



دانشگاه کردستان  
University of Kurdistan  
زانکۆی کوردستان

# روش‌های شناسایی کورکورانه سیستم

نویسنده:

دکتر کاوه کرمی

دانشیار سازه گروه مهندسی عمران

دانشگاه کردستان

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

## مقدمه:

در اواسط دهه ۱۹۹۰، جداسازی کور منابع<sup>۱</sup> یا شناسایی کور منابع<sup>۲</sup> (BSI) به عنوان ابزاری قدرتمند در زمینه جداسازی صداهای منبع، یک صدای ضبط شده معرفی شد [۱]. این روش جهت پاسخ به مسئله مهمانی شلوغ گسترش یافت. در این مسئله هدف اصلی شناسایی سخنان (منابع) در میان صدای ضبط شده (مخلوط شده) چندین سخنان است. به این مسئله در صورتی که تمامی منابع (سخنرانان) موجود شناسایی شوند جداسازی و در صورت شناسایی چند منبع اصلی (منابعی با اثر بیشتر یا غالب تر) استخراج گفته می شود [۲، ۳]. به این دلیل این روش ها را کور می نامند زیرا هیچ اطلاعاتی درباره منابع اصلی یا نحوه مخلوط شدن آن ها در دست نیست. در روش BSI اساسا منابع اصلی تنها با استفاده از مشاهدات ضبط شده بازیابی می گردد، به همین دلیل، جهت استفاده در الگوریتم های بدون نیاز به نظارت مناسب می باشند. بر اساس نحوه مخلوط شدن داده ها روش های BSI را می توان به دودسته خطی و غیرخطی تقسیم بندی نمود [۴-۶]. از روش های موجود در حوضه BSI می توان به تجزیه و تحلیل مولفه های مستقل (ICA)<sup>۳</sup> و روش شناسایی کور درجه دوم (SOBI)<sup>۴</sup> اشاره کرد که به صورت کارآمد برای استخراج اطلاعات مورد نیاز مورد استفاده قرار گرفته اند، که در بخش های بعدی به صورت کلی معرفی می شوند. این روش ها را می توان برای استخراج پاسخ های مودال سازه به کار برد با این فرض که پاسخ های مودال به صورت سیگنال های منبع در نظر گرفته شوند. در رابطه زیر نحوه ارتباط این روش ها با پاسخ های دینامیکی سازه نشان داده شده است:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \Phi \times \mathbf{Y} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A} \times \mathbf{S} \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  پاسخ های دینامیکی سازه (جابجایی یا سرعت یا شتاب)،  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  اشکال مودی سازه و  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  پاسخ های مودال سازه هستند. در این حالت  $n$  برابر تعداد درجات آزادی سازه و  $m$  برابر با تعداد داده های اندازه گیری شده می باشد. می توان مشاهده نمود که رابطه ارائه شده برای پاسخ دینامیکی سازه با رابطه ارائه شده برای روش BSI که در آن  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  داده های اولیه،  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس اختلاط و  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  منابع می باشد، مشابه بوده و در این صورت می توان این رابطه را بر اساس پارمترهای این روش باز نویسی نمود. حال با توجه به رابطه (۱) می توان معادله زیر را نوشت:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} \quad (2)$$

با توجه به رابطه (۲) می توان نتیجه گرفت که سیگنال های منبع (پاسخ های مودال سازه) در صورت مشخص شدن مقادیر  $\mathbf{A}$  قابل محاسبه است. در روش های SOBI و ICA سعی بر آن است تا مقدار  $\mathbf{W}$  با ابعاد  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  که برابر معکوس ماتریس اختلاط می باشد را محاسبه نمود:

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1} \quad (3)$$

در روش ICA با به حداکثر رسانیدن اندازه گیری های غیرگوسی، مقادیر  $\mathbf{W}$  محاسبه می شود. در روش SOBI با اعمال الگوریتم قطری کردن مشترک بر روی  $\mathbf{X}$  مقادیر  $\mathbf{W}$  تعیین خواهد شد. قبل از اعمال روش های BSI بر روی خروجی های سازه نیاز است تا تغییراتی بر روی این داده ها اعمال گردد. به این مرحله پیش پردازش داده ها گفته می شود و در ادامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

<sup>۱</sup> Blind Source Separation (BSS)

<sup>۲</sup> Blind Source Identification (BSI)

<sup>۳</sup> Independent Component Analysis

<sup>۴</sup> Second Order Blind Identification

## ۱- پیش پردازش:

قبل از استفاده از الگوریتم‌های BSI بهتر است که داده‌های مورد استفاده (مقادیر  $\mathbf{X}$ ) نرمال<sup>۱</sup> و سفید<sup>۲</sup> گردند. نرمال کردن این داده‌ها به معنی آن است که مرکز داده‌ها به صفر انتقال یابد (میانگین داده‌ها صفر گردد) و سفید کردن به معنای آن است که مقادیر کواریانس داده‌ها به یک ماتریس واحد تبدیل شود. با اعمال مراحل پیش پردازش همبستگی و ارتباط داده‌ها به هم کاهش می‌یابد از این رو می‌توان خواص آماری داده‌ها را بهتر تشخیص داد و اطلاعات مورد نیاز را با دقت بالاتری محاسبه نمود.

### ۱-۱- صفر کردن مرکز داده‌ها (نرمال کردن):

برای آن که مرکز داده‌ها به صفر منتقل شود باید میانگین هر دسته از داده‌ها (در دینامیک سازه پاسخ‌های هریک از درجات آزادی سازه) محاسبه و از داده‌ها کم شود، به این صورت هر دسته از داده‌ها دارای میانگین برابر صفر می‌باشند. میانگین یک دسته از داده‌ها را می‌توان با امید ریاضی (E) نیز تعریف نمود، امید ریاضی یک دسته از داده‌ها برابر حاصل جمع آن‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها است [۷].

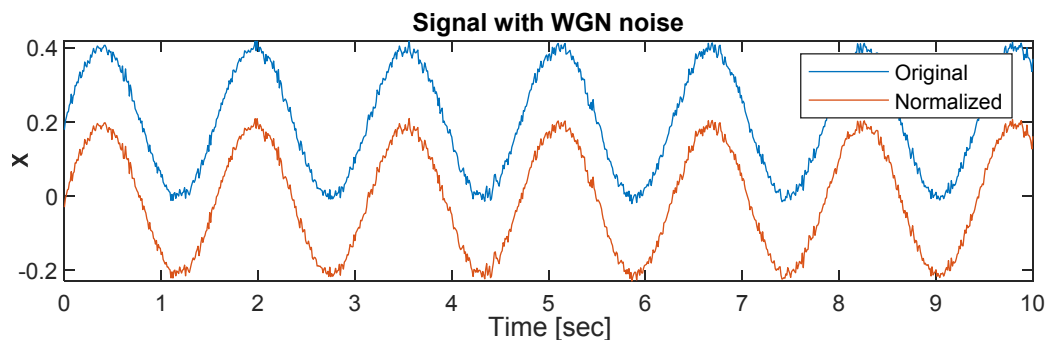
$$\bar{\mathbf{X}}_{n \times 1} = \frac{1}{m} \mathbf{X}_{n \times m} \mathbf{L}_{m \times 1} \quad (۴)$$

$$\mathbf{X}^0_{n \times m} = \mathbf{X}_{n \times m} - \bar{\mathbf{X}}_{n \times 1} \mathbf{L}^T_{1 \times m} \quad (۵)$$

با استفاده از رابطه (۴) که در آن  $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  بردار میانگین (امید ریاضی) و  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  بردار با درایه‌های واحد می‌باشد. ابتدا میانگین هر دسته از داده‌ها محاسبه می‌شود. در نهایت داده‌های نرمال شده  $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$  با استفاده از رابطه (۵) محاسبه خواهد شد. روش نرمال سازی داده‌ها در ادامه توسط یک مثال مورد بررسی قرار گرفته است.

مثال. در این مثال یک سیگنال سینوسی که توسط موج سفید گوسی (WGN<sup>۳</sup>) به نویز آلوده شده است مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیگنال مورد نظر با مقدار 0.2 جمع شده است تا مرکز سیگنال از مقدار صفر فاصله داشته باشد.

$$X(t) = 0.2 \sin(4 \times t) + 0.2$$



شکل (۱): نرمال سازی سیگنال سینوسی.

<sup>۱</sup> Normalization

<sup>۲</sup> Whitening

<sup>۳</sup> White gaussian noise

با توجه به شکل (۱) مشاهده می‌گردد که مرکز سیگنال مورد نظر پس از نرمال سازی به مقدار صفر میل می‌کند.

## ۱-۲- سفید کردن داده‌ها:

جهت سفید نمودن داده‌ها الگوریتم‌های متنوعی ارائه شده است، که به طور کلی در این الگوریتم‌ها از مقادیر ویژه<sup>۱</sup> و یا بردارهای ویژه<sup>۲</sup> استفاده می‌گردد. داده‌های سفید شده به داده‌های گفته می‌شود که مقادیر روی قطر اصلی کواریانس آن‌ها که نشان دهنده واریانس داده‌ها است برابر با یک و مقادیر غیر قطری کواریانس که نشان دهنده همبستگی داده‌ها است برابر با صفر باشد [۴، ۸].

### ۱-۲-۱- سفید کردن داده‌ها با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

جهت سفید نمودن براساس این روش ابتدا کواریانس داده‌های نرمال شده ( $\mathbf{X}^0$ ) که با ماتریس  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  نشان داده

می‌شود، محاسبه خواهد شد.  $\mathbf{X}_{n \times m}^0 = \mathbf{X}_{n \times m} - \frac{1}{m} \mathbf{X}_{n \times m} \mathbf{L}_{m \times 1} \mathbf{L}_{1 \times m}^T$

$$\mathbf{a}_{m \times n} = (\mathbf{X})_{m \times n}^T - \frac{1}{m} \mathbf{L}_{m \times 1} \mathbf{L}_{1 \times m}^T (\mathbf{X}^0)_{m \times n}^T \quad (۶)$$

$$\mathbf{C}_{n \times n} = \text{cov}(\mathbf{X}_{n \times m}^0) = \frac{\mathbf{a}_{n \times m}^T \mathbf{a}_{m \times n}}{n-1} \quad (۷)$$

در رابطه (۷)،  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  نشان دهنده داده‌ها با میانگین صفر می‌باشد.

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^0)^T \quad (۸)$$

سپس از بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{C}$  برای تشکیل عامل سفید کننده به صورت زیر استفاده می‌گردد.

$$\mathbf{C} = \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^T \quad (۹)$$

$$\mathbf{W}_w = \mathbf{E} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \quad (۱۰)$$

که در رابطه (۹)  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{D}$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{n \times n}$  به ترتیب نشان دهنده بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{C}$  می‌باشند. همچنین در رابطه (۱۰)،  $\mathbf{W}_w$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{n \times n}$  برابر با عامل سفید کننده است، که با استفاده از آن می‌توان داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_w$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{n \times m}$  را طبق رابطه زیر محاسبه نمود.

$$\mathbf{X}_w = \mathbf{W}_w \mathbf{X}^0 \quad (۱۱)$$

در صورت محاسبه کواریانس  $\mathbf{X}_w$  مشاهده می‌شود که مقدار کواریانس محاسبه شده برابر با یک ماتریس واحد با ابعاد  $\text{cov}(\mathbf{X}_w) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  می‌باشد، این امر نشان دهنده کاهش وابستگی داده‌ها نسب به یک دیگر است.

<sup>۱</sup> Eigenvalue

<sup>۲</sup> Eigenvectors

$$\text{cov}(\mathbf{X}_w) = [\mathbf{I}] \quad (12)$$

## ۱-۲-۲- سفید کردن داده‌ها با استفاده از مقادیر منفرد

برای سفید نمودن داده‌ها بر اساس این روش ابتدا تجزیه مقادیر منفرد (SVD<sup>۱</sup>) بر روی داده‌های  $\mathbf{X}^0$  به صورت زیر اعمال می‌شود سپس از اطلاعات به دست آمده عامل سفید کننده محاسبه می‌گردد.

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{W}_w = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}^T \quad (14)$$

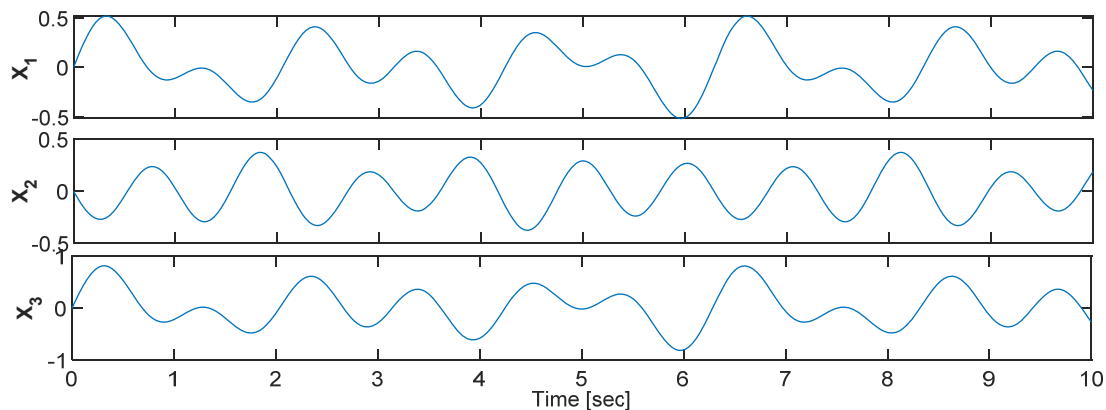
در رابطه (۱۳)  $\mathbf{U}$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{n \times n}$  نشان دهنده بردار منفرد چپ<sup>۲</sup>،  $\mathbf{V}$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{m \times m}$  نشان دهنده بردار منفرد راست<sup>۳</sup> و  $\mathbf{\Sigma}$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{m \times m}$  نشان دهنده مقادیر منفرد<sup>۴</sup> می‌باشد که نحوه محاسبه آن‌ها در بخش ۷-۳ آورده شده است. پس از محاسبه عامل سفید کننده طبق رابطه (۱۴) داده‌های سفید شده با استفاده از رابطه (۱۱) محاسبه می‌گردد. روش‌های ارائه شده جهت سفید سازی داده‌ها در ادامه توسط یک مثال مورد بررسی قرار گرفته است. مثال. در این مثال ۳ موج سینوسی با فرکانس‌های متفاوت توسط یک ماتریس اختلاط با یک دیگر مخلوط شده و سپس توسط روش‌های سفید سازی معرفی شده سعی می‌گردد همبستگی سیگنال‌های مخلوط شده نسبت به یک دیگر کاهش یابد.

$$S_1 = 0.2 \times \sin(4 \times t)$$

$$S_2 = 0.4 \times \sin(6 \times t)$$

$$S_3 = 0.3 \times \sin(3 \times t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & -0.7 & -0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A} \times \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$



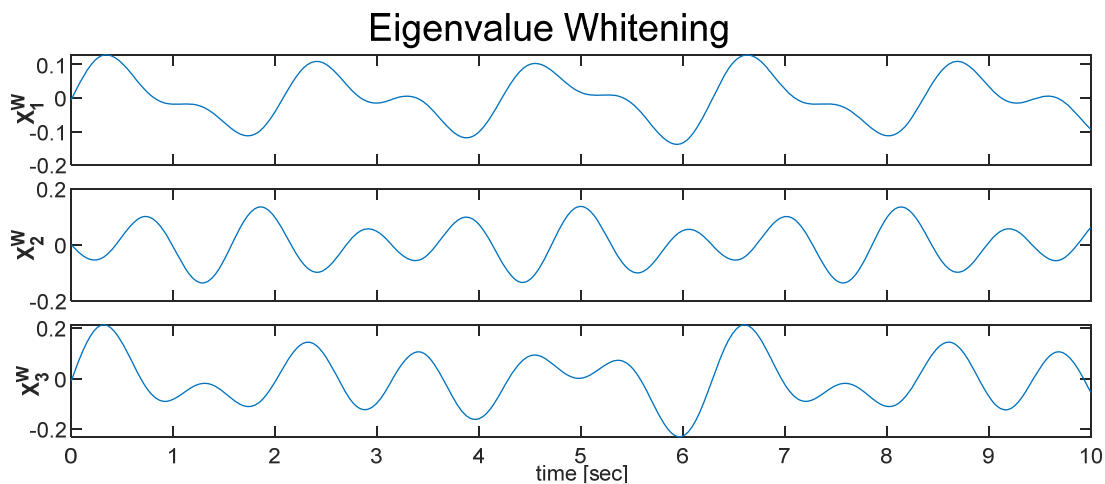
شکل (۲): سیگنال‌های مختلط شده.

<sup>۱</sup> Singular Value Decomposition

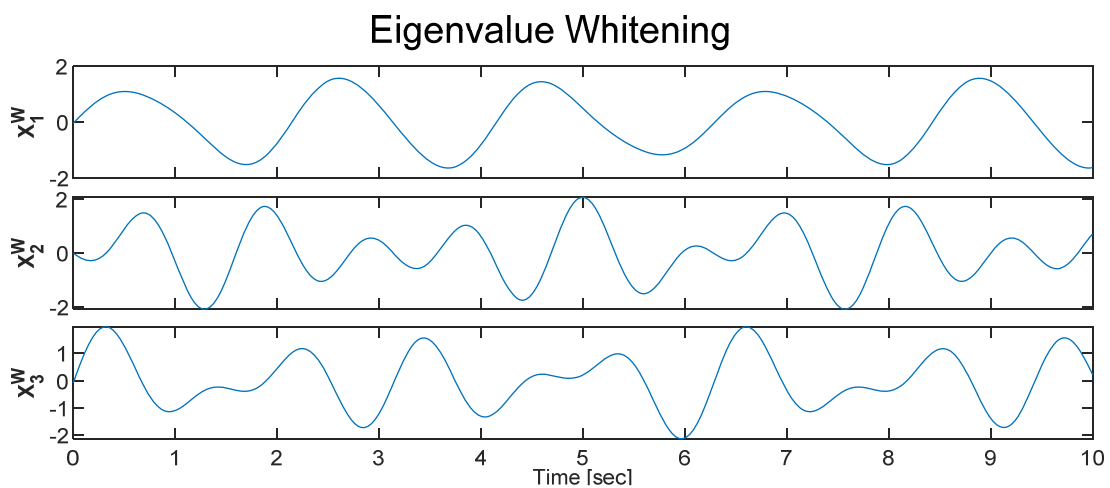
<sup>۲</sup> Left-singular vectors

<sup>۳</sup> Right-singular vectors

<sup>۴</sup> Singular Values



شکل (۳): سیگنال‌های سفید شده توسط روش مقادیر ویژه.



شکل (۴): سیگنال‌های سفید شده توسط روش مقادیر منفرد.

## ۲- تجزیه و تحلیل مولفه‌های اصلی (PCA)

تجزیه و تحلیل مولفه‌های اصلی (PCA) یک روش آماری است که با استفاده از یک تغییر شکل متعامد، مجموعه‌ای از متغیرهای همبسته را به مجموعه‌ای از متغیرهای خطی ناهمبسته به نام اجزای اصلی تبدیل می‌کند. تعداد اجزای اصلی کمتر یا مساوی با تعداد متغیرهای اصلی است. این انتقال به این صورت است که اولین مولفه اصلی دارای بزرگترین واریانس ممکن می‌باشد و هر جزء دیگر به نوبه خود دارای بزرگترین واریانس ممکن نسبت به جزء بعدی است به شرطی که بر اجزای قبلی عمود باشد (ضرب داخلی آنها صفر باشد) [۹].

PCA در سال ۱۹۰۱ توسط کارل پیرسون<sup>۲</sup> به عنوان یک نظریه از قضیه محور اصلی در مکانیک معرفی شد، که بعداً به طور مستقل توسط هارولد هتلینگ<sup>۳</sup> در سال ۱۹۳۰ توسعه یافت. PCA را می‌توان با استفاده از تجزیه مقادیر ویژه ماتریس کواریانس داده‌ها (یا ماتریس همبستگی) و یا با تجزیه مقادیر منفرد ماتریس داده‌ها انجام داد که معمولاً پس از سفر کردن میانگین داده‌ها (نرمال کردن) انجام می‌گیرد. در PCA یک فرض صریح و ساده وجود دارد و آن هم خطی بودن داده‌ها است. فرض کنید که در

<sup>۱</sup> Principal Component Analysis

<sup>۲</sup> Karl Pearson

<sup>۳</sup> Harold Hotelling

رابطه (۱)،  $\mathbf{X}$  و  $\mathbf{S}$  ماتریس‌های هستند که با یک انتقال خطی  $\mathbf{A}$  به هم مرتبط شده‌اند. با توجه به موارد ذکر شده می‌توان نتایج زیر را گرفت:

۱.  $\mathbf{A}$  ماتریسی است که  $\mathbf{S}$  را به  $\mathbf{X}$  تبدیل می‌کند.
۲. از نظر هندسی  $\mathbf{A}$  با ایجاد چرخش و کشش در  $\mathbf{X}$  آن را به  $\mathbf{S}$  تبدیل می‌کند.
۳. ردیف‌های  $\mathbf{A}$  دسته‌ای از بردارهای اساسی برای بیان ستون‌های  $\mathbf{X}$  می‌باشند.

$$\mathbf{AS} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} [\mathbf{S}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{S}_m] \quad (15)$$

$$\mathbf{a}_i = [\mathbf{a}_{i1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{im}] \quad i = 1 \quad \cdots \quad n \quad (16)$$

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{nj} \end{bmatrix} \quad j = 1 \quad \cdots \quad m \quad (17)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1 \mathbf{s}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n \mathbf{s}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \mathbf{s}_m \end{bmatrix} \quad (18)$$

با توجه به رابطه (۱۸) نتیجه گرفته می‌شود که هر یک از ستون  $\mathbf{X}$  ضرب داخلی  $\mathbf{S}$  در ردیف‌های  $\mathbf{A}$  است، بنابراین ردیف‌های  $\mathbf{A}$  در واقع مجموعه‌ای جدید از بردارهای پایه برای ستون‌های  $\mathbf{X}$  هستند که به این بردارها مقادیر اصلی  $\mathbf{X}$  گفته می‌شود. هدف اصلی از روش PCA استخراج مقادیر  $\mathbf{S}$  و  $\mathbf{A}$  از روی داده‌های  $\mathbf{X}$  است. در ادامه به معرفی روش‌های مختلف PCA پرداخته خواهد شد.

## ۲-۱-۲ PCA با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

در روش PCA از داده‌های نرمال شده  $\mathbf{X}^0$  استفاده می‌گردد. پس از تعیین داده‌های نرمال شده کواریانس این داده‌ها محاسبه و مانند رابطه (۹) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این کواریانس تعیین می‌گردد. پس از آن مقادیر ویژه از بزرگ به کوچک مرتب شده و بردارهای ویژه نیز بر اساس مرتب شدن مقادیر ویژه مرتب سازی می‌شود. در این حالت بردارهای ویژه محاسبه شده همان مولفه‌های اصلی<sup>۱</sup> داده‌ها می‌باشد. پس از نرمال شدن هر یک از ستون‌های مولفه‌های اصلی (تقسیم هر ستون بر آخرین ردیف آن) مشاهده می‌شود که این مقادیر با مقادیر نرمال شده اشکال مودی سازه مطابقت دارد. پاسخ‌های مودال همانطور که در رابطه (۱) ذکر شده پس از تعیین مولفه‌های اصلی با ضرب معکوس این مقادیر در  $\mathbf{X}^0$  محاسبه می‌گردد. مراحل روش PCA به صورت خلاصه در زیر آورده شده است.

$$1. \quad \mathbf{C} = \text{cov}(\mathbf{X}^0)$$

$$2. \quad \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^T = \mathbf{C}$$

$$3. \quad \text{مرتب کردن مقادیر ویژه از بزرگتر به کوچکتر و بردارهای ویژه به نسبت آن } \hat{\mathbf{E}} \text{ و } \hat{\mathbf{D}}$$

$$4. \quad \text{نرمال کردن ماتریس بردارهای ویژه } \hat{\mathbf{E}}_n$$

$$5. \quad \hat{\mathbf{A}} \approx \hat{\mathbf{E}}_n \text{ که با توجه به رابطه (۱)، } \hat{\mathbf{A}} \text{ متناظر با اشکال مودی سازه } \boldsymbol{\phi} \text{ است.}$$

$$6. \quad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{E}}_n^{-1} \times \mathbf{X}^0$$

<sup>۱</sup> Principal Component

## ۲-۲-۲ PCA با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد:

در این روش نیز مانند روش قبل ابتدا داده‌های نرمال شده  $\mathbf{X}^0$  محاسبه، پس از آن مانند رابطه (۱۳) با اعمال تجزیه مقادیر منفرد بر روی ماتریس کواریانس این داده‌ها مقادیر  $\Sigma, V^T$  و  $\mathbf{U}$  محاسبه خواهد شد. در این حالت مقادیر  $\mathbf{U}$  نشان دهنده مولفه‌های اصلی می‌باشند، پس از نرمال کردن مقادیر  $\mathbf{U}$  مشاهده می‌گردد که این مقادیر با اشکال مودی سازه مطابقت دارند. در این روش نیز مقادیر  $\mathbf{S}$  مانند روش قبل محاسبه می‌شد. برخلاف روش قبل در این روش احتیاجی به مرتب سازی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نیست. مراحل روش PCA با استفاده از مقادیر منفرد به صورت زیر می‌باشد.

$$1. \quad \mathbf{C} = \text{cov}(\mathbf{X}^0)$$

$$2. \quad \mathbf{U}\Sigma V^T = \mathbf{C}$$

$$3. \quad \text{نرمال کردن ماتریس مقادیر منفرد چپ } \mathbf{U}_n$$

$$4. \quad \mathbf{U}_n \approx \mathbf{A}$$

$$5. \quad \mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{X}^0$$

همچنین از دیگر کاربردهای روش PCA، استفاده از آن جهت کاهش حجم داده‌های مورد بررسی می‌باشد. در این حالت پس از اعمال مقادیر منفرد بر روی داده‌ها و مقدار  $\Sigma$  محاسبه خواهد شد، در ادامه از مقادیر  $\sigma_i$  که به صفر نزدیک هستند صرف نظر شده و ماتریس مقادیر منفرد به تعداد  $r$  ( $0 = \sigma_m \dots = \sigma_{r+1} < \sigma_r < \dots < \sigma_1$ ) کاهش می‌یابند و به  $\Sigma^*$  با ابعاد  $r \times r$  تبدیل می‌شود، در نهایت داده‌های کاهش یافته  $\mathbf{X}^*$  با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$(19) \quad \mathbf{X}^* = \mathbf{U}^* \Sigma^* \mathbf{V}^*$$

در رابطه (۱۹)  $\mathbf{X}^*$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{n \times r}$  نشان دهنده داده‌های کاهش یافته،  $\mathbf{U}^*$  نشان دهنده بردار منفرد چپ با ابعاد  $\mathbf{U}^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $\mathbf{V}^*$  نشان دهنده بردار منفرد راست با ابعاد  $\mathbf{V}^* \in \mathbb{R}^{r \times r}$  می‌باشند.

برای بررسی روش‌های مذکور پس از معرفی هر روش مثال‌هایی ارائه می‌گردد تا بتوان کارآمدی روش ارائه شده در شناسایی را مورد بررسی قرار داد، همچنین در نهایت توان شناسایی روش‌ها با یک دیگر مقایسه خواهد شد. با استفاده از روش تعیین معیار مودال (MAC)<sup>۱</sup> میزان خطای محاسبه ماتریس  $\mathbf{A}$  یا اشکال مودی تعیین می‌گردد و میزان دقت هر روش طبق این خطاها محاسبه می‌شود. برای محاسبه MAC از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$(20) \quad MAC_i = \frac{(\Phi_i \times \bar{\Phi}_i)^2}{(\Phi_i^T \times \bar{\Phi}_i)(\Phi_i \times \bar{\Phi}_i^T)}$$

در رابطه (۲۰)،  $\Phi_i$  با ابعاد  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  نشان دهنده ستون‌های ماتریس اشکال مودی اصلی سازه و  $\bar{\Phi}_i$  با ابعاد  $\bar{\Phi}_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  نشان دهنده ستون‌های ماتریس اشکال مودی تخمین زده شده می‌باشد. همچنین مقادیر فرکانس محاسبه شده با مقادیر اصلی مقایسه می‌گردد.

## ۲-۳-۲- بررسی عددی روش PCA:

مثال ۱. در این مثال ۳ موج با فرکانس‌های مختلف به مدت ۵ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای ۱۰۰Hz) به عنوان سیگنال‌های منبع ( $\mathbf{S}$ ) در نظر گرفته می‌شوند، که با استفاده از ماتریس اختلاط ( $\mathbf{A}$ ) به پاسخ‌های اندازه‌گیری

<sup>۱</sup> Modal Assurance Criterion

شده ( $\mathbf{X}$ ) تبدیل می‌گردند، حال فرض می‌گردد که تنها مقادیر پاسخ‌های اندازه‌گیری شده یا  $\mathbf{X}$  در دسترس بوده و درباره سیگنال‌های منبع و ماتریس اختلاط اطلاعاتی در دسترس نمی‌باشد. در این صورت با استفاده از مقادیر ( $\mathbf{X}$ ) و روش PCA مقادیر سیگنال‌های منبع و ماتریس اختلاط محاسبه می‌گردد. مقادیر  $\mathbf{S}$  به صورت زیر ارائه می‌شود.

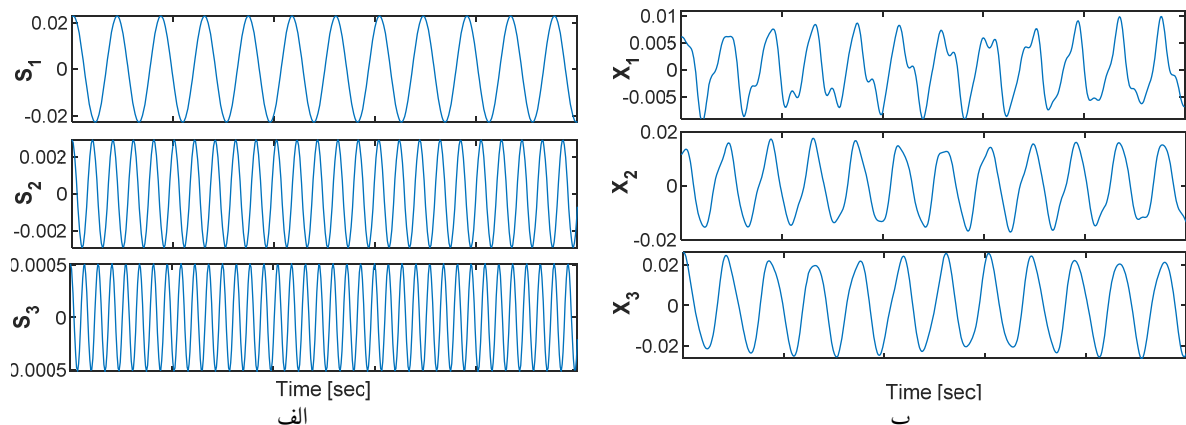
$$S_1 = 0.022408 \times \cos(14.52 \times t) + \left( \frac{0.061213}{14.52} \right) \times \sin(14.52 \times t)$$

$$S_1 = 0.0029216 \times \cos(31.05 \times t) + \left( \frac{0.001437}{31.05} \right) \times \sin(31.05 \times t)$$

$$S_1 = 0.0005133 \times \cos(46.1 \times t) + \left( \frac{0.00022433}{46.1} \right) \times \sin(46.1 \times t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A} \times \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

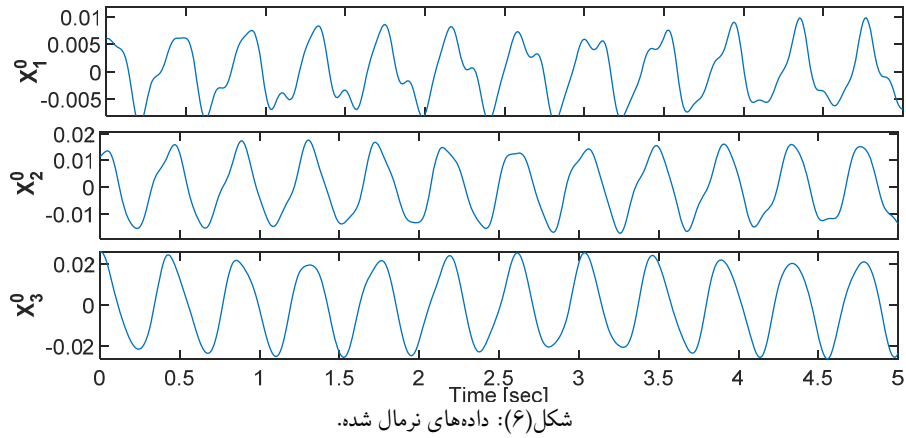
در شکل (۱) سیگنال‌های منبع  $\mathbf{S}$  و پاسخ‌های اندازه‌گیری  $\mathbf{X}$  شده نشان داده شده‌اند. در ادامه با استفاده از روش PCA بر اساس مقادیر ویژه و مقادیر منفرد، مقادیر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{S}$  از روی  $\mathbf{X}$  محاسبه می‌گردد و میزان دقت محاسبات با استفاده از MAC اندازه‌گیری خواهد شد.



شکل (۵): (الف) سیگنال‌های منبع، (ب) سیگنال‌های مختلط شده.

ابتدا مقادیر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{S}$  را با استفاده از روش PCA بر اساس مقادیر ویژه محاسبه می‌کنیم، که نتایج هر یک از مراحل این روش در زیر نشان داده شده.

۱. تعیین داده‌های نرمال شده  $\mathbf{X}^0$  با استفاده از رابطه (۵).



۲. تعیین کواریانس داده‌های نرمال شده طبق رابطه (۷).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2.6553 & 5.2075 & 7.6165 \\ 5.2075 & 11.228 & 16.624 \\ 7.6165 & 16.624 & 26.499 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

۳. محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه کواریانس با استفاده از رابطه (۱۰).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.8089 & 0.5353 & 0.24303 \\ -0.5737 & 0.6287 & 0.525 \\ 0.1282 & -0.5641 & 0.81568 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.6939 & 0 & 0 \\ 0 & 7.4462 & 0 \\ 0 & 0 & 394.68 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

۴. مرتب کردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه.

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0.24303 & 0.5353 & 0.80895 \\ 0.525 & 0.6287 & -0.5737 \\ 0.81568 & -0.5641 & 0.1282 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 394.68 & 0 & 0 \\ 0 & 7.4462 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6939 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

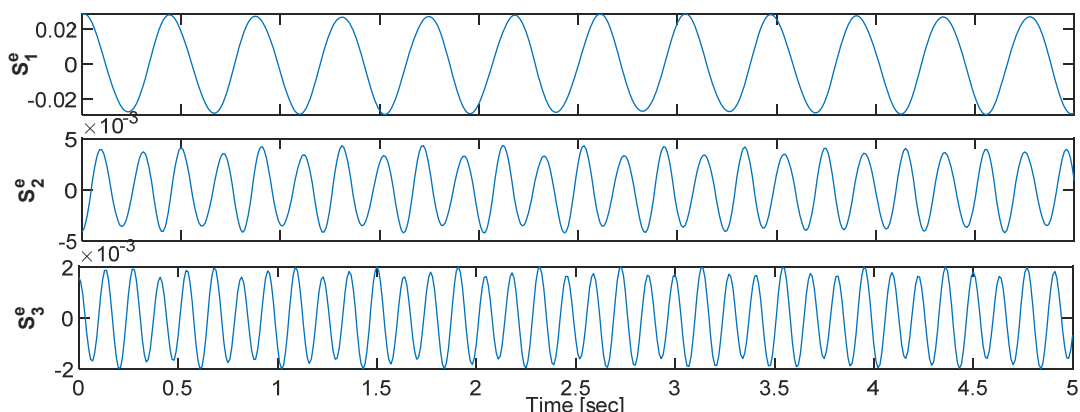
۵. نرمال کردن ماتریس بردارهای ویژه.

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0.2979 & -0.94891 & 6.3082 \\ 0.6436 & -1.1144 & -4.4739 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. مقایسه بردارهای ویژه نرمال شده با ماتریس اشکال مودی A و محاسبه درصد خطا با استفاده از روش MAC.

$$MAC_{PCA(EVD)} = [1 \quad 0.9377 \quad 0.945]$$

۷. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل(۷): داده‌های منبع تخمین زده شده.

محاسبه مقادیر A و S را با استفاده از روش PCA بر اساس مقادیر منفرد که نتایج هریک از مراحل این روش در زیر نشان داده شده.

مراحل ۱ و ۲ این روش با روش قبل مشترک می‌باشد.

۳. محاسبه مقادیر منفرد کواریانس داده‌ها طبق رابطه (۱۴).

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.242 & -0.5339 & -0.8101 \\ -0.5227 & -0.6316 & 0.5725 \\ -0.8174 & 0.562 & -0.1262 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 398.94 & 0 & 0 \\ 0 & 7.4763 & 0 \\ 0 & 0 & 1.69 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.242 & -0.5339 & -0.8101 \\ -0.5227 & -0.6316 & 0.5725 \\ -0.8174 & 0.562 & -0.1262 \end{bmatrix}$$

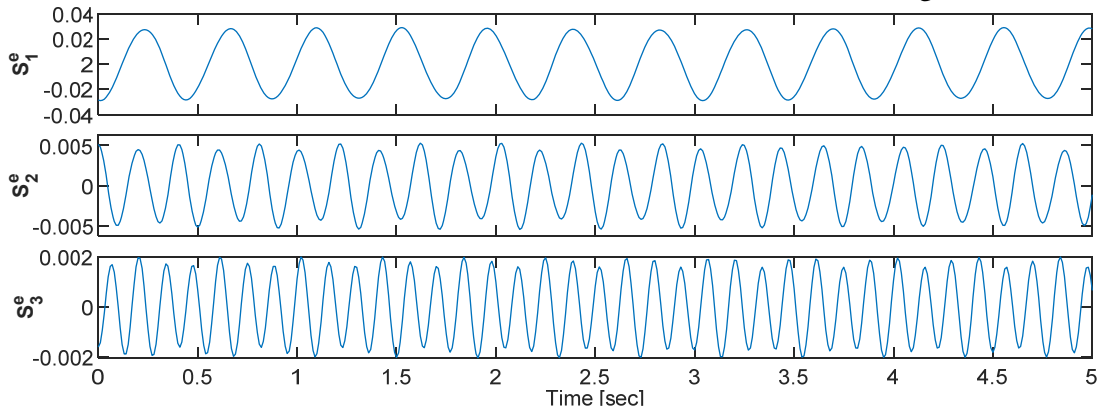
۴. نرمال کردن ماتریس مقادیر منفرد سمت چپ (U).

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.2961 & -0.9499 & 6.417 \\ 0.6395 & -1.1238 & -4.535 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵. مقایسه مقادیر منفرد سمت چپ نرمال شده با ماتریس اشکال مودی A و محاسبه درصد خطا با استفاده از روش MAC.

$$MAC_{PCA(SVD)} = [1 \quad 0.9377 \quad 0.945]$$

۶. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).

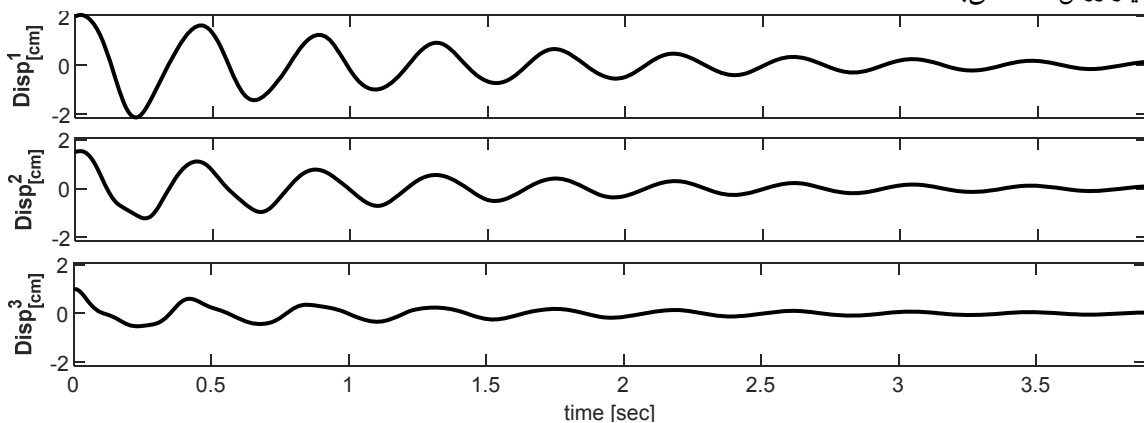


شکل (۸): داده‌های منبع تخمین زده شده.

مثال ۲. در این مثال یک سازه ۳ طبقه که مشخصات آن در زیر ذکر شده در زمان ۴ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای ۱۰۰Hz) تحت ارتعاش آزاد قرار می‌گیرد که با استفاده از جابجایی‌های [0.01 0.015 0.02] و سرعت‌های [0.02 0.04 0.06] در طبقات ۱، ۲ و ۳ ایجاد می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های PCA اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده شده و درصد خطای تخمین این روش‌ها محاسبه می‌گردد. به دلیل تشابه نتایج روش PCA بر اساس مقادیر ویژه و مقادیر منفرد در این مثال فقط PCA بر اساس مقادیر منفرد محاسبه می‌شود.

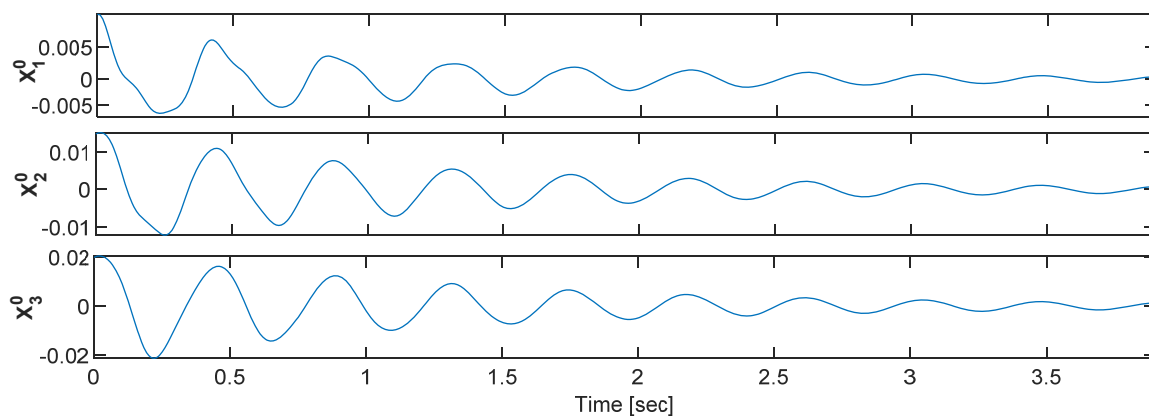
$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \xi = 5\%$$

در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش PCA می‌باشند.



شکل (۹): جابجایی دینامیکی سازه

۱. تعیین داده‌های نرمال شده  $\mathbf{X}^0$  با استفاده از رابطه (۵).



شکل (۱۰): داده‌های نرمال شده.

۲. تعیین کواریانس داده‌های نرمال شده طبق رابطه (۷).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4.7317 & 9.6875 & 14.491 \\ 9.6875 & 20.594 & 31.164 \\ 14.491 & 31.165 & 48.606 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

۳. محاسبه مقادیر منفرد کواریانس داده‌ها طبق رابطه (۱۴).

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.2466 & -0.5885 & -0.7699 \\ -0.5271 & -0.5851 & 0.6162 \\ -0.8132 & 0.5578 & -0.1659 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 73.203 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6281 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \times 10^6$$

نرمال کردن ماتریس مقادیر منفرد سمت چپ (U).

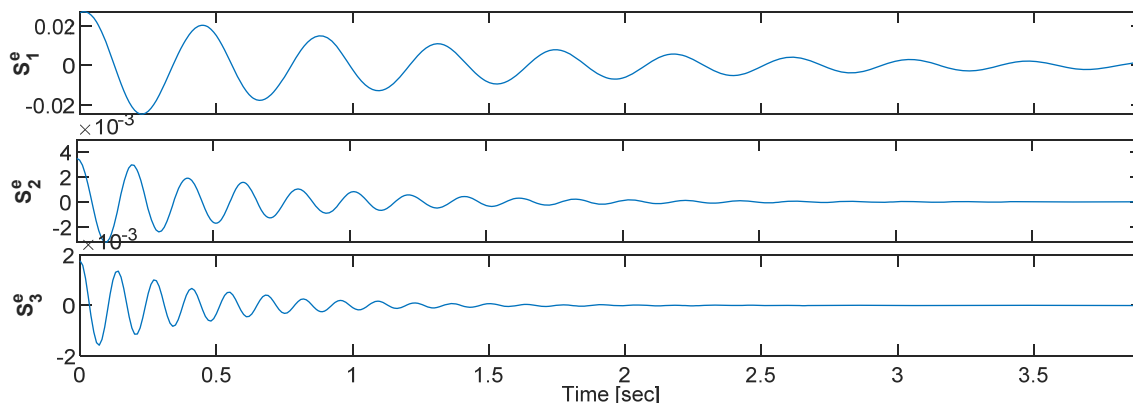
$$\mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} 0.3033 & -1.0551 & 4.6404 \\ 0.64822 & -1.0489 & -3.7143 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵. مقایسه مقادیر منفرد سمت چپ نرمال شده با ماتریس اشکال مدی A و محاسبه درصد خطا با استفاده از روش MAC.

$$MAC_{PCA(SVD)} = [1 \quad 0.942 \quad 0.972]$$

$$MCF_{PCA(SVD)} = [0.995 \quad 0.983 \quad 0.989]$$

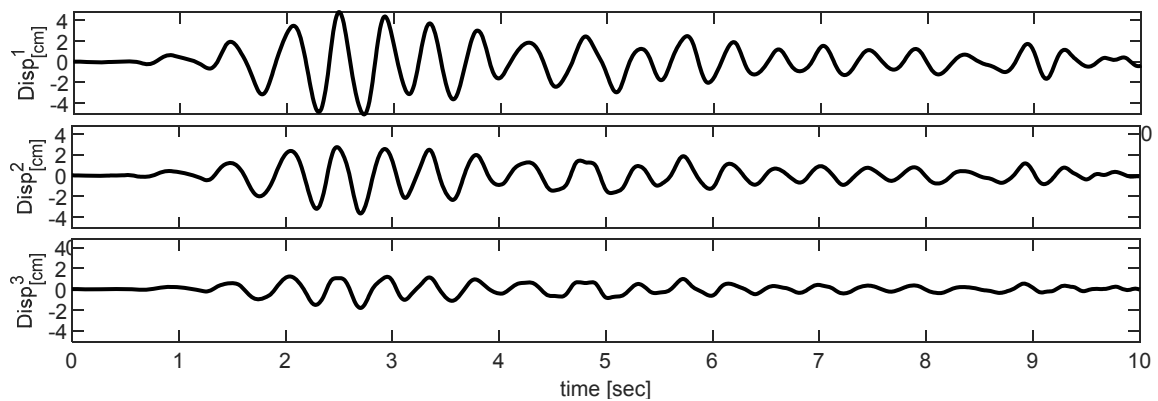
۶. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۱۱): داده‌های منبع تخمین زده شده.

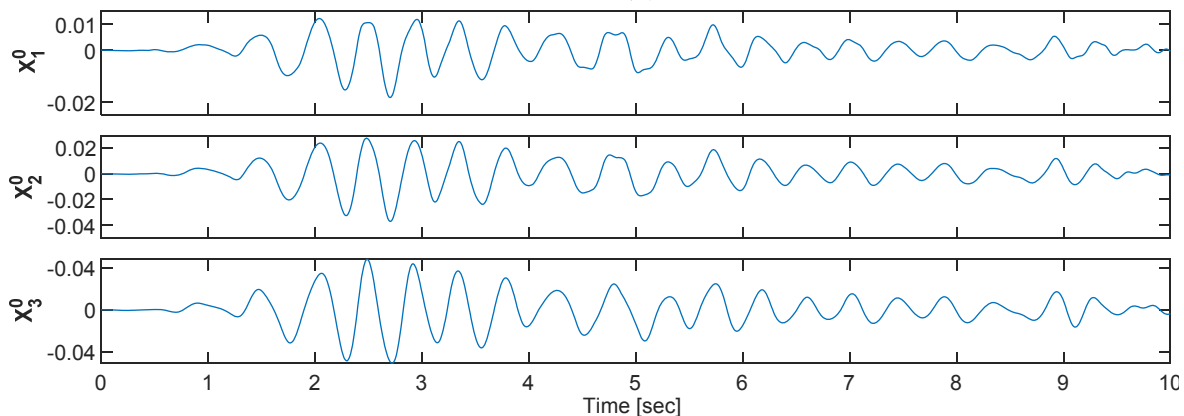
مثال ۳. در این بخش سازه موجود در مثال ۲ به مدت ۱۰ ثانیه تحت اثر زلزله ELcentro قرار می‌گیرد. سپس با استفاده از روش‌های PCA بر مبنای مقادیر منفرد، اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده می‌شود و درصد خطای تخمین محاسبه

می‌گردد. در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت زلزله مورد نظر نشان داده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش PCA می‌باشند.



شکل (۱۲): جابجایی دینامیکی سازه

۱. تعیین داده‌های نرمال شده  $X^0$  با استفاده از رابطه (۵).



شکل (۱۳): داده‌های نرمال شده.

۲. تعیین کواریانس داده‌های نرمال شده طبق رابطه (۷).

$$C = \begin{bmatrix} 6.3998 & 13.275 & 19.754 \\ 13.275 & 27.866 & 41.989 \\ 19.754 & 41.989 & 64.535 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

۳. محاسبه مقادیر منفرد کواریانس داده‌ها طبق رابطه (۱۴).

$$U = V = \begin{bmatrix} -0.25098 & -0.58656 & -0.77 \\ -0.53074 & -0.58188 & 0.61622 \\ -0.80952 & 0.56335 & -0.16527 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 98.188 & 0 & 0 \\ 0 & 0.59612 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0164 \end{bmatrix} \times 10^6$$

۴. نرمال کردن ماتریس مقادیر منفرد سمت چپ (U).

$$U_n = \begin{bmatrix} 0.31 & -1.0412 & 4.6592 \\ 0.65562 & -1.0329 & -3.7286 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵. مقایسه مقادیر منفرد سمت چپ نرمال شده با ماتریس اشکال مدی A و محاسبه درصد خطا با استفاده از روش MAC.

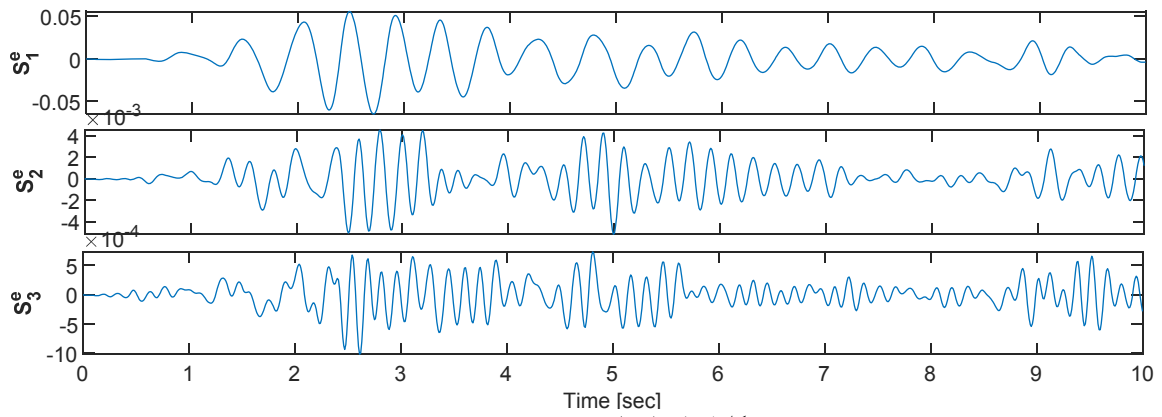
$$MAC_{PCASVD} = [99.99 \quad 93.91 \quad 95.67]$$

$$MACF = [95.094 \quad 96.89 \quad 96.52]$$

$$MAC_{PCA(SVD)} = [1 \quad 0.937 \quad 0.94]$$

$$MCF_{PCA(SVD)} = [0.95 \quad 0.96 \quad 0.90]$$

۶. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۱۴): داده‌های منبع تخمین زده شده.

## ۳. روش شناسای کور درجه دوم (SOBI)

روش شناسایی کور درجه دوم (SOBI)<sup>۱</sup> که در سال ۱۹۹۷ توسط بلوچرانی<sup>۲</sup> و همکاران ارائه شده است، یک فرم گسترش یافته از الگوریتم استخراج چندین سیگنال نامشخص (AMUSE)<sup>۳</sup> می‌باشد. این روش بر اساس مرتبه دوم آماری (واریانس) بوده که از اعمال قطری سازی مشترک (JAD)<sup>۴</sup> بر روی کواریانس داده‌ها برای استخراج مقادیر ویژه و منابع استفاده می‌کند. روش AMUSE در سال ۱۹۹۱ توسط تانگ<sup>۵</sup> و همکاران معرفی شده که می‌تواند سیگنال‌های گوسی را پوشش دهد. این روش از اعمال واریانس بر روی داده‌های مخلوط شده و ارائه تجزیه به مقادیر ویژه ماتریس کواریانس داده‌ها استفاده می‌کند [۵]. روش AMUSE در شرایطی که داده‌ها دارای دو مقدار ویژه مشابه باشد با مشکل مواجه شده و قابلیت تشخیص سیگنال‌های منبع را ندارد. روش SOBI برای غلبه بر این کاستی‌ها ارائه شده است. مراحل این روش مانند مراحل روش AMUSE می‌باشد اما به جای مرحله تجزیه مقادیر ویژه در این روش از قطری سازی مشترک بهره گرفته خواهد شد [۴، ۱۰]. در ادامه ابتدا مراحل روش AMUSE ذکر می‌شود سپس به معرفی روش SOBI پرداخته خواهد شد.

در روش AMUSE پس از نرمال کردن و سفید کردن داده‌ها که در مراحل پیش پردازش ذکر شد، عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_w$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_w$  تعیین می‌گردد، سپس از بردارهای ویژه ماتریس کواریانس داده‌های سفید شده برای تخمین مقدار  $\tilde{\mathbf{A}}$  به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\mathbf{C} = \text{cov}(\mathbf{X}_w) \quad (21)$$

$$\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T = \mathbf{C} \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}_w^{-1}\mathbf{E} \quad (23)$$

در رابطه (۲۳) ماتریس اختلاط  $\tilde{\mathbf{A}}$  با ابعاد  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  پس از نرمال شدن به مقادیر آخرین سطر برابر با ماتریس اشکال مودی سازه می‌باشد. در روش SOBI برای افزایش دقت محاسبه ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  از روش قطری سازی مشترک استفاده می‌شود همچنین برای افزایش سرعت محاسبه روش JAD به جای اعمال بر روی داده‌ها بر روی ماتریس همبستگی داده‌ها اعمال می‌گردد. در زیر ابتدا به معرفی روش‌های JAD و ماتریس همبستگی می‌پردازیم سپس مراحل روش SOBI ذکر می‌شود.

### ۳-۱- قطری کردن ماتریس‌ها :

ماتریس  $\mathbf{Z}$  را می‌توان با استفاده از روش (JAD) قطری کرد این روش با استفاده از زاویه‌های ژاکوبین، ماتریس مورد نظر را چرخانده و این کار موجب می‌شود تا داده‌های روی قطر غیر اصلی به سمت صفر میل کنند. در زیر نحوه اعمال این روش بر روی ماتریس فرضی  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  نشان داده شده است [۱۱، ۱۲].

در این روش سعی می‌شود مقادیر داده‌های که بر روی قطر اصلی قرار ندارند به سمت صفر میل کنند .

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} \\ Z_{ji} & Z_{jj} \end{pmatrix} \quad (24)$$

زاویه‌های ژاکوبی مطابق فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

<sup>۱</sup> Second order blind identification

<sup>۲</sup> Belouchrani

<sup>۳</sup> Algorithm for multiple unknown signals extraction

<sup>۴</sup> Joint diagonalization

<sup>۵</sup> Tong

$$\mathbf{R}_{(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (25)$$

که برای محاسبه مقادیر  $\cos$  و  $\sin$  داریم:

$$\cos = \sqrt{\frac{x+r}{2r}} \quad \sin = \frac{y-zi}{\sqrt{2x(x+r)}} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (26)$$

که برای تعیین مقادیر  $x, y, z$  داریم:

$$\mathbf{G} = \text{real} \left( \sum_{k=1}^K \mathbf{h}^T(\mathbf{Z}_k) \mathbf{h}(\mathbf{Z}_k) \right) \quad (27)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{Z}) = [Z_{ii} - Z_{jj}, \quad Z_{ij} + Z_{ji}, \quad i(Z_{ji} - Z_{ij})] \quad (28)$$

پس از تعیین ماتریس  $\mathbf{G}$ ، مقادیر  $[x, y, z]^T$  برابر هستند با مقادیر بردارهای ویژه متناسب با بزرگترین مقدار ویژه، پس از محاسبه مقادیر  $\cos$  و  $\sin$  مقدار  $\mathbf{R}$  قابل محاسبه است، پس از آن می‌توان با توجه به رابطه زیر مقدار ماتریس  $\mathbf{Z}'$  انتقال یافته را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{R}\mathbf{Z}\mathbf{R}^T \quad (29)$$

محاسبه مقدار  $\mathbf{Z}'$  تا آن که مقادیر غیر قطری این ماتریس تا حد امکان به صفر نزدیک شود ادامه می‌یابد. در شرایط کلی ماتریس  $\mathbf{R}$  با ابعاد  $n \times n$  را ماتریس چرخش<sup>۱</sup> می‌نامند. در زیر مثال‌های برای درک بهتر روش JAD آورده شده است.

مثال ۱: ماتریس  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  به عنوان ورودی روش JAD در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

۱. محاسبه  $\mathbf{h}$  با استفاده از رابطه (۲۸) در این حالت  $i=1, j=2$  می‌باشد.

$$\mathbf{h} = [2-5 \quad -3-3 \quad (-3+3)i]$$

۲. محاسبه  $\mathbf{G}$  با استفاده از رابطه (۲۷).

$$\mathbf{G} = \text{real}(\mathbf{h}^T \times \mathbf{h}) = \text{real} \left( \begin{bmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 18 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

۳. محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $\mathbf{G}$  با استفاده از رابطه (۹).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0.4472 & 0 & 0.8944 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

<sup>۱</sup> Rotation matrix

۴. انتخاب ستونی از بردارهای ویژه که با مقدار ویژه حداکثر متناظر است و برابر قرار دادن آن‌ها با  $[x \ y \ z]^T$ .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۵. محاسبه مقادیر  $\sin$  و  $\cos$  با استفاده از روابط (۲۶) و محاسبه ماتریس چرخش طبق رابطه (۲۵).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \cos = \sqrt{\frac{x+r}{2r}} = 0.8507 \quad \sin = \frac{y-zi}{\sqrt{2r(x+r)}} = 0.5257$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8507 & -0.5257 \\ 0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}$$

۶. محاسبه ماتریس چرخش یافته  $\mathbf{X}'$  طبقه رابطه (۲۹).

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0.1459 & 0 \\ 0 & 6.8541 \end{bmatrix}$$

۷. محاسبه مجدد گام‌های ۱ الی ۵.

$$\mathbf{h} = [0.1459 - 6.8541 \quad 0 \quad 0] \quad \mathbf{G} = \text{real}(\mathbf{h}^T \times \mathbf{h}) = \text{real} \left( \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \cos = 1 \quad \sin = 0 \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به دلیل اینکه مقدار  $x$  به دست آمده منفی می‌باشد کل مقادیر بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه حداکثر را در  $-1$  ضرب می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود مقدار  $\mathbf{R}$  به دست آمده عملاً چرخشی را ایجاد نمی‌کند و احتیاجی به ادامه الگوریتم نمی‌باشد.

مثال ۲: ماتریس  $\mathbf{X}$  با ابعاد  $2 \times 6$  به عنوان ورودی روش JAD در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 8 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

۱. تبدیل ماتریس  $\mathbf{X}$  به ۳ ماتریس با ابعاد و محاسبه  $\mathbf{h}$  برای هر یک از این ماتریس‌ها با استفاده از رابطه (۲۸) در این حالت برای هر ماتریس جدا شده با ابعاد  $2 \times 2$ ،  $i=1, j=2$  می‌باشد.

$$\mathbf{h}_I = [4-5 \quad 1+1 \quad (1-1)i] \quad \mathbf{h}_{II} = [7-8 \quad 3+3 \quad (3-3)i] \quad \mathbf{h}_{III} = [4-9 \quad 2+2 \quad (2-2)i]$$

۲. محاسبه G با استفاده از رابطه (۲۷).

$$\mathbf{G} = \text{real} \left( \sum_{i=1}^3 h_i^T \times h_i \right) = \text{real} \left( \begin{bmatrix} 27 & -28 & 0 \\ -28 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

۳. محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس G با استفاده از رابطه (۹).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -0.85436 & -0.51969 \\ 0 & -0.51969 & 0.85436 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.968 & 0 \\ 0 & 0 & 73.036 \end{bmatrix}$$

۴. انتخاب ستونی از بردارهای ویژه که با مقدار ویژه حداکثر متناظر است و برابر قرار دادن آنها با  $[x \ y \ z]^T$ ، به دلیل اینکه مقدار  $x$  به دست آمده منفی می باشد کل مقادیر بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه حداکثر را در  $-1$  ضرب می کنیم.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} -0.51969 \\ 0.85436 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۵. محاسبه مقادیر  $\sin$  و  $\cos$  با استفاده از روابط (۲۶) و محاسبه ماتریس چرخش طبق رابطه (۲۵).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \cos = \frac{x+r}{2r} = 0.87169 \quad \sin = \frac{y-zi}{\sqrt{2r(x+r)}} = -0.49$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.87169 & -0.49 \\ 0.49 & 0.87169 \end{bmatrix}$$

۶. محاسبه ماتریس چرخش یافته  $\mathbf{X}'$  طبقه رابطه (۲۹) با اعمال این رابطه بر روی هر یک از ماتریس های جدا شده.

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{X}_I\mathbf{R}^T & \mathbf{R}\mathbf{X}_{II}\mathbf{R}^T & \mathbf{R}\mathbf{X}_{III}\mathbf{R}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3858 & 0.092 & 4.6771 & 1.132 & 3.49 & -1.0965 \\ 0.092 & 5.164 & 1.132 & 10.32 & -1.0965 & 9.508 \end{bmatrix}$$

۷. محاسبه مجدد گام های ۱ الی ۵.

$$\mathbf{h}_I = [-2.2284 \quad 0.1851 \quad 0] \quad \mathbf{h}_{II} = [-5.6458 \quad 2.2638 \quad 0] \quad \mathbf{h}_{III} = [-6.016 \quad -2.193 \quad 0]$$

$$\mathbf{G} = \text{real} \left( \sum_{i=1}^3 h_i^T \times h_i \right) = \text{real} \begin{bmatrix} 73.03 & 0 & 0 \\ 0 & 9.968 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.968 & 0 \\ 0 & 0 & 73.01 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \cos = 1 \quad \sin = 0 \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود مقدار  $\mathbf{R}$  به دست آمده عملاً چرخشی را ایجاد نمی کند و احتیاجی به ادامه الگوریتم نمی باشد.

مثال ۳: ماتریس  $\mathbf{X}$  با ابعاد  $3 \times 9$  به عنوان ورودی روش JAD در نظر گرفته می شود.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 10 & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 5 & 7 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 10 & 2 & 6 & 8 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

۱. تبدیل ماتریس  $\mathbf{X}$  با ابعاد  $3 \times 9$  با ابعاد  $3 \times 3$  و محاسبه  $\mathbf{h}$  برای هریک از این ماتریس ها با استفاده از رابطه (۲۸) به صورت کلی برای هر ماتریس جدا شده با ابعاد  $n \times n$  مقادیر  $i, j$  طبق رابطه زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{matrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots & (1,n) \\ (2,3) & (2,4) & \dots & \dots & (2,n) \\ & & & \dots & \vdots \\ & & & & (n-1,n) \end{matrix} \quad (30)$$

در رابطه (۳۰)،  $n$  نشان دهنده بعد ماتریس مورد نظر می باشد که در این مثال  $n = 3$  است و مقادیر  $i, j$  به صورت زیر انتخاب می شود.

$$\begin{matrix} (1,2) & (1,3) \\ (2,3) \end{matrix}$$

در گام اول مقادیر (1,2) در نظر گرفته می شود به این معنا است که برای محاسبه ماتریس چرخش قسمت های زیر از ماتریس  $\mathbf{X}$  در نظر گرفته می شود.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 10 & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 5 & 7 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 10 & 2 & 6 & 8 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$i = 1, j = 2 \quad \mathbf{h}_I = [3-4 \quad 5+2 \quad (2-5)i] \quad \mathbf{h}_{II} = [10-5 \quad 3+5 \quad (5-3)i]$$

$$\mathbf{h}_{III} = [3-5 \quad 4+2 \quad (2-4)i]$$

۲. محاسبه  $\mathbf{G}$  با استفاده از رابطه (۲۷) و محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $\mathbf{G}$  با استفاده از رابطه (۹).

$$\mathbf{G} = \text{real} \left( \sum_{i=1}^3 h_i^T \times h_i \right) = \text{real} \begin{pmatrix} 30 & 21 & 0 \\ 21 & 149 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.9856 & 0.1688 \\ 0 & 0.1688 & 0.9856 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 26.403 & 0 \\ 0 & 0 & 152.6 \end{bmatrix}$$

۳. انتخاب ستونی از بردارهای ویژه که با مقدار ویژه حداکثر متناظر است و برابر قرار دادن آنها با  $[x \ y \ z]^T$ .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1688 \\ 0.9856 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۴. محاسبه مقادیر  $\sin$  و  $\cos$  با استفاده از روابط (۲۶) و محاسبه ماتریس چرخش طبق رابطه (۲۵).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \cos = \frac{x+r}{2r} = 0.7447 \quad \sin = \frac{y-zi}{\sqrt{2r(x+r)}} = 0.6446$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 \\ -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7447 & -0.64466 & 0 \\ 0.64466 & 0.7447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. محاسبه ماتریس چرخش یافته  $\mathbf{X}'$  طبقه رابطه (۲۹) با اعمال این رابطه بر روی هر یک از ماتریس‌های جدا شده.

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{RX}_I \mathbf{R}^T & \mathbf{RX}_{II} \mathbf{R}^T & \mathbf{RX}_{III} \mathbf{R}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 6.8653 & 2.5873 & 5.1117 & 11.865 & -2.788 & 6.806 & 6.7881 & 2.4921 & 2.6984 \\ -0.4162 & 0.13466 & -1.6943 & -0.7887 & 3.1353 & 3.4173 & 0.49215 & 1.2119 & 1.6488 \\ 8.74 & 5.7107 & 10 & 5.3969 & 3.2975 & 8 & 6.1614 & 2.6529 & 9 \end{bmatrix}$$

۸. محاسبه مجدد گام‌های ۱ الی ۵ با در نظر گرفته  $i=1, j=3$  که برای محاسبه ماتریس چرخش قسمت‌های زیر از ماتریس  $\mathbf{X}$  در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 6.8653 & 2.5873 & 5.1117 & 11.865 & -2.788 & 6.806 & 6.7881 & 2.4921 & 2.6984 \\ -0.4162 & 0.13466 & -1.6943 & -0.7887 & 3.1353 & 3.4173 & 0.49215 & 1.2119 & 1.6488 \\ 8.74 & 5.7107 & 10 & 5.3969 & 3.2975 & 8 & 6.1614 & 2.6529 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_I = [-3.1357 \ 13.852 \ 3.6283i] \quad \mathbf{h}_{II} = [3.8647 \ 12.203 \ 1.4091i]$$

$$\mathbf{h}_{III} = [-2.2119 \ 8.8595 \ 3.4629i]$$

$$\mathbf{G} = \text{real} \left( \sum_{i=1}^3 h_i^T \times h_i \right) = \text{real} \begin{pmatrix} 29.654 & -15.857 & 0 \\ -15.857 & 419.28 & 0 \\ 0 & 0 & 27.142 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -0.99918 & -0.0406 \\ 0 & -0.0406 & 0.99918 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 27.142 & 0 & 0 \\ 0 & 29.01 & 0 \\ 0 & 0 & 419.92 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} -0.0406 \\ 0.99918 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \cos = 0.72132 \quad \sin = -0.6926$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos & 0 & -\sin \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin & 0 & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72132 & 0 & -0.6926 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6926 & 0 & 0.72132 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'' = [\mathbf{R}\mathbf{X}'_I \mathbf{R}^T \quad \mathbf{R}\mathbf{X}''_{II} \mathbf{R}^T \quad \mathbf{R}\mathbf{X}''_{III} \mathbf{R}^T]$$

$$\mathbf{X}'' = \begin{bmatrix} 1.4489 & -2.0196 & -3.099 & -3.9144 & -4.2955 & 2.883 & 3.4229 & -0.039752 & -2.6566 \\ 0.8732 & 0.13466 & -1.5105 & -2.9558 & 3.1353 & 1.9187 & -7.8694 & 1.2119 & 1.5303 \\ 0.5293 & 5.9088 & 15.416 & 1.4739 & 0.44704 & 15.95 & 0.8067 & 3.6396 & 12.365 \end{bmatrix}$$

۹. محاسبه مجدد گام‌های ۱ الی ۵ با در نظر گرفتن  $i = 2, j = 3$  که برای محاسبه ماتریس چرخش قسمت‌های زیر از ماتریس X در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{X}'' = \begin{bmatrix} 1.4489 & -2.0196 & -3.099 & -3.9144 & -4.2955 & 2.883 & 3.4229 & -0.0397 & -2.6566 \\ 0.8732 & 0.13466 & -1.5105 & -2.9558 & 3.1353 & 1.9187 & -7.8694 & 1.2119 & 1.5303 \\ 0.5293 & 5.9088 & 15.416 & 1.4739 & 0.44704 & 15.95 & 0.8057 & 3.6396 & 12.365 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_I = [-15.282 \quad 4.3983 \quad 7.419i] \quad \mathbf{h}_{II} = [-12.815 \quad 2.3657 \quad 1.4716i]$$

$$\mathbf{h}_{III} = [-11.153 \quad 5.1698 \quad 2.1095i]$$

$$\mathbf{G} = \text{real} \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{h}_i^T \times \mathbf{h}_i \right) = \text{real} \left( \begin{bmatrix} 522.15 & -155.19 & 0 \\ -155.19 & 51.668 & 0 \\ 0 & 0 & 61.661 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -0.287 & 0 & -0.9578 \\ -0.9578 & 0 & 0.287 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5.089 & 0 & 0 \\ 0 & 61.661 & 0 \\ 0 & 0 & 568.73 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} -0.9578 \\ 0.287 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \cos = 0.98939 \quad \sin = -0.14528$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98939 & 0.14528 \\ 0 & 0.14528 & 0.98939 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}''' = [\mathbf{R}\mathbf{X}''_I \mathbf{R}^T \quad \mathbf{R}\mathbf{X}''_{II} \mathbf{R}^T \quad \mathbf{R}\mathbf{X}''_{III} \mathbf{R}^T]$$

$$\mathbf{X}'' = \begin{bmatrix} 1.4489 & -1.6192 & -3.37 & -3.9144 & -4.6687 & 2.2284 & 3.4229 & 0.3466 & -2.634 \\ 0.7871 & -0.175 & -3.7998 & -3.1188 & 3.0658 & 0.02878 & -0.8957 & 0.704 & -0.182 \\ 0.6505 & 3.6194 & 15.726 & 1.0317 & -1.4448 & 16.02 & 0.6834 & 1.927 & 12.873 \end{bmatrix}$$

۹. این روند تا حدی تکرار می‌شود که عملاً ماتریس چرخش R تاثیری بر روی داده‌ها نداشته باشد که پس از ۳ بار تکرار این

روند مقادیر R برابر با  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  شده و تکرار روند متوقف می‌شود و ماتریس نهایی  $\mathbf{X}$  به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1.1388 & -0.3609 & 0.37 & 7.5281 & -1.0398 & 2.002 & 2.495 & 1.96 & -1.559 \\ 1.7347 & 0.0648 & -4.973 & 0.5761 & -0.4045 & 1.6066 & 0.599 & 1.554 & -1.7295 \\ -1.3279 & 3.3775 & 15.796 & 2.011 & -0.2343 & 15.876 & -0.353 & 1.971 & 12.951 \end{bmatrix}$$

### ۳-۲- ماتریس همبستگی :

برای بهتر کردن نتایج حاصل از روش SOBI می‌توان روش قطری کردن مشترک را به جای اعمال بر روی کواریانس داده‌های متمرکز و سفید شده بر روی ماتریس همبستگی داده‌های متمرکز و سفید شده اعمال کرد. که ماتریس همبستگی داده‌ها  $\mathbf{X}_W$  را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد.

$$\text{corr}(\mathbf{X}_W) = [\mathbf{Cr}_1, \dots, \mathbf{Cr}_j] \quad j = 1, \dots, p < n - 1 \quad (31)$$

$$\mathbf{Cr}_j = \frac{[\vec{\mathbf{X}}_W^j]^T [\overleftarrow{\mathbf{X}}_W^j]}{n - j} \quad (32)$$

در رابطه (۳۱) ماتریس  $\text{corr}(\mathbf{X}_W)$  با ابعاد  $n \times (p \times n)$  نشان دهنده ماتریس همبستگی داده‌ها و همچنین در رابطه (۳۲)،  $\vec{\mathbf{X}}_W^j$  دارای ابعاد  $(j : m) \times n$  و  $\overleftarrow{\mathbf{X}}_W^j$  دارای ابعاد  $(1 : m - j) \times n$  می‌باشند. برای اعمال روش SOBI همانند روش AMUSE پس از نرمال و سفید شدن داده‌ها عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  محاسبه خواهند شد، سپس ماتریس همبستگی داده‌ها  $\mathbf{X}_W$  مشخص و با استفاده از الگوریتم JAD مقادیر ماتریس چرخش  $\mathbf{R}$  برای این داده‌ها محاسبه می‌گردد و در نهایت ماتریس تخمینی اختلاط  $\tilde{\mathbf{A}}$  با ابعاد  $n \times n$  به صورت زیر به محاسبه خواهد شد.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}_W^{-1} \mathbf{R} \quad (33)$$

برای محاسبه داده‌های منبع (پاسخ‌های مودال) از رابطه زیر استفاده می‌شود. کد متلب روش SOBI در بخش ۸-۲ آورده شده.

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \mathbf{X}_W \quad (34)$$

مراحل روش SOBI به صورت خلاصه در زیر آورده شده است.

۱. محاسبه داده‌های نرمال شده  $\mathbf{X}^0$ .
۲. محاسبه داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$ .
۳. محاسبه ماتریس همبستگی داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$ .
۴. اعمال الگوریتم JAD بر روی ماتریس همبستگی و تعیین مقادیر  $\mathbf{R}$ .
۵. محاسبه ماتریس اختلاط تخمینی  $\tilde{\mathbf{A}}$  با استفاده از رابطه (۳۳).
۶. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مدی سازه.

### ۳-۳- بررسی عددی روش SOBI:

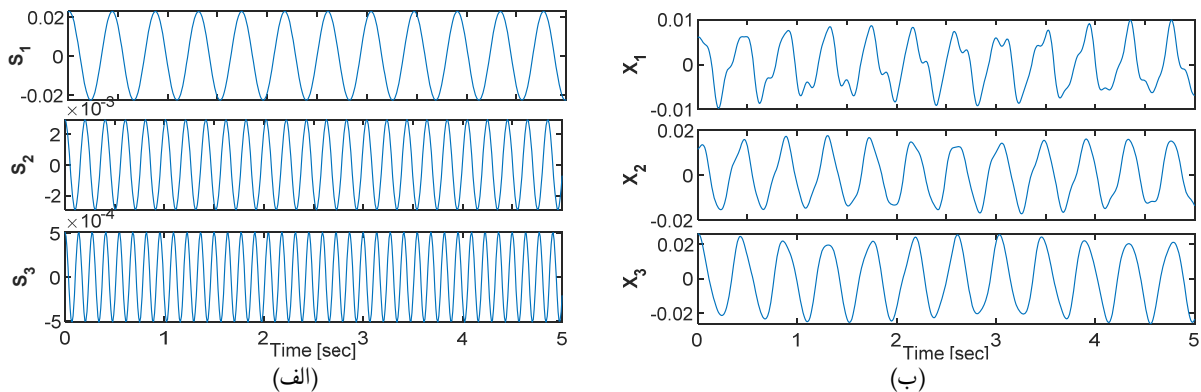
مثال ۱. در این مثال ۳ موج با فرکانس‌های مختلف به مدت ۵ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای 100Hz) به عنوان سیگنال‌های منبع در نظر گرفته می‌شوند که با استفاده از ماتریس اختلاط A به X تبدیل می‌گردند، حال با استفاده از مقادیر X و استفاده از روش SOBI مقادیر سیگنال‌های منبع و ماتریس A محاسبه می‌گردد و میزان دقت محاسبات با استفاده از MAC اندازه‌گیری می‌شود. مقادیر سیگنال‌های منبع که با S نشان داده شده‌است به صورت زیر می‌باشد.

$$S_1 = 0.022408 \times \cos(14.52 \times t) + \left( \frac{0.016213}{14.52} \right) \times \sin(14.52 \times t)$$

$$S_2 = 0.0029216 \times \cos(31.05 \times t) + \left( \frac{0.001437}{31.05} \right) \times \sin(31.05 \times t)$$

$$S_3 = 0.00051333 \times \cos(46.1 \times t) + \left( \frac{0.00022433}{46.1} \right) \times \sin(46.1 \times t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A} \times \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$



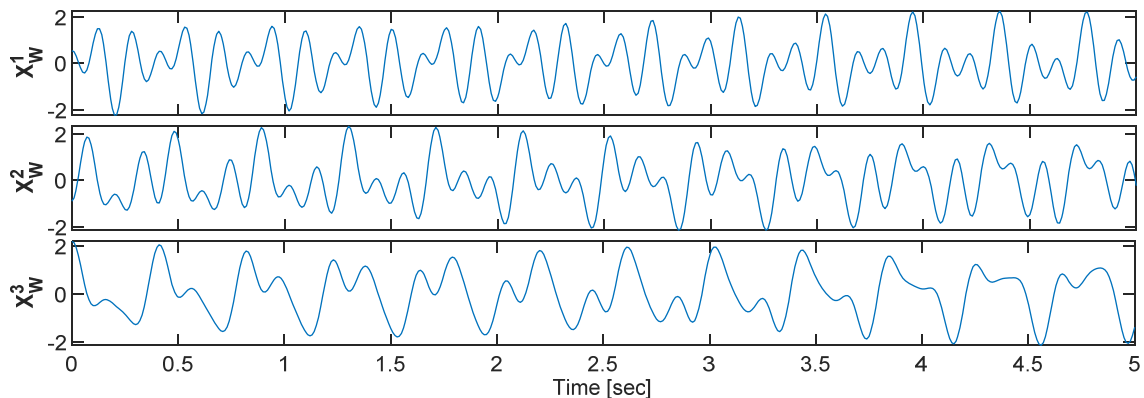
شکل (۱۵): الف) سیگنال‌های منبع، ب) سیگنال‌های مختلط شده.

نتایج هر یک از مراحل روش SOBI در زیر آورده شده است.

۱. محاسبه داده‌های نرمال شد  $\mathbf{X}^0$ .

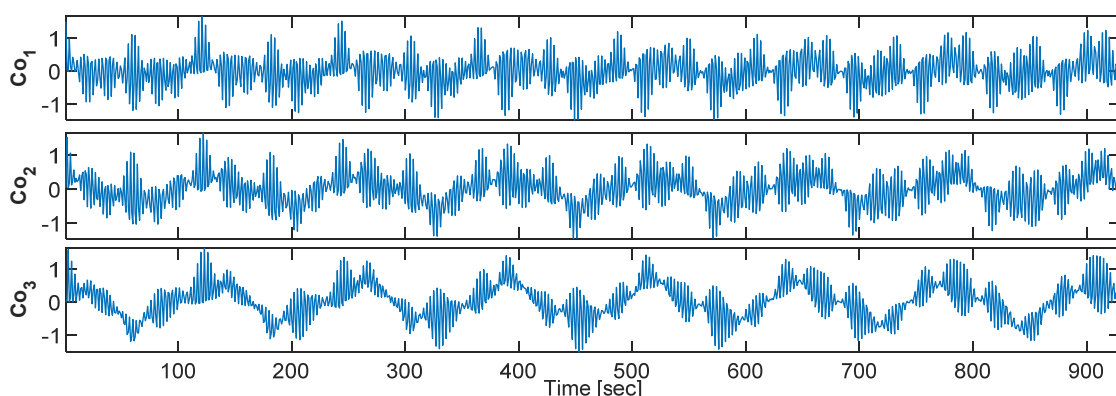
۲. محاسبه عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  طبقه رابطه (۱۱).

$$\mathbf{W}_W = \begin{bmatrix} 610.79 & -226.85 & -20.97 \\ -226.85 & 411.62 & -164.94 \\ -20.977 & -164.94 & 162.75 \end{bmatrix}$$



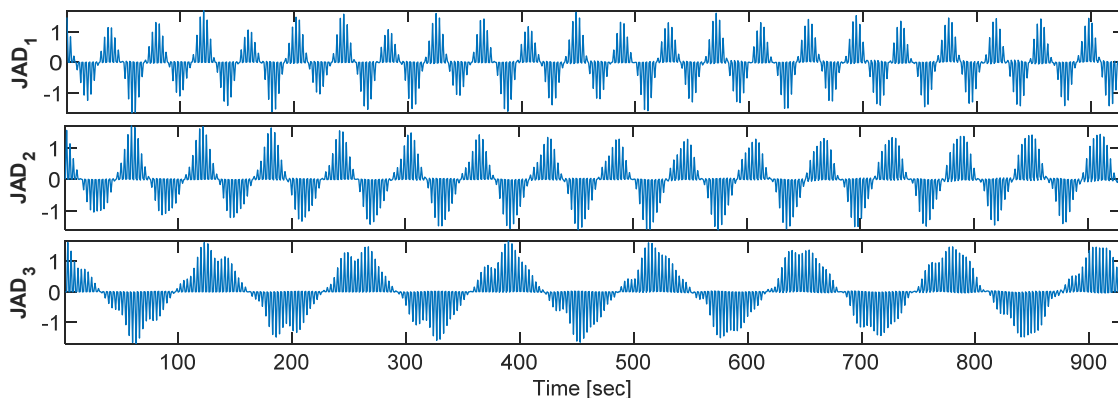
شکل (۱۶): داده‌های سفید شده.

۳. محاسبه ماتریس همبستگی داده‌های سفید شده طبق رابطه‌های (۳۰) و (۳۱).



شکل (۱۷): ماتریس همبستگی داده‌ها.

۴. اعمال الگوریتم JAD بر روی ماتریس همبستگی طبق رابطه‌های (۲۵) الی (۲۸) و تعیین مقادیر داده‌های قطری شده و ماتریس چرخش R.



شکل (۱۸): ماتریس همبستگی قطری شده.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.74334 & 0.61513 & 0.26279 \\ -0.64061 & 0.54159 & 0.54433 \\ 0.19251 & -0.57297 & 0.79665 \end{bmatrix}$$

۵. محاسبه ماتریس اختلاط تخمینی با استفاده از رابطه (۳۳).

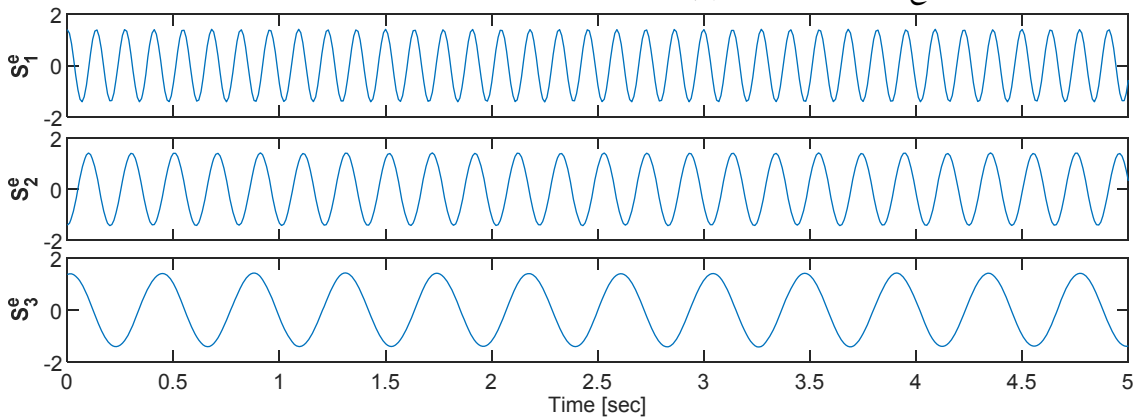
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}_W^{-1} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.74334 & 0.61513 & 0.26279 \\ -0.64061 & 0.54159 & 0.54433 \\ 0.19251 & -0.57297 & 0.79665 \end{bmatrix} \times 10^3$$

۶. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مدی ساز و محاسبه خطای تخمین با استفاده از MAC.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} 0.30208 & -0.68578 & 2.446 \\ 0.6491 & -0.61812 & -2.5429 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC_{SOBI} = [1 \quad 0.99 \quad 1]$$

۷. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).

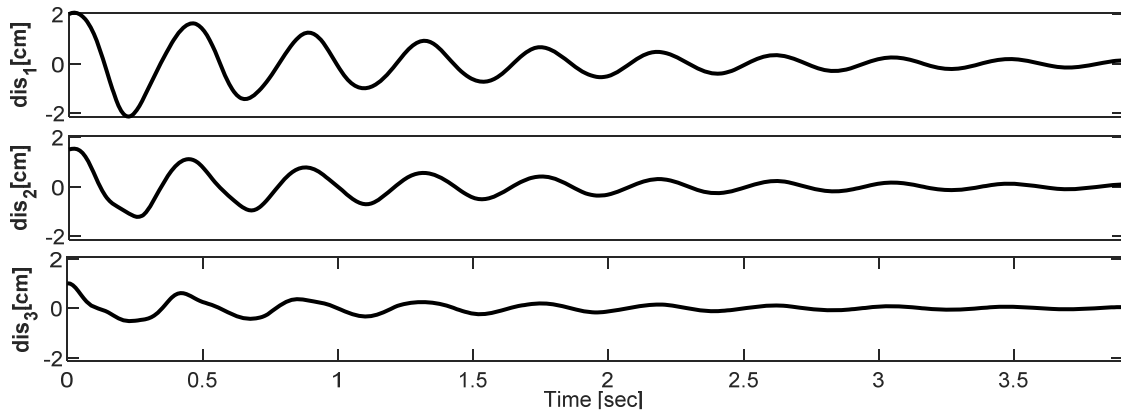


شکل (۱۹): داده‌های منبع تخمین زده شده.

مثال ۲. در این مثال یک سازه ۳ طبقه که مشخصات آن در زیر ذکر شده در زمان ۴ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای ۱۰۰Hz) تحت ارتعاش آزاد قرار می‌گیرد که با استفاده از جابجایی‌های  $[0.01 \quad 0.015 \quad 0.02]$  و سرعت‌های  $[0.02 \quad 0.04 \quad 0.06]$  در طبقات ۱، ۲ و ۳ ایجاد می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های SOBI اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده شده و درصد خطای تخمین این روش‌ها محاسبه می‌گردد.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \zeta = 5\%$$

در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش SOBI می‌باشند.

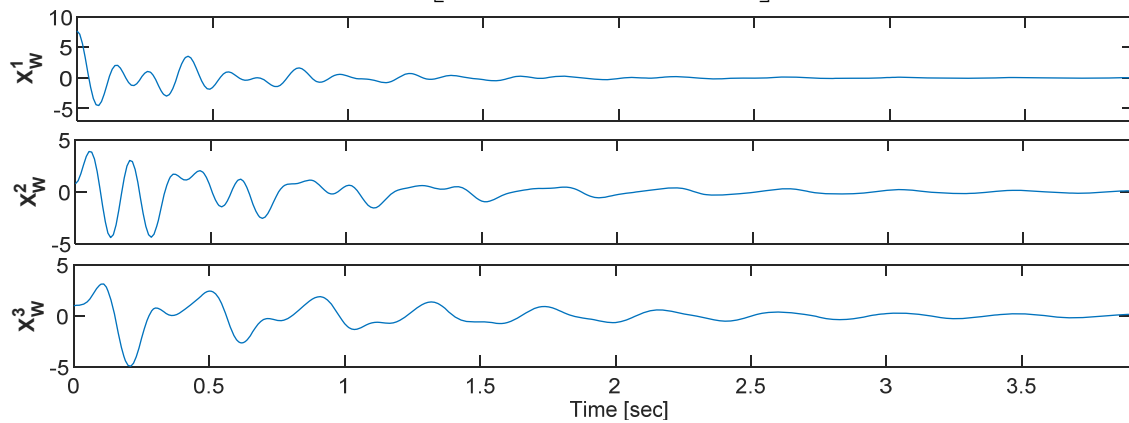


شکل (۲۰): جابجایی دینامیکی سازه

۱. محاسبه داده‌های نرمال شد  $X^0$ .

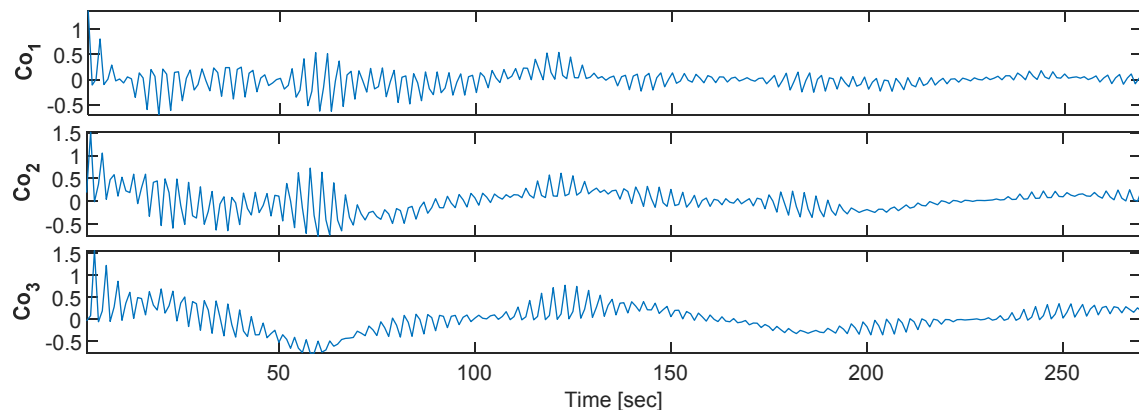
۲. محاسبه عامل سفید کننده  $W_W$  و داده‌های سفید شده  $X_W$  طبقه رابطه (۱۱).

$$W_W = \begin{bmatrix} 2314.7 & -1047.4 & 12.243 \\ -1047.4 & 1662.9 & -684.4 \\ 12.243 & -684.4 & 556.81 \end{bmatrix}$$



شکل (۱۷): داده‌های سفید شده.

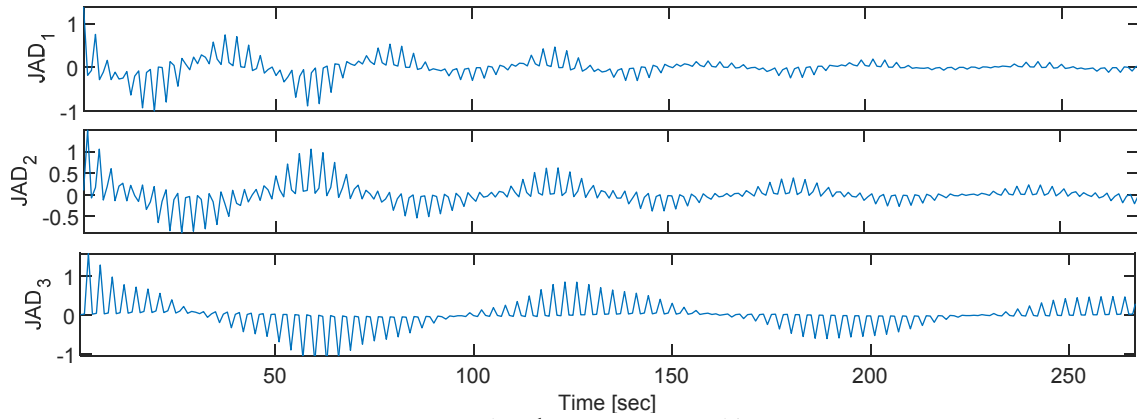
۳. محاسبه ماتریس همبستگی داده‌های سفید شده طبق رابطه‌های (۳۰) و (۳۱).



شکل (۲۱): ماتریس همبستگی داده‌ها.

۴. اعمال الگوریتم JAD بر روی ماتریس همبستگی طبق رابطه‌های (۲۵) الی (۲۸) و تعیین مقادیر داده‌های قطری شده و

ماتریسی چرخش R.



شکل (۲۲): ماتریس همبستگی قطری شده.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.76977 & 0.59362 & 0.23468 \\ -0.61133 & 0.5798 & 0.53862 \\ 0.18367 & -0.5581 & 0.80921 \end{bmatrix}$$

۵. محاسبه ماتریس اختلاط تخمینی با استفاده از رابطه (۳۳).

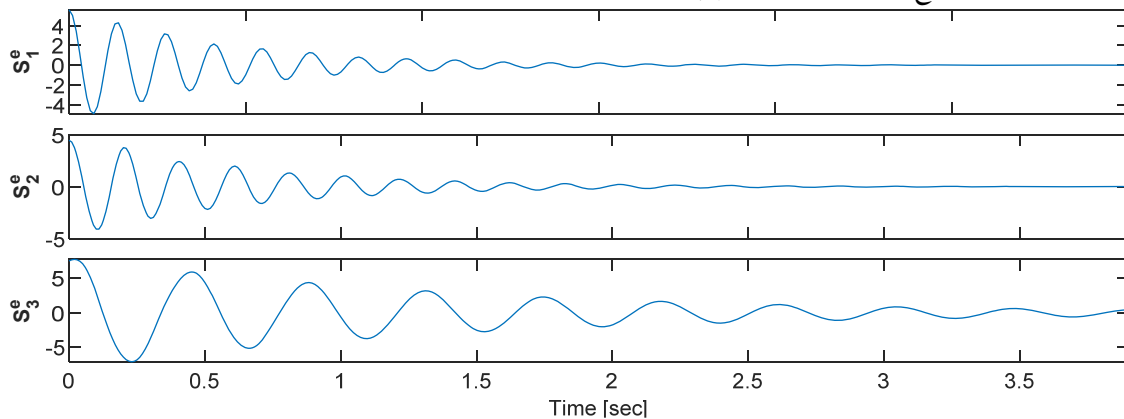
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}_W^{-1} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.27649 & 0.46448 & 2.107 \\ -0.12187 & 0.4544 & 4.5136 \\ 0.17399 & -0.454 & 6.9548 \end{bmatrix} \times 10^3$$

۶. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مودی ساز و محاسبه خطای تخمین با استفاده از MAC.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} 0.30296 & -1.0231 & 1.589 \\ 0.64899 & -1 & -0.7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

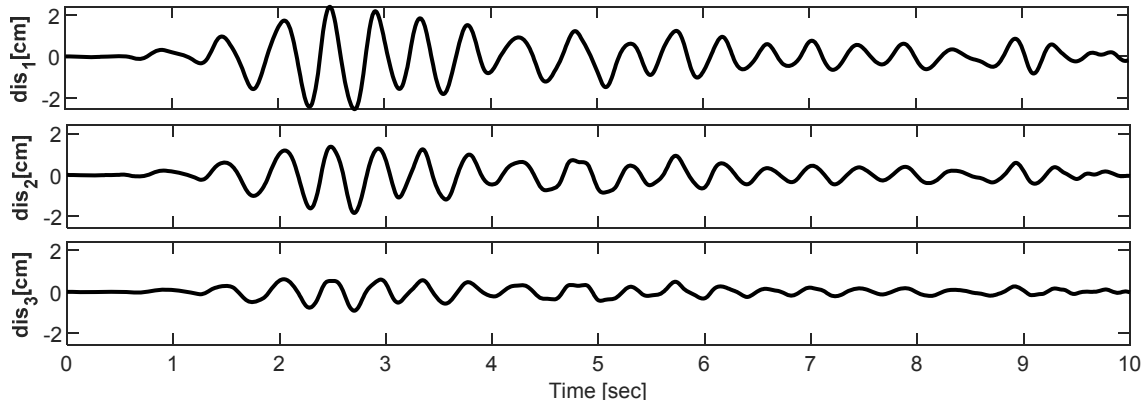
$$MAC_{SOBI} = [1 \quad 0.95 \quad 0.82]$$

۷. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۲۴): داده‌های منبع تخمین زده شده.

مثال ۳. در این بخش سازه موجود در مثال ۲ به مدت ۱۰ ثانیه تحت اثر زلزله ELcentro قرار می‌گیریم. سپس با استفاده از روش‌های SOBI، اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده می‌شود و درصد خطای تخمین محاسبه می‌گردد. در شکل زیر جایجای‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جایجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش SOBI می‌باشند.

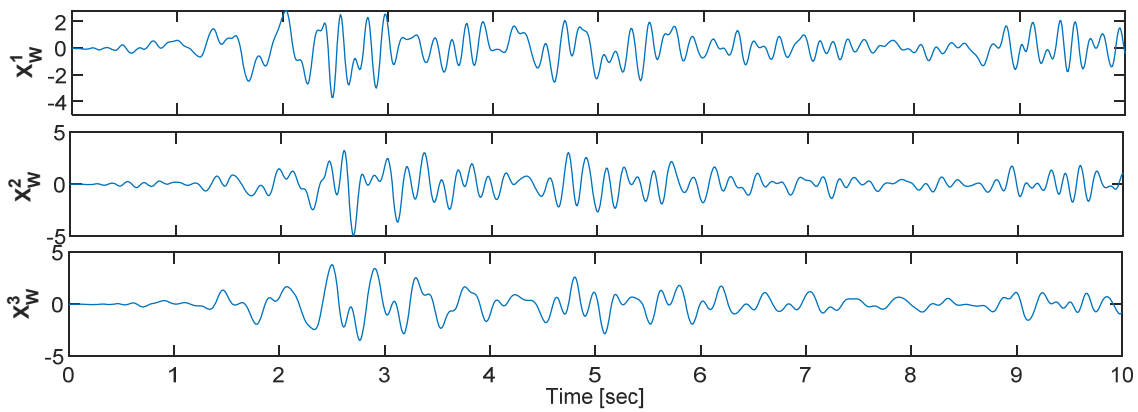


شکل (۲۵): جابجایی دینامیکی سازه

۱. محاسبه داده‌های نرمال شد  $\mathbf{X}^0$ .

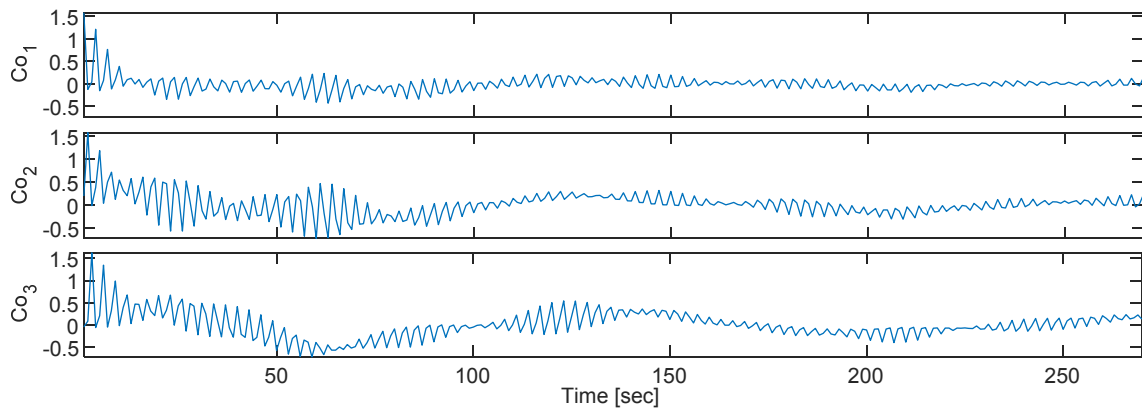
۲. محاسبه عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  طبقه رابطه (۱۱).

$$\mathbf{W}_W = \begin{bmatrix} 5084.1 & -3251.4 & 586.7 \\ -3251.4 & 3433.4 & -1176.8 \\ 586.7 & -1176.8 & 690.55 \end{bmatrix}$$



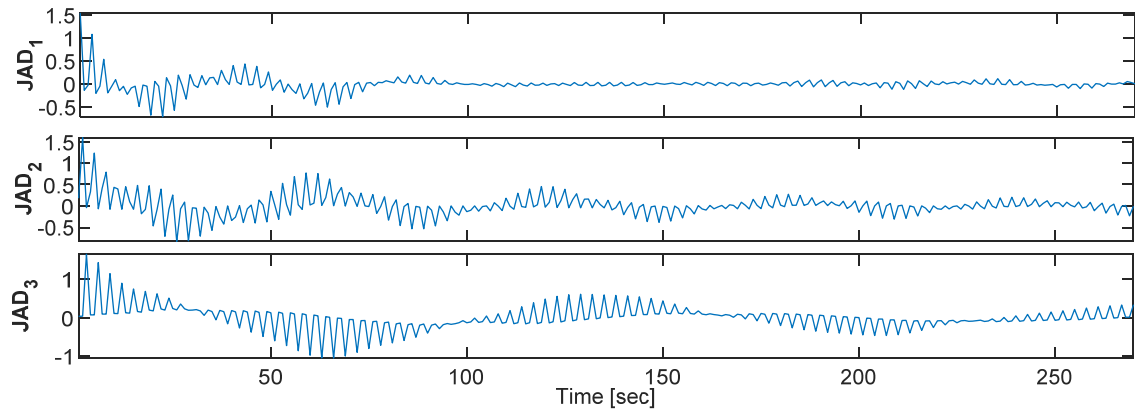
شکل (۲۶): داده‌های سفید شده.

۳. محاسبه ماتریس همبستگی داده‌های سفید شده طبق رابطه‌های (۳۰) و (۳۱).



شکل (۲۷): ماتریس همبستگی داده‌ها.

۴. اعمال الگوریتم JAD بر روی ماتریس همبستگی طبق رابطه‌های (۲۵) الی (۲۸) و تعیین مقادیر داده‌های قطری شده و ماتریسی چرخش R.



شکل (۲۸): ماتریس همبستگی قطری شده.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.76639 & 0.58319 & 0.26932 \\ -0.62282 & 0.57197 & 0.5338 \\ 0.15726 & -0.57684 & 0.80158 \end{bmatrix}$$

۵. محاسبه ماتریس اختلاط تخمینی با استفاده از رابطه (۳۳).

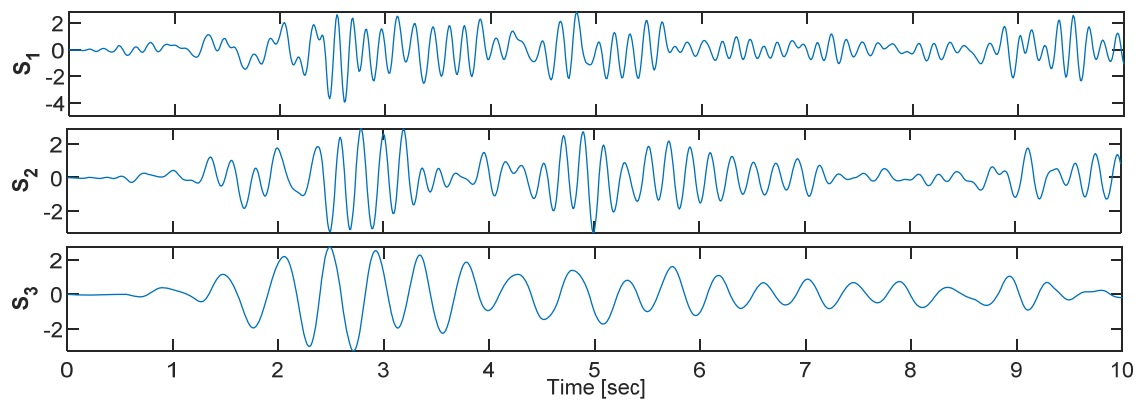
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}_W^{-1} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.0708 & 0.4105 & 2.4952 \\ -0.13686 & 0.35954 & 5.2658 \\ -0.065644 & -0.57146 & 8.0127 \end{bmatrix} \times 10^3$$

۶. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مدی ساز و محاسبه خطای تخمین با استفاده از MAC.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} 0.31141 & -0.71849 & -1.0784 \\ 0.65706 & -0.62917 & 2.085 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC_{SOBI} = [1 \quad 0.99 \quad 0.55]$$

۷. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۲۹): داده‌های منبع تخمین زده شده.

## ۴. تجزیه و تحلیل مولفه‌های مستقل (ICA)

تجزیه و تحلیل مولفه‌های مستقل (ICA)<sup>۱</sup> توسط هایوارینن و اوجا<sup>۲</sup> در سال ۲۰۰۰ به صورتی منسجم در حوضه مهندسی سازه معرفی شد، این روش از درجات بالاتر آماری نسبت به روش‌های قبلی ذکر شده مانند SOBI استفاده می‌کند [۱۳]. ICA فرض ساده و کلی را در نظر می‌گیرد، اگر سیگنال‌ها از فرآیندهای فیزیکی مختلفی باشند می‌توان آن‌ها را از نظر آماری مستقل در نظر گرفت. حال با در نظر گرفتن معکوس این فرض می‌توان در نظر گرفت که سیگنال‌های مستقل استخراج شده توسط ICA بیانی از فرآیند فیزیکی مرتبط هستند. پس اگر فرض استقلال آماری داده‌ها صحیح باشد، هر یک از این سیگنال‌های استخراجی توسط ICA باید توسط یک فرآیند فیزیکی مختلف تولید شده باشد. در ICA فرض می‌شود که سیگنال‌های منبع دارای یک پراکندگی غیرگوسی می‌باشند و همچنین خود این منابع نیز از هم مستقل هستند. در ICA سعی می‌شود که ماتریس  $W$  که عکس ماتریس اختلاط است تخمین زده می‌شود، در این حالت با معکوس کردن این ماتریس می‌توان ماتریس اختلاط را مشخص و منابع را بدست آورد، برای سیگنال‌های منبع توابع هزینه‌ای<sup>۳</sup> در نظر گرفته می‌شود که ماتریس  $W$  باید مقادیر این توابع هزینه را حداکثر یا حداقل کند. برای محاسبه این توابع هزینه از اندازه‌گیری‌های آماری مانند درجه اوج نمودار آماری<sup>۴</sup> که مرتبه چهارم آماری است، استفاده می‌گردد. برای این توابع هزینه مقادیر مختلفی ارائه شده است که می‌توان آن‌ها را به دو گروه تقسیم کرد.

الف- به حداقل رساندن اطلاعات متقابل.

ب- حداکثر کردن توزیع غیرگوسی داده‌ها.

برای به حداقل رساندن اطلاعات متقابل (MMI) می‌توان از اندازه‌گیری‌های مانند واگرایی کولبک-لیبلر<sup>۵</sup> و آنتروپی حداکثر<sup>۶</sup> استفاده کرد، برای حداکثر کردن مقادیر غیرگوسی می‌توان از Kurtosis و نگانتروپی<sup>۸</sup> استفاده کرد. بسته به نوع داده‌ها می‌توان از هر یک از این روش‌ها بهره برد. Entropy نشان دهنده آشفتگی و یا عدم قطعیت در یک سیستم است که در الگوریتم ICA با به حداقل رسانیدن این مقدار می‌توان داده‌های منبع را استخراج کرد. نحوه محاسبه Entropy در رابطه زیر آورده شده که  $p()$  نشان دهنده احتمال وقوع داده‌ها است [۱۴، ۱۵].

$$H(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^n p(\mathbf{X}_i) \log P(\mathbf{X}_i) \quad (35)$$

Kurtosis برای داده‌های با پراکندگی گوسی دارای مقادیر صفر و برای پراکندگی‌های غیرگوسی دارای مقادیر غیر صفر می‌باشد از این رو با به حداکثر رسانیدن این اندازه‌گیری می‌توان منابعی با پراکندگی غیرگوسی را مشخص نمود در رابطه زیر نحوه محاسبه Kurtosis آورده شده است.

$$kurt(\mathbf{X}) = \frac{E([\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}]^4)}{(E([\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}]^2))^2} - 3 \quad (36)$$

Negentropy اختلاف میان Entropy داده‌های اصلی و داده‌های تصادفی با توزیع گوسی که دارای میزان میانگین و واریانس مشابهی نسبت به داده‌های اصلی هستند را اندازه می‌گیرد. این روش به نسبت از Kurtosis بهتر است، زیرا نسبت به داده‌های پرت از حساسیت کمتری برخوردار می‌باشد. یکی از خواص اصلی داده‌های با پراکندگی گوسی این است که داده‌ها با پراکندگی

<sup>۱</sup> Independent component analysis

<sup>۲</sup> Hyvärinen an Oja

<sup>۳</sup> Cost Function

<sup>۴</sup> Kurtosis

<sup>۵</sup> Minimization of Mutual information

<sup>۶</sup> Kullback-Leibler divergence

<sup>۷</sup> Maximum entropy

<sup>۸</sup> Negentropy

گوسی دارای بیشترین مقادیر Entropy هستند از این رو ما همواره به دنبال داده‌های با حداکثر مقدار پراکندگی غیرگوسی هستیم. برای محاسبه Negentropy می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$J(\mathbf{X}) = H(\mathbf{X}_g) - H(\mathbf{X}) \quad (37)$$

در رابطه (37)،  $\mathbf{X}_g$  داده‌های با ابعاد مشابه به  $\mathbf{X}$  می‌باشند که دارای توزیع گوسی و واریانس و میانگین برابر با  $\mathbf{X}$  هستند. می‌توان از رابطه تقریبی زیر به جای رابطه (37) استفاده کرد [13].

$$j(\mathbf{X}) = \frac{1}{12} E\{\mathbf{X}^3\}^2 + \frac{1}{48} kurt(\mathbf{X})^2 \quad (38)$$

پس از بیان توابع هزینه و روش‌های محاسبه آن‌ها در ادامه گام‌های روش ICA شرح داده می‌شود. پس از سفید کردن و نرمال کردن داده‌ها و تعیین مقادیر عامل سفیدکننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  گام‌های الگوریتم ICA به صورت زیر است.

۱. تعیین یک مقدار اولیه تصادفی برای  $\mathbf{W}$  و محاسبه داده‌های جدید طبق رابطه زیر که در آن  $\mathbf{X}_n$  با ابعاد  $n \times m$  نشان دهنده داده‌های جدید و  $\mathbf{W}$  با ابعاد  $n \times n$  ماتریس است که توابع هزینه به ازاء آن حداکثر یا حداقل می‌شوند و در هر گام مقادیر  $\mathbf{W}$  تغییر می‌کند تا به مقداری ثابت برسند.

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{W} \times \mathbf{X}_W \quad (39)$$

۲. محاسبه تابع هزینه پیشنهادی با استفاده از روش‌های مانند Kurtosis، Negentropy و ...  
 ۳. تغییر مقادیر  $\mathbf{W}$  با توجه به اینکه مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}$  جدید شرایط حداقل کردن یا حداکثر کردن توابع هزینه را ارضاء کنند به عنوان مثال برای تعیین مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}$  در شرایطی که تابع هزینه Kurtosis باشد از رابطه زیر استفاده می‌شود. که  $\eta$  یک مقدار پیشنهادی کوچک برای همگرایی بهتر  $\mathbf{W}$  به جواب بهینه است مانند  $\eta = 0.001$ .

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \eta \times E[\mathbf{X}_W (\|\mathbf{W}^T \mathbf{X}_W\|^3)] \quad (40)$$

پس از هر چرخه بهتر است مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}$  طبق رابطه زیر نرمال گردند. در رابطه زیر  $\|\cdot\|$  نشان دهنده نرم ۱ یک ماتریس است که در بخش ۶-۷ معرفی شده است.

$$\tilde{\mathbf{W}} = \frac{\tilde{\mathbf{W}}}{\|\tilde{\mathbf{W}}\|} \quad (41)$$

۴. بررسی شرایط همگرایی الگوریتم به صورت زیر می‌باشد، در صورت ارضاء نشود رابطه (42) الگوریتم به مرحله ۱ باز می‌گردد و چرخه تا همگرا شدن الگوریتم ادامه می‌یابد، در غیر این صورت چرخه متوقف شده و به گام بعد انتقال می‌یابد.

$$\|\tilde{\mathbf{W}} - \mathbf{W}\| < e \quad (42)$$

در رابطه (42) مقدار  $e$  یک مقدار پیشنهادی کوچک مانند  $0.0001$  می‌باشد.

۵. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{W}_W^{-1}$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مودی سازه.

$$\mathbf{W}_W^{-1} \tilde{\mathbf{W}} \approx \mathbf{A}$$

۶. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (2).

<sup>1</sup> Norm

به دلیل سرعت همگرایی پایین روش ICA و همچنین وجود خطا در پاسخ‌های محاسبه شده الگوریتم FastICA جایگزین این الگوریتم شد. این الگوریتم در سال ۲۰۰۰ توسط هایوارینن<sup>۱</sup> برای غلبه بر کاستی‌های روش ICA معرفی گشت. در این روش سعی می‌شود تا بیشترین مقادیر غیرگوسی  $\mathbf{W}_f^T \times \mathbf{X}_W$  را با استفاده از روابط زیر محاسبه کرد. در این حالت  $\mathbf{W}_f$  دارای ابعاد  $n \times 1$  می‌باشد [۱۶].

$$f(\mathbf{u}) = \log \cosh(\mathbf{u}) \quad (۴۳)$$

$$g(\mathbf{u}) = \tanh(\mathbf{u}) \quad (۴۴)$$

$$g'(\mathbf{u}) = 1 - \tanh^2(\mathbf{u}) \quad (۴۵)$$

الگوریتم FastICA برای محاسبه مقادیر غیرگوسی رابطه غیرخطی (۴۳) متکی است که مقادیر مشتق اول و دوم آن به ترتیب در روابط (۴۴) و (۴۵) آورده شده این روابط را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد.

$$f(\mathbf{u}) = -e^{-\frac{\mathbf{u}^3}{2}} \quad (۴۶)$$

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}e^{-\frac{\mathbf{u}^3}{2}} \quad (۴۷)$$

$$g'(\mathbf{u}) = (1 - \mathbf{u}^2)e^{-\frac{\mathbf{u}^3}{2}} \quad (۴۸)$$

در زیر گام‌های این الگوریتم آورده شده که پس از سفید کردن و نرمال کردن داده‌ها و تعیین مقادیر عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  می‌باشد.

۱. محاسبه مقدار تصادفی اولیه  $\tilde{\mathbf{W}}_{f_i}$  با ابعاد  $n \times i$ . که  $i$  از ۱ تا  $n$  می‌باشد. در این روش در هر چرخه یکی از ستون‌های ماتریس  $\mathbf{W}_f$  تعیین می‌گردد.

۲. محاسبه داده‌های جدید، طبق رابطه زیر که این داده‌های جدید دارای ابعاد  $1 \times n$  هستند.

$$\tilde{\mathbf{S}}_i = \tilde{\mathbf{W}}_{f_i}^T \times \mathbf{X}_W \quad (۴۹)$$

۳. اصلاح مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}_{f_i}$  بر اساس رابطه زیر که مقادیر غیرگوسی را طبق روابط (۴۳) تا (۴۵) حداکثر می‌کند.

$$\tilde{\mathbf{W}}_{f_i} = E[\tilde{\mathbf{W}}_{f_i} \times g(\tilde{\mathbf{S}}_i)^T] - E[g'(\tilde{\mathbf{S}}_i)] \times \tilde{\mathbf{W}}_{f_i} \quad (۵۰)$$

۴. نرمال کردن مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}_{f_i}$  طبق رابطه (۴۱).

۵. بررسی شرایط همگرایی طبق رابطه (۴۲) که اگر شرایط همگرایی ارضاء شود چرخه متوقف و مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}_{f_i}$  به عنوان

مقادیر بهینه در ماتریس  $\mathbf{W}_f$  با ابعاد  $n \times n$  ذخیره می‌شود و به گام (۱) بازگشته و مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}_{f_i}$  برای  $i$  جدید تعیین می‌کنیم. در صورت ارضاء نشدن شرایط همگرایی الگوریتم به گام (۲) باز می‌گردد.

کد متلب روش FastICA در بخش ۸-۳ آورده شده، برای درک بهتر الگوریتم FastICA در ادامه مثال‌های مورد بررسی قرار گرفته است..

## ۲-۳- بررسی عددی روش ICA:

مثال ۱. در این مثال ۳ موج با فرکانس‌های مختلف به مدت ۵ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای 100Hz) به عنوان سیگنال‌های منبع در نظر گرفته می‌شوند که با استفاده از ماتریس اختلاط  $\mathbf{A}$  به  $\mathbf{X}$  تبدیل می‌گردند، حال با استفاده از مقادیر  $\mathbf{X}$  و استفاده از روش FastICA مقادیر سیگنال‌های منبع و ماتریس  $\mathbf{A}$  محاسبه می‌گردد و میزان دقت محاسبات با استفاده از MAC اندازه گیری می‌شود. مقادیر سیگنال‌های منبع که با  $\mathbf{S}$  نشان داده شده است به صورت زیر می‌باشد.

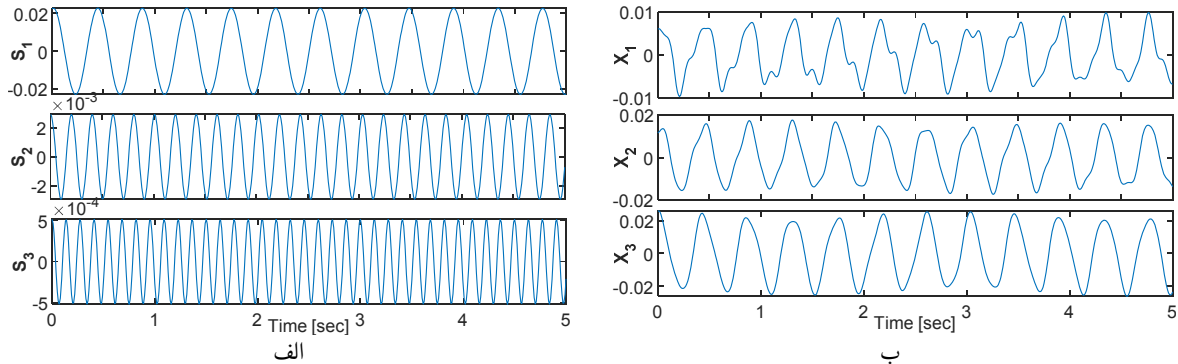
<sup>1</sup> Hyvarinen

$$S_1 = 0.022408 \times \cos(14.52 \times t) + \left( \frac{0.016213}{14.52} \right) \times \sin(14.52 \times t)$$

$$S_2 = 0.0029216 \times \cos(31.05 \times t) + \left( \frac{0.001437}{31.05} \right) \times \sin(31.05 \times t)$$

$$S_3 = 0.00051333 \times \cos(46.1 \times t) + \left( \frac{0.00022433}{46.1} \right) \times \sin(46.1 \times t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A} \times \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 \end{bmatrix}$$



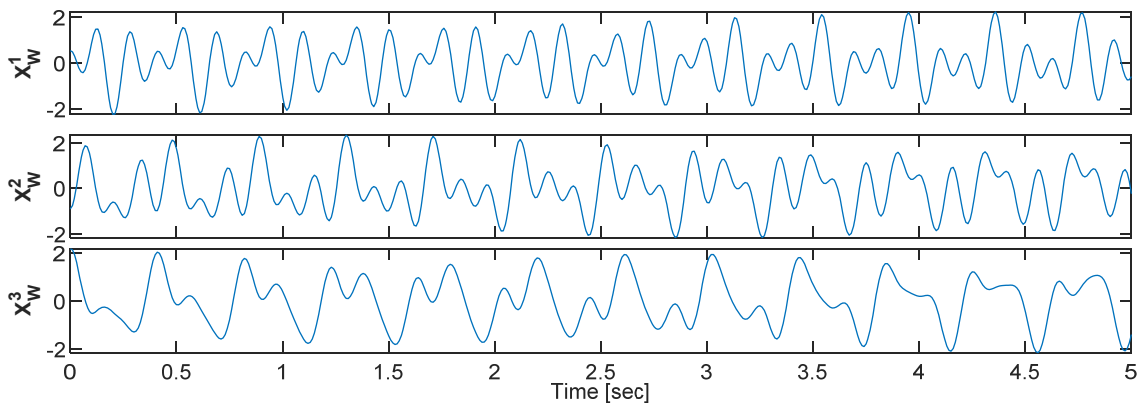
شکل (۳۰): الف) سیگنال‌های منبع، ب) سیگنال‌های مختلط شده.

نتایج هریک از مراحل روش FastICA در زیر آورده شده است.

۱. محاسبه داده‌های نرمال شد  $\mathbf{X}^0$ .

۲. محاسبه عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  طبقه رابطه (۱۱).

$$\mathbf{W}_W = \begin{bmatrix} 610.79 & -226.85 & -20.97 \\ -226.85 & 411.62 & -164.94 \\ -20.977 & -164.94 & 162.75 \end{bmatrix}$$



شکل (۳۱): داده‌های سفید شده.

۳. مقادیر اولیه تصادفی را برای  $\tilde{\mathbf{W}}_{f_1}$  با ابعاد  $3 \times 1$  در نظر می‌گیریم.

$$\tilde{\mathbf{W}}_{f_1} = \begin{bmatrix} 0.87534 \\ 0.24837 \\ 0.41504 \end{bmatrix}$$

۴. داده‌های جدید را طبق رابطه (۴۷) محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{X}_n = \tilde{\mathbf{W}}_{f_1}^T \times \mathbf{X}_W$$

۵. محاسبه مقادیر  $\tilde{\mathbf{Q}}_{f_1}$  با استفاده از رابطه (۵۰).

$$\tilde{\mathbf{W}}_{f_1} = \begin{bmatrix} 0.044094 \\ 0.02457 \\ 0.044808 \end{bmatrix}$$

۶. نرمال کردن مقادیر  $\tilde{\mathbf{Q}}_{f_1}$  طبق رابطه (۴۱).

$$\tilde{\mathbf{W}}_{f_1 n} = \begin{bmatrix} 0.65328 \\ 0.36402 \\ 0.66386 \end{bmatrix}$$

۷. بررسی همگرایی بر اساس رابطه (۴۲).

$$\|\tilde{\mathbf{W}}_{f_i} - \tilde{\mathbf{W}}_{f_i n}\| = 0.47041 \leq 0.0001$$

۷. برگشت به گام ۴ و تکرار این الگوریتم تا همگرا شدن آن، مشاهده می‌شود که پس از ۵ بار تکرار الگوریتم همگرا شده و مقادیر  $\tilde{\mathbf{W}}_{f_{5n}}$  به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\tilde{\mathbf{W}}_{f_{5n}} = \begin{bmatrix} 0.26056 \\ 0.54663 \\ 0.7958 \end{bmatrix}$$

۸. به گام ۱ بازگشته و الگوریتم را برای ستون دوم ماتریس اختلاط تکرار می‌کنیم. این روند تا محاسبه کلیه ستون‌های ماتریس  $\mathbf{W}_f$  ادامه می‌یابد. مقادیر نهایی ماتریس  $\tilde{\mathbf{W}}_f$  به صورت زیر است.

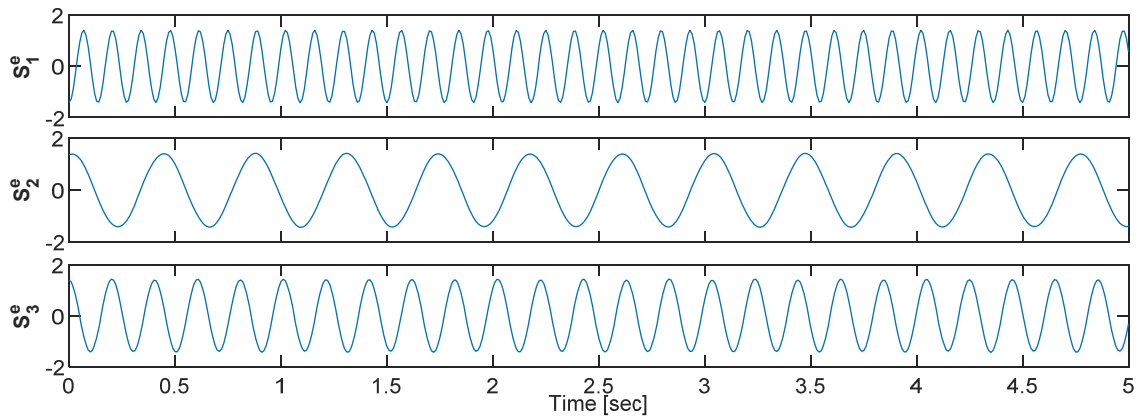
$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} 0.26056 & -0.61541 & -0.74389 \\ 0.54663 & -0.54107 & 0.63909 \\ 0.7958 & 0.57316 & -0.19542 \end{bmatrix}$$

۹. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\mathbf{W}_f$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مدی ساز و محاسبه خطای تخمین با استفاده از MAC.

$$\mathbf{W}_f n = \begin{bmatrix} 0.30197 & -0.68329 & -2.165 \\ 0.6494 & -0.61439 & -2.1315 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC_{FastICA} = [1 \quad 1 \quad 0.973]$$

۱۰. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).

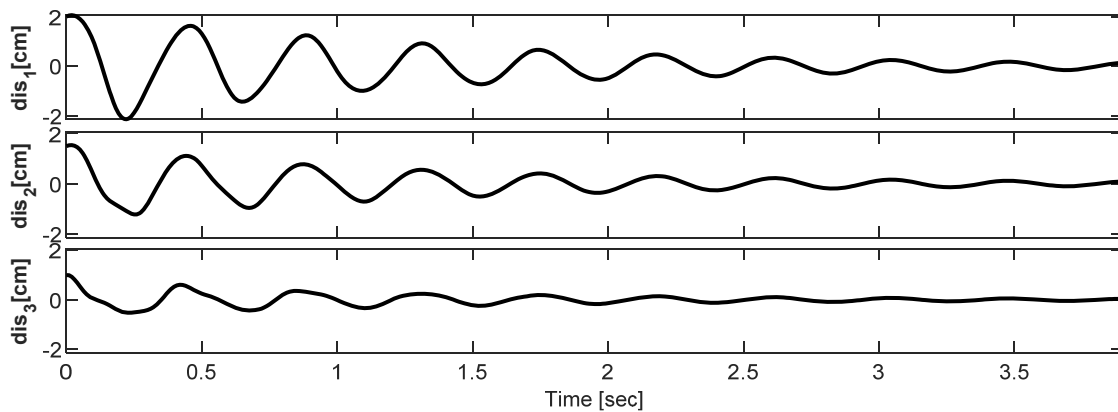


شکل (۳۲): داده‌های منبع تخمین‌زده شده.

مثال ۲. در این مثال یک سازه ۳ طبقه که مشخصات آن در زیر ذکر شده در زمان ۴ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای ۱۰۰Hz) تحت ارتعاش آزاد قرار می‌گیرد که با استفاده از جابجایی‌های [0.01 0.015 0.02] و سرعت‌های [0.02 0.04 0.06] در طبقات ۱، ۲ و ۳ ایجاد می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های FastICA اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین‌زده شده و درصد خطای تخمین این روش‌ها محاسبه می‌گردد.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \zeta = 5\%$$

در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش FastICA می‌باشند.

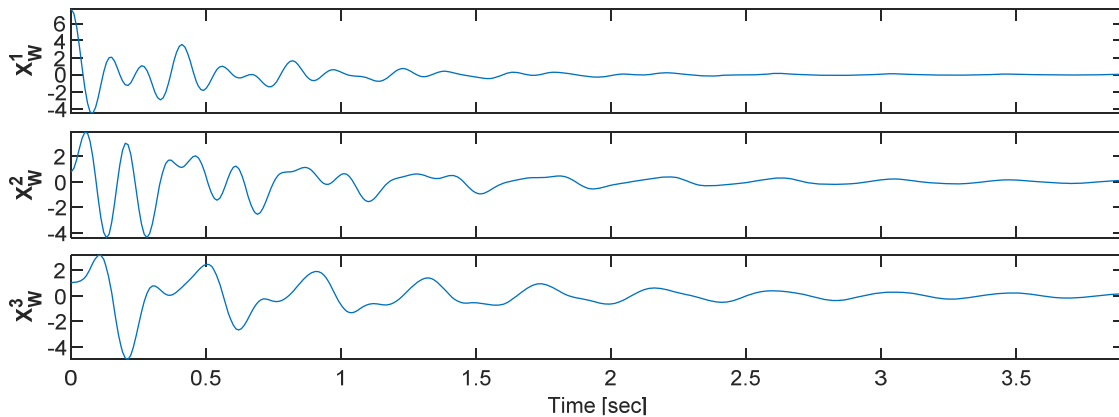


شکل (۳۳): جابجایی دینامیکی سازه

۱. محاسبه داده‌های نرمال شد  $\mathbf{X}^0$ .

۲. محاسبه عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  طبقه رابطه (۱۱).

$$\mathbf{W}_W = \begin{bmatrix} 2314.7 & -1047.4 & 12.243 \\ -1047.4 & 1662.9 & -684.4 \\ 12.243 & -684.4 & 556.81 \end{bmatrix}$$



شکل (۳۴): داده‌های سفید شده.

۳. به دلیل کاهش حجم گزارش نتایج نهایی الگوریتم ذکر می‌شود.

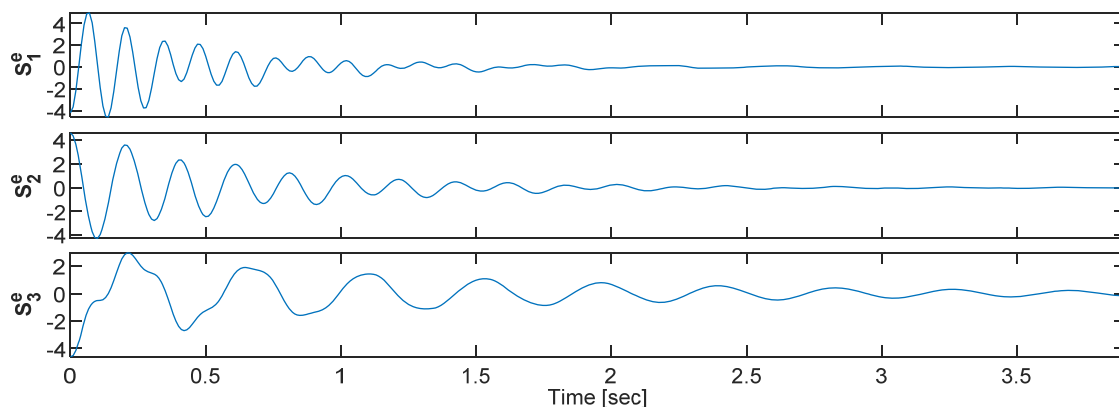
$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} 0.016026 & -0.0023277 & 0.12826 \\ 0.086055 & 0.095237 & -0.015329 \\ 0.085927 & -0.12164 & -0.03301 \end{bmatrix}$$

۴. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\mathbf{W}_f$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مدی ساز و محاسبه خطای تخمین با استفاده از MAC.

$$\mathbf{W}_{fn} = \begin{bmatrix} 0.18651 & -3.8856 & 0.019137 \\ 1 & 0.46437 & -0.78296 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC_{FastICA} = [0.994 \quad 0.532 \quad 0.32]$$

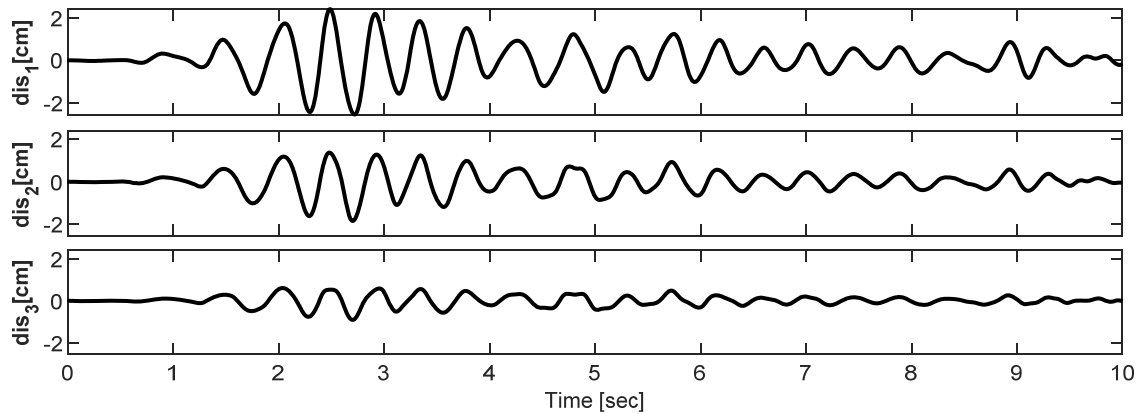
۵. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۳۵): داده‌های منبع تخمین زده شده.

دقت تخمین بالا بعد از چندین بار تکرار روش FastICA به دست آمده، به دلیل این که در این روش مقدار اولیه  $\mathbf{W}_f$  تخمین زده می‌شود ممکن است که الگوریتم همگرا نشده و جواب قابل قبولی به دست نیاید. از این رو این روش چندین بار تکرار می‌شود تا به جواب قابل قبولی برسد. که لزوم این تکرار را می‌توان از معایب این روش در نظر گرفت.

مثال ۳. در این بخش سازه موجود در مثال ۲ به مدت ۱۰ ثانیه تحت اثر زلزله ELcentro قرار می‌گیریم. سپس با استفاده از روش‌های FastICA، اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده می‌شود و درصد خطای تخمین محاسبه می‌گردد. در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش FastICA می‌باشند.

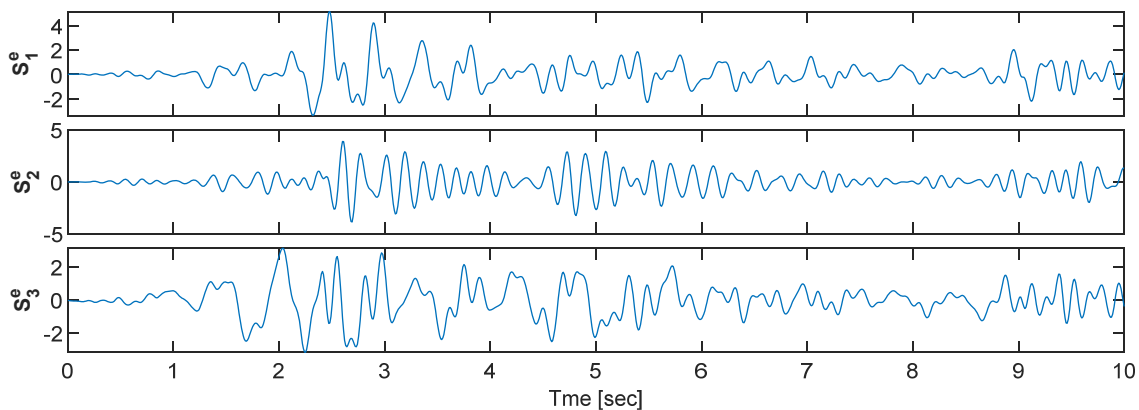


شکل (۳۶): جابجایی دینامیکی سازه

۱. محاسبه داده‌های نرمال شد  $\mathbf{X}^0$ .

۲. محاسبه عامل سفید کننده  $\mathbf{W}_W$  و داده‌های سفید شده  $\mathbf{X}_W$  طبقه رابطه (۱۱).

$$\mathbf{W}_W = \begin{bmatrix} 5084.1 & -3251.4 & 586.7 \\ -3251.4 & 3433.4 & -1176.8 \\ 586.7 & -1176.8 & 690.55 \end{bmatrix}$$



شکل (۳۷): داده‌های سفید شده.

۳. به دلیل کاهش حجم گزارش نتایج نهایی الگوریتم ذکر می‌شود.

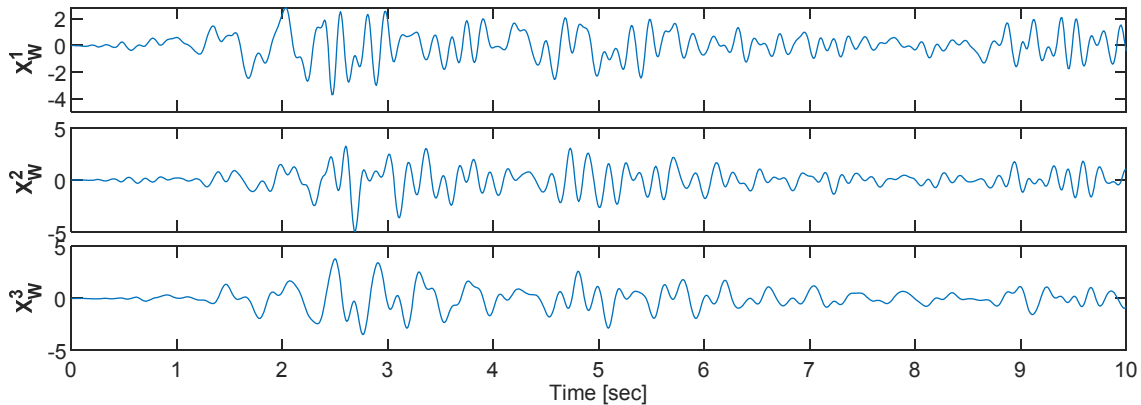
$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} -1.5567 & 0.20821 & -1.9832 \\ -3.6616 & 0.22614 & -3.7957 \\ -5.9728 & -0.61411 & -5.337 \end{bmatrix} \times 10^3$$

۴. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر آنها و مقایسه این ماتریس نرمال شده با اشکال مودی سازه و محاسبه خطای تخمین با استفاده از MAC.

$$\mathbf{W}_f n = \begin{bmatrix} 0.26064 & 0.3716 & -0.33904 \\ 0.61306 & 0.71121 & -0.36825 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC = [0.98 \quad 0.44 \quad 0.68]$$

۵. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۳۸): داده‌های منبع تخمین زده شده.

همانطور که مشاهده می‌شود الگوریتم FastICA برای سازه‌های که دارای میرای بالا هستند از خطای زیادی برخوردار است.

## ۵. پیگیری پیچیدگی (CP)

استون<sup>۱</sup> در سال ۲۰۰۱ روش جدید پیگیری پیچیدگی (CP)<sup>۲</sup> را در حوضه BSI که بر مبنای شناسایی در فضای زمانی می‌باشد معرفی کرد [۱۷]. در این روش فرض می‌شود که سیگنال منبع احتمالی در یک فضای فیزیکی به وسیله حرکت جرم در طول زمان که از قوانین خاص فیزیکی تبعیت می‌کند به وجود می‌آید؛ به این ترتیب مشاهدات که مخلوطی از سیگنال‌ها هستند باید از منابع ساده‌تری که هر یک توسط جرم و قوانین خاص فیزیکی تولید شده است، تشکیل شده باشد. زی<sup>۳</sup> و همکاران از لحاظ نظری ثابت کردند که پیچیدگی هر ترکیب از داده‌ها همواره بین ساده‌ترین و پیچیده‌ترین منابع تشکیل دهنده نهفته است، که به این تعریف قضیه استون گفته می‌شود [۱۸]. بر اساس این قضیه ساده‌ترین سیگنال استخراج شده از مشاهدات نشان دهنده یک سیگنال منبع است. از این رو استون برای محاسبه پیچیدگی داده‌ها روشی را ارائه کرد که در ادامه معرفی می‌شود.

$$F(\mathbf{S}_i) = \log \frac{V(\mathbf{S}_i)}{U(\mathbf{S}_i)} = \log \frac{\sum_{t=1}^N (\bar{\mathbf{S}}_i(t) - \mathbf{S}_i(t))^2}{\sum_{t=1}^N (\hat{\mathbf{S}}_i(t) - \mathbf{S}_i(t))^2} \quad (51)$$

که برای محاسبه مقادیر  $\bar{\mathbf{S}}_i(t)$  و  $\hat{\mathbf{S}}_i(t)$  که به ترتیب پیش‌بینی دراز مدت و پیش‌بینی کوتاه مدت نام دارد از روش‌های زیر استفاده می‌شود. روش اول:

$$\bar{\mathbf{S}}_i(t) = \lambda_S \bar{\mathbf{S}}_i(t-1) + (1 - \lambda_S) \mathbf{S}_i(t-1) \quad \bar{\mathbf{S}}_i(t) = \mathbf{S}_i(1) \quad t = 2, \dots, n \quad 0 \leq \lambda_S \leq 1 \quad (52)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_i(t) = \lambda_S \hat{\mathbf{S}}_i(t-1) + (1 - \lambda_S) \mathbf{S}_i(t-1) \quad \hat{\mathbf{S}}_i(t) = \mathbf{S}_i(1) \quad t = 2, \dots, n \quad 0 \leq \lambda_S \leq 1 \quad (53)$$

<sup>۱</sup> Stone, J.V.

<sup>۲</sup> Complexity Pursuit

<sup>۳</sup> Xie, S.

که مقادیر  $\lambda_L$  ,  $\lambda_S$  با استفاده از مقادیرهای  $h_L$  ,  $h_S$  که به عنوان پارامترهای نیمه عمر کوتاه مدت و دراز مدت شناخته می‌شوند تعیین می‌گردد.

$$\lambda_S = 2^{-\frac{1}{h_S}} \quad (54)$$

$$\lambda_L = 2^{-\frac{1}{h_L}}$$

در رابطه (54)،  $h_S = 1$  برای پیش‌بینی کوتاه مدت و  $h_L > 900000$  برای پیش‌بینی دراز مدت ارائه شده‌اند در هر صورت مقادیر  $h_S \ll h_L$  باشد.

روش دوم استفاده از میانگین متحرک [۱۹] برای محاسبه مقادیر  $\hat{S}_i(t)$  و  $\bar{S}_i(t)$  به صورت زیر:

$$\bar{S}_i(t) = \frac{1}{P_L} \sum_{j=1}^{h_L \times H} \lambda_L^j X_i(t-j) \quad P_L = \sum_{j=1}^{h_L \times H} \lambda_L^j \quad \bar{S}_i(0) = 0 \quad t = 2, \dots, n \quad (55)$$

$$\hat{S}_i(t) = \frac{1}{P_S} \sum_{j=1}^{h_S \times H} \lambda_S^j X_i(t-j) \quad P_S = \sum_{j=1}^{h_S \times H} \lambda_S^j \quad \hat{S}_i(0) = 0 \quad t = 2, \dots, n \quad (56)$$

در روابط (55) و (56)،  $H$  یک مقدار اختیاری می‌باشد که استون مقادیر  $H = \{2, 4, 6, 16, 32\}$  را پیشنهاد داده است [۲۰]. در رابطه (51)،  $F$  نشان دهنده قابل پیش‌بینی بودن داده‌ها می‌باشد. برای استفاده از روابط استون در معادلات BSI رابطه (۲) را در رابطه (51) قرار می‌دهیم.

$$F(\mathbf{S}) = F(\mathbf{W}_i, \mathbf{X}) = \log \frac{V(\mathbf{W}_i, \mathbf{X})}{U(\mathbf{W}_i, \mathbf{X})} = \log \frac{\mathbf{W}_i^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{W}_i}{\mathbf{W}_i^T \hat{\mathbf{R}} \mathbf{W}_i} \quad (57)$$

که  $\mathbf{W}_i$  نشان دهنده هریک از ستون‌های ماتریس اختلاط  $\mathbf{W}$  با ابعاد  $n \times n$  و  $\bar{\mathbf{R}}$  و  $\hat{\mathbf{R}}$  نشان دهنده کواریانس دراز مدت و کوتاه مدت داده‌ها با ابعاد  $n \times n$  می‌باشند که با اعمال کواریانس بر روی اختلاف میانگین‌های متحرک با داده‌ها محاسبه می‌شود.

$$\bar{r}_{ij} = \sum_{t=1}^n (x_i(t) - \bar{x}_i(t))(x_j(t) - \bar{x}_j(t))$$

$$\hat{r}_{ij} = \sum_{t=1}^n (x_i(t) - \hat{x}_i(t))(x_j(t) - \hat{x}_j(t)) \quad (58)$$

در روش CP به دنبال  $\mathbf{W}_i$  های هستیم که به ازای آن مقدار  $F$  حداکثر شود، با حداکثر شدن میزان  $F$  قابل پیش‌بینی ترین سیگنال را در بین مجموعه سیگنال‌ها تعیین می‌گردد و طبق قضیه استون قابل پیش‌بینی ترین سیگنال برابر با سیگنال منبع می‌باشد. حال می‌توان با حذف این منبع از داده‌های مخلوط شده و اعمال مجدد الگوریتم CP سیگنال منبع بعدی را تعیین کرد که این روش از دقت و سرعت خوبی برخوردار نیست از این رو استون یک الگوریتم ساده‌تر را ارائه کرد، در این الگوریتم مشتق  $F$  بر حسب  $\mathbf{W}_i$  برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

$$\nabla_{G_i} \mathbf{F} = \frac{2\mathbf{W}_i}{\mathbf{V}_i} \bar{\mathbf{R}} - \frac{2\mathbf{W}_i}{\mathbf{U}_i} \hat{\mathbf{R}} = 0 \quad (59)$$

$$\mathbf{W}_i \bar{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{U}_i} \mathbf{W}_i \hat{\mathbf{R}} \quad (60)$$

همانطور که مشاهده می‌شود رابطه (60) به فرم معادله‌های مقادیر ویژه و بردار ویژه است، از این رو می‌توان مقادیر  $\mathbf{W}_i$  را با محاسبه بردارهای ویژه ماتریس  $\bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{R}}$  تعیین کرد و مقادیر ویژه به دست آمده با  $\gamma_i = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{U}_i}$  برابر است. از این رو مقدار

$W$  تعیین شده و می‌توان ماتریس اختلاط تخمینی را با استفاده از رابطه  $\tilde{A} = W^{-1}$  محاسبه کرد. با داشتن مقدار  $\tilde{A}$  می‌توان منابع را از روی معادله زیر محاسبه کرد و با نرمال کردن به سطر آخر  $\tilde{A}$  اشکال مدی را محاسبه نمود [۲۳-۲۱].

$$S(t) = WX(t) \quad (۶۱)$$

کد متلب روش CP در بخش ۸-۴ آورده شده.

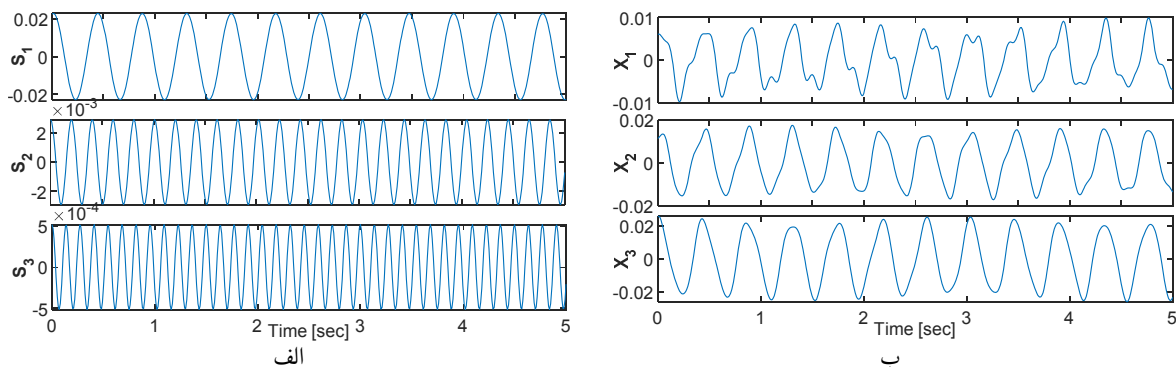
مثال ۱. در این مثال ۳ موج با فرکانس‌های مختلف به مدت ۵ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای 100Hz) به عنوان سیگنال‌های منبع در نظر گرفته می‌شوند که با استفاده از ماتریس اختلاط  $A$  به  $X$  تبدیل می‌گردند، حال با استفاده از مقادیر  $X$  و استفاده از روش CP مقادیر سیگنال‌های منبع و ماتریس  $A$  محاسبه می‌گردد و میزان دقت محاسبات با استفاده از MAC اندازه‌گیری می‌شود. مقادیر سیگنال‌های منبع که با  $S$  نشان داده شده‌است به صورت زیر می‌باشد.

$$S_1 = 0.022408 \times \cos(14.52 \times t) + \left( \frac{0.016213}{14.52} \right) \times \sin(14.52 \times t)$$

$$S_2 = 0.0029216 \times \cos(31.05 \times t) + \left( \frac{0.001437}{31.05} \right) \times \sin(31.05 \times t)$$

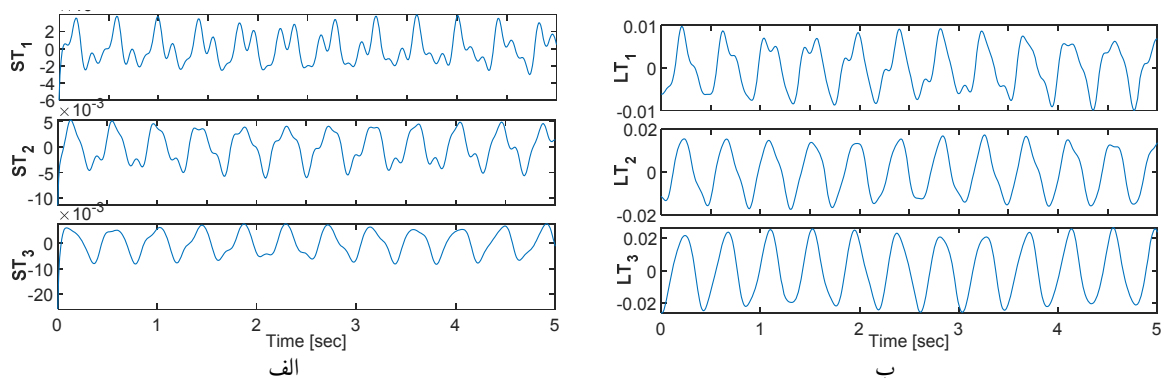
$$S_3 = 0.00051333 \times \cos(46.1 \times t) + \left( \frac{0.00022433}{46.1} \right) \times \sin(46.1 \times t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = A \times \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$



شکل (۳۹): (الف) سیگنال‌های منبع، (ب) سیگنال‌های مختلط شده.

۱. محاسبه میانگین‌های متحرک کوتاه مدت و دراز مدت داده‌ها.



شکل (۴۰): الف) میانگین متحرک کوتاه مدت، ب) میانگین متحرک دراز مدت

۲. محاسبه ماتریس‌های  $\bar{\mathbf{R}}$  و  $\hat{\mathbf{R}}$  با ابعاد  $n \times n$  که نشان دهنده کواریانس کوتاه مدت و دراز مدت داده‌ها می‌باشد.

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 4.9576 & 8.8549 & 12.515 \\ 8.8549 & 19.38 & 27.609 \\ 12.515 & 27.609 & 45.427 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 10.603 & 20.794 & 30.412 \\ 20.794 & 44.833 & 66.38 \\ 30.412 & 66.38 & 105.81 \end{bmatrix} \times 10^5$$

۳. محاسبه مقادیر  $G$  با تعیین بردارهای ویژه ماتریس  $\hat{\mathbf{R}}^{-1}\bar{\mathbf{R}}$  و برابر قرار دادن آن با ماتریس اختلاط تخمینی.

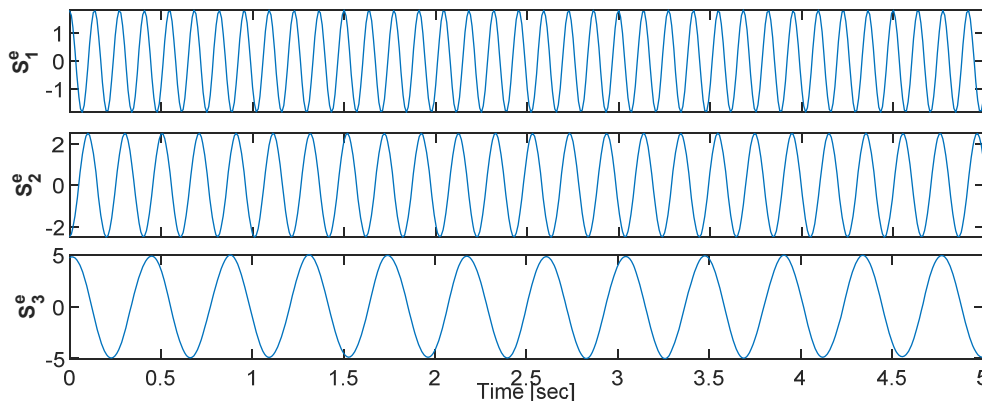
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^{-1}$$

۴. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر و آن و محاسبه خطای تخمینی با استفاده از روش MAC در زی خطای محاسبات با استفاده از روش دوم نیز آورده شده.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} 0.30237 & -0.6646 & 2.3203 \\ 0.64965 & -0.5908 & -2.3577 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC_{CP} = [1 \quad 0.9884 \quad 0.99]$$

۵. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۶۱).

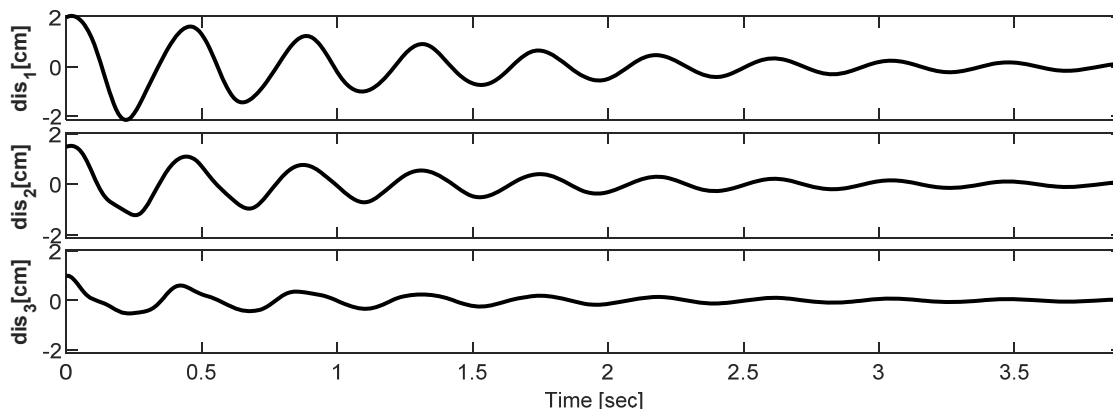


شکل (۴۱): داده‌های منبع تخمین زده شده.

مثال ۲. در این مثال یک سازه ۳ طبقه که مشخصات آن در زیر ذکر شده در زمان ۴ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای 100Hz) تحت ارتعاش آزاد قرار می‌گیرد که با استفاده از جابجایی‌های [0.01 0.015 0.02] و سرعت‌های [0.02 0.04 0.06] در طبقات ۱، ۲ و ۳ ایجاد می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های CP اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده شده و درصد خطای تخمین این روش‌ها محاسبه می‌گردد.

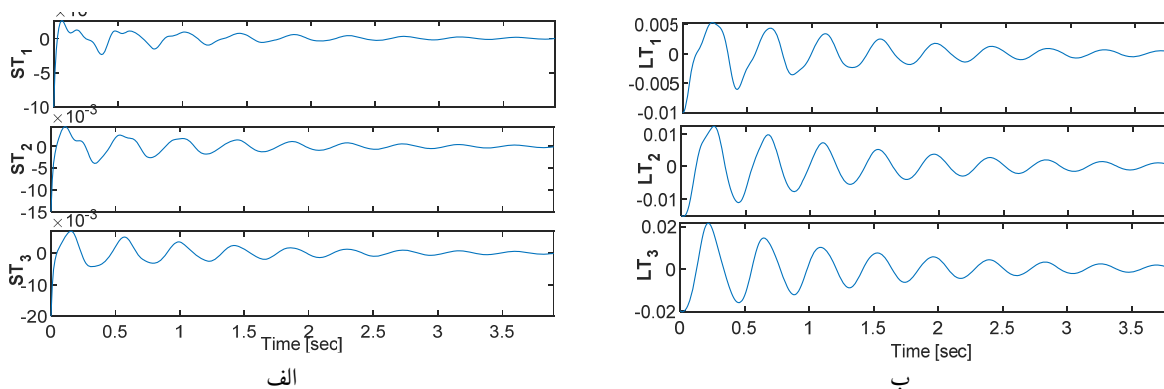
$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \zeta = 5\%$$

در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش CP می‌باشند.



شکل (۴۲): جابجایی دینامیکی سازه

۱. محاسبه میانگین‌های متحرک کوتاه مدت و دراز مدت داده‌ها.



شکل (۴۳): الف) میانگین متحرک کوتاه مدت، ب) میانگین متحرک دراز مدت

۲. محاسبه ماتریس‌های  $\bar{\mathbf{R}}$  و  $\hat{\mathbf{R}}$  با ابعاد  $n \times n$  که نشان دهنده کواریانس کوتاه مدت و دراز مدت داده‌ها می‌باشد.

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0.64561 & 1.2581 & 1.8481 \\ 1.2581 & 2.6213 & 3.9027 \\ 1.8481 & 3.9027 & 6.0788 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1.8911 & 3.8717 & 5.7915 \\ 3.8717 & 8.2302 & 12.454 \\ 5.7915 & 12.454 & 19.424 \end{bmatrix} \times 10^5$$

۳. محاسبه مقادیر  $G$  با تعیین بردارهای ویژه ماتریس  $\hat{\mathbf{R}}^{-1}\bar{\mathbf{R}}$  و برابر قرار دادن آن با ماتریس اختلاط تخمینی.

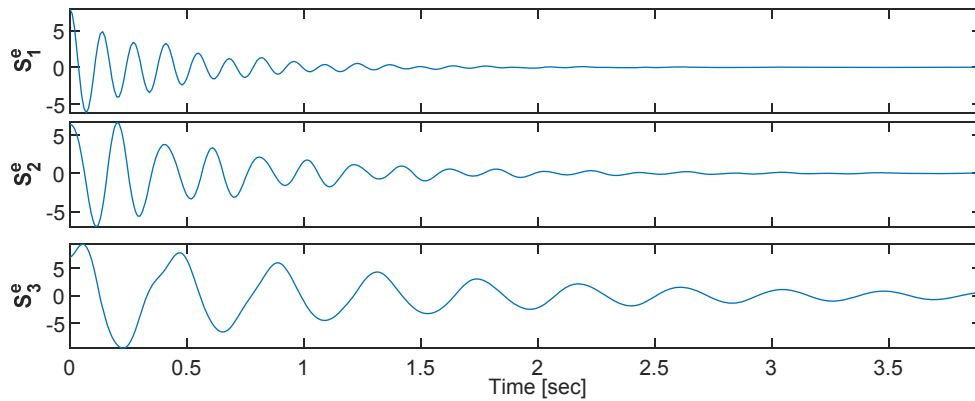
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^{-1}$$

۴. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر و آن و محاسبه خطای تخمینی با استفاده از روش MAC در زیر خطای محاسبه با استفاده از هر دو روش آورده شده.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} 0.29087 & 2.2066 & 0.82358 \\ 0.63789 & 3.2962 & 0.45164 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

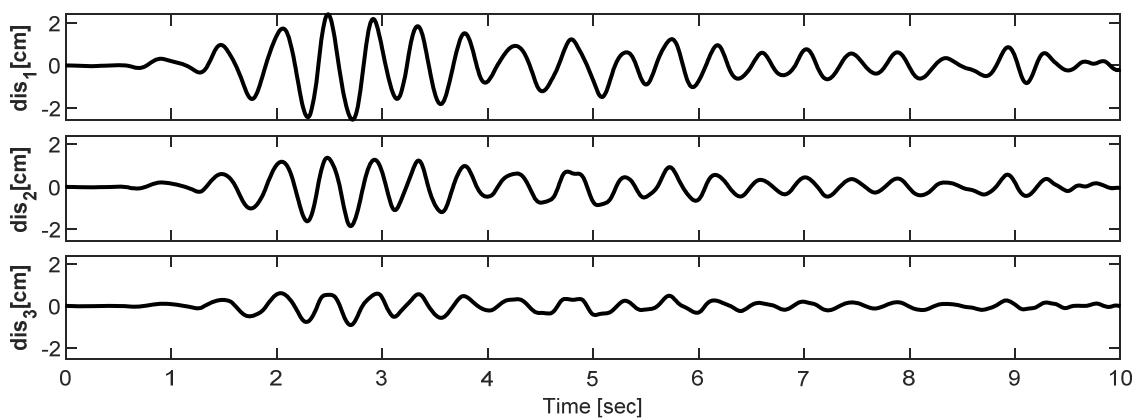
$$MAC_{CP} = [1 \quad 0.2 \quad 0.14]$$

۵. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۶۱).



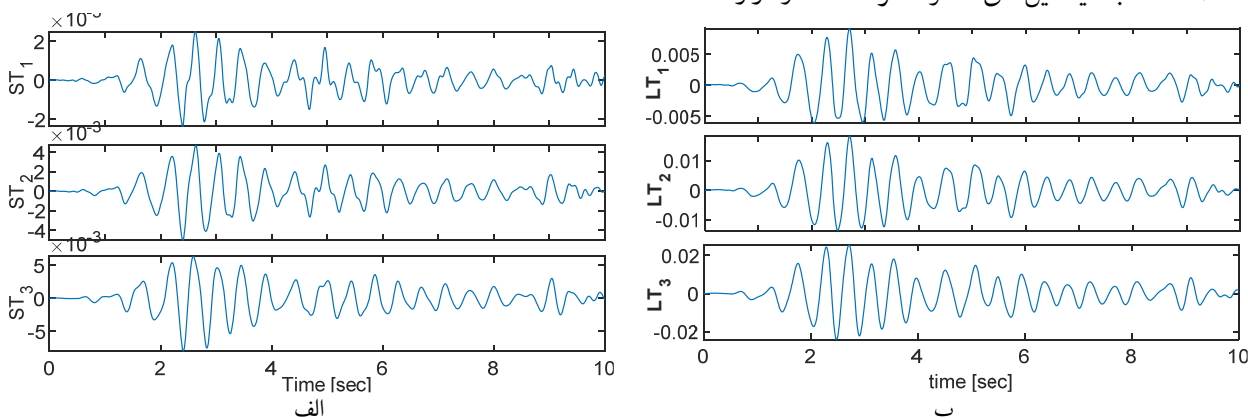
شکل (۴۴): داده‌های منبع تخمین زده شده.

مثال ۳. در این بخش سازه موجود در مثال ۲ به مدت ۱۰ ثانیه تحت اثر زلزله ELcentro قرار می‌گیریم. سپس با استفاده از روش‌های CP، اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده می‌شود و درصد خطای تخمین محاسبه می‌گردد. در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش CP می‌باشند.



شکل (۴۵): جابجایی دینامیکی سازه

۱. محاسبه میانگین‌های متحرک کوتاه مدت و دراز مدت داده‌ها.



شکل (۴۶): الف) میانگین متحرک کوتاه مدت، ب) میانگین متحرک دراز مدت

۲. محاسبه ماتریس‌های  $\bar{\mathbf{R}}$  و  $\hat{\mathbf{R}}$  با ابعاد  $n \times n$  که نشان دهنده کواریانس کوتاه مدت و دراز مدت داده‌ها می‌باشد.

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0.64561 & 1.2581 & 1.8481 \\ 1.2581 & 2.6213 & 3.9027 \\ 1.8481 & 3.9027 & 6.0788 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1.8911 & 3.8717 & 5.7915 \\ 3.8717 & 8.2302 & 12.454 \\ 5.7915 & 12.454 & 19.424 \end{bmatrix} \times 10^5$$

۳. محاسبه مقادیر G با تعیین بردارهای ویژه ماتریس  $\hat{\mathbf{R}}^{-1}\bar{\mathbf{R}}$  و برابر قرار دادن آن با ماتریس اختلاط تخمینی.

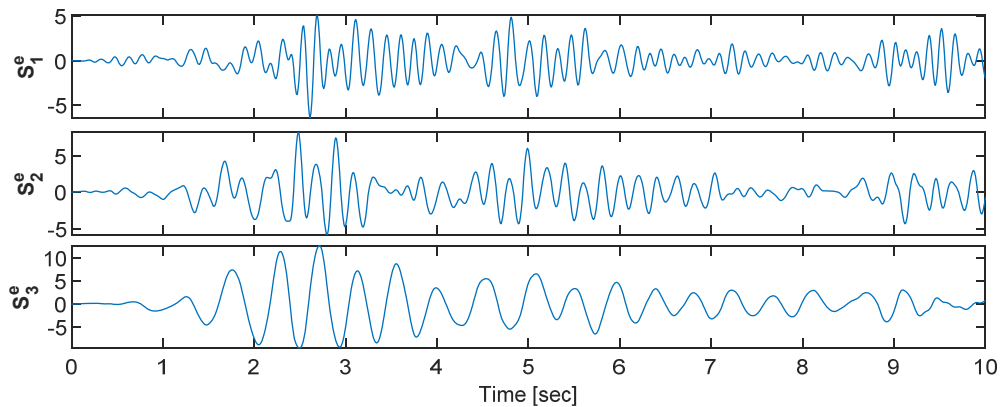
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^{-1}$$

۴. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{A}}$  به سطر آخر و آن و محاسبه خطای تخمینی با استفاده از روش MAC در زیر خطای محاسبه با استفاده از هر دو روش آورده شده.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} 0.29087 & 2.2066 & 0.82358 \\ 0.63789 & 3.2962 & 0.45164 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC_{PC} = [1 \quad 0.75 \quad 0.169]$$

۵. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۶۱).



شکل (۴۷): داده‌های منبع تخمین‌زده شده.

## ۶. تجزیه و تحلیل مؤلفه‌های پراکنده (SCA)

گیورگیو<sup>۱</sup> و همکاران [۲۱, ۴۴] در سال ۲۰۰۵ الگوریتم تجزیه و تحلیل مؤلفه‌های پراکنده (SCA<sup>۲</sup>) را جهت غلبه بر مسائل نامعین، حالتی که تعداد حسگرها از مدهای فعال سازه کمتر هستند را معرفی نمودند. در این روش برخلاف روش‌های پیشین BSI که منابع در آن‌ها مستقل از یکدیگر فرض می‌شد، منابع می‌توانند به صورت پراکنده (بدون اعمال فیلتر مستقل کننده) در یک دامنه مشخص قرار گیرند. پراکنده‌گی تنها شرطی است که باید در دامنه‌ای که داده‌ها به آن انتقال داده می‌شوند ارضاء شود. در این روش با انتقال خروجی‌های سازه به فضای فرکانسی این اطلاعات به صورت طبیعی در جهت ستون‌های ماتریس اشکال مودی پراکنده می‌گردند. از این رو با استخراج این پراکنده‌گی‌ها و دسته‌بندی آن‌ها می‌توان جهت‌گیری ستون‌های اشکال مودی و خود ماتریس اشکال مودی را تعیین نمود. برای استخراج این دسته‌بندی‌ها از الگوریتم‌های خوشه‌بندی استفاده می‌شود. پس از محاسبه ماتریس اشکال مودی اگر تعداد حسگرها با درجات آزادی سازه برابر باشد مانند روش‌های پیشین با ضرب معکوس اشکال مودی در پاسخ‌های دینامیکی سازه، پاسخ‌های مودال تعیین می‌گردد. در صورتی که تعداد حسگرها کمتر از درجات آزادی باشد نمی‌توان از معکوس کردن اشکال مودی استفاده نمود، از این رو نیاز به استفاده از روش‌های است که بتوانند پاسخ‌های مودال را در شرایط نامعین تعیین کنند. در روش SCA تکنیک‌های مانند حداقل کننده L<sup>۱</sup> جهت حل مسائل نامعین ارائه شده است [۴۸-۴۵]. برای انتقال داده‌ها از فضای زمانی به فضای فرکانسی از روش‌های متنوعی مانند تبدیل کسینوسی گسسته<sup>۴</sup>، انتقال فوریه زمان کوتاه<sup>۵</sup>، تبدیل موجک<sup>۶</sup> و ... استفاده می‌گردد. در این گزارش از روش انتقال فوریه<sup>۷</sup> که در بخش ۷-۸ معرفی شده است، بهره گرفته خواهد شد.

در ادامه روش SCA با بیان یک مثال توضیح داده می‌شود، در این مثال ۳ موج کسینوس با فرکانس‌های مختلف به عنوان سیگنال‌های منبع در نظر می‌گیریم که توسط ماتریس اختلاط **A** به داده‌های **X** انتقال یافته‌اند. همانطور که ذکر شده روش SCA برای غلبه بر مسائل نامعین ارائه شده است از این رو ماتریس اختلاط را به صورت یک ماتریس  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  در نظر گرفته خواهد شد که با ضرب آن در سیگنال‌های منبع ماتریس **X** یک ماتریس  $\mathbb{R}^{2 \times m}$  است که  $m$  نشان دهنده تعداد داده‌های سیگنال‌های منبع می‌باشد. با توجه به موارد ارائه شده در مورد روش‌های پیشین BSI می‌توان نتیجه گرفته که با استفاده از روش‌های قبلی معرفی شده نمی‌توان به تنهایی از طریق داده‌های ماتریس **X** منابع تشکیل دهنده آن را استخراج نمود. در شکل (۴۸-الف) داده‌های ماتریس **X** نسبت به یک دیگر در فضای زمانی رسم شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود در این شکل اطلاعات خاصی در اختیار مخاطبان قرار نمی‌گیرد. در روش SCA داده‌ها به فضای فرکانسی انتقال داده می‌شوند، در شکل (۴۸-ب) داده‌های مورد بررسی در فضای فرکانسی نسبت به یک دیگر رسم شده‌اند، در این حالت دیده می‌شود که داده‌ها بر روی ۳ جهت به صورت جداگانه دسته‌بندی شده‌اند، در روش SCA جهت دسته‌بندی داده‌ها برابر با جهت قرارگیری ستون‌های ماتریس اختلاط در نظر گرفته می‌شود. این جهت‌های دسته‌بندی را می‌توان با الگوریتم‌های خوشه‌بندی تعیین نمود.

$$S_1 = \cos(2\pi \times 0.3 \times t) \quad S_2 = \cos(2\pi \times 0.7 \times t) \quad S_3 = \cos(2\pi \times 1.3 \times t) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الف

ب

<sup>۱</sup> Georgiev, P.

<sup>۲</sup> Sparse Component Analysis

<sup>۳</sup> L1-minimization

<sup>۴</sup> Discrete cosine transform (DCT)

<sup>۵</sup> Short Time Fourier Transform (STFT)

<sup>۶</sup> Wavelet transform

<sup>۷</sup> Fourier Transform

شکل (۴۸): الف) داده‌ها در فضای زمانی، ب) داده‌ها در فضای فرکانسی

برای خوشه بندی داده‌ها الگوریتم‌های مختلفی مانند  $C$  میانگین<sup>۱</sup>،  $K$  میانگین<sup>۲</sup>،  $C$  میانگین فازی<sup>۳</sup> و ... وجود دارد که با استفاده از این الگوریتم‌ها می‌توان جهت گیری مرکز هریک از خوشه‌ها را مشخص کرد، که این جهت گیری‌ها پس از نرمال شدن برابر با ماتریس اختلاط داده‌ها می‌باشند. در زیر روش  $C$  میانگین فاز که یکی از روش‌های پر کاربرد خوشه بندی می‌باشد معرفی شده است [۲۹، ۳۰].

در این الگوریتم تعداد خوشه‌ها ( $C$ ) از قبل مشخص شده است. تابع هدفی که برای این الگوریتم تعریف شده بصورت زیر می‌باشد:

$$J = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n u_{ik}^m d_{ik}^2 = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n u_{ik}^m \|x_k - v_i\|^2 \quad (62)$$

در رابطه (۶۲)،  $m$  یک عدد حقیقی بزرگتر از یک است که در اکثر موارد برابر دو در نظر گرفته می‌شود و  $v_i$  مختصات مرکز خوشه  $i$  است.  $u_{ik}$  میزان تعلق نمونه  $k$  در خوشه  $i$  را نشان می‌دهد و علامت  $\|*\|$  میزان تشابه (فاصله) نمونه با مرکز خوشه را مشخص می‌کند که می‌توان از توابع دیگری که بیانگر تشابه نمونه و مرکز خوشه باشد نیز استفاده نمود. از این رو ماتریس نهایی  $u \in \mathbb{R}^{c \times n}$  که مولفه‌های آن هر مقداری مابین صفر و یک می‌باشند، اگر مولفه‌های آن برابر اعداد صفر و یک باشد الگوریتم را الگوریتم  $C$  میانگین کلاسیک می‌نامند. مجموع مقادیر هریک از ستون‌های باید  $u$  برابر یک باشد.

$$\sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n u_{ik} = 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (63)$$

با استفاده از شروط فوق و مینیم کردن توابع هدف داریم:

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m x_k}{\sum_{k=1}^n u_{ik}^m} \quad (64)$$

$$u_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left( \frac{\|x_i - c_k\|}{\|x_i - c_j\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (65)$$

پس از ذکر روابط بالا مراحل الگوریتم به صورت زیر می‌باشد.

۱. مقدار دهی اولیه به  $c$ ،  $m$  و  $U$ .
۲. محاسبه مراکز خوشه‌ها با استفاده از رابطه (۶۴).
۳. محاسبه ماتریس تعلق با استفاده از رابطه (۶۵).
۴. محاسبه تابع هزینه رابطه (۶۲).
۵. اگر  $\|J_m - J_{m-1}\| \leq \epsilon$  الگوریتم خاتمه می‌یابد در غیر این صورت به گام ۲ باز می‌گردیم.

<sup>۱</sup> C-means

<sup>۲</sup> K-means

<sup>۳</sup> Fuzzy C-means

پس از تعیین جهت گیری مرکز هریک از خوشه‌ها ماتریس  $\nu$  تشکیل می‌شود که پس از نرمال کردن آن به سطر آخری می‌توان آن را برابر با ماتریس اختلاط تخمینی  $\tilde{\mathbf{A}}$  قرار داد. اگر معادله یک معادله معین باشد می‌توان با معکوس کردن  $\tilde{\mathbf{A}}$  به دست آمده و ضرب آن در  $\mathbf{X}$  سیگنال‌های منبع را محاسبه کرد اما در شرایط نامعین باید از روش‌های مانند حداقل کننده L1 استفاده کرد در این روش با حل رابطه (۶۶) می‌توان سیگنال‌های منبع را تعیین کرد.

$$(f) = \arg \min \|S(f)\|_{L1} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}(f) = \mathbf{X}(f) \quad (66)$$

$f$  نشان دهنده وجود داده‌ها در فضای فرکانسی است که پس از تعیین سیگنال‌های منبع در فضای فرکانسی می‌توان آنها را به فضای زمانی اولیه انتقال داد، در رابطه (۶۶) داریم  $\|S(f)\|_{L1} = \sum_{i=1}^n |S_i(f)|$  که  $n$  نشان دهنده تعداد سیگنال‌های منبع می‌باشد. کد متلب روش SCA در بخش ۸-۵ آورده شده.

### ۲-۳- بررسی عددی روش SCA:

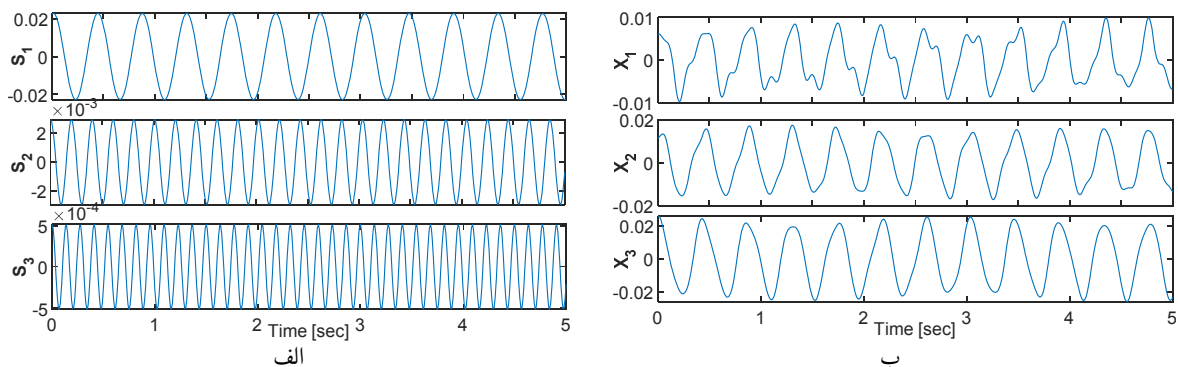
مثال ۱. در این مثال ۳ موج با فرکانس‌های مختلف به مدت ۵ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای 100Hz) به عنوان سیگنال‌های منبع در نظر گرفته می‌شوند که با استفاده از ماتریس اختلاط  $\mathbf{A}$  به  $\mathbf{X}$  تبدیل می‌گردند، حال با استفاده از مقادیر  $\mathbf{X}$  و استفاده از روش SCA مقادیر سیگنال‌های منبع و ماتریس  $\mathbf{A}$  محاسبه می‌گردد و میزان دقت محاسبات با استفاده از MAC اندازه گیری می‌شود. مقادیر سیگنال‌های منبع که با  $\mathbf{S}$  نشان داده شده است به صورت زیر می‌باشد.

$$S_1 = 0.022408 \times \cos(14.52 \times t) + \left( \frac{0.016213}{14.52} \right) \times \sin(14.52 \times t)$$

$$S_2 = 0.0029216 \times \cos(31.05 \times t) + \left( \frac{0.001437}{31.05} \right) \times \sin(31.05 \times t)$$

$$S_3 = 0.00051333 \times \cos(46.1 \times t) + \left( \frac{0.00022433}{46.1} \right) \times \sin(46.1 \times t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A} \times \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 \end{bmatrix}$$



شکل (۴۹): (الف) سیگنال‌های منبع، (ب) سیگنال‌های مختلط شده.

۱. انتقال داده‌ها از فضای زمانی به فضای فرکانسی با استفاده از انتقال فوریه سریع (STFT).

۲. محاسبه مراکز خوشه‌ها با استفاده از رابطه (۶۴).

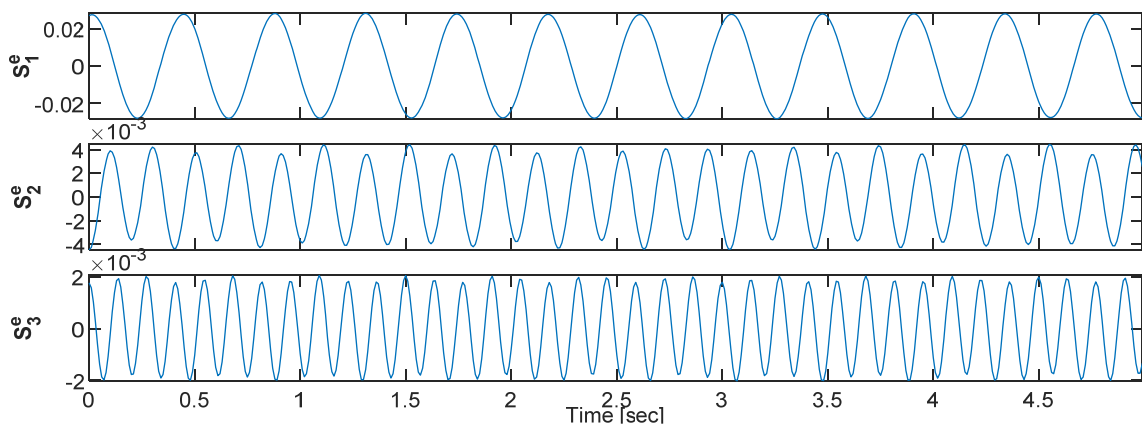
$$v = \begin{bmatrix} -24.58 & 48.89 & 52.06 \\ -52.86 & 40.14 & -82.47 \\ -81.24 & -76.87 & 8.44 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

۳. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $v$  به سطر آخر و آن و محاسبه خطای تخمینی با استفاده از روش MAC.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n = \begin{bmatrix} 0.30257 & -0.636 & 6.1638 \\ 0.64965 & -0.522 & -9.764 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC_{SCA} = [1 \quad 0.996 \quad 0.994]$$

۴. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).

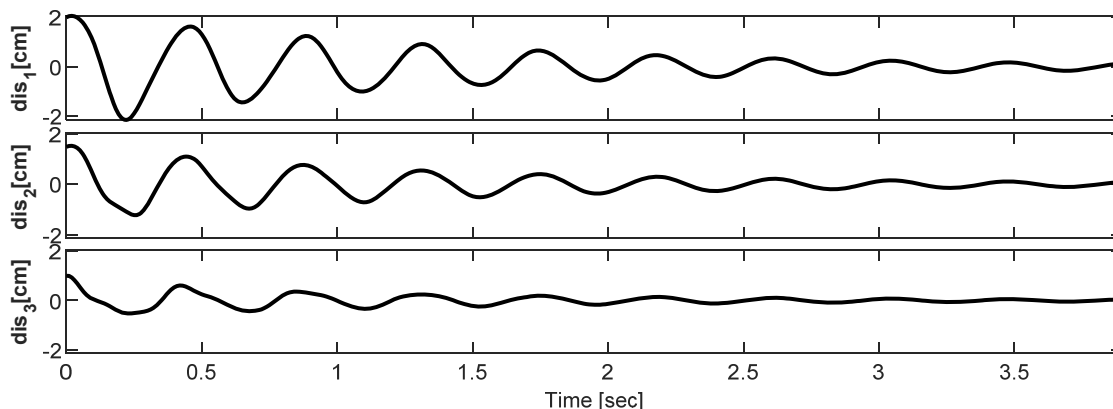


شکل (۵۰): داده‌های منبع تخمین‌زده شده.

مثال ۲. در این مثال یک سازه ۳ طبقه که مشخصات آن در زیر ذکر شده در زمان ۴ ثانیه و با گام‌های زمانی ۰/۰۱ ثانیه (فرکانس مبنای ۱۰۰Hz) تحت ارتعاش آزاد قرار می‌گیرد که با استفاده از جابجایی‌های  $[0.01 \quad 0.015 \quad 0.02]$  و سرعت‌های  $[0.02 \quad 0.04 \quad 0.06]$  در طبقات ۱، ۲ و ۳ ایجاد می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های CP اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین‌زده شده و درصد خطای تخمین این روش‌ها محاسبه می‌گردد.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad \zeta = 5\%$$

در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش CP می‌باشند.



شکل (۵۱): جابجایی دینامیکی سازه

۱. انتقال داده‌ها از فضای زمانی به فضای فرکانسی با استفاده از انتقال فوریه.

۲. محاسبه مراکز خوشه‌ها با استفاده از رابطه (۶۴).

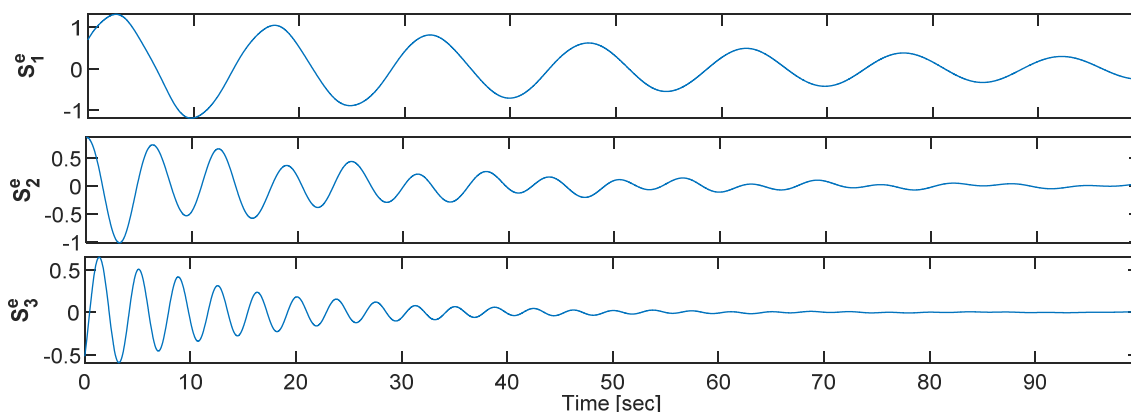
$$v = \begin{bmatrix} -34.94 & 67.58 & 9.75 \\ -59.24 & -2.26 & -80.49 \\ -72.72 & -73.13 & 25.95 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

۳. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $v$  به سطر آخر و آن و محاسبه خطای تخمینی با استفاده از روش MAC.

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} 0.477 & -0.9241 & 0.3758 \\ 0.7968 & 0.0309 & -3.101 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

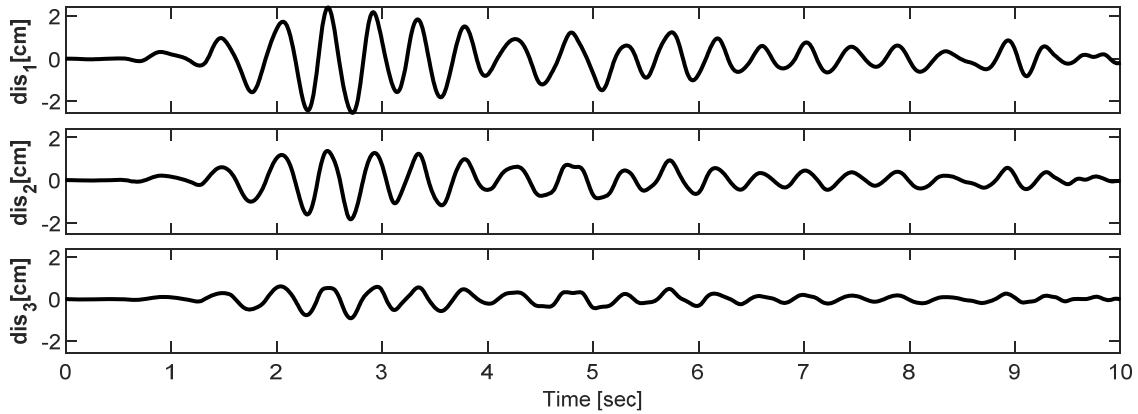
$$MAC_{SCA} = [99.96 \quad 99.79 \quad 95.12]$$

۴. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۵۲): داده‌های منبع تخمین زده شده.

مثال ۳. در این بخش سازه موجود در مثال ۲ به مدت ۱۰ ثانیه تحت اثر زلزله ELcentro قرار می‌گیریم. سپس با استفاده از روش‌های SCA، اشکال مودی سازه و فرکانس آن تخمین زده می‌شود و درصد خطای تخمین محاسبه می‌گردد. در شکل زیر جابجایی‌های سازه تحت شرایط اولیه ذکر شده آورده شده است که این جابجایی‌ها همان داده‌های مخلوط شده مورد نیاز روش SCA می‌باشند.



شکل (۵۳): جابجای دینامیکی سازه

۱. انتقال داده‌ها از فضای زمانی به فضای فرکانسی با استفاده از انتقال فوریه.

۲. محاسبه مراکز خوشه‌ها با استفاده از رابطه (۶۴).

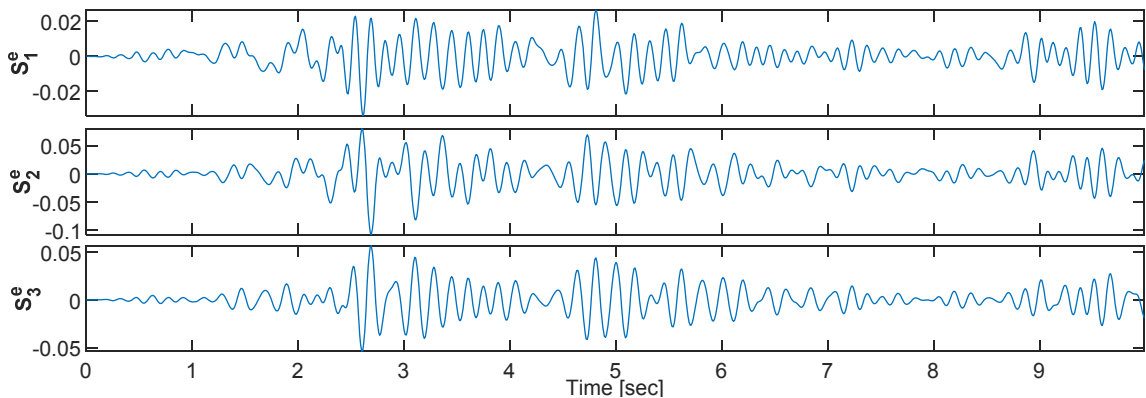
$$v = \begin{bmatrix} -24.19 & 50.66 & 68.4 \\ -51.58 & 64.39 & 72.47 \\ -82.06 & -53.45 & 6.34 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

۳. نرمال کردن ستون‌های ماتریس  $v$  به سطر آخر و آن و محاسبه خطای تخمینی با استفاده از روش MAC.

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} 0.2948 & -0.9477 & 10.785 \\ 0.6286 & -1.204 & 11.428 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MAC = [99.98 \quad 92.02 \quad 0]$$

۴. محاسبه داده‌های منبع با استفاده از رابطه (۲).



شکل (۵۴): داده‌های منبع تخمین زده شده.

## ۷. تعریف مورد نیاز:

۷-۱- واریانس و کواریانس:

واریانس داده‌ها  $X$  با ابعاد  $m \times n$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^T - \frac{\mathbf{L}\mathbf{L}^T \mathbf{X}^T}{n} \quad (67)$$

$$\text{var}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}|^2 \quad i = 1, \dots, m \quad (68)$$

در رابطه (66)،  $\mathbf{a}$  با ابعاد  $m \times n$  نشان دهنده داده‌ها با میانگین صفر می‌باشد و در رابطه (67)،  $\text{var}(\mathbf{X})$  با ابعاد  $m \times 1$  نشان دهنده واریانس داده‌ها می‌باشد. کواریانس نشان‌دهنده ارتباط بین دسته‌های داده‌ها است و به صورت زیر محاسبه می‌گردد که  $\mathbf{C}$  با ابعاد  $m \times m$  نشان دهنده کواریانس داده‌ها می‌باشد.

$$\mathbf{C} = \text{cov}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}{n-1} \quad (69)$$

برای کواریانس داریم:

- کواریانس داده‌های  $\mathbf{X}$  همواره یک ماتریس مربعی  $m \times m$  است.
- مقادیر روی قطر ماتریس کواریانس نشان دهنده واریانس داده‌ها می‌باشد.
- مقادیر غیر قطری ماتریس کواریانس نشان دهنده وابستگی بین داده‌ها می‌باشد.

### ۷-۲- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

ماتریس مربعی  $\mathbf{A}_{n \times n}$  با  $n$  سطر و معادله زیر که در آن  $\lambda$  یک عدد اسکالر است را در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}\lambda \quad (70)$$

مقادیری از  $\mathbf{v}$  را که در آن معادله (70) دارای جواب‌های مانند  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$  باشد مقادیر ویژه یا مقادیر مشخصه  $\lambda$  می‌نامند و بردار  $\mathbf{v}$  را بردار ویژه مربوط به این مقدار ویژه گویند. در سیستم‌های چند درجه آزاد مقادیر ویژه برابر با مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش و بردارهای ویژه اشکال مدی این ارتعاشات می‌باشند.

### ۷-۳- تجزیه مقادیر منفرد (SVD):

محاسبه SVD برای ماتریس  $\mathbf{X}_{m \times n}$  به صورت زیر است.

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (71)$$

- ماتریس  $\mathbf{\Sigma}_{m \times n}$  یک ماتریس قطری است که شامل  $m$  مقدار منفرد  $\sigma_i$  است ( $0 < \sigma_m < \dots < \sigma_2 < \sigma_1$ ). که این مقادیر منفرد با جذر مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  برابر هستند.
- ماتریس‌های  $\mathbf{U}_{m \times m}$  و  $\mathbf{V}_{n \times n}$  به ترتیب برابر با بردارهای منفرد چپ و راست هستند.  $\mathbf{U}_{m \times m}$  برابر با بردارهای ویژه  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  و  $\mathbf{V}_{n \times n}$  برابر با بردارهای ویژه  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  می‌باشند.

### ۷-۴- نویز

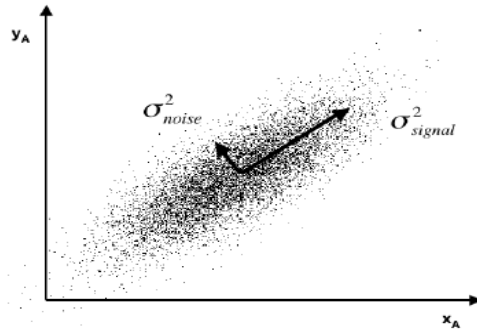
به دسته‌ای از داده‌ها که مقدار کم از اطلاعات در باره سیستم را می‌توان از آنها استخراج کرد و یا هیچ اطلاعاتی را در اختیار ما قرار نمی‌دهند، مقایسه مطلق برای نویز وجود ندارد اما می‌توان نسب آن را با داده‌های اندازه‌گیری شده به دست آورد. یک روش اندازه‌گیری مرسوم روش سیگنال به نویز (SNR)<sup>۲</sup> یا نسب واریانس‌ها<sup>۳</sup> است.

<sup>۱</sup> singular value decomposition

<sup>۲</sup> Signal-to-noise

$$SNR = \frac{\sigma_{signal}^2}{\sigma_{noise}^2} \quad (72)$$

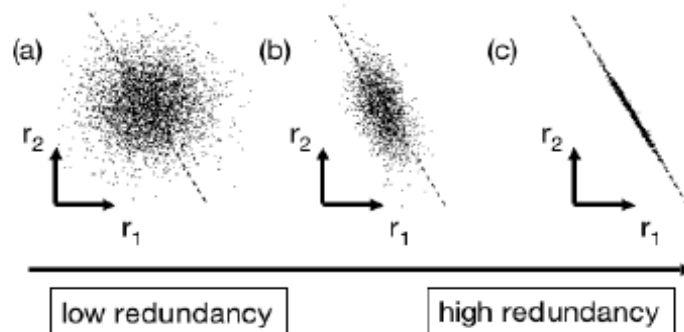
مقادیر بالای SNR ( $\gg 1$ ) نشان دهنده دقت بالای داده ها است و مقادیر پایین آن نشان دهنده آلودگی داده ها به نویز می باشد. در شکل زیر یک دسته از داده ها نشان داده شده است که در آن جهت داده ها و نویز نشان داده شده است هر داده ای که بر روی خط سیگنال نیست به نویز اشاره دارد در واقع نسبت SNR نشان دهنده مقدار پهنای شکل زیر می باشد مقادیر بالای آن داده ها را به سمت شکلی مانند خط می برد در حالی که مقادیر برابر ۱ آن داده ها را به شکل یک دایره در می آورد.



شکل (۵۴): اغتشاش (noise).

#### ۷-۵- فراوانی

در بخش بررسی سازه های دینامیکی فراوانی هنگامی به وجود می آید که چند حسگر موجود اطلاعات دینامیکی مشابه به همی را ضبط کنند. در شکل ۲ حالت های مختلف آشفتگی نشان داده شده است که می توان با توجه به آن به درک بهتری از آشفتگی رسید. در شکل ۲ اندازه گیری ها بین دو سری از داده های دلخواه نشان داده شده است. در حالت a داده ها بدون آشفتگی نشان داده شده اند در حقیقت داده های دسته اول هیچ وابستگی به داده های دسته دوم ندارند، در شکل c داده ها با نسبت بالای فراوانی رسم شده اند که نشان دهنده وابستگی شدید داده ها به هم است. در این حالت با توجه به تشابه داده ها می توان فقط یک دسته از داده ها را رسم کرد و این امر باعث کاهش حسگرهای موجود در سازه می شود.



شکل (۵۶): پراکنندگی.

#### ۷-۶- نورم

در ریاضیات نرم در مواردی استفاده می گردد که اعضای داده ها به مقادیر مثبت محدود باشند. تابع حقیقی  $\|*\|$  بر فضای برداری X را نرم می نامند اگر سه شرط زیر را ارضاء کند [۳۱]:

۱. به ازاء هر  $x \in \mathbf{X}$ ،  $\|x\| \geq 0$  و  $\|x\| = 0$  اگر و فقط اگر  $x = 0$ .

۲. به ازاء هر  $x$  و  $\alpha \in R$ ،  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .

۳. به ازاء هر  $x, y \in \mathbf{X}$ ،  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

فضای برداری  $\mathbf{X}$  در صورتی که شرایط ذکر شده را ارضاء کند، فضای برداری نرم‌دار نامیده می‌شود. در صورت فرض  $1 \leq p < \infty$ ، نرم  $p$  با استفاده از رابطه زیر برای بردار  $\mathbf{X}$  محاسبه می‌گردد.

$$\|X\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |X_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (73)$$

برای محاسبه نرم ماتریس  $\mathbf{A}$  از روابط زیر استفاده می‌شود.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j < n} \sum_{i=1}^n |A_{ij}| \quad (74)$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max(\text{eigenvalue}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}))} \quad (75)$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i \leq m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}| \quad (76)$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2} \quad (77)$$

## ۷-۸- انتقال فوریه

توابع مورد استفاده در مهندسی و توابع نشان دهنده سیگنال‌ها به طور معمول توابعی از زمان هستند (در فضای زمانی تعریف شده‌اند) که برای حل بسیاری از مسائل در مهندسی بهتر است که این توابع به فضای فرکانسی انتقال داده شوند زیرا در این فضا ویژگی‌های دارند که می‌توان به سادگی آن‌ها را محاسبه کرد. انتقال فوریه تبدیلی است که داده‌ها را از فضای زمانی  $X(t)$  به فضای فرکانسی  $X(f)$  انتقال می‌دهد. تبدیل فوریه برای توابعی که در فضای زمانی پیوسته و گسسته وجود دارند به صورت‌های زیر می‌باشد.

### ۷-۸-۱- تبدیل فوریه پیوسته

برای انتقال داده‌ها در فضای زمانی  $X(t)$  به فضای فرکانسی  $X(f)$  از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$X(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-ift} dt \quad (78)$$

عکس رابطه بالا برای انتقال داده‌ها از فضای فرکانسی به فضای زمانی به صورت زیر است.

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{ift} dt \quad (79)$$

### ۷-۸-۲- تبدیل فوریه گسسته<sup>۱</sup>

برای انتقال داده‌ها در فضای زمانی گسسته  $X(n)$  به فضای فرکانسی  $X(f)$  از رابطه زیر استفاده می‌شود.

<sup>۱</sup> Discrete Fourier transform (DFT)

$$X_{(f)} = \sum_{n=0}^{N-1} X_{(n)} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (80)$$

عکس رابطه بالا برای انتقال داده‌ها از فضای فرکانسی به فضای زمانی به صورت زیر است.

$$X_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_{(f)} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (81)$$

### ۷-۸-۳- تبدیل فوریه زمان کوتاه

تبدیل فوریه زمان کوتاه<sup>۱</sup> یک تبدیل مرتبط با فوریه است که برای مشخص کردن فرکانس و فاز در قسمت‌های جدا شده سیگنال‌های در حال تغییر استفاده می‌شود. در این روش تبدیل فوریه بر روی بازه‌های از سیگنال اصلی اعمال می‌گردد در حالت کلی این بازه‌های جدا شده ابتدا در یک تابع پنجره<sup>۲</sup> که تنها در یک زمان بسیار کوتاه صفر نیست ضرب شده سپس تبدیل فوریه بر آن اعمال می‌گردد سپس این تابع پنجره بر روی سیگنال لغزانده می‌شود و هر بار تبدیل فوریه بر روی بخش جدا شده اعمال می‌گردد (بخش‌های سیگنال معمولاً باهم تداخل دارند تا از وقوع خطا در قسمت‌های مرزی بین دو بخش جلوگیری شود).

### ۷-۸-۳-۱- تبدیل فوریه زمان کوتاه پیوسته

$$STFT\{\mathbf{x}_{(t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(t)} W_{(t-\tau)} e^{-iWt} dt \quad (82)$$

در رابطه بالا  $W_{(t-\tau)}$  نشان دهنده تابع پنجره است که معمولاً از تابع پنجره هن<sup>۳</sup> یا پنجره گوسی<sup>۴</sup> استفاده می‌شود.

### ۷-۸-۳-۲- تبدیل فوریه زمان کوتاه گسسته

$$STFT\{\mathbf{x}_{(n)}\} = \sum X_{(n)} W_{(t-\tau)} e^{-iWt} \quad (83)$$

<sup>۱</sup> Short Sime Fourier Transform (STFT)

<sup>۲</sup> Window Function

<sup>۳</sup> Hann window

<sup>۴</sup> Gaussian window

## ۸. کدهای MATLAB : ۸-۱ روش PCA

```
function [Vv,signals]=PCAEVDj(x)
%%
[n1,n2]=size(x);
if n1<n2
    disp('x must be column vector');
    x=x';
end
%% PCA
[Ms,~]=size(x);
X1(:,:)=x(:,:)-(kron(mean(x(:,:))',ones(1,Ms))));
Cc=cov(X1);
[Vv,Ee]=eig(Cc);

Ee=diag(Ee);
[~,rindices]=sort(-1*Ee);
Ee=Ee(rindices);
Vv=Vv(:,rindices);
signals=X1*inv(Vv');

end
```

## ۸-۲ روش SOBI

```
function [H,S]=SOBIj(X,p)
%% Sobi
if nargin<2
    p=600; %for correlation matrices
end
[Ns,Ne]=size(X); %N=Ne m=Ns
if Ns>Ne
    Y=X';
else
    Y=X;
end
[Ns,Ne]=size(Y);
%% Make the data zero mean
X1(:,:)=Y(:,:)-kron(mean(Y(:,:))',ones(1,Ne));

%% Pre-whiten the data based directly on SVD
[X2,Q]=whiten(X1);
%% Estimate the correlation matrices
Kk=1;

pm=p*Ns;
for u=1:Ns:pm,
    Kk=Kk+1;
    for T = 1:1
        if T == 1
```

```

Rxp=X2(:,Kk:Ne,T)*X2(:,1:Ne-Kk+1,T)/(Ne-Kk+1)/1;
else
Rxp=Rxp+X2(:,Kk:Ne,T)*X2(:,1:Ne-Kk+1,t)/(Ne-Kk+1)/1;
end;
end;
Mn(:,u:u+Ns-1)=norm(Rxp,'fro')*Rxp;
end;

%% Perform joint diagonalization

[ Vv , ~]= rjd(Mn);

%% Estimate the mixing matrix
H=pinv(Q)*Vv;

%% Estimate the source activities
S=Vv'*X2;
end

```

## FastICA روش ۳-۸

```

function [Aa,Ss]=fastICA(X,Algo,t)
%% post processing
%make normal data
[Ns,Ne]=size(X);
X1(:,:)=X(:,:)-kron(mean(X(:,:))',ones(1,Ne));

[X2,wm]=whiten(X1);
dwm=inv(wm);
w = randn (Ns, 1);
Ba=zeros(Ns);
wOld = zeros(size(w));
wOld2 = zeros(size(w));
round=1;
a1=1;
a2=1;
i = 1;
while round<=Ns
    while i<=1001;
        w = w - Ba * Ba' * w;
        w = w / norm(w);
        if norm(w - wOld) < 0.0001 || norm(w + wOld) < 0.0001
            Ba(:, round) = w;
            % Calculate the de-whitened vector.
            Aa(:,round) = dwm * w;
            % Calculate ICA filter.
            Wa(round,:)= w' * wm;
            break
        end
        wOld2 = wOld;
        wOld = w;
    end
    switch Algo

```

```

case 'G'
    u = X2' * w;
    u2=u.^2;
    ex=exp(-a2 * u2/2);
    gauss = u.*ex;
    dGauss = (1 - a2 * u2) .*ex;
    w = (X2 * gauss - sum(dGauss)' * w) / Ne;
case 'Tanh'
    hypTan = tanh(a1 * X2' * w);
    w = (X2 * hypTan - a1 * sum(1 - hypTan.^ 2)' * w) / Ne;
    w = w / norm(w);
case 'pow3'
    w = (X2 * ((X2' * w) .^ 3)) / Ne - 3 * w;
case 'skew'
    w = (X2 * ((X2' * w) .^ 2)) / Ne;
end
w = w / norm(w);
i = i + 1;
end
round = round + 1;
i=1;
end
Ss=Ba'*X2;
end

```

CP ۴-۸ روش

```

function [W,A,ys]=CP(X)
%% complexity pursuit
[n11,n22]=size(X);
if n11<n22
    X=X';
    disp('X most be column matrix');
end
[n11,~]=size(X);
% Maximum length of Moving Average
n      = 8;
% Set short and long half-lives.
shf    = 1;
lhf    = 900000;

% Short-term mast to make Moving Average.
s_mask=MaskP(n,shf,n11);

% Long-term mast to make Moving Average.
l_mask=MaskP(n,lhf,n11);

%% Moving Average
S=FilterP(X',s_mask');
L=FilterP(X',l_mask');

U=COVAR(S',X);

```

```

V=COVAR(L',X);
[W,~]=eig(V,U); W=real(W);
ys = X*W;
A=inv(W');

```

## SCA روش ۵-۸

```

function [source,A]=SCAj(X,A,L,e)
[m, n] = size(X);
if m>n
    error('X must be row vectors');
end

if nargin<2
    A='rec';
end
if nargin < 3,
    L = floor(n/4);
end
if nargin < 4
    e = 0.0007;
end

%%
hop=L/4;
overlap = L - hop;
switch A
    case 'rec'
        w = rectwin(L)';
    case 'hamm'
        w=hamming(L)';
end

%%short time fft transform using rect window.

[Frame_X_Fs] = Short_time_fft(X,w,overlap);

%%maximum frequency energy detection
[n1,~,n2]=size(Frame_X_Fs);
energy=zeros(n2,n1);
for i=1:m
    energy(i,:)=sum(abs(squeeze(Frame_X_Fs(:, :, i)))'.^2);
end
energysum=sum(energy);
%%
delta = max(abs(energysum))*e;

[n3,n4]=findpeaks(energysum);
G=n3>delta;

```

```

n3=n3(G);
n4=n4(G);
maxtab=[n4',n3'];
%%
[a1,b1,~]=size(Frame_X_Fs);

if size(maxtab(:,1))/2<m
    error(' number of source must be more than or equal to sensor, you can try a lower value of e');
end
if size(maxtab(:,1))/2>10
    warning('The detected sources are more 10, which may lead to a high computational burden. ');
end
%%utilize the scatter of frequency energy maximum to detect the cluster center respectively.
for i=1:size(maxtab(:,1))/2
    data=[];
    for j=1:m
        data(j,:)=reshape(Frame_X_Fs(maxtab(i,1),:,:),1,1*b1);
    end

    realdata=real(data);
    realdatatempr=realdata;

    for j=1:m
        normrealdatatempr(j,:)=realdatatempr(j,:)/sqrt(sum(realdatatempr.^2));
    end

    [center,~,~]=fcm(normrealdatatempr,2);
    centercell{i}=center;
    clc
end

%%A is the mixing matrix after normlize.
A=[];
for i=1:size(maxtab(:,1))/2
    A(:,i)=centercell{i}(1,:);
end
%%utilize the real and imag part of stft of X to separate source respectively.
for i=1:m
    realX(i,:)=reshape(real(Frame_X_Fs(:,i)),1,a1*b1);
end

for i=1:m
    imagX(i,:)=reshape(imag(Frame_X_Fs(:,i)),1,a1*b1);
end
realS=L1_norm_min2(realX,A);
imagS=L1_norm_min2(imagX,A);
%%construct the real and imag part of source.
newS=complex(realS,imagS);
%% utilize the inverse stft to recover source in time domain.
for i=1:size(maxtab(:,1))/2
    source(i,:)=istft2(reshape(newS(i,:),a1,b1),L/hop,L);

```

clc  
end

## ٩. مراجع

- .١ Bell, A.J. and T.J. Sejnowski, *An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution*. Neural computation, 1995. **7**(6): p. 1129-1159.
- .٢ Gribonval, R. and S. Lesage. *A survey of sparse component analysis for blind source separation: principles, perspectives, and new challenges*. in *ESANN'06 proceedings-14th European Symposium on Artificial Neural Networks*. 2006. d-side publi.
- .٣ Leong, W.Y., W. Liu, and D.P. Mandic, *Blind source extraction: Standard approaches and extensions to noisy and post-nonlinear mixing*. Neurocomputing, 2008. **71**(10-12): p. 2344-2355.
- .٤ Belouchrani, A., et al., *A blind source separation technique using second-order statistics*. IEEE Transactions on signal processing, 1997. **45**(2): p. 434-444.
- .٥ Tong, L., et al., *Indeterminacy and identifiability of blind identification*. IEEE Transactions on circuits and systems, 1991. **38**(5): p. 499-509.
- .٦ Taleb, A. and C. Jutten, *Source separation in post-nonlinear mixtures*. IEEE Transactions on signal Processing, 1999. **47** :(\٠)p. 2807-2820.
- .٧ Dodge, Y. and F. Marriott, *International Statistical Institute*. The Oxford dictionary of statistical terms, 2003.
- .٨ Hossain, M., *Whitening and Coloring Transformations for Multivariate Gaussian Data*.
- .٩ Shlens, J., *A tutorial on principal component analysis: Derivation, Discussion and Singular Value Decomposition*. Mar, 2003. **25**(1): p. 16.
- .١٠ Zhou, W. and D. Chelidze, *Blind source separation based vibration mode identification*. Mechanical systems and signal processing, 2007. **21** :(\^p. 3072-3087.
- .١١ Maleko, M., *A Jacobi algorithm for simultaneous diagonalization of several symmetric matrices*. Department of Numerical Analysis and Computer Science, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2003.
- .١٢ Cardoso, J.-F. and A. Souloumiac *Jacobi angles for simultaneous diagonalization*. SIAM journal on matrix analysis and applications, 1996. **17**(1): p. 161-164.
- .١٣ Hyvärinen, A. and E. Oja, *Independent component analysis: algorithms and applications*. Neural networks, 2000. **13**(4): p. 411-430.
- .١٤ Hyvärinen, A., J. Karhunen, and E. Oja, *Independent component analysis*. Vol. 46. 2004: John Wiley & Sons.
- .١٥ Yang, Y. and S. Nagarajaiah, *Time-frequency blind source separation using independent component analysis for output-only modal identification of highly damped structures*. Journal of Structural Engineering, 2012. **139**(10): p. 1780-1793.
- .١٦ Hyvarinen, A., *Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis*. IEEE transactions on Neural Networks, 1999. **10**(3): p. 626-634.
- .١٧ Stone, J.V., *Blind source separation using temporal predictability*. Neural computation, 2001. **13**(7): p. 1559-1574.
- .١٨ Xie, S., Z. He, and Y. Fu, *A note on Stone's conjecture of blind signal separation*. Neural computation, 2005. **17**(2): p. 321-330.
- .١٩ Stone, J.V., *Blind deconvolution using temporal predictability*. Neurocomputing, 2002. **49**(1): p. 79-86.
- .٢٠ Stone, J.V. *Learning spatio-temporal invariances*. in *In Neural Computation and Psychology Proceedings, LS Smith and PJB Hancock (Eds. 1994. Citeseer*.
- .٢١ Yang, Y. and S. Nagarajaiah, *Blind modal identification of output-only structures in time-domain based on complexity pursuit*. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2013. **42**(13): p. 1885-1905.
- .٢٢ Shi, Z., H. Tang, and Y. Tang, *A fast fixed-point algorithm for complexity pursuit*. Neurocomputing, 2005. **64**: p. 529-536.

- .٢٣ Yang, Y., et al., *Real-time output-only identification of time-varying cable tension from accelerations via complexity pursuit*. Journal of Structural Engineering, 2015. **142** :(\)p. 04015083.
- .٢٤ Georgiev, P., F. Theis, and A. Cichocki,  $X=AS A 2 m2n; S 2 n2N$ . IEEE Transactions on Neural Networks, 2005. **16**(4): p. 993.
- .٢٥ Yang, Y. and S. Nagarajaiah, *Output-only modal identification with limited sensors using sparse component analysis*. Journal of Sound and Vibration, 2013. **332**(19): p. 4741–4765.
- .٢٦ Candes, E. and J. Romberg, *l1-magic: Recovery of sparse signals via convex programming*. URL: www. acm. caltech. edu/l1magic/downloads/l1magic. pdf, 2005. **4**: p. 14.
- .٢٧ Natarajan, B.K. ,*Sparse approximate solutions to linear systems*. SIAM journal on computing, 1995. **24**(2): p. 227–234.
- .٢٨ Donoho, D.L. and M. Elad, *Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via  $\ell 1$  minimization*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2003. **100**(5): p. 2197–2202.
- .٢٩ Bezdek, J.C., *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. 2013: Springer Science & Business Media.
- .٣٠ Ahmed, M.N., et al., *A modified fuzzy c-means algorithm for bias field estimation and segmentation of MRI data*. IEEE transactions on medical imaging, 2002. **21**(3): p. 193–199.
- .٣١ Dahleh, M., M.A. Dahleh, and G. Verghese, *Lectures on dynamic systems and control*. A+ A, 2004. **4**(100): p. 1–100.