دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Structural Control

Control Strategies for Passive Motion Design

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

❑ مبانی کنترل غیرفعال سازه‌ها

طراحی سازه در حالت کنترل غیرفعال به یکی از دو صورت زیر انجام می‌پذیرد:

$$(a)\quad \begin{cases} x \le x_{allow} & \textbf{کنترل براساس جابجایی} \\ \ddot{x} \le \ddot{x}_{allow} & \textbf{کنترل براساس شتاب} \end{cases}$$

افزایش جابجایی باعث افزایش تنش می‌شود. $\rightarrow$

افزایش شتاب باعث عدم ایمنی ساکنین می‌گردد. $\rightarrow$

(در مورد کنترل براساس شتاب باید خاطر نشان کرد که شتاب را نه از نظر سازه‌ای بلکه از نظر سرویس دهی محدود می‌کنیم. به عبارت دیگر شتاب از نظر سازه‌ای مشکل‌ساز نیست اما ممکن است باعث ناراحتی استفاده کنندگان شود.)

$$(b)\quad R \le R_{allow}\ \textbf{کنترل براساس نیروهای مقاوم داخلی}$$

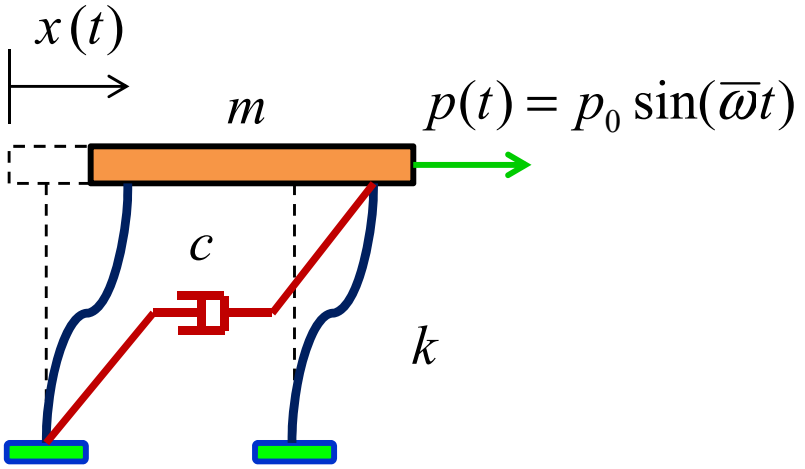
بررسی همزمان ترکیب جابجایی و شتاب $\rightarrow$

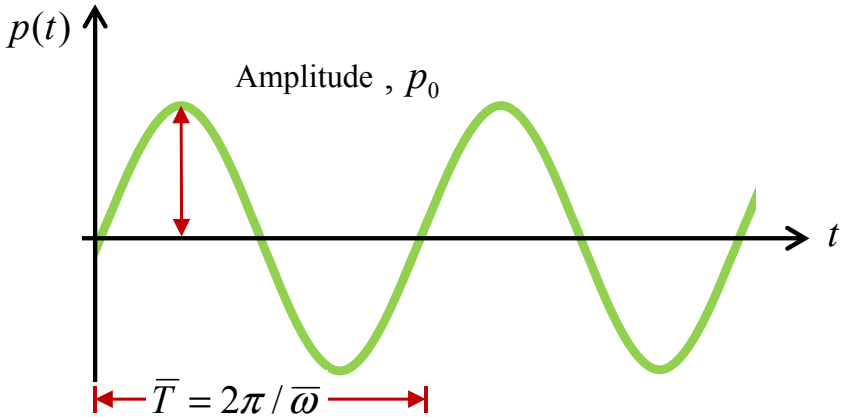
بردار نیروهای مقاوم داخلی (نیروهای موثر) R به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k\,x(t)=p(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R=p(t)-m\ddot{x}(t)=c\dot{x}(t)+k\,x(t)} \qquad (1)$$

❑ ضریب بزرگنمایی جابجایی (D_1)

یک سیستم SDOF تحت اثر نیروی خارجی سینوسی را در نظر می‌گیریم:





نمودار نیروی هارمونیک سینوسی

پاسخ دائمی (Steady State Response) سیستم SDOF تحت اثر نیروی خارجی سینوسی برابر است با:

$$x_S(t) = \frac{p_0}{k}\frac{(1-\beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta\cos(\bar{\omega}t)}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \qquad (2)$$

نسبت فرکانس : $\beta = \bar{\omega}/\omega$

فرکانس طبیعی : $\omega = \sqrt{k/m}$

ضریب میرایی : $\xi = \dfrac{c}{2m\omega}$

پاسخ دائمی وابسطه به نیروی خارجی است؛ یعنی تا زمانی که نیرو بر سازه اعمال گردد پاسخ دائمی به صورت ثابت با زمان جریان خواهد داشت.

❑ ضریب بزرگنمایی جابجایی (D_1)

قسمت دائم جواب را می‌توان به صورت برداری نوشت:

$$x_S(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta) \qquad (3)$$

$$\rho = \frac{p_0}{k}\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \qquad (5)$$

که در آن

ρ : حداکثر جابجایی دینامیکی

θ : زاویه فاز (Phase angle)

ضریب بزرگنمایی جابجایی (Displacement magnification factor)

$$D_1 = \frac{\text{حداکثر جابجایی دینامیکی}}{\text{حداکثر جابجایی استاتیکی}} = \frac{\rho}{p_0/k} \Rightarrow D_1 = \left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

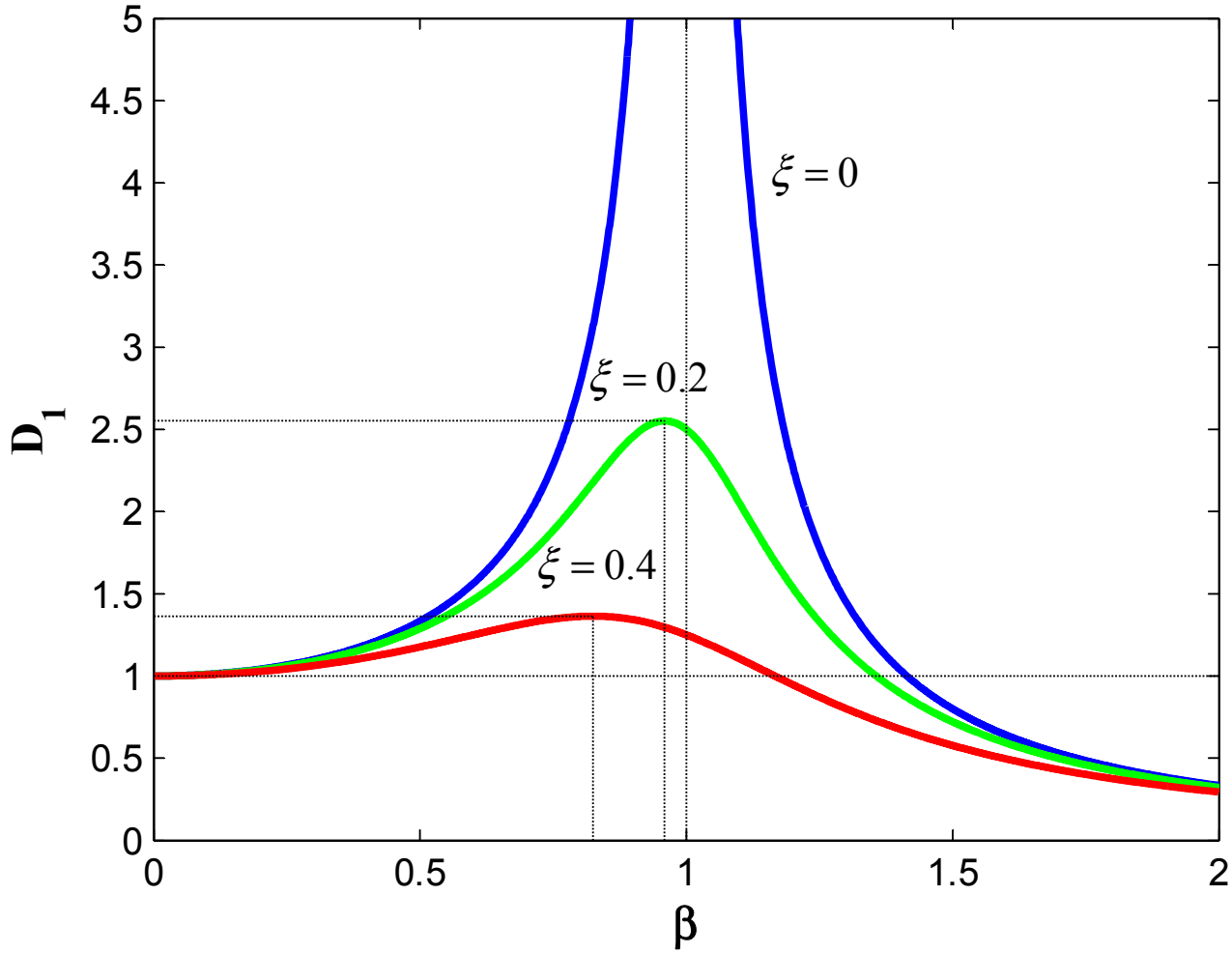
$$(4)\ \&\ (6) \Rightarrow \rho = \frac{p_0}{k} D_1 \qquad (7)$$

❑ ضریب بزرگنمایی جابجایی (D_1)

مقدار ماکزیمم ضریب بزرگنمایی جابجایی برابر است با :

$$\frac{dD_1}{d\beta}=0 \overset{(6)}{\Rightarrow} \boxed{\beta_{peak}=\sqrt{1-2\xi^2}} \quad (8)$$

$$(6)\ \&\ (8) \Rightarrow \boxed{D_{1\max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (9)$$



نمودار نسبت فرکانس – ضریب بزرگنمایی جابجایی یک سیستم SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک

❑ ضریب بزرگنمایی شتاب (D_2)

رابطه برداری شتاب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(3) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_S(t) = -\rho\bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t - \theta)} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \quad Max_{acceleration} : \boxed{\alpha = \rho\bar{\omega}^2} \quad (11)$$

$$(7)\ \&\ (11) \Rightarrow \quad \alpha = \frac{p_0}{k} D_1 \bar{\omega}^2 \overset{\omega=\sqrt{k/m}}{\Rightarrow} \alpha = \frac{p_0}{m\omega^2} D_1 \bar{\omega}^2 \overset{\beta=\bar{\omega}/\omega}{\Rightarrow} \boxed{\alpha = \frac{p_0}{m} D_1 \beta^2} \quad (12)$$

ضریب بزرگنمایی شتاب (Acceleration magnification factor)

$$(12) \Rightarrow \quad D_2 = \frac{\text{حداکثر شتاب دینامیکی}}{\text{پارامتری از جنس شتاب}} = \frac{\alpha}{p_0/m} = D_1\beta^2 \Rightarrow \boxed{D_2 = D_1\beta^2} \quad (13)$$

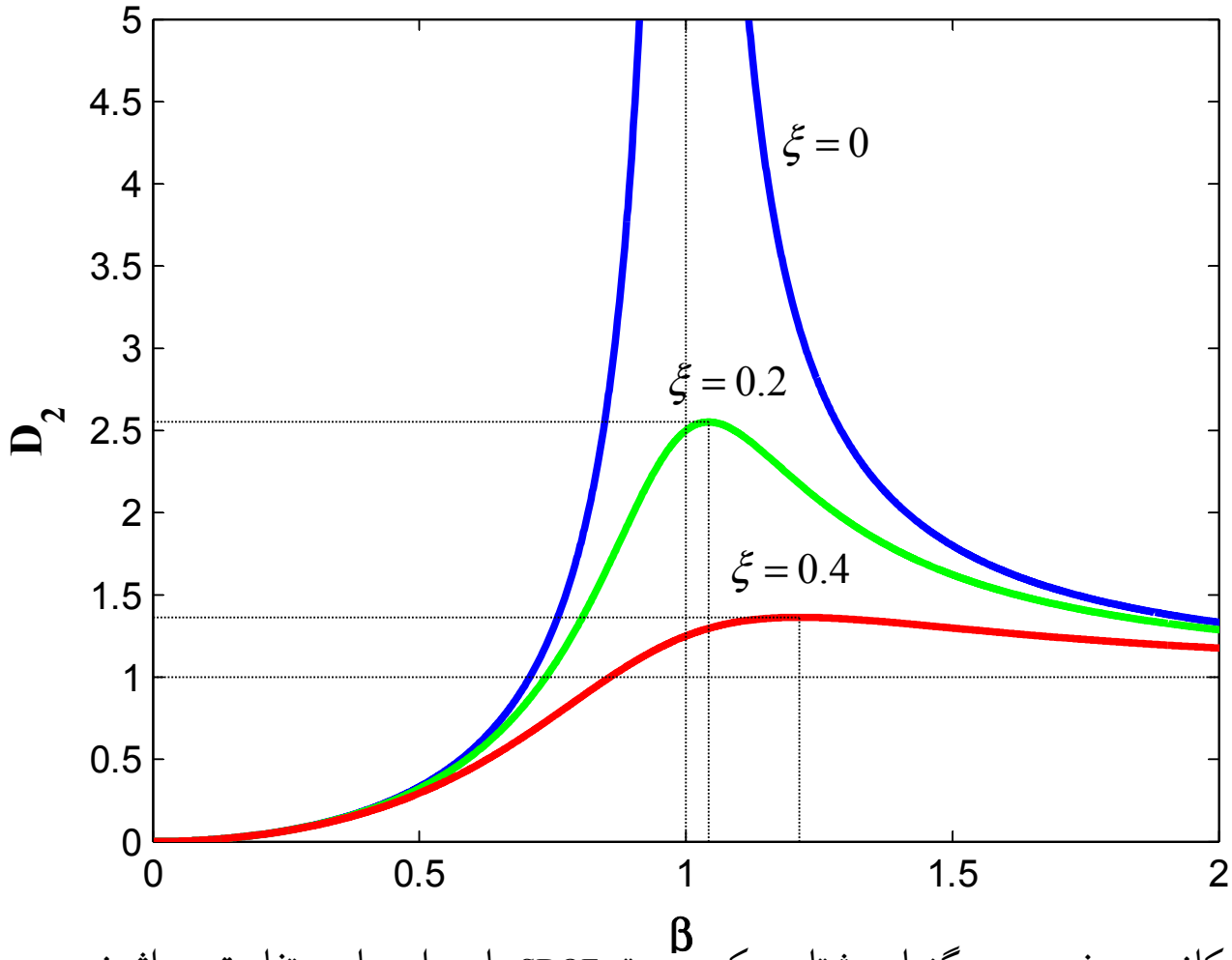
$$(6)\ \&\ (13) \Rightarrow \boxed{D_2 = \beta^2\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

معلوم D_2 $\Rightarrow$ با انتخابِ β ✓ $\Rightarrow$ ω ✓ $\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ✓ $\Rightarrow$ k ✓

❑ ضریب بزرگنمایی شتاب (D_2)

مقدار ماکزیمم ضریب بزرگنمایی شتاب برابر است با :

$$\frac{dD_2}{d\beta}=0 \overset{(14)}{\Rightarrow} \boxed{\beta_{peak}=\frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}} \quad (15) \qquad (15)\ \&\ (14) \Rightarrow \boxed{D_{2\max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (16)$$



نمودار نسبت فرکانس – ضریب بزرگنمایی شتاب یک سیستم SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک

❑کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

در این حالت حداکثر شتاب مجاز را برای سازه به صورت درصدی از شتاب g در نظر می‌گیریم:

$$\ddot{x}_{allow} = f.g \qquad (17)$$

در نتیجه حداکثر ضریب بزرگنمایی شتاب مجاز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_{2allow} = \frac{\ddot{x}_{allow}}{p_0/m} = \frac{f.g}{p_0/m} \Rightarrow D_{2allow} = f\frac{w}{p_0} \qquad (18)$$

$$D_2 \le D_{2allow} = f\frac{w}{p_0} \qquad (19)$$

که در این رابطه w وزن سازه می‌باشد.

$$if \quad D_2 = D_{2allow} \overset{(14)}{\Rightarrow} \beta^2\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = D_{2allow} \qquad (20)$$

با انتخاب $\xi = \xi^*$ $\overset{(20)}{\Rightarrow}$

$$\beta_{1,2} = \left[\frac{1-2\xi^{*2} \pm \sqrt{(1-2\xi^{*2})^2 - 1 + \left(\frac{1}{D_{2allow}}\right)^2}}{1-\left(\frac{1}{D_{2allow}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (21)$$

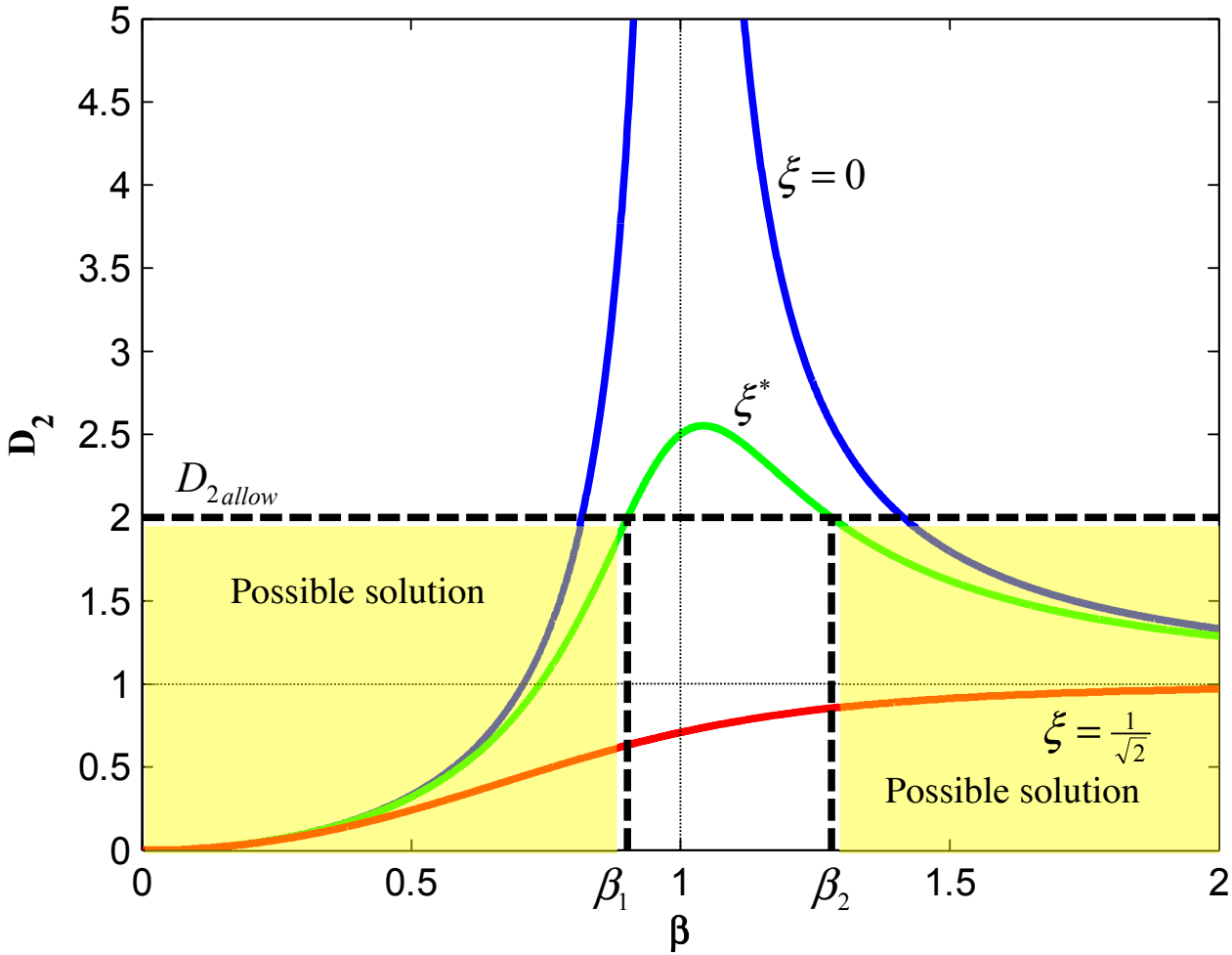
❑ کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

اگر $D_{2allow} > 1$ و ضریب میرایی برابر با مقدار دلخواه $\xi = \xi^*$ انتخاب شود، دو بازه مجاز برای مقادیر β به دست می‌آید:

1) $0 < \beta \le \beta_1$

2) $\beta_2 \le \beta$

در حالتی که $D_{2allow} < 1$ در نظر گرفته شود در آن صورت بازه دوم برای β وجود ندارد.



مقادیر ممکن β برای حالت $D_2 \le D_{2allow}$

❑ کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

حالت‌های خاص:

الف- سیستم بدون میرایی

با انتخاب $\xi^* = 0$ $\overset{(21)}{\Rightarrow}$

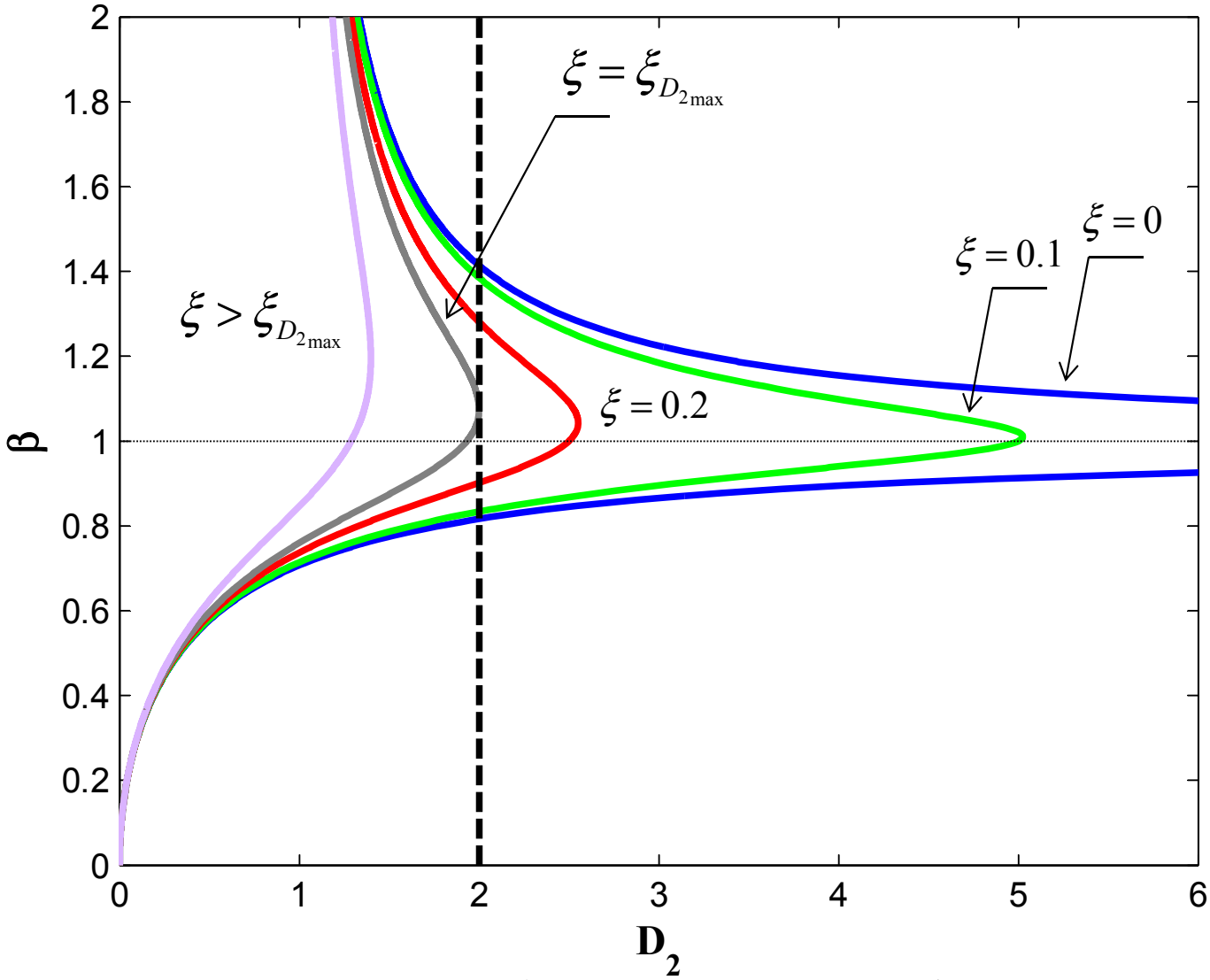
$$\begin{cases} \beta_{1,2} = \left[1 \pm \dfrac{1}{D_{2allow}}\right]^{-\frac{1}{2}} & D_{2allow} \geq 1 \\ \beta = \left[1 + \dfrac{1}{D_{2allow}}\right]^{-\frac{1}{2}} & D_{2allow} < 1 \end{cases} \qquad (22)$$

ب- میرایی متناظر با ماکزیمم ضریب بزرگنمایی شتاب

$$(16): \quad D_{2\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \xi_{D_{2\max}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{D_{2\max}{}^2}}}{2}} \qquad (23)$$

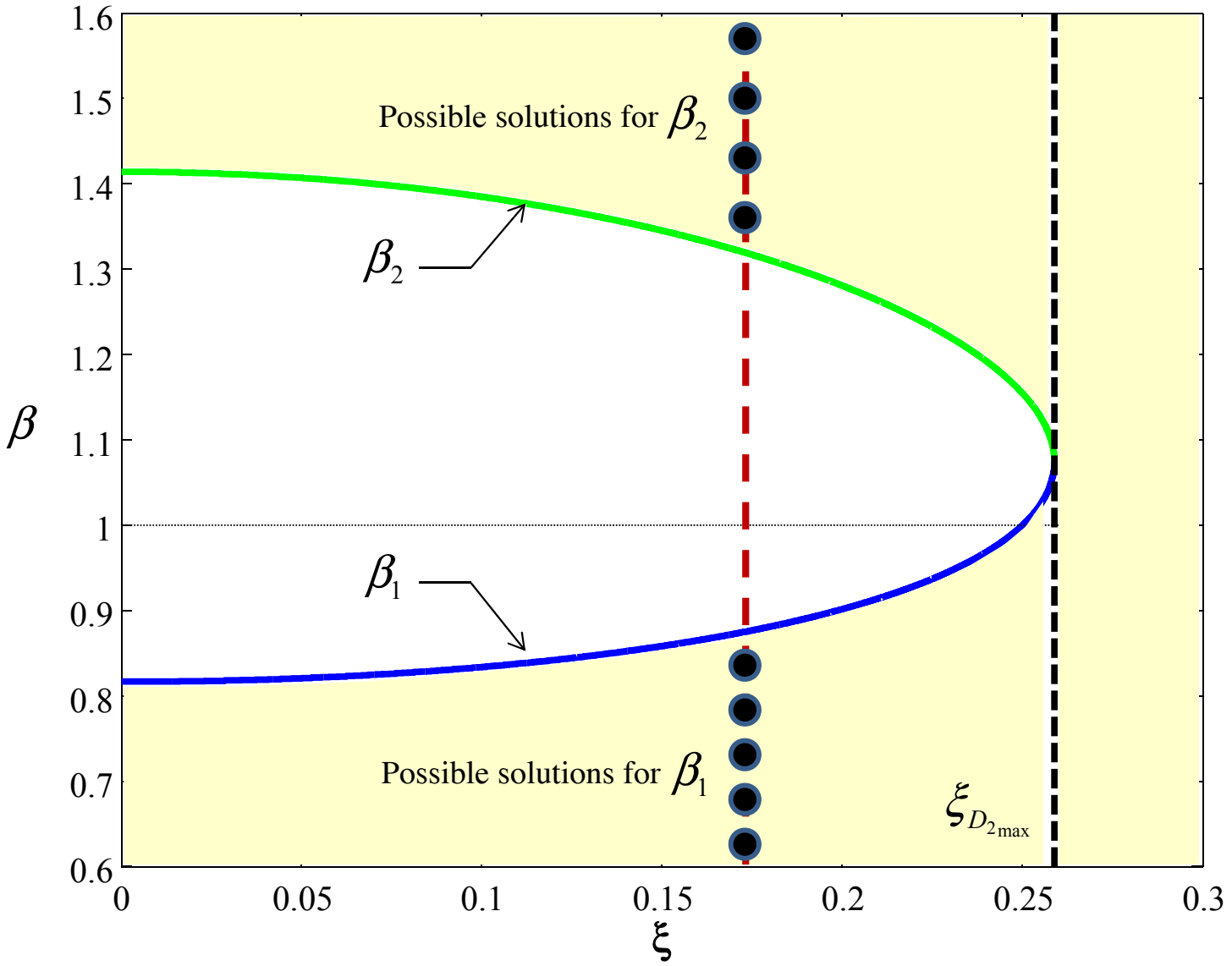
$$\Rightarrow \quad if \quad \begin{cases} \xi^* < \xi_{D_{2\max}} & \Rightarrow \quad \beta_1 \neq \beta_2 \\ \xi^* = \xi_{D_{2\max}} & \Rightarrow \quad \beta_1 = \beta_2 \\ \xi^* > \xi_{D_{2\max}} & \Rightarrow \quad \beta_1, \beta_2 \ (No\ available) \end{cases}$$

❑کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$



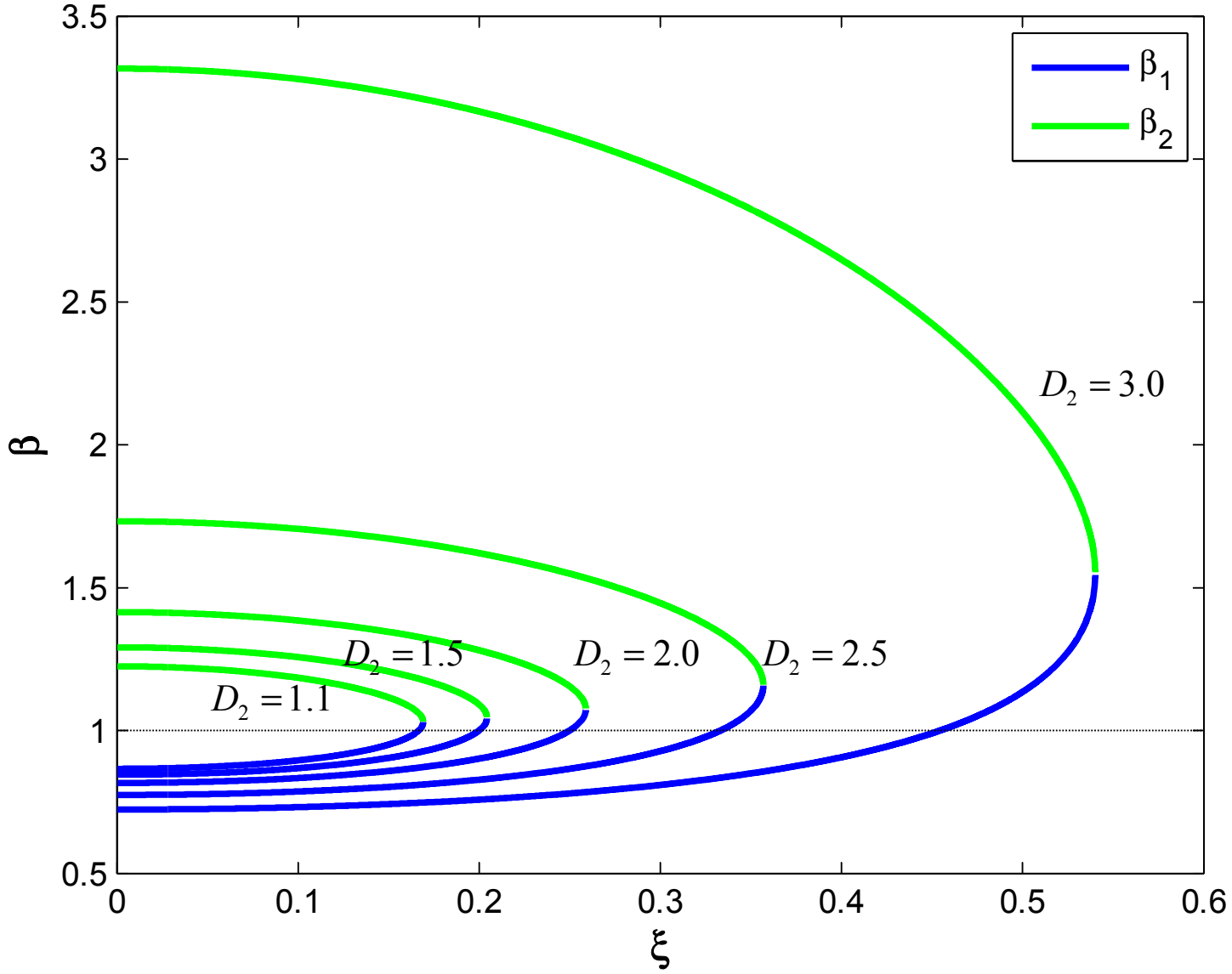
مقادیر ممکن β در میرایی‌های مختلف برای حالت $D_2 = 2$

❑کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$



مقادیر ممکن β در میرایی‌های مختلف برای حالت $D_2 = 2$

❑کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$



مقادیر ممکن β در میرایی‌ها و D_2 های مختلف

❑ کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

طراحی سختی براساس شتاب مجاز

می‌توان سختی سازه را برحسب مقادیر مجاز $\ddot{x}_{allow}$ بیان کرد.

با معلوم بودن ضریب میرایی سازه ξ^* $\Rightarrow$ $D_{2allow} = \dfrac{\ddot{x}_{allow}}{p_0 / m}$ (18) $\Rightarrow$ با انتخاب $\ddot{x}_{allow}$

$$\Rightarrow \beta = \beta_1 \; or \; \beta_2 = \left[\frac{1 - 2\xi^{*2} \pm \sqrt{(1-2\xi^{*2})^2 - 1 + \left(\frac{1}{D_{2allow}}\right)^2}}{1 - \left(\frac{1}{D_{2allow}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

و یا از روی نمودار β برحسب میرایی‌های مختلف در حالت D_{2allow}

حدود سختی برحسب بازه‌های β_1 و β_2 به دست می‌آید.

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{\bar{\omega}}{\beta} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\bar{\omega}}{\beta} \Rightarrow k = \frac{\bar{\omega}^2}{\beta^2} m \quad (24)$$

$$0 < \beta \le \beta_1 \Rightarrow \beta^2 \le \beta_1^2 \Rightarrow \frac{1}{\beta^2} \ge \frac{1}{\beta_1^2} \overset{\times m\bar{\omega}^2}{\Rightarrow} \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta^2} \ge \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta_1^2} \overset{(24)}{\Rightarrow} k \ge k_1 = \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta_1^2} \quad (24a)$$

$$\beta_2 \le \beta < \infty \Rightarrow \beta_2^2 \le \beta^2 \Rightarrow \frac{1}{\beta^2} \le \frac{1}{\beta_2^2} \overset{\times m\bar{\omega}^2}{\Rightarrow} \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta^2} \le \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta_2^2} \overset{(24)}{\Rightarrow} k \le k_2 = \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta_2^2} \quad (24b)$$

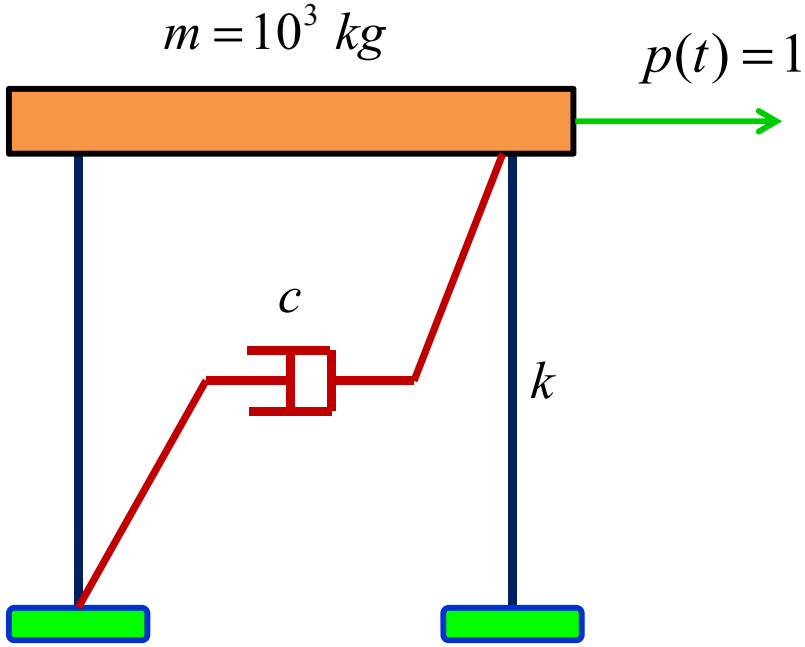
❑کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

مثال-1: سیستم SDOF نشان داده شده در شکل تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد. حدود سختی مجاز را برای دو حالت زیر به دست آورید.

الف) $\xi = 0 \quad , \quad \ddot{x}_{allow} = 0.5g \quad , \quad \overline{\omega} = 2\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

ب) $\xi = 0 \, , 0.1 \, , 0.2 \quad , \quad \ddot{x}_{allow} = 2g \quad , \quad \overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

$$g = 10 \left(\frac{m}{\sec^2}\right)$$



❑کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

پاسخ مثال-1:

الف- $\xi = 0$, $\ddot{x}_{allow} = 0.5g$, $\overline{\omega} = 2\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

❑ کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

پاسخ مثال-1: ب- $\xi = 0$, $\ddot{x}_{allow} = 2g$, $\overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$, $p_0 = 10^4$

$$(18) \Rightarrow D_{2allow} \le \frac{\ddot{x}_{allow}}{p_0 / m} = \frac{2(10)}{10^4 / 10^3} \Rightarrow \boxed{D_{2allow} \le 2}$$

$$\xi = 0 \overset{(22)}{\Rightarrow} \beta_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{D_{2allow}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{2}}} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0.816 & \text{(ق.ق)} \\ \beta_2 = 1.414 & \text{(ق.ق)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 < \beta \le 0.816 & (I.a) \\ 1.414 \le \beta < \infty & (I.b) \end{matrix}}$$

$$(24a) \Rightarrow k \ge k_1 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_1^{\,2}} = \frac{1000(4\pi)^2}{(0.816)^2} \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{k \ge k_1 = 236.87 \left(\frac{kN}{m}\right)}$$

$$(24b) \Rightarrow k \le k_2 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_2^{\,2}} = \frac{1000(4\pi)^2}{(1.414)^2} \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{k \le k_2 = 78.96 \left(\frac{kN}{m}\right)}$$

❑ کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

پاسخ مثال-1: ب- $\xi = 0.1$, $\ddot{x}_{allow} = 2g$, $\overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$, $D_{2allow} \le 2$

❑ کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

پاسخ مثال-1: ب-

$$D_{2allow} \le 2 \quad , \quad \overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right) \quad , \quad \ddot{x}_{allow} = 2g \quad , \quad \xi = 0.2$$

$$(21): \quad \beta_{1,2} = \left[\frac{1 - 2\xi^{*2} \pm \sqrt{(1-2\xi^{*2})^2 - 1 + \left(\frac{1}{D_{2allow}}\right)^2}}{1 - \left(\frac{1}{D_{2allow}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1 - 2(0.2)^2 \pm \sqrt{(1-2(0.2)^2)^2 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0.901 \text{ (ق.ق)} \\ \beta_2 = 1.281 \text{ (ق.ق)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < \beta \le 0.901 & (I.a) \\ 1.281 \le \beta < \infty & (I.b) \end{matrix}$$

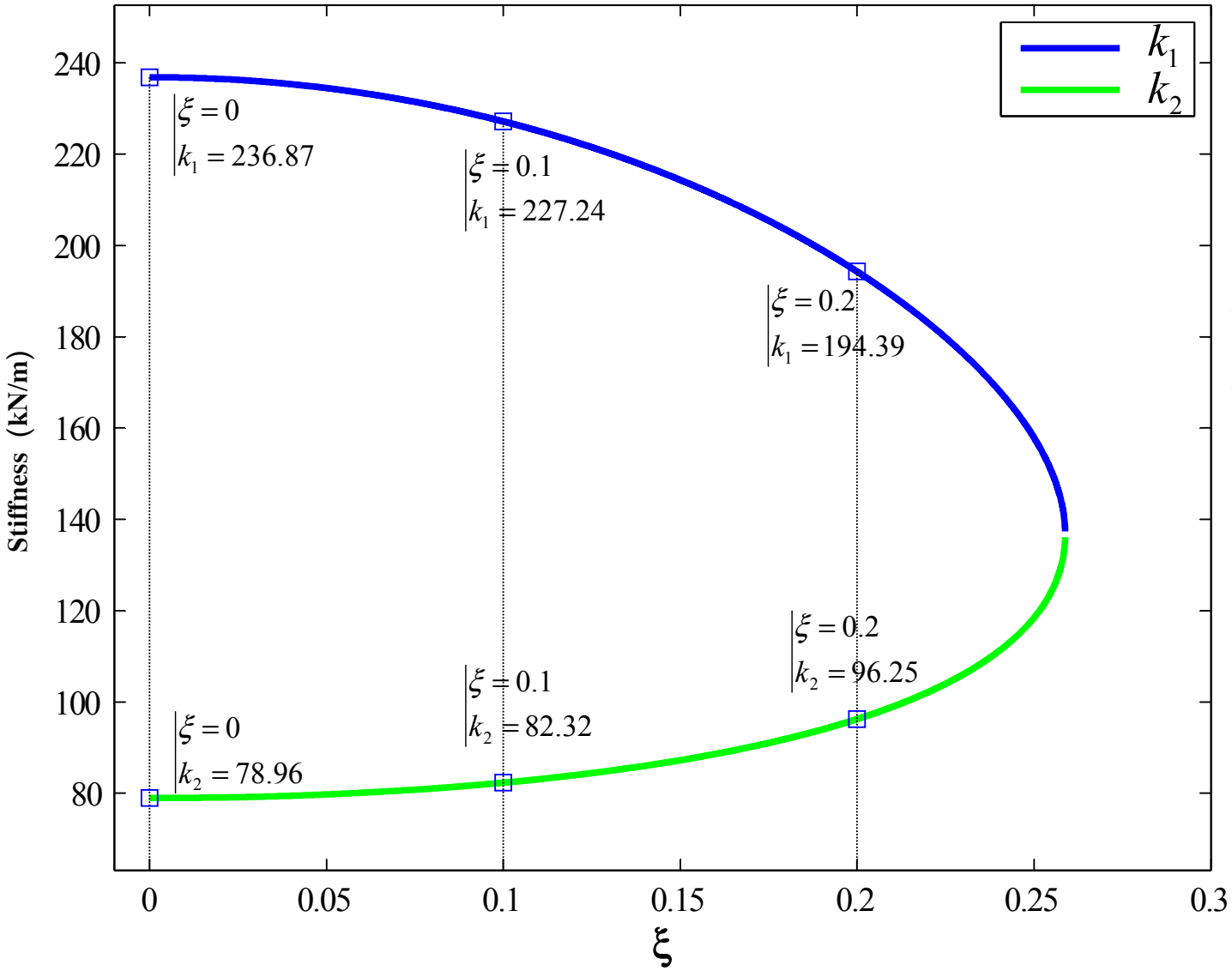
$$(24a) \quad \Rightarrow \quad k \ge k_1 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_1^2} = \frac{1000(4\pi)^2}{(0.901)^2} \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad k \ge k_1 = 194.39 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

$$(24b) \quad \Rightarrow \quad k \le k_2 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_2^2} = \frac{1000(4\pi)^2}{(1.281)^2} \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad k \le k_2 = 96.25 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

❑کنترل بر اساس شتاب مجاز $\ddot{x}_{allow}$

پاسخ مثال-1:

ب-



مقادیر ممکن k در میرایی‌های مختلف برای حالت $D_2 = 2$

برای یک میرایی خاص، هر دو سختی از نظر کنترل معیار شتاب مورد قبول می‌باشد. اما ممکن است کنترل معیار جابجایی نقض شود. برای جلوگیری از این حالت، طراحی باید برای جابجایی نیز کنترل گردد.

❑ کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

اساس کنترل بر مبنای جابجایی مجاز مشابه حالت کنترل براساس شتاب مجاز است؛ با این تفاوت که می‌توان جابجایی حداکثر (ρ) را بر حسب D_2 بیان کرد.

$$(7): \quad \rho = \frac{p_0}{k} D_1 \overset{k=m\omega^2}{\Rightarrow} \rho = \frac{p_0}{m\omega^2} D_1 \overset{\times=\bar{\omega}^2}{\Rightarrow} \rho = \frac{p_0}{m\omega^2} \times \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2} D_1 \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{p_0 \beta^2}{m\bar{\omega}^2} D_1} \quad (25)$$

$$(13) \ \& \ (25) \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{p_0}{m\bar{\omega}^2} D_2} \quad (26)$$

با انتخاب حداکثر جابجایی مجاز x_{allow} برای سازه، حداکثر ضریب بزرگنمایی شتاب مجاز $\bar{D}_{2allow}$ براساس جابجایی مجاز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(26) \Rightarrow \boxed{\bar{D}_{2allow} = \frac{m\bar{\omega}^2}{p_0} x_{allow}} \quad (27)$$

❑ کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

طراحی سختی براساس جابجایی مجاز

می‌توان سختی سازه را برحسب مقادیر مجاز x_{allow} بیان کرد.

با انتخاب x_{allow} $\overset{(27)}{\Rightarrow}$ $\overline{D}_{2allow} = \dfrac{m\overline{\omega}^2}{p_0} x_{allow}$ ✓ $\Rightarrow$ با معلوم بودن ضریب میرایی سازه ξ^*

$\overset{(21)}{\Rightarrow}$ $\beta = \beta_1 \; or \; \beta_2 = \left[\dfrac{1-2\xi^{*2} \pm \sqrt{(1-2\xi^{*2})^2 - 1 + \left(\dfrac{1}{\overline{D}_{2allow}}\right)^2}}{1-\left(\dfrac{1}{\overline{D}_{2allow}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$ ✓

و یا از روی نمودار β برحسب میرایی‌های مختلف در حالت $\overline{D}_{2allow}$

$(24) \Rightarrow k = \dfrac{\overline{\omega}^2}{\beta^2} m$

حدود سختی برحسب بازه‌های β_1 و β_2 به دست می‌آید.

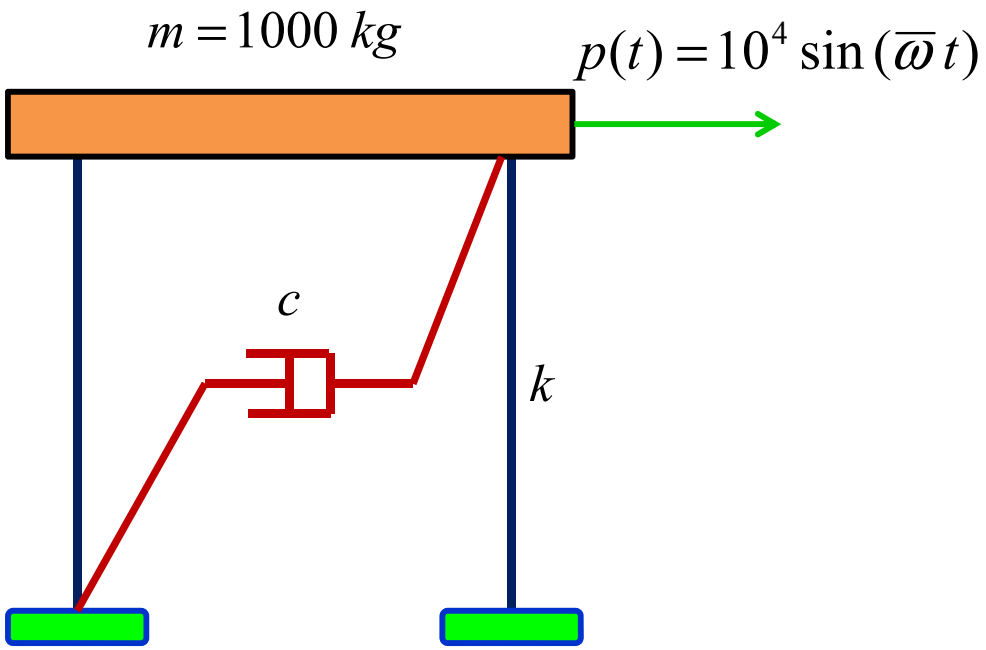
❑کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

مثال-2: سیستم SDOF نشان داده شده در شکل تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد. حدود سختی مجاز را برای $x_{allow} = 10\ cm$ در دو حالت زیر به دست آورید.

الف) $\xi = 0 \quad , \quad \overline{\omega} = 2\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

ب) $\xi = 0\ , 0.1\ , 0.2 \quad , \quad \overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

$$g = 10 \left(\frac{m}{\sec^2}\right)$$



❑کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

پاسخ مثال-2:

الف- $\xi = 0$, $x_{allow} = 10\ cm$, $\overline{\omega} = 2\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

❑ کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

پاسخ مثال-2: ب- $\xi = 0$, $x_{allow} = 10\ cm$, $\overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$, $p_0 = 10^4$

$$(27) \Rightarrow \overline{D}_{2allow} \le \frac{m\overline{\omega}^2}{p_0} x_{allow} = \frac{1000(4\pi)^2}{10^4}(10\times10^{-2}) \Rightarrow \boxed{\overline{D}_{2allow} \le 1.579}$$

$$\xi = 0 \overset{(22)}{\Rightarrow} \beta_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{\overline{D}_{2allow}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{1.579}}} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0.782 & \text{(ق.ق)} \\ \beta_2 = 1.651 & \text{(ق.ق)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 < \beta \le 0.782 \\ 1.651 \le \beta < \infty \end{matrix}} \begin{matrix} (I.a) \\ (I.b) \end{matrix}$$

$$(24a) \Rightarrow k \ge k_1 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_1^{\,2}} = \frac{1000\,(4\pi)^2}{(0.782)^2}\times10^{-3} \Rightarrow \boxed{k \ge k_1 = 257.91\left(\frac{kN}{m}\right)}$$

$$(24b) \Rightarrow k \le k_2 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_2^{\,2}} = \frac{1000\,(4\pi)^2}{(1.651)^2}\times10^{-3} \Rightarrow \boxed{k \le k_2 = 57.91\left(\frac{kN}{m}\right)}$$

❑ کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

پاسخ مثال-2: ب-

$$\bar{D}_{2allow} \le 1.579 \quad , \quad \bar{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right) \quad , \quad x_{allow} = 10\,cm \quad , \quad \xi = 0.1$$

$$(21): \quad \beta_{1,2} = \left[\frac{1-2\xi^{*2} \pm \sqrt{(1-2\xi^{*2})^2 - 1 + \left(\frac{1}{\bar{D}_{2allow}}\right)^2}}{1-\left(\frac{1}{\bar{D}_{2allow}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1-2(0.1)^2 \pm \sqrt{(1-2(0.1)^2)^2 - 1 + \left(\frac{1}{1.579}\right)^2}}{1-\left(\frac{1}{1.579}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0.795 & (ق.ق) \\ \beta_2 = 1.624 & (ق.ق) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < \beta \le 0.795 & (I.a) \\ 1.624 \le \beta < \infty & (I.b) \end{matrix}$$

$$(24a) \quad \Rightarrow \quad k \ge k_1 = \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta_1^{\,2}} = \frac{1000(4\pi)^2}{(0.795)^2} \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad k \ge k_1 = 249.69 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

$$(24b) \quad \Rightarrow \quad k \le k_2 = \frac{m\bar{\omega}^2}{\beta_2^{\,2}} = \frac{1000(4\pi)^2}{(1.624)^2} \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad k \le k_2 = 59.82 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

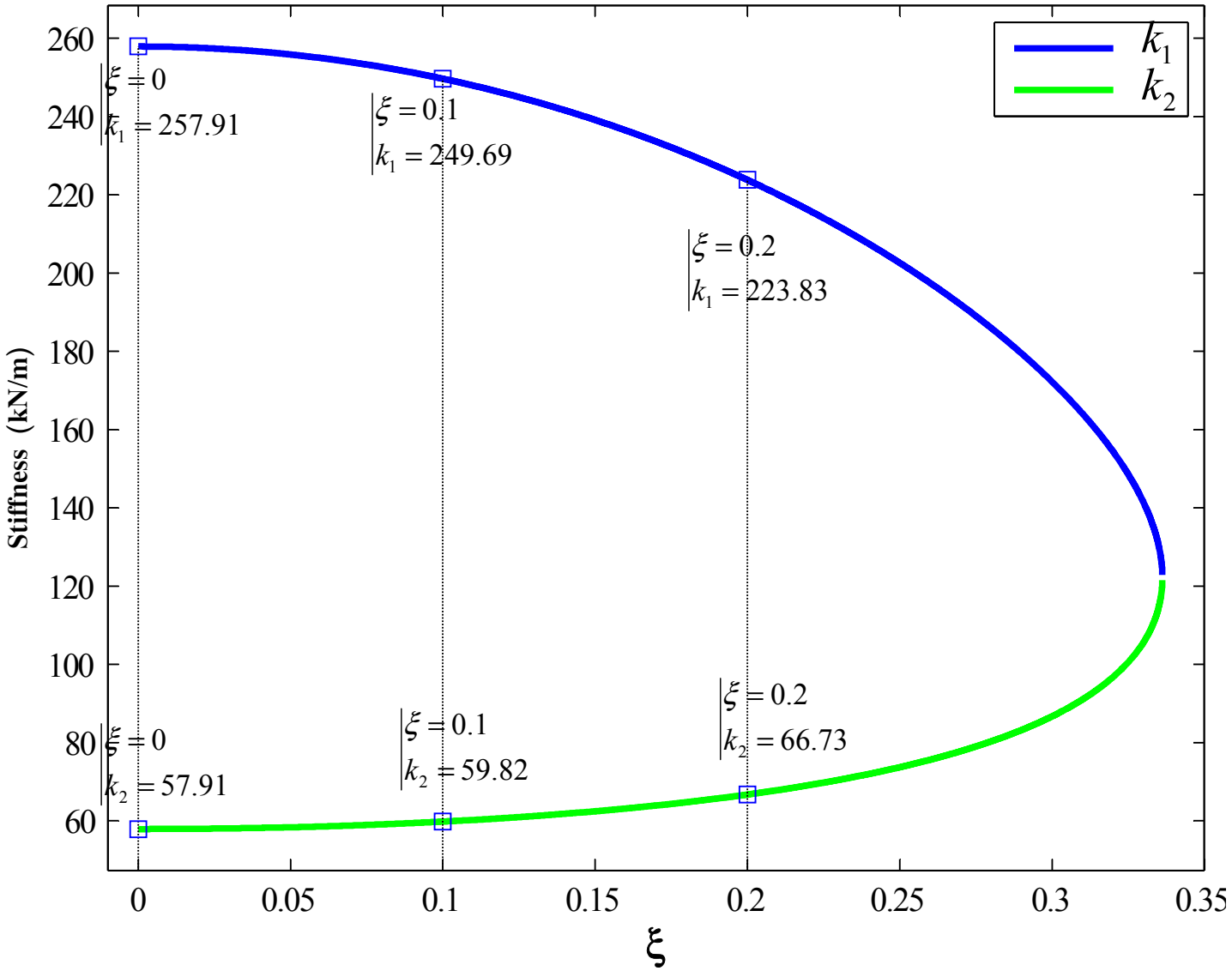
❑ کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

پاسخ مثال-2: ب- $\xi = 0.2$, $x_{allow} = 10\,cm$, $\bar{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$, $\bar{D}_{2allow} \le 1.579$

❑کنترل بر اساس جابجایی مجاز x_{allow}

پاسخ مثال-2:

ب-



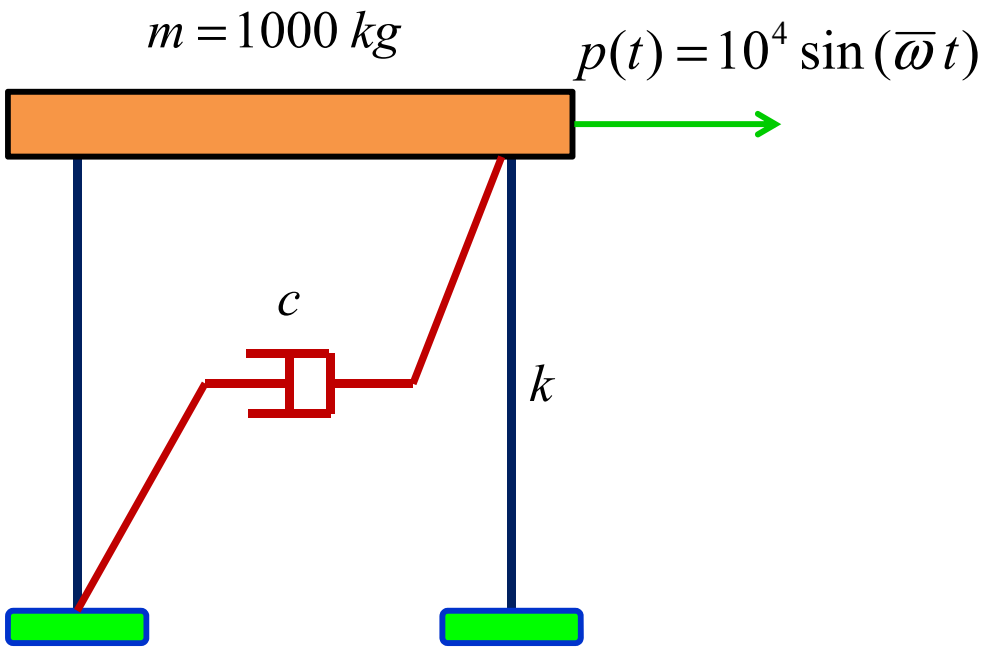
برای یک میرایی خاص، هر دو سختی از نظر کنترل معیار جابجایی مورد قبول می‌باشد. اما ممکن است کنترل معیار شتاب نقض شود. برای جلوگیری از این حالت، طراحی باید برای شتاب نیز کنترل گردد.

مقادیر ممکن k در میرایی‌های مختلف برای حالت $\overline{D}_2 = 1.579$

❑کنترل بر اساس جابجایی وشتاب مجاز

مثال-3: سیستم SDOF نشان داده شده در شکل تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد. حدود سختی مجاز را برای $x_{allow}=10\,cm$ و $\ddot{x}_{allow}=2g$ در حالت زیر به دست آورید.

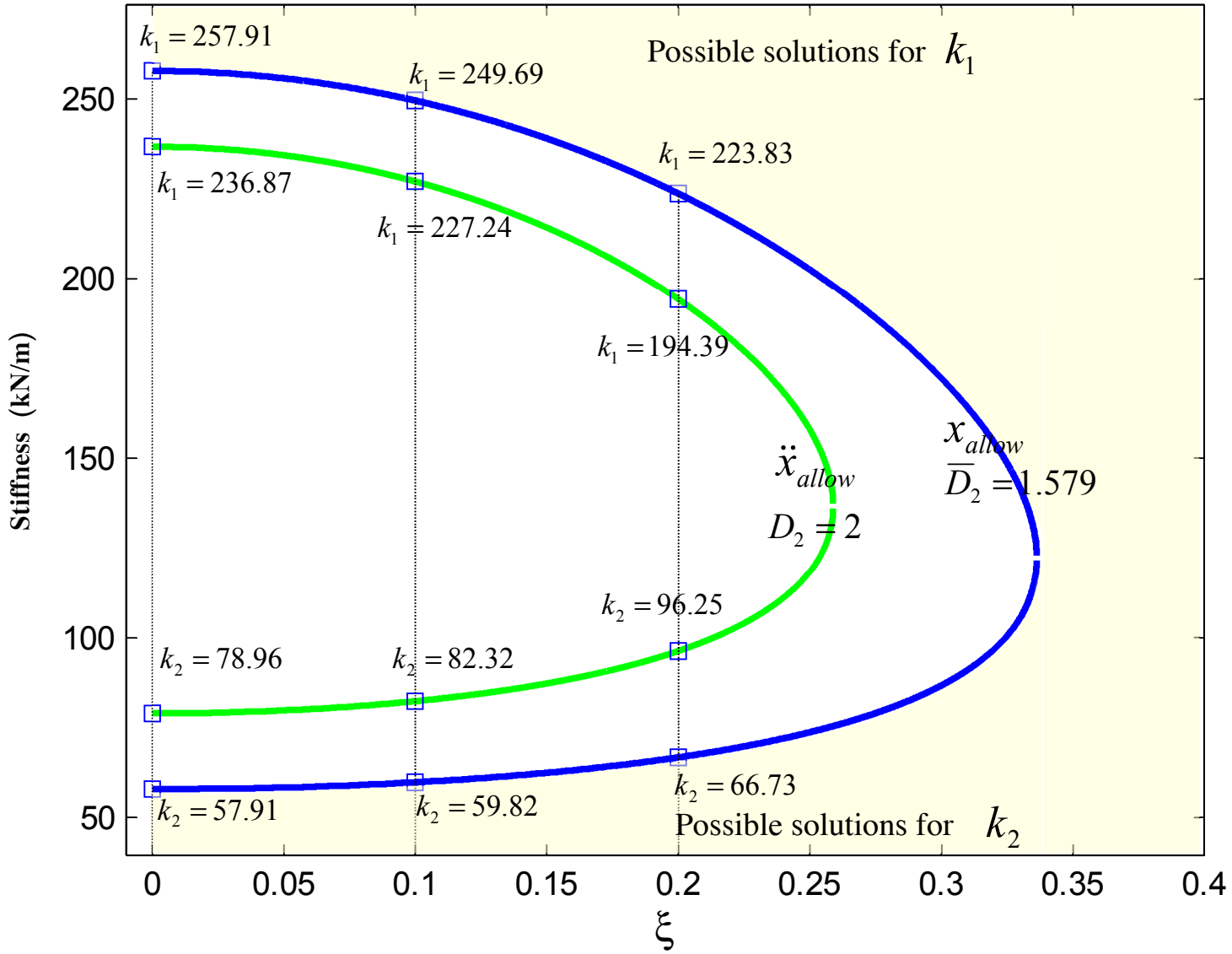
$$\xi=0\,,0.1\,,0.2 \quad , \quad \overline{\omega}=4\pi\left(\frac{rad}{\sec}\right)$$



$$g=10\left(\frac{m}{\sec^2}\right)$$

❑کنترل بر اساس جابجایی و شتاب مجاز

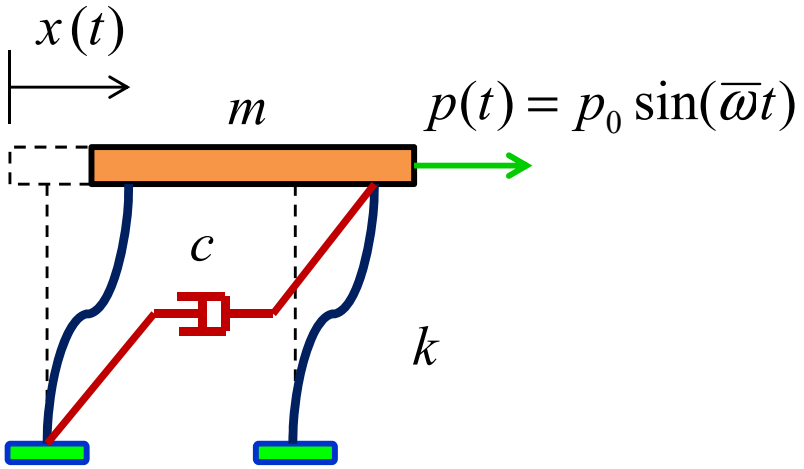
پاسخ مثال-3:



مقادیر ممکن k در میرایی‌های

❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow} Passive Control

ممکن است کنترل نیروهای مقاوم داخلی ایجاد شده در سازه مورد نظر باشد، در این صورت نیز می‌توان سختی سازه را آنچنان انتخاب کرد که این هدف حاصل گردد. با فرض آنکه نیروی وارد بر سازه هارمونیک باشد در این صورت برآیند نیروهای وارد بر سازه R از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k\,x(t)=p_0\sin(\varpi t) \Rightarrow$$

نیروی اینرسی — نیروی داخلی — نیروی خارجی

برآیند نیروهای وارد بر سازه

$$R=p_0\sin(\varpi t)-m\ddot{x}(t)=c\dot{x}(t)+k\,x(t) \quad (28)$$

نیروی خارجی + نیروی اینرسی — نیروی مقاوم داخلی

❑ کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow} Passive Control

$$(3): \quad x(t) = \rho \sin(\overline{\omega} t - \theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x}(t) = \rho \overline{\omega} \cos(\overline{\omega} t - \theta)} \quad (29)$$

با جایگذاری روابط جابجایی و سرعت در رابطه برآیند نیروهای وارد بر سازه خواهیم داشت:

$$(3)\ \&\ (29) \rightarrow (29) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = c\,\rho \overline{\omega} \cos(\overline{\omega} t - \theta) + k\,\rho \sin(\overline{\omega} t - \theta)} \quad (30)$$

مقدار ماکزیمم برآیند نیروهای وارد بر سازه R_0 برابر است با

$$(30) \Rightarrow R_0 = \sqrt{(c\,\rho\overline{\omega})^2 + (k\,\rho)^2} \Rightarrow R_0 = \rho k \sqrt{\left(\frac{c\,\overline{\omega}}{k}\right)^2 + 1} \underset{k = m\omega^2}{\overset{c = 2m\omega\xi}{\Rightarrow}} \boxed{R_0 = \rho k \left[(2\xi\beta)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (31)$$

$$(4) \rightarrow (31) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_0 = p_0 \left[\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (32)$$

❑ کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow} Passive Control

ضریب بزرگنمایی نیرو (Force magnification factor)

$$D_3 = \frac{\text{حداکثر نیروی دینامیکی}}{\text{حداکثر نیروی استاتیکی}} = \frac{R_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_3 = \left[\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (33)$$

مقدار ماکزیمم ضریب بزرگنمایی نیرو برابر است با :

$$\frac{dD_3}{d\beta} = 0 \quad \overset{(33)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\beta_{peak} = \frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+8\xi^2}}}{2\xi}} \qquad (34)$$

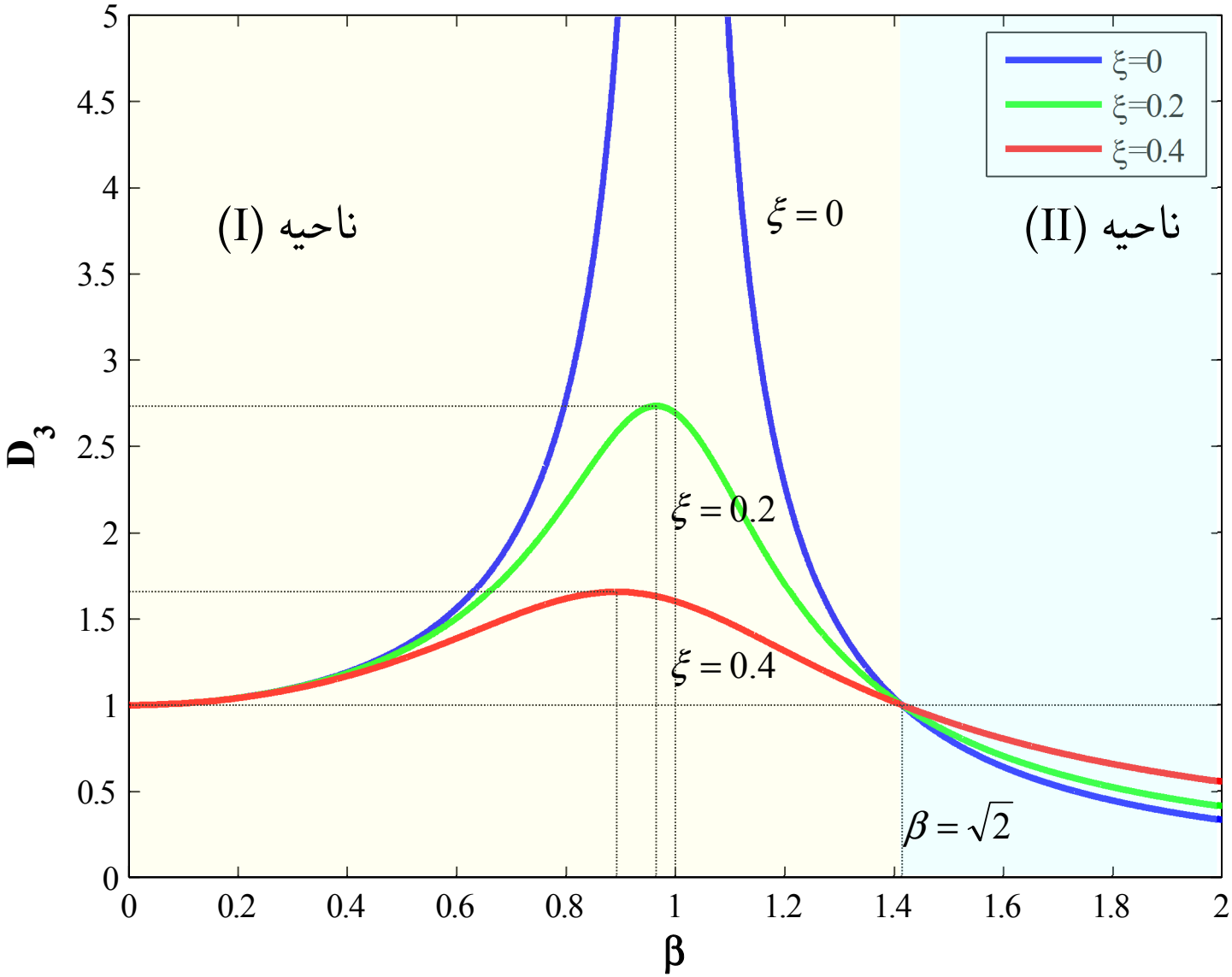
$$(33)\ \&\ (34) \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{3\max} = \sqrt{\frac{\sqrt{8\xi^2+1}}{\left(1-\frac{-1+\sqrt{8\xi^2+1}}{4\xi^2}\right)^2 - 1+\sqrt{8\xi^2+1}}}} \qquad (35)$$

حداکثر نیروی دینامیکی برابر است با حداکثر نیروی استاتیکی اگر

$$if \quad D_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad R_0 = p_0 \quad \overset{(33)}{\Rightarrow} \quad \left[\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 0\ ,\ \sqrt{2}}$$

Passive Control

❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}



در ناحیه I میرایی در جهت خوبی کار می‌کند به طوری که با افزایش میرایی ضریب بزرگنمایی نیرو کاهش می‌یابد.

اما در ناحیه II میرایی در جهت خوبی کار نمی‌کند زیرا که با افزایش میرایی، ضریب بزرگنمایی نیرو افزایش می‌یابد.

نمودار نسبت فرکانس – ضریب بزرگنمایی نیروی یک سیستم SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک

❑ کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}

ضریب بزرگنمایی نیرو (Force magnification factor)

طراحی سختی براساس حداکثر نیروی دینامیکی مجاز

می‌توان سختی سازه را برحسب مقادیر مجاز R_{0allow} بیان کرد.

با انتخاب R_{0allow} $\overset{(33)}{\Rightarrow}$ $D_{3allow}=\dfrac{R_{0allow}}{p_0}$ ✓ $\Rightarrow$ با معلوم بودن ضریب میرایی سازه ξ^*

(33) $\Rightarrow$

$$\beta_{1,2}=\frac{1}{D_{3allow}}\left[(1-2\xi^2){D_{3allow}}^2+2\xi^2\pm\left[4(\xi^4-\xi^2){D_{3allow}}^4+(1+4\xi^2-8\xi^4){D_{3allow}}^2+4\xi^4\right]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

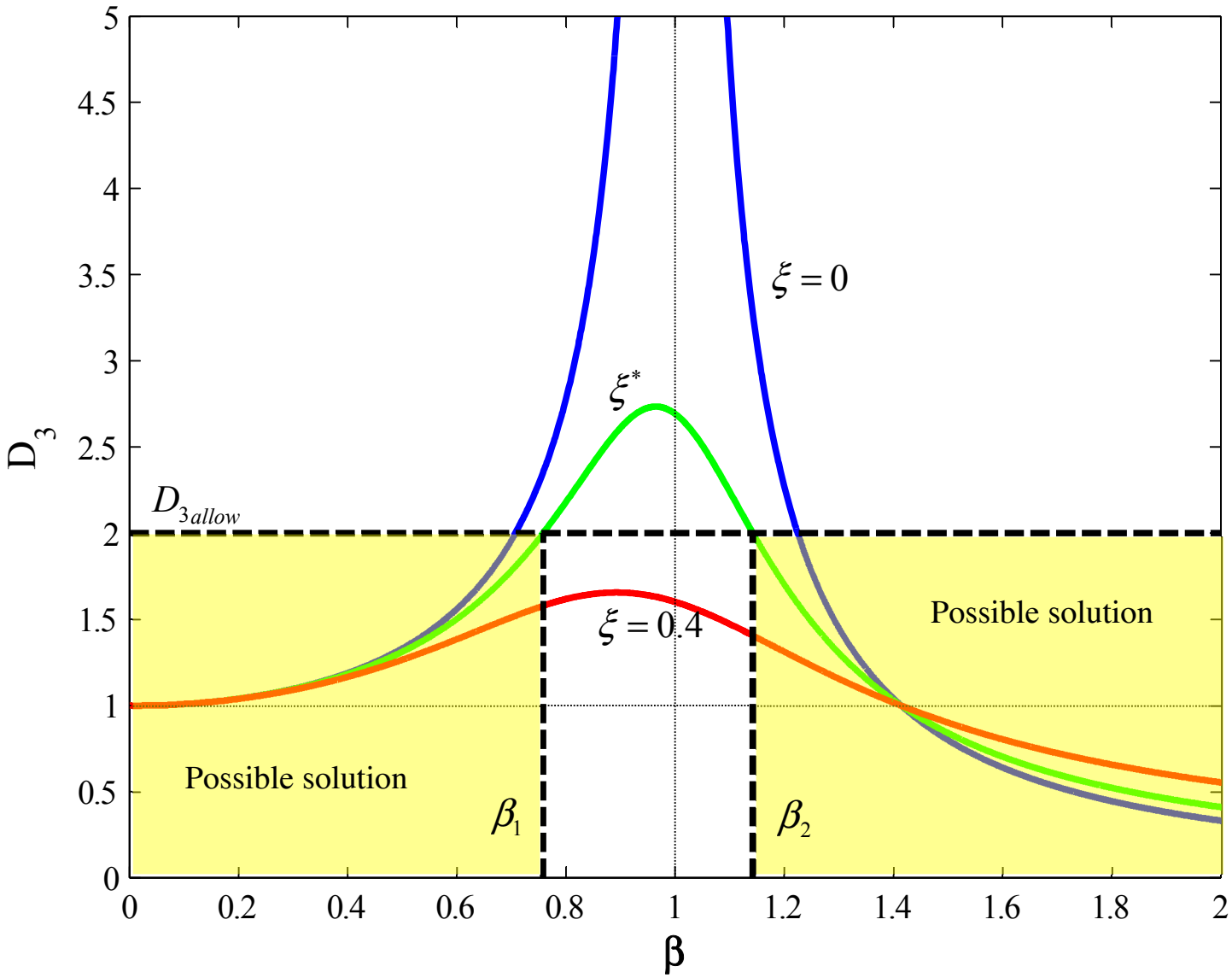
و یا از روی نمودار β برحسب میرایی‌های مختلف در حالت D_{3allow}

(24) $\Rightarrow$ $k=\dfrac{\overline{\omega}^2}{\beta^2}m$

حدود سختی برحسب بازه‌های β_1 و β_2 به دست می‌آید.

Passive Control

❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}



مقادیر ممکن β برای حالت $D_3 \le D_{3allow}$

❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow} Passive Control

حالت‌های خاص:

الف- سیستم بدون میرایی

با انتخاب $\xi^* = 0$ $\overset{(36)}{\Rightarrow}$

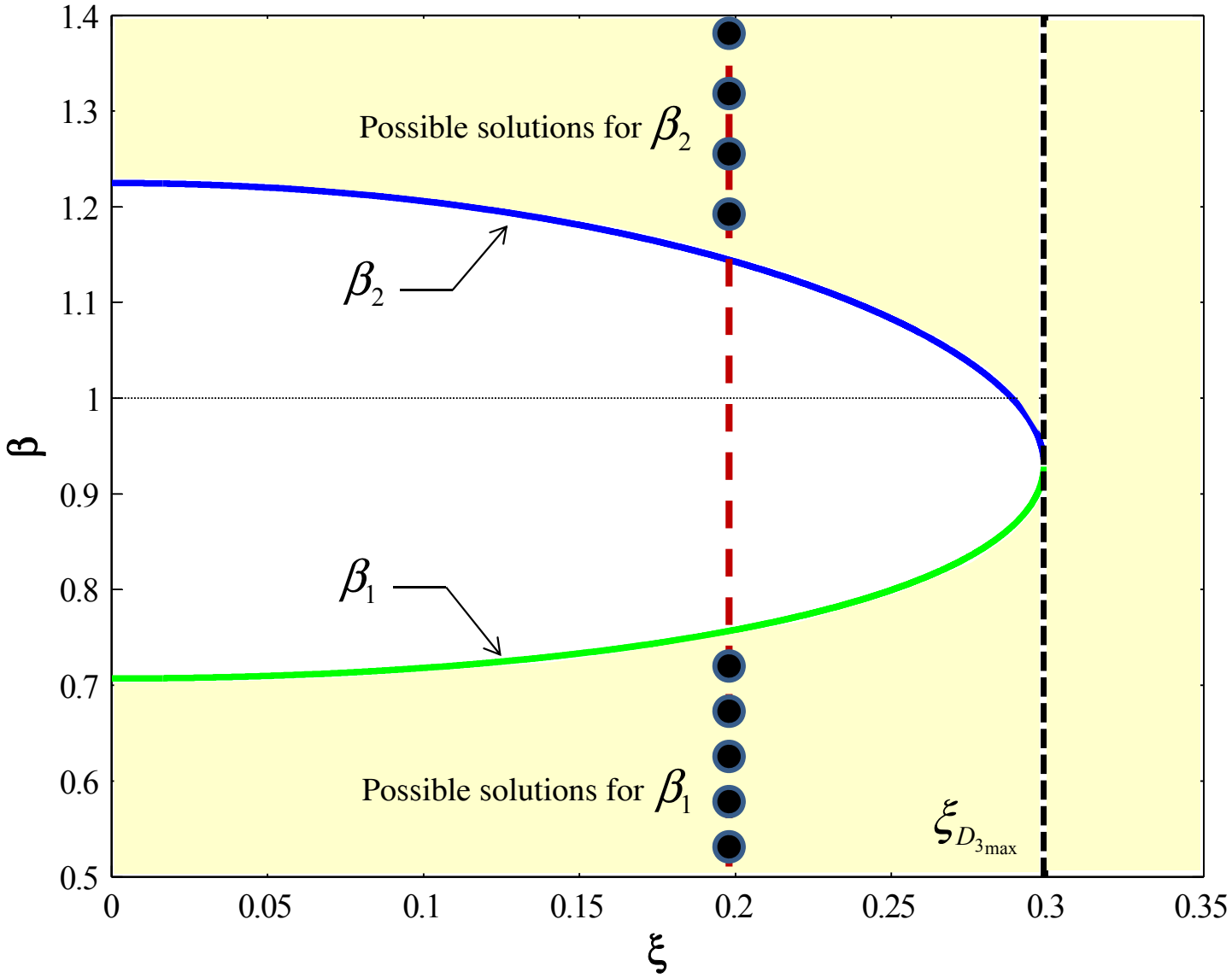
$$\begin{cases} \beta_{1,2} = \sqrt{1 \pm \dfrac{1}{D_{3allow}}} & D_{3allow} \geq 1 \\ \beta = \sqrt{1 + \dfrac{1}{D_{3allow}}} & D_{3allow} < 1 \end{cases} \qquad (37)$$

ب- میرایی متناظر با ماکزیمم ضریب بزرگنمایی شتاب

$$(35) \Rightarrow \xi_{D_{3\max}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{(D_{3\max}{}^2 - 1)(D_{3\max}{}^2 - \sqrt{D_{3\max}{}^4 - D_{3\max}{}^2})}}{D_{3\max}{}^2 - 1} \qquad (38)$$

$$\Rightarrow \quad if \quad \begin{cases} \xi^* < \xi_{D_{3\max}} & \Rightarrow \quad \beta_1 \neq \beta_2 \\ \xi^* = \xi_{D_{3\max}} & \Rightarrow \quad \beta_1 = \beta_2 \\ \xi^* > \xi_{D_{3\max}} & \Rightarrow \quad \beta_1, \beta_2 \ (No\ available) \end{cases}$$

Passive Control R_{allow} کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز



مقادیر ممکن β در میرایی‌های مختلف برای حالت $D_3 = 2$

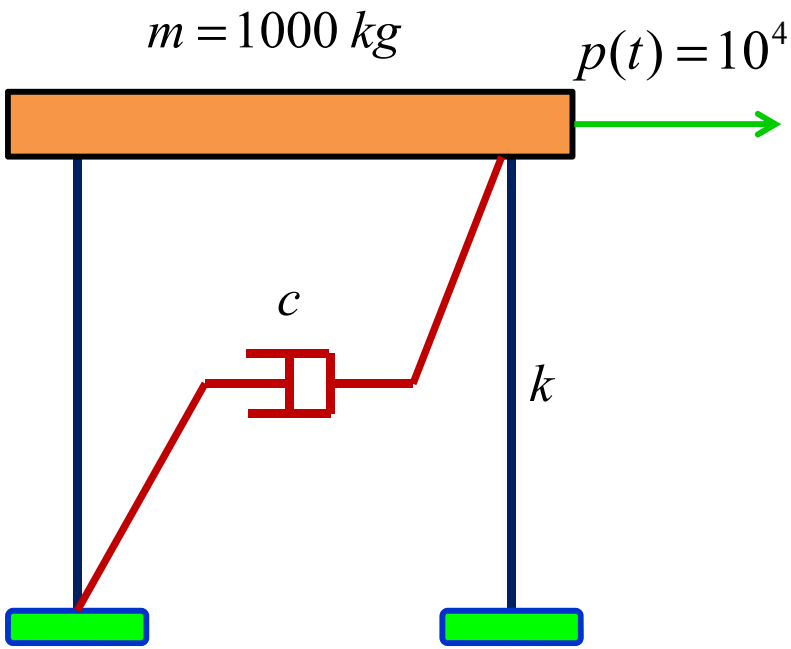
❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}

مثال-4: سیستم SDOF نشان داده شده در شکل تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد. حدود سختی مجاز را در دو حالت زیر به دست آورید.

الف) $\xi = 0 \quad , \quad \overline{\omega} = 2\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right) \quad , \quad D_{3allow} = 0.1$

ب) $\xi = 0 , 0.1 , 0.2 \quad , \quad \overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right) \quad , \quad D_{3allow} = 2$

$$g = 10 \left(\frac{m}{\sec^2}\right)$$



❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}

پاسخ مثال-4:

الف- $\xi = 0$, $D_{3allow} = 0.1$, $\overline{\omega} = 2\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}

پاسخ مثال-4: ب-

$$p_0 = 10^4 \qquad \overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right) \quad , \quad D_{3allow} = 2 \quad , \quad \xi = 0$$

$$\xi = 0 \overset{(37)}{\Rightarrow} \beta_{1,2} = \sqrt{1 \pm \frac{1}{D_{3allow}}} = \sqrt{1 \pm \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0.707 \ \text{(ق.ق)} \\ \beta_2 = 1.225 \ \text{(ق.ق)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < \beta \le 0.707 \\ 1.225 \le \beta < \infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} (I.a) \\ (I.b) \end{matrix}$$

$$(24a) \Rightarrow k \ge k_1 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_1^{\,2}} = \frac{1000(4\pi)^2}{(0.707)^2} \times 10^{-3} \Rightarrow k \ge k_1 = 315.83 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

$$(24b) \Rightarrow k \le k_2 = \frac{m\overline{\omega}^2}{\beta_2^{\,2}} = \frac{1000(4\pi)^2}{(1.225)^2} \times 10^{-3} \Rightarrow k \le k_2 = 105.28 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}

پاسخ مثال-4: ب- $\xi = 0.1$, $D_{3allow} = 2$, $\overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$ $p_0 = 10^4$

❑کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}

پاسخ مثال-4: ب- $\xi = 0.2$, $D_{3allow} = 2$, $\overline{\omega} = 4\pi \left(\frac{rad}{\sec}\right)$, $p_0 = 10^4$

$$(36): \quad \beta_{1,2} = \frac{1}{D_{3allow}} \left[(1-2\xi^2) {D_{3allow}}^2 + 2\xi^2 \pm \left[4(\xi^4 - \xi^2) {D_{3allow}}^4 + (1+4\xi^2-8\xi^4) {D_{3allow}}^2 + 4\xi^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\xi = 0.2 \overset{(36)}{\Rightarrow} \begin{cases} \beta_1 = 0.756 & \text{(ق.ق)} \\ \beta_2 = 1.143 & \text{(ق.ق)} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 < \beta \le 0.756 \quad (I.a) \\ 1.143 \le \beta < \infty \quad (I.b) \end{array}$$

$$(24a) \Rightarrow k \ge k_1 = \frac{m\overline{\omega}^2}{{\beta_1}^2} = \frac{1000(4\pi)^2}{(0.756)^2} \times 10^{-3} \Rightarrow k \ge k_1 = 274.88 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

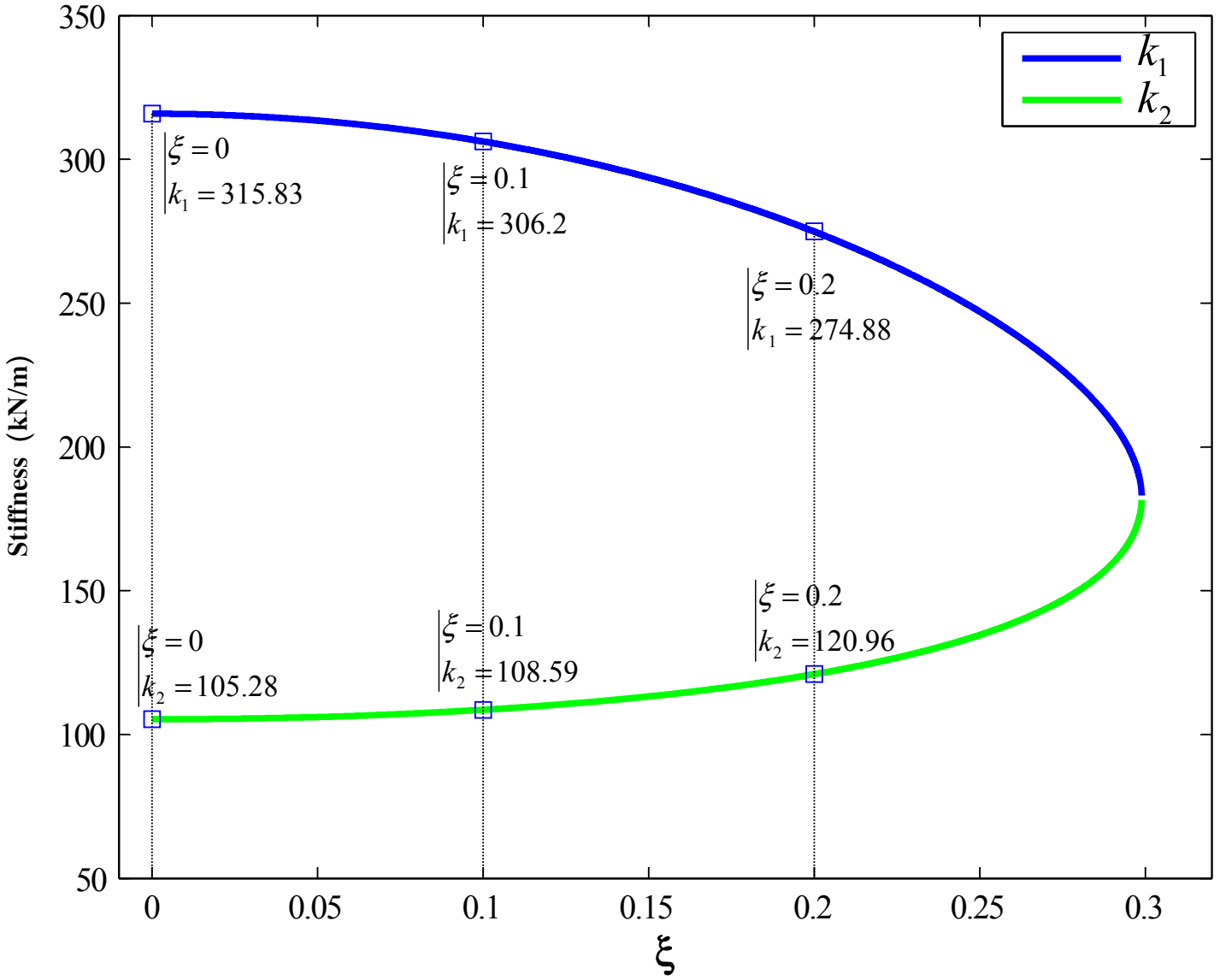
$$(24b) \Rightarrow k \le k_2 = \frac{m\overline{\omega}^2}{{\beta_2}^2} = \frac{1000(4\pi)^2}{(1.143)^2} \times 10^{-3} \Rightarrow k \le k_2 = 120.96 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

کنترل بر اساس نیروهای مقاوم داخلی مجاز R_{allow}

پاسخ مثال-4:

ب-

برای یک میرایی خاص، هر دو سختی از نظر کنترل معیار نیرو مورد قبول می‌باشد.



مقادیر ممکن k در میرایی‌های مختلف برای حالت $D_3 = 2$