



دانشگاه کردستان  
University of Kurdistan  
زانکۆی کوردستان

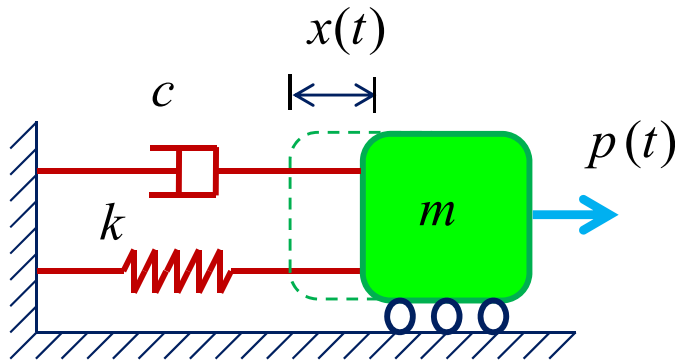
# Structural Control

## Optimal Damping Distribution

**By: Kaveh Karami**

**Associate Prof. of Structural Engineering**

**<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>**



میرایی: عاملی که باعث استهلاک تدریجی ارتعاش آزاد یک سیستم می شود را میرایی می نامند. به عبارت دیگر میرایی روند یا ابزاری است که باعث جذب و استهلاک انرژی ورودی به سازه تحت اثر تحریکات خارجی شده که منجر به کاهش پاسخ سازه می گردد.

طبق اصل بقای انرژی، مجموع انرژی جنبشی، پتانسیل و مستهلک شده همواره ثابت و برابر با انرژی ورودی (کل) می باشد.

$$E_I(t) + E_D(t) + E_S(t) = E_P(t) \quad (1)$$

که در آن

$E_S(t)$ : انرژی پتانسیل (انرژی جذب شده یا انرژی باقیمانده در سازه)

$E_I(t)$ : انرژی جنبشی (ناشی از نیروی اینرسی)

$E_D(t)$ : انرژی ناشی از میرایی (انرژی مستهلک شده)

$E_P(t)$ : انرژی ناشی از نیروی خارجی (انرژی ورودی یا انرژی کل)

$$E_S(t) = \frac{1}{2} k x^2(t)$$

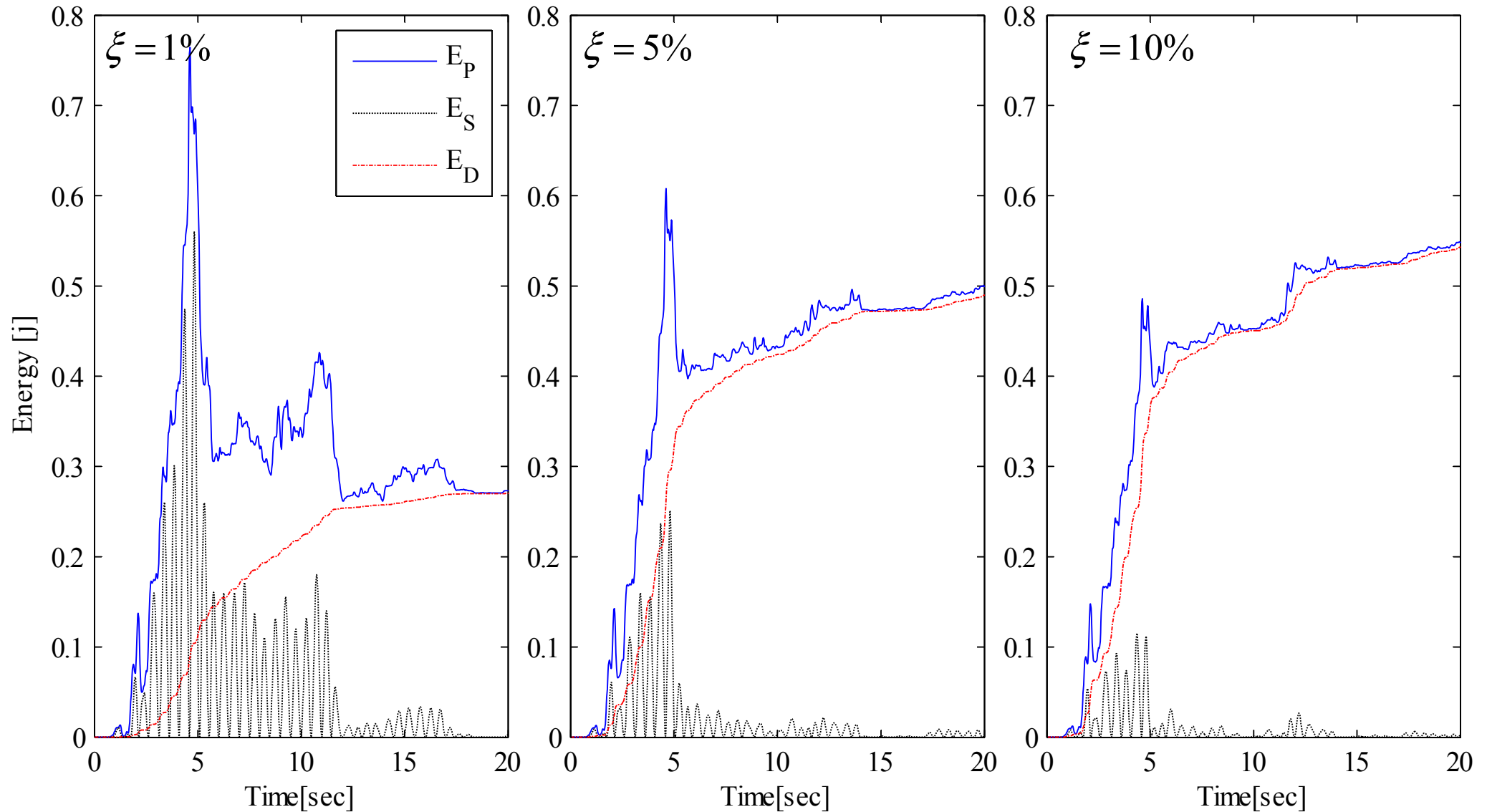
$$E_I(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$$

$$E_D(t) = \int_0^t c \dot{x}^2 dt$$

$$E_P(t) = \int_0^x p(t) dx = \int_0^t p(t) \dot{x} dt$$

(2)

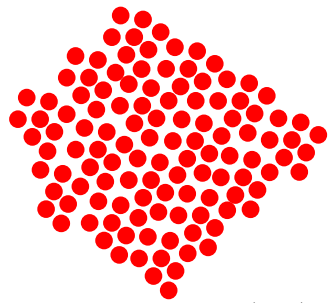
با افزایش میرایی سیستم، انرژی مستهلک شده  $E_D$  افزایش و انرژی ذخیره شده  $E_S$  کاهش می یابد.



ساختر انرژی در یک سیستم SDOF تحت اثر زلزله Elcentro.  $m = 1 (kg)$ ,  $T = 1 (sec)$

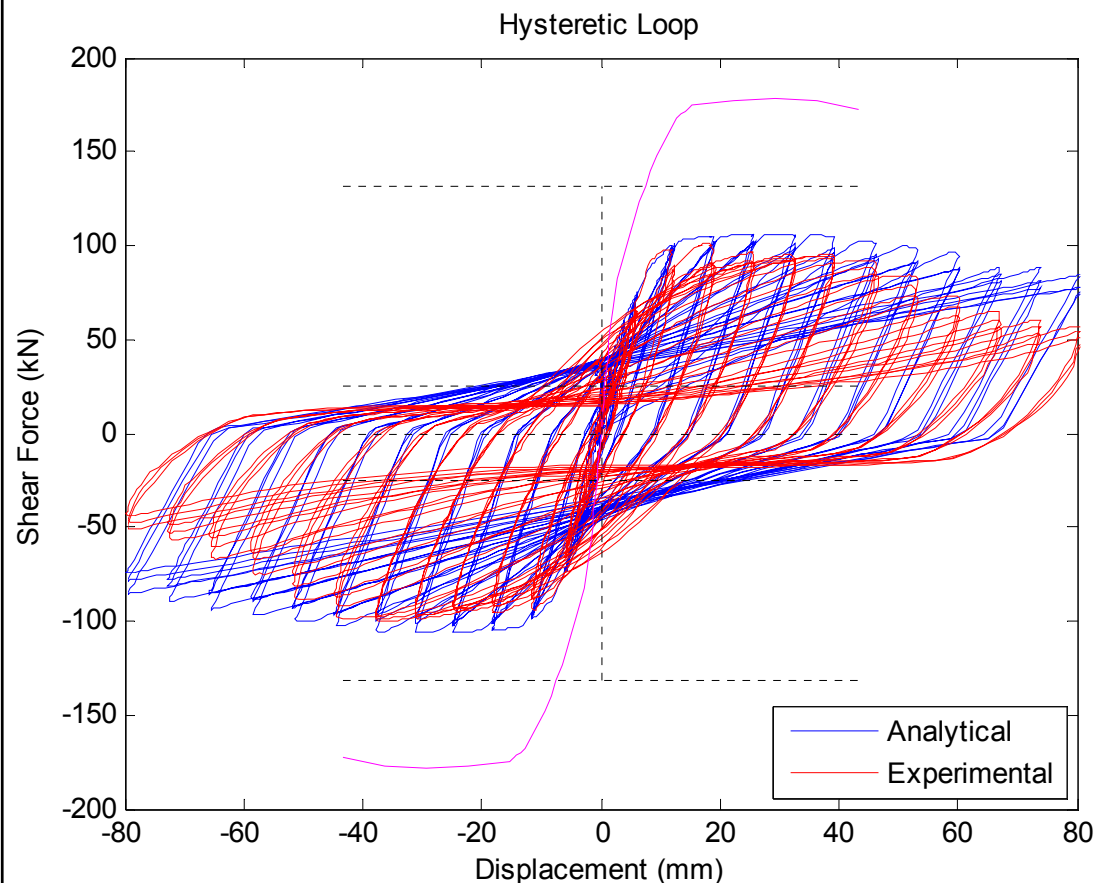
**1- میرایی چسبندگی (لزجی) Viscous Damping:** این میرایی به دلیل چسبندگی مصالح به یکدیگر می باشد و به این علت به آن میرایی مصالح نیز می گویند. مقدار میرایی چسبندگی تابعی از سرعت حرکت است.

**2- میرایی اصطکاکی (کولومبی) Friction (Coulomb) Damping:** این میرایی به علت اصطکاک بین قطعه های یک سازه روی یکدیگر ایجاد می شود. به علت خصوصیات مواد تشکیل دهنده سازه و اینکه ذرات تشکیل دهنده در حرکت می خواهند روی هم بلغزند؛ بنابراین اصطکاک تولید می شود. این اصطکاک باعث تبدیل انرژی پتانسیل به انرژی حرارتی است. مانند اصطکاک در اتصالات فولادی، باز و بسته شدن ترک های مویی در بتن و اصطکاک میان عناصر سازه ای و غیر سازه ای (مانند دیوارهای جداساز).



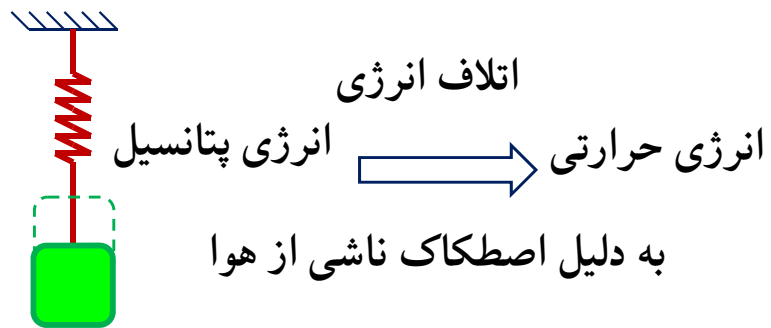
مولکول های به هم پیوسته سازه

**3- میرایی پسماند Hysteretic Damping:** این میرایی به علت وارد شدن مصالح به ناحیه غیرخطی در حرکت رفت و برگشتی ایجاد می شود. مشروط بر آن که نیرو رفت و برگشتی باشد و مصالح وارد ناحیه غیرخطی شوند.

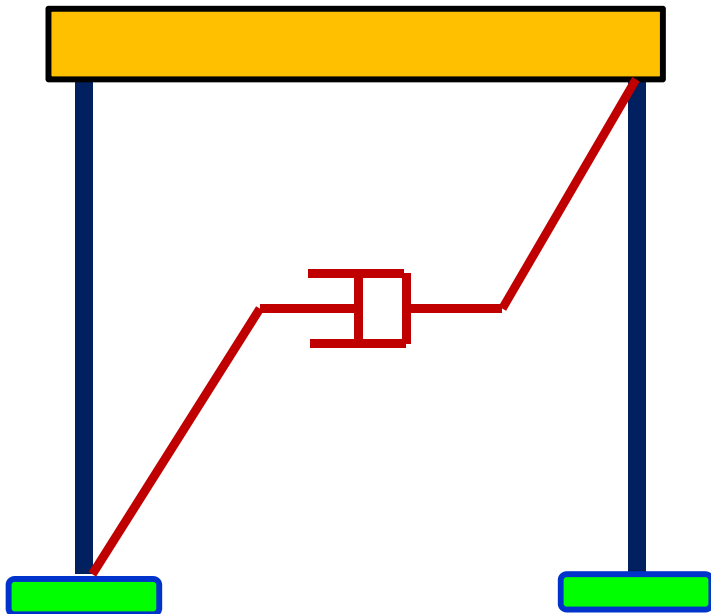


- نمودار نیرو جابجایی در بارگذاری رفت و برگشتی را منحنی هیسترسیس می نامند.
- مساحت محصور شده در منحنی هیسترسیس معرف ظرفیت جذب انرژی جهت استهلاک است. هر چه مساحت بیشتر باشد میرایی پسماند بیشتر است.
- این منحنی ها نشان دهنده سختی و زمان جاری شدن است.
- عوامل موثر بر این منحنی ها: سیستم سازه ای، مواد تشکیل دهنده، نوع اتصالات (Configuration) و اثر میرایی است.
- معمولا در عمل به دلیل اثر پینچینگ (Pinching) نتایج آزمایشگاهی با تئوری قدری متفاوت است؛ و آن به دلیل ایجاد ترک در جوش، لغزش در اتصالات اصطکاکی پیچ ها، باز و بسته شدن ترک در بتن و عدم پیوستگی کامل بین آرماتور و بتن می باشند.

4- **میرایی خارجی External Damping**: این میرایی به علت شرایط محیطی اطراف، بر سازه به وجود می‌آید که در حالت‌های متعارف مقدار آن کم است.



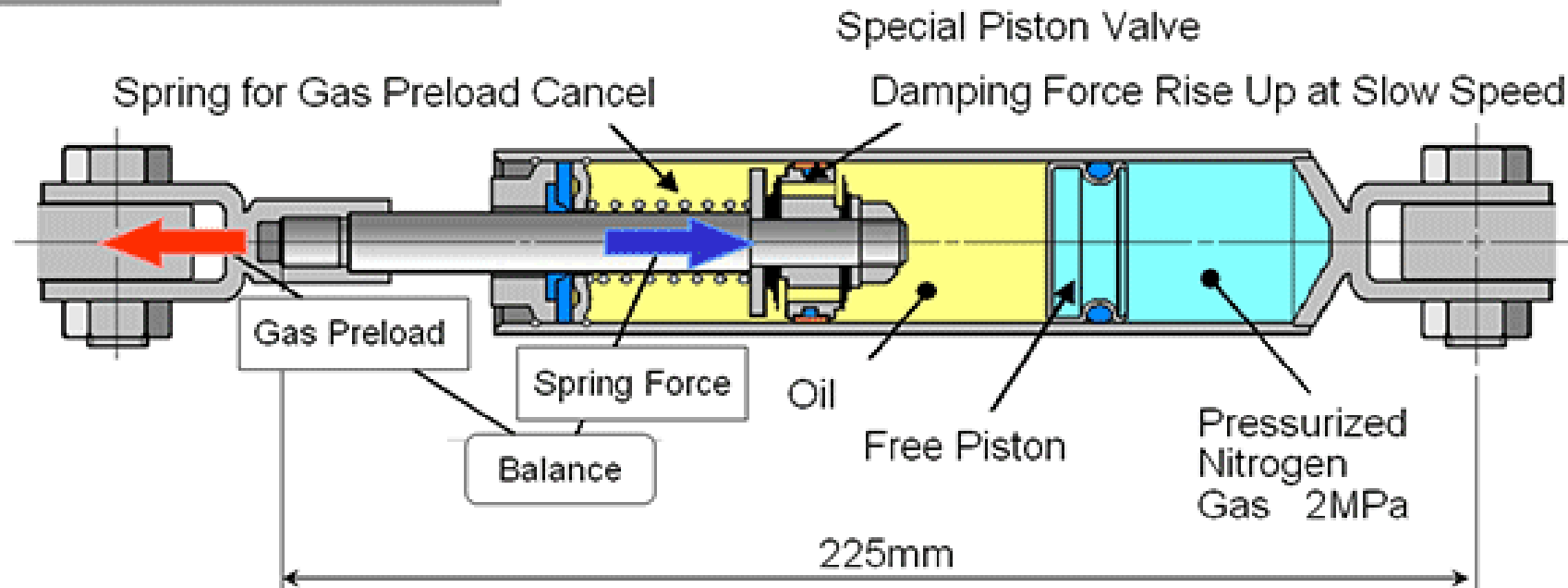
میرایی‌های فوق در مجموع به عنوان میرایی سازه نام برده می‌شود. در صورتی که دستگاه میراگری در سازه استفاده شود، میرایی آن باید به میرایی سازه اضافه گردد.



## 1- میراگر ویسکوز Viscous Damper

میراگرهای ویسکوز معمولا دارای یک سیلندر هیدرولیکی می باشند که به وسیله یک پیستون، محفظه درون سیلندر به دو بخش مجزا از هم تبدیل می شود. زمانی که پیستون حرکت می کند سیال درون میراگر ( معمولا روغن با ویسکوزیته بالا) از یک سوراخ ریز درون پیستون بین دو محفظه داخلی سیلندر با سرعت بالا جابجا می شود.

### STRUCTURE



نیروی ناشی از این میراگر تابعی از سرعت می باشد:

$$F = f(\dot{x}) \quad (3)$$

معمولا نیروی میرایی را به صورت یک تابع خطی از سرعت در نظر می گیرند:

$$F = c \dot{x} \quad (4)$$

پارامتر  $c$  را ضریب میرایی یا ثابت میرایی می نامند که تابعی از مشخصات میراگر است. معمولا برای ارزیابی خاصیت جذب انرژی میراگرها، مقدار جذب انرژی توسط آنها در یک سیکل (رفت و برگشت) اندازه گیری و محاسبه می شود.

$$W_{vis} = \int_{cycle} F \cdot dx \quad \xRightarrow{\dot{x} = \frac{dx}{dt}} \quad W_{vis} = \int_T F \cdot \dot{x} dt \quad \xRightarrow{(4)} \quad W_{vis} = \int_T c \cdot \dot{x}^2 dt \quad (5)$$

$W_{vis}$ : کار انجام شده یا انرژی جذب شده توسط میراگر در یک سیکل

## 1- میراگر ویسکوز

اگر پاسخ سازه به صورت یک حرکت سینوسی در نظر گرفته شود:

$$x = \rho \sin(\omega t) \quad (6)$$

$$\dot{x} = \rho \omega \cos(\omega t) \quad (7)$$

انرژی جذب شده توسط میراگر در یک سیکل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(7) \rightarrow (5) \Rightarrow W_{vis} = \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} c \rho^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) dt = c \rho^2 \omega^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right) \Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow W_{vis} = c \pi \omega \rho^2 \quad (8)$$

یادآوری

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$$

رابطه نیروی میرایی بر حسب جابجایی به صورت زیر به دست می‌آید:

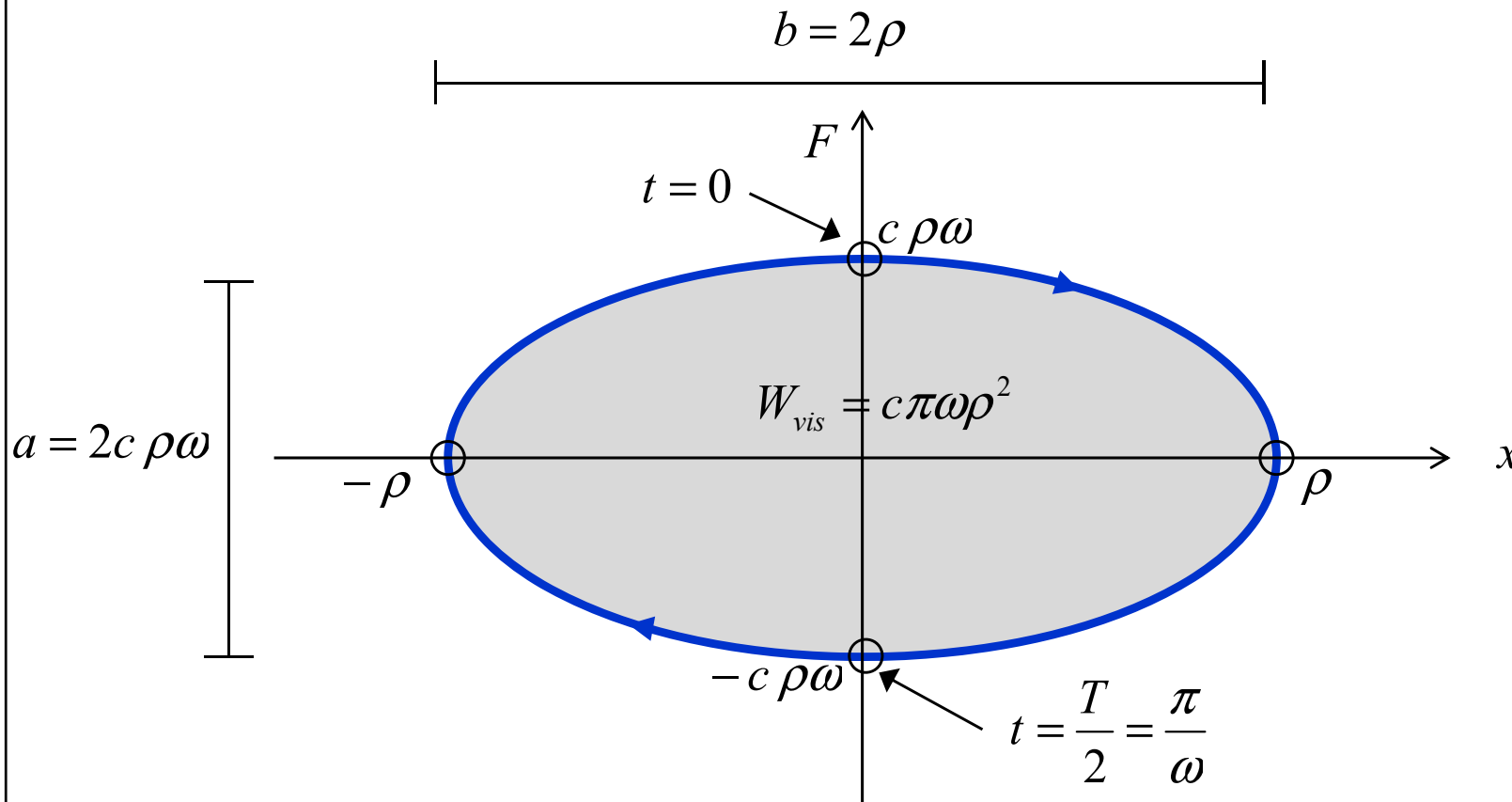
$$(7) \rightarrow (4) \quad F = c \rho \omega \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{F}{c \rho \omega} = \cos(\omega t) \quad (9)$$

$$(6) \Rightarrow \frac{x}{\rho} = \sin(\omega t) \quad (10)$$

## 1- میراگر ویسکوز

طرفین رابطه (9) و (10) را به توان دو رسانده باهم جمع می‌نماییم:

$$(9), (10) \Rightarrow \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{F}{c\rho\omega}\right)^2 = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) \Rightarrow \boxed{\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{F}{c\rho\omega}\right)^2 = 1} \quad (11)$$



یادآوری: مساحت بیضی

$$S = \frac{\pi}{4}(a \times b)$$

نمودار نیروی میرایی بر حسب جابجایی. سطح محصور شده توسط منحنی معرف  $W_{vis}$  است.



Seismic fluid damper, 25 ton output

<http://taylordevices.com/dampers-seismic-protection.html>

**Case Study:**

<http://www.taylordevicesindia.com/CaseStudy/Fluid-Viscous-Dampers/2>



### Catalogue:

<http://www.taylordevicesindia.com/Brochures/Fluid-Viscous-Dampers/2>

### Structural Applications of Taylor Fluid Viscous Dampers:

<http://taylordevices.com/pdf/Yearly-updates/YearlyUpdatedStructuralApplicationChart.pdf>



Seismic fluid dampers , 650 to 1000 ton output

<http://taylordevices.com/dampers-seismic-protection.html>

## Damping Based Control

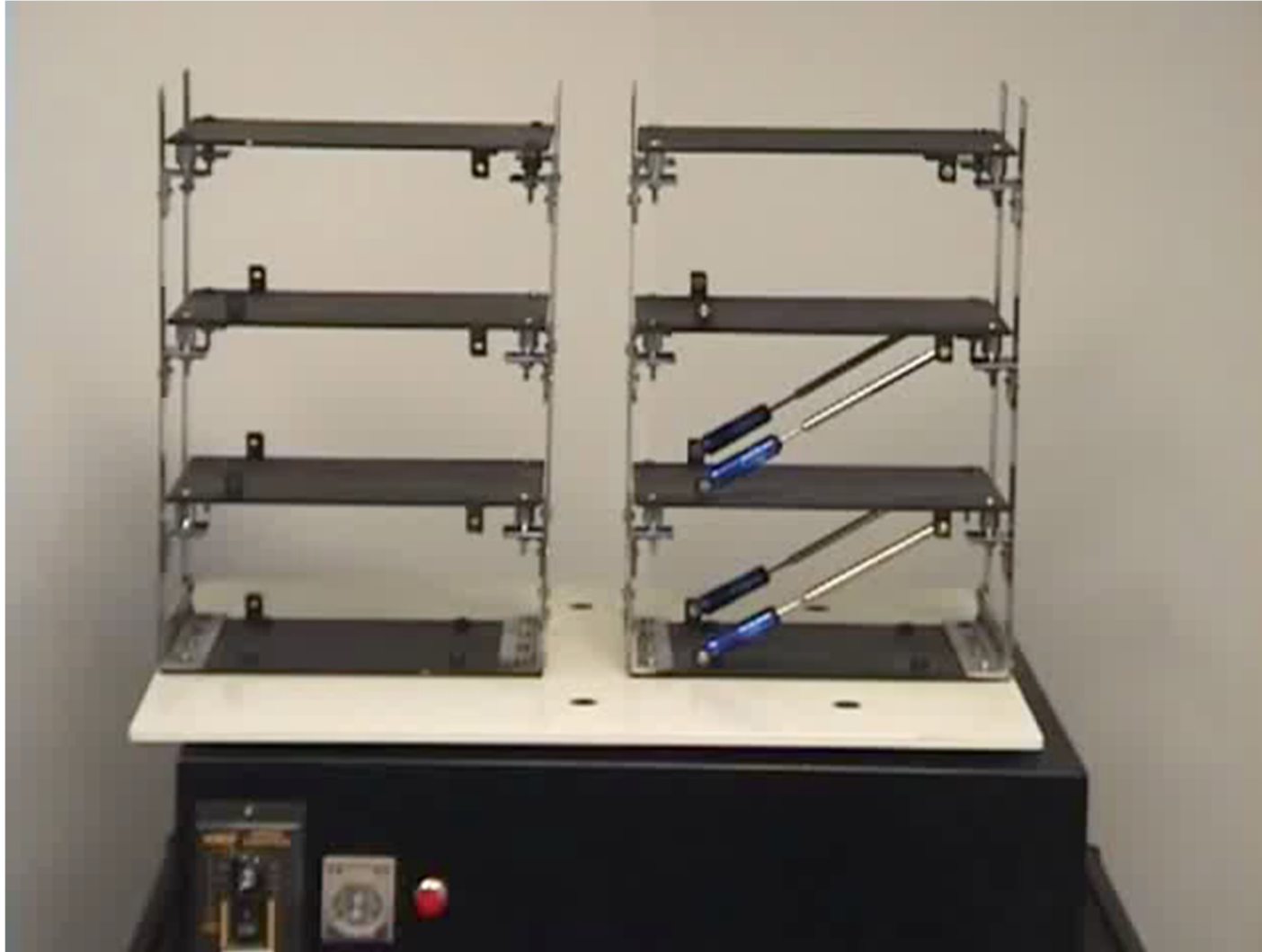
## □ انواع وسایل میرایی

1- میراگر ویسکوز



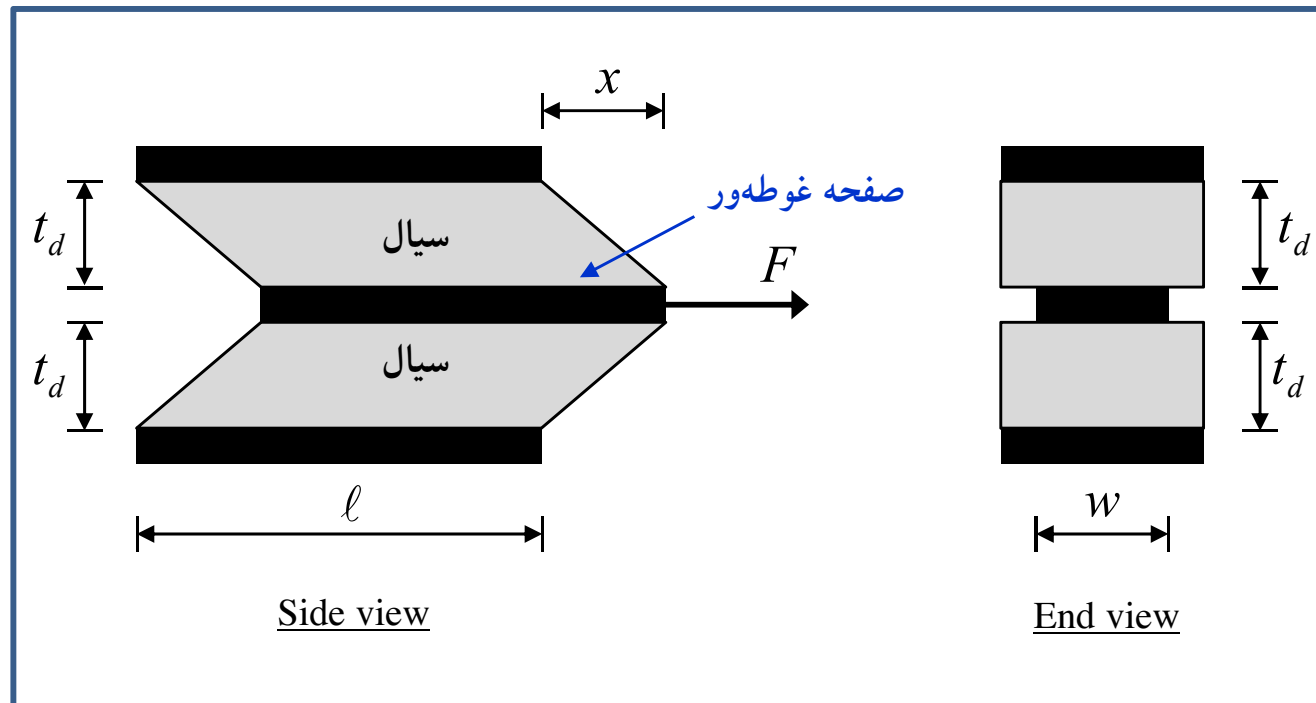






## 1- میراگر ویسکوز

مثال 1- شکل زیر طرح شماتیکی از یک میراگر ویسکوز را نشان می‌دهد؛ که حاوی سیالی با ضریب ویسکوزیته (چسبندگی)  $G_V$  است. تنش برشی ایجاد شده در سیال از رابطه  $\tau = G_V \dot{\gamma}$  به دست می‌آید که در آن پارامترهای  $\gamma$  و  $\tau$  به ترتیب تنش و کرنش برشی ایجاد شده در سیال است. ثابت این میراگر ویسکوز را محاسبه نمایید.

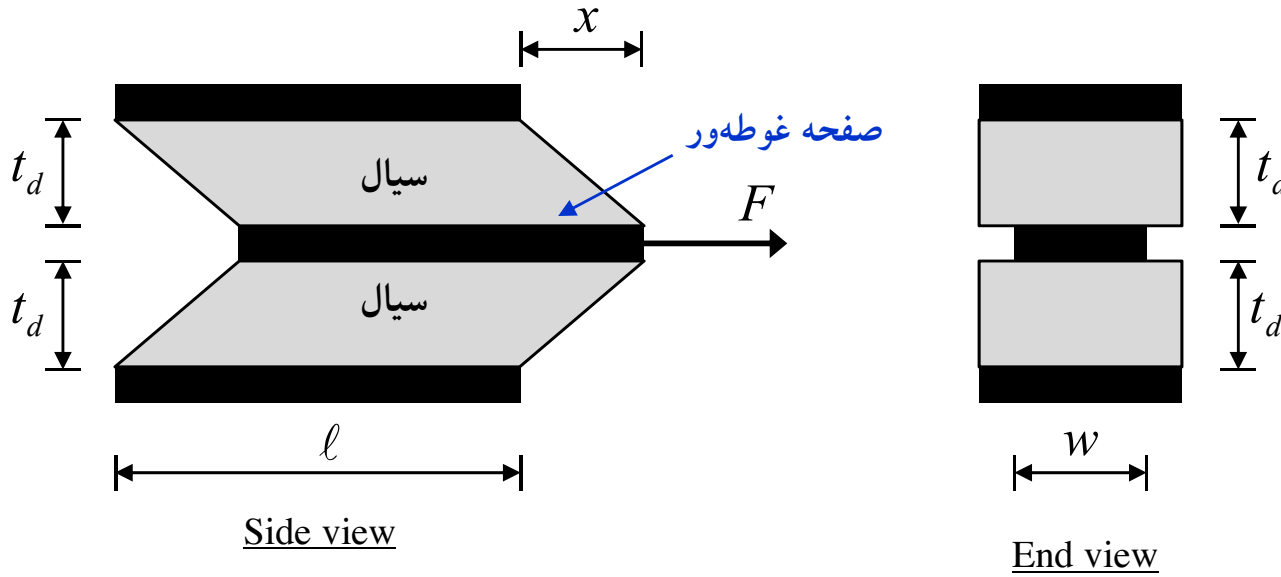


# Damping Based Control

## □ انواع وسایل میرایی

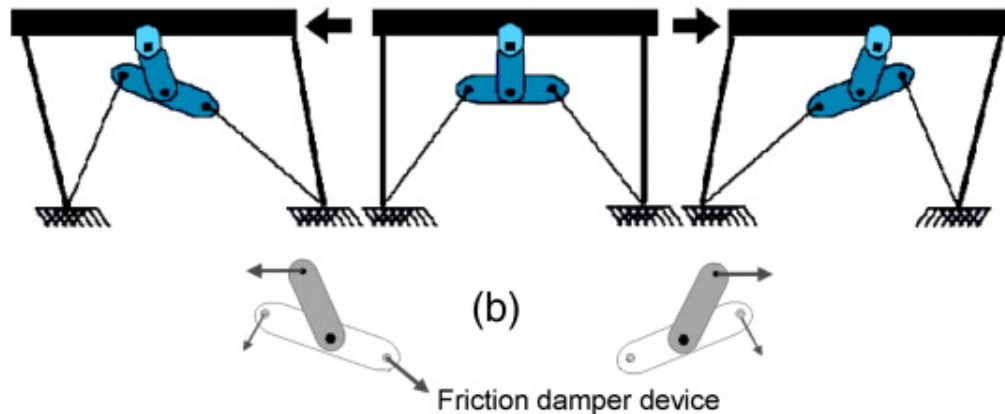
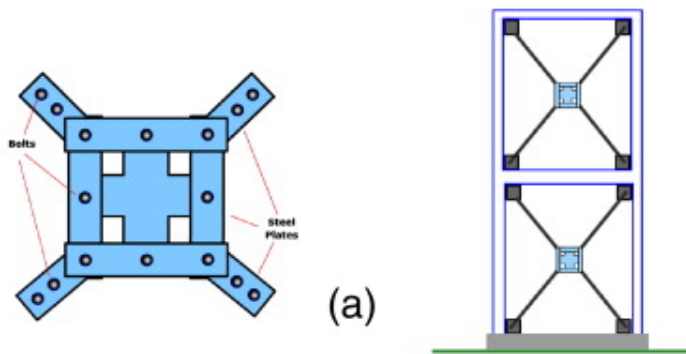
1- میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 1-



## 2- میراگر اصطکاکی Friction Damper

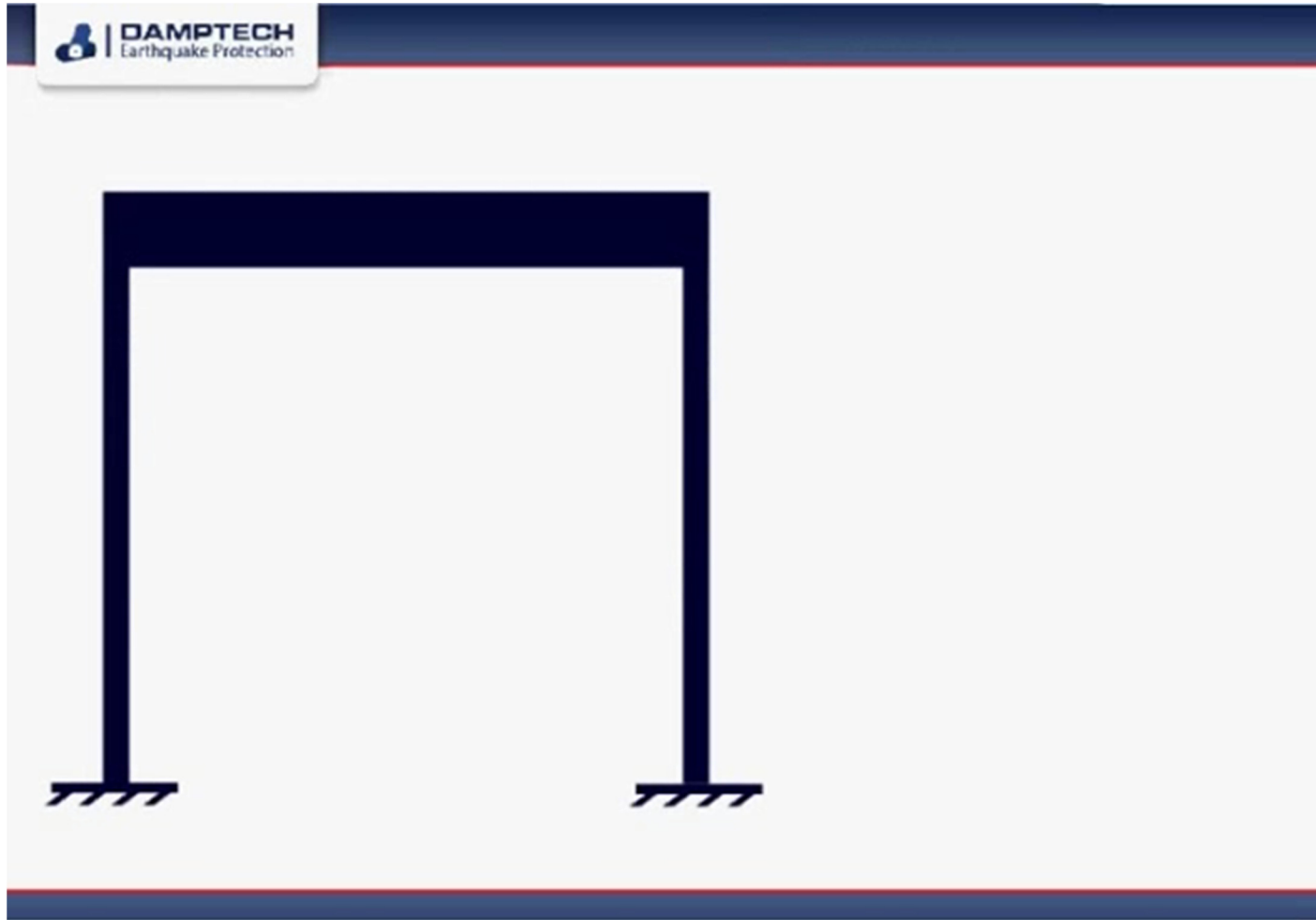
میراگرهای اصطکاکی از یک سری قطعات فولادی تشکیل شده‌اند که حین زلزله‌های قوی این قطعات حرکت کرده و بر روی هم می‌لغزند. در اثر این لغزش انرژی وارد به سازه به صورت انرژی گرمایی ناشی از اصطکاک مستهلک می‌گردد.



<http://www.damptech.com/>



<http://www.damptech.com/>

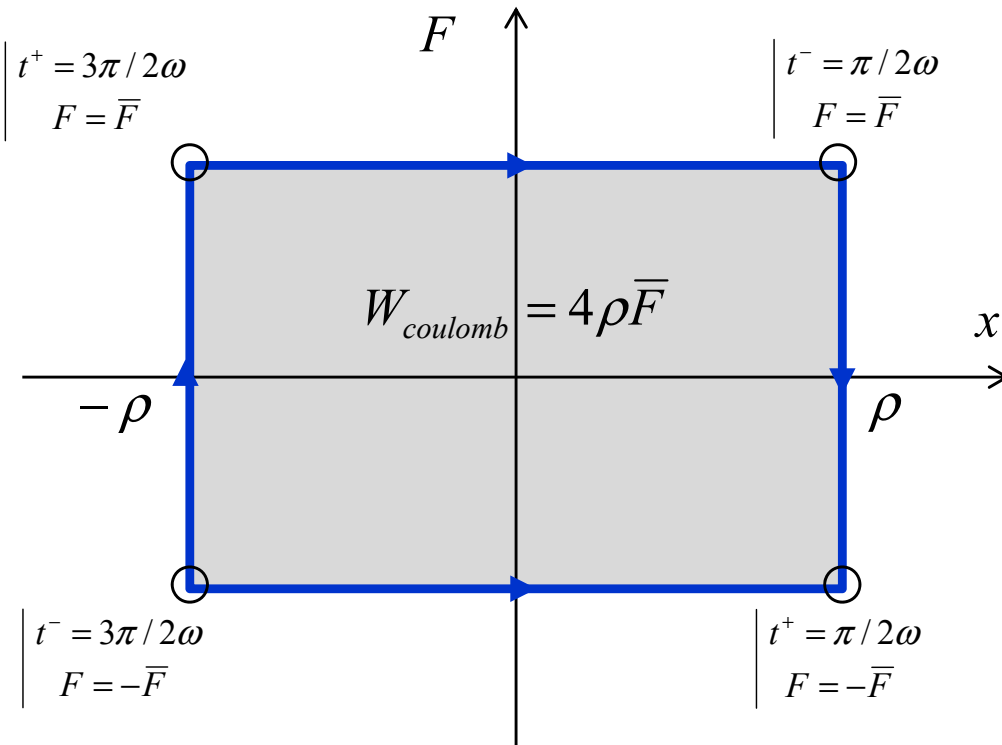


<http://www.damptech.com/>

## 2- میراگر اصطکاکی

میرایی کولومبی با مقدار ثابت به وسیله یک نیروی میرایی که همفاز با نرخ تغییر شکل است بیان می‌گردد:

$$F = \bar{F} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (12)$$



اگر پاسخ سازه به صورت یک حرکت سینوسی مطابق رابطه (6) در نظر گرفته شود منحنی نیرو-تغییر مکان این میراگر به صورت شکل مقابل است:

مقدار انرژی مستهلک شده در یک سیکل حرکتی برابر است با مساحت محصور شده به نمودار نیرو - جابجایی در شکل مقابل:

نمودار نیروی میرایی کولومبی - جابجایی

$$W_{coulomb} = 4\rho\bar{F} \quad (13)$$

# □ انواع وسایل میرایی

## 2- میراگر اصطکاکی



به طور کلی میراگر اصطکاکی از اصطکاک دو صفحه روی یکدیگر به وجود می‌آید که یک نمونه آن بادبندهای اصطکاکی می‌باشند. در اثر تغییر مکان جانبی طبقات لنگرهایی در محل اتصال بادبندها به بولت‌ها ایجاد شده که تمایل به ایجاد دوران در محل اتصالات داشته و موجب تولید اصطکاک دورانی می‌گردد. به این نوع میراگرها که به صورت اصطکاکی و به شکل بادبند در ساختمان‌ها به کار می‌رود میراگرهای سازه‌ای نیز گفته می‌شود.

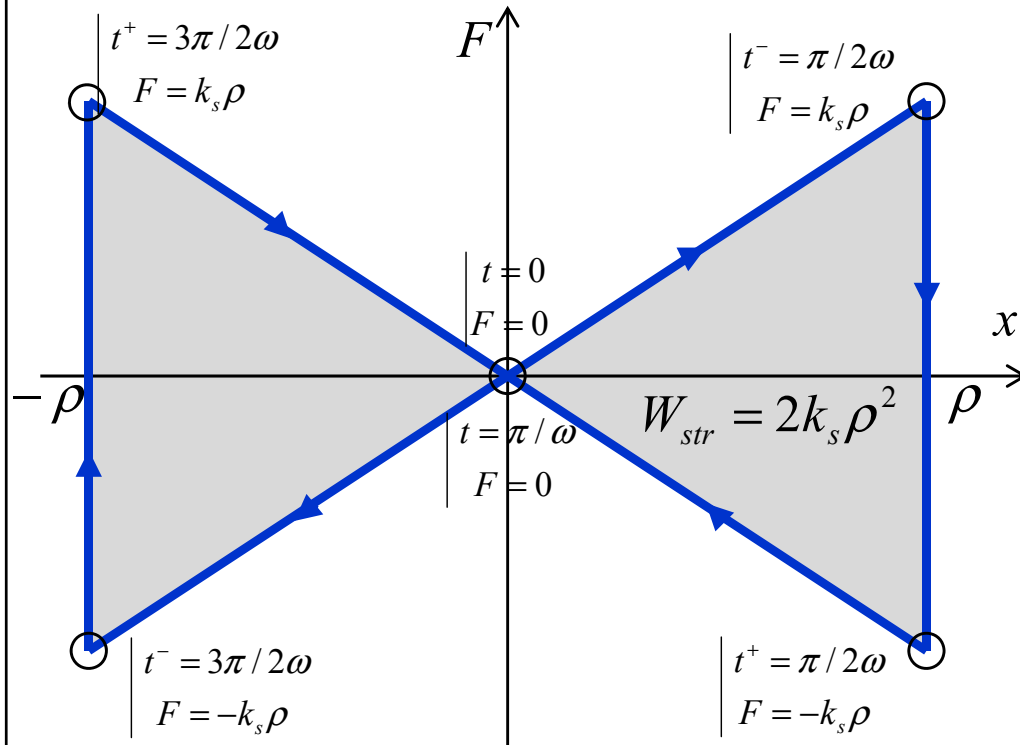


در این حالت نیروی میرایی برابر است با:

$$F = k_s |x| \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (14)$$

$k_s$ : ضریب سختی ظاهری مجموعه اتصال.

### 2- میراگر اصطکاکی



اگر پاسخ سازه به صورت یک حرکت سینوسی مطابق رابطه (6) در نظر گرفته شود منحنی نیرو-تغییر مکان این میراگر به صورت شکل مقابل است:

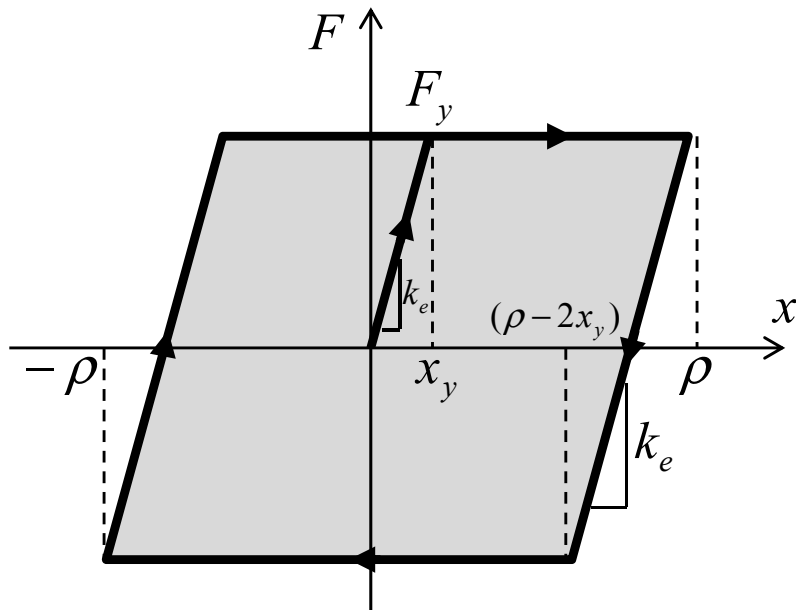
مقدار انرژی مستهلک شده در یک سیکل حرکتی برابر است با مساحت محصور شده به نمودار نیرو - جابجایی در شکل مقابل:

نمودار نیرو - جابجایی میراگر اصطکاکی

$$W_{str} = 2 \times \frac{1}{2} \times \rho \times (2k_s \rho) \Rightarrow W_{str} = 2k_s \rho^2 \quad (15)$$

## 3- میراگر پسماند Hysteretic Damper

در صورتی که مصالحی که در ساخت میراگر بکار می‌رود وارد ناحیه غیرخطی گردد و حرکت آن رفت و برگشتی (Cyclic) باشد به این نوع میراگر میراگر پسماند می‌گویند. بدیهی است انرژی جذب شده توسط این نوع میراگر تابعی از منحنی تنش- کرنش مصالح تشکیل دهنده آن می‌باشد. اگر پاسخ سازه به صورت یک حرکت سینوسی مطابق رابطه (6) در نظر گرفته شود در یک حالت ساده شده می‌توان منحنی نیرو- تغییر مکان یک میراگر پسماند را به صورت مقابل نشان داد:



نمودار نیرو - جابجایی میراگر پسماند

با تعریف نسبت شکل پذیری به صورت زیر:

$$\mu = \frac{\rho}{x_y} \quad (16)$$

باید توجه داشت که جابجایی  $\rho$  مربوط به مصالح تشکیل دهنده میراگر می‌باشد.

مقدار انرژی مستهلک شده در یک سیکل حرکتی برابر است با مساحت محصور شده به نمودار نیرو - جابجایی در شکل مقابل:

$$W_{hys} = 2F_y \times (\rho - 2x_y + \rho) = 4F_y (\rho - x_y) = 4F_y \rho \left(1 - \frac{x_y}{\rho}\right) \stackrel{(16)}{\Rightarrow} W_{hys} = 4F_y \rho \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) \quad (17)$$

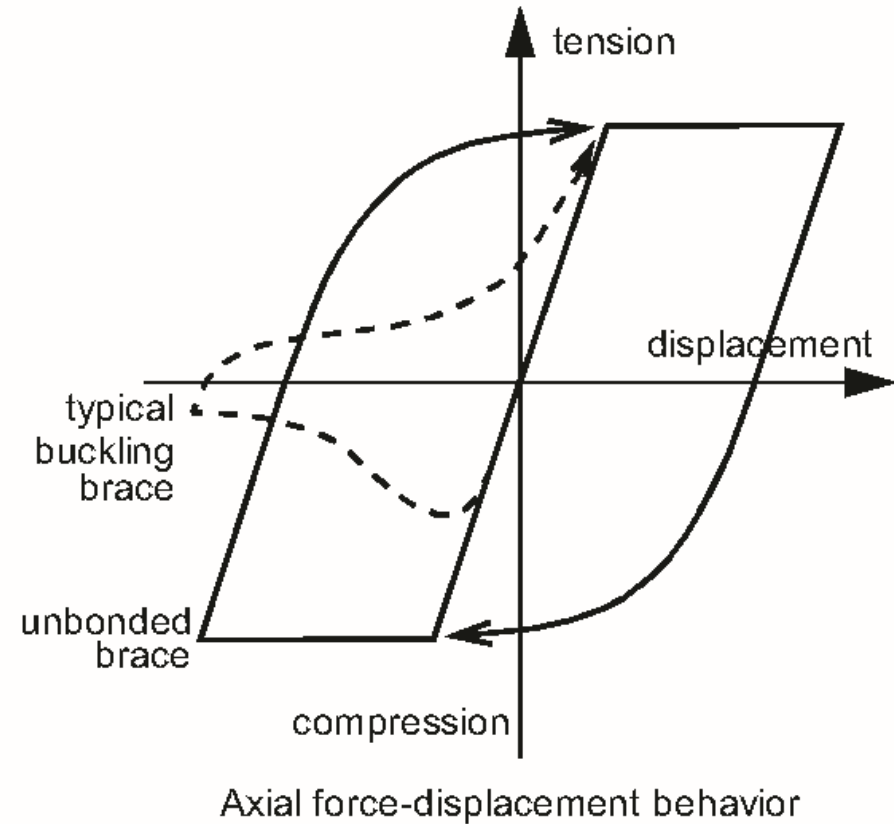
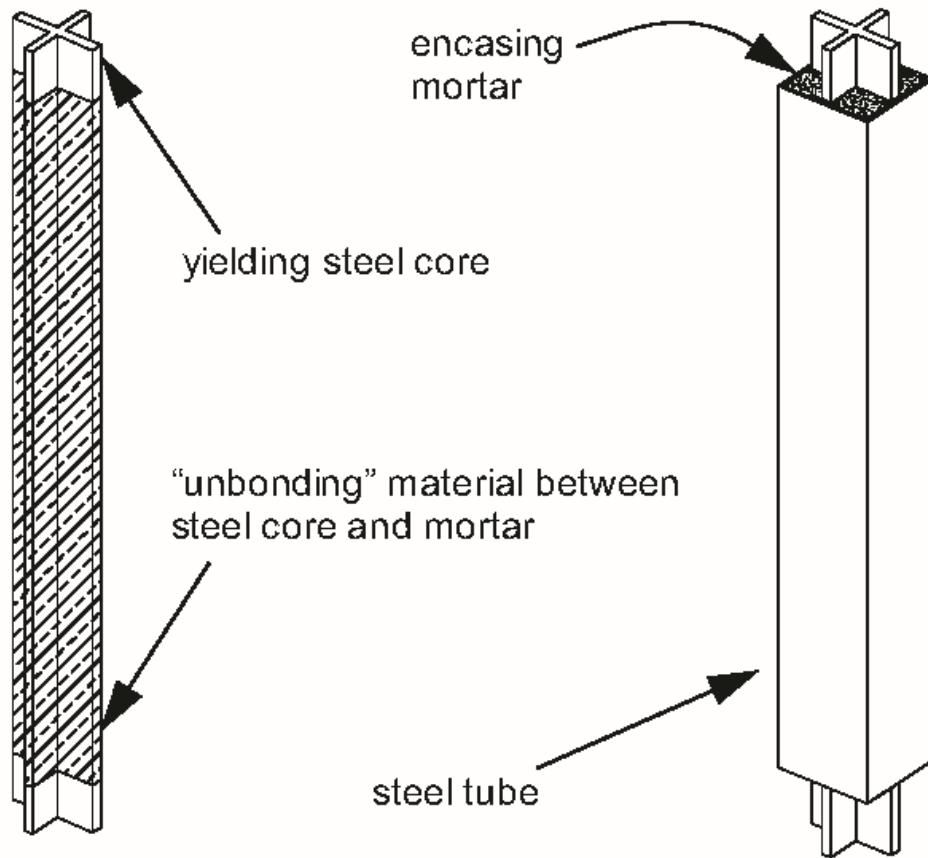
## 3- میراگر پسماند

نمونه‌ای از میراگر پسماند در شکل زیر دیده می‌شود. این نوع میراگرها به عنوان بادبندها در ساختمان‌ها استفاده می‌شود. هسته این میراگر از فولاد با شکل‌پذیری زیاد و مقاومت کم تشکیل شده است که تامین کننده خاصیت جذب انرژی می‌باشد. غلاف یا پوسته آن طوری طراحی می‌شود که در اثر نیروی تسلیم  $F_y$  کمانش کند. بنابراین غلاف می‌تواند تا حدودی در خمش کار کند و کل بادبند به فشار و کشش از خود مقاومت نشان دهد.



Unbonded Brace

<http://www.pnsastech.com.ph/index.php>



Clark, P., Aiken, I., Kasai, K., Ko, E., & Kimura, I. (1999, October). Design procedures for buildings incorporating hysteretic damping devices. In Proceedings 68th annual convention (pp. 355-371).

## 4- میراگر ویسکوالاستیک Viscoelastic Damper

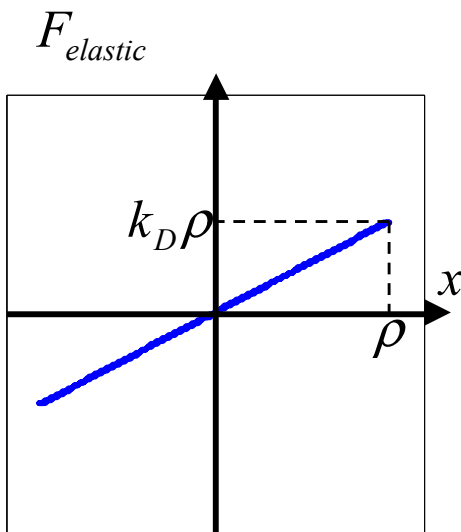
در این نوع میراگرها از مصالحی استفاده می‌شود که هم دارای سختی کافی برای تحمل بار وارده (سختی در مقابل حرکت مقاومت می‌کند) و هم دارای خاصیت جذب انرژی می‌باشد (میرایی حرکت را به سمت صفر میل می‌دهد). مدل سازی این میراگر را می‌توان با ترکیب یک فنر الاستیک و یک میراگر ویسکوز به صورت زیر نشان داد.

$$\begin{cases} F_{elastic} = k_D x & (18.a) \\ F_{viscous} = c_D \dot{x} & (18.b) \end{cases}$$

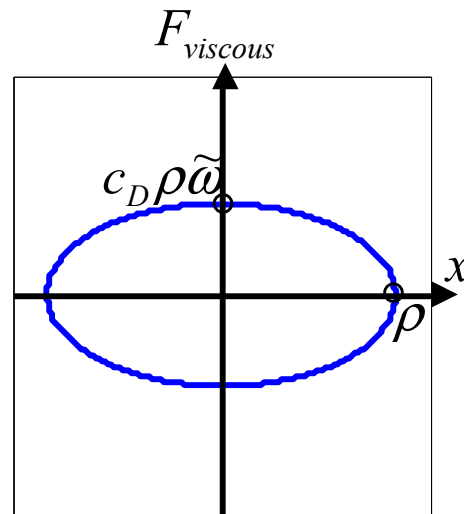
رابطه نیرو- تغییرشکل در حالت الاستیک  
رابطه نیرو- سرعت در حالت ویسکوز

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k + k_D}{m}} \quad (18.c)$$

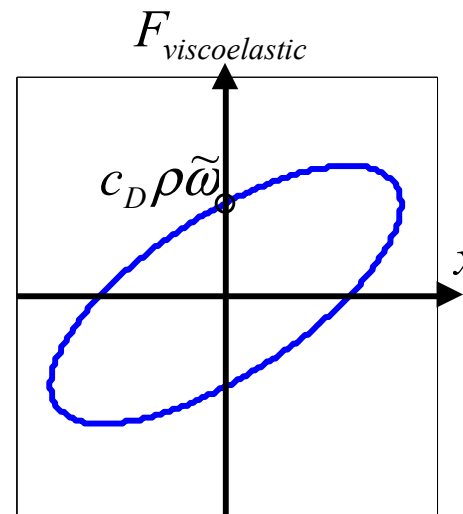
$k_D$  به  $k$  کمک می‌کند.



(ج)



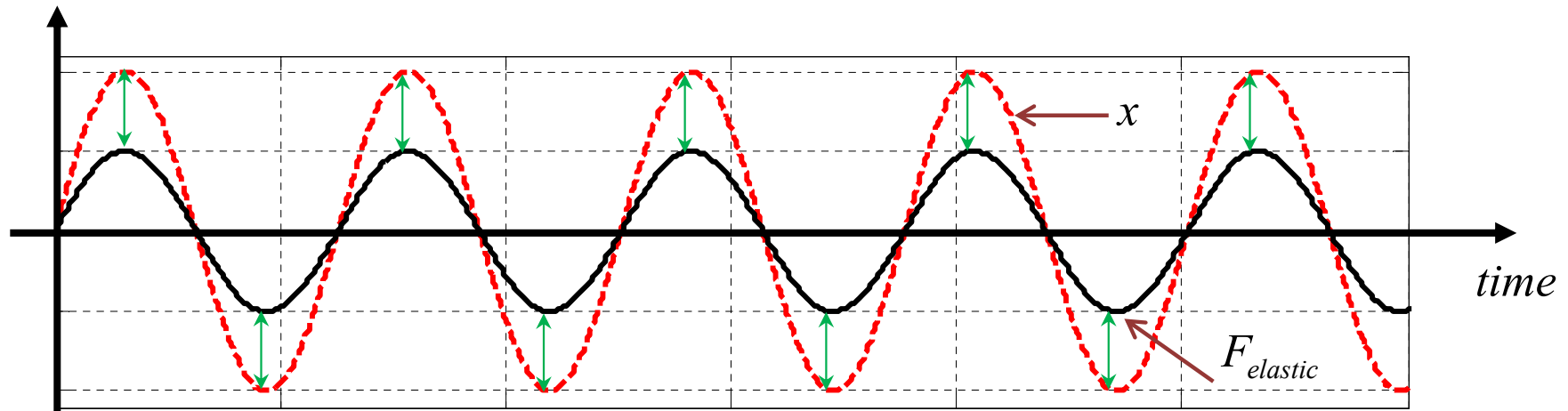
(ب)



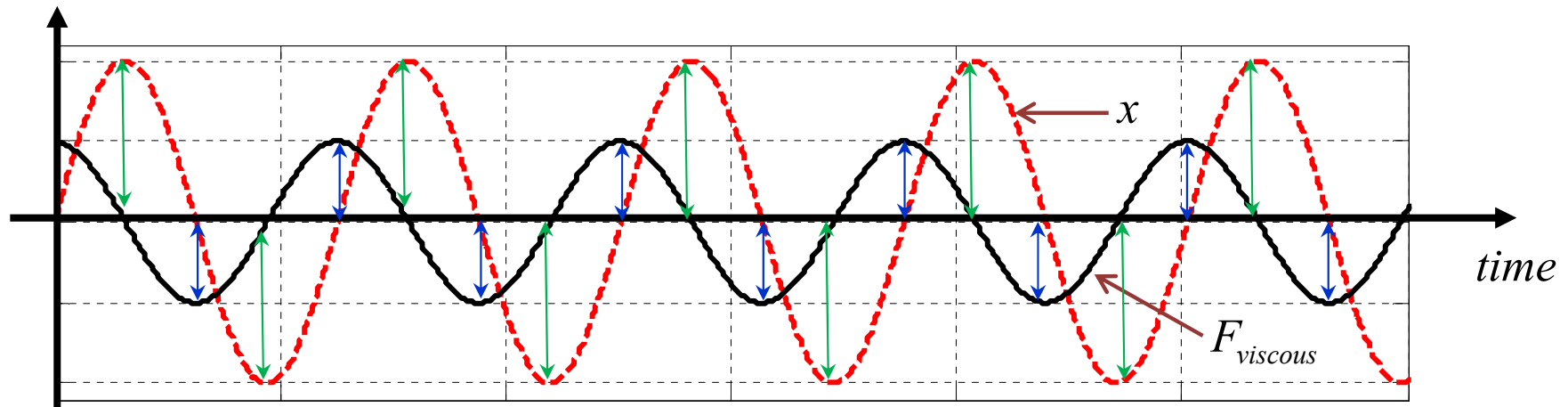
(الف)

رفتار ویسکوالاستیک در منحنی نیرو-تغییر مکان مقابل دیده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود اختلاف فازی بین نیرو و تغییر مکان در حالت الاستیک وجود ندارد؛ در حالی که در حالت ویسکوز به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  اختلاف فاز وجود دارد.

رابطه نیرو-تغییر مکان در سه حالت (الف) الاستیک، (ب) ویسکوز و (ج) ویسکوالاستیک



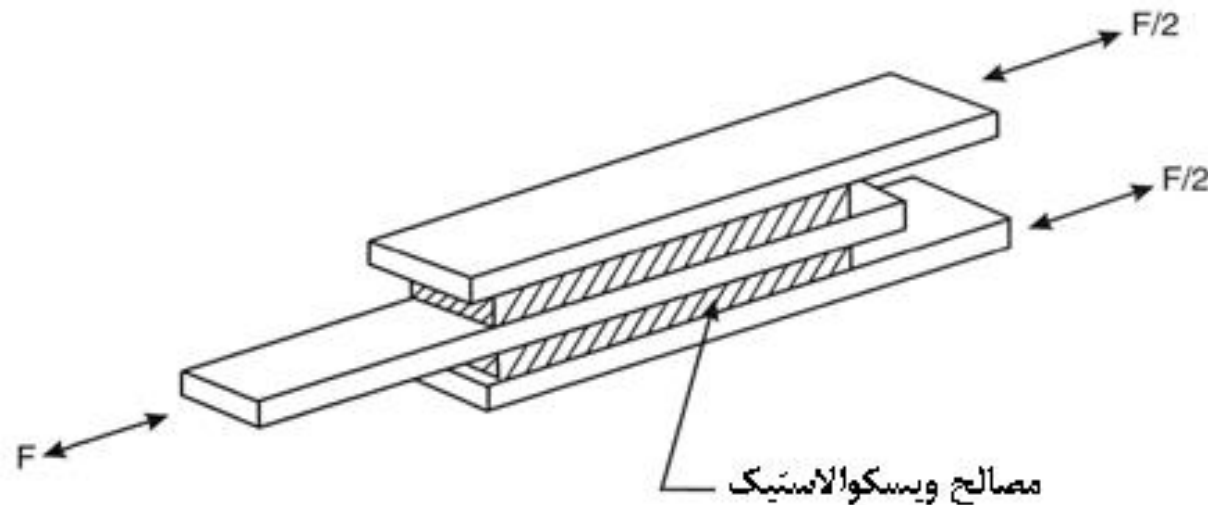
عدم وجود اختلاف فاز مابین نیرو و جابجایی در حالت الاستیک



وجود اختلاف فاز مابین نیرو و جابجایی در حالت ویسکوز

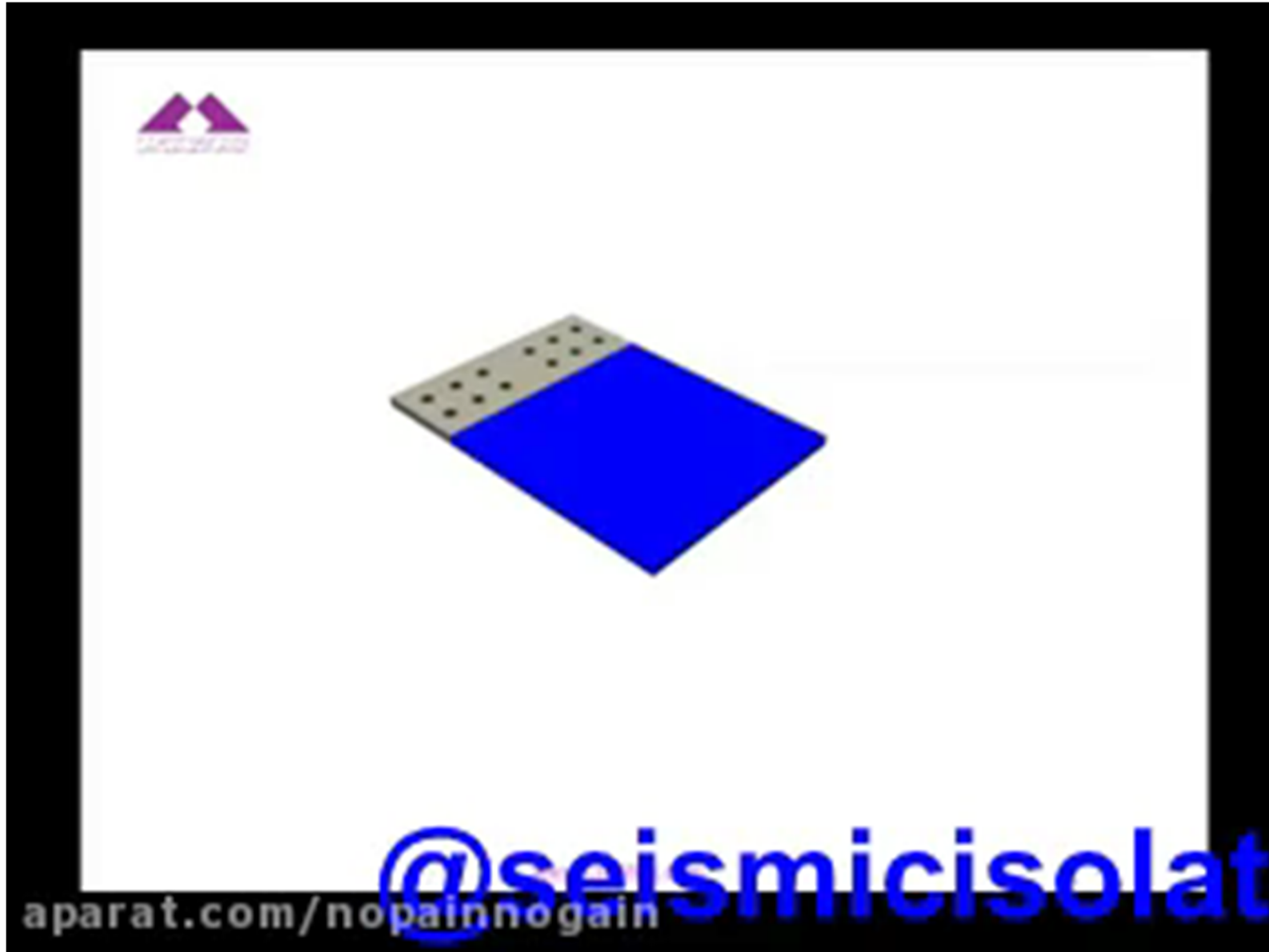
## 4- میراگر ویسکوالاستیک

در شکل نمونه‌ای از میراگر ویسکوالاستیک نشان داده شده است. این گونه میراگرها از طریق تغییرشکل‌های برشی باعث اتلاف انرژی می‌شوند. این گونه میراگرها را عموماً طوری در سیستم نصب می‌کنند که تنش‌های وارد به آنها از نوع برشی باشد تا خاصیت میرایی خود را نشان بدهند. کاربرد عمومی این گونه میراگرها در سازه پل‌های بلند می‌باشد. این میراگرها باعث جلوگیری از ایجاد پدیده مخرب تشدید در ساختمان پل شده و مانع از تخریب پل در اثر بارهای باد می‌شود. این گونه میراگرها به دلیل تاثیرگذاری عوامل مختلف روی میزان میرایی، از تاریخ مصرف برخوردارند و در پایان تاریخ مصرف شان بایستی تعویض شوند. ممکن است در طول عمر یک سازه، چندین بار تعویض میراگرها صورت گیرد که بزرگترین نقطه ضعف اینگونه میراگرها همین امر می‌باشد.









## 4- میراگر ویسکوالاستیک

در طراحی کار با این نوع میراگر راحت تر است. یعنی طراح آزادی عمل بیشتری دارد. چون تلفیق دو سیستم جدا است بنابراین طراح می تواند با انتخاب یکی (مثلا میراگر ویسکوز)، دیگری (میراگر الاستیک) را طراحی نماید.

در صورت استفاده از فنر و یک میراگر ویسکوز، نیروی کل وارد بر سیستم برابر است با:

$$F_{viscoelastic} = F_{elastic} + F_{viscous} \quad (18) \Rightarrow F_{viscoelastic} = k_D x + c_D \dot{x} \quad (19)$$

$$(6), (7) \rightarrow (19) \Rightarrow F_{viscoelastic} = \rho [k_D \sin(\tilde{\omega}t) + c_D \tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega}t)] \quad (20)$$

با تعریف  $G_s$  به عنوان مدول ذخیره (Storage Modulus) و  $G_\ell$  به عنوان مدول اتلاف (Loss Modulus) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} G_s &= k_D \\ G_\ell &= c_D \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (21)$$

$$(21) \rightarrow (20) \Rightarrow F_{viscoelastic} = \rho [G_s \sin(\tilde{\omega}t) + G_\ell \cos(\tilde{\omega}t)] \quad (22)$$

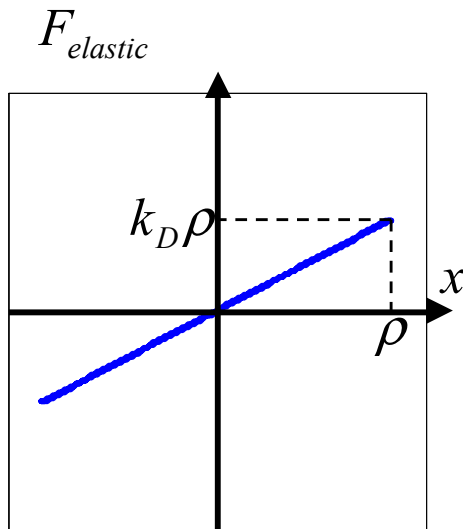
## 4- میراگر ویسکوالاستیک

انرژی مستهلک شده توسط میراگر ویسکوالاستیک برابر است با:

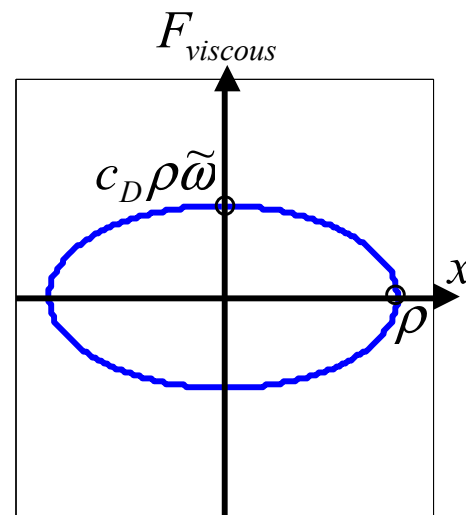
$$W_{V.E} = \int_{\text{cycle}} F_{\text{viscoelastic}} \cdot dx \quad \xrightarrow{\dot{x} = \frac{dx}{dt}} \quad W_{\text{vis}} = \int_T F_{\text{viscoelastic}} \cdot \dot{x} dt \quad \Rightarrow \quad W_{\text{vis}} = \int_T (k_D x \dot{x} + c_D \dot{x}^2) dt \quad (23)$$

$$(6), (7) \rightarrow (23) \Rightarrow W_{V.E} = \int_0^{T=\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}} \left[ \frac{k_D \rho^2 \tilde{\omega}}{2} \sin(2\tilde{\omega}t) + c_D \rho^2 \tilde{\omega}^2 \cos^2(\tilde{\omega}t) \right] dt \Rightarrow W_{V.E} = \pi c_D \tilde{\omega} \rho^2 \quad (24)$$

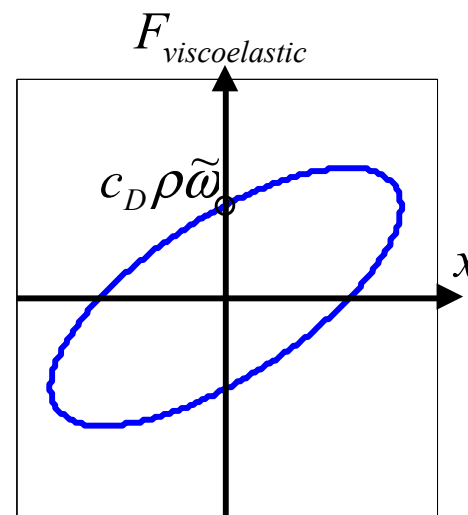
رابطه (24) نشان می‌دهد انرژی مستهلک شده توسط میراگر ویسکوالاستیک همان انرژی مستهلک شده توسط بخش ویسکوز میراگر می‌باشد. زیرا همانطور که شکل زیر نشان می‌دهد مساحت محصور شده به نمودار نیرو- تغییر مکان در حالت الاستیک برابر با صفر است.



(الف)



(ب)



(ج)

رابطه نیرو-تغییر مکان در سه حالت (الف) الاستیک، (ب) ویسکوز و (ج) ویسکوالاستیک

## 4- میراگر ویسکوالاستیک

چون معمولا میراگرهای ویسکوالاستیک از حرکت صفحات فولادی نازک در داخل یک مایع لزج و یا یک جامد ویسکوز تهیه می‌شوند، رابطه تنش برشی ( به جای نیرو) و کرنش برشی ( به جای تغییر مکان) به صورت زیر برای آن‌ها نوشته می‌شود:

$$\gamma = \hat{\gamma} \sin(\tilde{\omega}t) \quad (25)$$

$\gamma$ : کرنش برشی میراگر

$\tau$ : تنش برشی میراگر

$$\tau = \hat{\gamma} [G_s \sin(\tilde{\omega}t) + G_\ell \cos(\tilde{\omega}t)] \quad (26)$$

رابطه (26) را می‌توان به صورت برداری نیز نوشت:

$$\tau = \hat{\gamma} \hat{G} \sin(\tilde{\omega}t + \theta) \quad (27)$$

که در آن

$$\hat{G} = \sqrt{G_s^2 + G_\ell^2} \Rightarrow \hat{G} = G_s \sqrt{1 + \eta^2} \quad (28)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\eta} \right) \quad (29)$$

$$\eta = \frac{G_\ell}{G_s} \stackrel{(21)}{\Rightarrow} \eta = \frac{c_D \tilde{\omega}}{k_D} \quad (30)$$

$\eta$ : ضریب اتلاف (Loss Factor)

## 4- میراگر ویسکوالاستیک

انرژی مستهلک شده توسط میراگر ویسکوالاستیک در حالتی که رابطه تنش - کرنش استفاده شده باشد برابر است با:

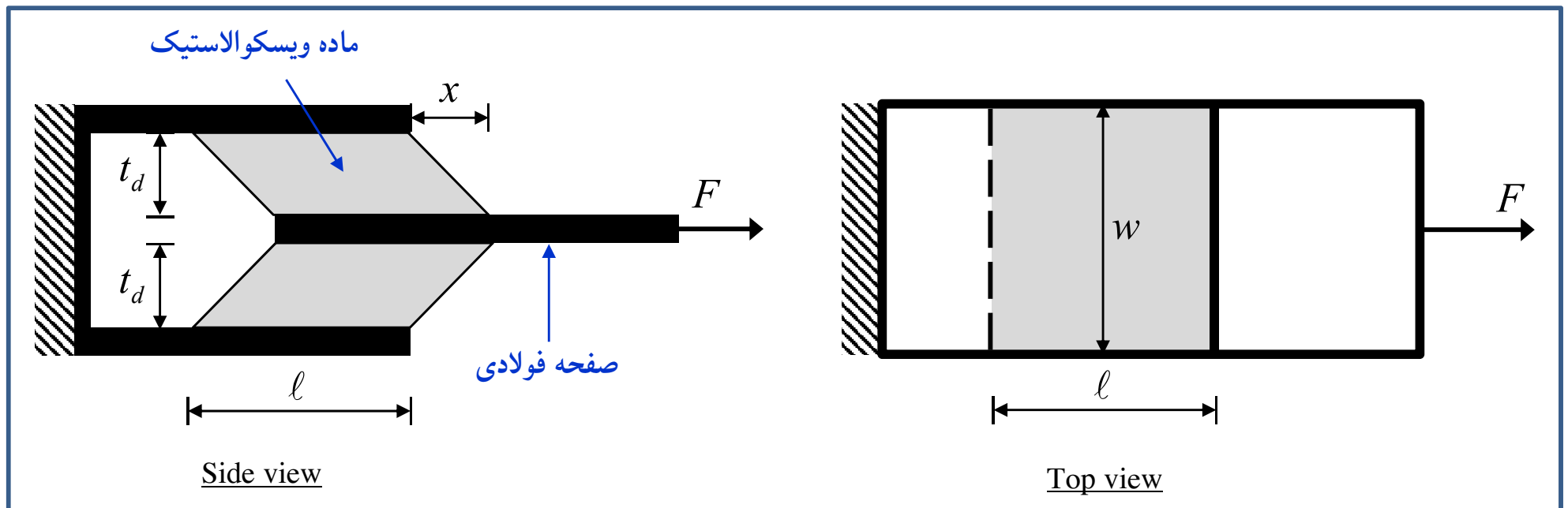
$$W_{V.E} = \int_{\text{cycle}} (\tau A) \cdot (\ell d\gamma) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} \\ V = A\ell \end{matrix} \Rightarrow W_{V.E} = V \int_T \tau \cdot \dot{\gamma} dt \quad \stackrel{(25),(26)}{\Rightarrow} \quad W_{V.E} = V\pi G_\ell \hat{\gamma}^2 \quad (31)$$

انرژی مستهلک شده در واحد حجم میراگر ویسکوالاستیک  $\bar{W}_{V.E}$  برابر است با:

$$(31) \Rightarrow \bar{W}_{V.E} = \pi G_\ell \hat{\gamma}^2 \quad (32)$$

## 4- میراگر ویسکوالاستیک

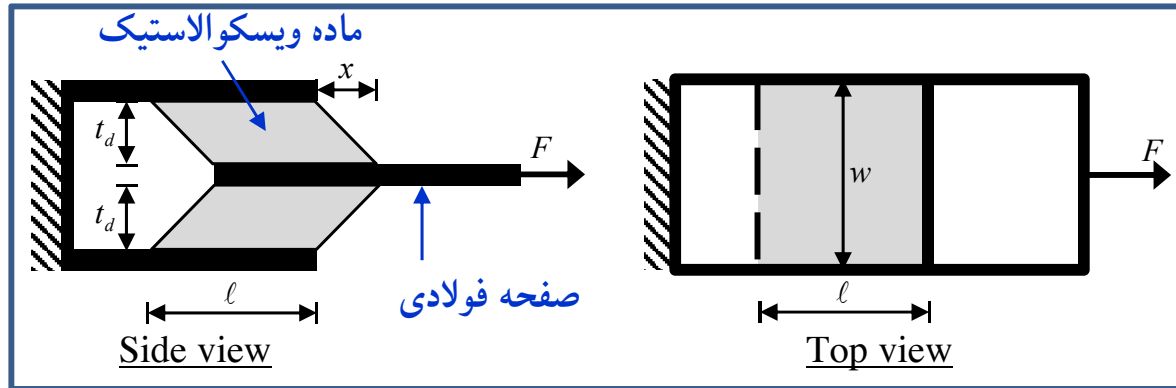
مثال 2- شکل زیر طرح شماتیکی از یک میراگر ویسکوالاستیک را نشان می‌دهد؛ که حاوی ماده‌ای ویسکوالاستیک است که توسط صفحات فولادی محصور شده است. مطلوب است تعیین نیروی میراگر و انرژی مستهلک شده توسط آن.



دستگاه میراگر ویسکوالاستیک

## 4- میراگر ویسکوالاستیک

پاسخ مثال 2-



رابطه کرنش برشی و جابجایی به صورت زیر به دست می آید.

نیروی میراگر برابر است با:

(II)

اگر پاسخ سازه به صورت یک حرکت سینوسی مطابق رابطه (III) در نظر گرفته شود:

$$(I) \rightarrow (IV) \Rightarrow F_{V.E} = \frac{2w\ell G_s \rho}{t_d} [\sin(\tilde{\omega}t) + \eta \cos(\tilde{\omega}t)] \quad (V)$$

پاسخ مثال 2-

با فرض

$$(VI) \rightarrow (V) \Rightarrow F_{V.E} = f_d \rho G_s [\sin(\tilde{\omega}t) + \eta \cos(\tilde{\omega}t)] \quad (VII)$$

$$W_{V.E} = \pi \eta G_s \rho^2 f_d \quad (33)$$

## Damping Based Control

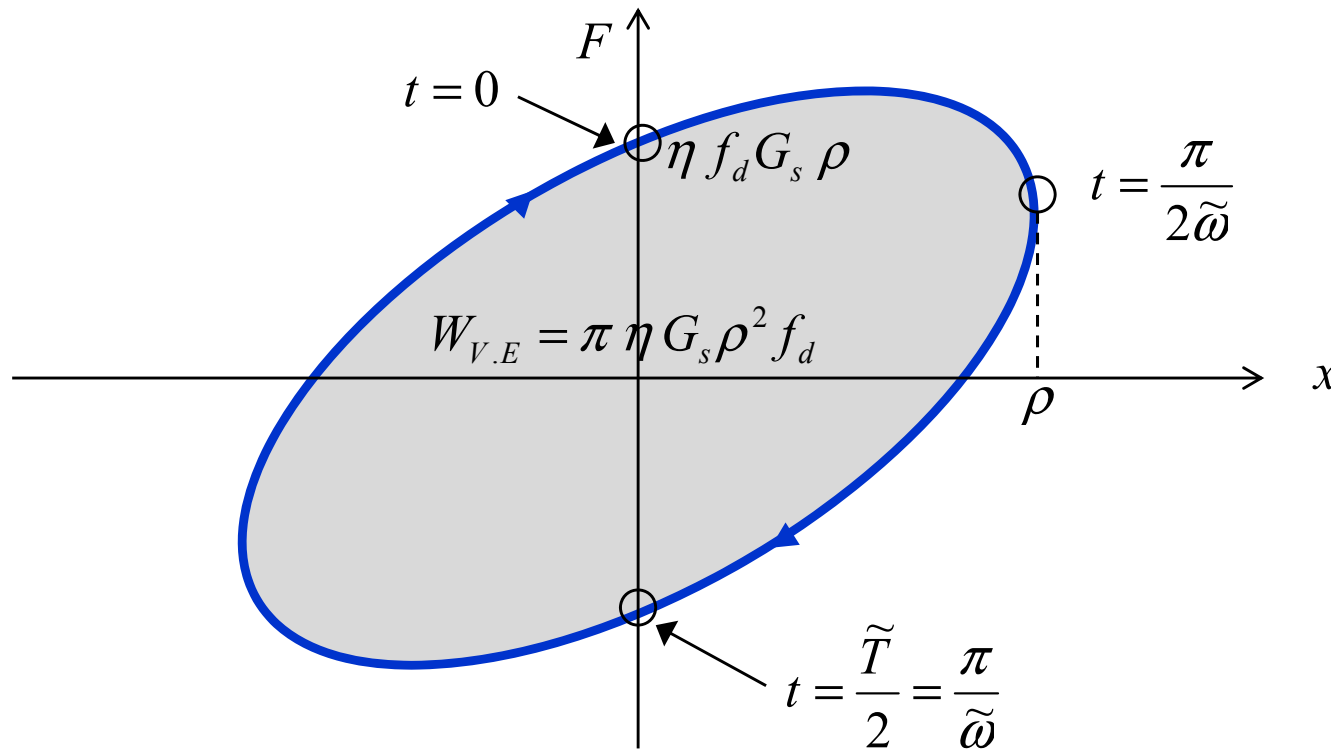
## □ انواع وسایل میرایی

### -4 میراگر ویسکوالاستیک

پاسخ مثال 2-

$$F_{V.E} = f_d \rho G_s [\sin(\tilde{\omega}t) + \eta \cos(\tilde{\omega}t)]$$

$$x = \rho \sin(\tilde{\omega}t)$$



رابطه نیرو-تغییر مکان میراگر ویسکوالاستیک

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

در انجام محاسبات در حالتی که انواع دیگر میراگر به جز میراگر ویسکوز داریم ساده تر است اگر به جای آن ها میراگر ویسکوز معادل قرار دهیم. برای تعیین ثابت میراگر معادل  $c_{eq}$  کافی است انرژی مستهلک شونده میراگر ویسکوز را معادل انرژی استهلاک سایر میراگرها قرار دهیم.

## 1- میراگر اصطکاکی (میرایی کولمبی)

$$W_{vis} = c\pi\omega\rho^2 \quad (8)$$

$$W_{coulomb} = 4\rho\bar{F} \quad (13)$$

$$(8), (13) \Rightarrow c\pi\omega\rho^2 = 4\rho\bar{F} \Rightarrow c_{eq}^{col} = \frac{4\bar{F}}{\pi\omega} \quad (34)$$

## 2- میراگر اصطکاکی (سازه ای)

$$W_{vis} = c\pi\omega\rho^2 \quad (8)$$

$$W_{str} = 2k_s\rho^2 \quad (15)$$

$$(8), (15) \Rightarrow c\pi\omega\rho^2 = 2k_s\rho^2 \Rightarrow c_{eq}^{str} = \frac{2k_s}{\pi\omega} \quad (35)$$

## 3- میراگر پسماند

$$W_{vis} = c\pi\omega\rho^2 \quad (8)$$

$$W_{hys} = 4F_y\rho \left( \frac{\mu-1}{\mu} \right) \quad (17)$$

$$(8), (17) \Rightarrow c\pi\omega\rho^2 = 4F_y\rho \left( \frac{\mu-1}{\mu} \right) \Rightarrow c_{eq}^{hys} = \frac{4F_y}{\pi\omega\rho} \left( \frac{\mu-1}{\mu} \right) \quad (36)$$

## 4- میراگر ویسکوالاستیک

$$W_{vis} = c\pi\omega\rho^2 \quad (8)$$

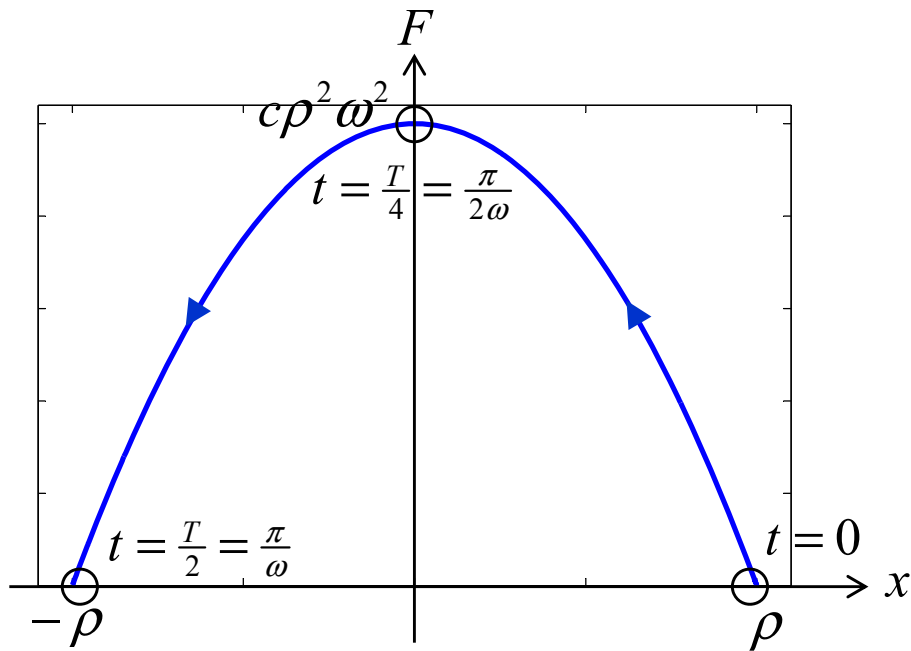
$$W_{V.E} = \pi\eta G_s\rho^2 f_d \quad (33)$$

$$(8), (15) \Rightarrow c\pi\omega\rho^2 = \pi\eta G_s\rho^2 f_d \Rightarrow c_{eq}^{V.E} = \frac{f_d\eta G_s}{\omega} = \frac{f_d G_\ell}{\omega} \quad (37)$$

بدیهی است برای آن که ثابت میراگر معادل مشخص شود باید  $\rho$  و  $\omega$  معلوم باشند.

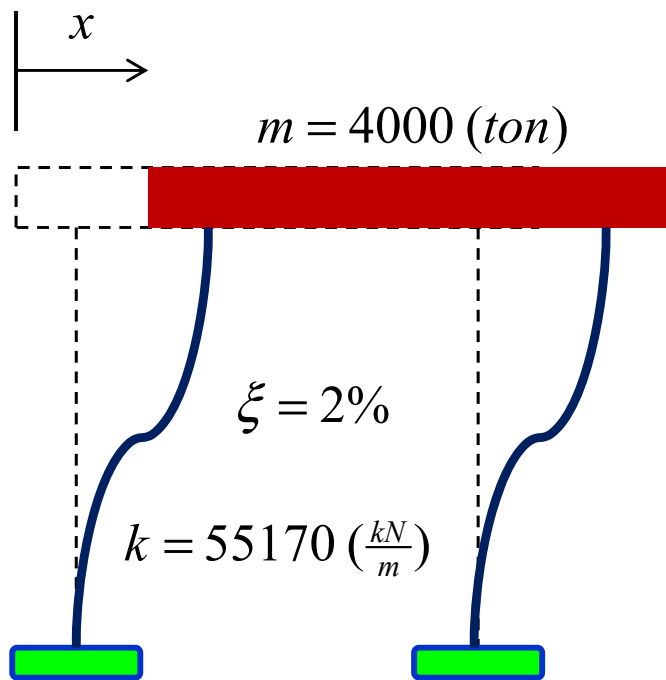
# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

مثال 3- ثابت میرایی معادل میراگر ویسکوز یک میراگر که نیروی میرایی آن از رابطه  $F_D = cx^2$  محاسبه شده و دارای حرکت کسینوسی می باشد را تعیین نمایید.

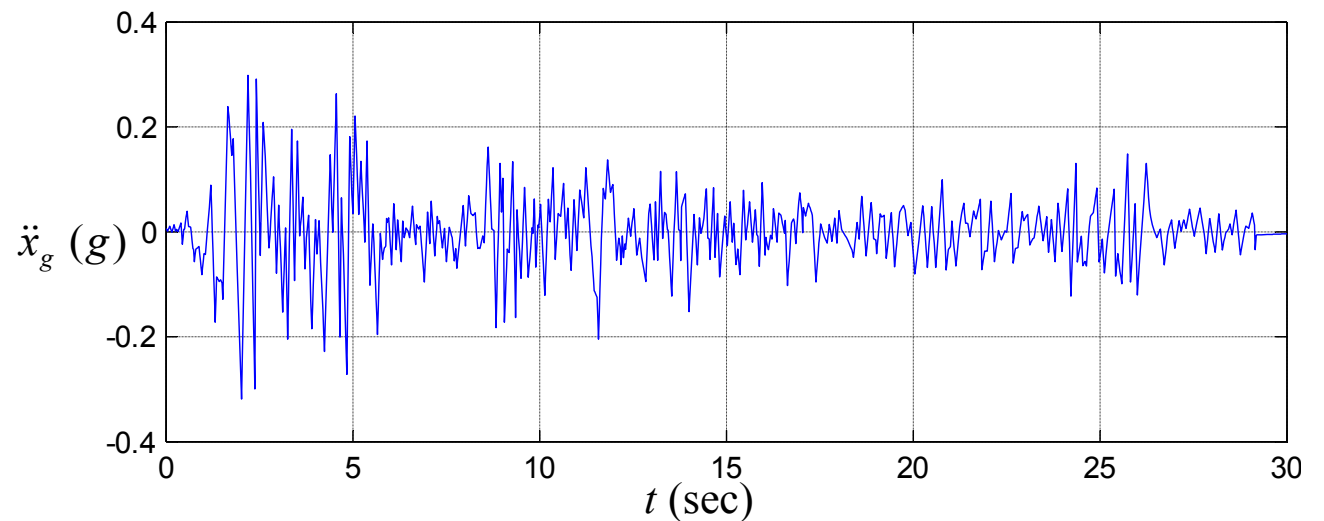


Matlab Code (L04Example03.m)

مثال 4- شکل زیر یک سیستم SDOF را نشان می دهد که تحت اثر زلزله Elcentro قرار گرفته است. یک میراگر سازه ای را آنچنان طراحی نمایید که معادل میرایی ویسکوز سیستم باشد.



شتاب نگاشت زلزله Elcentro



Matlab Code (L04Example04.m)

## □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 4-

$$\omega = 3.71 \text{ (rad / sec)}$$

$$c_{eq}^{str} = 5.9421 \times 10^5 \text{ (N .sec/ m)}$$

$$F_{vis}(t) = 5.9421 \times 10^5 \dot{x}(t)$$

$$= \frac{\pi(3.71)5.9421 \times 10^5}{2} \times 10^{-3} \Rightarrow k_s = 3466.4 \text{ (kN / m)}$$

$$F_{str}(t) = 3466.4 \times 10^3 |x(t)| \text{sgn}[\dot{x}(t)]$$

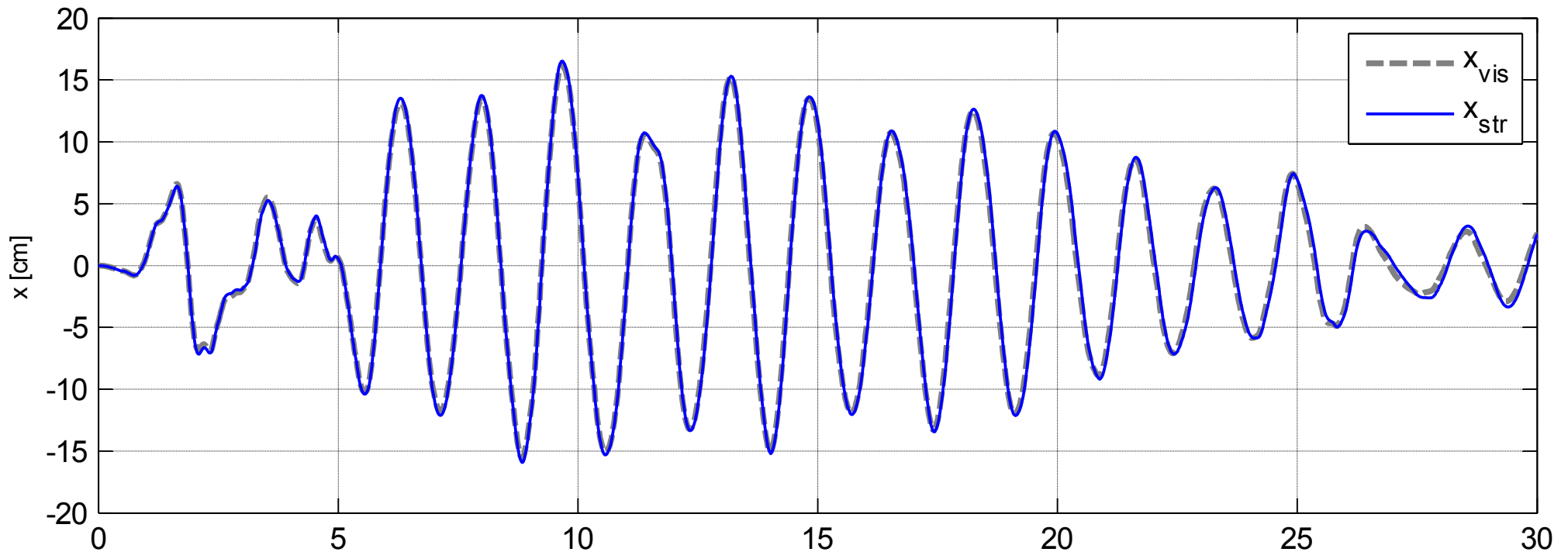
پاسخ مثال 4-

معادله حرکت با در نظر گرفتن میرایی ویسکوز

$$m\ddot{x}(t) + F_{vis}(t) + kx(t) = -m\ell\ddot{x}_g(t)$$

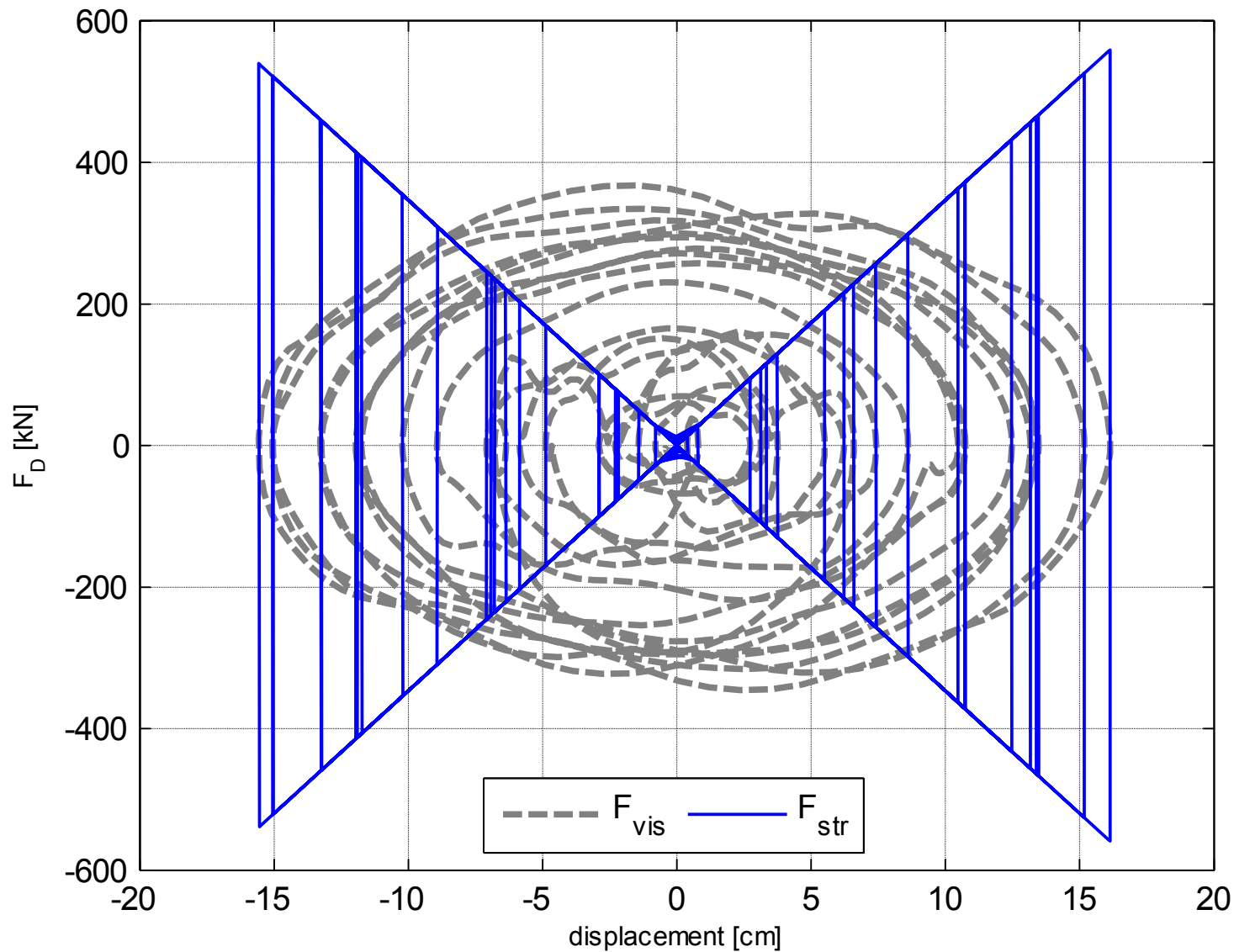
معادله حرکت با در نظر گرفتن میراگر سازه‌ای

$$m\ddot{x}(t) + F_{str}(t) + kx(t) = -m\ell\ddot{x}_g(t)$$

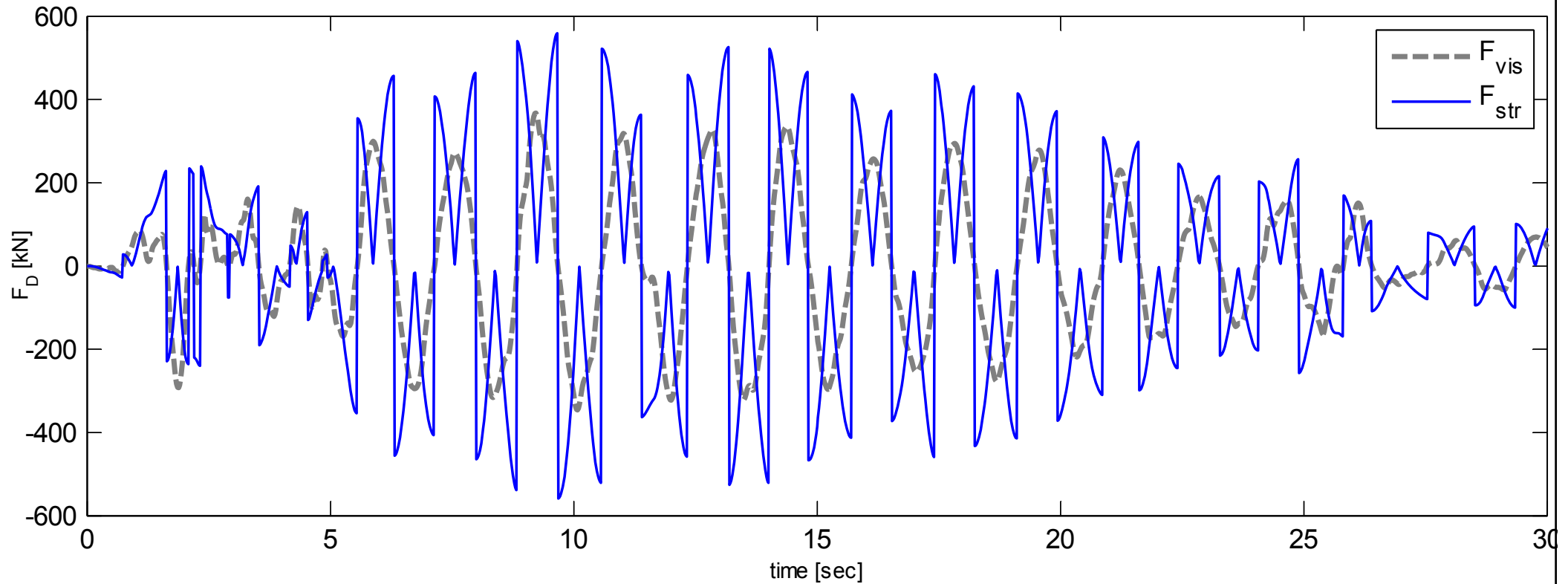


مقایسه پاسخ جابجایی سازه در دو حالت میراگر سازه‌ای و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

پاسخ مثال 4-

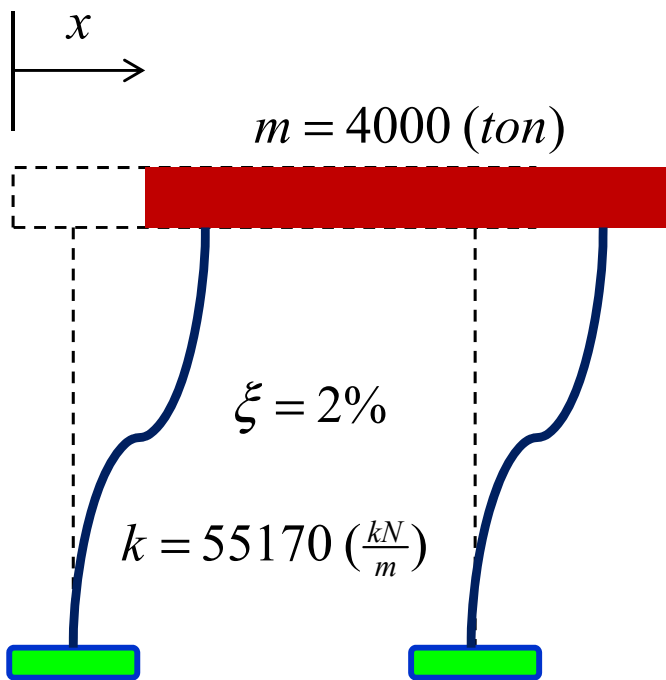


مقایسه نمودار نیرو- جابجایی در دو میراگر سازه‌ای و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

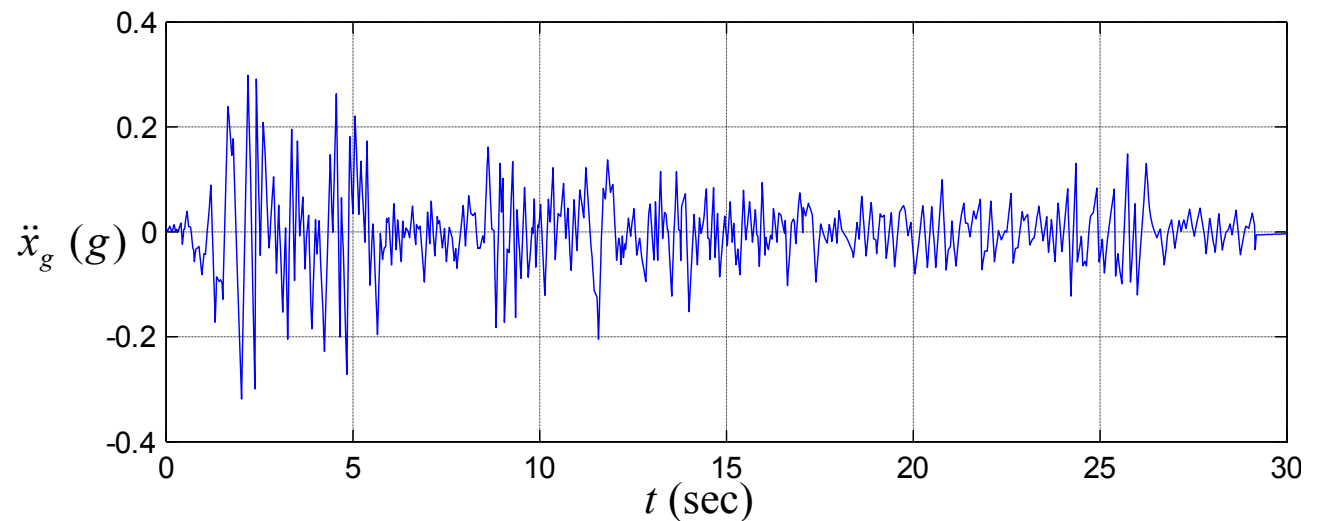


مقایسه تاریخچه زمانی نیروی میرایی در دو میراگر سازه‌ای و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

مثال 5- شکل زیر یک سیستم SDOF را نشان می دهد که تحت اثر زلزله Elcentro قرار گرفته است. یک میراگر پسماند را آنچنان طراحی نمایید که معادل میرایی ویسکوز سیستم باشد.



شتاب نگاشت زلزله Elcentro



Matlab Code (L04Example05.m)

$$\omega = 3.71 \text{ (rad / sec)}$$

$$2(0.02)(4000 \times 10^3)(3.71) \Rightarrow c_{eq}^{hys} = 5.9421 \times 10^5 \text{ (N .sec/ m)}$$

$$F_{vis}(t) = 5.9421 \times 10^5 \dot{x}(t)$$

$$F_y = \frac{\pi \omega \rho c_{eq}^{hys}}{4} \left( \frac{\mu}{\mu - 1} \right)$$

همان طور که مشاهده می شود برای محاسبه  $F_y$  نیاز به تعیین دو پارامتر  $\rho$  و  $\mu$  است. معمولا مقدار  $\rho$  را برابر با پاسخ ماکزیمم سیستم در حالت میراگر ویسکوز در نظر می گیرند که در مثال قبلی  $x_{vis}^{max} = 16.127 \text{ (cm)}$  نتیجه شد. اما مقدار نسبت شکل پذیری  $\mu$  را باید با تکرار و صحیح و خطا به گونه ای انتخاب نمود تا پاسخ سیستم در هر دو حالت میراگر ویسکوز و میراگر پسماند تا حد امکان به یکدیگر نزدیک شوند.

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 5-

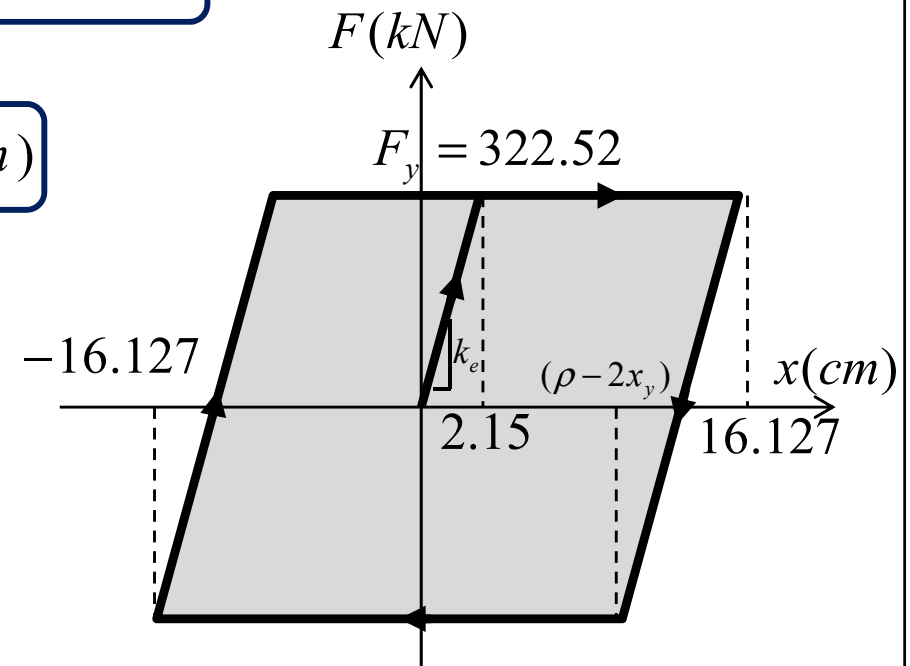
فرض اول:

$$\rho = x_{vis}^{max} = 16.127 (cm)$$

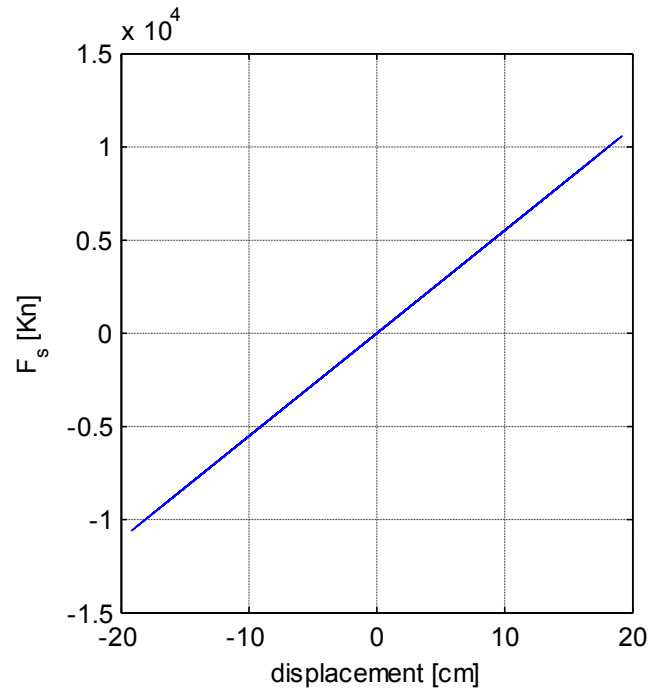
$$\Rightarrow F_y = 3.2252 \times 10^5 (N)$$

$$x_y = 2.15 (cm)$$

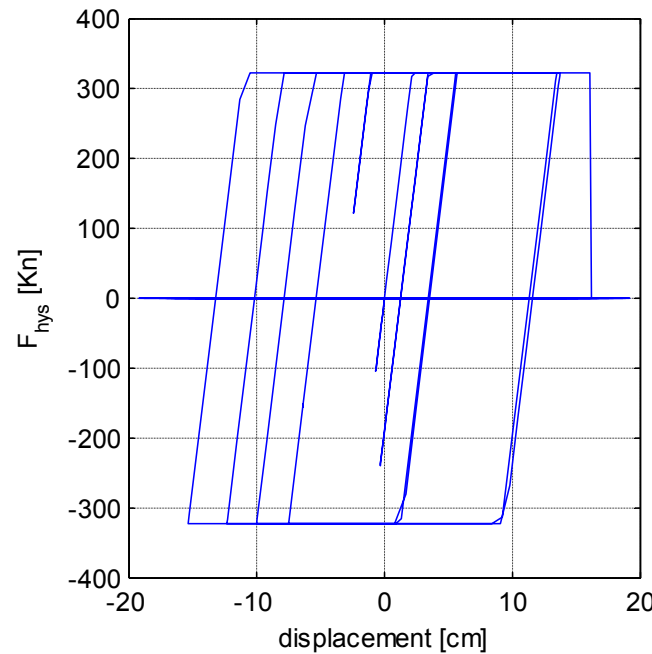
$$\frac{3.2252 \times 10^5}{0.0215} \times 10^{-3} \Rightarrow k_e = 14999 (kN / m)$$



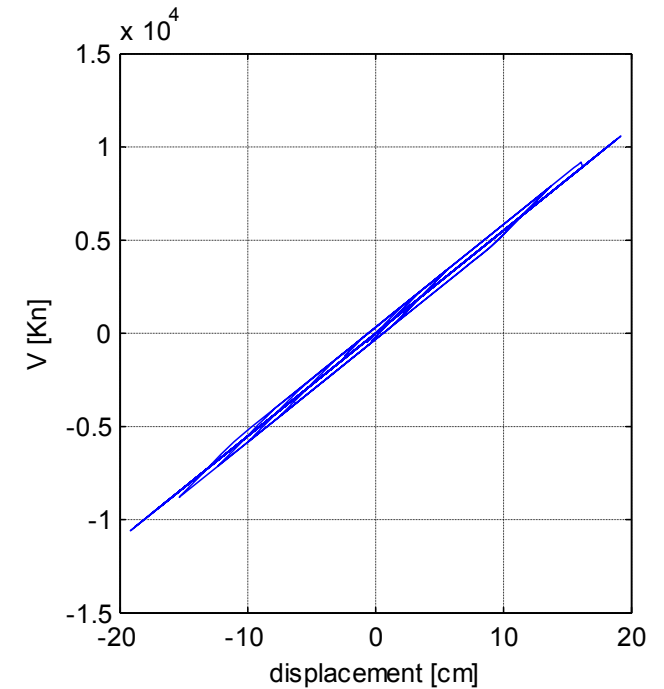
نمودار نیروی - جابجایی میراگر پسماند ( $\mu = 7.5$ )



(الف)



(ب)



(ج)

رابطه نیرو جابجایی الف) الاستیک، ب) میرایی پسماند ( $\mu = 7.5$ ) و ج) برش کل تحت اثر زلزله Elcentro

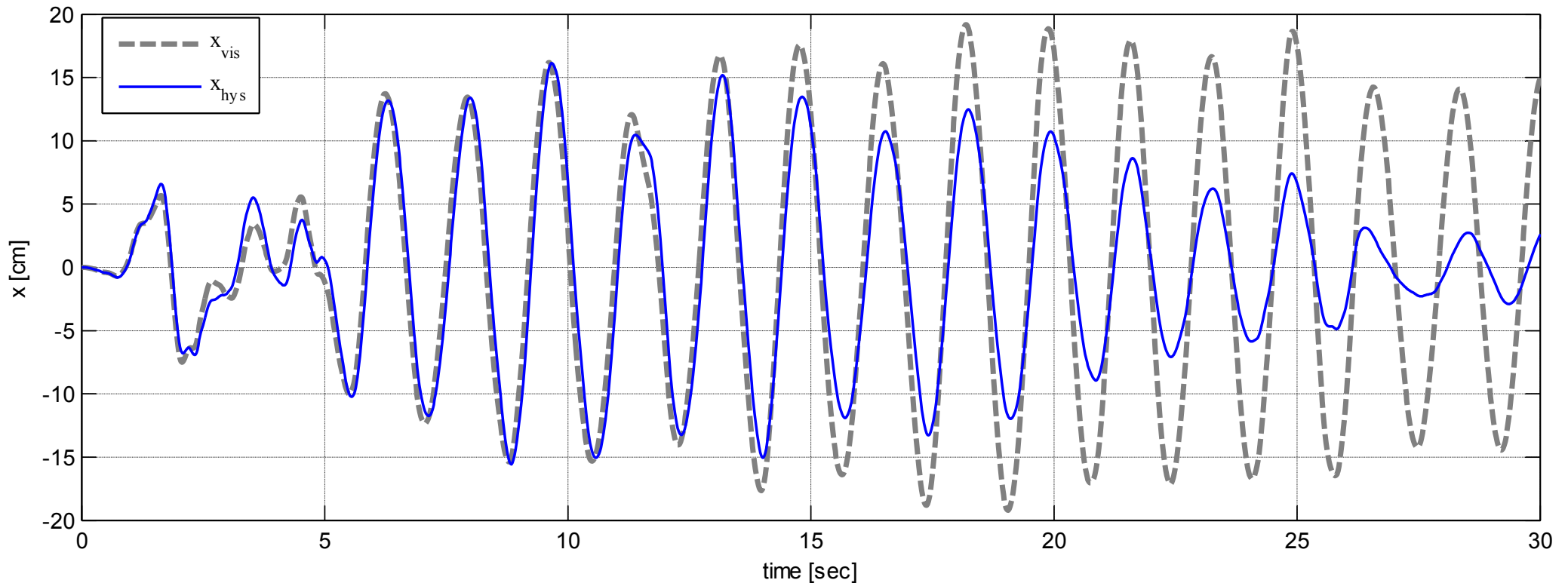
پاسخ مثال 5-

معادله حرکت با در نظر گرفتن میرایی ویسکوز

$$m\ddot{x}(t) + F_{vis}(t) + kx(t) = -ml\ddot{x}_g(t)$$

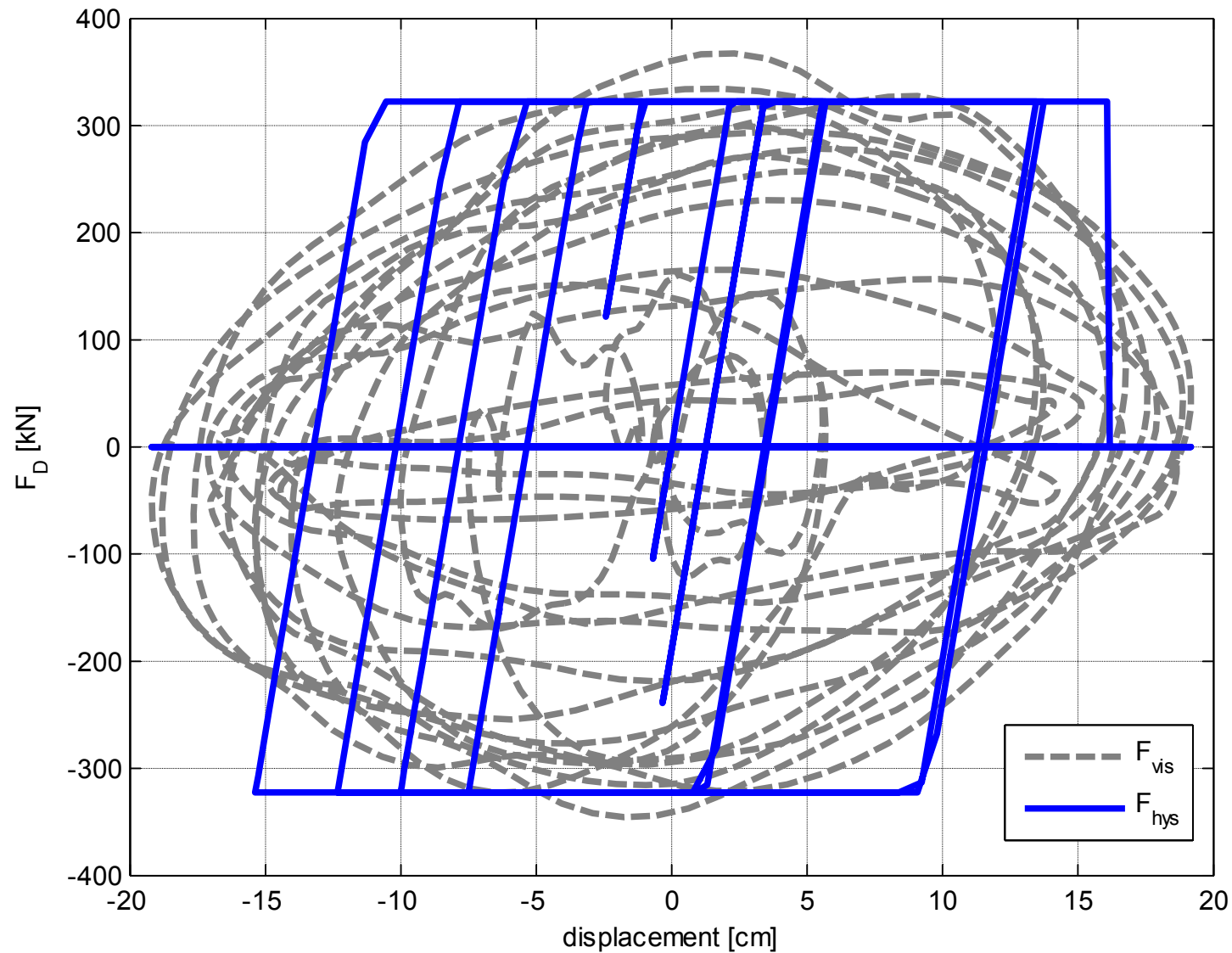
معادله حرکت با در نظر گرفتن میراگر پسماند

$$m\ddot{x}(t) + F_{hys}(t) + kx(t) = -ml\ddot{x}_g(t)$$

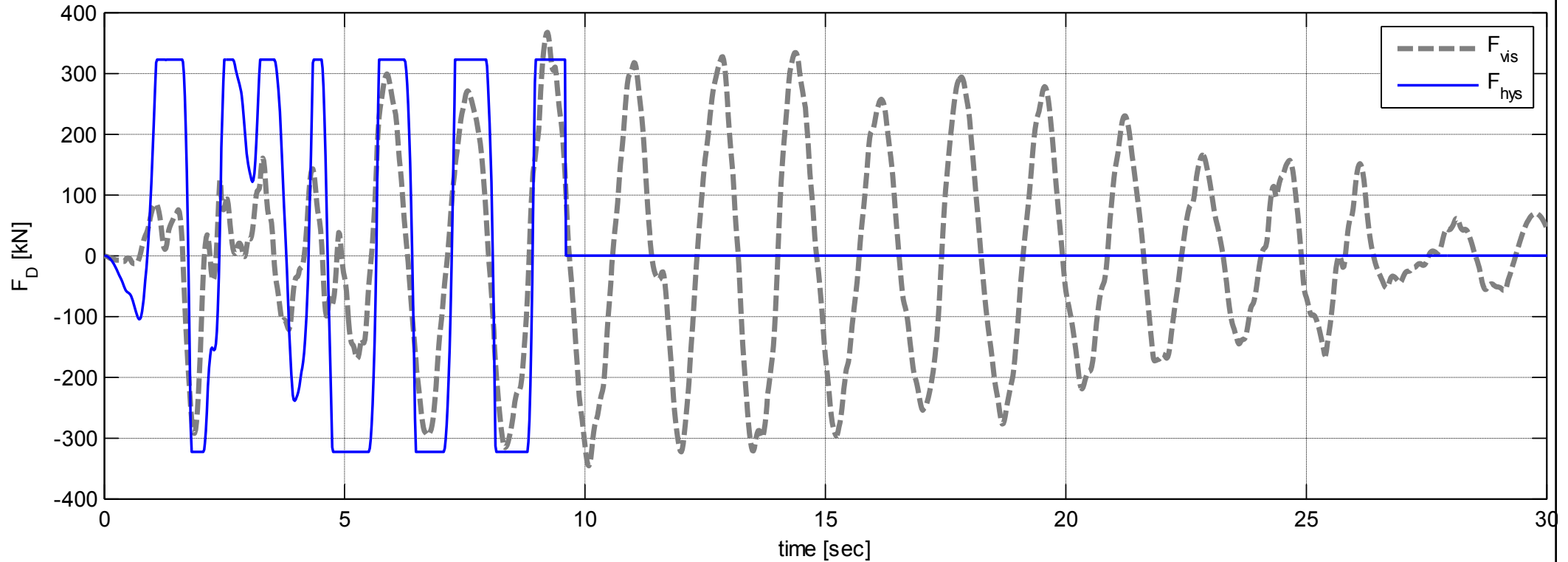


مقایسه پاسخ جابجایی سازه در دو حالت میراگر پسماند ( $\mu = 7.5$ ) و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

پاسخ مثال 5-



مقایسه نمودار نیرو- جابجایی در دو میراگر پسماند ( $\mu = 7.5$ ) و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro



مقایسه تاریخچه زمانی نیروی میرایی در دو میراگر پسماند ( $\mu = 7.5$ ) و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

فرض دوم:

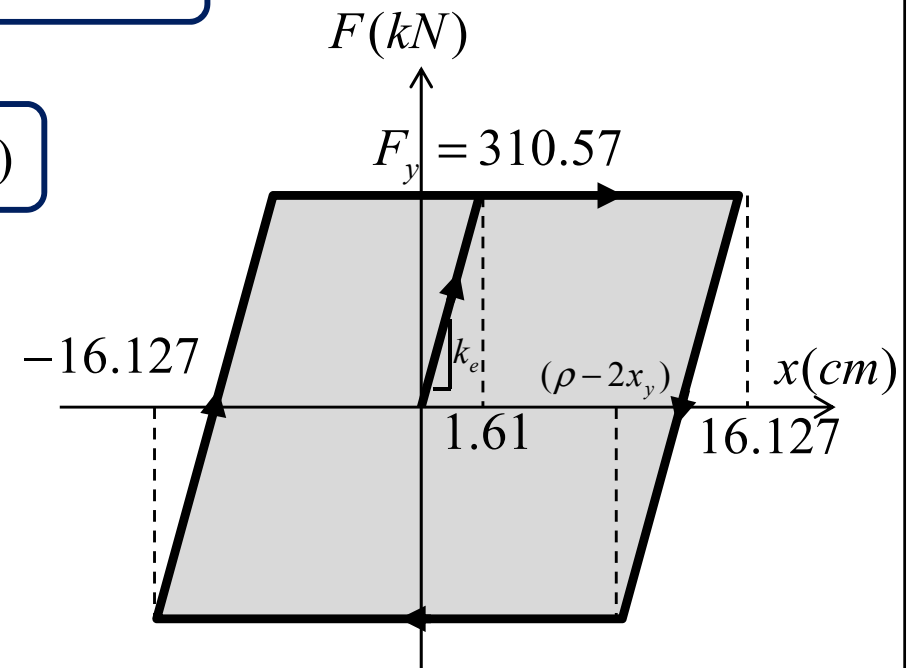
$$\rho = x_{vis}^{max} = 16.127 (cm)$$

$$\text{if } \mu = 10 \Rightarrow F_y = \frac{\pi \omega \rho c_{eq}^{hys}}{4} \left( \frac{\mu}{\mu - 1} \right) = \frac{\pi (3.71) (0.16127) (5.9421 \times 10^5)}{4} \left( \frac{10}{10 - 1} \right)$$

$$\Rightarrow F_y = 3.1057 \times 10^5 (N)$$

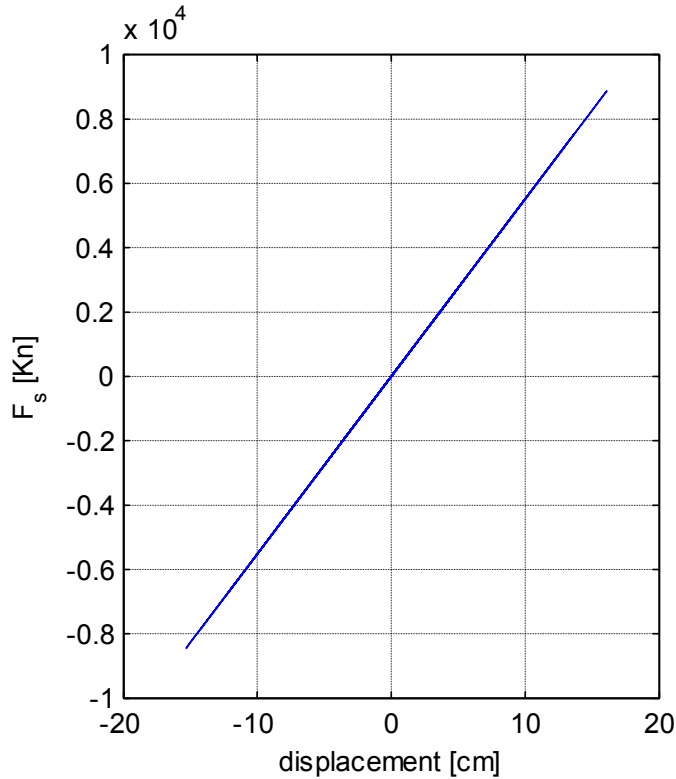
$$(16) \Rightarrow \mu = \frac{\rho}{x_y} \Rightarrow x_y = \frac{\rho}{\mu} = \frac{16.127}{10} \Rightarrow x_y = 1.61 (cm)$$

$$k_e = \frac{F_y}{x_y} = \frac{3.1057 \times 10^5}{0.0161} \times 10^{-3} \Rightarrow k_e = 19258 (kN / m)$$

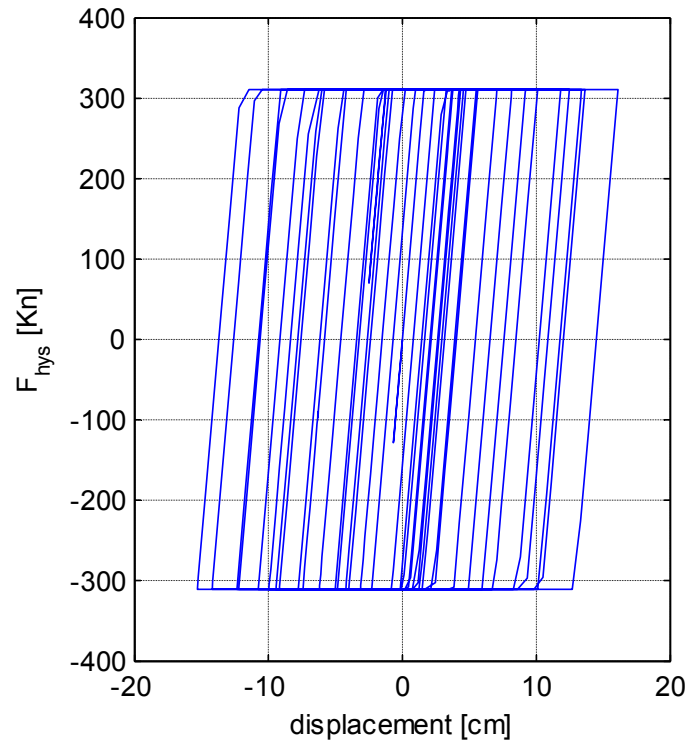


نمودار نیروی - جابجایی میراگر پسماند ( $\mu = 10$ )

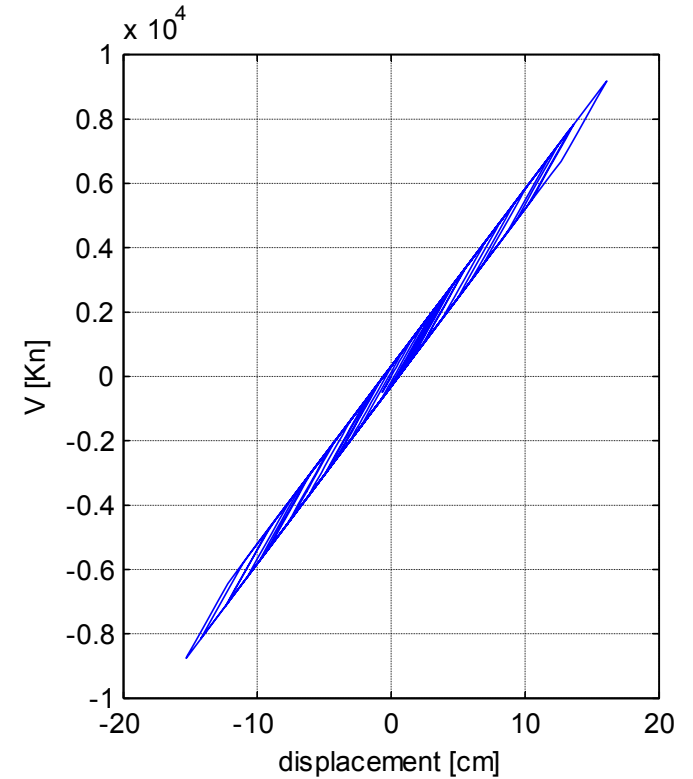
پاسخ مثال 5-



(الف)



(ب)



(ج)

رابطه نیرو جابجایی الف) الاستیک، ب) میرایی پسماند ( $\mu = 10$ ) و ج) برش کل تحت اثر زلزله Elcentro

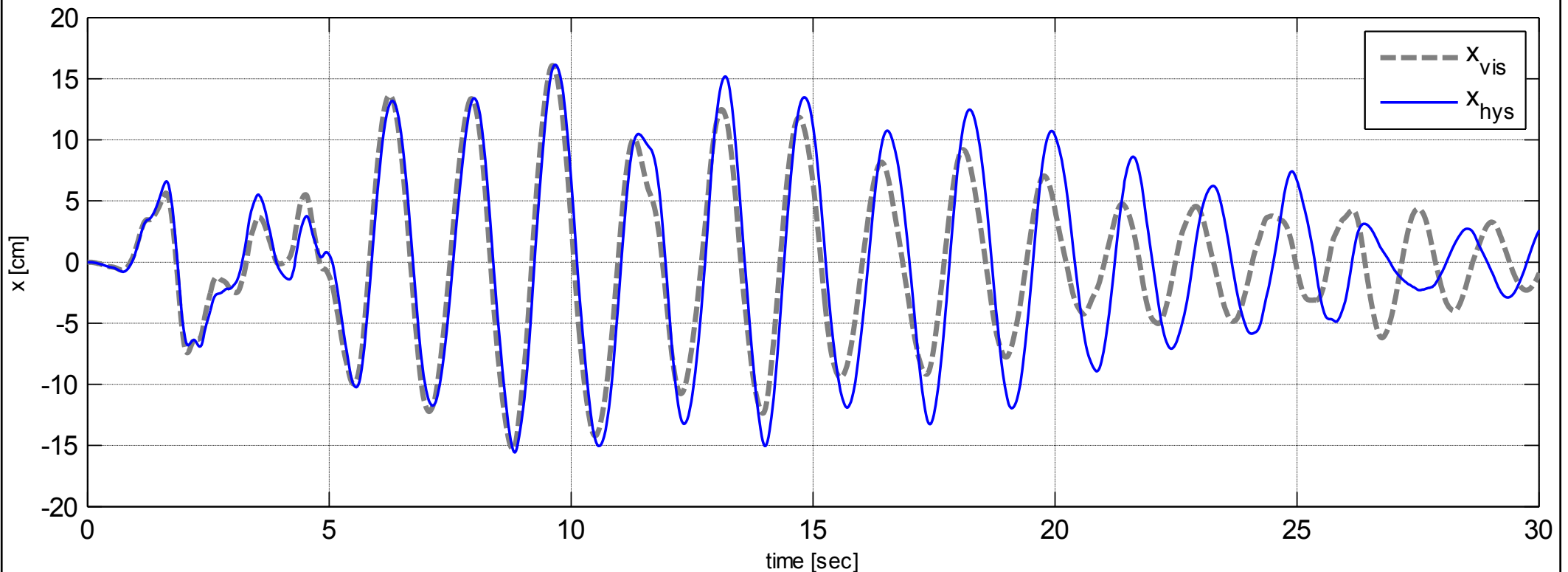
پاسخ مثال 5-

معادله حرکت با در نظر گرفتن میرایی ویسکوز

معادله حرکت با در نظر گرفتن میراگر پسماند معادل

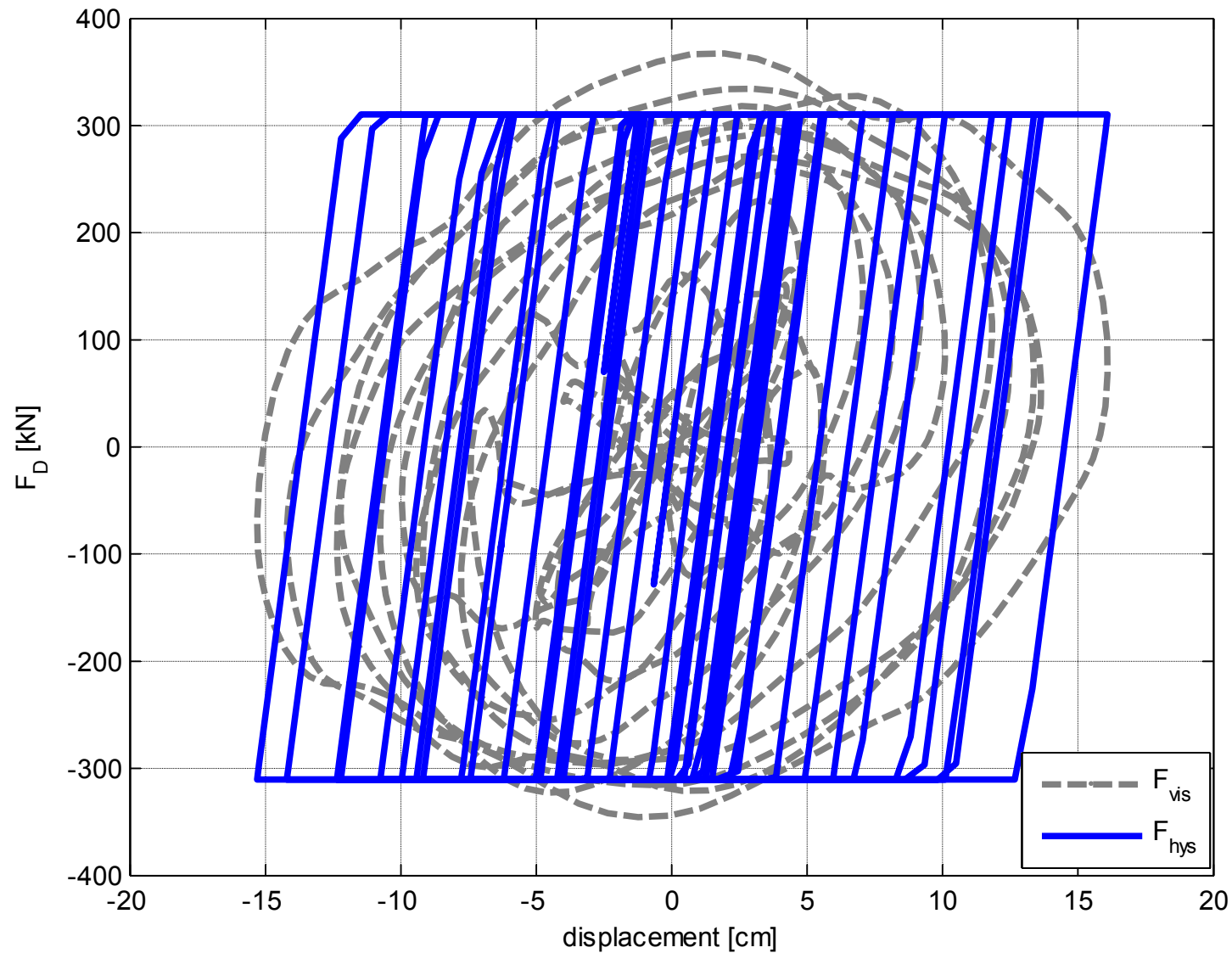
$$m\ddot{x}(t) + F_{vis}(t) + kx(t) = -m\ell\ddot{x}_g(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + F_{hys}(t) + kx(t) = -m\ell\ddot{x}_g(t)$$

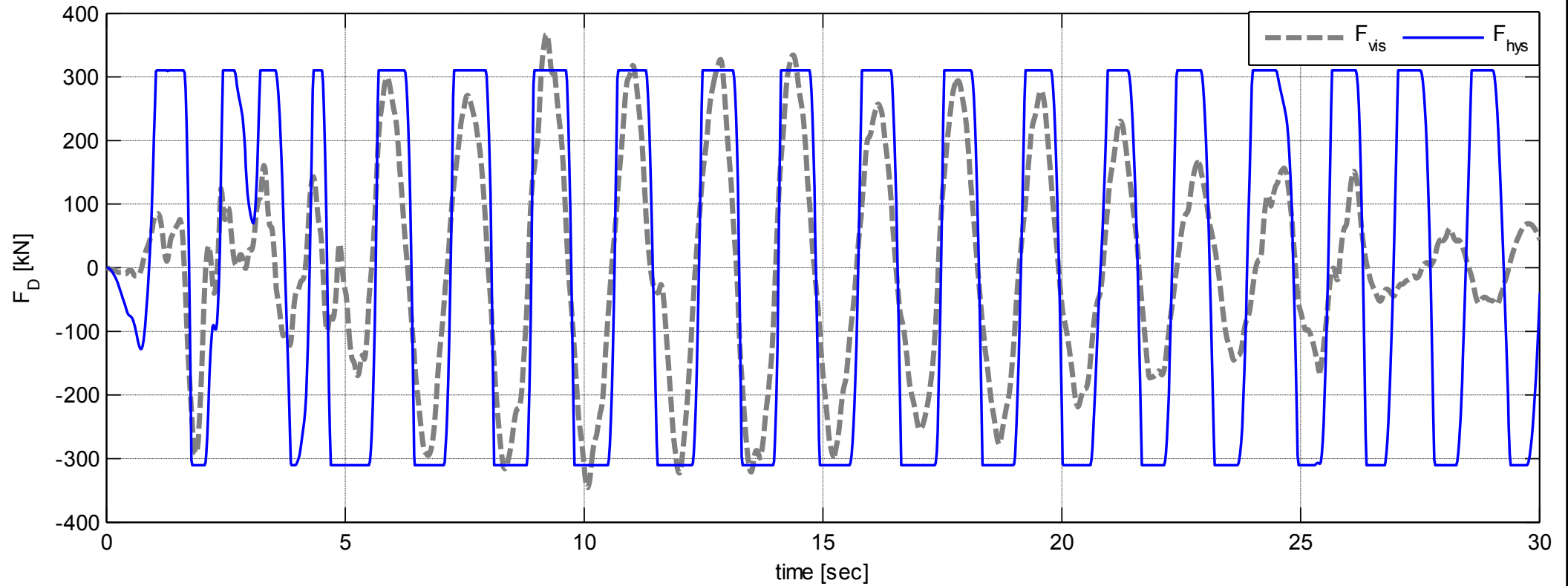


مقایسه پاسخ جابجایی سازه در دو حالت میراگر پسماند ( $\mu = 10$ ) میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

پاسخ مثال 5-

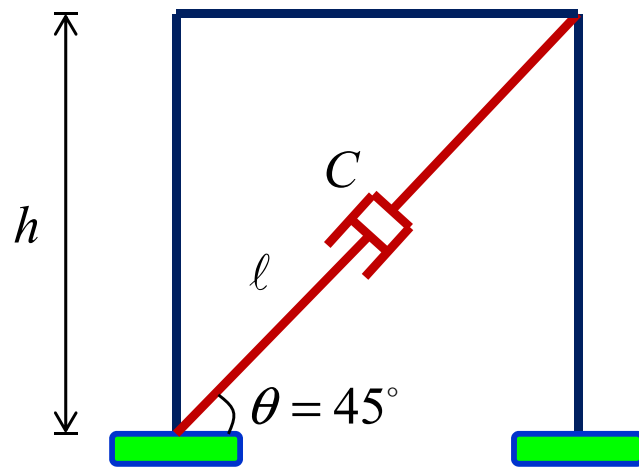


مقایسه نمودار نیرو- جابجایی در دو میراگر پسماند ( $\mu = 10$ ) و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro



مقایسه تاریخچه زمانی نیروی میرایی در دو میراگر پسماند ( $\mu = 10$ ) و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

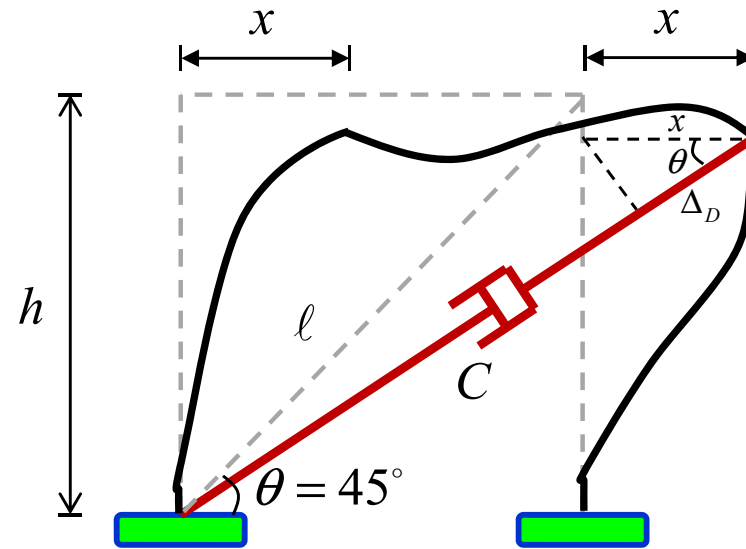
# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز



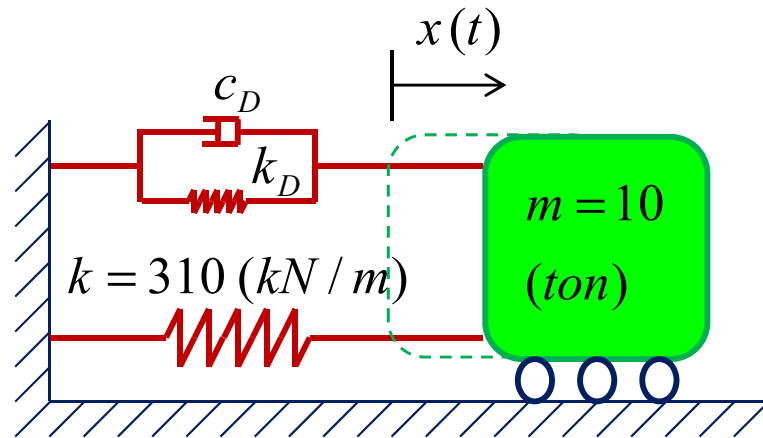
مثال 6- شکل مقابل یک سیستم SDOF مجهز به یک میراگر پسماند را نشان می‌دهد. حداکثر جابجایی جانبی مجاز طبقه برابر با  $\frac{h}{200}$  است که  $h$  ارتفاع طبقه می‌باشد. اگر کرنش نظیر تسلیم در مصالح استفاده شده در میراگر پسماند برابر با  $\epsilon_y = \frac{1}{2000}$  باشد ضریب شکل‌پذیری میراگر پسماند را تعیین نمایید.

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 6-



# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

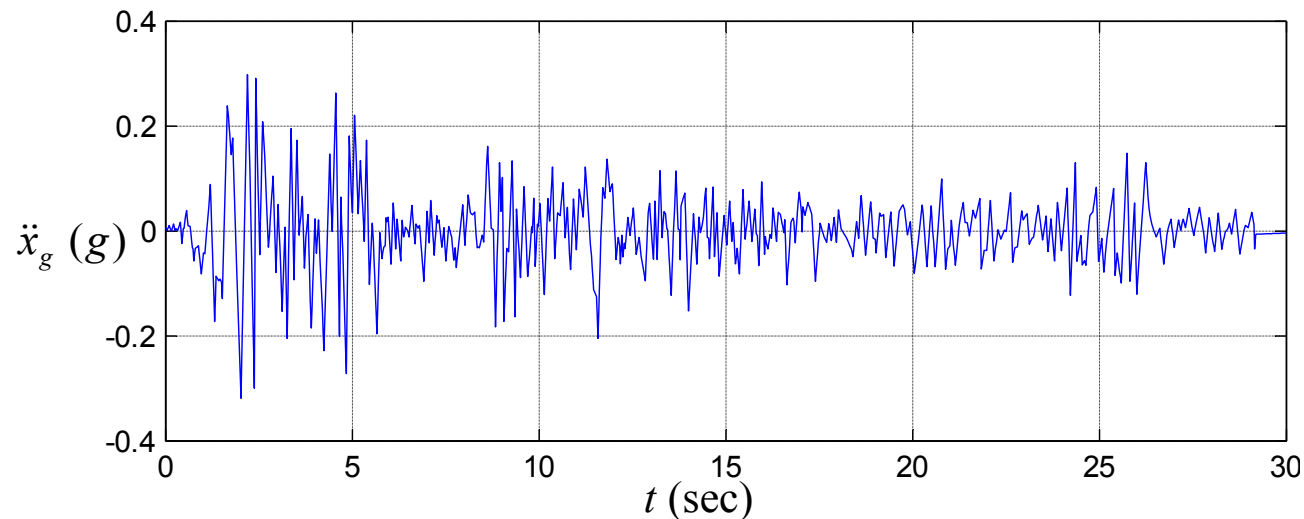


مثال 7- شکل زیر یک سیستم SDOF را نشان می دهد که تحت اثر زلزله Elcentro قرار گرفته است. مشخصات میراگر ویسکوالاستیک بکارگرفته شده را طراحی نمایید. همچنین ضریب میرایی ویسکوز معادل آن را تعیین کنید.

$$\tilde{\omega} = 2\pi \text{ (rad / sec)}$$

$$\eta = 0.3\pi$$

شتاب نگاشت زلزله Elcentro



Matlab Code (L04Example07.m)

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 7-

معادله حرکت با در نظر گرفتن میراگر ویسکوالاستیک به صورت زیر نوشته می شود.

$$\Rightarrow k_D = 84.784 \text{ (kN / m)}$$

$$= \frac{(0.3\pi)(84.784 \times 10^3)}{2\pi} \times 10^{-3} \Rightarrow c_D = 12.72 \text{ (kN .sec/ m)}$$

$$= \frac{12.72 \times 10^3}{2(10 \times 10^3)(2\pi)} \Rightarrow \xi_D = 0.10$$

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 7-

محاسبه ضریب میرایی ویسکوز معادل:

$$\omega = 5.57 \text{ (rad / sec)}$$

$$\Rightarrow c = 14.35 \times 10^3 \text{ (N.sec/ m)}$$

$$= \frac{14.35 \times 10^3}{2(10 \times 10^3)(5.57)} \Rightarrow \xi = 0.13$$

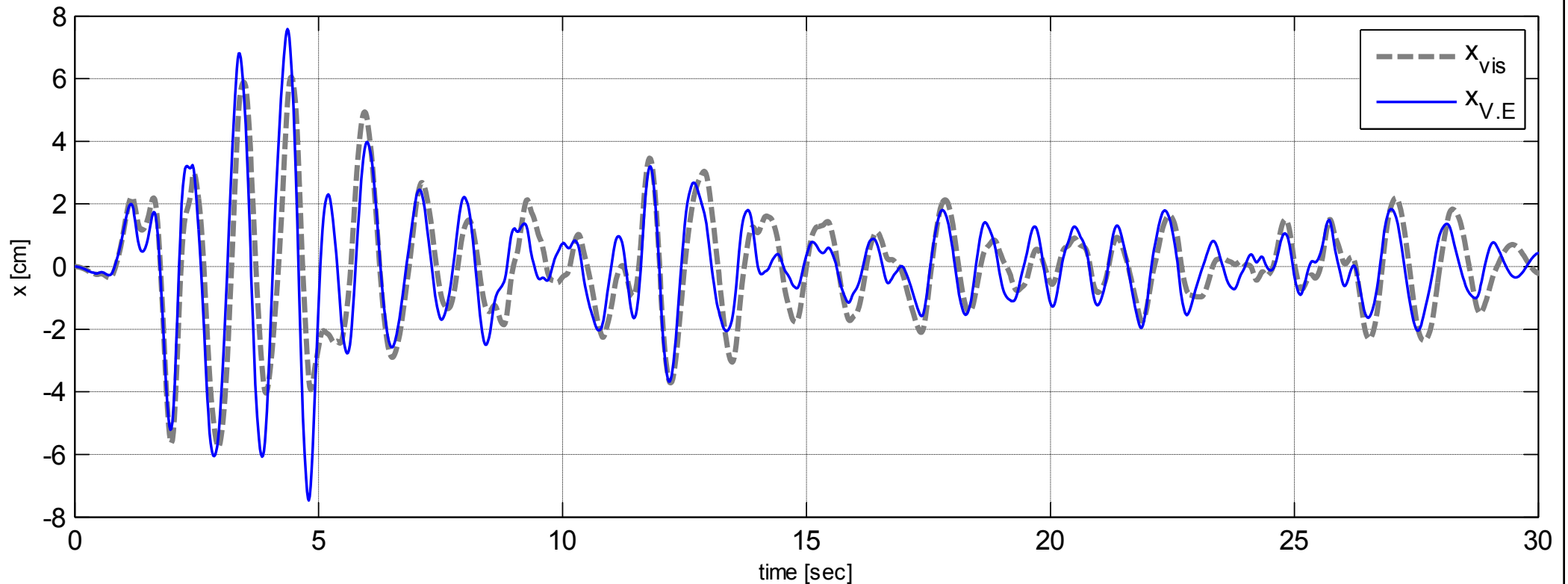
پاسخ مثال 7-

معادله حرکت با در نظر گرفتن میرایی ویسکوز

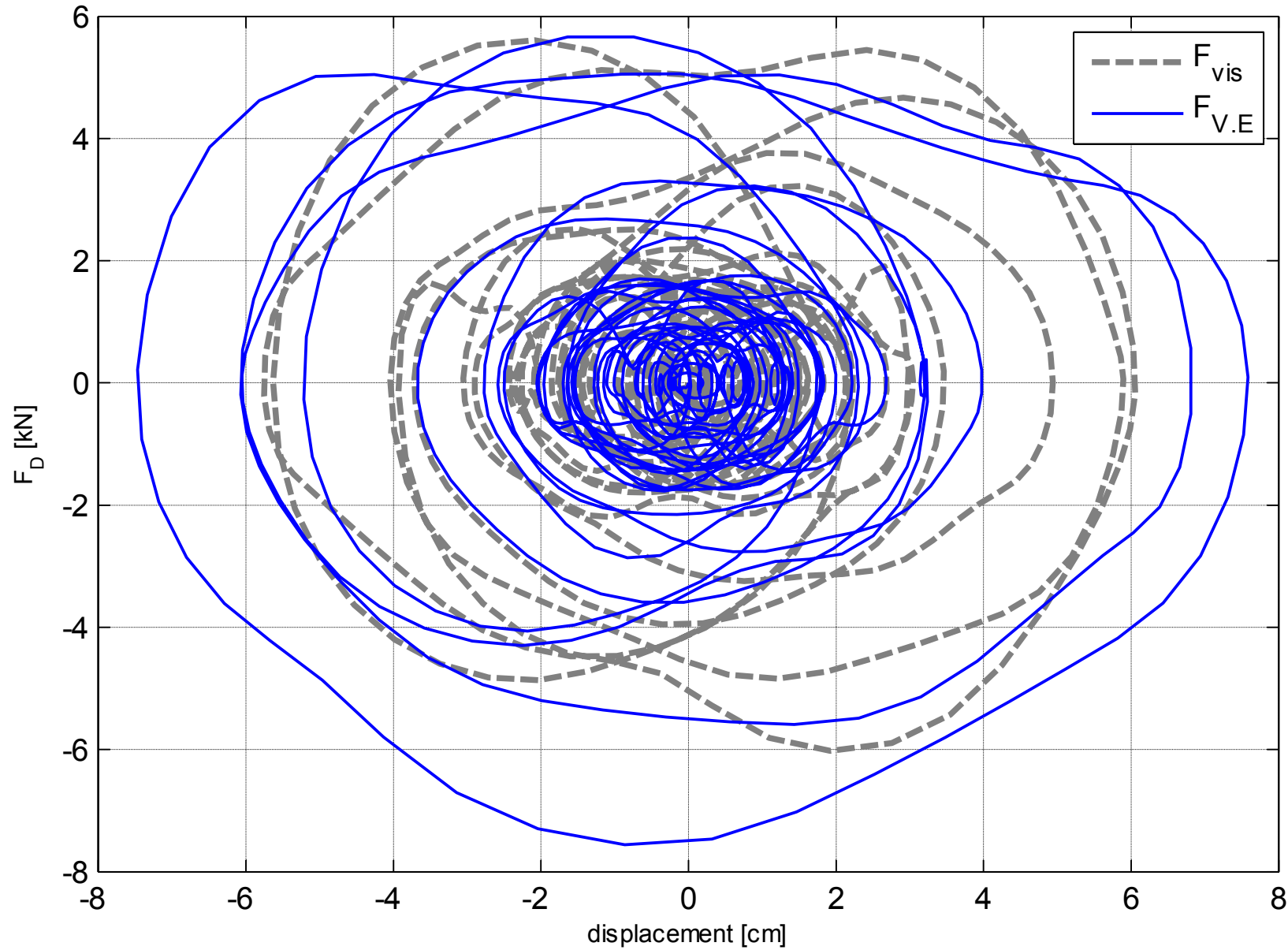
معادله حرکت با در نظر گرفتن میراگر ویسکوالاستیک

$$m\ddot{x}(t) + F_{vis}(t) + kx(t) = -m\ell\ddot{x}_g(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + F_{V.E}(t) + kx(t) = -m\ell\ddot{x}_g(t)$$

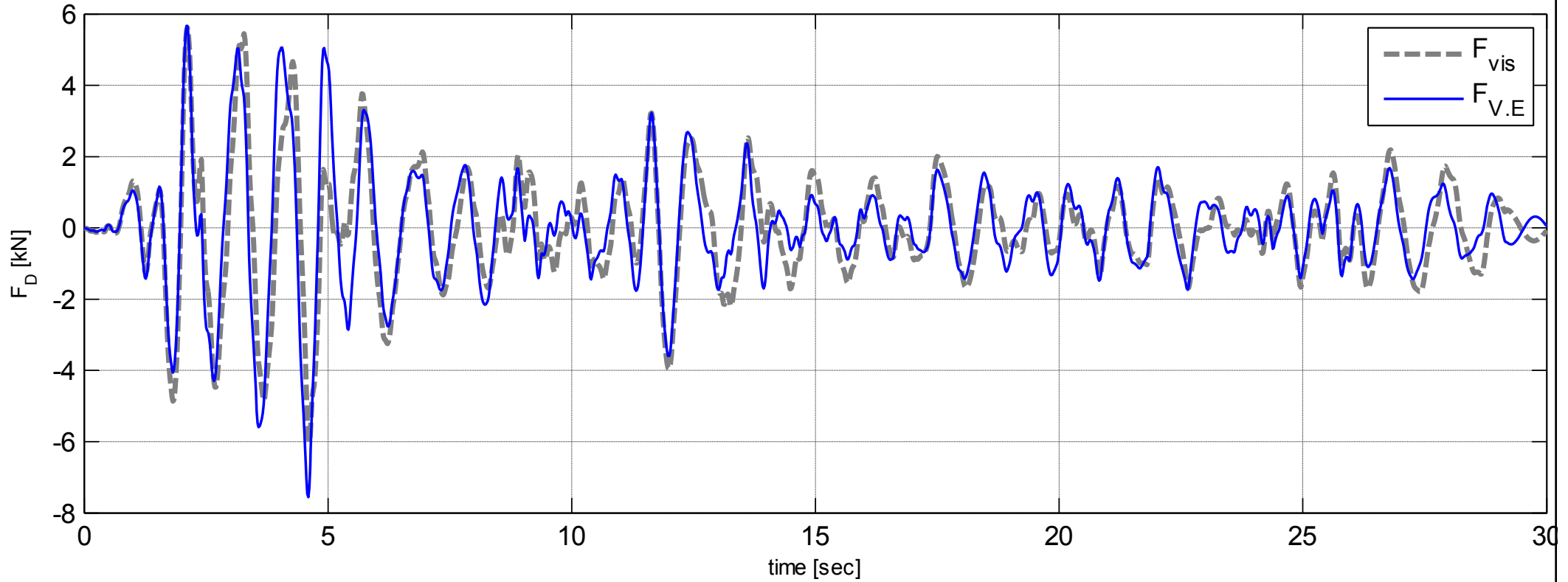


مقایسه پاسخ جابجایی سازه در دو حالت میراگر ویسکوالاستیک و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro



پاسخ مثال 7-

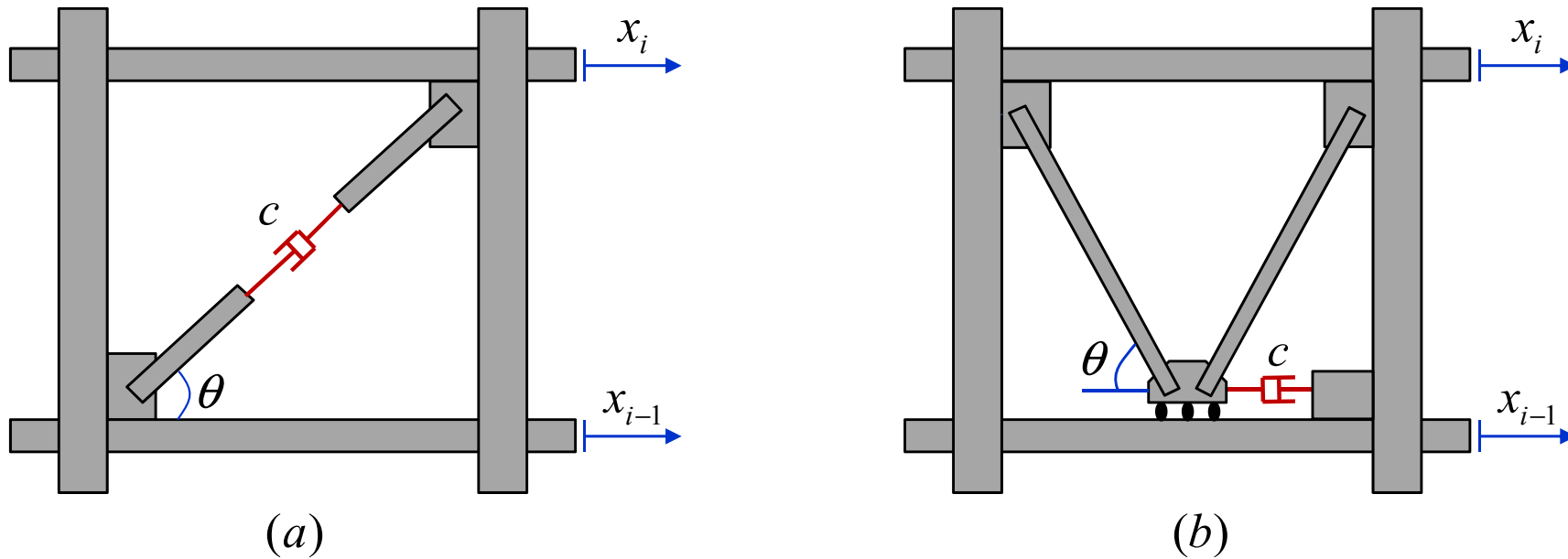
مقایسه نمودار نیرو- جابجایی در دو میراگر ویسکوالاستیک و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro



مقایسه تاریخچه زمانی نیروی میرایی در دو میراگر ویسکوالاستیک و میراگر ویسکوز تحت اثر زلزله Elcentro

## Damping Based Control □ نحوه قرار دادن میراگرها در سازه‌ها و مدل‌سازی آنها

میراگرها را می‌توان در اشکال مختلف و در مکان‌های گوناگون در سازه‌ها قرار داد. دو نمونه متعارف از بکارگیری میراگرها در شکل زیر دیده می‌شود.



طرح شماتیک جاگذاری میراگر در سازه‌ها

این نحوه قرارگیری‌ها یکی از بهترین حالت‌ها است که نتایج تجربی آزمایشگاهی با تئوری همخوانی خوبی دارد. بنابراین حالت مدل‌سازی Bracing میراگرها بسیار مناسب است. در برج‌های دو قلو تجارت جهانی در نیورک حدود ده هزار میراگر به این شیوه مدل شده بود.



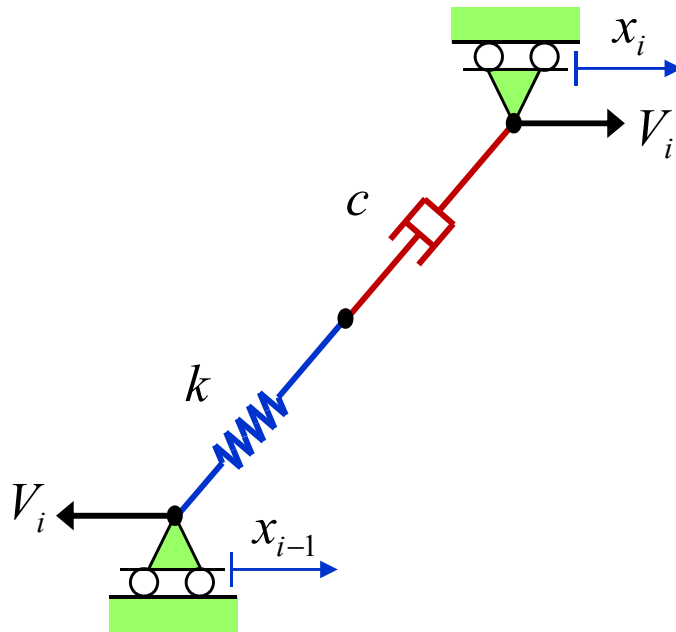
<http://daryaneng.com/Service.aspx?Id=4>



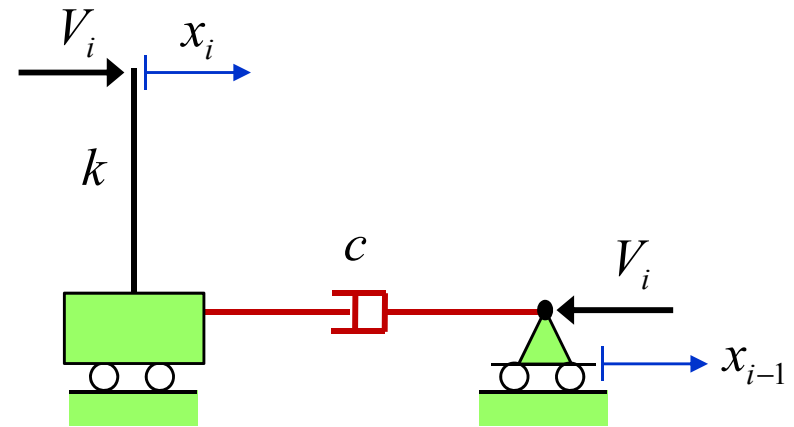
<http://taylordevices.com/seismic-design-steel.html>

# □ نحوه قرار دادن میراگرها در سازه‌ها و مدل‌سازی آنها

مدل تحلیلی میراگرها به صورت زیر نشان داده می‌شود:



(a)

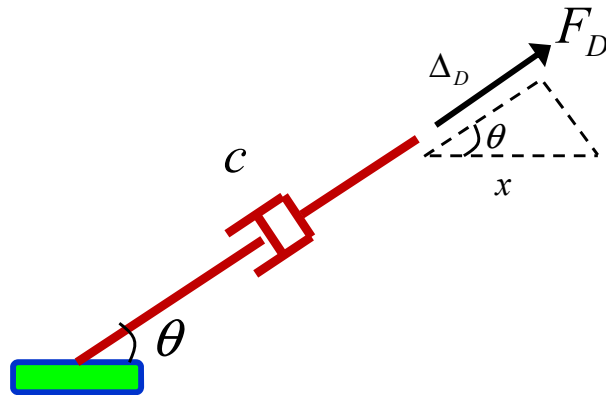


(b)

مدل‌سازی آنالیزی میراگرها

# □ نحوه قرار دادن میراگرها در سازه‌ها و مدل‌سازی آنها

نیروی تولید شده توسط میراگر با فرض آن که یک انتهای میراگر ثابت باشد برابر است با:



$$F_D = c\dot{\Delta}_D \quad (38)$$

با محاسبه  $\Delta_D$  بر حسب جابجایی طبقه  $x$  خواهیم داشت:

$$\Delta_D = x \cos(\theta) \Rightarrow \dot{\Delta}_D = \dot{x} \cos(\theta) \quad (39)$$

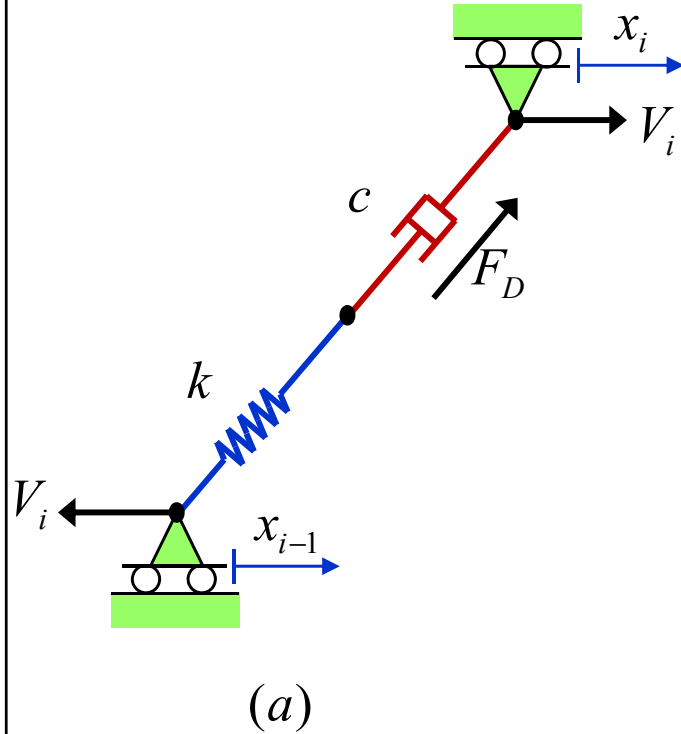
با جایگذاری رابطه (39) در رابطه (38)

$$(39) \rightarrow (38) \Rightarrow F_D = c\dot{x} \cos(\theta) \quad (40)$$

با توجه به آن که هر طبقه جابجا می‌شود در نتیجه هر دو انتهای میراگر جابجایی دارد و ثابت نیست بنابراین:

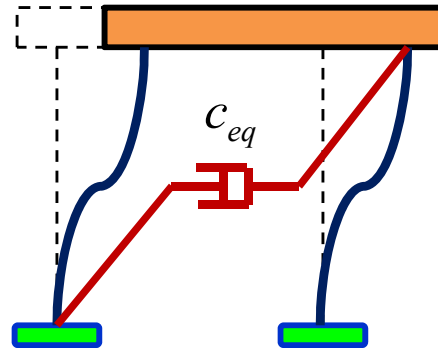
$$(40) \Rightarrow F_D = c(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \cos(\theta) \quad (41)$$

# □ نحوه قرار دادن میراگرها در سازه‌ها و مدل‌سازی آنها



$V_i$  نیروی اعمال شده به طبقه از طرف میراگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_i = F_D \cos(\theta) \quad (41) \Rightarrow V_i = c(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \cos^2(\theta) \quad (42)$$



می‌توان نتیجه گرفت ثابت میرایی معادل در هر طبقه برابر است با:

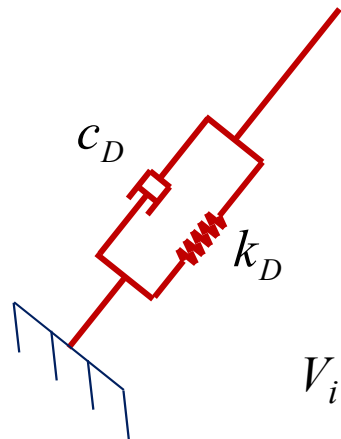
$$c_{eq} = c \cos^2(\theta) \quad (43)$$

رابطه (42) زمانی که  $\theta = 0$  می‌باشد برای حالت (b) نیز صادق است. در واقع در این حالت از تغییر طول بادبندها نسبت به جابجایی میراگر صرف نظر شده است. در میراگر ویسکوالاستیک سختی معادل میراگر، مشابه رابطه (43) در نظر گرفته می‌شود:

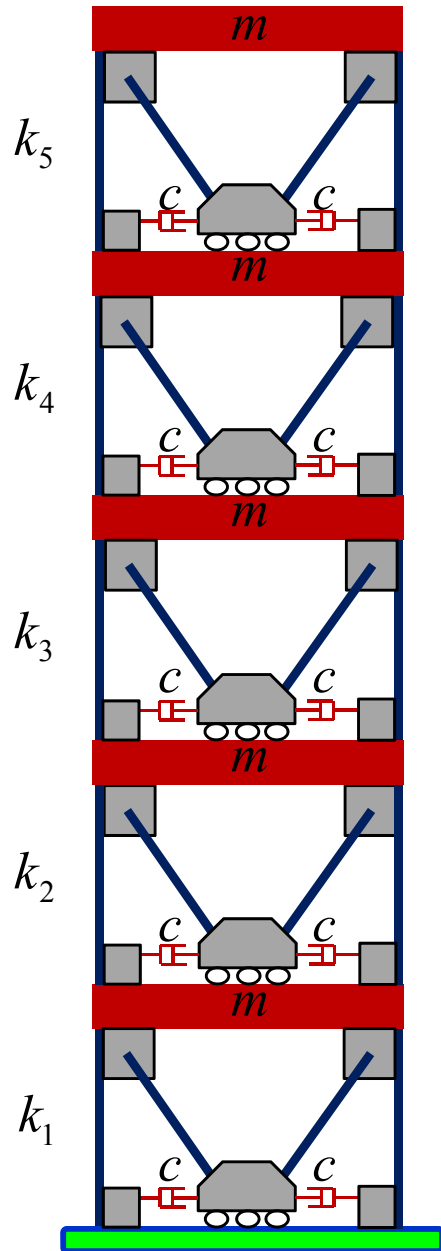
$$k_{eq} = k_D \cos^2(\theta) \quad (44)$$

در نتیجه نیروی اعمال شده به طبقه از طرف میراگر ویسکوالاستیک برابر است با:

$$V_i = k_{eq}(x_i - x_{i-1}) + c_{eq}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \Rightarrow V_i = [k_D(x_i - x_{i-1}) + c_D(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1})] \cos^2(\theta) \quad (45)$$



# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز



مثال 8- یک ساختمان 5 طبقه تحت اثر زلزله Elcentro قرار می گیرد. با انتخاب شکل مود ارتعاشی دلخواه  $\{\phi^*\}$  ثابت میراگرهای ویسکوز chevron و حداکثر نیروی تولید شده توسط آنها را تعیین نمایید.

$$m = 10000 \text{ (kg)}$$

$$\xi_{vis} = 0.1$$

$$\omega^* = 9.52 \text{ (rad / sec)}$$

$$\{\phi^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Matlab Code (L04Example08.m)

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 8-

$$M^* = 22 \times 10^3 \text{ (kg)}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \Gamma^* = 3 \times 10^4$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4c & -2c & 0 & 0 & 0 \\ -2c & 4c & -2c & 0 & 0 \\ 0 & -2c & 4c & -2c & 0 \\ 0 & 0 & -2c & 4c & -2c \\ 0 & 0 & 0 & -2c & 2c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow C^* = \frac{2}{5}c \quad (I)$$

$$C^* = 41888 \text{ (N .sec/ m)} \quad (II)$$

$$c = 104720 \text{ (N .sec/ m)}$$

ثابت میرایی هر یک از میراگرها

## □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 8-

$$\begin{Bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} y^* \\ \frac{2}{5} y^* \\ \frac{3}{5} y^* \\ \frac{4}{5} y^* \\ y^* \end{Bmatrix}$$

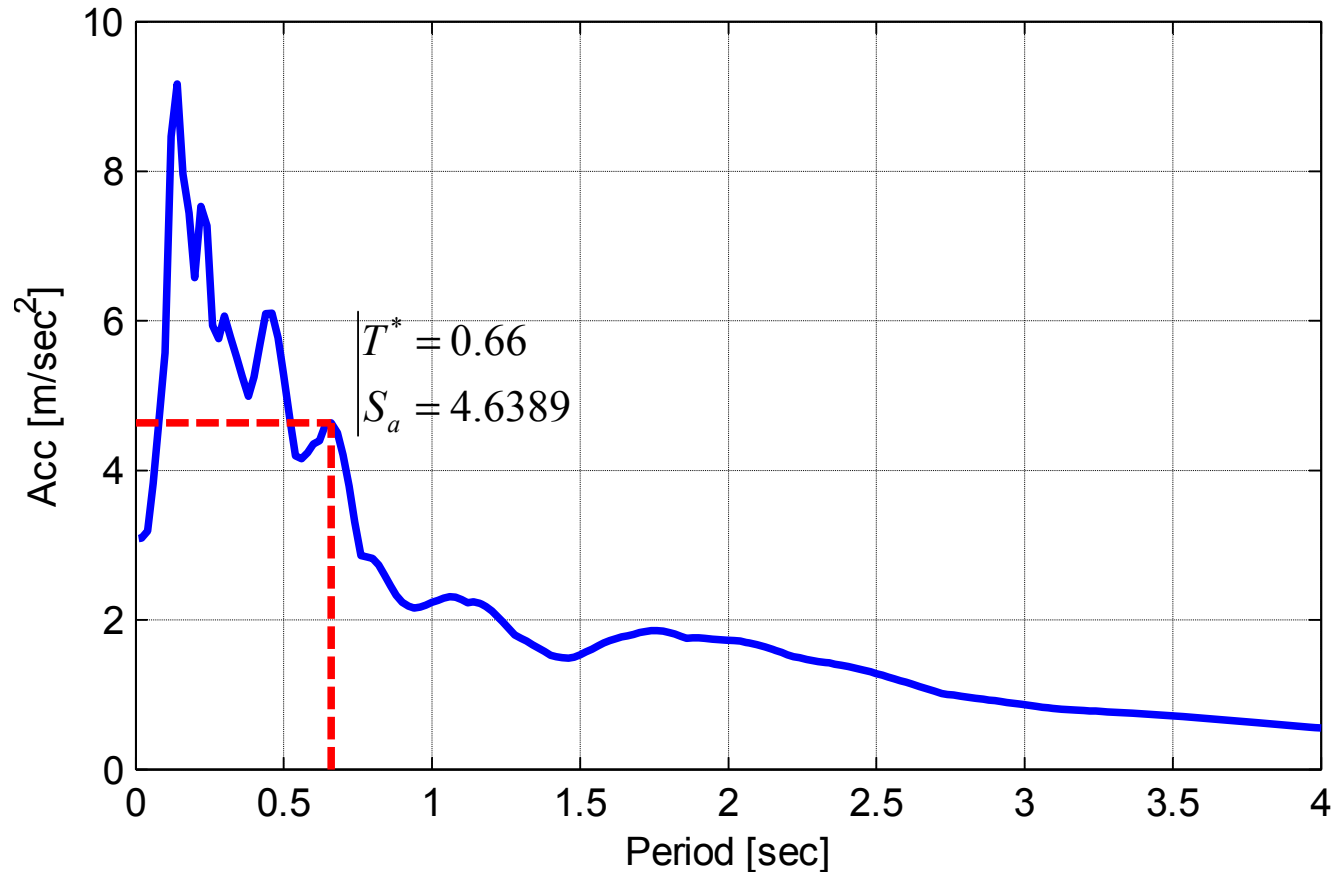
$$F_{D \max} = \frac{c}{5} \dot{y}_{\max}^* \quad (III)$$

$$\dot{y}_{\max}^* = \frac{\Gamma^*}{M^*} \frac{S_a}{\omega^*} \quad (IV)$$

$$(IV) \rightarrow (III) \Rightarrow F_{D_{\max}} = \frac{c\Gamma^*}{5M^*\omega^*} S_a \quad (V)$$

پاسخ مثال 8-

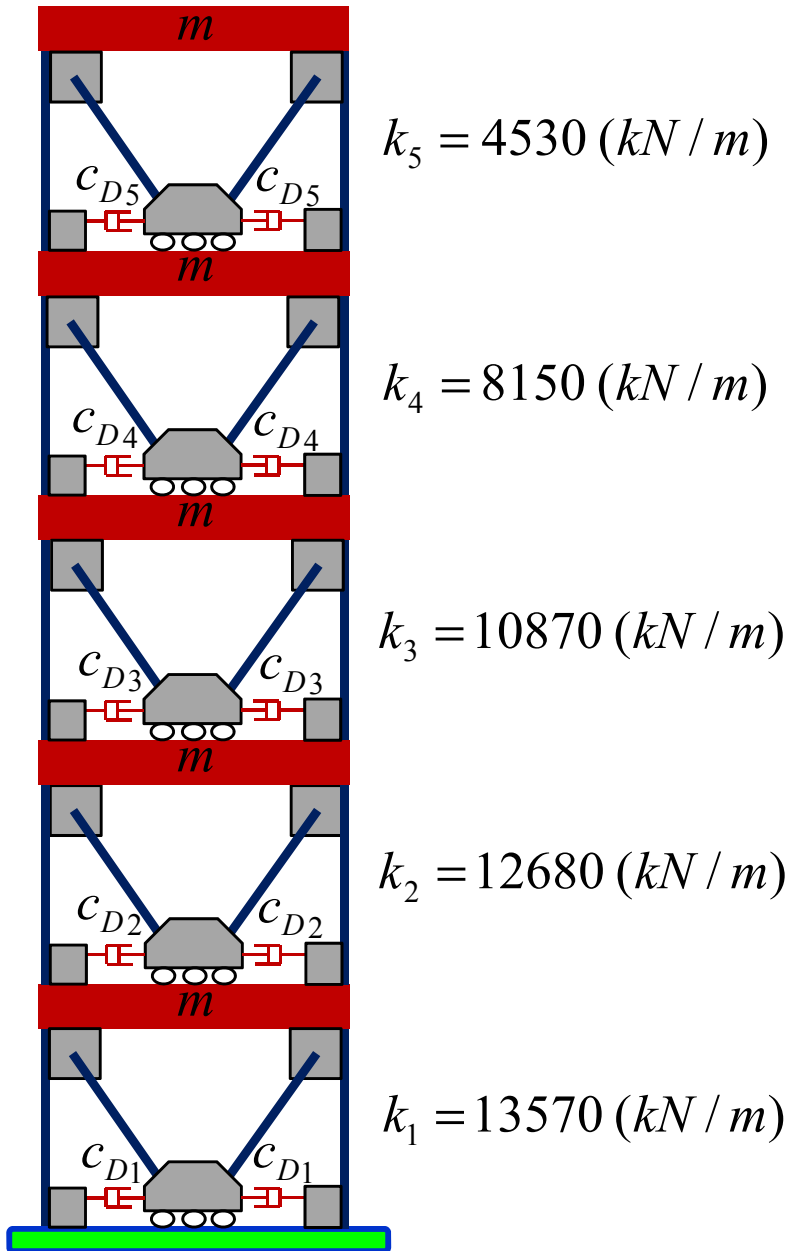
Elcentro



نمودار طیف پاسخ شتاب زلزله Elcentro

$$= \frac{104720 \cdot (3 \times 10^4)}{5 \cdot (22 \times 10^3) \cdot (9.52)} (4.6389) \times 10^{-3} \Rightarrow F_{D_{\max}} = 13.917 \text{ (kN)}$$

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز



مثال 9- شکل مقابل یک ساختمان 5 طبقه را نشان می‌دهد که در هر طبقه مجهز به دو میراگر ویسکوالاستیک است. با فرض آنکه سختی کل طبقه با میرایی طبقه رابطه خطی داشته باشد؛ مطلوب است الف- تعیین ضرایب میرایی و سختی میراگرهای ویسکوالاستیک، ب) سختی طبقه ناشی از بادبندهای chevron. (میرایی خود سازه صفر است  $\xi = 0$ )

$$\xi_{V.E} = 0.1$$

$$\tilde{\omega}_1 = 9.52 \text{ (rad / sec)}$$

$$\eta = 1.428$$

Matlab Code (L04Example09.m)

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 9-

$$\alpha_1 = 0.021 \text{ (sec)}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_{D2} = 0.5\alpha_1 k_2 = 0.5(0.021)(12680) \Rightarrow c_{D2} = 133.26 \text{ (kN .sec/ m)} \\ c_{D3} = 0.5\alpha_1 k_3 = 0.5(0.021)(10870) \Rightarrow c_{D3} = 114.23 \text{ (kN .sec/ m)} \\ c_{D4} = 0.5\alpha_1 k_4 = 0.5(0.021)(8150) \Rightarrow c_{D4} = 85.65 \text{ (kN .sec/ m)} \\ c_{D5} = 0.5\alpha_1 k_5 = 0.5(0.021)(4530) \Rightarrow c_{D5} = 47.61 \text{ (kN .sec/ m)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{D2} = \frac{1}{0.15} c_{D2} = \frac{1}{0.15} (133.26) \Rightarrow k_{D2} = 888.37 \text{ (kN / m)} \\ k_{D3} = \frac{1}{0.15} c_{D3} = \frac{1}{0.15} (114.23) \Rightarrow k_{D3} = 761.56 \text{ (kN / m)} \\ k_{D4} = \frac{1}{0.15} c_{D4} = \frac{1}{0.15} (85.65) \Rightarrow k_{D4} = 571.00 \text{ (kN / m)} \\ k_{D5} = \frac{1}{0.15} c_{D5} = \frac{1}{0.15} (47.61) \Rightarrow k_{D5} = 317.38 \text{ (kN / m)} \end{array} \right.$$

# □ معادل سازی انواع میراگرها با میراگر ویسکوز

پاسخ مثال 9-

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{st2} = k_2 - 2k_{D_2} = (12680) - 2(888.37) \Rightarrow k_{st2} = 10903 \text{ (kN / m)} \\ k_{st3} = k_3 - 2k_{D_3} = (10870) - 2(761.56) \Rightarrow k_{st3} = 9346.9 \text{ (kN / m)} \\ k_{st4} = k_4 - 2k_{D_4} = (8150) - 2(571.00) \Rightarrow k_{st4} = 7008 \text{ (kN / m)} \\ k_{st5} = k_5 - 2k_{D_5} = (4530) - 2(317.38) \Rightarrow k_{st5} = 3895.2 \text{ (kN / m)} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\frac{9.52}{1.428}}{\frac{2}{0.021} - 2 \frac{9.52}{1.428}} \times 100 \Rightarrow \beta = 8.15\%$$

یعنی مجموع سختی میراگرها در هر طبقه حدود 8 درصد سختی خالص طبقه است.

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

در طراحی میراگرها لازم است ابتدا معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم را بنویسیم. پس از آن ممکن است میرایی را تابع خطی از سختی هر طبقه در نظر بگیریم؛ و یا آنکه در حالت کلی میرایی‌ها را به دلخواه و نه متناسب با سختی اضافه نماییم.

معادله حرکت سیستم 2DOF نشان داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (45.a)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45.b)$$

پاسخ معادله (45) به صورت زیر می‌باشد:

$$\{\mathbf{x}\} = \{\boldsymbol{\phi}\} e^{\lambda t} \quad (46.a)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda t} \quad (46.b)$$

با جایگذاری پاسخ در معادله حرکت:

$$(46.a) \rightarrow (45.a) \quad \left( [\mathbf{m}]\lambda^2 + [\mathbf{c}]\lambda + [\mathbf{k}] \right) \{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (47)$$

با قرار دادن مقادیر  $x_1$  و  $x_2$  در معادله (45) دو معادله دو مجهول به دست می‌آید. در واقع هدف به دست آوردن مقادیر ویژه می‌باشد. مشابه آن چه که در دینامیک داشتیم  $[\mathbf{k}] - \omega^2[\mathbf{m}] = 0$  با این تفاوت در اینجا برای سیستم 2DOF میرایی نیز وارد می‌شود.

$$(46) \rightarrow (45) \Rightarrow \begin{cases} [\lambda^2 m_1 + \lambda(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)]\phi_1 - (\lambda c_2 + k_2)\phi_2 = 0 \\ -(\lambda c_2 + k_2)\phi_1 + (\lambda^2 m_2 + \lambda c_2 + k_2)\phi_2 = 0 \end{cases} \quad (48)$$

فرم ماتریسی رابطه (48) به صورت زیر است:

$$(48) \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda^2 m_1 + \lambda(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2) & -(\lambda c_2 + k_2) \\ -(\lambda c_2 + k_2) & \lambda^2 m_2 + \lambda c_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

برای آنکه در معادله (49) جواب‌های غیرصفر برای  $\phi_1$  و  $\phi_2$  داشته باشیم باید دترمینان ضرایب صفر شود:

$$[\lambda^2 m_1 + \lambda(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)](\lambda^2 m_2 + \lambda c_2 + k_2) - (\lambda c_2 + k_2)^2 = 0 \quad (50)$$

با توجه به رابطه (49)  $\phi_1$  و  $\phi_2$  مقادیر منحصر به فردی نخواهند بود و دو معادله (49) یک پاسخ را نتیجه می‌دهد. با استفاده از اولین معادله از رابطه (48) می‌توان رابطه‌ای بین  $\phi_1$  و  $\phi_2$  به دست آورد:

$$(48.I) \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 \frac{\lambda^2 m_1 + \lambda(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)}{(\lambda c_2 + k_2)} \quad (51)$$

حالت خاص I: سیستم بدون میرایی ( $c_1 = c_2 = 0$ )

$$(50) \Rightarrow [\lambda^2 m_1 + (k_1 + k_2)](\lambda^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0 \quad (52)$$

$$(51) \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 \frac{\lambda^2 m_1 + (k_1 + k_2)}{k_2} \quad (53)$$

رابطه (52) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(52) \Rightarrow m_1 m_2 \lambda^4 + [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)] \lambda^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (54)$$

با حل معادله (54) مقادیر  $\lambda$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(47) \xRightarrow{[c]=0} ([\mathbf{m}]\lambda^2 + [\mathbf{k}])\{\phi\} = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow [\mathbf{m}]\lambda^2 + [\mathbf{k}] = \{\mathbf{0}\} \xRightarrow{\substack{[\mathbf{m}]>0 \\ [\mathbf{k}]>0}} \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm i|\omega| \quad (55)$$

$$|\omega|^2 = a(1 \pm b)$$

که در آن  $a$  و  $b$  از رابطه (56) به دست می‌آید:

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص I: سیستم بدون میرایی ( $c_1 = c_2 = 0$ )

$$a = \frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)}{2m_1 m_2} \quad (56)$$

$$b = \left[ 1 - \frac{4m_1 m_2 k_1 k_2}{[m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)]^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

پس از به دست آوردن جواب، چون دو مقدار برای  $\lambda$  به دست می‌آید پس دو دسته پاسخ برای  $\phi_1$  و  $\phi_2$  به دست می‌آید:

$$\omega_1, \{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 \quad \& \quad \omega_2, \{\Phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 \quad (57)$$

در نتیجه پاسخ کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{\Phi\}_1 [A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t)] + \{\Phi\}_2 [A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t)] \quad (58)$$

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص II: میرایی با سختی رابطه خطی دارد ( $c_i = \alpha k_i$ )

میرایی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\begin{cases} c_1 = \alpha k_1 \\ c_2 = \alpha k_2 \end{cases} \quad (59)$$

با جایگذاری رابطه (59) در روابط (50) و (51) خواهیم داشت:

$$(59) \rightarrow (50) \Rightarrow [\lambda'^2 m_1 + k_1 + k_2](\lambda'^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0 \quad (60)$$

$$(59) \rightarrow (51) \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 \frac{\lambda'^2 m_1 + k_1 + k_2}{k_2} \quad (61)$$

که در آن

$$\lambda'^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \alpha \lambda} \quad (62)$$

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص II: میرایی با سختی رابطه خطی دارد ( $c_i = \alpha k_i$ )

رابطه (60) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(60) \Rightarrow m_1 m_2 \lambda^4 + [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)] \lambda^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (63)$$

با حل معادله (63) مقادیر  $\lambda$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(47) \xRightarrow{[c]=\alpha[k]} ([\mathbf{m}]\lambda^2 + (\alpha\lambda + 1)[\mathbf{k}])\{\varphi\} = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow [\mathbf{m}]\lambda^2 + (\alpha\lambda + 1)[\mathbf{k}] = \{\mathbf{0}\} \xRightarrow{\substack{[\mathbf{m}] > 0 \\ [\mathbf{k}] > 0}} \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \alpha\lambda} = -\omega^2 \quad (64)$$

$$|\omega|^2 = a(1 \pm b)$$

که در آن  $a$  و  $b$  از همان رابطه (56) به دست می‌آید.

$$(64) \Rightarrow \lambda^2 + \alpha\omega^2\lambda + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\alpha\omega^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha\omega^2)^2}{4} - \omega^2} \quad (65)$$

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص II: میرایی با سختی رابطه خطی دارد ( $c_i = \alpha k_i$ )

مقدار ضریب میرایی را می‌توان به صورت زیر تعیین نمود:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{\alpha k}{2m\omega} = \frac{\alpha m\omega^2}{2m\omega} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\alpha\omega}{2}} \quad (66)$$

با جایگذاری رابطه (66) در رابطه (65) خواهیم داشت:

$$(66) \rightarrow (65) \Rightarrow \lambda = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2} \Rightarrow \lambda = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\xi\omega \pm i\omega_D} \quad (67) \quad \text{همان ریشه یا قطب (Pole) نام دارد.}$$

در نتیجه پاسخ کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{\Phi\}_1 e^{-\xi_1\omega_1 t} [A_1 \sin(\omega_{D1}t) + B_1 \cos(\omega_{D1}t)] + \{\Phi\}_2 e^{-\xi_2\omega_2 t} [A_2 \sin(\omega_{D2}t) + B_2 \cos(\omega_{D2}t)] \quad (68)$$

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص III: میرایی با سختی رابطه خطی ندارد

در این حالت معادله دترمینان ضرایب مساوی با صفر یعنی رابطه (50) را باید به طور مستقیم حل کرد. رابطه (50) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(50) \Rightarrow \lambda^4 + f_3\lambda^3 + f_2\lambda^2 + f_1\lambda + f_0 = 0 \quad (69)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} f_0 &= (m_1 m_2)^{-1} (k_1 k_2) \\ f_1 &= (m_1 m_2)^{-1} (k_2 c_1 + k_1 c_2) \\ f_2 &= (m_1 m_2)^{-1} [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2) + c_1 c_2] \\ f_3 &= (m_1 m_2)^{-1} [m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2)] \end{aligned} \quad (70)$$

اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= f_3 \\ a_1 b_1 + a_2 + b_2 &= f_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 &= f_1 \\ a_2 b_2 &= f_0 \end{aligned} \quad (71)$$

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص III: میرایی با سختی رابطه خطی ندارد

در این صورت معادله درجه چهار در رابطه (69) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2)(\lambda^2 + b_1 \lambda + b_2) = 0 \quad (72)$$

جواب معادله (72) به صورت زیر است:

$$\lambda_1, \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2}[-\alpha_1 \pm i\sqrt{(4\alpha_2 - \alpha_1^2)}] \Rightarrow \lambda_1, \tilde{\lambda}_1 = -\xi_1 \omega_1 \pm i\omega_{D1} \quad (73.a)$$

$$\lambda_2, \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{2}[-b_1 \pm i\sqrt{(4b_2 - b_1^2)}] \Rightarrow \lambda_2, \tilde{\lambda}_2 = -\xi_2 \omega_2 \pm i\omega_{D2} \quad (73.b)$$

$\tilde{\lambda}_i$ : مزدوج  $\lambda_i$  است.

که در آن

$$\begin{aligned} \omega_1 \xi_1 &= \frac{a_1}{2} & \omega_{D1} &= \frac{1}{2} \sqrt{(4a_2 - a_1^2)} \\ \omega_2 \xi_2 &= \frac{b_1}{2} & \omega_{D2} &= \frac{1}{2} \sqrt{(4b_2 - b_1^2)} \end{aligned} \quad (74)$$

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص III: میرایی با سختی رابطه خطی ندارد

اگر به طور مستقیم معادله (69) را مثلا به کمک MATLAB حل نمود در آن صورت

$$(69) \Rightarrow (\lambda_1, \tilde{\lambda}_1), (\lambda_2, \tilde{\lambda}_2)$$

$$(73) \Rightarrow \lambda, \tilde{\lambda} = -\xi\omega \pm i\omega_D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi\omega = |\operatorname{Re}(\lambda)| \\ \omega\sqrt{1-\xi^2} = |\operatorname{Im}(\lambda)| \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{\beta^2}{1+\beta^2}}, & \beta = \frac{|\operatorname{Re}(\lambda)|}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} \\ \omega = \frac{|\operatorname{Re}(\lambda)|}{\xi} \end{cases}$$

(75)

## □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

حالت خاص III: میرایی با سختی رابطه خطی ندارد

پس از تعیین  $\lambda$  ها از رابطه (73)،  $\{\phi\}$  ها از رابطه (51) تعیین می‌گردد.

$$\text{(تکرار)} \quad \phi_2 = \phi_1 \frac{\lambda^2 m_1 + \lambda(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)}{(\lambda c_2 + k_2)} = h \phi_1 \quad (51)$$

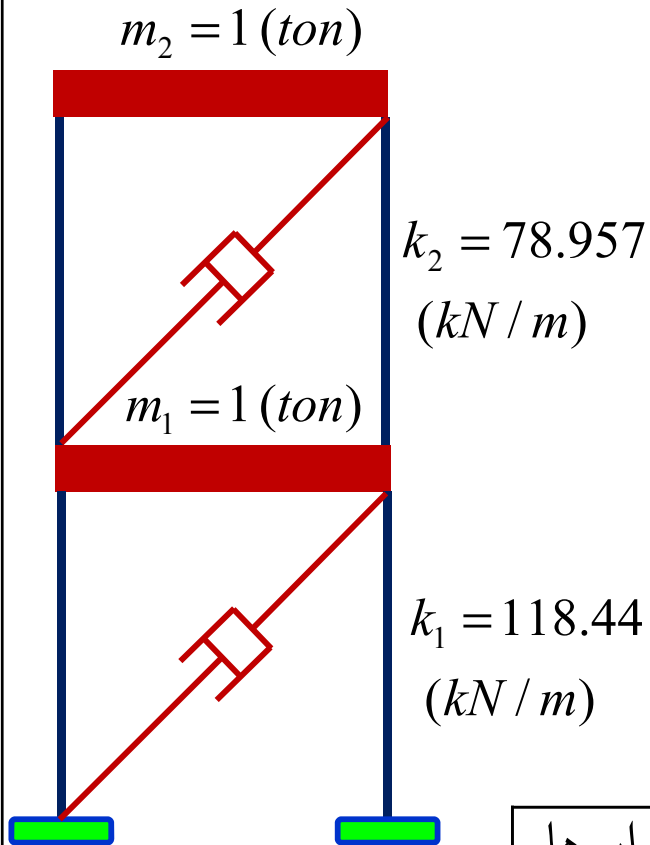
هر زوج مزدوج  $\lambda$ ، مقادیر مزدوج  $h$  و  $\phi$  را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \tilde{\lambda}_1) &\Rightarrow (h_1, \tilde{h}_1) \\ (\lambda_2, \tilde{\lambda}_2) &\Rightarrow (h_2, \tilde{h}_2) \end{aligned} \Rightarrow \{\phi\} \text{ به دست می‌آید}$$

پس از به دست آوردن بردارهای مودال پاسخ سازه مشابه حالت قبل به دست می‌آید

$$\text{(تکرار)} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{\phi\}_1 e^{-\xi_1 \omega_1 t} [A_1 \sin(\omega_{D1} t) + B_1 \cos(\omega_{D1} t)] + \{\phi\}_2 e^{-\xi_2 \omega_2 t} [A_2 \sin(\omega_{D2} t) + B_2 \cos(\omega_{D2} t)] \quad (68)$$

در این حالت  $\phi$  ها نیز مختلط می‌باشند. اما قسمت موهومی تاثیر چندانی در رفتار سازه ندارند و قسمت حقیقی آن است که پاسخ سازه را مستهلک می‌کند.



مثال 10- در سازه دو طبقه نشان داده شده بردارهای مودال را درحالت‌های زیر به دست آورید:

الف- سیستم بدون میرایی

ب- میرایی با سختی رابطه خطی داشته و  $\xi_1 = 0.1$

ج- میرایی با سختی رابطه خطی نداشته و میرایی‌ها مطابق جدول زیر باشند:

| رابطه بین میرایی‌ها        | مساوی | خطی  | متمرکز | دو برابر |
|----------------------------|-------|------|--------|----------|
| $c_1 \text{ (kN.sec / m)}$ | 3.135 | 2.09 | 0      | 6.27     |
| $c_2 \text{ (kN.sec / m)}$ | 3.135 | 4.18 | 6.27   | 6.27     |

Matlab Code (L04Example10a.m)

Matlab Code (L04Example10b.m)

Matlab Code (L04Example10c.m)

پاسخ 10- الف

(56)  $\Rightarrow$ 

$$= \frac{(1)(78.957) + (1)[118.44 + 78.957]}{2(1)(1)} \Rightarrow a = 138.17$$

$$= \left[ 1 - \frac{4(1)(1)(78.957)(118.44)}{[(1)(78.957) + (1)(118.44 + 78.957)]^2} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = 0.7143$$

$$\sqrt{138.17(1 - 0.7143)} \Rightarrow \omega_1 = 6.283 \text{ (rad / sec)}$$

$$\sqrt{138.17(1 + 0.7143)} \Rightarrow \omega_2 = 15.391 \text{ (rad / sec)}$$

$$= \frac{78.957}{(-39.478)(1) + (118.44 + 78.957)}(1) \Rightarrow \phi_1 = 0.5$$

پاسخ 10- الف

$$\text{if } \omega_2 = 15.391 \Rightarrow \lambda_2^2 = -\omega_2^2 \Rightarrow \boxed{\lambda_2^2 = -236.87} \ \& \ \boxed{\phi_2 = 1}$$

$$= \frac{78.957}{(-236.87)(1) + (118.44 + 78.957)} (1) \Rightarrow \boxed{\phi_1 = -2}$$

$$\{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \omega_1 = 6.283 \text{ (rad / sec)}$$

$$\{\Phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 = 15.391 \text{ (rad / sec)}$$

پاسخ 10- ب

از نتیجه قسمت (الف) داریم:

$$a = 138.17 \quad , \quad b = 0.7143 \quad , \quad \omega_1 = 6.283 \text{ (rad / sec)} \quad , \quad \omega_2 = 15.391 \text{ (rad / sec)}$$

$$\alpha = 0.0318$$

$$= \frac{0.0318(15.391)}{2} \Rightarrow \xi_2 = 0.245$$

$$c_1 = 3.7699 \text{ (kN .sec/ m)}$$

$$c_2 = 2.5133 \text{ (kN .sec/ m)}$$

$$\omega_{D1} = 6.2517 \text{ (rad / sec)}$$

$$\omega_{D2} = 14.922 \text{ (rad / sec)}$$

(67)  $\Rightarrow$ 

$$\tilde{\lambda}_1 = -\xi_1 \omega_1 - i \omega_{D_1} = -(0.1)(6.283) - 6.2517i \Rightarrow \tilde{\lambda}_1 = -0.62832 - 6.2517i$$

$$\lambda_2 = -\xi_2 \omega_2 + i \omega_{D_2} = -(0.245)(15.391) + 14.922i \Rightarrow \lambda_2 = -3.7699 + 14.922i$$

---

---

پاسخ 10- ب

$$\text{if } \phi_2 = 1 \quad \& \quad \tilde{\lambda}_1^2 = -38.689 + 7.8561i$$

$$(51) \Rightarrow \phi_1 = \frac{(\tilde{\lambda}_1 c_2 + k_2)}{\tilde{\lambda}_1^2 m_1 + \tilde{\lambda}_1 (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)} \phi_2 =$$

$$\frac{[(-0.62832 - 6.2517i)2.5133 + 78.957]}{(-38.689 + 7.8561i)(1) + (-0.62832 - 6.2517i)(3.7699 + 2.5133) + (118.44 + 78.957)} (1) \Rightarrow \phi_1 = 0.5$$

$$\text{if } \phi_2 = 1 \quad \& \quad \lambda_2^2 = -208.45 - 112.51i$$

$$(51) \Rightarrow \phi_1 = \frac{(\lambda_2 c_2 + k_2)}{\lambda_2^2 m_1 + \lambda_2 (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)} \phi_2 =$$

$$\frac{[(-3.7699 + 14.922i)2.5133 + 78.957]}{(-208.45 - 112.51i)(1) + (-3.7699 + 14.922i)(3.7699 + 2.5133) + (118.44 + 78.957)} (1) \Rightarrow \phi_1 = -2$$

پاسخ 10- ب

$$\text{if } \phi_2 = 1 \quad \& \quad \tilde{\lambda}_2^2 = -208.45 + 112.51i$$

$$(51) \Rightarrow \phi_1 = \frac{(\tilde{\lambda}_2 c_2 + k_2)}{\tilde{\lambda}_2^2 m_1 + \tilde{\lambda}_2 (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)} \phi_2 =$$

$$\frac{[(-3.7699 - 14.922i)2.5133 + 78.957]}{(-208.45 + 112.51i)(1) + (-3.7699 - 14.922i)(3.7699 + 2.5133) + (118.44 + 78.957)} (1) \Rightarrow \phi_1 = -2$$

---



---

$$\{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{\Phi}\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \omega_1 = 6.283 \text{ (rad / sec)}$$

$$\{\Phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{\Phi}\}_2 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 = 15.391 \text{ (rad / sec)}$$

پاسخ 10- ج دو میرایی با هم مساوی باشد

$$c_1 = 3.135 \text{ (kN.sec/ m)}$$

$$c_2 = 3.135 \text{ (kN.sec/ m)}$$

(70)  $\Rightarrow$ 

$$f_0 = (m_1 m_2)^{-1} (k_1 k_2) = (1 \times 1)^{-1} (118.44 \times 78.957)$$

$$f_1 = (m_1 m_2)^{-1} (k_2 c_1 + k_1 c_2) = (1 \times 1)^{-1} ((78.957)(3.135) + 118.44(3.135))$$

$$f_2 = (m_1 m_2)^{-1} [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2) + c_1 c_2] = (1 \times 1)^{-1} [(1)78.957 + (1)(118.44 + 78.957) + (3.135)(3.135)]$$

$$f_3 = (m_1 m_2)^{-1} [m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2)] = (1 \times 1)^{-1} [(1)3.135 + (1)(3.135 + 3.135)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_0 = 9351.3 \\ f_1 = 618.82 \\ f_2 = 286.18 \\ f_3 = 9.405 \end{cases}$$

# □ بررسی رفتار سازه 2DOF با میراگرهای ویسکوز

پاسخ 10- ج دو میرایی با هم مساوی باشد

$$\lambda^4 + 9.405\lambda^3 + 286.18\lambda^2 + 618.82\lambda + 9351.3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -0.62686 + 6.25807i \\ \tilde{\lambda}_1 &= -0.62686 - 6.25807i \\ \lambda_2 &= -4.07564 + 14.82543i \\ \tilde{\lambda}_2 &= -4.07564 - 14.82543i \end{aligned}$$

پاسخ 10- ج دو میرایی با هم مساوی باشد

$$\beta_2 = \frac{|\operatorname{Re}(\lambda_2)|}{|\operatorname{Im}(\lambda_2)|} = \frac{|-4.07564|}{14.82543} \Rightarrow \boxed{\beta_2 = 0.2749}$$

$$(75) \Rightarrow \xi_2 = \sqrt{\frac{\beta_2^2}{1 + \beta_2^2}} = \sqrt{\frac{0.2749^2}{1 + 0.2749^2}} \Rightarrow \boxed{\xi_2 = 0.2651}$$

$$\omega_2 = \frac{|\operatorname{Re}(\lambda_2)|}{\xi_2} = \frac{|-4.07564|}{0.2651} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 15.3754 \text{ (rad / sec)}}$$


---

پاسخ 10- ج دو میرایی با هم مساوی باشد

$$\text{if } \phi_2 = 1 \quad \& \quad \tilde{\lambda}_1^2 = -38.770 + 7.8458i$$

$$(51) \Rightarrow \phi_1 = \frac{(\tilde{\lambda}_1 c_2 + k_2)}{\tilde{\lambda}_1^2 m_1 + \tilde{\lambda}_1 (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)} \phi_2 =$$

$$\frac{[(-0.62686 - 6.25807i)3.135 + 78.957]}{(-38.770 + 7.8458i)(1) + (-0.62686 - 6.25807i)(3.135 + 3.135) + (118.44 + 78.957)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \phi_1 = 0.5027 - 0.0248i$$

$$\text{if } \phi_2 = 1 \quad \& \quad \lambda_2^2 = -203.1824 - 120.8462i$$

$$(51) \Rightarrow \phi_1 = \frac{(\lambda_2 c_2 + k_2)}{\lambda_2^2 m_1 + \lambda_2 (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)} \phi_2 =$$

$$\frac{[(-4.07564 + 14.82543i)3.135 + 78.957]}{(-203.1824 - 120.8462i)(1) + (-4.07564 + 14.82543i)(3.135 + 3.135) + (118.44 + 78.957)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \phi_1 = -1.9147 + 0.2209i$$

پاسخ 10- ج دو میرایی با هم مساوی باشد

$$\text{if } \phi_2 = 1 \quad \& \quad \tilde{\lambda}_2^2 = -203.1824 + 120.8462i$$

$$(51) \Rightarrow \phi_1 = \frac{(\tilde{\lambda}_2 c_2 + k_2)}{\tilde{\lambda}_2^2 m_1 + \tilde{\lambda}_2 (c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)} \phi_2 =$$

$$\frac{[(-4.07564 - 14.82543i)3.135 + 78.957]}{(-203.1824 + 120.8462i)(1) + (-4.07564 - 14.82543i)(3.135 + 3.135) + (118.44 + 78.957)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \phi_1 = -1.9147 - 0.2209i$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.5027 + 0.0248i \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{\phi}\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.5027 - 0.0248i \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \omega_1 = 6.2894 \text{ (rad / sec)}$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -1.9147 + 0.2209i \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{\phi}\}_2 = \begin{Bmatrix} -1.9147 - 0.2209i \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 = 15.3754 \text{ (rad / sec)}$$

پاسخ 10- ج

| رابطه بین میرایی‌ها  | مساوی  | خطی  | متمرکز   | دو برابر   |
|----------------------|--|--|--|--|
| $c_1$ (kN.sec/m)     | 3.135  | 2.09   | 0  | 6.27   |
| $c_2$ (kN.sec/m)     | 3.135  | 4.18   | 6.27   | 6.27   |
| $\xi_1$              | 0.0997   | 0.0986   | 0.0908   | 0.1986   |
| $\omega_1$ (rad/sec) | 6.2894   | 6.3275   | 6.5122   | 6.3078   |
| $\{\Phi\}_1$         | $\begin{Bmatrix} 0.5027 + 0.0248i \\ 1 \end{Bmatrix}$  | $\begin{Bmatrix} 0.5083 + 0.0663i \\ 1 \end{Bmatrix}$  | $\begin{Bmatrix} 0.5283 + 0.1528i \\ 1 \end{Bmatrix}$  | $\begin{Bmatrix} 0.5110 + 0.0486i \\ 1 \end{Bmatrix}$  |
| $\{\tilde{\Phi}\}_1$ | $\begin{Bmatrix} 0.5027 - 0.0248i \\ 1 \end{Bmatrix}$  | $\begin{Bmatrix} 0.5086 - 0.0663i \\ 1 \end{Bmatrix}$  | $\begin{Bmatrix} 0.5283 - 0.1528i \\ 1 \end{Bmatrix}$  | $\begin{Bmatrix} 0.5110 - 0.0486i \\ 1 \end{Bmatrix}$  |
| $\xi_2$              | 0.2651   | 0.3010   | 0.3823   | 0.5317   |
| $\omega_2$ (rad/sec) | 15.3754  | 15.2827  | 14.8492  | 15.3303  |
| $\{\Phi\}_2$         | $\begin{Bmatrix} -1.9147 + 0.2209i \\ 1 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} -1.6915 + 0.4999i \\ 1 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} -1.1732 + 0.7182i \\ 1 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} -1.7119 + 0.3266i \\ 1 \end{Bmatrix}$ |
| $\{\tilde{\Phi}\}_2$ | $\begin{Bmatrix} -1.9147 - 0.2209i \\ 1 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} -1.6915 - 0.4999i \\ 1 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} -1.1732 - 0.7182i \\ 1 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} -1.7119 - 0.3266i \\ 1 \end{Bmatrix}$ |

نکته: همان طور که مشاهده می شود در حالات مختلف بردارهای مودال تفاوت محسوسی با هم ندارند. همچنین در حالت تساوی میرایی ها، به نیروی میرایی کمتری نیاز می باشد. به طور مثال دو عدد میراگر 20 تن بهتر از دو میراگر 40 و 5 تنی است. زیرا هم شکل ارتعاش بهتر بوده و هم از نظر اقتصادی به صرفه است. بنابراین میراگرها را تا حد امکان باید در سازه توزیع نمود.