دانشکده مهندسی دانشگاه کردستان

پردازش سیگنال: تبدیل فوریه

نویسنده:

دکتر کاوه کرمی

دانشیار سازه گروه مهندسی عمران

دانشگاه کردستان

توابع مورد استفاده در مهندسی و توابع نشان دهنده سیگنال‌ها به طور معمول توابعی از زمان هستند (در فضای زمانی تعریف شده‌اند). برای حل بسیاری از مسائل در مهندسی بهتر است که این توابع به فضای فرکانسی انتقال داده شوند؛ زیرا در این فضا برخی ویژگی‌های مهم سیگنال به سادگی استخراج می‌گردد. انتقال فوریه تبدیلی است که داده‌ها را از فضای زمانی $X(t)$ به فضای فرکانسی $X(f)$ انتقال می‌دهد. تبدیل فوریه برای توابعی که در فضای زمانی پیوسته و گسسته وجود دارند در ادامه آمده است.

۱-تبدیل فوریه پیوسته (CFT)[۱]

برای انتقال داده‌ها در فضای زمانی پیوسته $X_{(t)}$ به فضای فرکانسی $X_{(f)}$ از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$X_{(f)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(t)} e^{-ift} dt \qquad (۱)$$

عکس رابطه بالا برای انتقال داده‌ها از فضای فرکانسی به فضای زمانی به صورت زیر است:

$$X_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(f)} e^{ift} df \qquad (۲)$$

۲- تبدیل فوریه گسسته (DFT)[۲]

برای انتقال داده‌ها در فضای زمانی گسسته $X_{(n)}$ به فضای فرکانسی $X_{(f)}$ از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$X_{(f)} = \sum_{n=0}^{N-1} X_{(n)} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad k = 0, \cdots, N-1 \qquad (۳)$$

عکس رابطه بالا برای انتقال داده‌ها از فضای فرکانسی به فضای زمانی به صورت زیر است.

۱ Continuous Fourier transform (CFT)

۲ Discrete Fourier transform (DFT)

$$X_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X_{(f)} e^{-\frac{2\pi i}{N} k n} \quad k = 0, \cdots, N-1 \qquad (۴)$$

با اینکه تبدیل فوریه دارای توانایی‌های زیادی برای انتقال توابع و سیگنال‌ها از فضای زمانی به فضای فرکانسی است با این وجود دارای یک ضعف اساسی می‌باشد. در فضای فرکانسی اطلاعات زمانی سیگنال قابل مشاهده نیست. از این رو، با بررسی یک سیگنال انتقال یافته با استفاده از تبدیل فوریه نمی‌توان زمان وقوع یک اتفاق در سیگنال را مشخص کرد. اگر سیگنال مورد نظر ایستا[۳] باشد موضوع ذکر شده اهمیت چندانی نداشته و می‌توان از تبدیل فوریه استفاده کرد. اما در شرایطی که سیگنال‌ها نا ایستا[۴] باشند (مانند تحریکانت ناشی از زلزله) تبدیل فوریه نا کارآمد خواهد بود. از این رو، برای جبران این ضعف تبدیل فوریه، تبدیل فوریه زمان کوتاه[۵] معرفی شد. در تبدیل فوریه زمان کوتاه برخلاف تبدیل فوریه عادی که تبدیل بر روی کل سیگنال اعمال می‌شد، در تبدیل فوریه زمان کوتاه تبدیل در پنجره‌های کوتاه زمانی به سیگنال اعمال می‌گردد. به این ترتیب سیگنال انتقال یافته از حوزه یک بعدی زمان به حوزه دو بعدی زمان- فرکانس انتقال داده می‌شود.

۳- تبدیل فوریه سریع (FFT)[۶]

در تبدیل فوریه سریع به صورت بازگشتی (Recursively) تبدیل فوریه گسسته را به مسایل کوچک‌تر می‌شکند و زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. انتظار می‌رود که یک الگوریتم FFT بتواند مسئله را در زمانی برابر با ۵۰ ثانیه حل کند، اما این زمان برای تبدیل فوریه گسسته برابر با ۲۰ ساعت خواهد بود.

۴- تبدیل فوریه زمان کوتاه (STFT)

تبدیل فوریه زمان کوتاه یک تبدیل مرتبط با فوریه اســـت که برای مشـــخص کردن فرکانس و فاز در قسمت‌های جدا شده سیگنال‌های نا ایستا استفاده می‌شود. در این روش، تبدیل فوریه بر روی بازه‌های

---

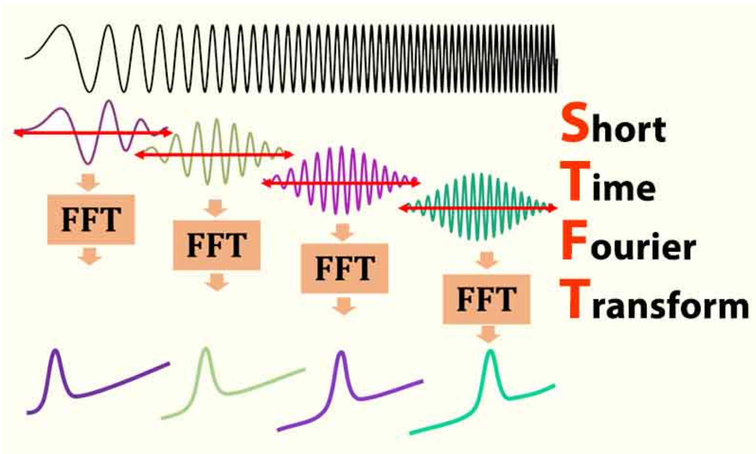
[۳] Stationary

[۴] Non-Stationary

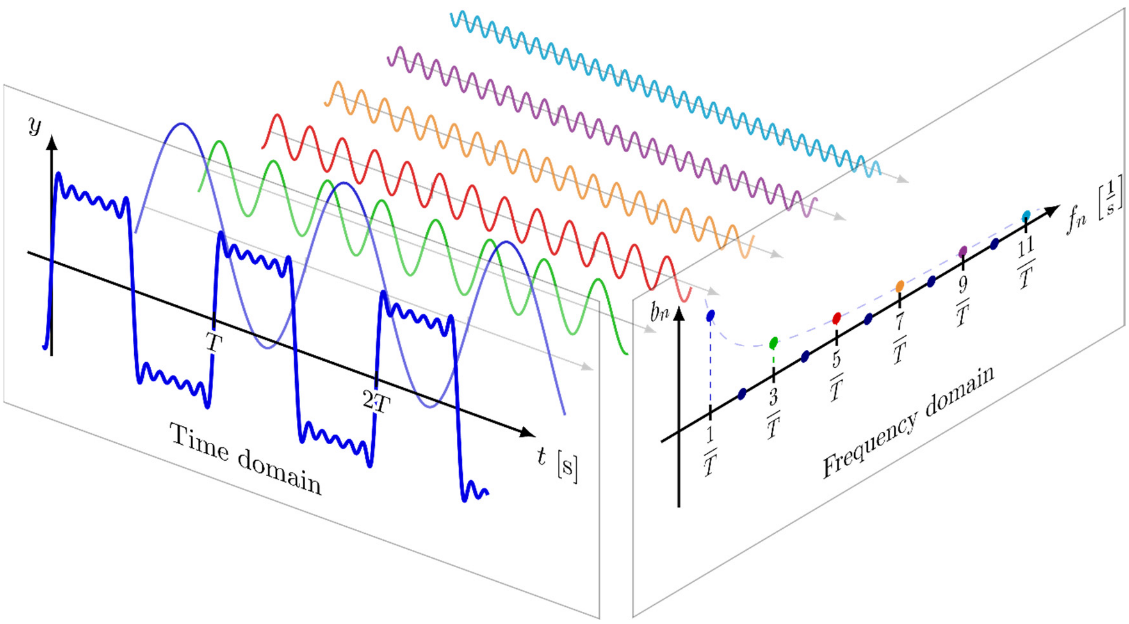
[۵] Short Sime Fourier Transform (STFT)

[۶] Fast Fourier Transform (FFT)

از سیگنال اصلی اعمال می‌گردد. در حالت کلی این بازه‌های جدا شده ابتدا در یک تابع پنجره[۷] که تنها در یک زمان بسیار کوتاه صفر نیست ضرب شده سپس تبدیل فوریه بر آن اعمال می‌گردد. سپس این تابع پنجره بر روی سـیگنال لغزانده می‌شـود و هر بار تبدیل فوریه بر روی بخش جدا شـده اعمال می‌گردد. بخش‌های سـیگنال معمولا باهم تداخل دارند تا از وقوع خطا در قسـمت‌های مرزی بین دو بخش جلوگیری شود.



نمایش شماتیک تبدیل فوریه زمان کوتاه



نمایش تبدیل فوریه زمان کوتاه

[۷] Window Function

۵- تبدیل فوریه زمان کوتاه پیوسته

برای انتقال داده‌ها در فضای زمانی پیوسته $X_{(t)}$ به فضای زمان- فرکانسی $X_{(t,f)}$ از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$STFT\left\{\mathbf{X}_{(t)}\right\} = X_{(t,f)} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(t)} W_{(t-\tau)} e^{-iWt} dt \qquad (۵)$$

در رابطه بالا $W_{(t-\tau)}$ نشان دهنده تابع پنجره است که معمولا از تابع پنجره هن[۸] یا پنجره گوسی[۹] استفاده می‌شود.

۶- تبدیل فوریه زمان کوتاه گسسته

برای انتقال داده‌ها در فضای زمانی گسسته $X_{(n)}$ به فضای زمان- فرکانسی $X_{(n,f)}$ از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$STFT\left\{\mathbf{X}_{(n)}\right\} = X_{(n,f)} = \sum \mathbf{X}_{(n)} W_{(t-\tau)} e^{-iWt} \qquad (۶)$$

با استفاده از تبدیل فوریه زمان کوتاه می‌توان نشان داد که در هر زمان چه میزان فرکانسی در سیگنال وجود دارد. اطلاعات حاصل از این تبدیل دقتی محدود دارند که با اندازه پنجره مورد استفاده ارتباط مستقیم دارد. از معایب این روش می‌توان به ثابت بودن طول پنجره در تمام بازه سیگنال اشاره کرد. این در حالی است که برای سیگنال‌های مختلف و فرکانس‌های متفاوت به پنجره‌های گوناگونی با اندازه‌های متغیر نیاز است. برای غلبه بر این کاستی تبدیل موجک معرفی شد.

---

[۸] Hann window

[۹] Gaussian window

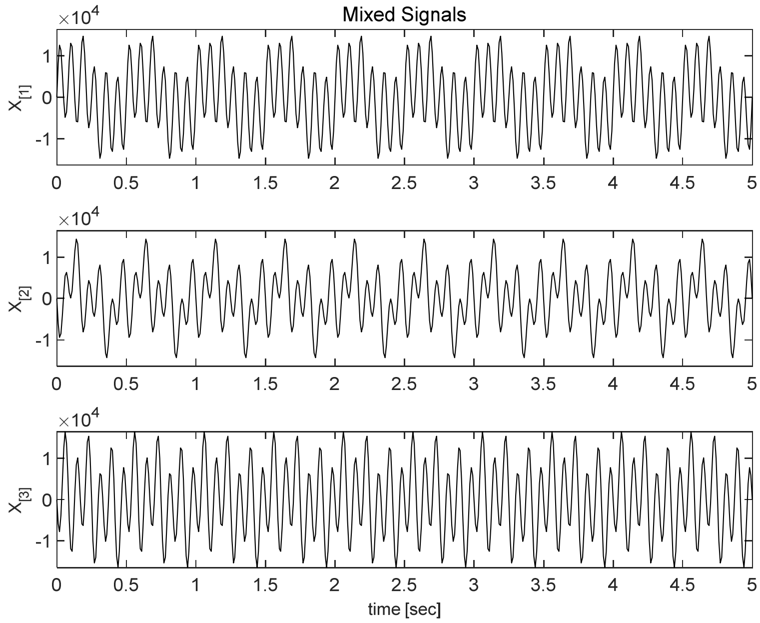
۷- مثال‌های عددی

مثال اول: در ابتدا به بررسی یک مثال ساده پرداخته خواهد شد. در این حالت سه سیگنال سینوسی مختلف با فرکانس و دامنه‌های متفاوت با استفاده از یک ماتریس اختلاط با یکدیگر مخلوط می‌گردند. در این حالت ابتدا بر روی هر یک از سیگنال‌های خروجی معرفی شده تبدیل FFT اعمال شده و نتایج آن با تبدیل STFT مقایسه خواهد شد.

$$\begin{aligned} S_1 &= 50\times\sin(2\times 2\pi t) \\ S_2 &= 100\times\sin(12\times 2\pi t) \\ S_3 &= 20\times\sin(6\times 2\pi t) \end{aligned}$$

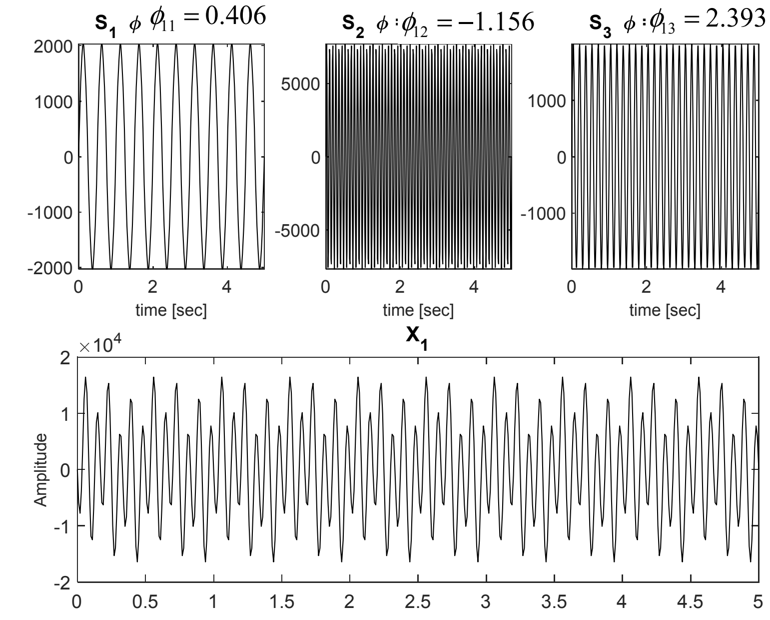
$$A = \begin{bmatrix} 0.406 & -1.156 & 2.393 \\ 0.76931 & -0.689 & -2.562 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

سیگنال‌های مورد نظر در بازه زمانی $5\,\mathrm{sec}$ با گام‌های زمانی $0.01\,\mathrm{sec}$ ارزیابی خواهند شد.

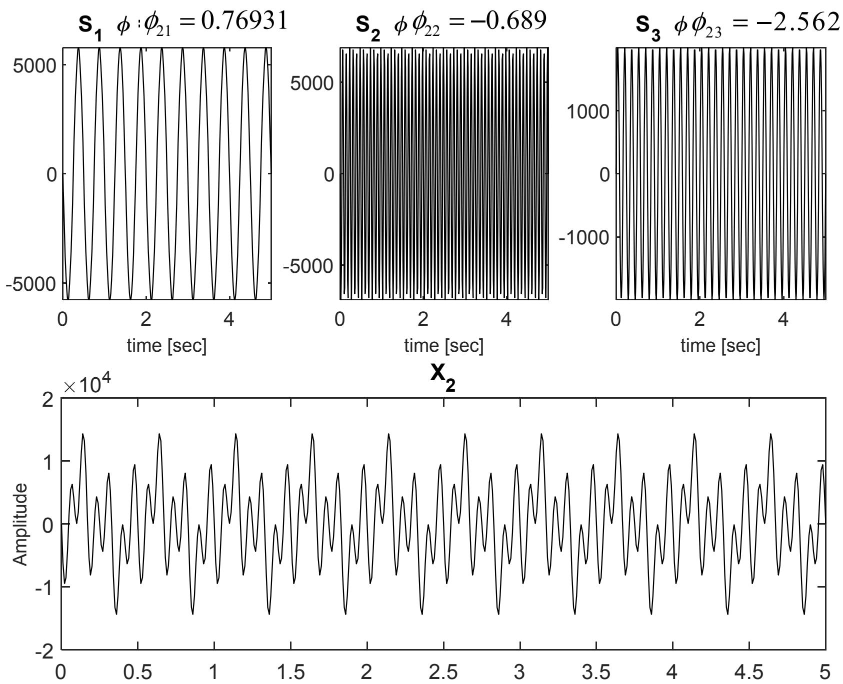


شکل ۱: سیگنال‌های مخلوط شده

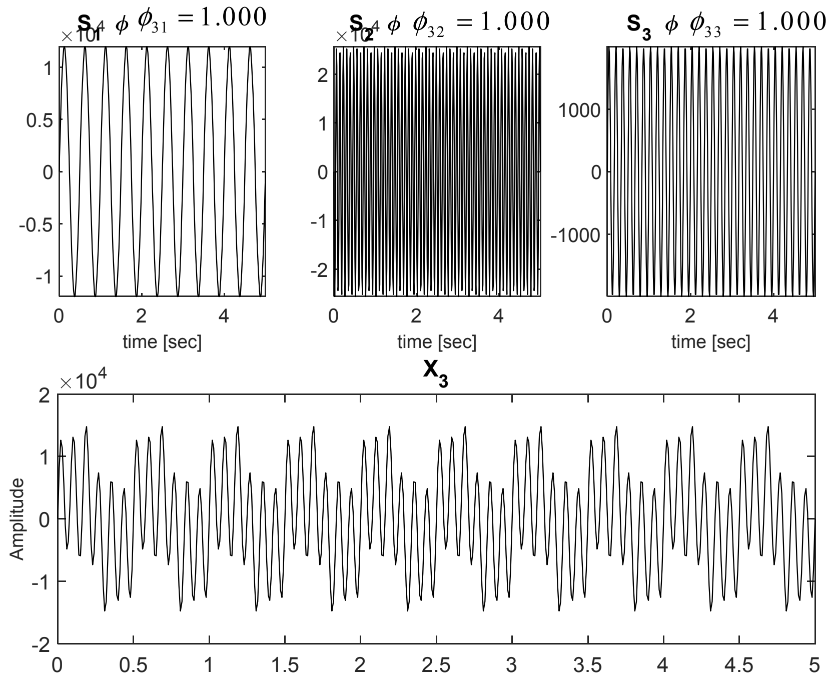
در ادامه می‌توان مشاهده نمود که هر یک از سیگنال‌های خروجی به چه نسبتی از سیگنال‌های اولیه تشکیل می‌گردند.



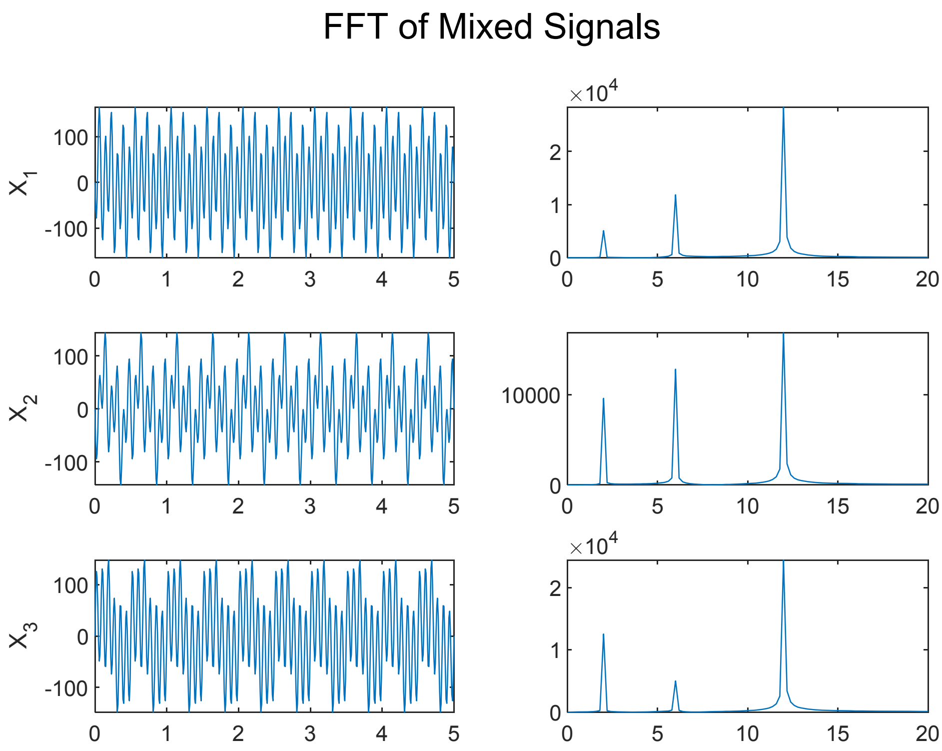
شکل ۲: سیگنال X1



شکل ۳: سیگنال X2

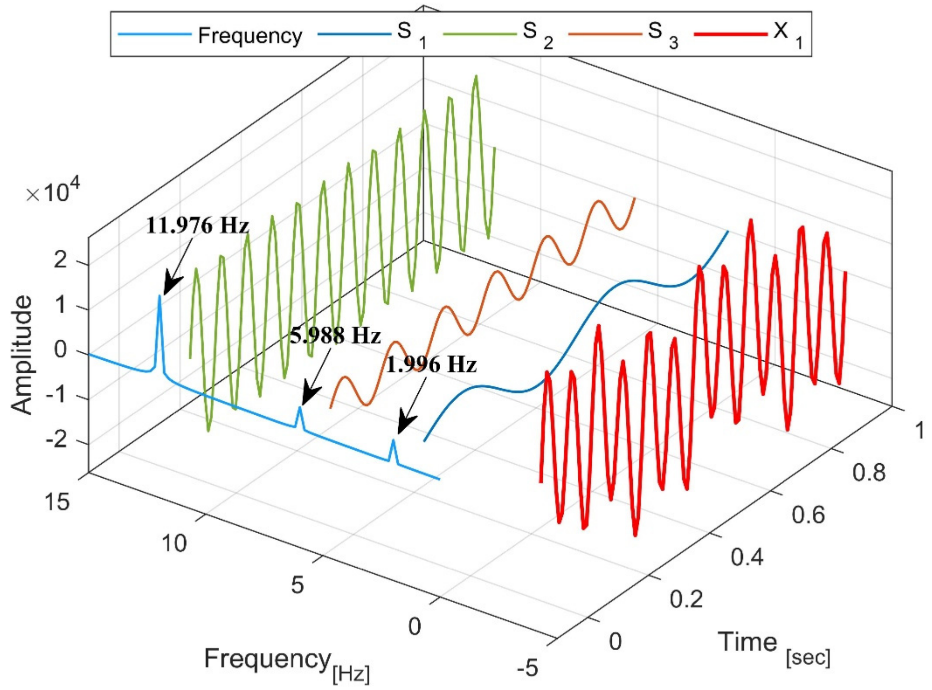


شکل ۴: سیگنال X3

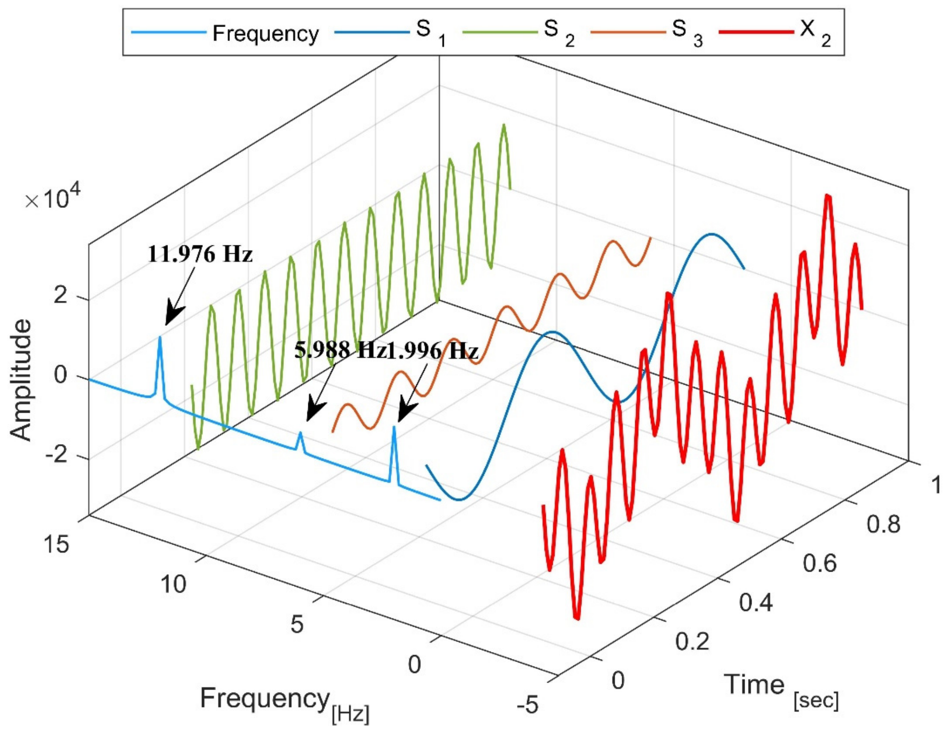


شکل ۵: اعمال تبدیل فوریه بر روی مقادیر سیگنال‌های مخلوط شده

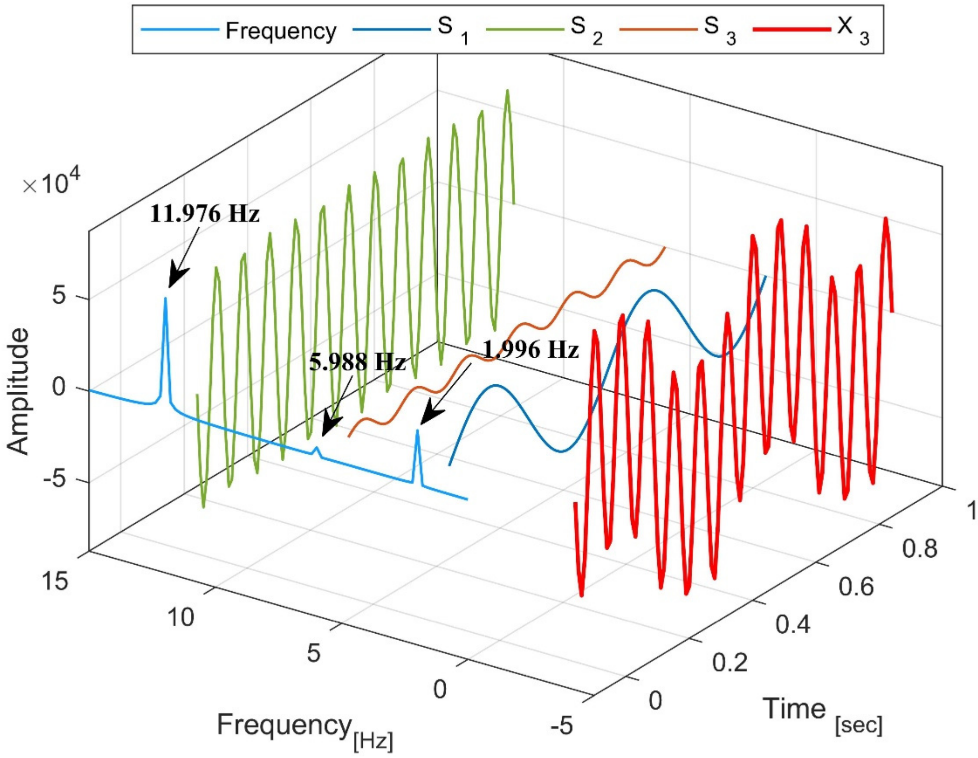
سیگنال‌های نشان داده شده در بالا را می‌توان به صورت تجزیه شده از سیگنال‌های منبع و فرکانس‌های غالبه آن‌ها در شکل‌های بعدی مشاهده نمود.



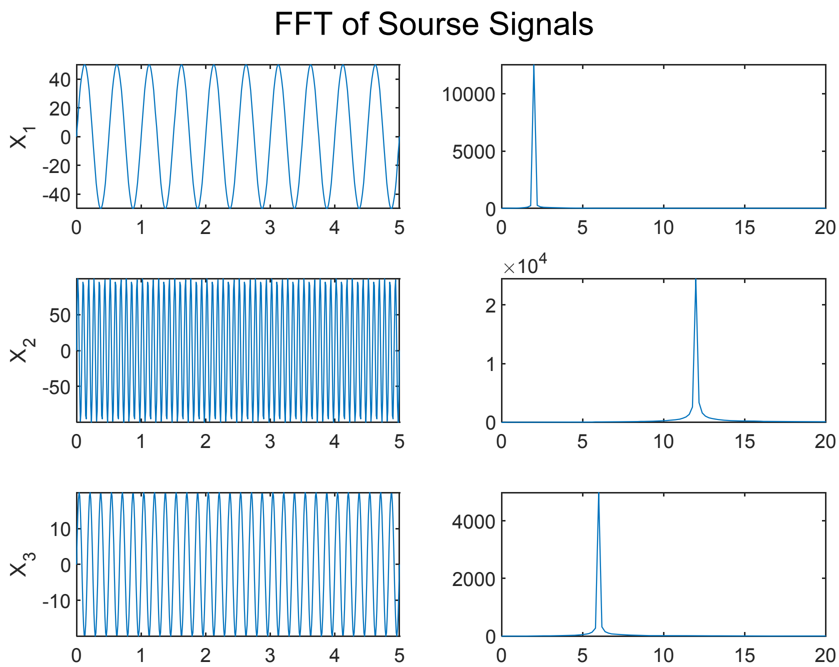
شکل ۵: تجزیه سیگنال X1 به سیگنال‌های تشکیل دهنده و فرکانس این سیگنال.



شکل ۶: تجزیه سیگنال X2 به سیگنال‌های تشکیل دهنده و فرکانس این سیگنال.



شکل ۷: تجزیه سیگنال X3 به سیگنال‌های تشکیل دهنده و فرکانس این سیگنال.

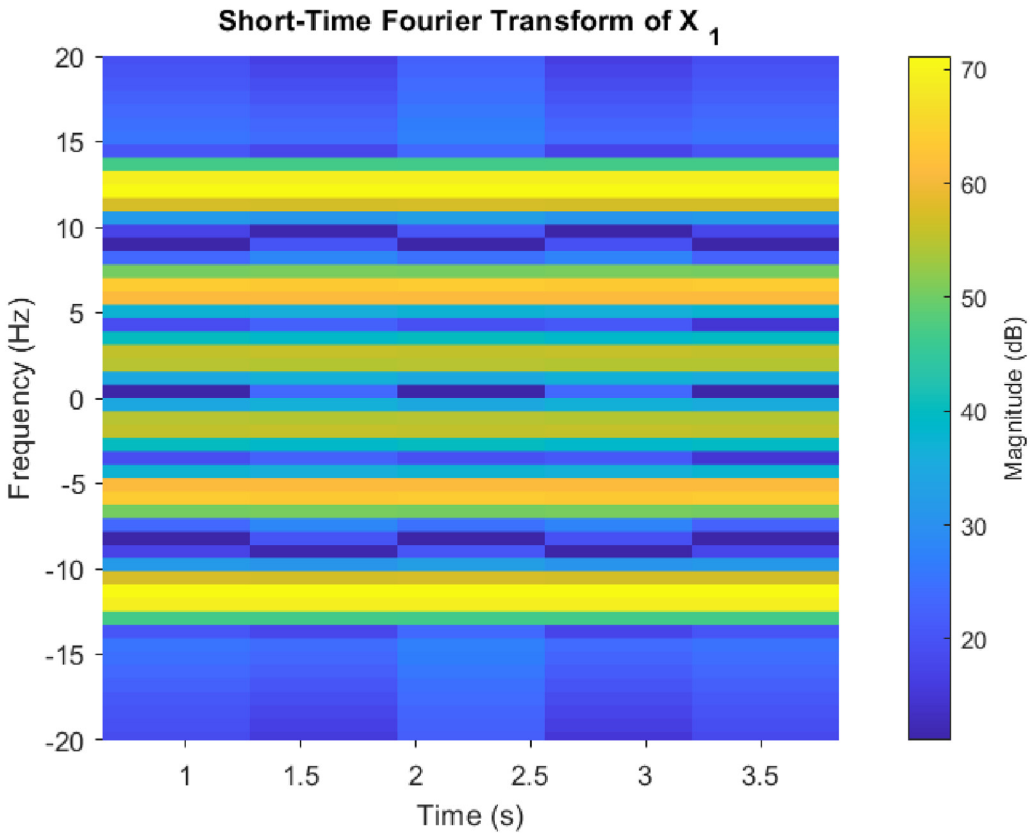


شکل ۸: اعمال تبدیل فوریه بر روی مقادیر سیگنال‌های منبع.

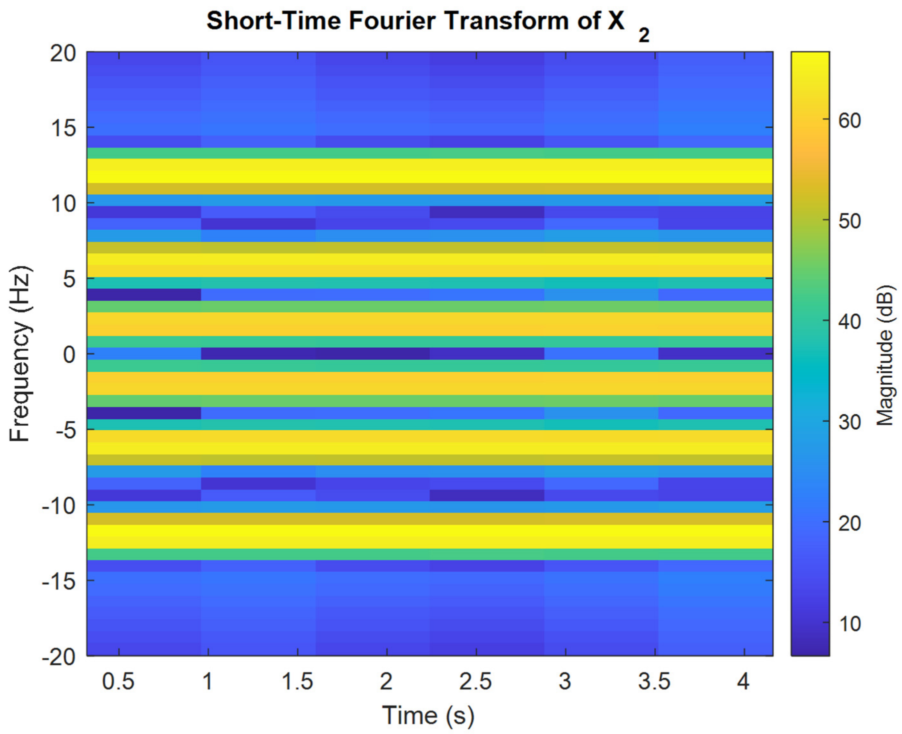
با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌گردد که فرکانس‌های شناسایی شده به ترتیب برابر ۲، ۱۲ و ۶ هرتز می‌باشد که با مقادیر سیگنال‌های اولیه کاملا هم خوانی دارد. همچنین مقادیر دامنه محاسبه شده توسط

FFT برای هر سیگنال به ترتیب برابر ۱۲۵۰۰، ۲۴۴۳۳ و ۴۹۷۵ می‌باشند که در صورت محاسبه مقیاس نمودن آن به کوچکترین مقدار موجود داریم ۲/۵، ۴/۹ و ۱ که در صورت که این نسبت برای سیگنال‌های اصلی برابر ۲/۵، ۵ و ۱ است. با توجه به شکل ۵ در صورت اعمال تبدیل FFT بر روی سیگنال‌های مخلوط شده در هر سه حالت مقادیر فرکانس‌های استخراج شده برابر به ترتیب برابر مقادیر فرکانس‌های سیگنال‌های اصلی می‌باشد.

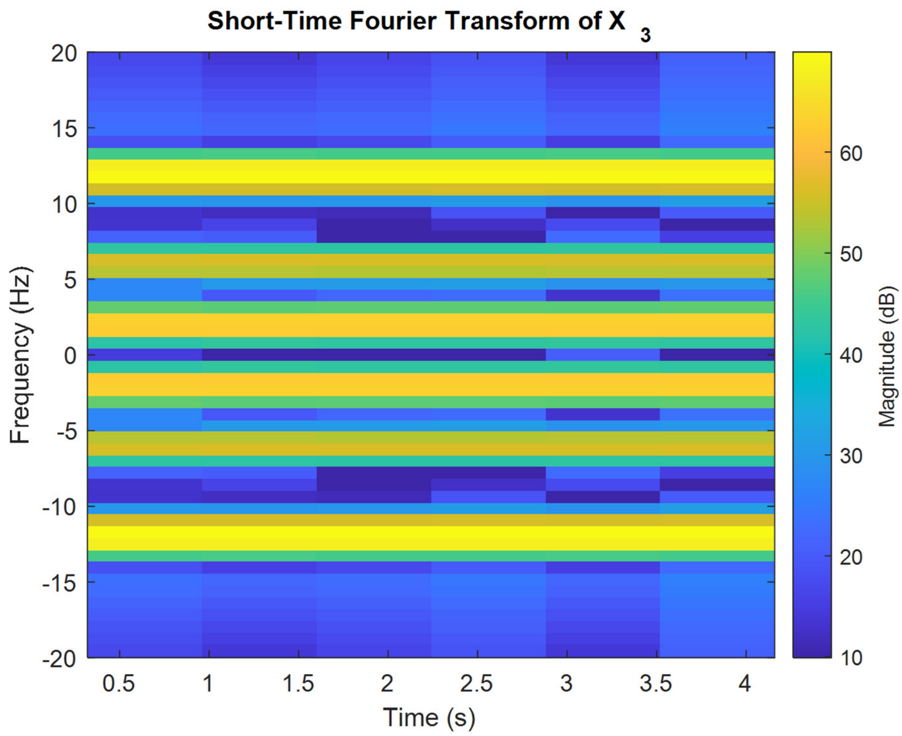
در ادامه بر روی سیگنال‌های اصلی و مخلوط شده تبدیل STFT اعمال می‌گردد تا نتایج شناسایی فرکانس‌ها در طول زمان نیز بررسی گردد.



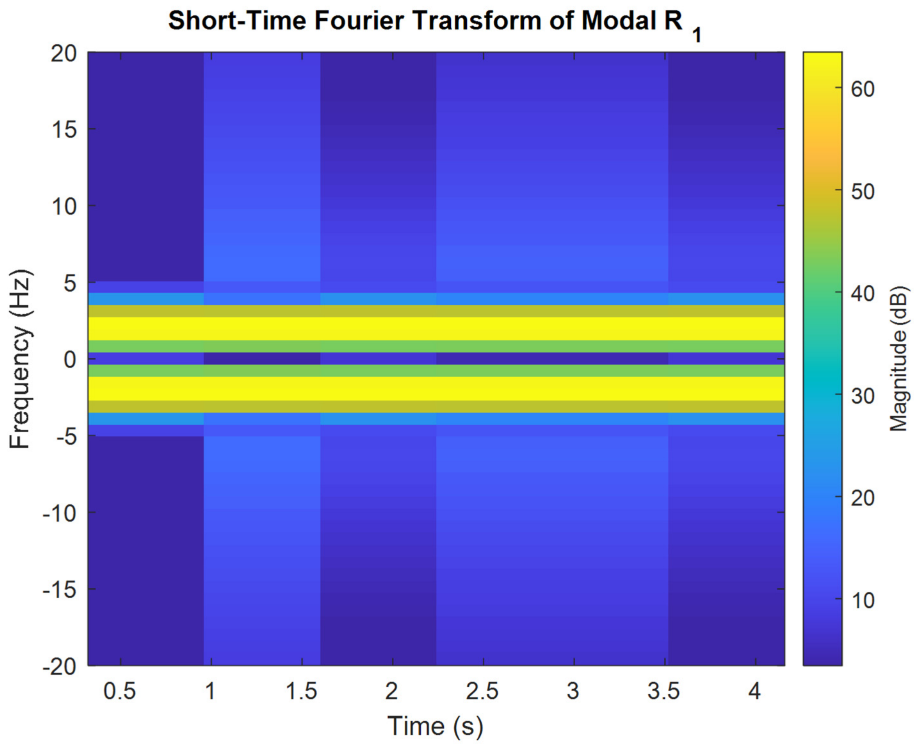
شکل ۹: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر سیگنال X1



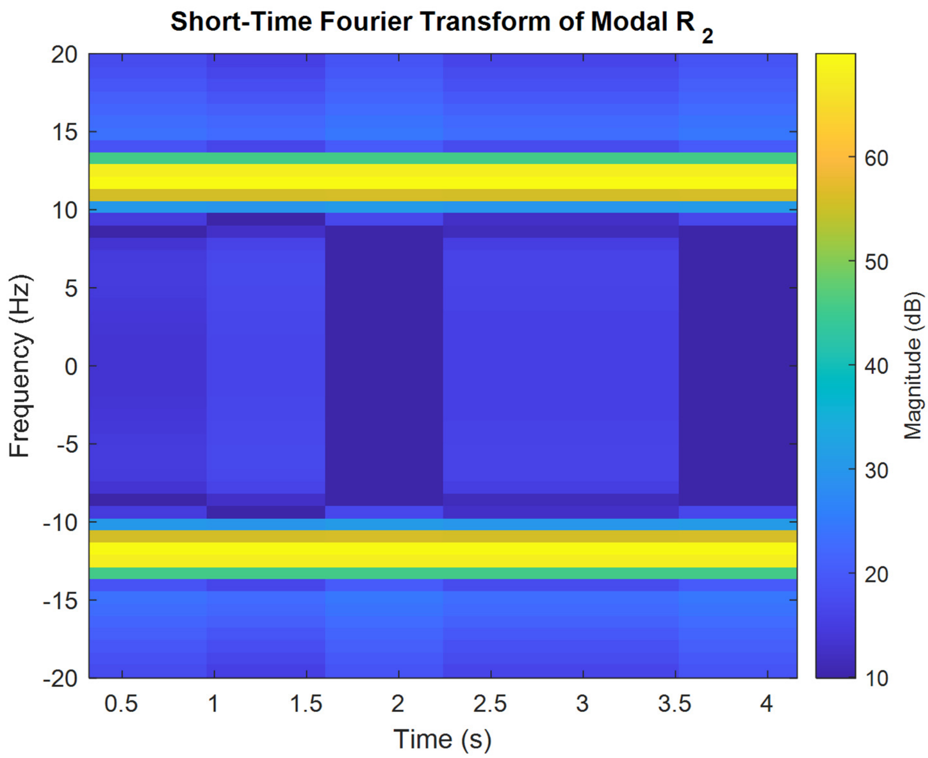
شکل ۱۰: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر سیگنال X2



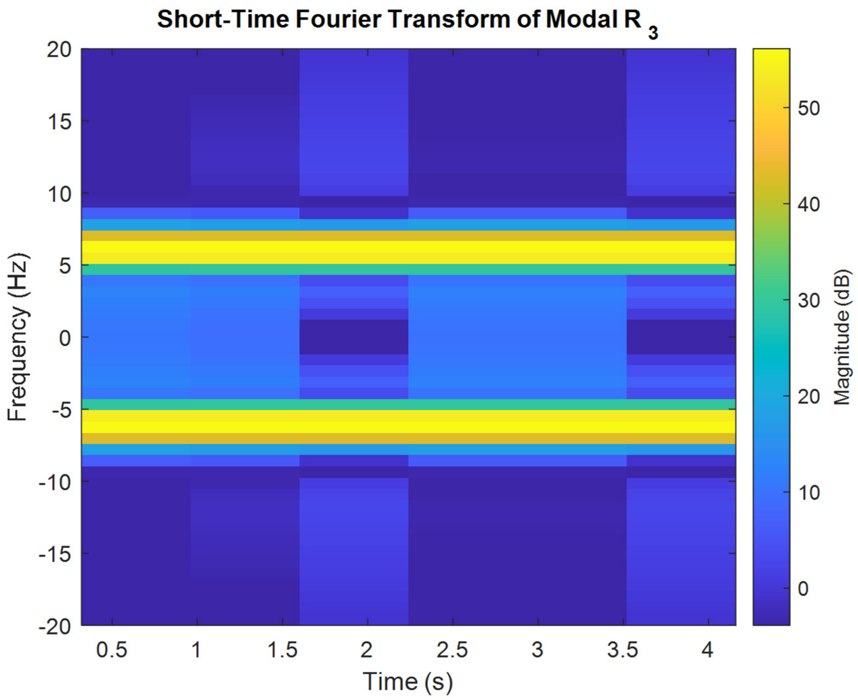
شکل ۱۱: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر سیگنال X3



شکل ۱۲: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر سیگنال S1



شکل ۱۳: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر سیگنال S2



شکل ۱۴: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر سیگنال S3

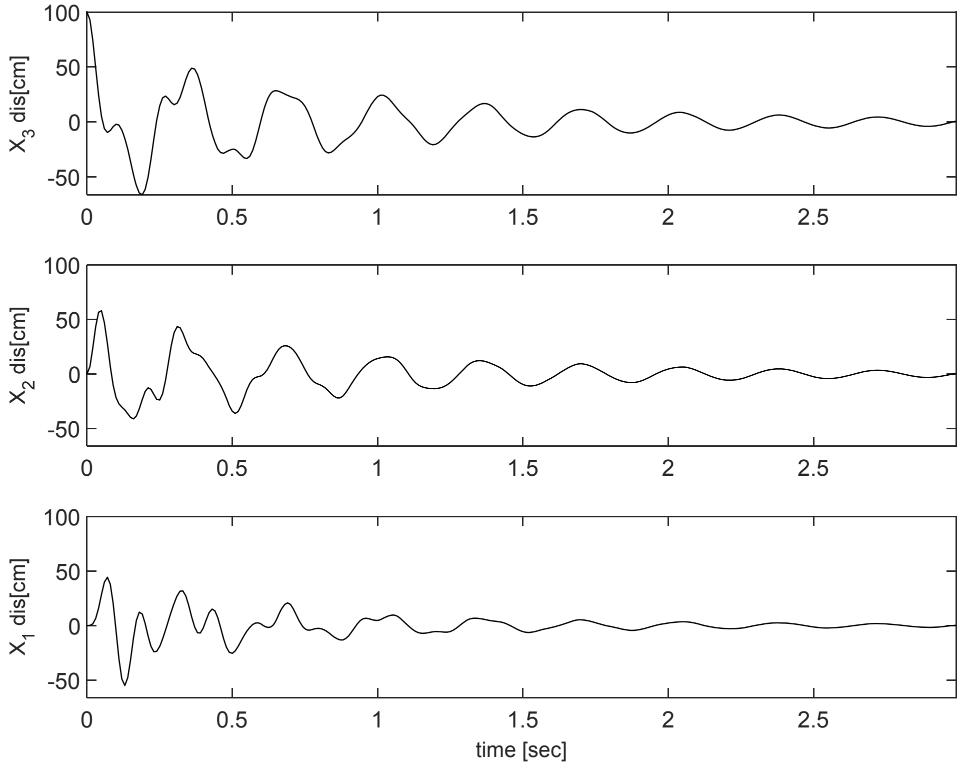
مثال دوم: در این مثال به بررسی یک سازه ۳ درجه آزاد که مشخصات آن در جدول زیر آورده شده است پرداخته خواهد شد.

پارامترهای سازه‌ای ساختمان پنج طبقه

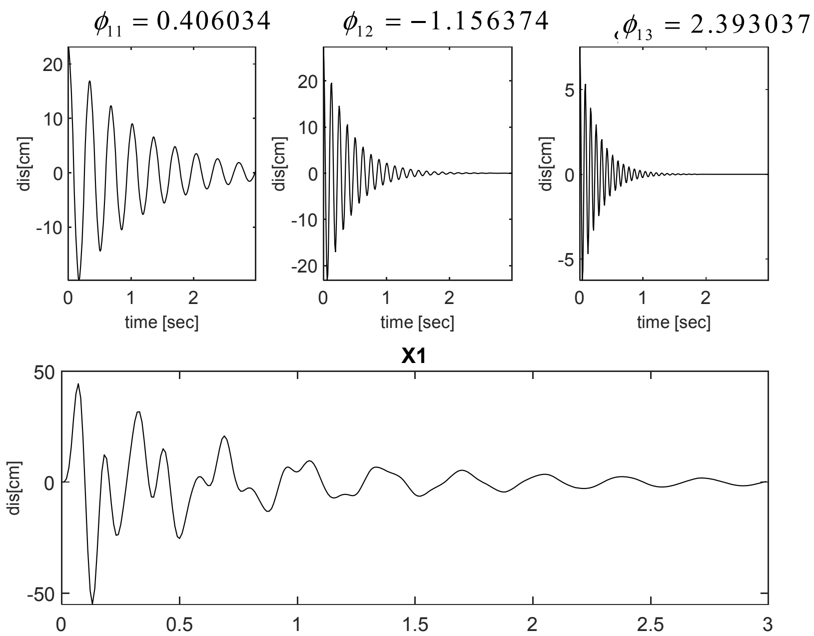
St. No	Mass (ton)	Stiffness (kN/m)
1	12	**22000**
2	12	**20000**
3	12	**17800**

$\xi = 5\%$

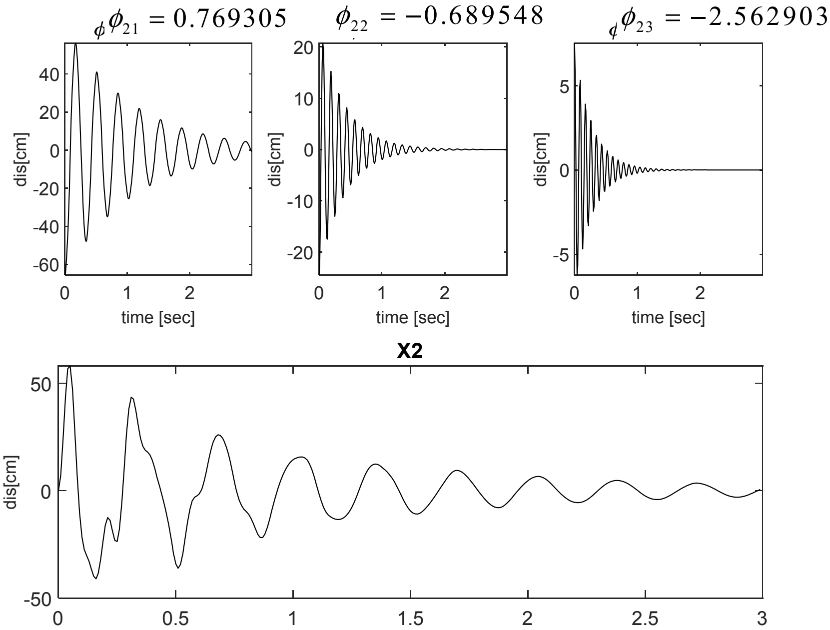
با توجه به مقادیر داده شده فرکانس‌های غالب سازه به ترتیب برابر ۲/۹۴۴، ۷/۹۶۷ و ۱۱/۵۷ هرتز می‌باشد. همچنین سازه مورد نظر تحت یک جابجایی واحد در تراز طبقه بام قرار گرفته است. در این صورت خروجی جابجایی سازه برابر است با:



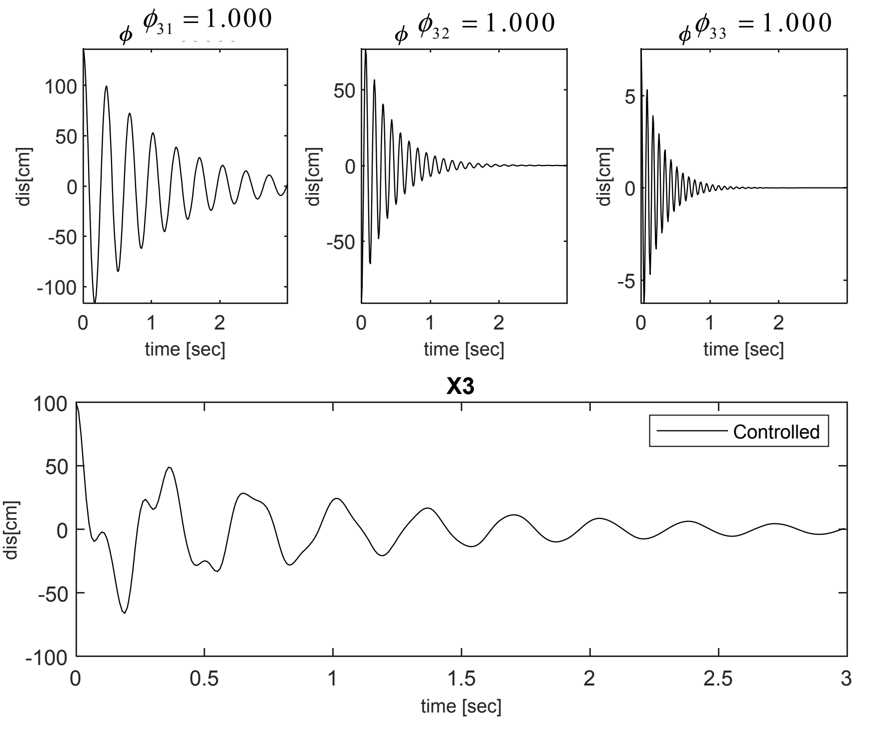
شکل ۱۳: پاسخ‌های جابجایی طبقات



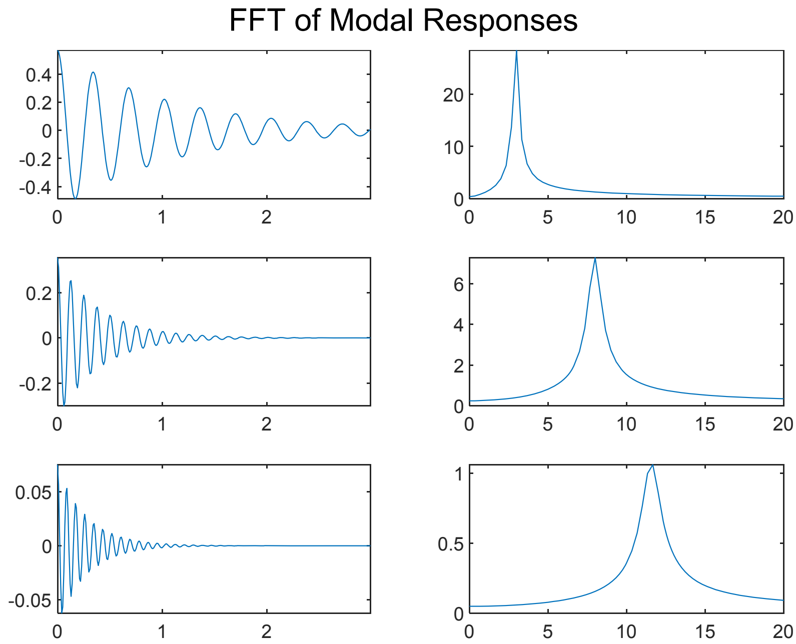
شکل ۱۴: بررسی تاثیر هر یک از پاسخ‌های مودال در جابجایی طبقه اول



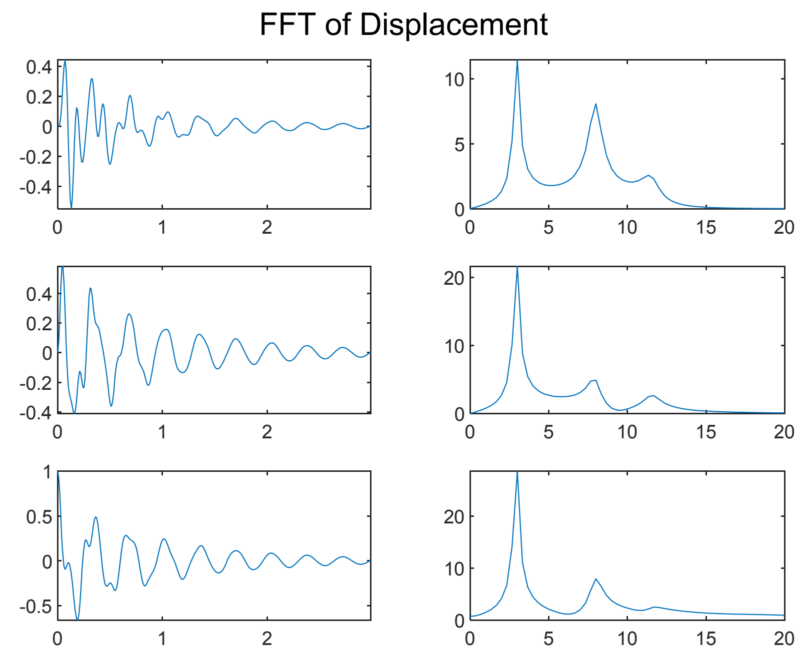
شکل ۱۵: بررسی تاثیر هر یک از پاسخ‌های مودال در جابجایی طبقه دوم



شکل ۱۶: بررسی تاثیر هر یک از پاسخ‌های مودال در جابجایی طبقه سوم

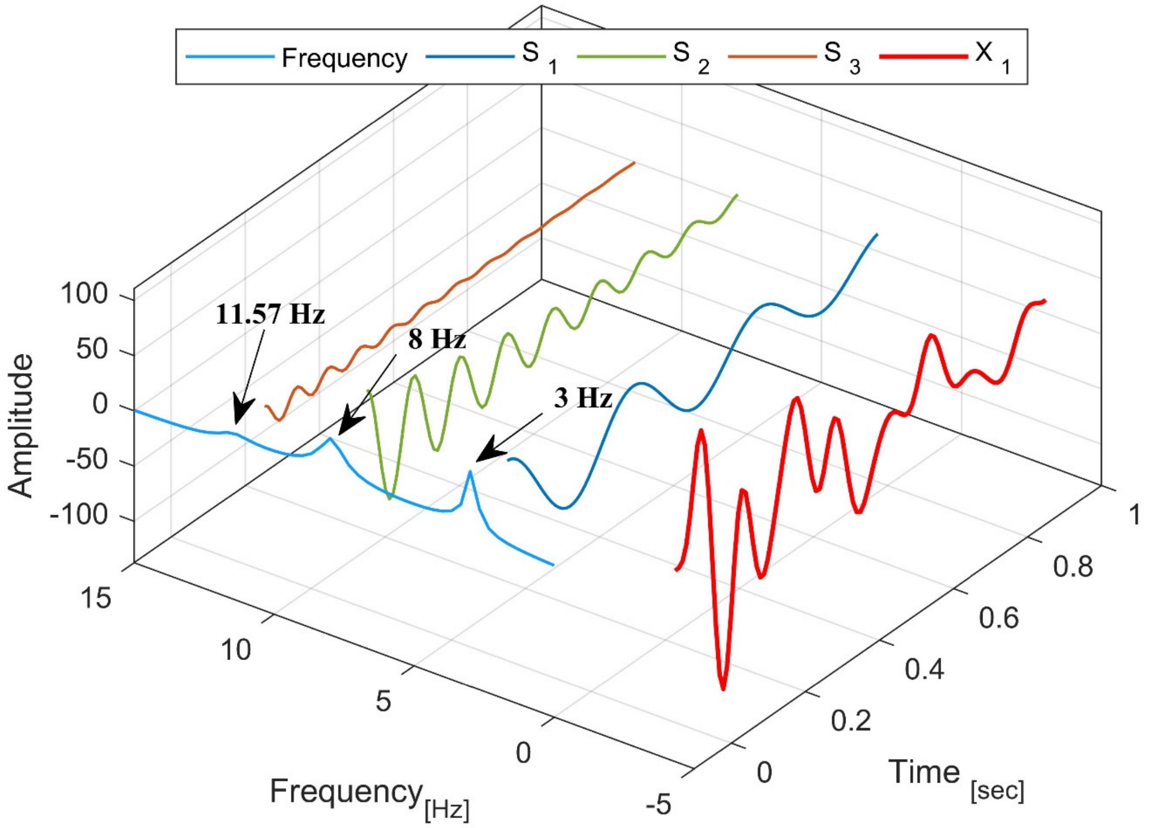


شکل ۱۷: اعمال تبدیل FFT بر روی پاسخ‌های مودال

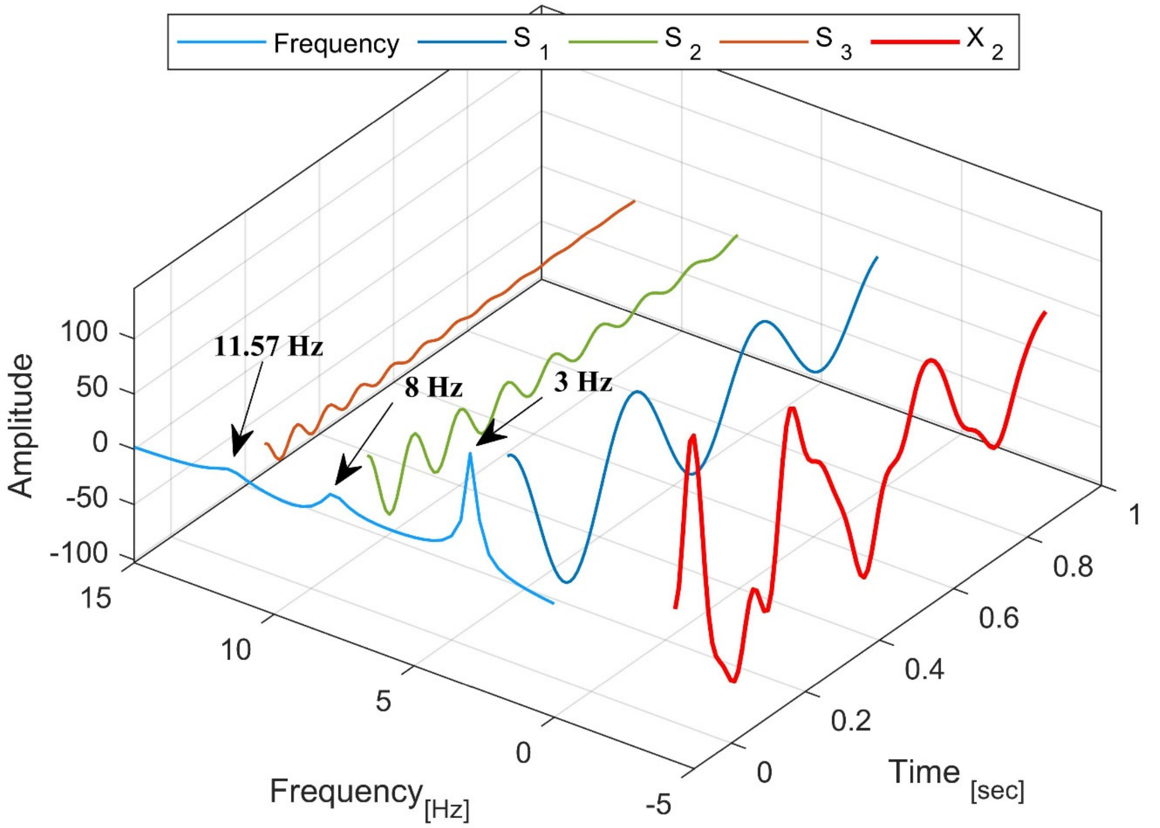


شکل ۱۸: اعمال تبدیل FFT بر روی خروجی‌های جابجایی سازه

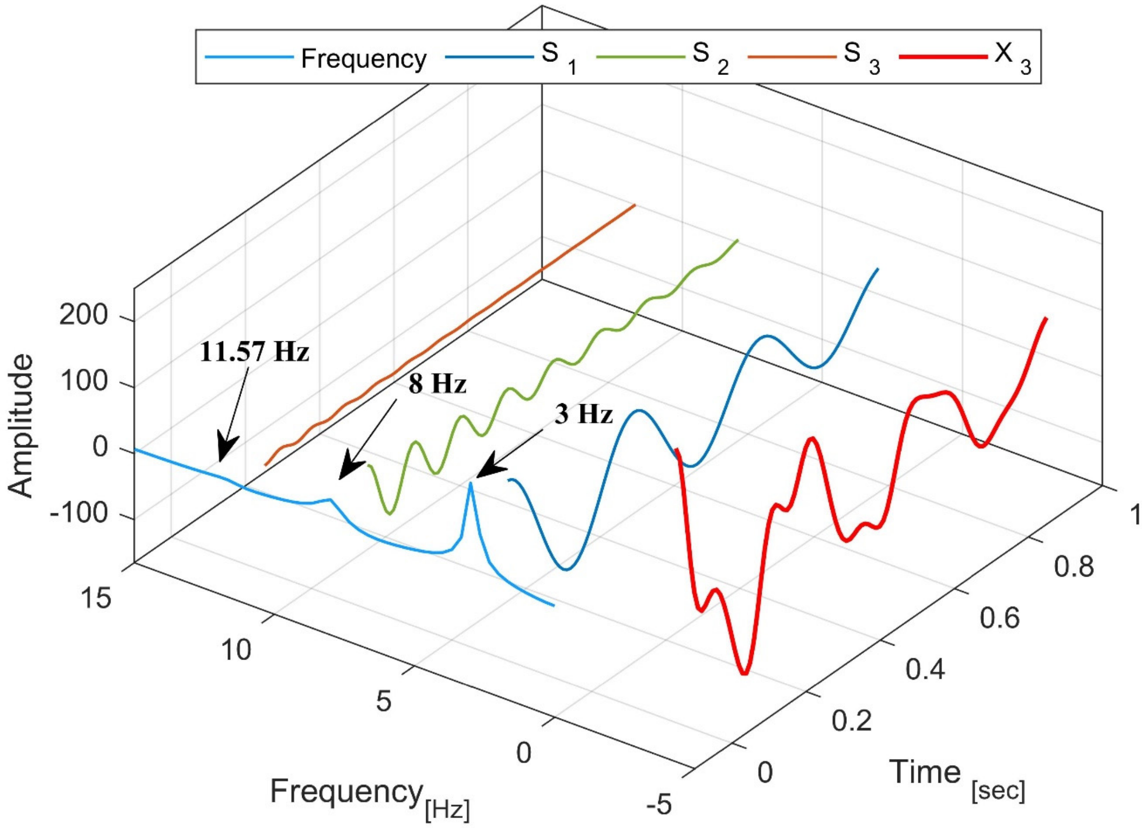
در ادامه جهت درک بهتر از شکل (۱۸) این شکل که نشان دهنده پاسخ‌های هر یک از طبقات سازه می‌باشد به پاسخ‌های مودال تجزیه شده و بر اساس فرکانس‌های غالب رسم می‌گردد.



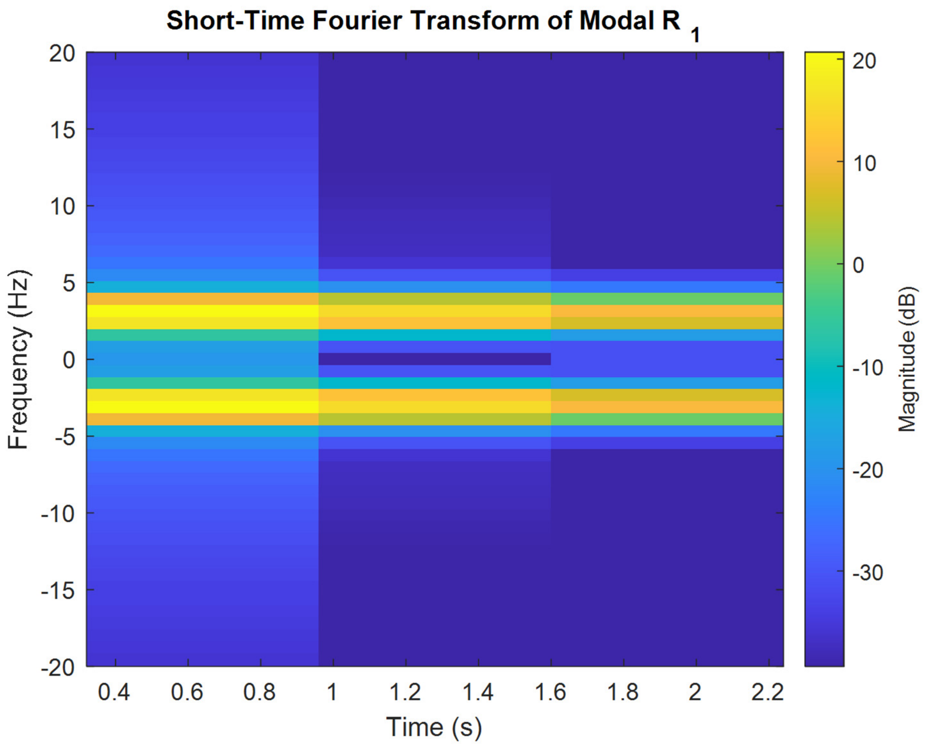
شکل ۱۹: تجزیه پاسخ طبقه اول سازه به پاسخ‌های مودال و رسم آن‌ها نسبت به فرکانس این پاسخ.



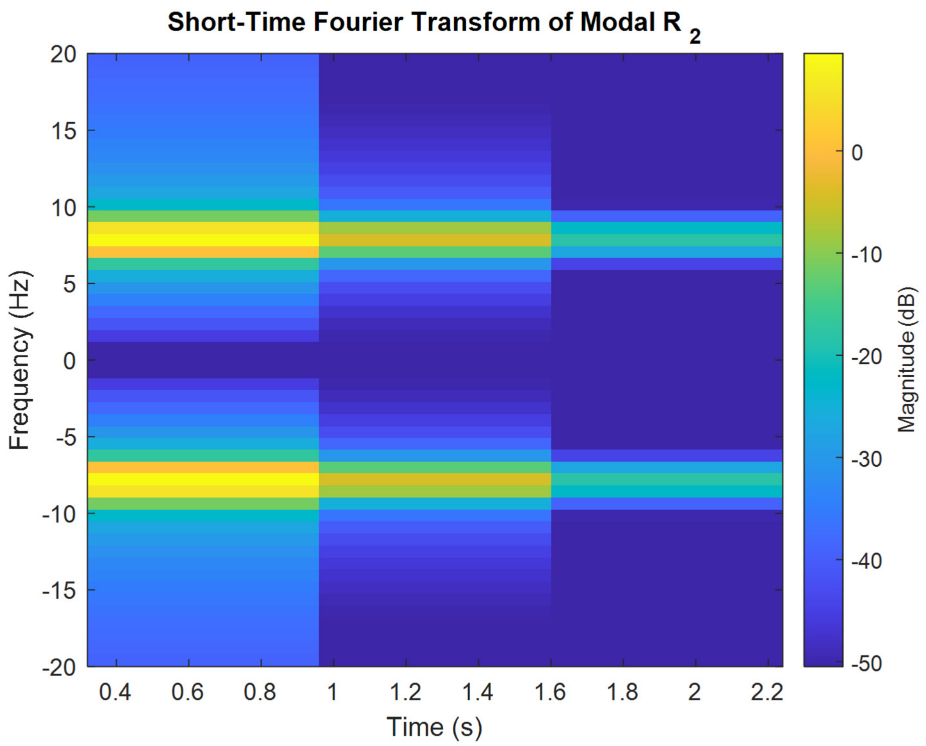
شکل ۲۰: تجزیه پاسخ طبقه اول سازه به پاسخ‌های مودال و رسم آن‌ها نسبت به فرکانس این پاسخ.



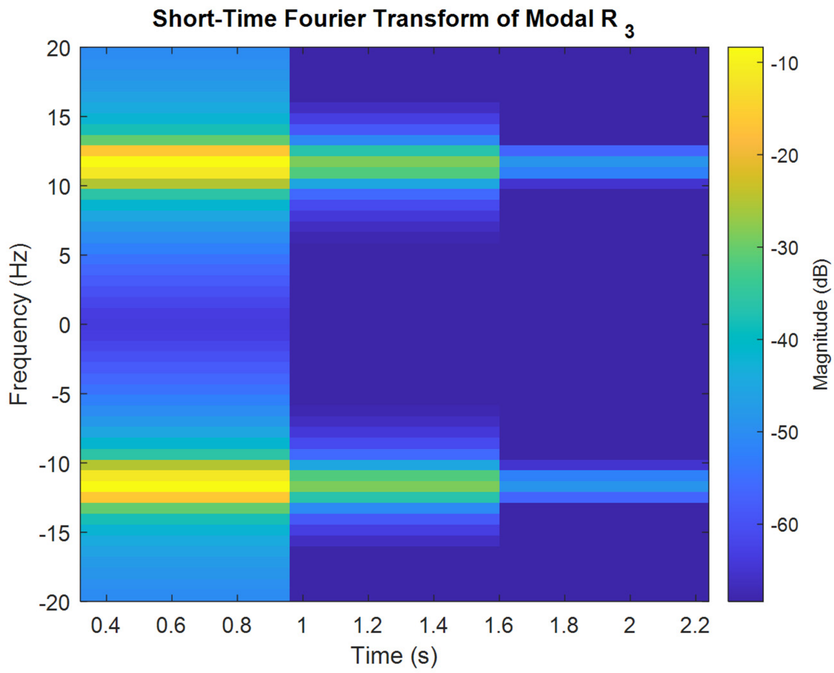
شکل ۲۱: تجزیه پاسخ طبقه اول سازه به پاسخ‌های مودال و رسم آن‌ها نسبت به فرکانس این پاسخ.



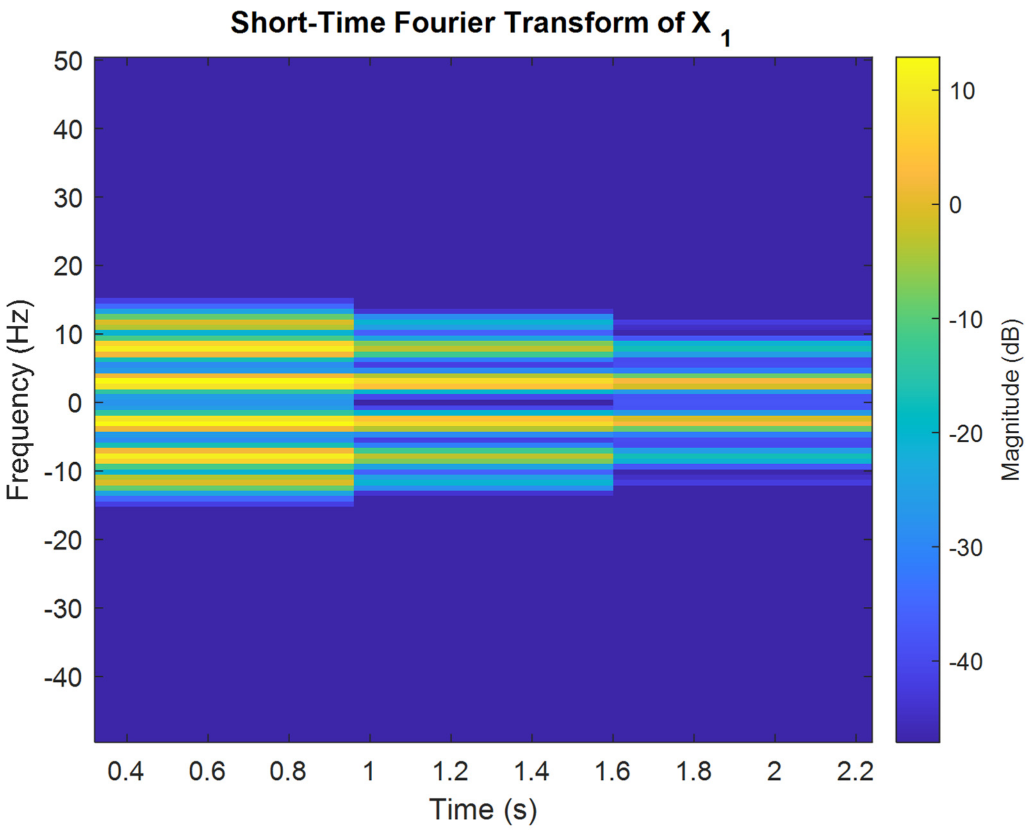
شکل ۲۲: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر پاسخ مودال اول



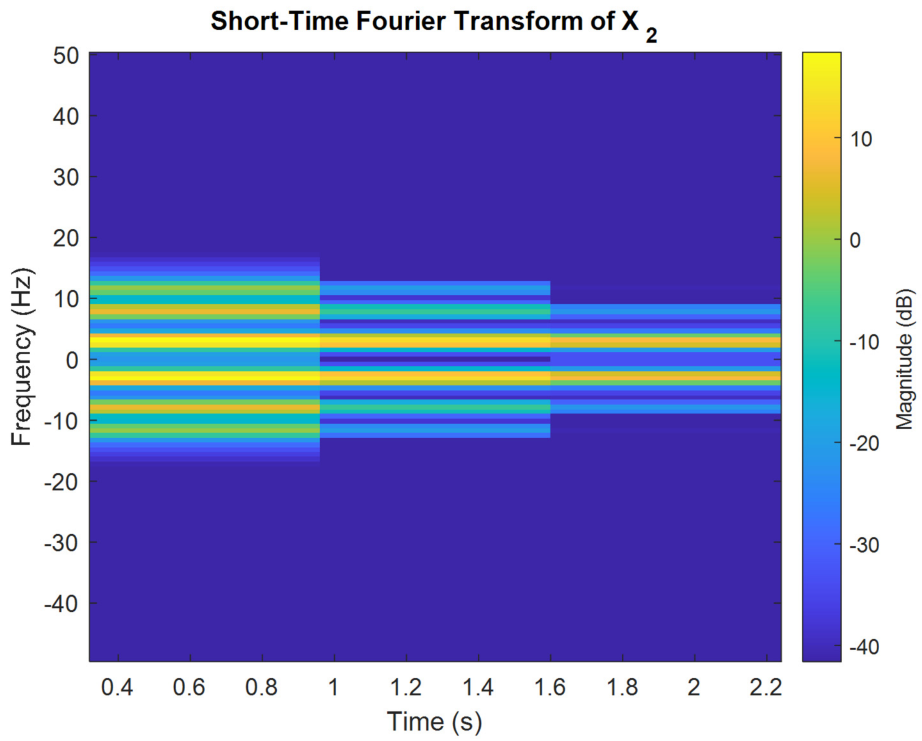
شکل ۲۳: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر پاسخ مودال دوم



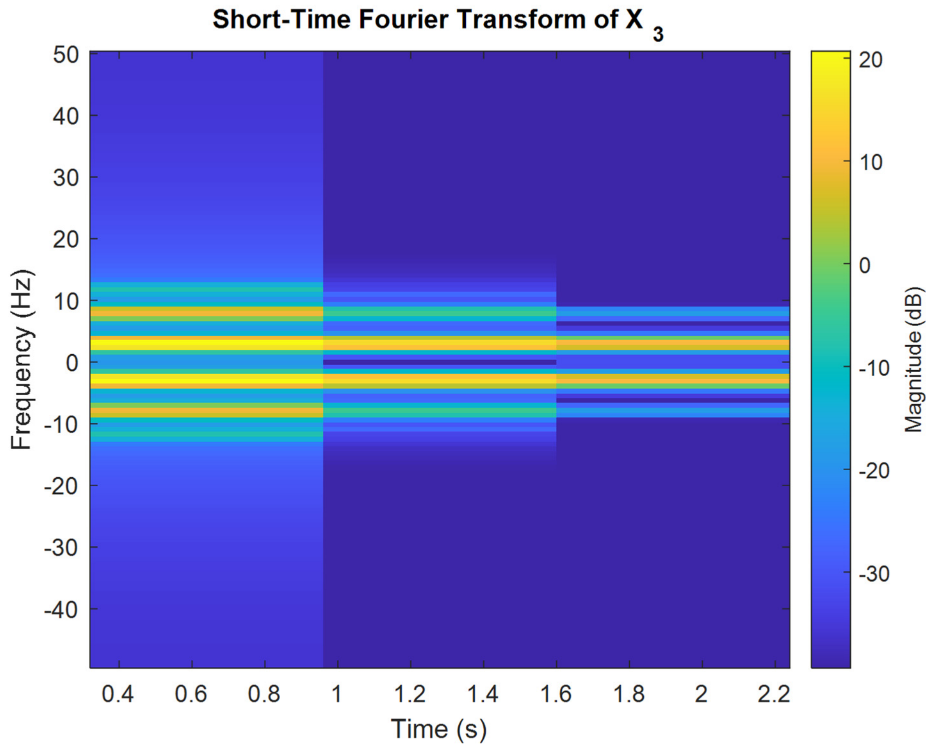
شکل ۲۴: اعمال تبدیل STFT بر روی مقادیر پاسخ مودال سوم



شکل ۲۵: اعمال تبدیل STFT بر روی پاسخ جابجایی طبقه اول



شکل ۲۶: اعمال تبدیل STFT بر روی پاسخ جابجایی طبقه دوم



شکل ۲۷: اعمال تبدیل STFT بر روی پاسخ جابجایی طبقه سوم