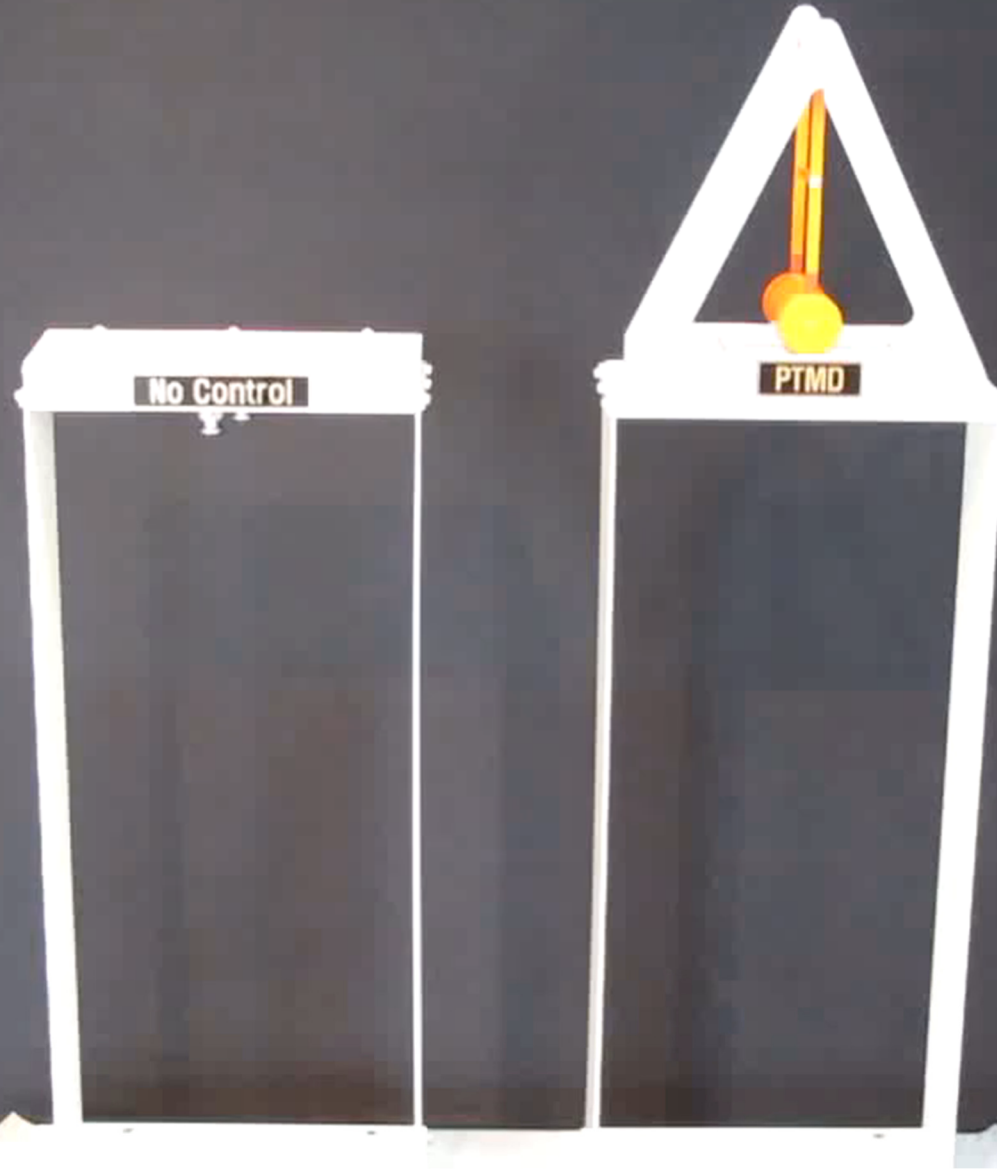
می‌توان با آویزان کردن یک آونگ از سقف یک قاب مطابق شکل زیر، یک TMD آونگی به وجود آورد.



یک نمونه ساده از میراگر جرمی تنظیم شونده آونگی

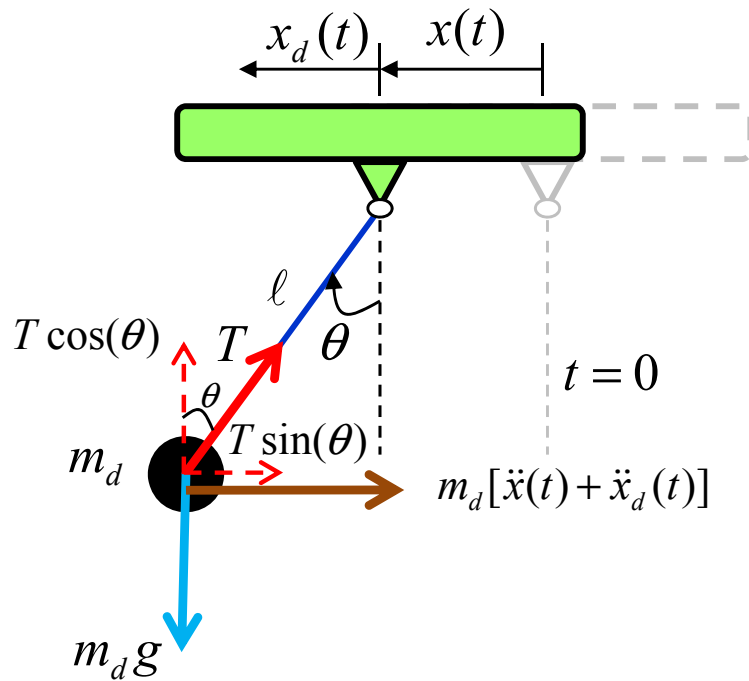
$x_d(t)$  : جابجایی افقی آونگ

$x(t)$  : جابجایی افقی سقف



# □ میراگر جرمی تنظیم شونده آونگی Pendulum TMD

حرکت افقی آونگ نسبت به سقف، یک نیروی افقی در جهت مخالف حرکت به سقف وارد می‌کند. معادله دیفرانسیل حرکت این آونگ با نوشتن رابطه تعادل  $\sum F_x = 0$  به دست می‌آید:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T \cos(\theta) - m_d g = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{m_d g}{\cos(\theta)}} \quad (18)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \sin(\theta) + m_d [\ddot{x}(t) + \ddot{x}_d(t)] = 0$$

(18)

$$\Rightarrow m_d g \tan(\theta) + m_d [\ddot{x}(t) + \ddot{x}_d(t)] = 0$$

$$\Rightarrow m_d g \frac{x_d(t)}{l \cos(\theta)} + m_d [\ddot{x}(t) + \ddot{x}_d(t)] = 0$$

$\cos(\theta) \approx 1$

$\Rightarrow$   
 $\div m_d$

$$\boxed{\ddot{x}_d(t) + \frac{g}{l} x_d(t) = -\ddot{x}(t)} \quad (19)$$

$$(19) \Rightarrow \omega_d^2 = g/l \Rightarrow \boxed{\omega_d = \sqrt{g/l}} \quad (20)$$

$$(20) \Rightarrow \boxed{T_d = 2\pi\sqrt{l/g}} \quad (21)$$

(20)  $\Rightarrow$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_d}} = \sqrt{g/l} \Rightarrow \boxed{k_{eq} = \frac{m_d g}{l} = \frac{W_d}{l}} \quad (22)$$

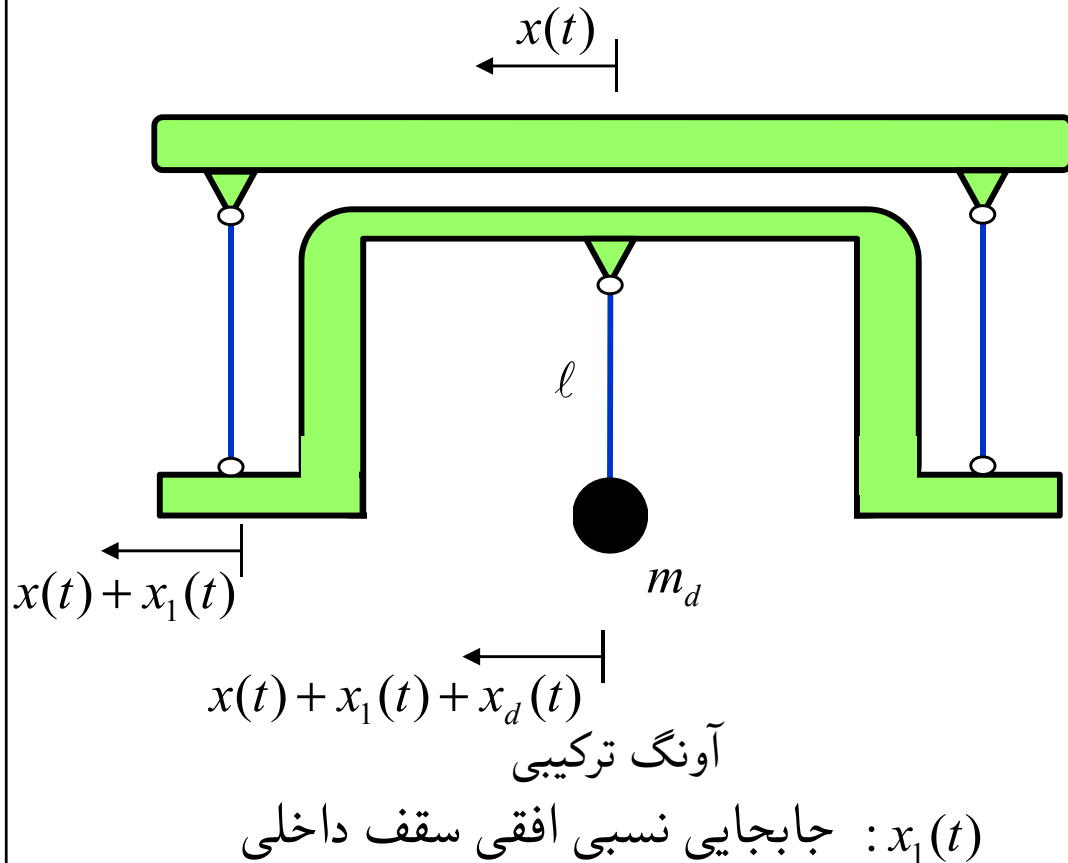
# □ میراگر جرمی تنظیم شونده آونگی Pendulum TMD

یکی از مشکلات اجرایی (از نظر معماری) TMD آونگی، طول زیاد آونگ است. به طور مثال برای یک سازه با پریودی در حدود 5 ثانیه طول مورد نیاز آونگ برابر است با:

$$(21) \Rightarrow T_d = 2\pi\sqrt{\ell/g} \Rightarrow$$

$$\ell = \frac{T_d^2 g}{4\pi^2} = \frac{(5)^2 (9.806)}{4\pi^2} \Rightarrow \boxed{\ell = 6.21 (m)}$$

طول 6/21 متر، تقریباً ارتفاع دو طبقه از ساختمان را به خود اختصاص می‌دهد و این کار از نظر معماری قدری ناخوشایند است. یک راه حل آن است که پایه آونگ به صورت تکیه گاه متحرک باشد.



$$(19) \Rightarrow$$

$$m_d[\ddot{x}_d(t) + \ddot{x}_1(t) + \ddot{x}(t)] + \frac{m_d g}{\ell} x_d(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{[\ddot{x}_d(t) + \ddot{x}_1(t)] + \frac{g}{\ell} x_d(t) = -\ddot{x}(t)} \quad (23)$$

با فرض  $x_d(t) = x_1(t)$

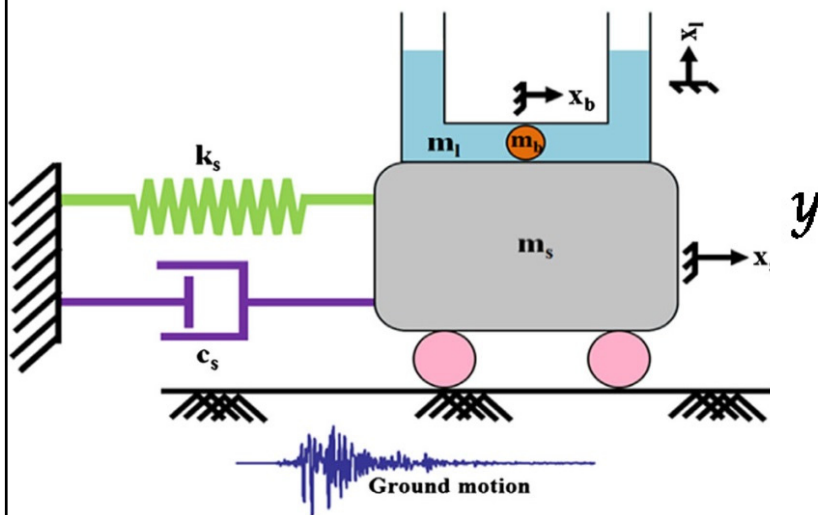
$$(23) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_d(t) + \frac{g}{2\ell} x_d(t) = -\frac{1}{2} \ddot{x}(t)} \quad (24)$$

$$(24) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_d &= \sqrt{g/(2\ell)} \\ T_d &= 2\pi\sqrt{2\ell/g} \\ k_{eq} &= \frac{m_d g}{2\ell} = \frac{W_d}{2\ell} \end{aligned}} \quad (25)$$

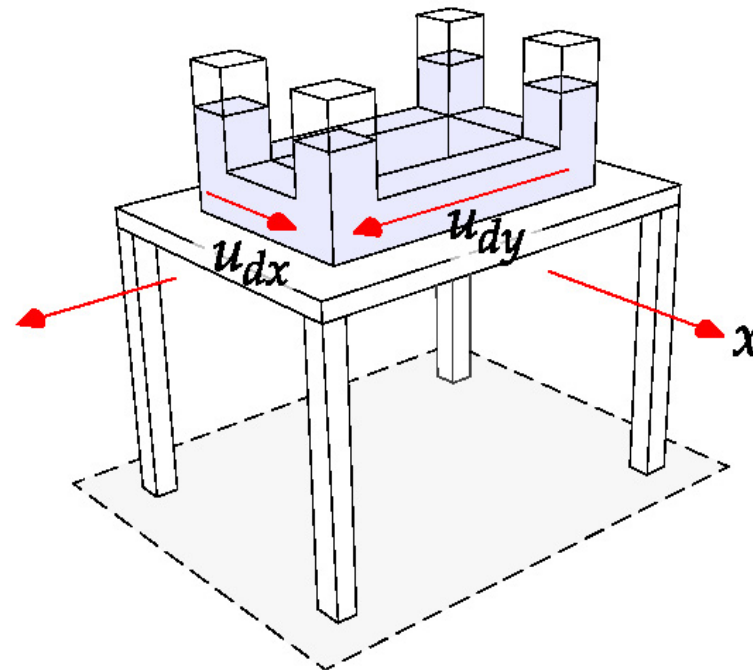
رابطه (25) نشان می‌دهد که طول موثر برابر با  $2\ell$  است. به بیان دیگر طول 6/21 متر در مثال قبل به نصف یعنی 3/105 متر تبدیل می‌گردد.

# □ میراگر مایع ستونی تنظیم شونده (TLCD (Tuned Liquid Column Damper)

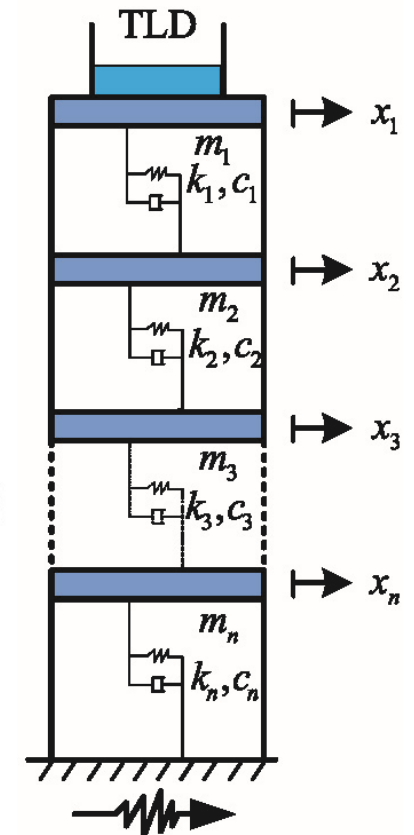
TLCD نوعی دیگر از TMD است که شامل یک مخزن ستونی حاوی مایع است. در حین حرکت سازه، مایع داخل مخزن ستونی حرکتی مخالف جهت حرکت سازه دارد. در مدل سازی این نوع میراگر اثر برخورد مایع با جداره مخزن را نیز باید لحاظ نمود.



DOI: 10.1002/stc.1740

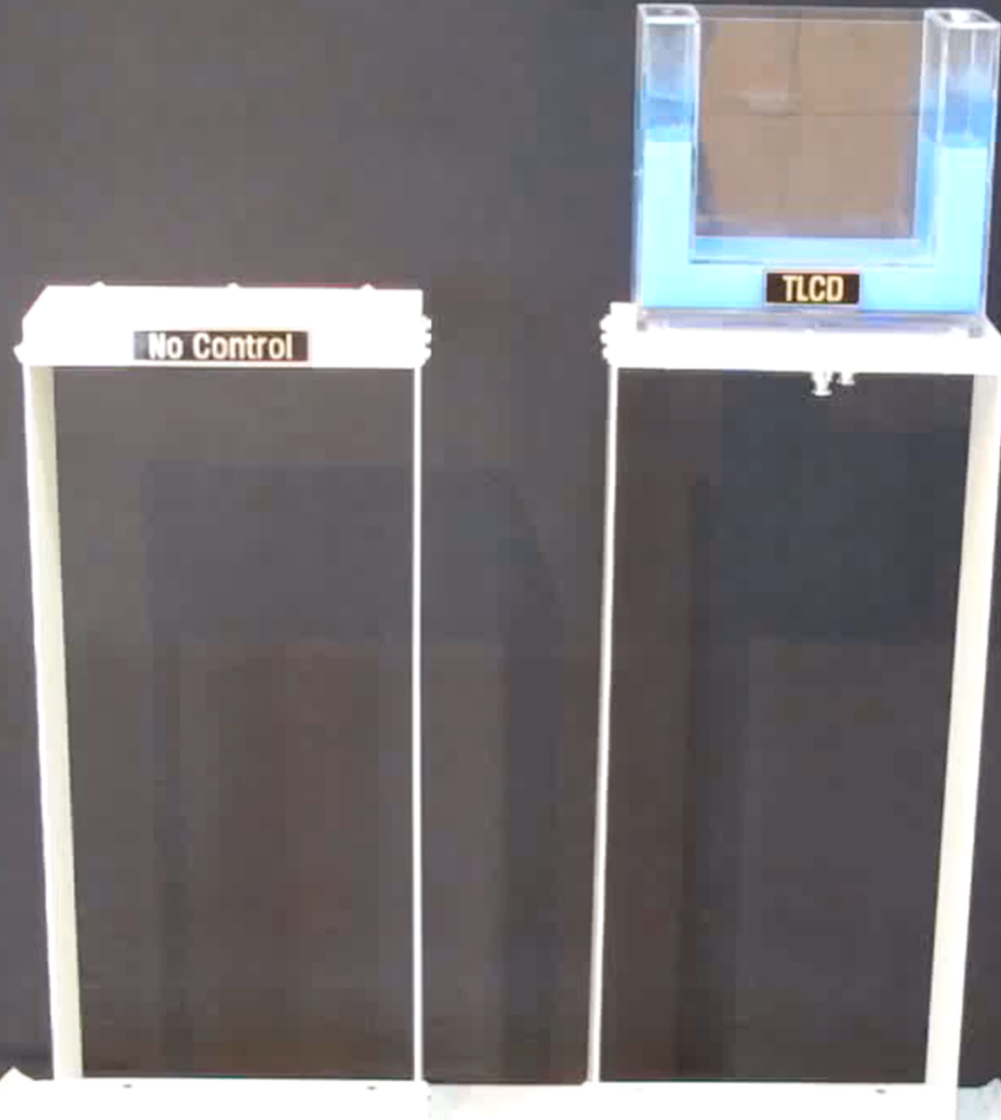


DOI: 10.1002/stc.1784



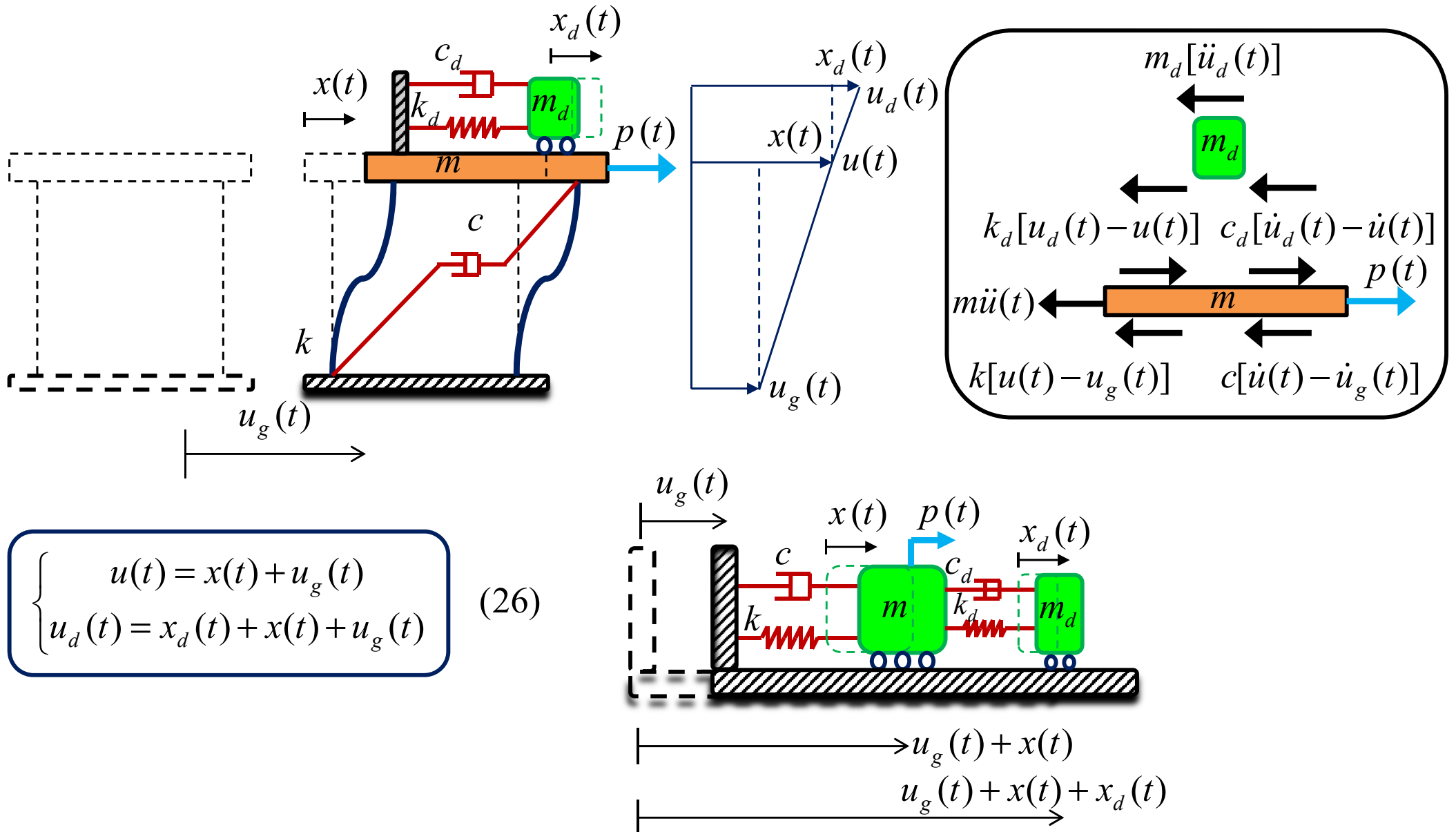
DOI: 10.1002/stc.1822

# □ میراگر مایع ستونی تنظیم شونده (TLCD (Tuned Liquid Column Damper)



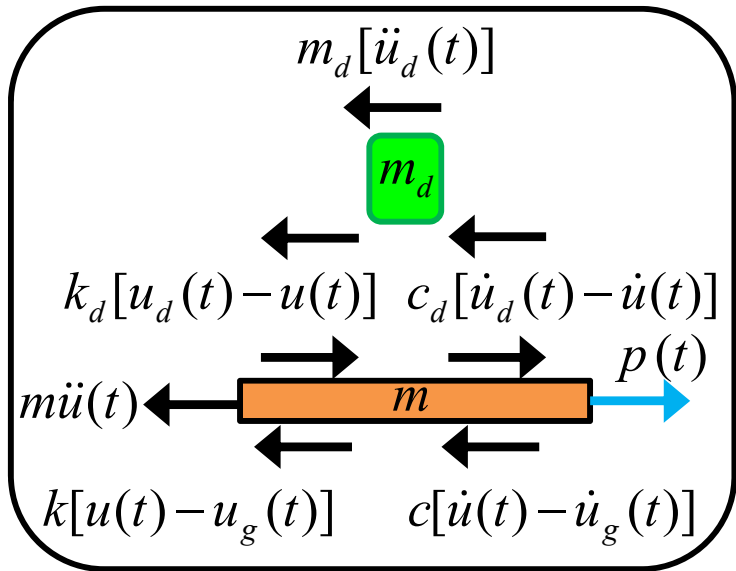
# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی و حرکت زمین

سیستم SDOF مجهز به TMD تحت اثر همزمان نیروی خارجی و حرکت زمین قرار دارد.



## □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی و حرکت زمین

با در نظر گرفتن دیاگرام جسم آزاد معادله حرکت سیستم به صورت زیر تشکیل می‌گردد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + k(u - u_g) + c(\dot{u} - \dot{u}_g) - k_d(u_d - u) - c_d(\dot{u}_d - \dot{u}) &= p(t) \\ m_d\ddot{u}_d + k_d(u_d - u) + c_d(\dot{u}_d - \dot{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$(26) \ \& \ (27) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} + \ddot{u}_g) + k(x + u_g - u_g) + c(\dot{x} + \dot{u}_g - \dot{u}_g) - k_d(x_d + x + u_g - x - u_g) - c_d(\dot{x}_d + \dot{x} + \dot{u}_g - \dot{x} - \dot{u}_g) &= p(t) \\ m_d(\ddot{x}_d + \ddot{x} + \ddot{u}_g) + k_d(x_d + x + u_g - x - u_g) + c_d(\dot{x}_d + \dot{x} + \dot{u}_g - \dot{x} - \dot{u}_g) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

□ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی و حرکت زمین

$$(28) \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) - c_d\dot{x}_d(t) - k_d x_d(t) = -m\ddot{u}_g(t) + p(t) \\ m_d\ddot{x}_d(t) + m_d\ddot{x}(t) + c_d\dot{x}_d(t) + k_d x_d(t) = -m_d\ddot{u}_g(t) \end{cases} \quad (29)$$

با حل معادلات هم بسته در رابطه (29) پاسخ‌ها  $x(t)$  و  $x_d(t)$  به دست می‌آید.

اگر نیروی خارجی و حرکت زمین به صورت سینوسی فرض گردند:

$$\begin{cases} \ddot{u}_g(t) = a_g \sin(\bar{\omega}t) \\ p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \end{cases} \quad (30)$$

پاسخ به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x}e^{i\bar{\omega}t} \\ x_d(t) = \bar{x}_d e^{i\bar{\omega}t} \end{cases} \quad (31)$$

$\bar{x}$  و  $\bar{x}_d$  دامنه جواب‌ها می‌باشند که به صورت مختلط هستند.

## □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی و حرکت زمین

با جایگذاری روابط (31) و (30) در رابطه (29) دامنه جواب‌ها به دست می‌آید.  $\Rightarrow (29) \rightarrow (31), (30)$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{p_0}{k} D_1 e^{i\delta_1} - \frac{a_g m}{k} D_2 e^{i\delta_2} \\ \bar{x}_d &= \frac{p_0}{k} D_3 e^{-i\delta_3} - \frac{a_g m}{k} D_4 e^{i\delta_4} \end{aligned} \quad (32)$$

$D_1$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی سینوسی برای سازه

$D_2$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی زلزله برای سازه

$D_3$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی سینوسی برای TMD

$D_4$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی زلزله برای TMD

که در آن:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\sqrt{(f^2 - \beta^2)^2 + (2\xi_d \beta f)^2}}{|D_0|} & D_3 &= \frac{\beta^2}{|D_0|} \\ D_2 &= \frac{\sqrt{[(1 + \bar{m})f^2 - \beta^2]^2 + [2\xi_d \beta f(1 + \bar{m})]^2}}{|D_0|} & D_4 &= \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{|D_0|} \end{aligned} \quad (33)$$

$$D_0 = [-f^2 \beta^2 \bar{m} + (1 - \beta^2)(f^2 - \beta^2) - 4\xi\xi_d f\beta^2]^2 + 4[\xi\beta(f^2 - \beta^2) + \xi_d f\beta[1 - \beta^2(1 + \bar{m})]]^2$$

و

$$\bar{m} = \frac{m_d}{m}, \quad f = \frac{\omega_d}{\omega}, \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (34)$$

□ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی و حرکت زمین

و همچنین

$$\tan(\delta_3) = 2 \frac{\xi\beta(f^2 - \beta^2) + \xi_d\beta f[1 - \beta^2(1 + \bar{m})]}{-f^2\beta^2\bar{m} + (1 - \beta^2)(f^2 - \beta^2) - 4\xi\xi_d f\beta^2}$$

$$\delta_1 = \alpha_1 - \delta_3$$

$$\delta_2 = \alpha_2 - \delta_3$$

$$\delta_4 = \alpha_3 - \delta_3$$
(35)

که در آن

$$\tan(\alpha_1) = \frac{2\xi_d\beta f}{f^2 - \beta^2}$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{2\xi_d\beta f(1 + \bar{m})}{(1 + \bar{m})f^2 - \beta^2}$$

$$\tan(\alpha_3) = 2\xi\beta$$
(36)

برای به دست آوردن مشخصات TMD در حالت بهینه، با توجه به آن که ضرایب بزرگی  $D_1, D_2, D_3$  و  $D_4$  تابعی از پارامترهای متعدد ( $\xi, \beta, f, \bar{m}$  و  $\xi_d$ ) می‌باشد، نمی‌توان به شیوه تحلیلی مقادیر بهینه را به دست آورد. در این حالت لازم است که از روش‌های عددی بهره گرفت.

## □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

مراحل گام به گام طراحی TMD با فرض آن که فقط نیروی خارجی سینوسی بر سازه اثر کند:

- به ازای مقادیر مختلف  $f$  و  $\xi_d$  ضریب بزرگی  $D_1$  (یا  $D_3$ ) را برحسب  $\beta$  رسم می‌کنیم (با اختیار مقادیر دلخواه  $\bar{m}$  و  $\xi$ ).

- براساس منحنی‌های رسم شده در گام قبل، آن منحنی که کمترین  $D_1$  (یا  $D_3$ ) را داشته باشد انتخاب می‌کنیم.

-  $f$  و  $\xi_d$  نظیر منحنی انتخاب شده در گام قبل همان  $f_{opt}$  و  $\xi_{dopt}$  برای مقادیر خاص  $\bar{m}$  و  $\xi$  است.

- سپس منحنی‌های  $D_{1opt}$  و  $D_{3opt}$  نظیر  $f_{opt}$  و  $\xi_{dopt}$  را برحسب  $\bar{m}$  و  $\xi$  مختلف برای یک  $\beta$  خاص رسم می‌کنیم.

- از مجموعه منحنی‌های به دست آمده در گام قبل برای طراحی TMD می‌توان استفاده نمود.

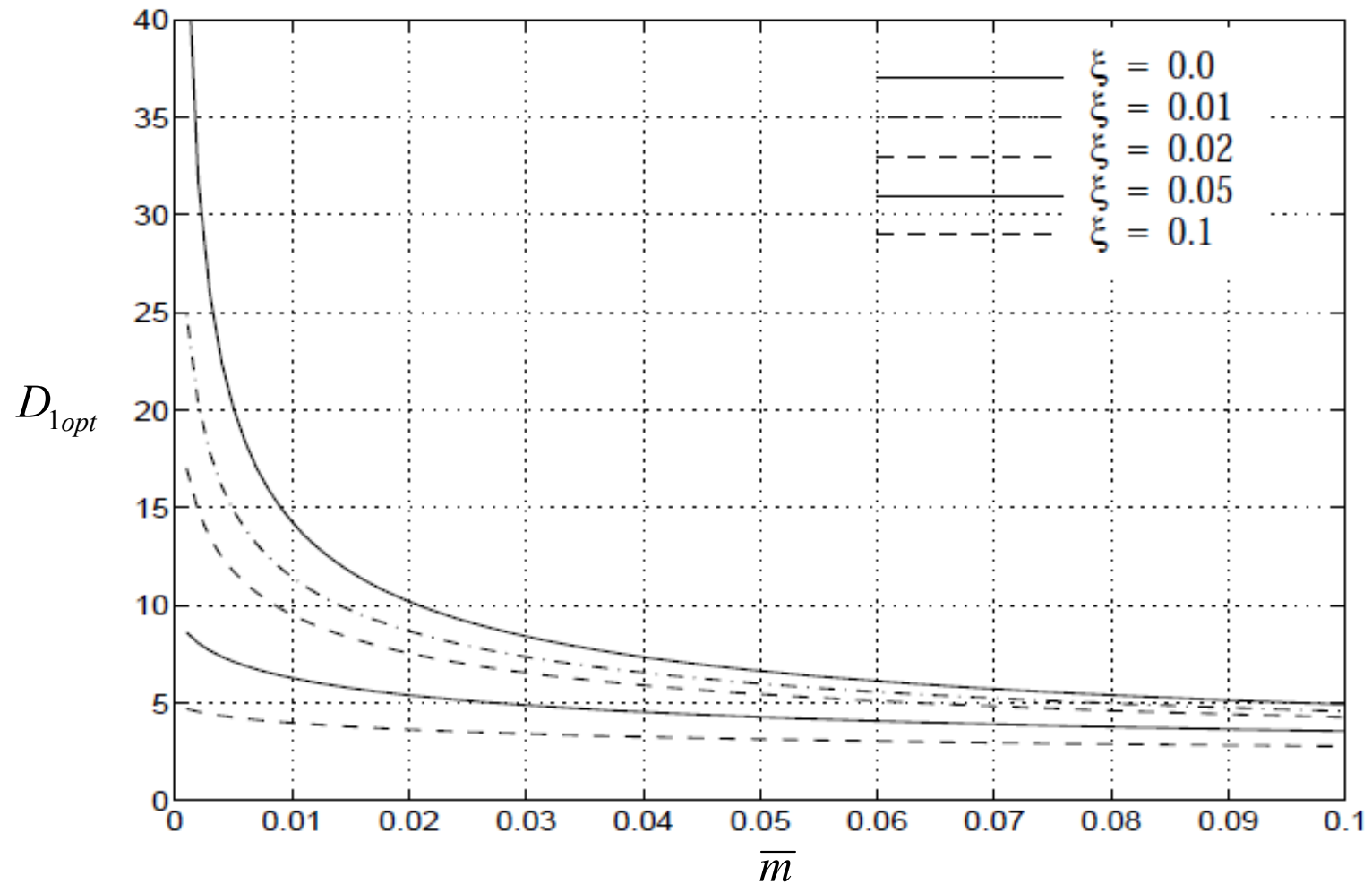
---

می‌توان نسبت میرایی معادل را (در مقایسه با SDOF بدون TMD) در حالت تشدید به صورت زیر تعریف کرد:

$$D = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2D} \quad (37) \quad \text{ضریب بزرگنمایی SDOF (دارای میرایی کمتر از 20\% در حالت بدون TMD)}$$

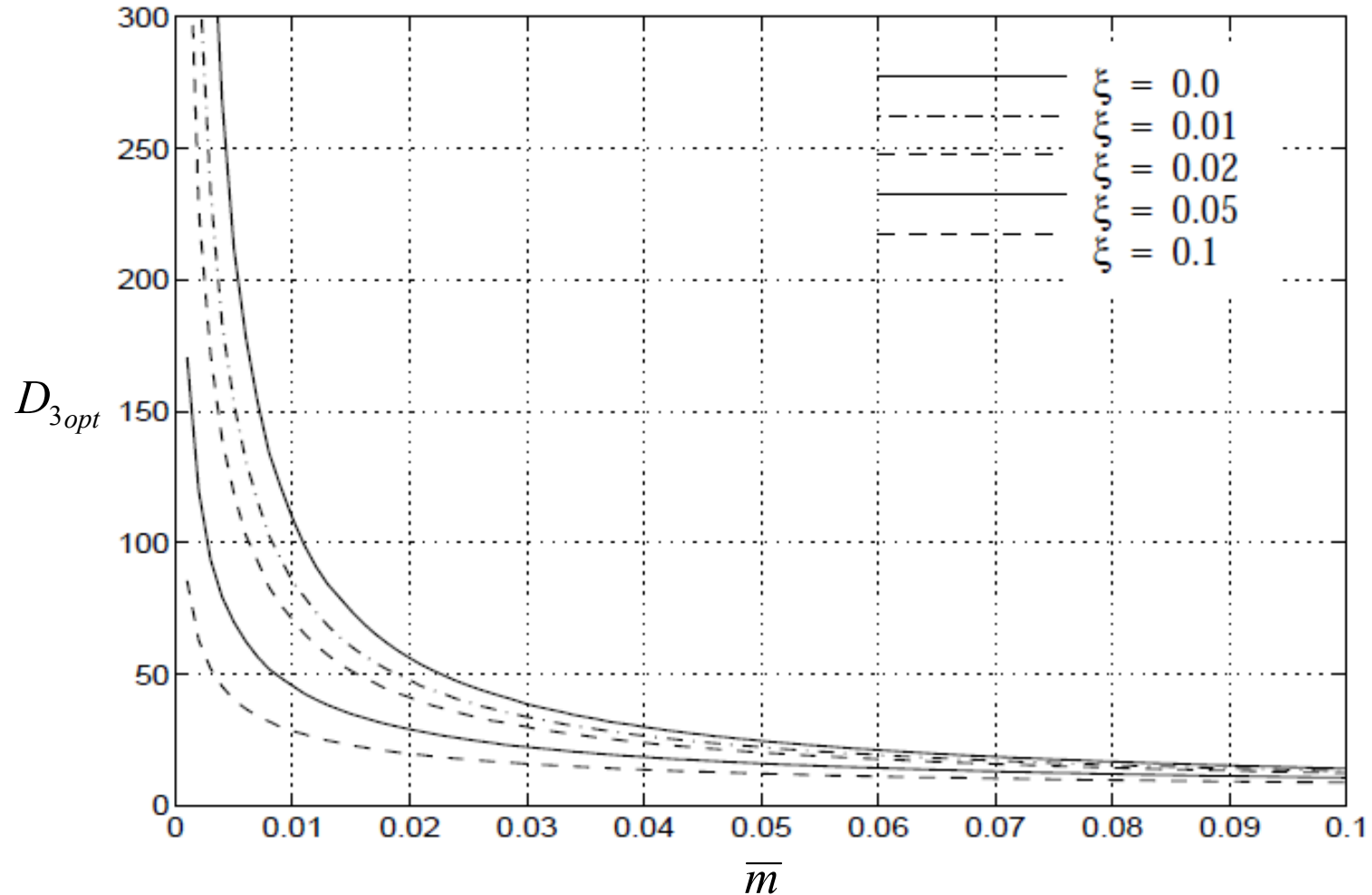
$$D_{1opt} = \frac{1}{2\xi_{eq}} \Rightarrow \xi_{eq} = \frac{1}{2D_{1opt}} \quad (38) \quad \text{ضریب بزرگنمایی SDOF در حالت با TMD}$$

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی



ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای سیستم SDOF

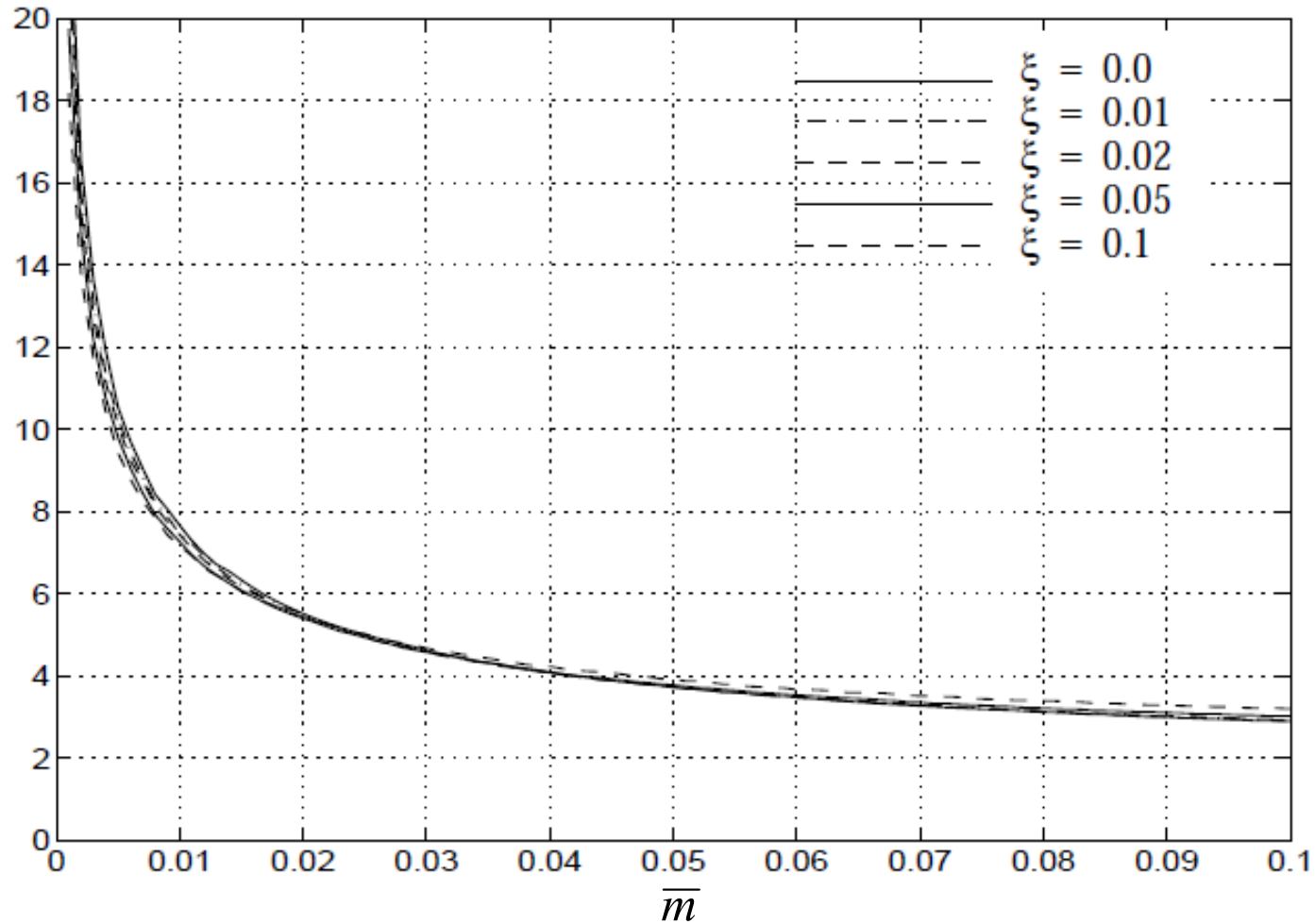
# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی



ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای TMD

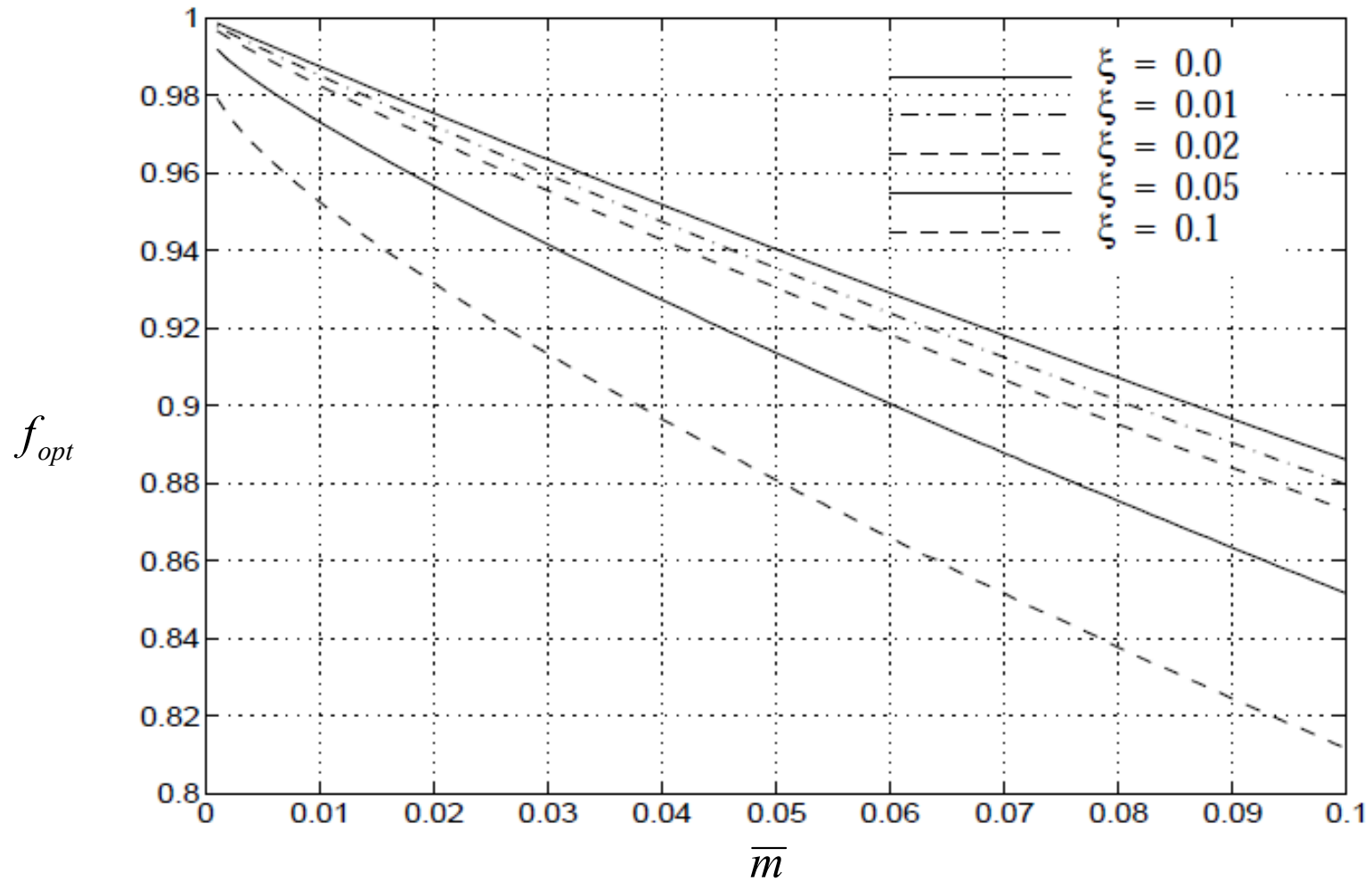
# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

$$\frac{\bar{x}_d}{\bar{x}} = \frac{D_{3opt}}{D_{1opt}}$$



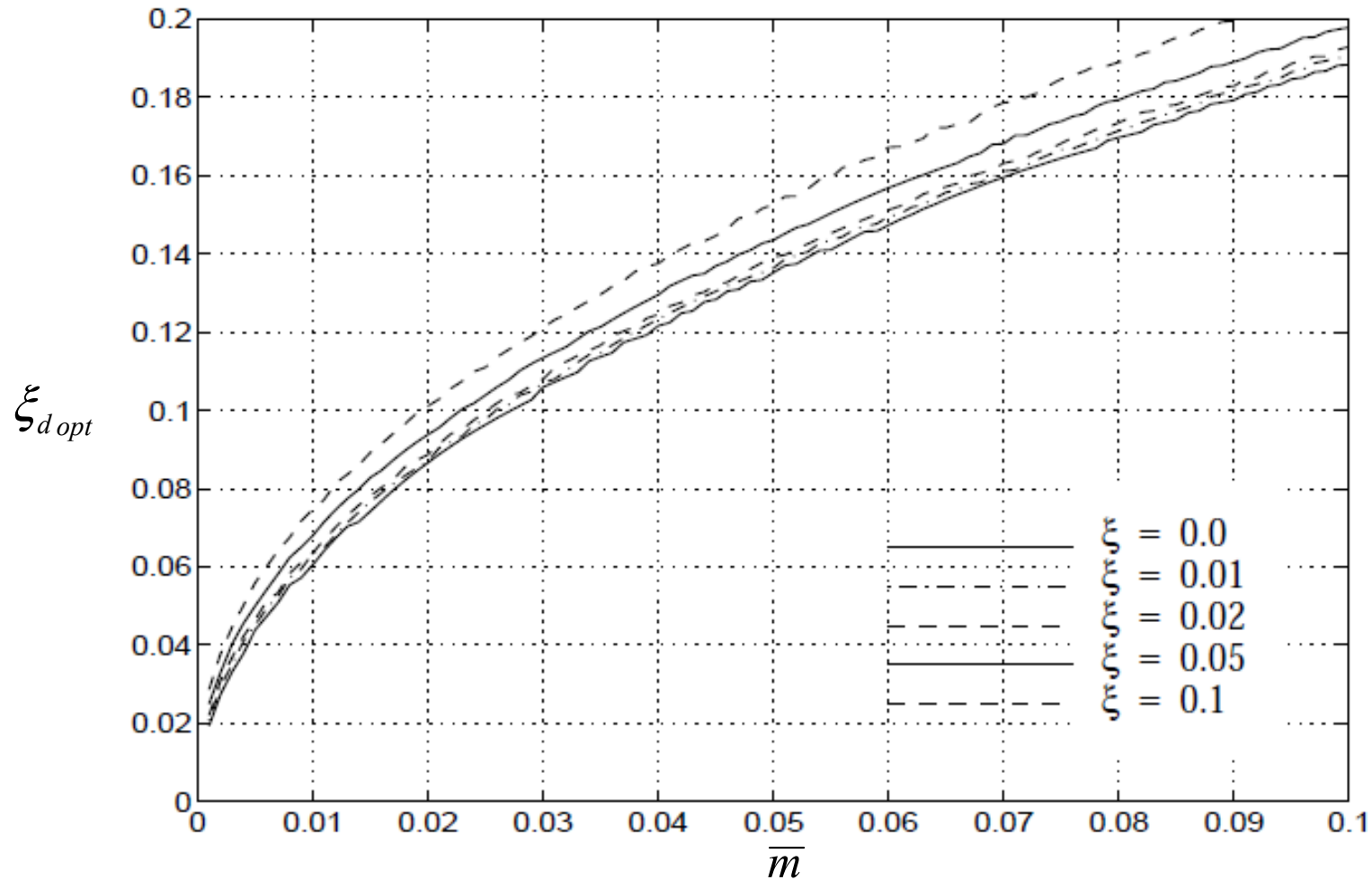
نسبت ماکزیمم دامنه TMD به ماکزیمم دامنه سازه

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی



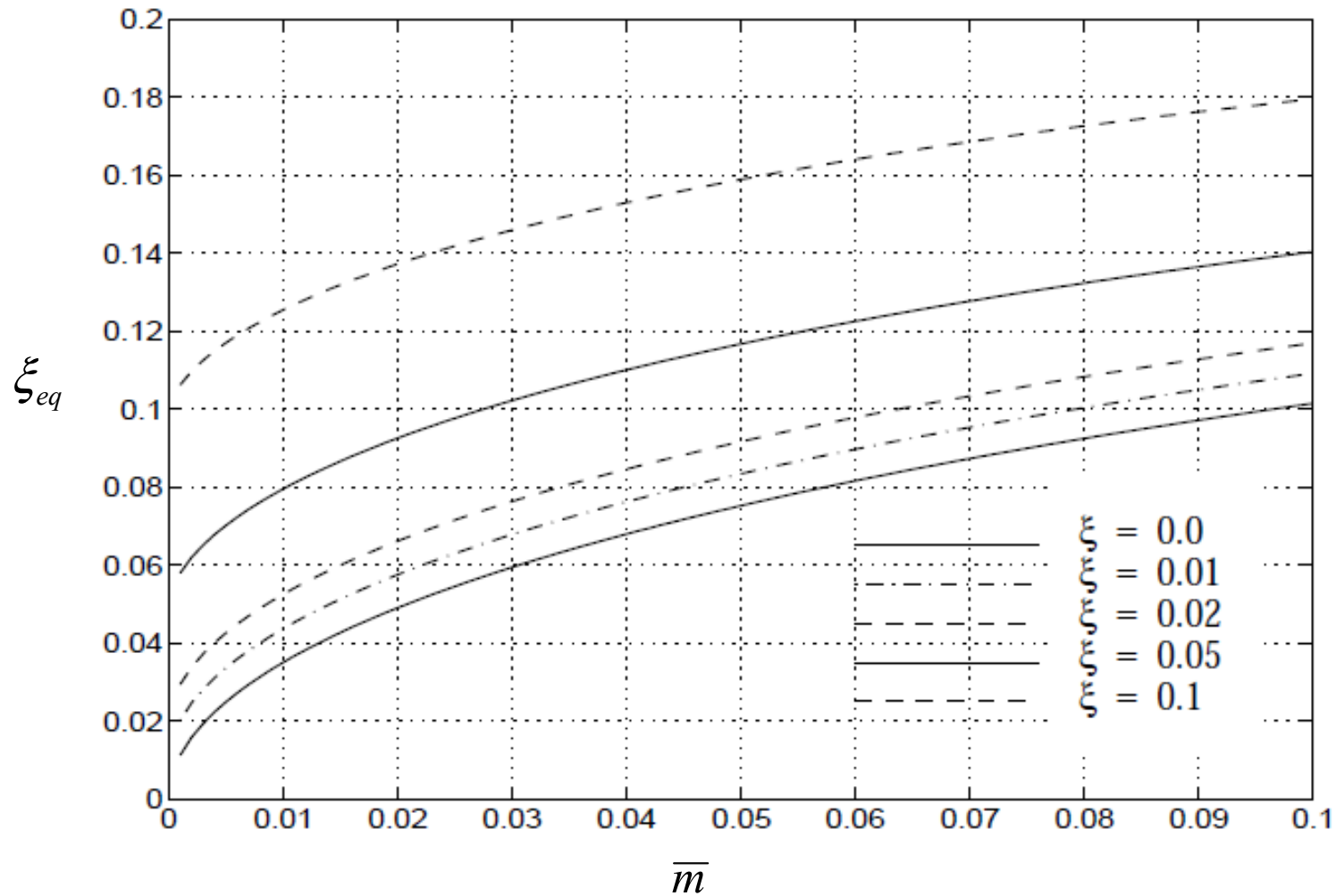
ضریب فرکانس بهینه برای TMD

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی



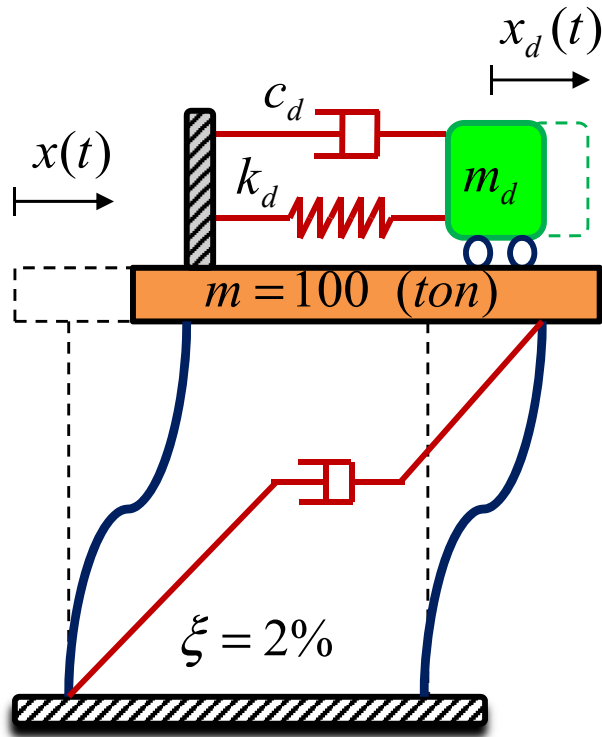
ضریب میرایی بهینه برای TMD

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی



ضریب میرایی معادل برای TMD بهینه

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی



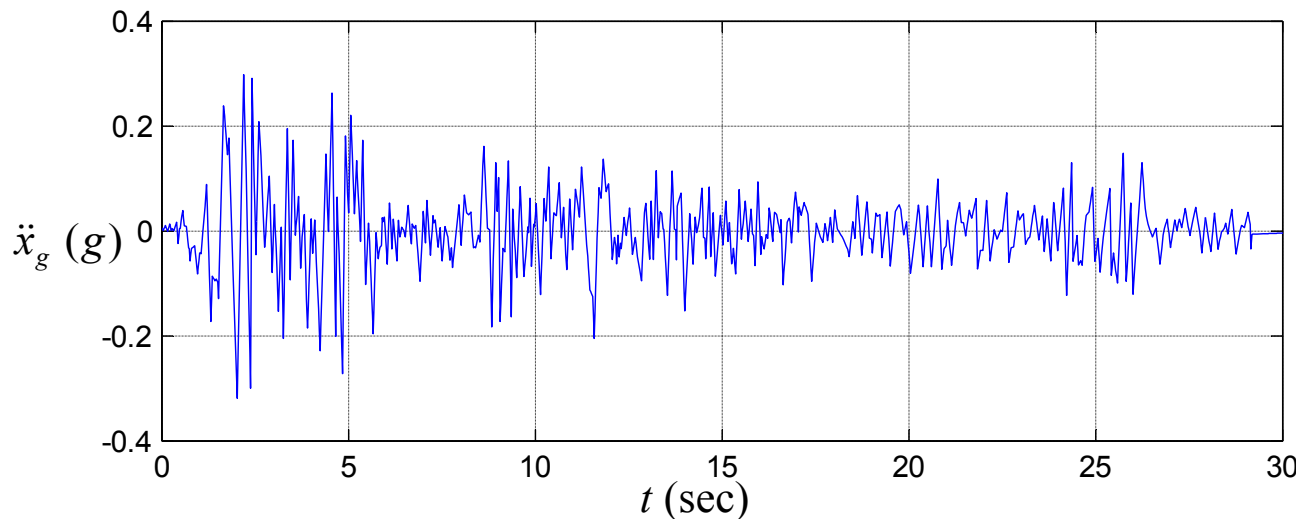
مثال 2- شکل مقابل یک سیستم SDOF مجهز به TMD را نشان می‌دهد. مطلوب است طراحی بهینه TMD مورد نظر براساس  $D_{1opt} < 7$ . همچنین پاسخ سیستم را در دو پریود متفاوت تحت اثر بارگذاری‌های زیر بررسی نمایید.

$$T = 0.5 \text{ (sec)} , \quad T = 2 \text{ (sec)}$$

الف) بار هارمونیک  $p(t) = 1000 \sin(\omega t)$

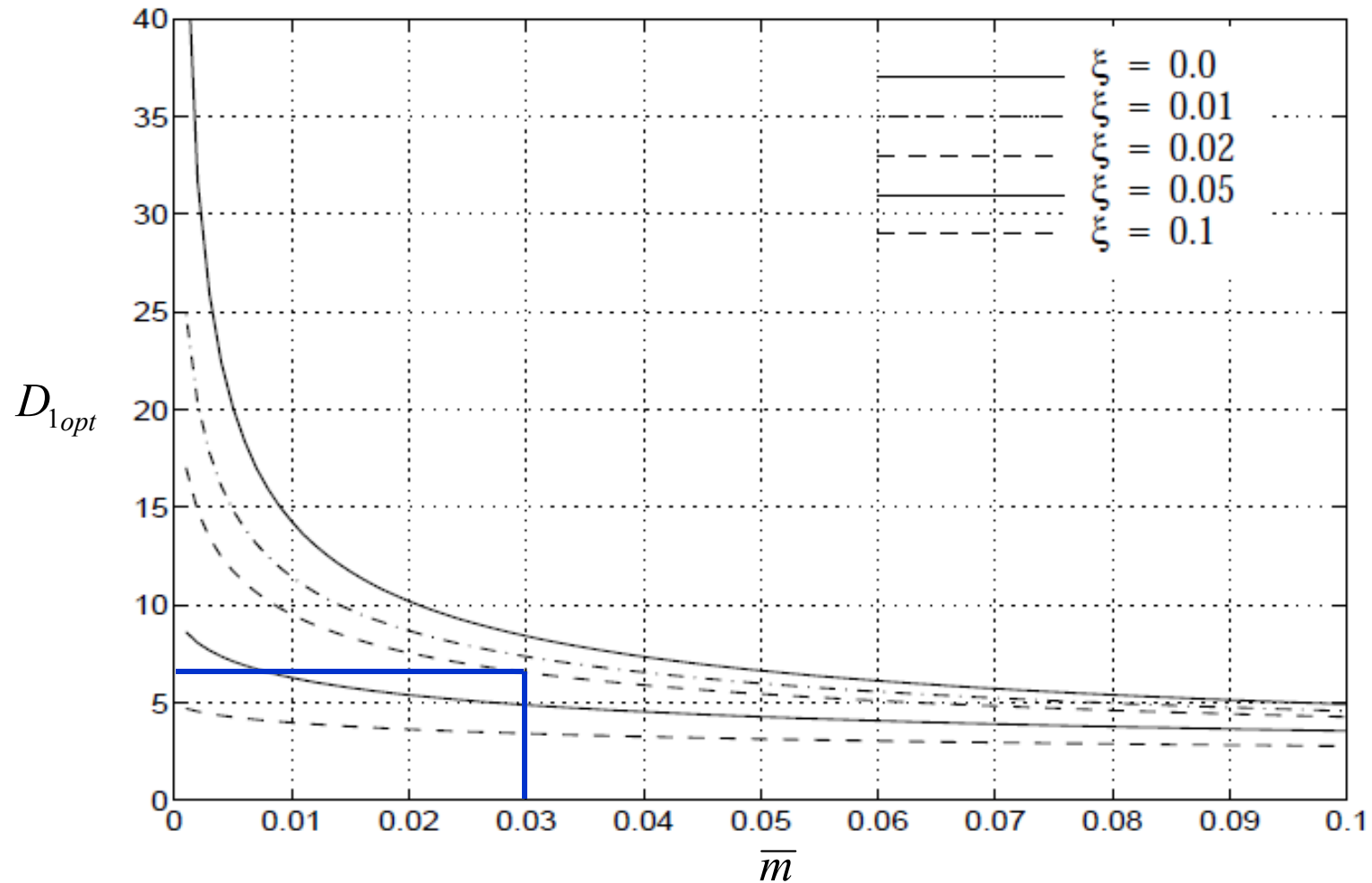
ب) زلزله El-Centro

شتاب نگاشت زلزله Elcentro



# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

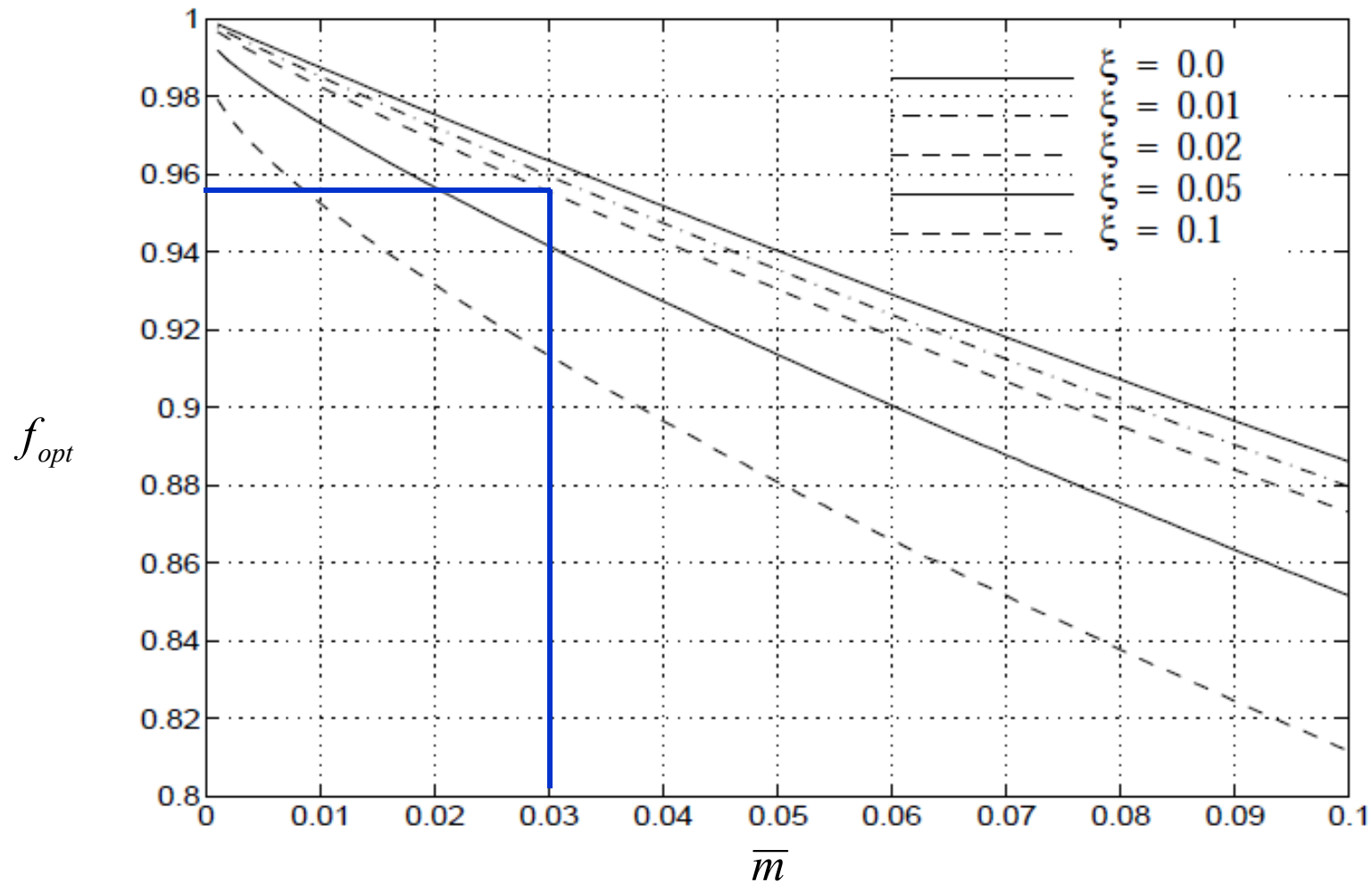
پاسخ مثال 2-



ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای سیستم SDOF

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

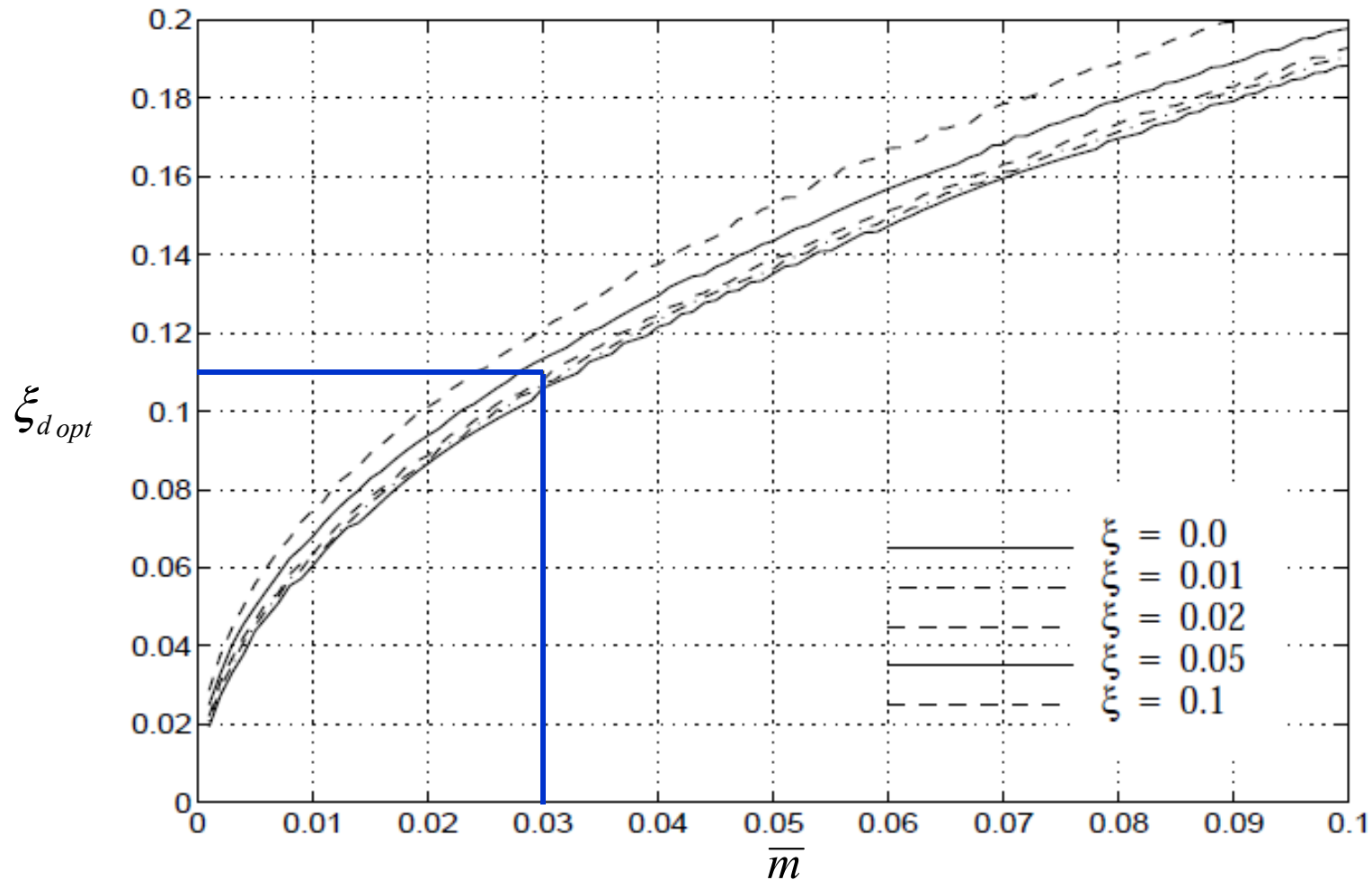
پاسخ مثال 2-



ضریب فرکانس بهینه برای TMD

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

پاسخ مثال 2-



ضریب میرایی بهینه برای TMD

## □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

پاسخ مثال 2-

$$D_{1opt} = 7 \Rightarrow \text{از منحنی } \bar{m} \text{ و } D_{1opt} \Rightarrow \boxed{\bar{m} = 0.03}$$

$$\bar{m} = 0.03 \Rightarrow \text{از منحنی } f_{opt} \text{ و } \bar{m} \Rightarrow \boxed{f_{opt} = 0.955}$$

$$\bar{m} = 0.03 \Rightarrow \text{از منحنی } \xi_{dopt} \text{ و } \bar{m} \Rightarrow \boxed{\xi_{dopt} = 0.105}$$

$$\boxed{m_d = 0.03m}$$

( معادل 3 درصد جرم سازه. در حالت معمول بازه 1 تا 10 درصد )

$$\boxed{\omega_d = 0.955\omega}$$

( در حالت بهینه بازه 0/8 تا 1 یعنی  $\omega_d \approx \omega$  )

$$\boxed{k_d = 0.02736k}$$

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

پاسخ مثال 2-

$$T = 0.5 \text{ (sec)}$$

$$k = 15791 \text{ (kN / m)}$$

$$\omega = 12.566 \text{ (rad / sec)}$$

$$c = 50.265 \text{ (kN .sec/ m)}$$

---

تعیین پارامترهای مکانیکی TMD

$$m_d = 3 \text{ (ton)}$$

$$k_d = 432.06 \text{ (kN / m)}$$

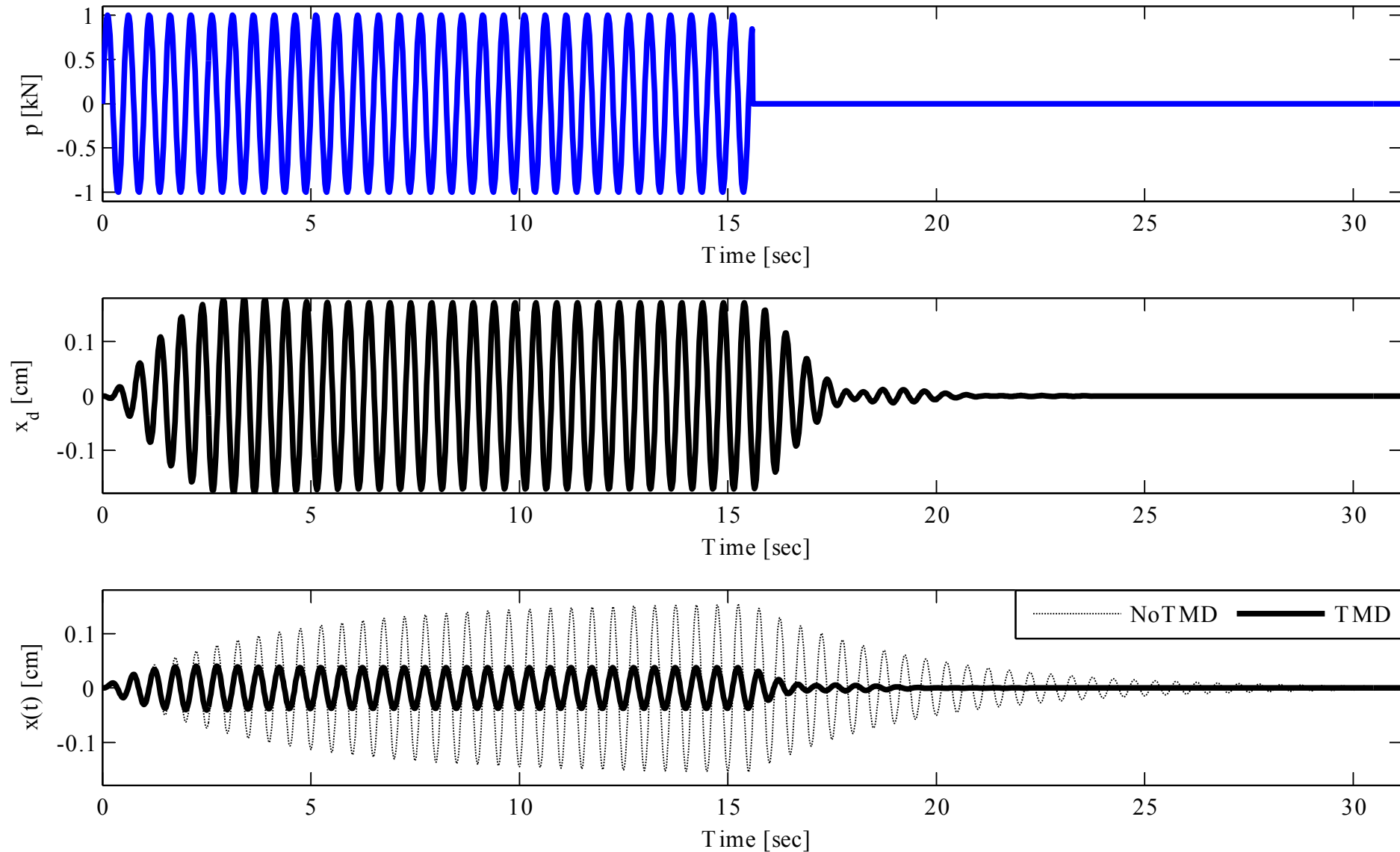
$$\omega_d = 12.001 \text{ (rad / sec)}$$

$$c_d = 7.5606 \text{ (kN .sec/ m)}$$

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

Matlab Code (L05Example02a.m)

پاسخ مثال 2-

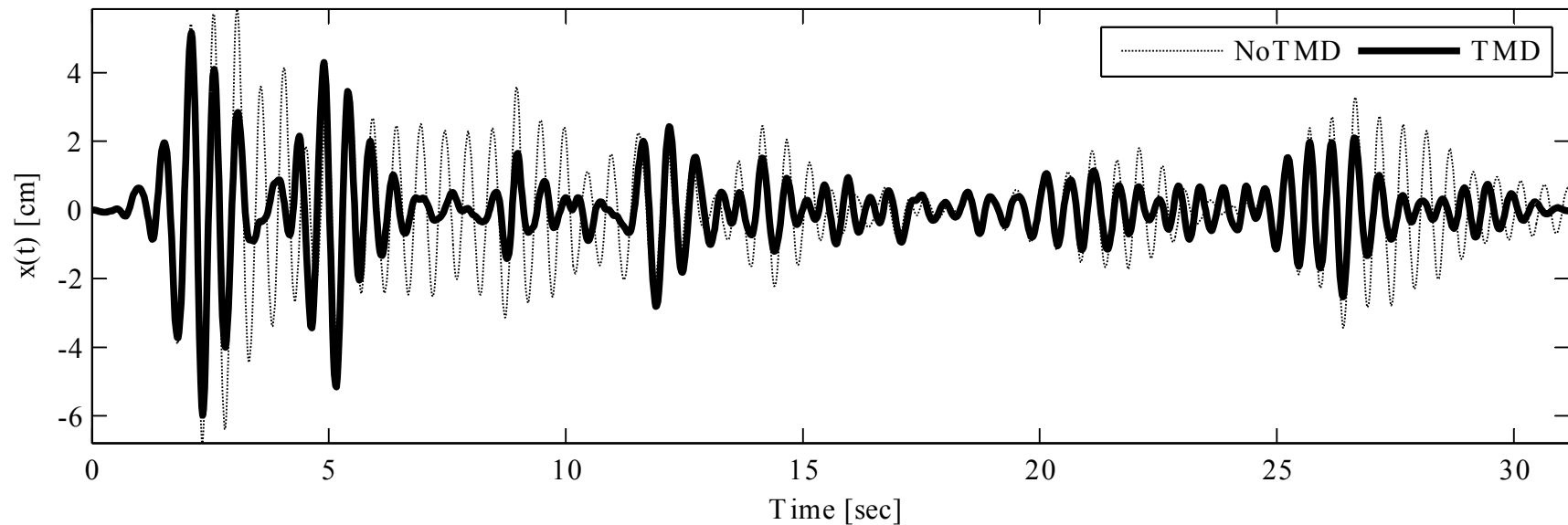
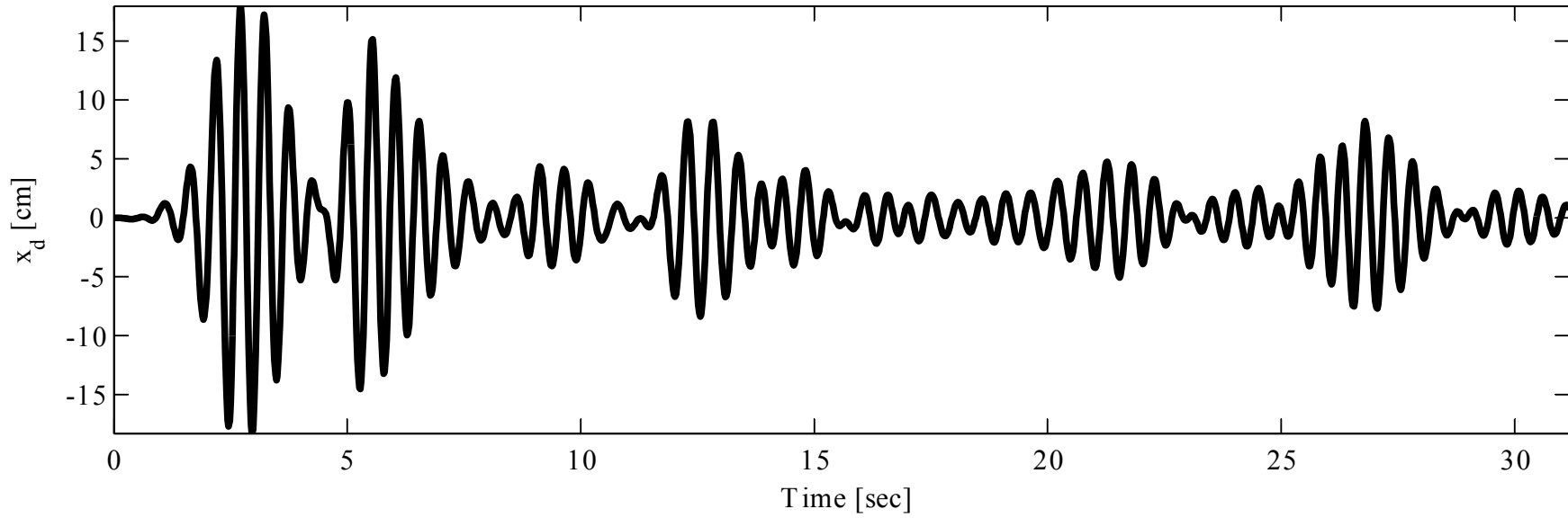


نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم SDOF ( $T = 0.5$  sec) در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر بار هارمونیک در حالت تشدید.

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

Matlab Code (L05Example02b.m)

پاسخ مثال 2-



نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم SDOF در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر زلزله Elcentro.

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

پاسخ مثال 2-

$$T = 2 \text{ (sec)}$$

$$k = 986.96 \text{ (kN / m)}$$

$$\omega = 3.14 \text{ (rad / sec)}$$

$$c = 12.566 \text{ (kN .sec/ m)}$$

---

تعیین پارامترهای مکانیکی TMD

$$m_d = 3 \text{ (ton)}$$

$$k_d = 27 \text{ (kN / m)}$$

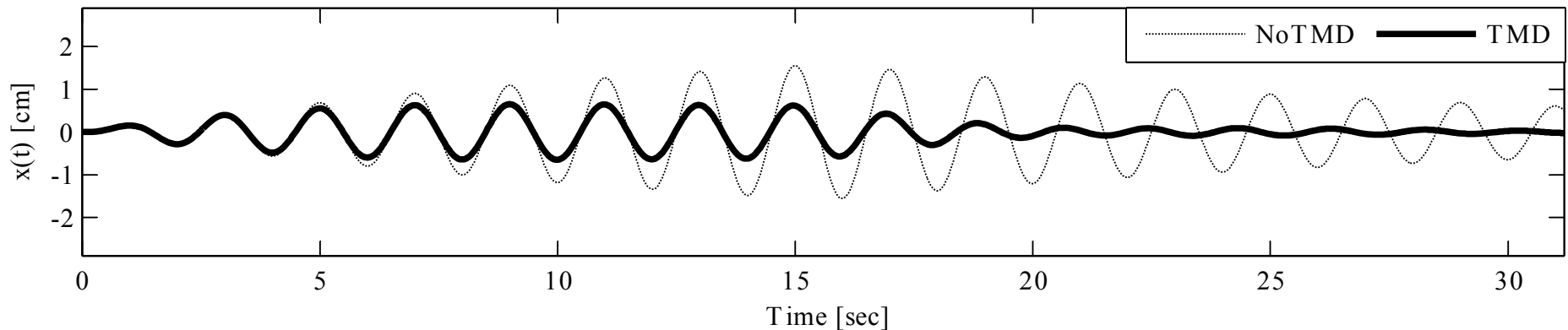
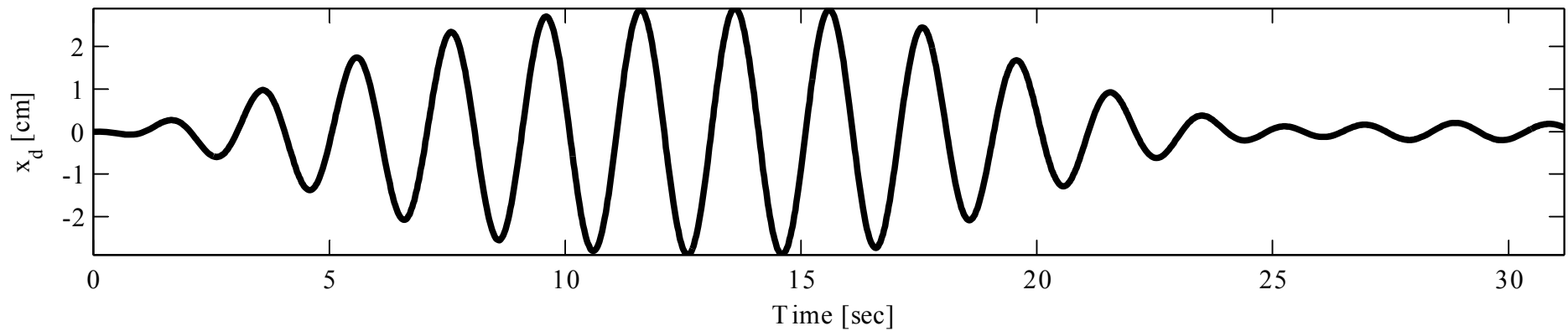
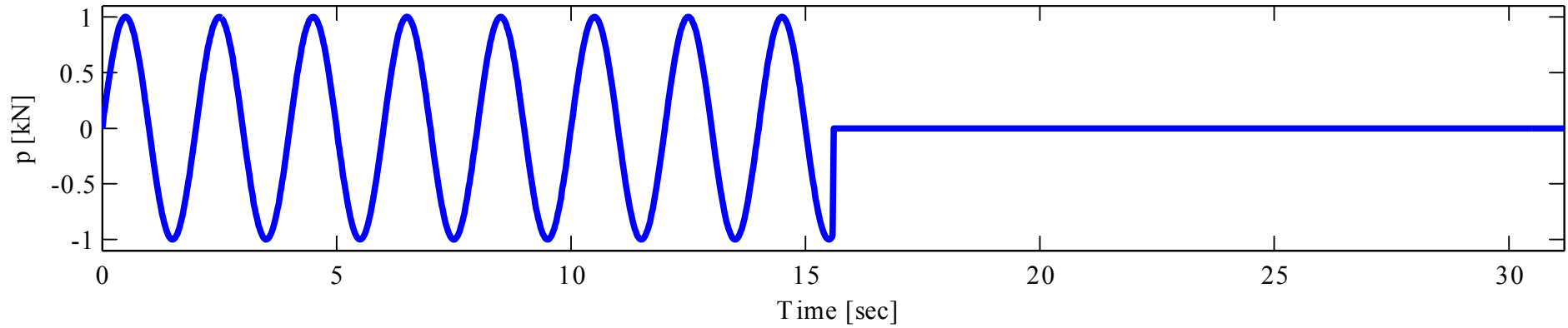
$$\omega_d = 3 \text{ (rad / sec)}$$

$$c_d = 1.8901 \text{ (kN .sec/ m)}$$

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

Matlab Code (L05Example02c.m)

پاسخ مثال 2-

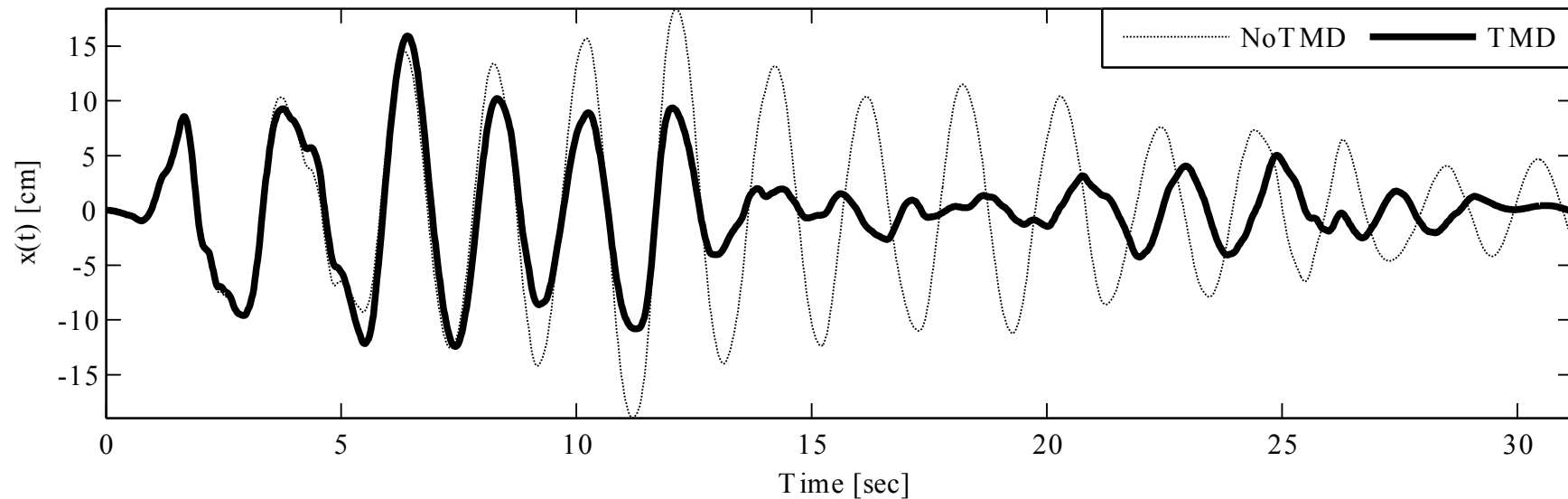
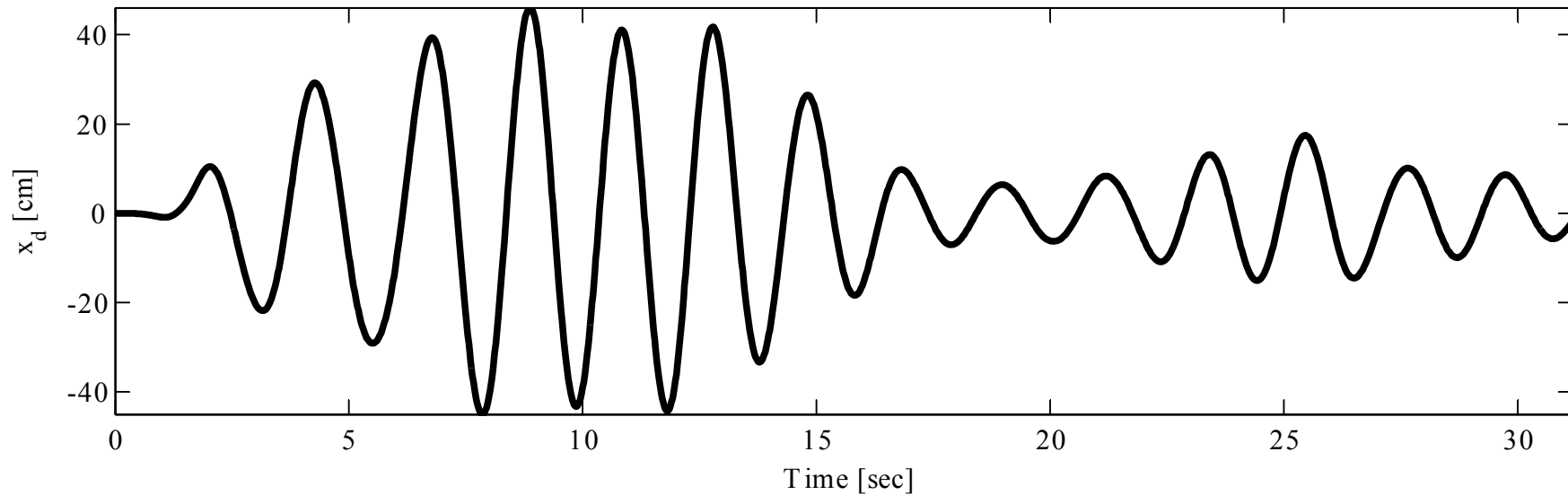


نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم SDOF در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر بار هارمونیک در حالت تشدید.

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

پاسخ مثال 2-

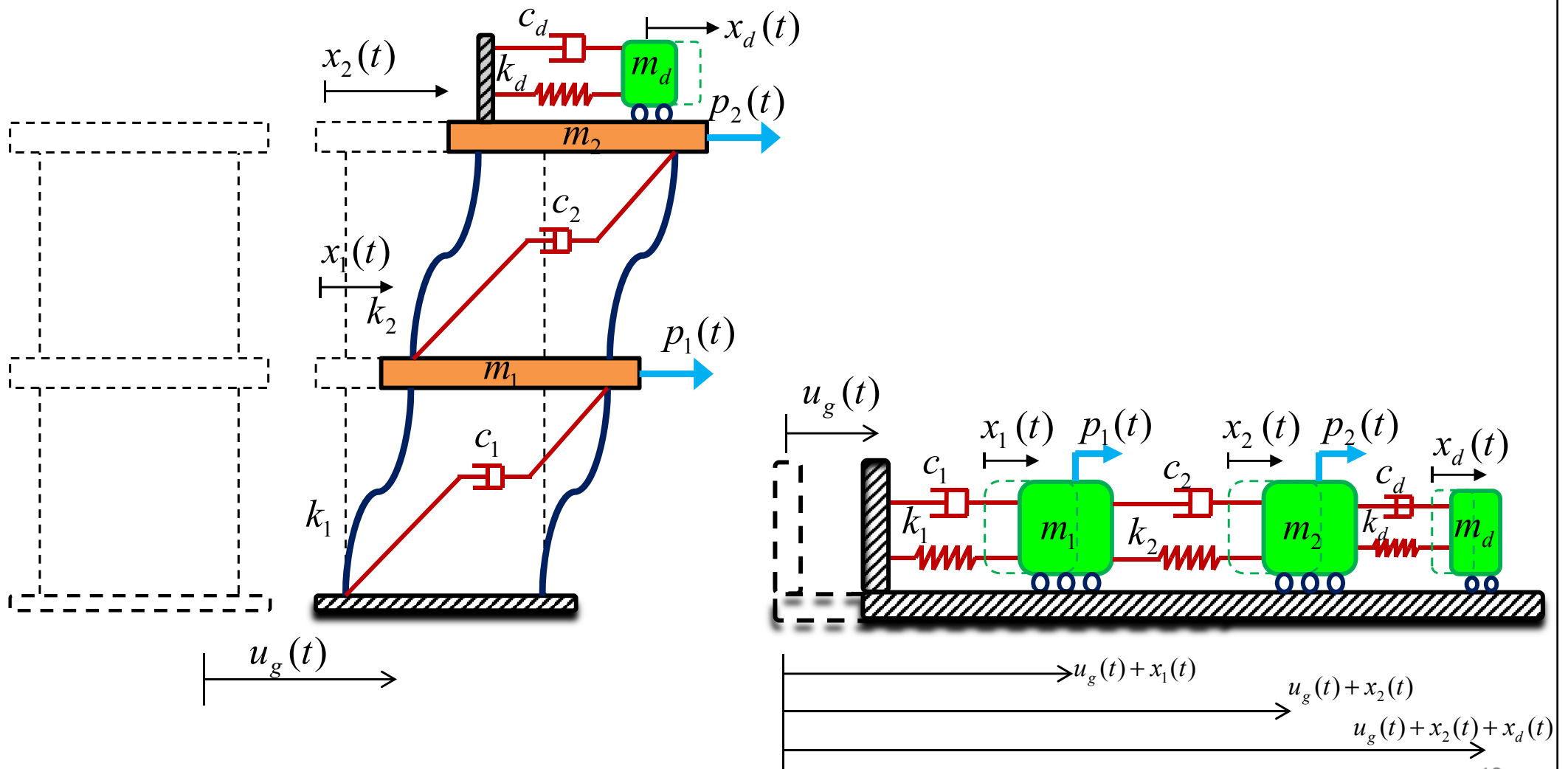
Matlab Code (L05Example02d.m)



نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم SDOF ( $T = 2$  sec) در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر زلزله Elcentro.

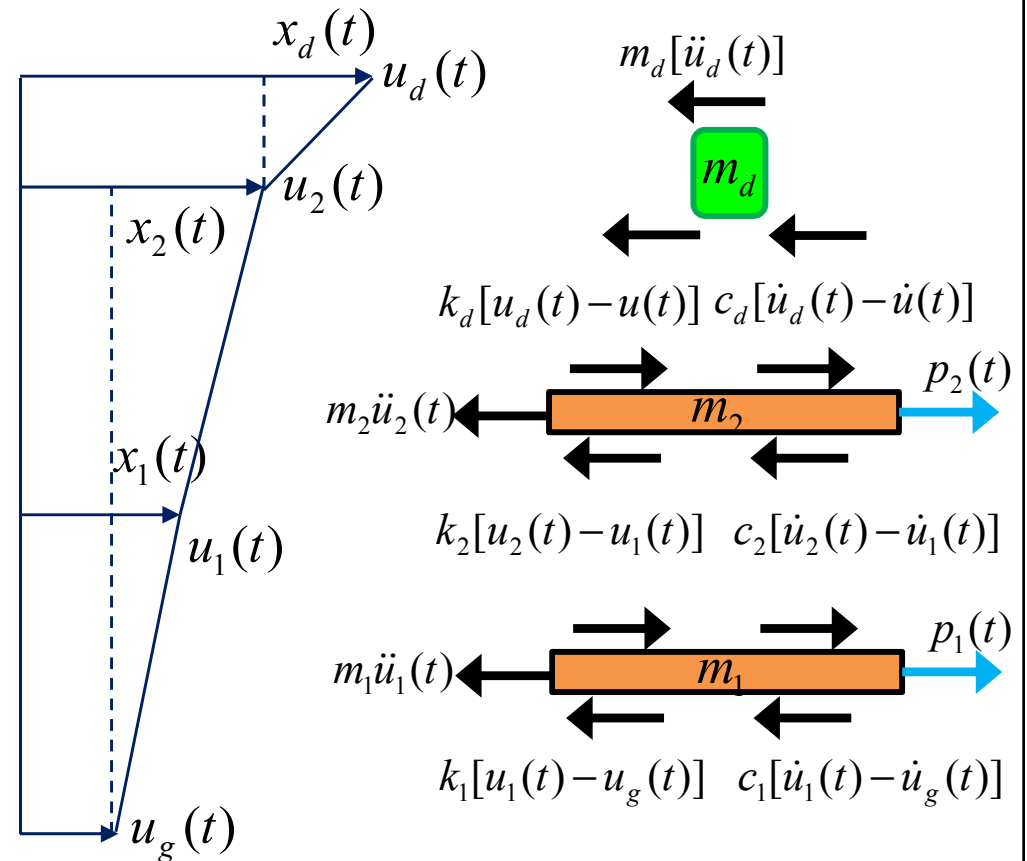
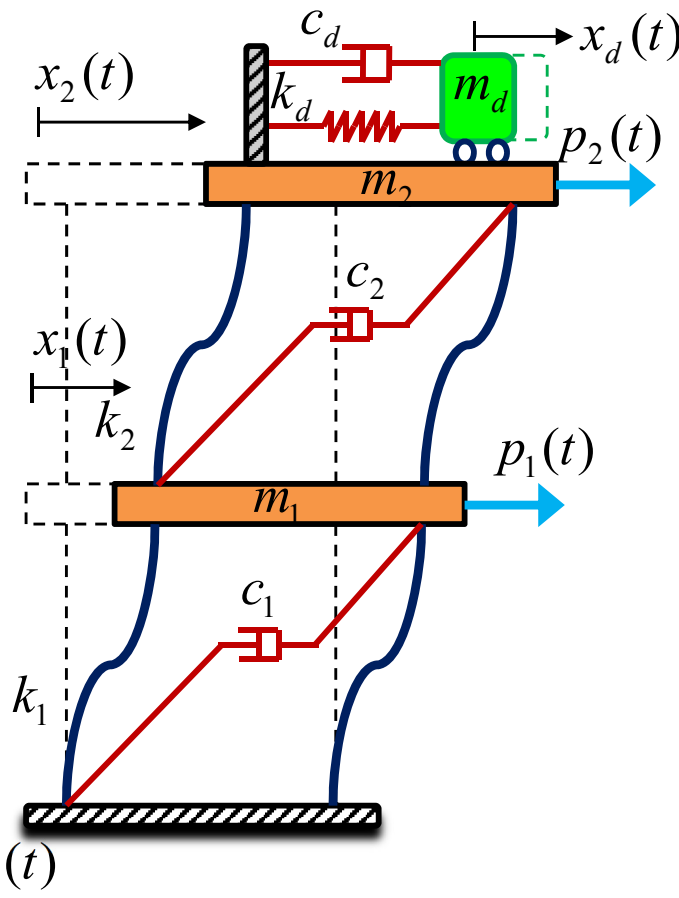
# طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

شکل زیر یک ساختمان دو طبقه مجهز به TMD را نشان می‌دهد که تحت اثر نیروی خارجی و حرکت ناشی از زمین قرار گرفته است. مطابق آنچه که در آنالیز مودال برای سیستم‌های سازه‌ای داشتیم در این جا نیز معادلات حرکت را در فضای مودال نوشته و برای هر یک از مودها مشابه حالت SDOF، TMD را طراحی می‌نماییم.



# طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

با رسم دیاگرام جسم آزاد معادلات حرکت سیستم MDOF مجهز به TMD نوشته می‌شود:

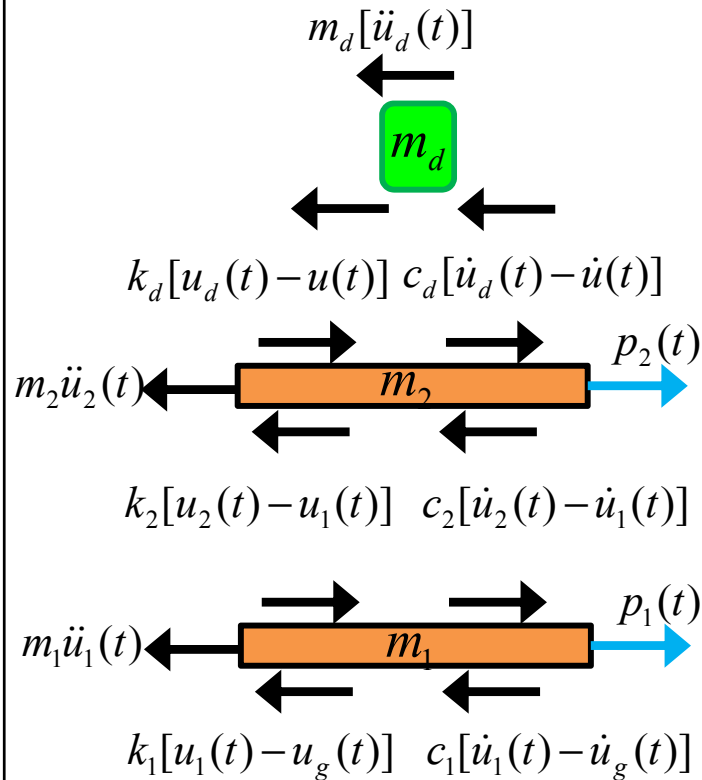


$$\begin{cases} u_i(t) = x_i(t) + u_g(t) & (i = 1, 2) \\ u_d(t) = x_d(t) + x_2(t) + u_g(t) \end{cases} \quad (39)$$

## TMD systems

## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

با نوشتن معادله تعادل برای هر یک از طبقات خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + k_1(u_1 - u_g) + c_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_g) - k_2(u_2 - u_1) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) &= p_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - k_d(u_d - u_2) - c_d(\dot{u}_d - \dot{u}_2) &= p_2(t) \\ m_d \ddot{u}_d + k_d(u_d - u_2) + c_d(\dot{u}_d - \dot{u}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

$$(39) \ \& \ (40) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{u}_g) + k_1(x_1 + u_g - u_g) + c_1(\dot{x}_1 + \dot{u}_g - \dot{u}_g) - k_2(x_2 + u_g - x_1 - u_g) - c_2(\dot{x}_2 + \dot{u}_g - \dot{x}_1 - \dot{u}_g) &= p_1(t) \\ m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{u}_g) + k_2(x_2 + u_g - x_1 - u_g) + c_2(\dot{x}_2 + \dot{u}_g - \dot{x}_1 - \dot{u}_g) - k_d(x_d + x_2 + u_g - x_2 - u_g) - c_d(\dot{x}_d + \dot{x}_2 + \dot{u}_g - \dot{x}_2 - \dot{u}_g) &= p_2(t) \\ m_d(\ddot{x}_d + \ddot{x}_2 + \ddot{u}_g) + k_d(x_d + x_2 + u_g - x_2 - u_g) + c_d(\dot{x}_d + \dot{x}_2 + \dot{u}_g - \dot{x}_2 - \dot{u}_g) &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 (41) \Rightarrow & \quad m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = p_1(t) - m_1 \ddot{u}_g \\
 & \quad m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 = p_2(t) - m_2 \ddot{u}_g + c_d \dot{x}_d + k_d x_d \quad (42) \\
 & \quad m_d \ddot{x}_d + c_d \dot{x}_d + k_d x_d = -m_d (\ddot{x}_2 + \ddot{u}_g)
 \end{aligned}$$

فرم ماتریسی معادله حرکت سازه تنها به صورت زیر خواهد شد:

(42)  $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) - m_1 \ddot{u}_g \\ p_2(t) - m_2 \ddot{u}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ c_d \dot{x}_d + k_d x_d \end{Bmatrix} \quad (43)$$

(نیروی ناشی از TMD به طبقه دوم)

و معادله حرکت TMD به صورت زیر است

$$(42) \Rightarrow \quad m_d \ddot{x}_d(t) + c_d \dot{x}_d(t) + k_d x_d(t) = -m_d [\ddot{x}_2(t) + \ddot{u}_g(t)] \quad (44)$$

## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

با تعریف مختصات تعمیم یافته به صورت زیر معادلات همبسته سازه اصلی را منفرد می‌کنیم:

$$\{\mathbf{x}\} = [\boldsymbol{\phi}]\{\mathbf{y}\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

$$(45) \rightarrow (43) \quad \stackrel{\times[\boldsymbol{\phi}]^T}{\Rightarrow} \begin{cases} M_1 \ddot{y}_1 + C_1 \dot{y}_1 + K_1 y_1 = \phi_{11}[p_1(t) - m_1 \ddot{u}_g] + \phi_{21}[p_2(t) - m_2 \ddot{u}_g + c_d \dot{x}_d + k_d x_d] \\ M_2 \ddot{y}_2 + C_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 = \phi_{12}[p_1(t) - m_1 \ddot{u}_g] + \phi_{22}[p_2(t) - m_2 \ddot{u}_g + c_d \dot{x}_d + k_d x_d] \end{cases} \quad (46)$$

که در آن

$$\begin{aligned} M_i &= \{\boldsymbol{\phi}\}_i^T [\mathbf{m}]\{\boldsymbol{\phi}\}_i \\ K_i &= \{\boldsymbol{\phi}\}_i^T [\mathbf{k}]\{\boldsymbol{\phi}\}_i \\ C_i &= \{\boldsymbol{\phi}\}_i^T [\mathbf{c}]\{\boldsymbol{\phi}\}_i \end{aligned} \quad (47)$$

در صورتی که میرایی مودال را تابع سختی مودال فرض کنیم می‌توان نسبت میرایی هر مود را به صورت زیر نوشت:

$$\text{if } C_i = \alpha K_i \Rightarrow \xi_i = \frac{C_i}{2M_i\omega_i} = \frac{\alpha K_i}{2M_i\omega_i} = \frac{\alpha M_i\omega_i^2}{2M_i\omega_i} \Rightarrow \xi_i = \frac{\alpha\omega_i}{2} \quad (48)$$

## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

می‌توان فرض کرد که هریک از مودها طرح را کنترل کنند. به طور مثال اگر مود اول کنترل کننده طرح باشد بنابراین از اثر مود دوم می‌توان صرف نظر کرد و در نتیجه پاسخ طبقه بام (درجه آزادی که TMD به آن متصل است) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(45) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_2 = \phi_{21}y_1 + \phi_{22}y_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \phi_{21}y_1} \quad (49)$$

(اثر مود دوم) 0

از رابطه (49) می‌توان پاسخ مودال درجه آزادی اول را برحسب پاسخ طبقه بام نوشت:

$$(49) \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{x_2}{\phi_{21}}} \quad (50)$$

با جایگذاری رابطه (50) در اولین معادله حرکت از رابطه (46) و همچنین تقسیم طرفین تساوی به  $\phi_{21}$  خواهیم داشت:

$$(50) \rightarrow (46.I) \Rightarrow \frac{M_1}{\phi_{21}^2} \ddot{x}_2 + \frac{C_1}{\phi_{21}^2} \dot{x}_2 + \frac{K_1}{\phi_{21}^2} x_2 = \frac{\phi_{11}p_1(t) + \phi_{21}p_2(t)}{\phi_{21}} - \frac{\phi_{11}m_1 + \phi_{21}m_2}{\phi_{21}} \ddot{u}_g + c_d \dot{x}_d + k_d x_d \quad (51)$$

$$M_{1e} = \frac{M_1}{\phi_{21}^2} \quad C_{1e} = \frac{C_1}{\phi_{21}^2} \quad K_{1e} = \frac{K_1}{\phi_{21}^2} \quad (52)$$

$$P_{1e} = \frac{\phi_{11}p_1(t) + \phi_{21}p_2(t)}{\phi_{21}} \quad \Gamma_{1e} = \frac{\phi_{21}}{M_1} (\phi_{11}m_1 + \phi_{21}m_2)$$

با جایگذاری رابطه (52) در معادله (51) رابطه ساده زیر به دست می‌آید:

$$(52) \rightarrow (51) \Rightarrow M_{1e}\ddot{x}_2(t) + C_{1e}\dot{x}_2(t) + K_{1e}x_2(t) = c_d\dot{x}_d(t) + k_dx_d(t) + P_{1e}(t) - \Gamma_{1e}M_{1e}\ddot{u}_g(t) \quad (53)$$

یادآوری

$$m_d\ddot{x}_d(t) + c_d\dot{x}_d(t) + k_dx_d(t) = -m_d[\ddot{x}_2(t) + \ddot{u}_g(t)] \quad (44)$$

معادلات (44) و (53) شبیه معادله‌های حرکت سیستم SDOF مجهز به TMD در رابطه (29) می‌باشد. با این تفاوت که در حالت MDOF پارامتر  $\Gamma_{1e}$  اضافه شده است.

یادآوری

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c_d\dot{x}_d(t) + k_dx_d(t) + p(t) - m\ddot{u}_g(t) \quad (29)$$

$$m_d\ddot{x}_d(t) + c_d\dot{x}_d(t) + k_dx_d(t) = -m_d[\ddot{u}_g(t) + \ddot{x}(t)]$$

# □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

مشابه حالت SDOF اگر نیروی خارجی و حرکت زمین به صورت سینوسی مانند رابطه زیر در نظر گرفته شود

$$\begin{aligned} \ddot{u}_g(t) &= a_g \sin(\bar{\omega}t) \\ p_i(t) &= p_{0i} \sin(\bar{\omega}t) \end{aligned} \quad (54)$$

پاسخ به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \bar{x}_2 e^{i\bar{\omega}t} \\ x_d(t) &= \bar{x}_d e^{i\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (55)$$

$\bar{x}_d$  و  $\bar{x}_2$  دامنه جواب‌ها می‌باشند که به صورت مختلط هستند.

با جایگذاری روابط (54) و (55) در روابط (44) و (53) دامنه جواب‌ها به دست

$\Rightarrow (53 \& 44) \rightarrow (55), (54)$

می‌آید.

$$\bar{x}_2 = \frac{P_0}{K_{1e}} D_1 e^{i\delta_1} - \frac{a_g M_{1e}}{K_{1e}} D_5 e^{i\delta_5} \quad (56)$$

$D_5$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی زلزله برای سازه

$D_6$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی زلزله برای TMD

$$\bar{x}_d = \frac{P_0}{K_{1e}} D_3 e^{-i\delta_3} - \frac{a_g M_{1e}}{K_{1e}} D_6 e^{i\delta_6}$$

$$P_0 = (\phi_{11} p_{01} + \phi_{21} p_{02}) / \phi_{21} \quad (57)$$

که در آن:

# □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

ضرایب بزرگنمایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_5 = \frac{\sqrt{[(\Gamma_{1e} + \bar{m})f^2 - \Gamma_{1e}\beta^2]^2 + [2\xi_d\beta f(\Gamma_{1e} + \bar{m})]^2}}{|D_0|} \quad D_6 = \frac{\sqrt{[1 + \beta^2(\Gamma_{1e} - 1)]^2 + (2\xi\beta)^2}}{|D_0|} \quad (58)$$

که در آن

$$\bar{m} = \frac{m_d}{M_{1e}}, \quad f = \frac{\omega_d}{\omega_1}, \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \quad (59)$$

و همچنین

$$\tan(\alpha_2) = \frac{2\xi_d\beta f(\Gamma_{1e} + \bar{m})}{(\Gamma_{1e} + \bar{m})f^2 - \Gamma_{1e}\beta^2}$$

$$\tan(\alpha_3) = \frac{2\xi\beta}{1 + \beta^2(\Gamma_{1e} - 1)} \quad (60)$$

$$\delta_5 = \alpha_2 - \delta_3$$

$$\delta_6 = \alpha_3 - \delta_3$$

## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

تا اینجا روابطی که به دست آمد برای یک سازه دو درجه آزادی مجهز به TMD می‌باشد با این فرض که مود اول حاکم باشد و TMD به درجه آزادی 2 متصل شده است. ادامه کار مشابه حالت SDOF می‌باشد:

- با انتخاب  $\bar{m}$  جرم TMD به دست می‌آید:

$$(59) \Rightarrow \bar{m} = \frac{m_d}{M_{1e}} \Rightarrow m_d = \bar{m} M_{1e} \quad (61)$$

- از منحنی  $\bar{m}$  و  $f_{opt}$  مقدار  $f_{opt}$  و از منحنی  $\bar{m}$  و  $\xi_{d_{opt}}$  مقدار  $\xi_{d_{opt}}$  استخراج می‌گردد.

$$(59) \Rightarrow f_{opt} = \frac{\omega_d}{\omega_1} \Rightarrow \omega_d = f_{opt} \omega_1 \Rightarrow k_d = m_d \omega_d^2 \quad (62)$$

$$c_d = 2\xi_{d_{opt}} m_d \omega_d \quad (63)$$

# طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

در حالت کلی اگر مود  $i$  ام کنترل کننده طرح باشد و TMD به درجه آزادی  $n$  ام متصل شده باشد در عملیاتی مشابه،  $i$  امین معادله حرکت در مختصات تعمیم یافته به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ji} p_j(t) - \sum_{j=1}^n \phi_{ji} m_j \ddot{u}_g + \phi_{ni} [c_d \dot{x}_d + k_d x_d] \quad (64)$$

(45)  $\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2i} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \cdots & \phi_{ii} & \cdots & \phi_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{ni} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \Rightarrow x_n = \phi_{n1} y_1 + \phi_{n2} y_2 + \cdots + \phi_{ni} y_i + \cdots + \phi_{nn} y_n \Rightarrow x_n = \phi_{ni} y_i \quad (65)$$

از رابطه (65) می‌توان پاسخ مودال درجه آزادی  $i$  ام را برحسب پاسخ طبقه بام نوشت:

$$(65) \Rightarrow y_i = \frac{x_n}{\phi_{ni}} \quad (66)$$

با جایگذاری رابطه (66) در  $i$  امین معادله حرکت، رابطه (64) و همچنین تقسیم طرفین تساوی به  $\phi_{ni}$  خواهیم داشت:

$$(66) \rightarrow (64) \stackrel{\div \phi_{ni}}{\Rightarrow} \frac{M_i}{\phi_{ni}^2} \ddot{x}_n + \frac{C_i}{\phi_{ni}^2} \dot{x}_n + \frac{K_i}{\phi_{ni}^2} x_n = \frac{1}{\phi_{ni}} \sum_{j=1}^n \phi_{ji} p_j(t) - \frac{1}{\phi_{ni}} \sum_{j=1}^n \phi_{ji} m_j \ddot{u}_g + [c_d \dot{x}_d + k_d x_d] \quad (67)$$

با تعریف روابط زیر:

$$M_{ie} = \frac{M_i}{\phi_{ni}^2} \quad C_{ie} = \frac{C_i}{\phi_{ni}^2} \quad K_{ie} = \frac{K_i}{\phi_{ni}^2} \quad (68)$$

$$P_{ie} = \frac{1}{\phi_{ni}} \sum_{j=1}^n \phi_{ji} p_j(t) \quad \Gamma_{ie} = \phi_{ni} \sum_{j=1}^n \phi_{ji} m_j$$

با جایگذاری رابطه (68) در معادله (67) رابطه ساده زیر به دست می‌آید:

$$(68) \rightarrow (67) \Rightarrow M_{ie} \ddot{x}_n + C_{ie} \dot{x}_n + K_{ie} x_n = +c_d \dot{x}_d + k_d x_d + P_{ie} - \Gamma_{ie} M_{ie} \ddot{u}_g \quad (69)$$

یادآوری

$$m_d \ddot{x}_d(t) + c_d \dot{x}_d(t) + k_d x_d(t) = -m_d [\ddot{x}_2(t) + \ddot{u}_g(t)] \quad (44)$$

معادلات (44) و (69) شبیه معادله‌های حرکت سیستم SDOF مجهز به TMD در رابطه (29) می‌باشد. با این

تفاوت که در حالت MDOF پارامتر  $\Gamma_{ie}$  اضافه شده است.

# طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

مشابه حالت SDOF اگر نیروی خارجی و حرکت زمین به صورت سینوسی مانند رابطه (54) در نظر گرفته شود پاسخ به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \bar{x}_n e^{i\bar{\omega}t} \\ x_d(t) &= \bar{x}_d e^{i\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (70)$$

$\bar{x}_d$  و  $\bar{x}_n$  دامنه جواب‌ها می‌باشند که به صورت مختلط هستند.

با جایگذاری روابط (54) و (70) در روابط (44) و (69) دامنه جواب‌ها به دست می‌آید.

$(54), (70) \rightarrow (44 \& 69) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &= \frac{P_0}{K_{ie}} D_1 e^{i\delta_1} - \frac{a_g M_{ie}}{K_{ie}} D_5 e^{i\delta_5} \\ \bar{x}_d &= \frac{P_0}{K_{ie}} D_3 e^{-i\delta_3} - \frac{a_g M_{ie}}{K_{ie}} D_6 e^{i\delta_6} \end{aligned} \quad (71)$$

$D_5$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی زلزله برای سازه

$D_6$ : ضریب بزرگی مربوط به نیروی زلزله برای TMD

که در آن:

$$P_0 = \frac{1}{\phi_{ni}} \sum_{j=1}^n \phi_{ji} p_{0j} \quad (72)$$

# طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

ضرایب بزرگنمایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_5 = \frac{\sqrt{[(\Gamma_{ie} + \bar{m})f^2 - \Gamma_{ie}\beta^2]^2 + [2\xi_d\beta f(\Gamma_{ie} + \bar{m})]^2}}{|D_0|} \quad D_6 = \frac{\sqrt{[1 + \beta^2(\Gamma_{ie} - 1)]^2 + (2\xi\beta)^2}}{|D_0|} \quad (73)$$

که در آن

$$\bar{m} = \frac{m_d}{M_{ie}}, \quad f = \frac{\omega_d}{\omega_i}, \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \quad (74)$$

و همچنین

$$\tan(\alpha_2) = \frac{2\xi_d\beta f(\Gamma_{ie} + \bar{m})}{(\Gamma_{ie} + \bar{m})f^2 - \Gamma_{ie}\beta^2}$$

$$\tan(\alpha_3) = \frac{2\xi\beta}{1 + \beta^2(\Gamma_{ie} - 1)} \quad (75)$$

$$\delta_5 = \alpha_2 - \delta_3$$

$$\delta_6 = \alpha_3 - \delta_3$$

## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

تا اینجا روابطی که به دست آمد برای یک سازه  $n$  درجه آزادی مجهز به TMD می‌باشد با این فرض که مود  $i$  اُم حاکم باشد و TMD به درجه آزادی  $n$  متصل شده است. ادامه کار مشابه حالت SDOF می‌باشد:

- با انتخاب  $\bar{m}$  جرم TMD به دست می‌آید:

$$(74) \Rightarrow \bar{m} = \frac{m_d}{M_{ie}} \Rightarrow m_d = \bar{m} M_{ie} \quad (76)$$

- از منحنی  $\bar{m}$  و  $f_{opt}$  مقدار  $f_{opt}$  و از منحنی  $\bar{m}$  و  $\xi_{d,opt}$  مقدار  $\xi_{d,opt}$  استخراج می‌گردد.

$$(74) \Rightarrow f_{opt} = \frac{\omega_d}{\omega_i} \Rightarrow \omega_d = f_{opt} \omega_i \Rightarrow k_d = m_d \omega_d^2 \quad (77)$$

$$c_d = 2\xi_{d,opt} m_d \omega_d \quad (78)$$

## TMD systems

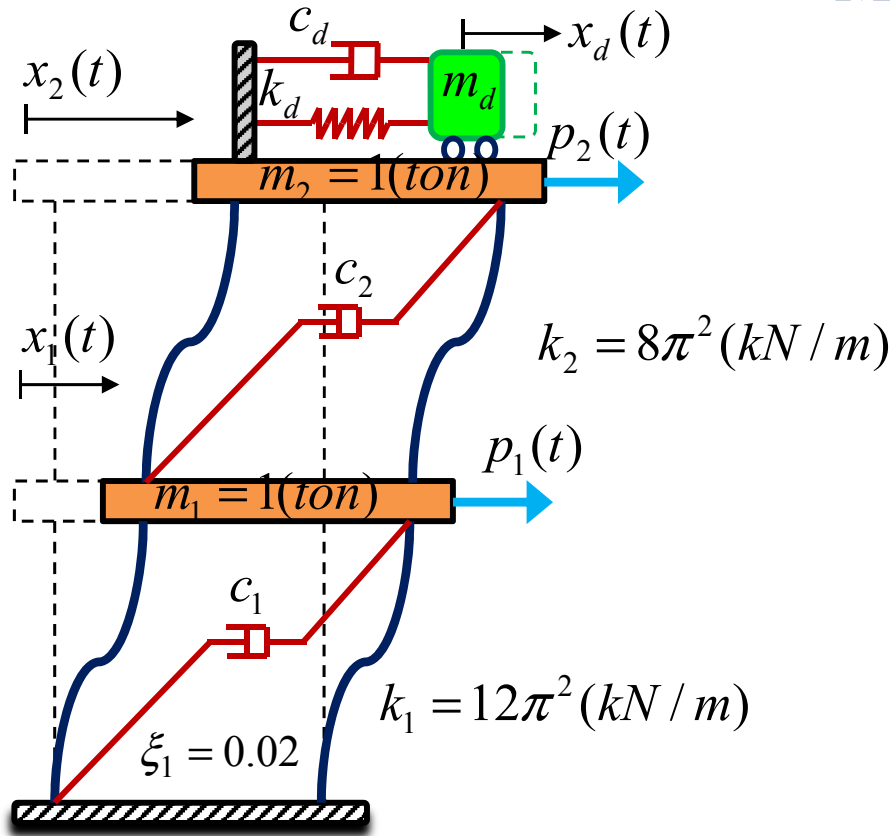
## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

مثال 3- شکل مقابل یک سیستم MDOF مجهز به TMD را نشان می‌دهد. مطلوب است طراحی بهینه TMD مورد نظر بر اساس  $\bar{m} = 0.01$ . همچنین پاسخ سیستم را تحت اثر بارگذاری‌های زیر بررسی نمایید. (میرایی با سختی رابطه خطی دارد.)

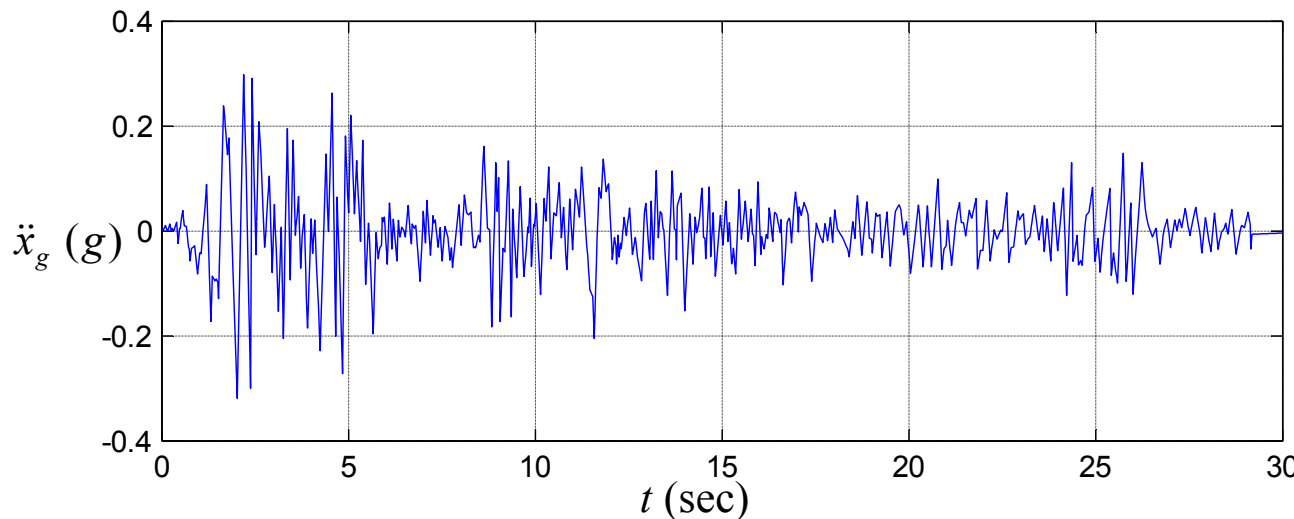
الف) بار هارمونیک:

$$p_1(t) = 500 \sin(\omega_1 t) \quad , \quad p_2(t) = 1000 \sin(\omega_1 t)$$

ب) زلزله El-Centro



شتاب نگاشت زلزله Elcentro



$$[\mathbf{m}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad [\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 197.39 & -78.957 \\ -78.957 & 78.957 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad \{\boldsymbol{\omega}\} = \begin{Bmatrix} 6.2832 \\ 15.391 \end{Bmatrix} \quad [\boldsymbol{\Phi}] = \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0.00636$$

$$\xi_2 = 0.04899$$

$$\Rightarrow c_1 = 0.75398 \text{ (kN .sec/ m)}$$

$$\Rightarrow c_2 = 0.50265 \text{ (kN .sec/ m)}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1.2566 & -0.50265 \\ -0.50265 & 0.50265 \end{bmatrix} \times 10^3$$

پاسخ مثال 3-

$$= \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow M_1 = 1250$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 197.39 \times 10^3 & -78.957 \times 10^3 \\ -78.957 \times 10^3 & 78.957 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow K_1 = 49348$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1.2566 \times 10^3 & -0.50265 \times 10^3 \\ -0.50265 \times 10^3 & 0.50265 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow C_1 = 314.16$$

$$= \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow M_2 = 5000$$

$$= \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 197.39 \times 10^3 & -78.957 \times 10^3 \\ -78.957 \times 10^3 & 78.957 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow K_2 = 1184400$$

$$= \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1.2566 \times 10^3 & -0.50265 \times 10^3 \\ -0.50265 \times 10^3 & 0.50265 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow C_2 = 7539.8$$

## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

پاسخ مثال 3- با فرض آن که اگر مود اول حاکم باشد:

$$M_{1e} = 1250$$

$$m_d = 12.5 \text{ (kg)}$$

برای میرایی  $\xi_1 = 0.02$  اعداد مورد نیاز از نمودار خوانده می‌شود:

$$f_{opt} = 0.982$$

(2 اسلاید بعدی)

$$\xi_{dopt} = 0.062$$

$$\omega_d = 6.1701$$

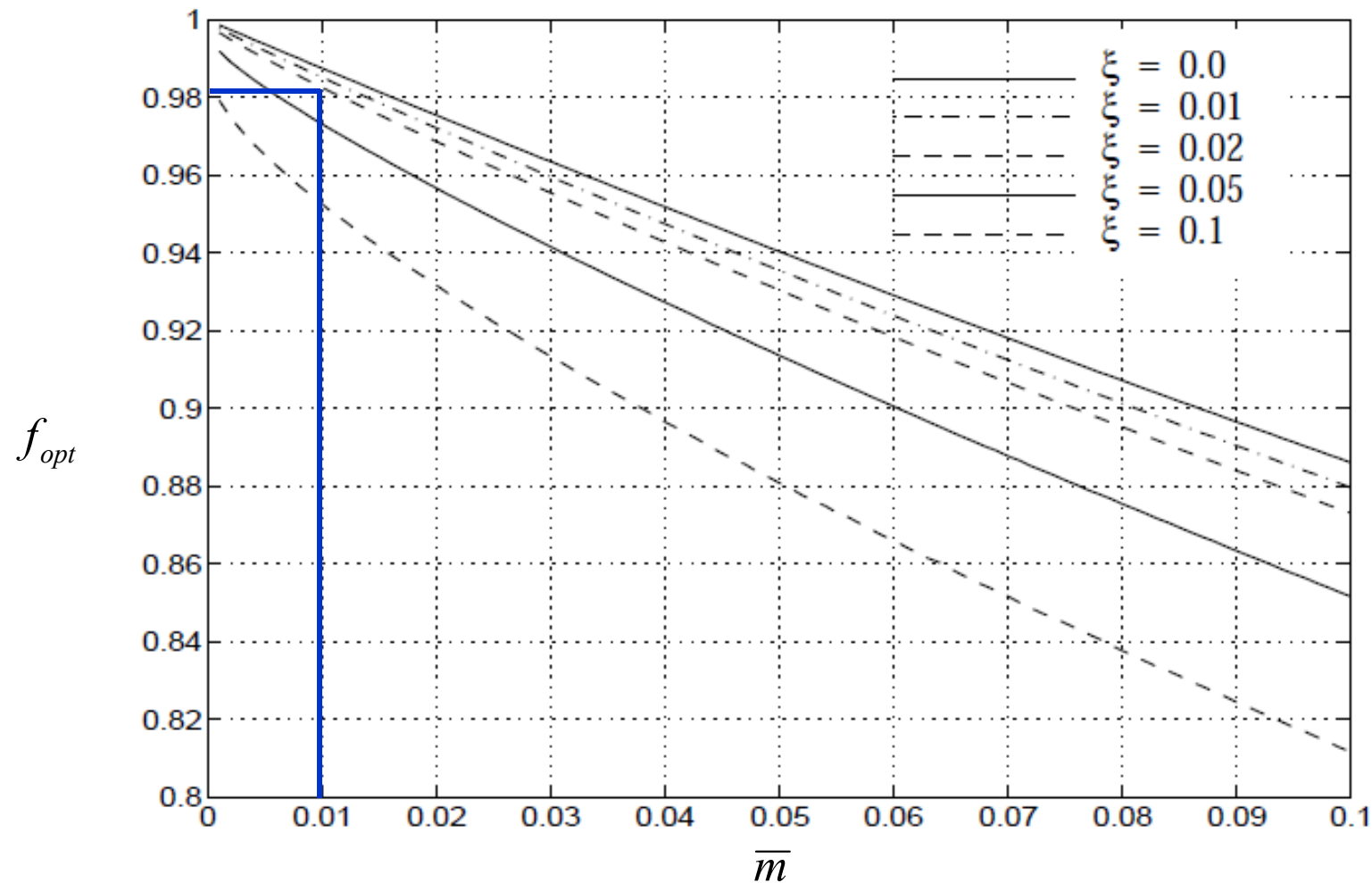
$$k_d = 475.87 \text{ (N / m)}$$

$$c_d = 9.5636 \text{ (N .sec/ m)}$$

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

$$\begin{cases} \bar{m} = 0.01 \\ \xi_1 = 0.02 \end{cases} \Rightarrow \text{از منحنی } \bar{m} \text{ و } f_{opt} \Rightarrow \boxed{f_{opt} = 0.982}$$

پاسخ مثال 2-

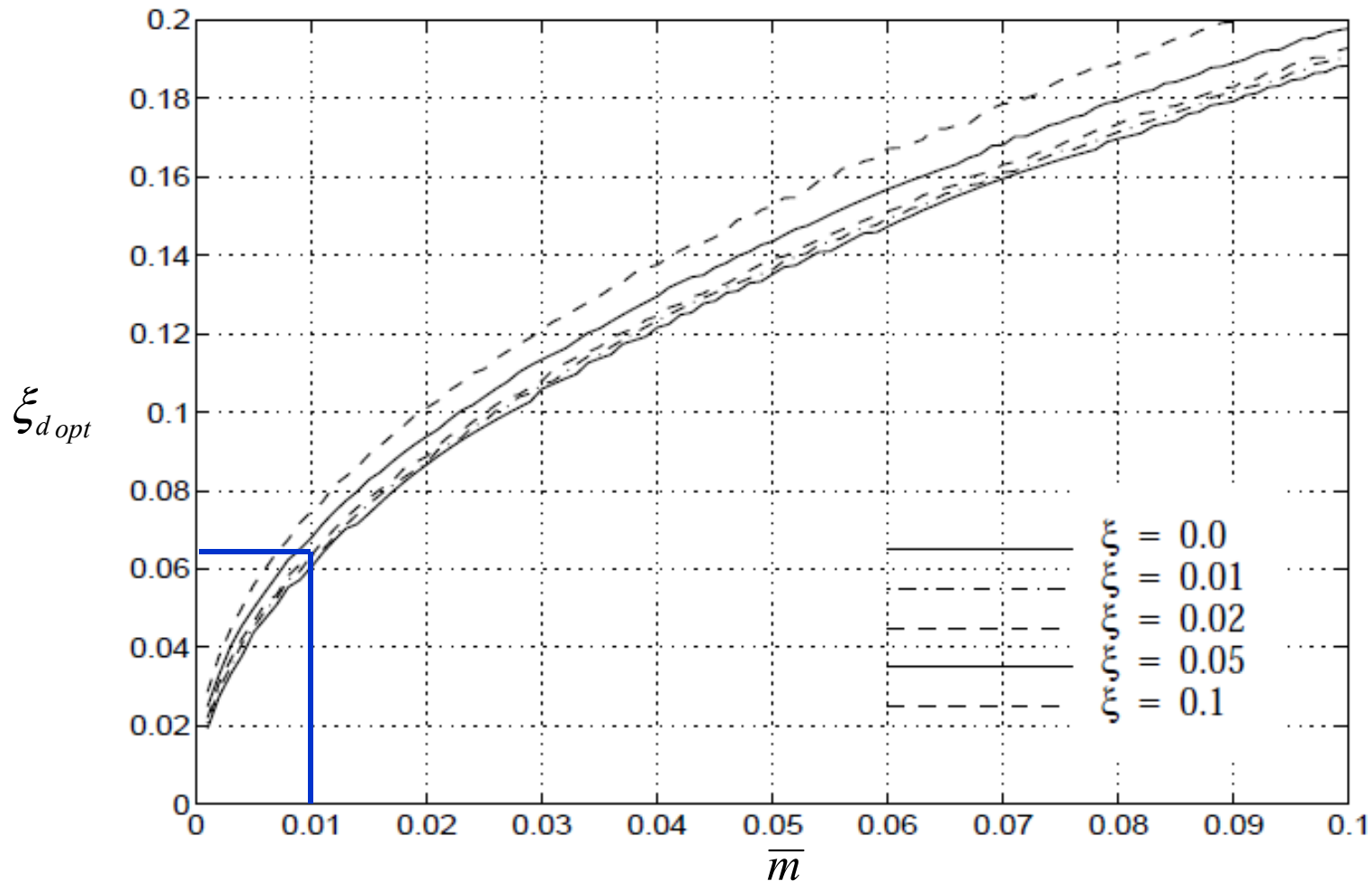


ضریب فرکانس بهینه برای TMD

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

$$\begin{cases} \bar{m} = 0.01 \\ \xi_1 = 0.02 \end{cases} \Rightarrow \xi_{d\,opt} \text{ و } \bar{m} \text{ از منحنی} \Rightarrow \xi_{d\,opt} = 0.062$$

پاسخ مثال 2-

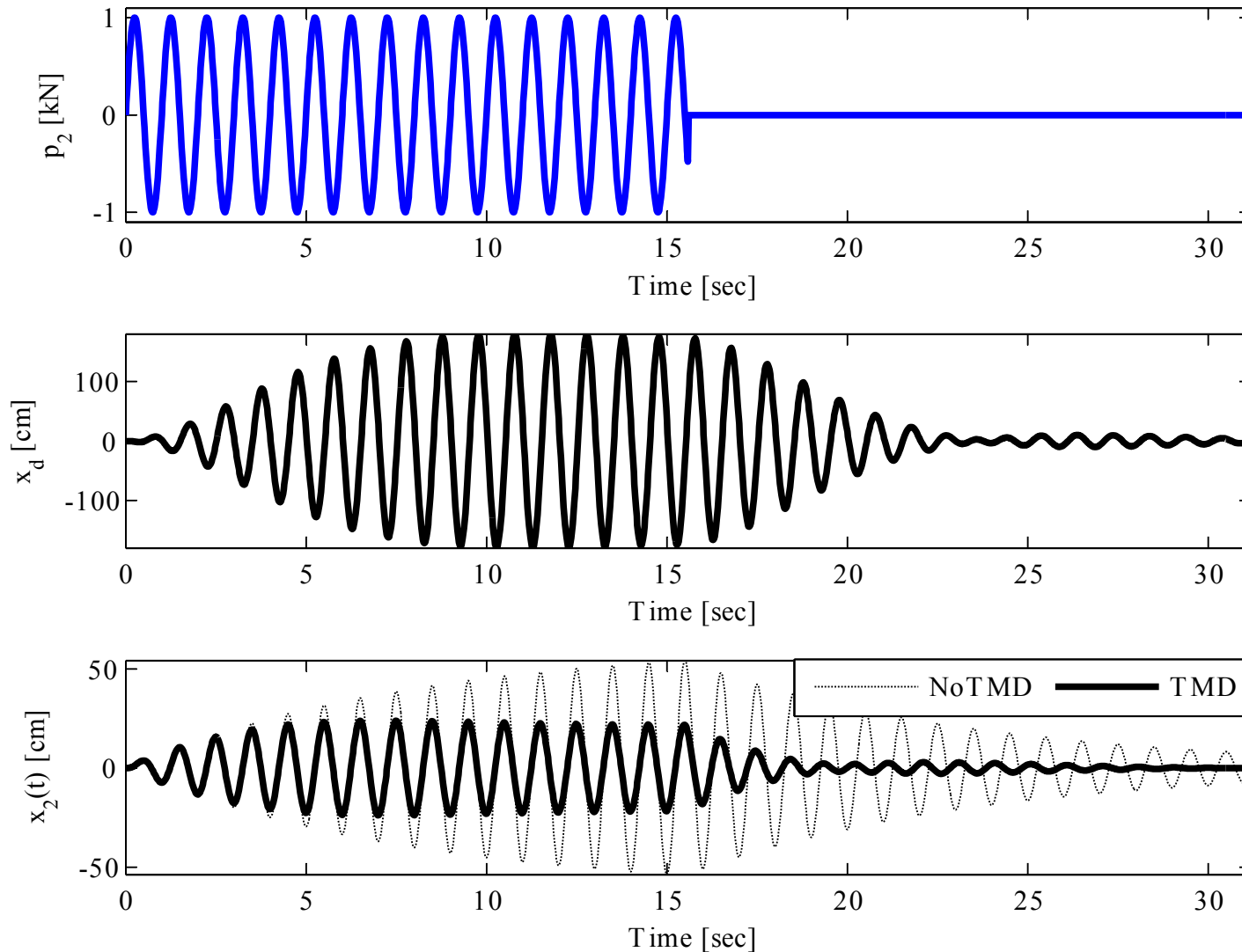


ضریب میرایی بهینه برای TMD

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

Matlab Code (L05Example03a.m)

پاسخ مثال 3- با فرض آن که اگر مود اول حاکم باشد:

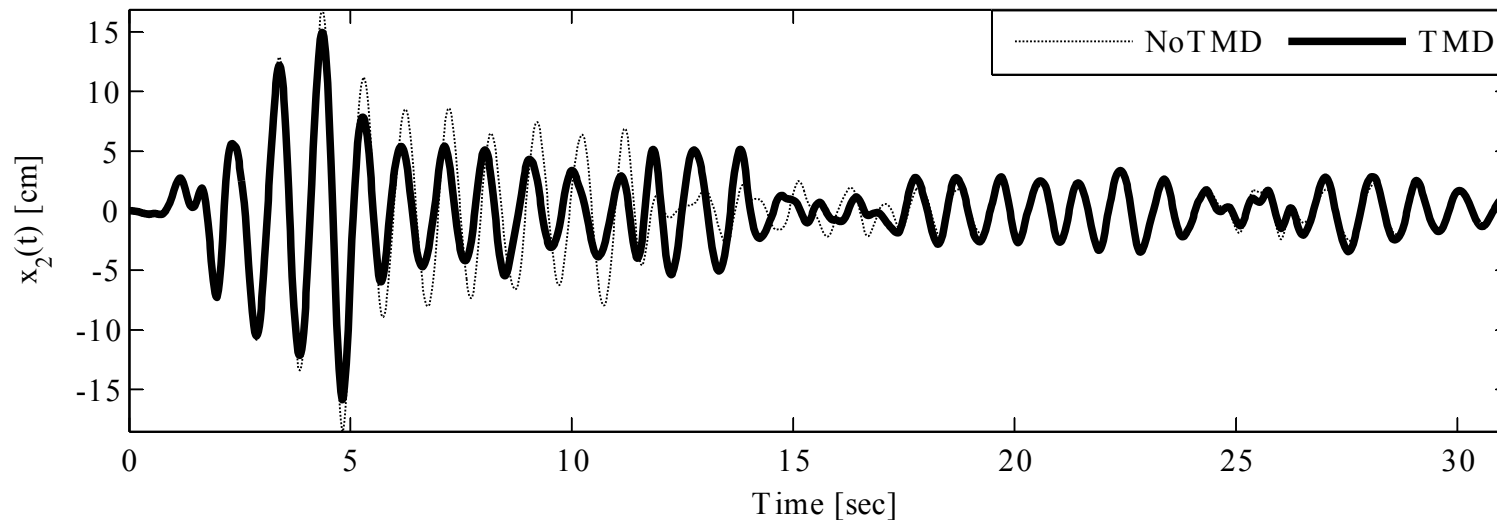
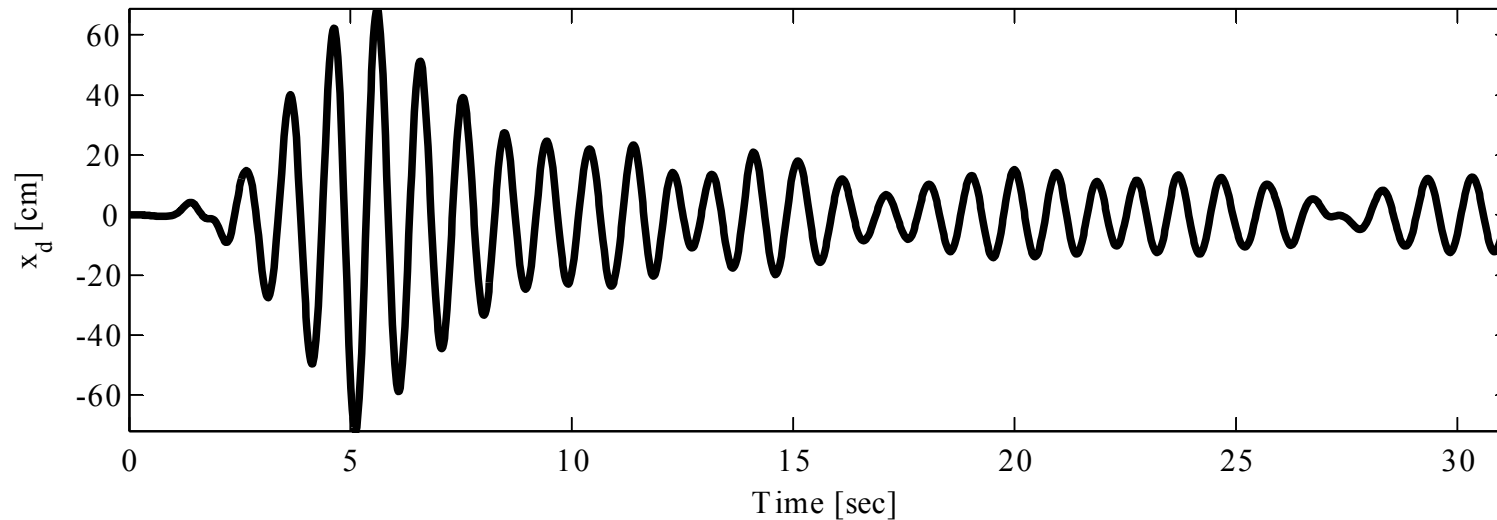


نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم MDOF در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر بار هارمونیک در حالت تشدید.

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

Matlab Code (L05Example03b.m)

پاسخ مثال 3- با فرض آن که اگر مود اول حاکم باشد:



نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم MDOF در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر زلزله Elcentro.

## □ طراحی TMD برای سیستم‌های MDOF

پاسخ مثال 3- با فرض آن که اگر مود دوم حاکم باشد:

$$M_{2e} = 5000$$

$$m_d = 50 \text{ (kg)}$$

برای میرایی  $\xi_2 = 0.04899$  اعداد مورد نیاز از نمودار خوانده می‌شود:

$$\Rightarrow f_{opt} = 0.972$$

(2 اسلاید بعدی)

$$\Rightarrow \xi_{dopt} = 0.068$$

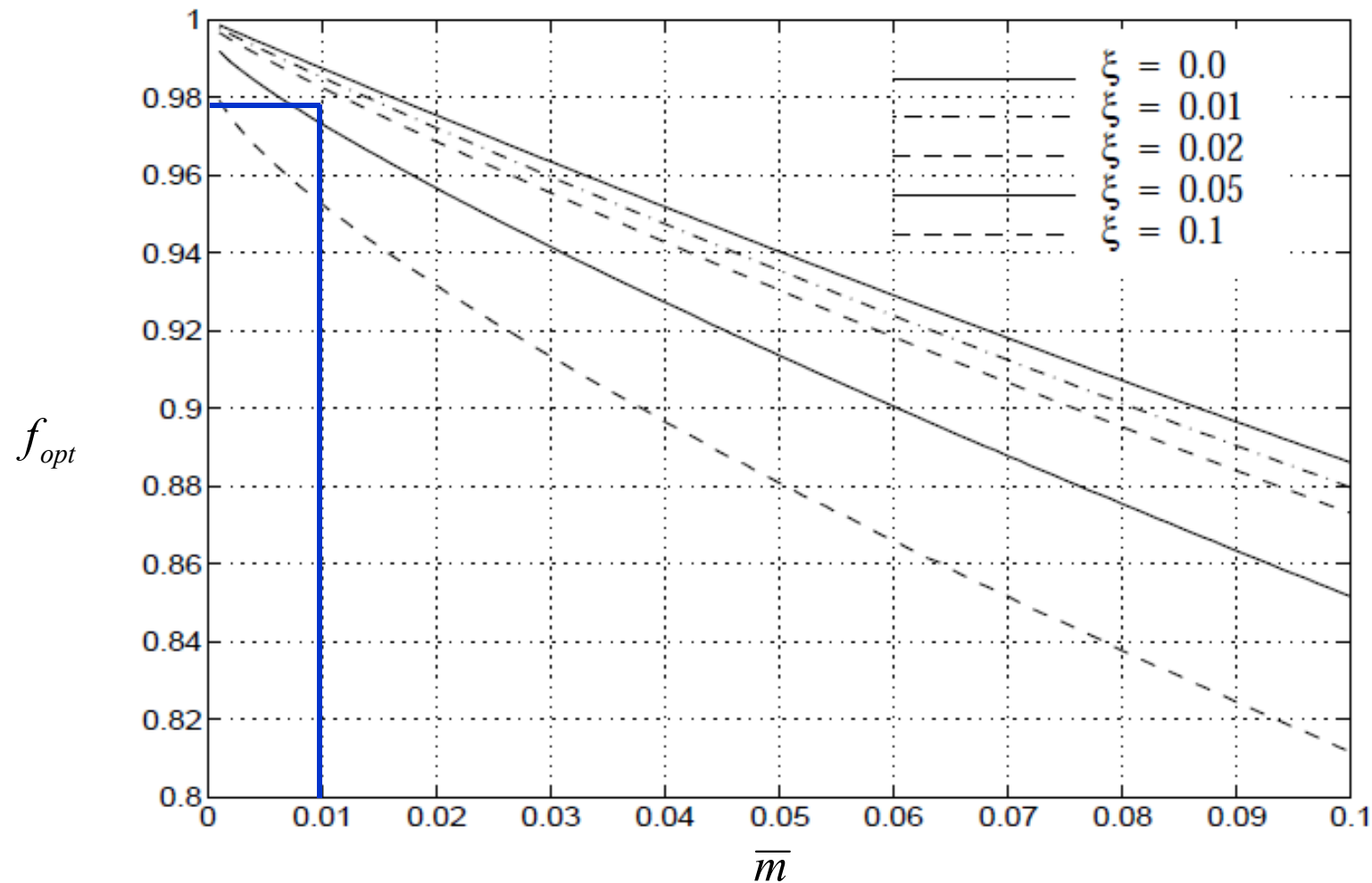
$$\omega_d = 14.96$$

$$k_d = 11190 \text{ (N / m)}$$

$$c_d = 101.73 \text{ (N .sec/ m)}$$

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m} = 0.01 \\ \xi_2 = 0.04899 \end{array} \right. \Rightarrow f_{opt} \text{ و } \bar{m} \text{ از منحنی } \Rightarrow f_{opt} = 0.972$ 
پاسخ مثال 2-

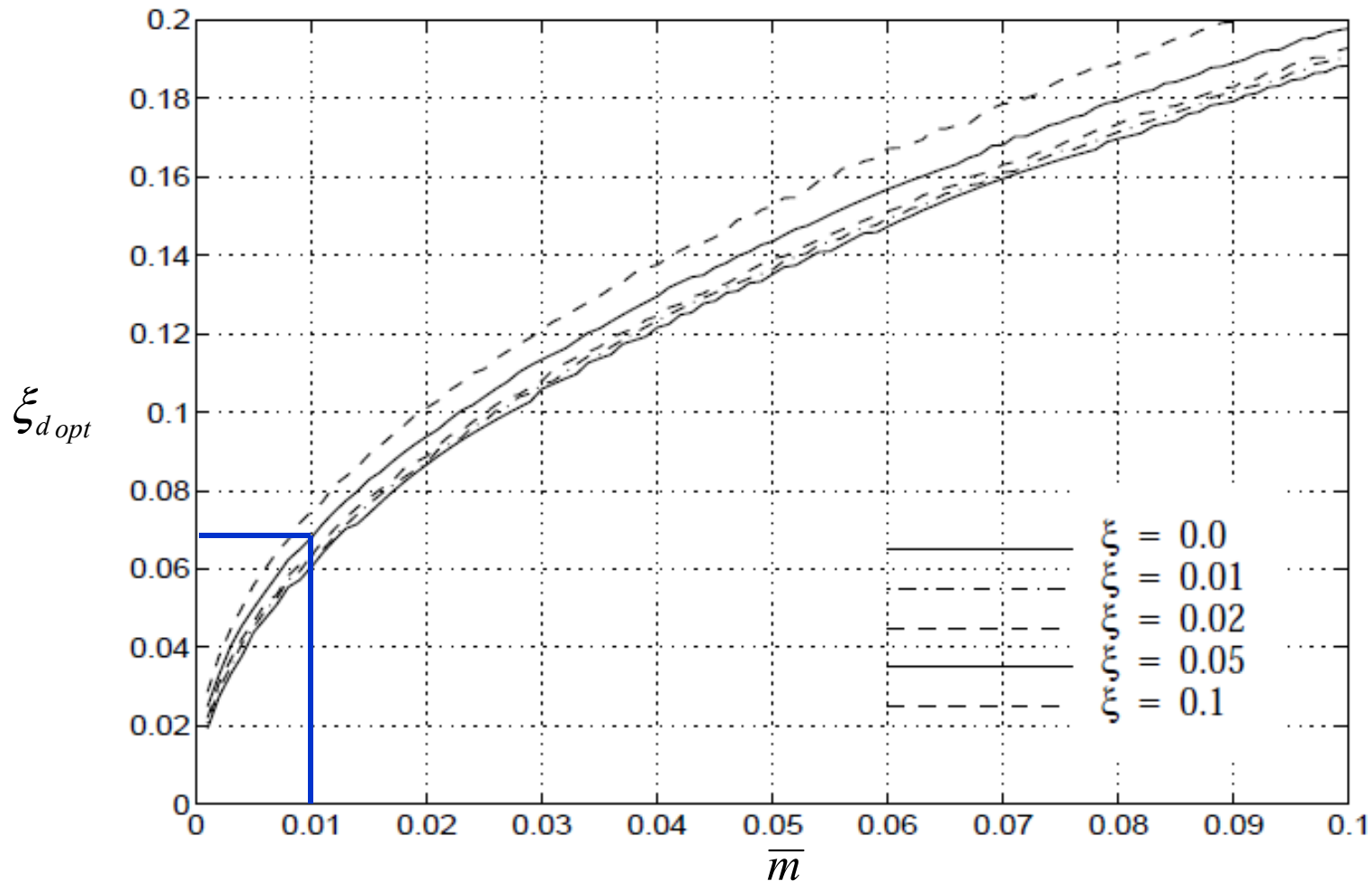


ضریب فرکانس بهینه برای TMD

# طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

پاسخ مثال 2-

$$\begin{cases} \bar{m} = 0.01 \\ \xi_2 = 0.04899 \end{cases} \Rightarrow \xi_{d\,opt} \text{ و } \bar{m} \text{ از منحنی} \Rightarrow \xi_{d\,opt} = 0.068$$

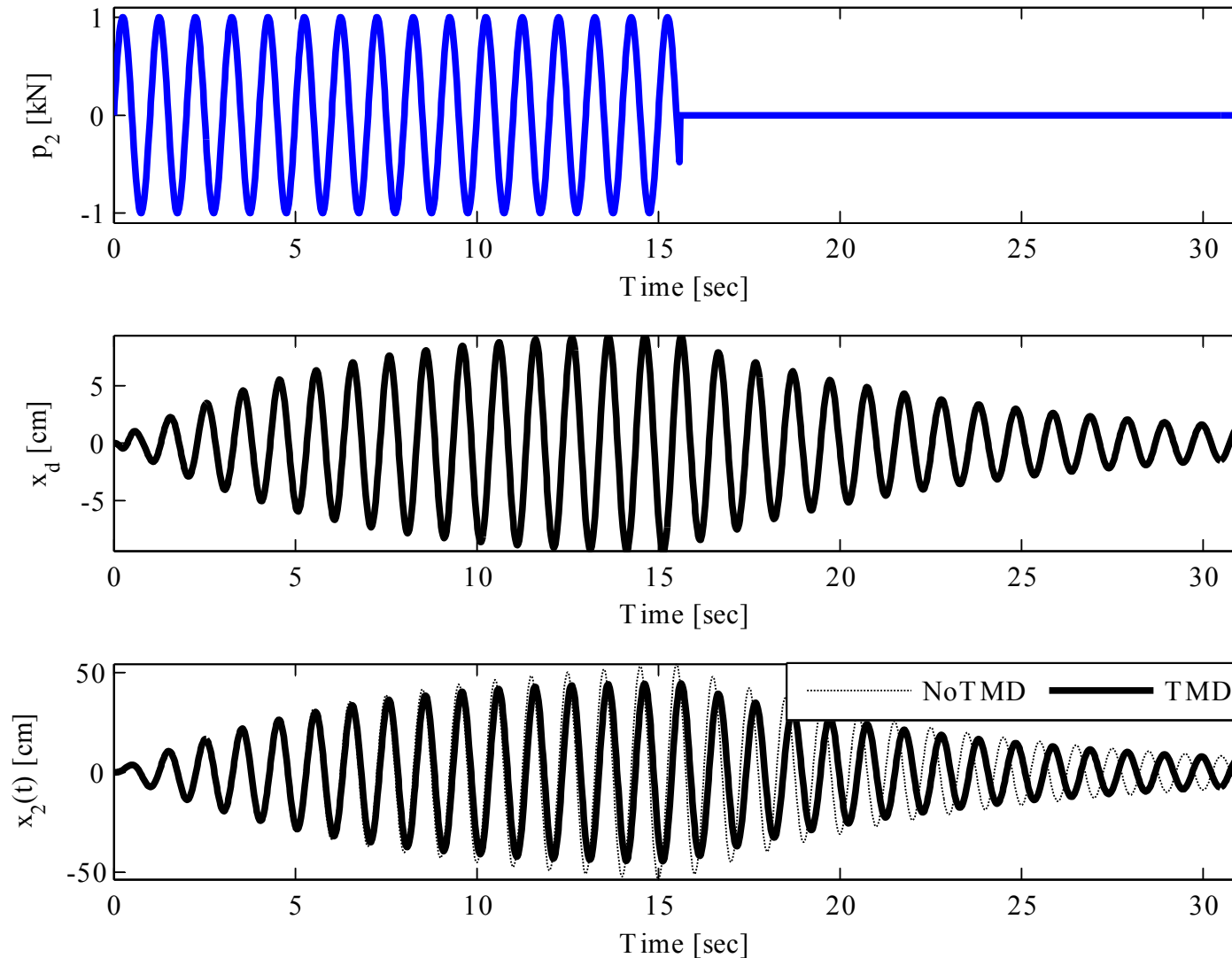


ضریب میرایی بهینه برای TMD

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

Matlab Code (L05Example03a.m)

پاسخ مثال 3- با فرض آن که اگر مود دوم حاکم باشد:

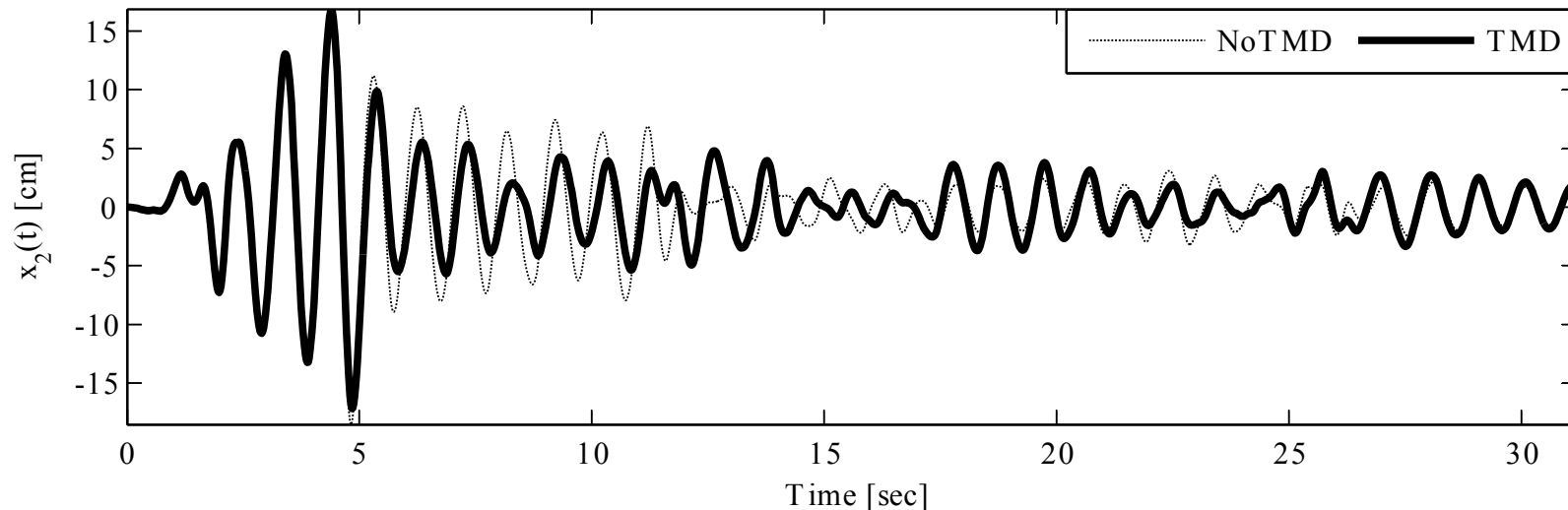
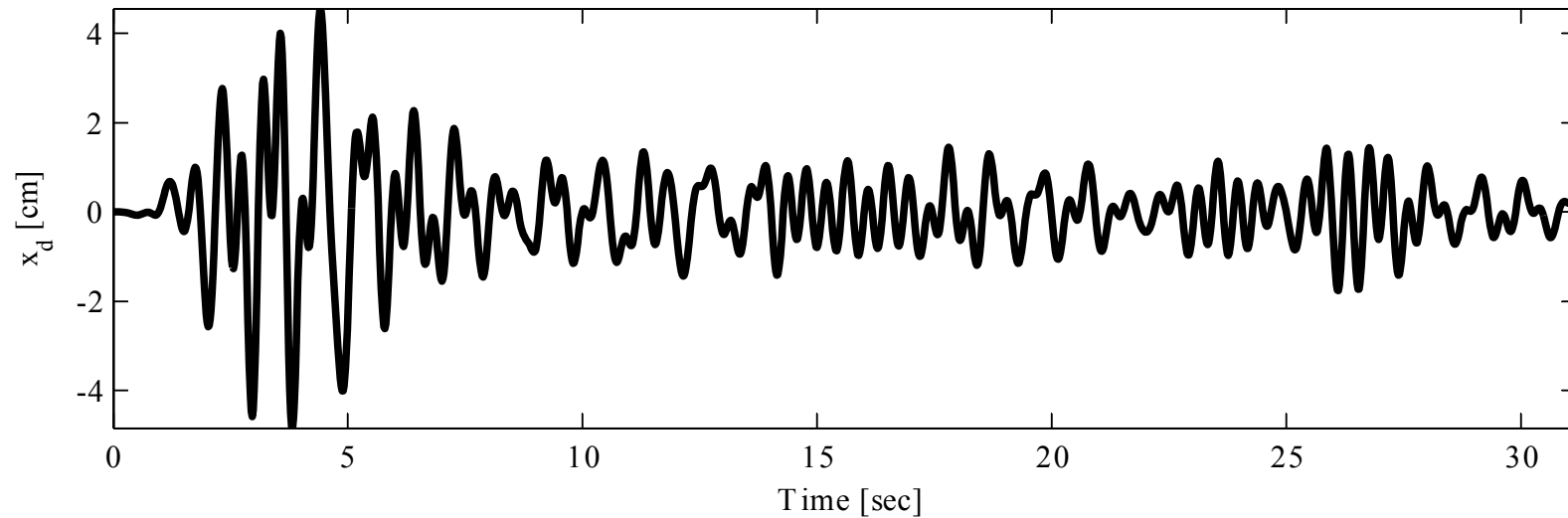


نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم MDOF در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر بار هارمونیک در حالت تشدید.

# □ طراحی مقدماتی TMD برای سیستم‌های SDOF تحت اثر نیروی خارجی

Matlab Code (L05Example03b.m)

پاسخ مثال 3- با فرض آن که اگر مود دوم حاکم باشد:



نمودار تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی سیستم MDOF در دو حالت کنترل شده و کنترل نشده تحت اثر زلزله Elcentro.