



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

شناسایی آسیب در سازه‌ها با استفاده از پاسخ‌های ضربه

نویسنده:

دکتر کاوه کرمی

دانشیار سازه گروه مهندسی عمران

دانشگاه کردستان

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

فهرست مطالب

۱	فصل اول: بررسی سلامت سازه‌ای
۱	مقدمه
۱	نگاهی به بررسی سلامت سازه‌ای (SHM)
۲	انواع آسیب
۲	انواع روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای
۳	طبقه‌بندی روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای
۴	شناسایی سیستم
۵	روش‌های کشف آسیب
۵	تغییر در نسبت میرایی
۶	تغییر در فرکانس طبیعی
۶	تغییر در شکل مودی
۶	روش‌های اصلاح مدل
۷	روش اندازه‌گیری ماتریس نرمی
۷	روش‌های برمینای شبکه عصبی
۷	روش‌های کشف الگو
۸	فیلتر کالمن
۸	روش مونتکارلو
۸	روش‌های آماری
۸	تبدیل ویولت
۹	شناسایی سیستم با استفاده از پاسخ‌های ضربه
۱۱	فصل دوم: تئوری شناسایی سیستم
۱۱	مقدمه
۱۱	تابع تبدیل سیستم‌های پیوسته زمانی (CONTINUES TIME SYSTEMS)
۱۳	تابع تبدیل سیستم‌های گسسته زمانی (DISCRETE TIME SYSTEMS)
۱۴	کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری
۱۴	کنترل‌پذیری در حوزه زمانی گسسته
۱۵	رویت‌پذیری در حوزه زمانی گسسته
۱۶	مفاهیم اساسی شناسایی
۲۱	الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA)

۲۶	روش‌هایی برای تشخیص موده‌های واقعی از موده‌های آلوده به نویز
۳۰	روش ضریب مشارکت تجمعی مودی (MAC)
۳۰	روش مقادیر تکین مودی (MSV)
۳۱	گام‌های محاسباتی ERA
۳۳	الگوریتم تحقق سیستم ویژه با داده‌های همبسته (ERA/DC)
۳۵	شناسایی فیلتر کالمن / روینگر (OKID)
۳۷	نتیجه‌گیری

۳۸ فصل سوم: شناسایی آسیب در سازه‌های ساختمانی

۳۸	مقدمه
۳۸	شناسایی سیستم
۴۰	الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده (DDA/ISMP)
۴۱	پاسخ جابجایی به عنوان خروجی سیستم
۴۴	پاسخ سرعت به عنوان خروجی سیستم
۴۷	پاسخ شتاب به عنوان خروجی سیستم
۵۰	شناسایی المان ماتریس سختی
۵۴	اثرهای آلودگی ناشی از نویز
۵۴	نتیجه‌گیری

۵۶ فهرست منابع

فصل اول: بررسی سلامت سازه‌ای

مقدمه

در این فصل روش بررسی سلامت سازه‌ای (SHM)^۱ معرفی می‌گردد. بررسی سلامت سازه‌ای شامل دو بخش شناسایی سیستم و شناسایی خرابی در سازه‌ها می‌باشد؛ که هر یک از آن‌ها بصورت جداگانه شرح داده می‌شود. در ادامه مروری بر مطالعه‌های سایر محقق‌ها در دو دهه اخیر انجام می‌گیرد. سپس مشکل‌ها و چالش‌های موجود در بحث شناسایی آسیب مطرح می‌شود. نحوه شکل‌گیری هدف اصلی این پروژه تحقیقاتی براساس مشکل‌های ارائه شده بیان می‌گردد.

نگاهی به بررسی سلامت سازه‌ای (SHM)

بررسی سلامت سازه‌ای، نظارت لحظه‌ای در طول عمر یک سازه است که به منظور تشخیص وجود خرابی، مقدار و مکان آن در قسمت‌های مختلف سازه صورت می‌گیرد. بطور کلی سازه باید براساس محدوده‌ی فرض شده در طراحی رفتار کند. اما به علت‌های مختلفی از قبیل فرسایش سازه ناشی از عمر زیاد آن، عوامل محیطی و رخداد‌های اتفاقی رفتار سازه در محدوده مجاز قرار نمی‌گیرد. به وسیله بررسی لحظه‌ای، بانک اطلاعاتی کاملی از تاریخچه‌ی رفتار سازه فراهم می‌شود که با استفاده از آن می‌توان آسیب را ارزیابی کرد و علاوه بر آن عمر باقی‌مانده سازه را تخمین زد. در سال‌های اخیر با افزایش نیاز به کنترل سازه‌های بزرگ، بررسی سلامت سازه‌ای گسترش فراوانی یافته است. کشف آسیب با بازبینی چشمی در مورد سازه‌های بزرگ مانند برج‌ها و پل‌ها، کاری پر هزینه و غیرممکن است. از این‌رو لازم است روشی برای بررسی سلامت سازه‌ای گسترش داده شود که وجود، مکان و شدت آسیب همراه با طول عمر سازه را تعیین کند. بررسی سلامت سازه‌ای پاسخ سازه را در اثر بارگذاری کنترل شده یا کنترل نشده آنالیز می‌کند. بارگذاری کنترل شده را می‌توان با بارگذاری ضربه‌ای تولید کرد. بارگذاری کنترل نشده شامل حرکت اتومبیل روی پل، بار باد و یا بار زلزله می‌باشد [۱-۴].

^۱ Structural Health Monitoring

انواع آسیب

پدیده آسیب در سازه‌ها به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شود. آسیب خطی زمانی اتفاق می‌افتد که سازه با رفتار خطی الاستیک تحت اثر آسیب‌های ناگهانی با شدت کم بصورت خطی و الاستیک عمل کند. در این حالت پارامترهای سازه تغییر می‌کنند ولی در کل سازه بصورت خطی باقی می‌ماند. با این فرض می‌توان یک مدل ساده برای سازه تهیه کرد و معادله‌ها برحسب پارامترهای خطی نوشته می‌شوند. آسیب غیرخطی زمانی رخ می‌دهد که سازه خطی الاستیک پس از آسیب دچار رفتار غیرخطی شود. بطور مثال در سازه‌های بتنی، ترک‌هایی که در حین بارگذاری باز و بسته می‌شوند این رفتار را در سازه به وجود می‌آورند. با این وجود اکثر روش‌ها با فرض آسیب خطی مدل سازه را بررسی می‌کنند.

انواع روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای

روش‌های موجود در بحث بررسی سلامت سازه‌ای را می‌توان به سه دسته روش‌های مشاهده‌ای، محلی^۱ و کلی^۲ تقسیم‌بندی کرد. در روش مشاهده‌ای یک متخصص به بررسی ظاهری ساختمان از نظر ترک‌ها و جابجایی‌ها می‌پردازد (شکل ۱). در روش‌های محلی مکان تقریبی آسیب مشخص می‌باشد؛ سازه را بصورت محلی بررسی کرده و آسیب‌های سطحی یا نزدیک سطح را آشکار می‌سازند. در این روش‌ها لازم است که منطقه مورد نظر از سازه به راحتی قابل دسترسی باشد تا بتوان آسیب را شناسایی کرد. بطور نمونه می‌توان به روش‌های اولتراسونیک^۳، رادیوگرافی^۴، میدان گرمایی^۵، اکوستیک^۶ و میدان مغناطیسی اشاره کرد.

برخلاف روش‌های محلی، روش‌های کلی نیازی به اطلاعات اولیه راجع به آسیب ندارند. روش‌های کلی با بررسی پاسخ دینامیکی و پارامترهای سازه‌ای، مکان و شدت آسیب را نمایان می‌کنند. تغییر در پارامترهای مودال سازه را می‌توان به آسیب‌های سازه‌ای ربط داد. چرا که پارامترهایی نظیر فرکانس طبیعی، شکل مودی و نسبت میرایی توابعی از پارامترهای فیزیکی سازه (جرم، میرایی و سختی) می‌باشند. بنابراین هر تغییری در پارامترهای فیزیکی، تغییر در پارامترهای مودال را در پی خواهد داشت.

¹ Local

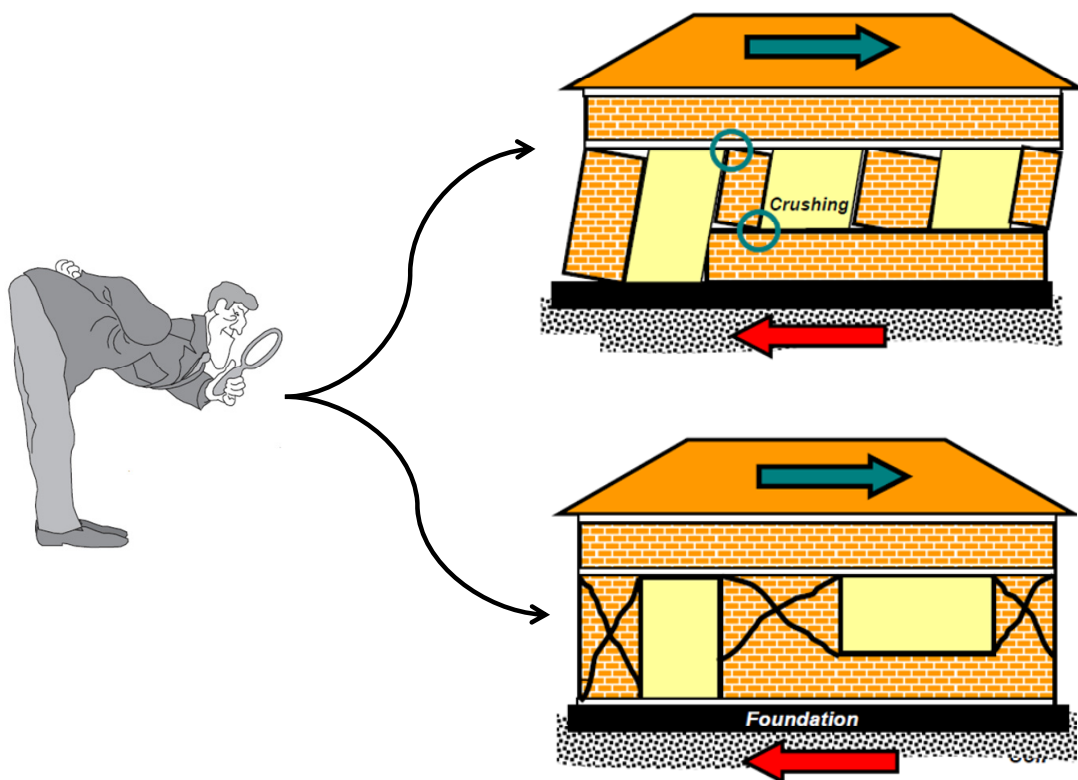
² Global

³ Ultrasonic

⁴ Radiography

⁵ Eddy Current

⁶ Acoustic



شکل (۱) روش مشاهده‌ای کشف آسیب توسط متخصص

طبقه‌بندی روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای

تا کنون روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای فراوانی توسعه یافته‌اند. عملکرد هر روش را می‌توان بر مبنای اطلاعات بدست آمده از آسیب ارزیابی کرد. ریترا^۱ [۵] در سال ۱۹۹۳ این روش‌ها را در چهار گروه طبقه‌بندی کرد:

- (۱) تعیین وجود آسیب در سازه.
- (۲) تعیین مکان آسیب در سازه.
- (۳) کمی سازی شدت آسیب.
- (۴) پیش‌بینی عمر مفید باقیمانده سازه.

کشف آسیب در دستگاه‌های صنعتی به گروه اول محدود می‌شود و در اصطلاح به کشف خطا^۲ معروف است. اما اکثر روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای که در مهندسی عمران مورد استفاده قرار گرفته‌اند متعلق به گروه سوم و چهارم می‌باشند. بدیهی است که در گروه‌های بالاتر اطلاعات بیشتری

^۱ Rytter

^۲ Fault Detection

از آسیب بدست می‌آید. بنابراین داده‌های استفاده شده و حجم محاسبات به میزان قابل توجهی در این گروه‌ها نیز افزایش می‌یابد.

شناسایی سیستم^۱

شناسایی سیستم شامل تعیین پارامترهای دینامیکی بر مبنای تحلیل داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده می‌باشد. شناسایی سازه‌ای شامل الگوریتم‌هایی است که برای بدست آوردن وضعیت سازه و پارامترهای آن بکار می‌رود. برای آن که رفتار مدل سازه شناسایی شده با رفتار سازه واقعی مطابقت داشته باشد؛ الگوریتم‌های شناسایی سازه باید دارای سه ویژگی باشند:

(۱) حساس به اغتشاش نباشد یعنی با واقعیت مطابقت داشته باشد.

(۲) نیاز به اندازه‌گیری تمام درجه‌های آزادی نداشته باشد.

(۳) نسبت به حدس اولیه حساس نباشد تا همگرایی ایجاد شود.

جدول (۱) روش‌های مختلف شناسایی سیستم

<p>(۱) تبدیل هیلبرت (HT)^۲ (۲) تجزیه مودهای تجربی (EMD)^۳ (۳) روش پارامتری فرکانس-زمان^۴</p>	<p>روش‌های تنها براساس اندازه‌گیری خروجی‌ها</p>
<p>(۱) روش حداقل مربعات (LSM)^۵ (۲) الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA)^۶ (۳) روش چند مرحله‌ای خطی^۸ (۴) روش پیش‌بینی خطا^۹</p>	<p>روش‌های شناسایی در سیستم‌های نامتغیر با زمان^۵</p>
<p>(۱) روش حداقل مربعات بازگشتی با متغیر فراموشی^{۱۱} (۲) روش حداقل مربعات بازگشتی با ردیابی ثابت^{۱۲} (۳) روش پارامتری فرکانس-زمان (۴) آنالیز موجک^{۱۳}</p>	<p>روش‌های شناسایی در سیستم‌های متغیر با زمان^{۱۰}</p>

¹ System Identification

² Hilbert Transform

³ Empirical Mode Decomposition

⁴ Parametric Time Frequency Method

⁵ Time Invariant System

⁶ Least Square Method

⁷ Eigen system Realization Algorithm

⁸ Linear Multi Staged Method

⁹ Prediction Error Method

¹⁰ Time Variant System

¹¹ Recursive least Square with variable Forgetting

¹² Recursive least Square with Constant Trace

¹³ Wavelet Analysis

(۱) روش پارامتری شده خطی ^۱ (۲) روش فیلتر کالمن توسعه یافته ^۲ (۳) الگوریتم ژنتیک (GA) ^۳	روش‌های شناسایی در سیستم‌های غیرخطی
---	-------------------------------------

در طراحی الگوریتم یک مدل ریاضی از سازه ایجاد می‌گردد. ساخت این مدل شامل دو مرحله است:

- (۱) شناسایی ساختار^۴: در این مرحله شکل و نوع مدل (رابطه ریاضی) تعیین می‌گردد.
 - (۲) شناسایی پارامتر^۵: در این مرحله مدل ریاضی و سازه واقعی تحت اثر ورودی (تحریک) یکسانی قرار می‌گیرند. پاسخ مدل ریاضی با پاسخ سازه واقعی اختلاف دارد. با استفاده از تکنیک‌های شناسایی^۶ و روش‌های بهینه‌یابی این اختلاف باید به سمت صفر همگرا شود. در این صورت مدل ریاضی با سازه واقعی منطبق شده است.
- روش‌های شناسایی فراوانی در ادبیات بررسی سلامت سازه‌ای وجود دارد که بطور اختصار به تعدادی از آن‌ها در جدول (۱) اشاره شده است.

روش‌های کشف آسیب

روش‌های کشف آسیب متعددی براساس پاسخ دینامیکی اندازه‌گیری شده وجود دارند. این روش‌ها را می‌توان براساس نوع پاسخ اندازه‌گیری شده، پارامتر بررسی شده برای تعیین آسیب و روش اتخاذ شده برای کمی‌سازی آسیب دسته‌بندی کرد. برخی از انواع مهم این روش‌ها عبارتند از: تغییر در پارامترهای مودال، بروز رسانی ماتریس^۷، شبکه‌های مصنوعی^۸، کشف الگو^۹، فیلتر کالمن^{۱۰}، روش‌های آماری و ... که در این قسمت به اختصار توضیح داده شده‌اند.

تغییر در نسبت میرایی

میرایی عامل جذب و مستهلک کردن انرژی در سازه است. هر آسیبی که به سازه وارد می‌شود میزان جذب انرژی توسط سازه را تغییر می‌دهد. با اندازه‌گیری میزان جذب انرژی می‌توان وجود آسیب را تشخیص داد.

^۱ Liner Parameterized Method

^۲ Extended Kalman Filter Method

^۳ Genetic Algorithm

^۴ Structure Identification

^۵ Parameter Identification

^۶ Identification Technique

^۷ Matrix Update Method

^۸ Neural Network

^۹ Pattern Recognition

^{۱۰} Kalman Filter

تغییر در فرکانس طبیعی

فرکانس طبیعی هر سازه تابعی از سختی و جرم اعضای آن می‌باشد. هر آسیبی که به سازه وارد می‌شود، منجر به کاهش سختی شده در حالی که جرم ثابت باقی می‌ماند. نتیجه آن کاهش فرکانس‌های طبیعی است. از این رو کاهش فرکانس طبیعی می‌تواند معیاری برای آسیب‌های سازه‌ای باشد. به دو شیوه از این معیار در بررسی سلامت سازه‌ای استفاده می‌شود. در روش اول، آسیب را بصورت ریاضی مدل و فرکانس طبیعی سازه را پیش‌بینی می‌کند. فرکانس پیش‌بینی شده با فرکانس اندازه‌گیری شده مقایسه و آسیب شناسایی می‌گردد. در روش دوم، در سازه‌های بتنی طول ترک و مکان آن براساس تغییر فرکانس طبیعی تعیین می‌گردد. بنابراین شدت و مکان ترک را می‌توان شناسایی کرد. توجه شود که فرکانس‌های ارتعاش، یک معیار کلی است و فقط می‌تواند وجود آسیب را نمایان سازد. در نتیجه این روش در گروه اول قرار می‌گیرد. البته اگر از فرکانس‌های مودهای بالاتر استفاده شود، می‌توان تا حدودی این مشکل را حل کرد، زیرا مودهای ارتعاشی بالا مربوط به ارتعاش‌های موضعی می‌باشند.

تغییر در شکل مودی

اطلاعات شکل مودی را می‌توان برای بررسی سلامت سازه‌ای در گروه سوم بکار برد. آسیب باعث تغییر شکل مودی سازه می‌شود و با نمایش تغییرات نسبی شکل مودی در یک نمودار می‌توان آسیب را شناسایی کرد. البته لازم است در کنار بازیابی چشمی از یک معیار اطمینان مودی MAC^۱ نیز استفاده کرد.

روش‌های اصلاح مدل^۲

در این روش‌ها از یک مدل ریاضی استفاده شده و پارامترهای سازه‌ای (جرم، سختی و میرایی) براساس معادله حرکت و پاسخ دینامیکی اندازه‌گیری شده محاسبه می‌گردد. ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی مدل به گونه‌ای ساخته می‌شوند که پاسخ مدل تا حد ممکن به پاسخ اندازه‌گیری شده نزدیک باشد. ماتریس‌ها با هر بار اندازه‌گیری جدید پاسخ‌های سازه، اصلاح می‌گردد و با حالات قبلی مقایسه شده تا مکان و شدت آسیب مشخص شود. روش‌های اصلاح مدل فراوانی برای بررسی سلامت سازه‌ای وجود دارند. این روش‌ها را می‌توان براساس تابع هدف، قیدها و روش عددی حل معادله طبقه‌بندی کرد.

^۱ Modal Assurance Criteria

^۲ Model Updating

روش اندازه‌گیری ماتریس نرمی^۱

این روش آسیب را با محاسبه ماتریس نرمی از پاسخ‌های دینامیکی سازه شناسایی می‌کند. ماتریس نرمی سازه بصورت معکوس ماتریس سختی تعریف شده و هر ستون ماتریس نرمی معرف شکل تغییر مکان سازه تحت بار واحد در نقطه خاص است. ماتریس نرمی را می‌توان با محاسبه شکل-های مودی نرمال شده نسبت به جرم و فرکانس طبیعی تشکیل داد. در حالتی که درجه‌های آزادی سازه زیاد باشد، به دلیل محدودیت در اندازه‌گیری و محاسبه شکل مودی و فرکانس ارتعاش، فقط چند مود اول که فرکانس کمتری دارند محاسبه می‌شوند. در این روش ماتریس نرمی بدست آمده از سازه آسیب دیده با ماتریس نرمی بدست آمده از سازه سالم مقایسه شده و آسیب نمایان می‌گردد. در جایی که اندازه‌گیری‌های سازه سالم وجود نداشته باشد؛ ماتریس نرمی از مدل المان محدود سازه سالم بدست می‌آید. این روش در گروه سوم بررسی سلامت سازه‌ای قرار می‌گیرد.

روش‌های بر مبنای شبکه عصبی

شبکه‌های عصبی که مدل ریاضی دستگاه عصبی بیولوژیکی انسان است، کاربرد موفقی در بررسی سلامت سازه‌ای داشته‌اند. شبکه عصبی یک شبکه بزرگ متشکل از واحدهای پردازشگر ساده است که اطلاعات تجربی را ذخیره و برای استفاده مهیا می‌کند. با توجه به دقت زیاد در کشف الگو، دسته-بندی، مدل کردن غیرخطی و یادگیری، می‌توان از آن در کشف آسیب استفاده کرد. استفاده از شبکه-های عصبی در بررسی سلامت سازه‌ای منجر به پیدایش تکنیکی به نام IVP^۲ شده است که با دقت خوبی مکان، شدت و زمان آسیب را بدون هیچ فرضی درباره خصوصیات غیرخطی آسیب بدست می‌دهد. البته مشکل اساسی که همیشه در شبکه‌های عصبی وجود داشته، مساله آموزش شبکه است. تجربه نشان داده که لازم است از تکنیک‌های دیگر در کنار شبکه عصبی استفاده شود تا عملکرد آن بهبود یابد.

روش‌های کشف الگو

آسیب‌های سازه‌ای موجب تغییر در پارامترهای مودال می‌شوند که باعث تغییر در الگوی پاسخ سازه می‌شود. با بررسی این الگو می‌توان زمان، مکان و شدت آسیب را تعیین کرد.

^۱ Flexible matrix^۲ Intelligent Parameter Varying Technique

فیلتر کالمن

روش فیلتر کالمن، روشی بر مبنای مدل^۱ است که از یک الگوریتم تکراری بهینه برای تخمین پارامترهای مربوط به آسیب استفاده می‌کند. پارامترهای سختی و میرایی را نمی‌توان بصورت مستقیم اندازه‌گیری کرد در عوض پاسخ سازه اندازه‌گیری می‌شود. روش فیلتر کالمن با استفاده از یک دستگاه معادلات حرکت، پارامترهای مورد نیاز را به پاسخ اندازه‌گیری شده ربط می‌دهد. این روش بصورت پیش‌بینی - اصلاح^۲ کار می‌کند.

روش مونت کارلو^۳

این روش متغیرهای حالت را به کمک توابع چگالی احتمال شرطی محاسبه می‌کند. تمام عدم اطمینان‌های سیستم، متغیرهای اولیه و اغتشاش‌ها در نظر گرفته می‌شود.

روش‌های آماری

این روش نسبتاً جدید بوده و بر اساس تئوری بیزین^۴ که در علم آمار بسیار مشهور است عمل می‌کند. امتیاز روش بیزین این است که می‌تواند حالت منحصر به فرد نبودن مدل ریاضی را هنگامی که داده‌های اندازه‌گیری شده ناقص باشد در نظر بگیرد. این مدل آماری عدم قطعیت‌های ناشی از محدودیت تعداد حسگرها، داده‌های آلوده به اغتشاش، خطای مدل‌سازی، حساسیت کم پارامترهای مودال نسبت به آسیب و ... را در نظر می‌گیرد و اطلاعات مربوط به آسیب را با حاشیه اطمینان مورد نظر بدست می‌دهد.

تبدیل ویولت^۵

روش برای تجزیه یک سیگنال است و بصورت یک فیلتر در محدوده زمان- فرکانس کار می‌کند. تبدیل ویولت را بر روی پاسخ شتاب سیستم سازه‌ای اثر می‌دهند تا خواص دینامیکی آن را تعیین کنند. وقوع آسیب در نمودار فرکانس- زمان با یک پالس یا پرش‌های ناگهانی مشخص می‌شود.

¹ Model Based
² Predictor-Corrector
³ Montecarlo Filter
⁴ Bayesian Theory
⁵ Wavelet Transform

شناسایی سیستم با استفاده از پاسخ‌های ضربه^۱

در یک دهه‌ی اخیر توجه زیادی به استفاده از پاسخ‌های ضربه در عملیات شناسایی پارامترهای سازه‌ای سیستم و جستجوی آسیب در سازه‌ها شده است. در ادبیات کنترل به پاسخ‌های ضربه، پارامترهای مارکوف^۲ نیز گفته می‌شود. ضربه در سازه به کمک ابزار و روش‌های مختلفی ایجاد می‌گردد. برای این منظور می‌توان با استفاده از چکش، میز لرزان و یا با نصب محرک‌ها^۳، در سازه ضربه ایجاد کرد (شکل ۲). پاسخ‌های ضربه اندازه‌گیری شده در بردارنده اطلاعات ارزشمندی از پارامترهای سازه‌ای یک سیستم است. روش‌های مختلفی برای شناسایی سیستم با استفاده از پاسخ‌های ضربه در ادبیات بررسی سلامت سازه‌ای موجود می‌باشد. همچنین در سال‌های اخیر تکنیک‌های متنوعی برای استخراج پارامترهای سازه‌ای از پاسخ‌های ضربه سیستم توسط محققین پیشنهاد شده است.



¹ Impulse Response

² Markov parameters

³ Actuators

(c)



شکل (۲) دستگاه‌های مختلف ایجاد کننده ضربه و تحریک در سیستم‌های سازه‌ای: (a) چکش (b) میز لرزان (c) محرک

فصل دوم: تئوری شناسایی سیستم^۱

مقدمه

روش‌ها و تکنیک‌های شناسایی فراوانی جهت شناسایی پارامترهای مودال در زمینه سازه‌ها مورد توسعه، آنالیز و آزمایش قرار گرفته است. سوالی که بطور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا ارتباطی بین این روش‌ها موجود می‌باشد. در این فصل یک چهارچوب ریاضی واحدی براساس تئوری شناسایی سیستم ارائه شده تا ارتباط بین این روش‌ها بررسی گردد. در زمینه سازه‌ها روش‌های حوزه زمانی برای شناسایی پارامترهای مودال براساس ماتریس تابع تبدیل بوده، که پارامترهای مارکوف (پاسخ ضربه^۲) را نتیجه می‌دهد. با داشتن اطلاعات در مورد پارامترهای مارکوف این امکان فراهم می‌شود که یک ماتریس هَنکِل^۳، که اساس شناسایی فضای حالت مدل‌های گسسته^۴ می‌باشد، ایجاد گردد. سوال اساسی که برای ایجاد یک مدل مطرح می‌شود این است که آیا تمام متغیرهای حالت سیستم مورد نظر قابل کنترل یا مشاهده می‌باشند؟ برای پاسخ به این سوال در ابتدا باید مفهوم تئوری‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری^۵ ارائه شود. در ادامه الگوریتم شناسایی سیستم ویژه (ERA)^۶، که براساس تئوری حداقل تحقق توسعه داده شده است، جهت شناسایی پارامترهای مودال ارائه شده و مورد بحث قرار می‌گیرد.

تابع تبدیل سیستم‌های پیوسته زمانی (Continues Time Systems)

معادلات حرکت سیستم دارای مرتبه n در فضای حالت بصورت زیر نشان داده می‌شود

^۱ System Realization Theory

^۲ Pulse response

^۳ Hankel matrix

^۴ Discrete-time state-space model

^۵ Theories of Controllability and Observability

^۶ Eigensystem Realization Algorithm

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}\end{aligned}\quad (1)$$

که در آن \mathbf{x} بردار حالت با ابعاد $(n \times 1)$ ، \mathbf{u} بردار نیروهای خارجی (ورودی) با ابعاد $(r \times 1)$ ، \mathbf{A}_c ماتریس سیستم و \mathbf{B}_c بردار مکان ورودی‌ها می‌باشند. بردار \mathbf{y} خروجی‌های اندازه‌گیری شده با ابعاد $(m \times 1)$ و ماتریس‌های \mathbf{C} و \mathbf{D} ماتریس‌های ضرایب می‌باشند. با استفاده از تبدیلات لاپلاس تابع تبدیل G بصورت زیر بدست می‌آید:

$$G(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c + \mathbf{D} \quad (2)$$

تابع تبدیل یک سیستم پیوسته خطی بطور کلی بصورت تابع گویایی از متغیر s نشان داده می‌شود:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=1}^{m+1} b_i s^{m-(i-1)}}{s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}} e^{-d \cdot s} \quad (3)$$

که در آن d مقدار تاخیر زمانی بین ورودی و خروجی می‌باشد. اگر a_i و b_i مقادیر ثابتی باشند سیستم را خطی نامتغیر با زمان (LTI)¹ می‌نامند. در رابطه بالا، n مرتبه سیستم و m بیانگر درجه سیستم است. از نظر فیزیکی برای یک سیستم تحقق‌پذیر، اگر $m \leq n$ ، سیستم را سره² و اگر $m < n$ باشد سیستم را اکیدا سره می‌نامند. رابطه (3) را می‌توان بصورت زیر نیز نمایش داد:

$$G(s) = k \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (4)$$

در رابطه بالا ریشه‌های صورت z_i را صفر³ سیستم و ریشه‌های مخرج p_i را قطب⁴ سیستم و همچنین k را، بهره⁵ سیستم می‌نامند. بردار حالت در زمان t_f از رابطه (5) محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{\mathbf{A}_c(t_f-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}_c(t_f-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5)$$

¹ Linear Time invariant

² Proper

³ Zero

⁴ Pole

⁵ Gain

تابع تبدیل سیستم‌های گسسته زمانی (Discrete Time Systems)

معادلات حرکت سیستم در فضای حالت در k امین بازه زمانی بصورت رابطه (۶) نشان داده می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(k+1)} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{(k)} \\ \mathbf{y}_{(k)} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{(k)} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن \mathbf{A} ، \mathbf{B} ، \mathbf{C} و \mathbf{D} با ابعاد مناسب، بیانگر عملگر داخلی سیستم خطی است که برای تعیین پاسخ سیستم در اثر هر نوع ورودی استفاده می‌شود. بردار حالت در p امین بازه زمانی Δt بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} t_f &= p \cdot \Delta t \\ \mathbf{x}_{(p)} &= \mathbf{A}^p \mathbf{x}_{(0)} + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{(p-i)} \end{aligned} \quad (7)$$

ماتریس سیستم و بردار مکانی در فضای پیوسته با استفاده از رابطه (۸) به ماتریس سیستم و بردار مکانی در فضای گسسته تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c^k \cdot \Delta t^k}{k!} \right) \\ \mathbf{B} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta \tau} d\tau \mathbf{B}_c = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c^k \cdot \Delta t^{k+1}}{(k+1)k!} \right) \mathbf{B}_c \end{aligned} \quad (8)$$

تابع تبدیل یک سیستم گسسته خطی بطور کلی بصورت تابع گویایی از متغیر z با استفاده از رابطه (۹) ارائه می‌گردد.

$$G(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i z^{1-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} z^{-d} = \frac{b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m+1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d} \quad (9)$$

که در آن d مقدار تاخیر زمانی بین ورودی و خروجی می‌باشد.

کنترل پذیری و رویت پذیری

سوال اساسی که بطور تعجب آوری در تحقیق‌های نظری و عملی در زمینه کنترل و شناسایی سیستم مطرح می‌شود این است که، آیا می‌توان تمام حالت‌های یک سیستم را کنترل یا مشاهده کرد؟ این سوال با استفاده از تکنیک‌های فضای حالت به راحتی مورد بررسی قرار می‌گیرد [۸-۶]. رابطه (۷) بصورت ماتریسی و فشرده در رابطه (۱۰) نشان داده شده است.

$$\mathbf{x}_{(p)} = \mathbf{A}^p \mathbf{x}_{(0)} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{n \times pr} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{(p-1)} \\ \mathbf{u}_{(p-2)} \\ \mathbf{u}_{(p-3)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(0)} \end{Bmatrix}_{pr \times 1} \quad (10)$$

که در آن $\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{x}_{(t_0)}$ حالت اولیه در زمان $t = t_0$ می‌باشد.

کنترل پذیری در حوزه زمانی گسسته^۱

به متغیر حالت $\mathbf{x}_{(k)}$ یک سیستم، کنترل پذیر گفته می‌شود هرگاه بتوان این حالت را به وسیله تعدادی عملیات کنترلی از هر حالت اولیه سیستم در یک بازه محدود زمانی بدست آورد. اگر تمام حالت‌ها کنترل پذیر باشند، سیستم را بطور کامل کنترل پذیر یا به راحتی کنترل پذیر می‌نامند. در ادبیات کنترل تعریف کنترل پذیری بصورت زیر می‌باشد:

”سیستمی را کنترل پذیر گوئیم که به ازای هر متغیر حالت $\mathbf{x}_{(k)}$ در زمان $T > 0$ تابع $\mathbf{u}_{(t)}$ در بازه زمانی $0 < t \leq T$ را بتوان چنان یافت که سیستم از شرایط اولیه $\mathbf{x}_{(0)} = 0$ در زمان صفر بتواند به شرایط $\mathbf{x}_{(k)}$ در زمان T برسد.“

برای تعیین کنترل پذیری کامل در k امین گام زمانی^۲، لازم و ضروری است بررسی شود که آیا می‌توان متغیر حالت صفر را به جای حالت‌های اولیه به تمام متغیرهای حالت نهایی منتقل کرد. برای بررسی این موضوع رابطه (۱۰) دوباره بازنویسی می‌شود.

¹ Controllability in the Discrete-Time Domain

² Time step

$$\hat{\mathbf{x}}_{(p)} = \mathbf{x}_{(p)} - \mathbf{A}^p \mathbf{x}_{(0)} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}]_{n \times pr} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{(p-1)} \\ \mathbf{u}_{(p-2)} \\ \mathbf{u}_{(p-3)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(0)} \end{Bmatrix}_{pr \times 1} \quad (11)$$

معادل آن است که از متغیر حالت صفر شروع کرده و به یک حالت نهایی منتقل شده است. بنابراین اگر بتوان نشان داد که سیستم می‌تواند از حالت صفر به هر حالت $\hat{\mathbf{x}}_{(p)}$ منتقل شود، در نتیجه سیستم توانایی آن را دارد که از حالت $\mathbf{x}_{(0)}$ به هر حالت $\mathbf{x}_{(p)}$ تبدیل شود. بررسی رابطه (۱۱) نشان می‌دهد که ماتریس $[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}]$ باید نقش مهمی را در تعیین کنترل‌پذیری یک سیستم ایفا کند. در واقع از تئوری سیستم خطی روشن است که تنها آن دسته از بردارهای $\hat{\mathbf{x}}_{(p)}$ دست یافتنی هستند که در فضای S_c به وسیله ستون‌های ماتریس $[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}]$ تولید شده باشند. به بیان دیگر یک سری بردارهای کنترل $\mathbf{u}_{(0)}, \mathbf{u}_{(1)}, \mathbf{u}_{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{(p)}$ وجود دارد که متغیر حالت صفر را به حالت نهایی $\hat{\mathbf{x}}_{(p)}$ ، که در فضای S_c قرار دارد، منتقل می‌کند.

قضیه ۱ -

در حوزه زمانی گسسته، یک سیستم خطی با ابعاد محدود و دارای مشخصات دینامیکی ثابت از مرتبه^۱ n کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس کنترل‌پذیری \mathbf{Q}_p دارای رتبه^۲ n باشد. رتبه یک ماتریس تعداد سطرها و یا ستون‌های مستقل آن می‌باشد. ماتریس \mathbf{Q}_p بصورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{Q}_p = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}]_{n \times pr} \quad (12)$$

رویت‌پذیری در حوزه زمانی گسسته^۳

متغیر حالت $\mathbf{x}_{(p)}$ در p امین گام زمانی داده شده رویت‌پذیر است، اگر با داشتن اطلاعات ورودی $\mathbf{u}_{(k)}$ و خروجی $\mathbf{y}_{(k)}$ در یک محدوده زمانی $0 < k \leq p$ ، حالت $\hat{\mathbf{x}}_{(p)}$ بطور کامل تعیین شود. اگر

¹ Order

² Rank

³ Observability in the Discrete-Time Domain

تمام حالت‌ها رویت‌پذیر باشند سیستم کاملاً رویت‌پذیر نامیده می‌شود. در ادبیات کنترل تعریف رویت‌پذیری بصورت زیر می‌باشد:

” سیستمی را رویت‌پذیر گوئیم که شرایط اولیه متغیرهای حالت $\mathbf{x}_{(0)}$ را بتوان بصورت یکتا از اطلاعات مربوط به $\mathbf{y}_{(t)}$ و $\mathbf{u}_{(t)}$ در محدوده زمانی $T > 0$ و $t \in [0, T]$ تعیین نمود.“
 برای تعیین رویت‌پذیری کامل، لازم و ضروری است که بررسی شود آیا حالت اولیه $\mathbf{x}_{(0)}$ یک سیستم با ورودی صفر، یعنی $\mathbf{u}_{(k)} = 0$ ، را می‌توان از روی اطلاعات خروجی $\mathbf{y}_{(k)}$ ، $k = 0, 1, \dots, p-1$ ، تعیین کرد. زیرا با داشتن اطلاعات حالت اولیه $\mathbf{x}_{(0)}$ و ورودی $\mathbf{u}_{(k)}$ می‌توان حالت $\mathbf{x}_{(p)}$ را از رابطه (۱۰) محاسبه کرد.

قضیه - ۲

در حوزه زمانی گسسته یک سیستم خطی با ابعاد محدود و دارای مشخصه‌های دینامیکی ثابت از مرتبه n و با بردار حالت اندازه‌گیری شده از مرتبه m رویت‌پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس رویت-پذیری \mathbf{P}_p دارای رتبه n باشد. ماتریس رویت‌پذیری از رابطه (۱۳) بدست می‌آید.

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1} \end{bmatrix}_{mp \times n} \quad (13)$$

مفاهیم اساسی شناسایی

با فرض آن که \mathbf{u} در رابطه (۶) بصورت ضربه وارد شود

$$\mathbf{u}_{i(0)} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \Rightarrow \mathbf{u}_{(0)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1(0)} \\ \mathbf{u}_{2(0)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{r(0)} \end{Bmatrix}_{r \times 1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}_{r \times 1} = \mathbf{1} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{i(k)} = 0 \quad \begin{matrix} (k = 1, 2, \dots) \\ (i = 1, 2, \dots, r) \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{u}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1(k)} \\ \mathbf{u}_{2(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{r(k)} \end{Bmatrix}_{r \times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{r \times 1}$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۶) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
 k=0 & \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{I} \\ \mathbf{y}_{(0)} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{D}\mathbf{I} \end{cases} \\
 k=1 & \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{I} \\ \mathbf{y}_{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{I} \end{cases} \\
 k=2 & \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(3)} = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{I} \\ \mathbf{y}_{(2)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{I} \end{cases} \\
 & \vdots \\
 k-1 & \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(k)} = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{I} \\ \mathbf{y}_{(k-1)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B}\mathbf{I} \end{cases} \\
 k & \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}^k\mathbf{B}\mathbf{I} \\ \mathbf{y}_{(k)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{I} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

فرم ماتریسی رابطه (۱۵) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_{(0)} \\ \mathbf{y}_{(1)} \\ \mathbf{y}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{(k)} \end{Bmatrix}_{(k+1)m \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k \end{bmatrix}_{(k+1)m \times n} \cdot \mathbf{x}_{(0)} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{(k+1)m \times r} \cdot \mathbf{I} \tag{۱۶}$$

با فرض آن که $\mathbf{x}_{(0)} = 0$ باشد رابطه (۱۶) می‌تواند بصورت یک ماتریس پاسخ ضربه با ابعاد $m \times r$ برای هر $k\Delta t$ دلخواه تشکیل شود.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{(0)} &= \mathbf{D}\mathbf{l} = \mathbf{Y}_{(0)}\mathbf{l} \\
 \mathbf{y}_{(1)} &= \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{l} = \mathbf{Y}_{(1)}\mathbf{l} \\
 \mathbf{y}_{(2)} &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{l} = \mathbf{Y}_{(2)}\mathbf{l} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{y}_{(k)} &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{l} = \mathbf{Y}_{(k)}\mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{17}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_{(0)} &= \mathbf{D} \\
 \mathbf{Y}_{(k)} &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{18}$$

ماتریس‌های متوالی $\mathbf{Y}_{(k)}$ با ابعاد $m \times r$ به پارامترهای مارکوف معروف می‌باشند. در بخش‌های بعدی نحوه محاسبه پارامترهای مارکوف از داده‌های تجربی ارائه می‌گردد. از پارامترهای مارکوف به عنوان اساس شناسایی سیستم خطی در حوزه زمانی گسسته استفاده می‌شود. از آنجا که $\mathbf{Y}_{(0)} = \mathbf{D}$ ، بنابراین تنها لازم است که پارامترهای \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} تعیین شوند. شناسایی، شامل محاسبه ماتریس-های \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} از پارامترهای مارکوف ارائه شده توسط رابطه (۱۸) است بطوری که رابطه (۶) را ارضا نماید. هر سیستم دارای تعداد نامحدودی تحقق است که پاسخ‌های یکسانی را برای هر ورودی مشخص پیش‌بینی می‌کند. کمترین تحقق یعنی یک مدل با کوچکترین ابعاد فضای حالت در بین تمام سیستم‌های قابل تحقق که دارای روابط ورودی-خروجی یکسانی باشد. تمام کمترین تحقق‌ها دارای مجموعه مقادیر ویژه یکسانی است که همان پارامترهای مودال سیستم می‌باشد. فرض می‌شود که ماتریس حالت \mathbf{A} با مرتبه n دارای بردارهای ویژه کاملاً مستقل $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ متناظر با مقادیر ویژه $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ است. مقادیر ویژه لزوماً مجزا نمی‌باشد. با تعریف $\mathbf{\Lambda}$ و $\mathbf{\Psi}$ به عنوان ماتریس قطری مقادیر ویژه و ماتریس بردارهای ویژه بصورت رابطه (۱۹)

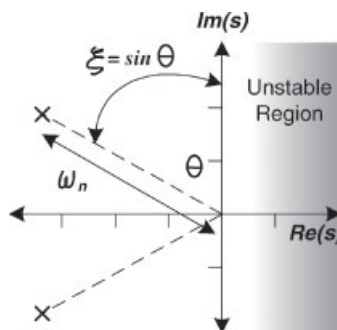
$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Psi} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{n \times n} \\
 \mathbf{\Psi} &= [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_n]_{n \times n}
 \end{aligned} \tag{19}$$

تحقق $[\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A}]$ تبدیل به تحقق $[\mathbf{C}\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{\Lambda}]$ می‌شود. ماتریس قطری $\mathbf{\Lambda}$ شامل اطلاعات مربوط به نرخ میرایی مودال و فرکانس‌های طبیعی میرا شده می‌باشد. ماتریس $\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}$ دامنه‌های

مودال اولیه یا ضرایب مشارکت مودی را تعریف می‌کند. ماتریس $C\psi$ شکل‌های مودی در محل حسگرها می‌باشد. تمام پارامترهای مودال یک سیستم دینامیکی به وسیله $[C\psi, \psi^{-1}B, \Lambda]$ شناسایی می‌شوند. نرخ میرایی مودال و فرکانس‌های طبیعی میرا شده، قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه Λ_c می‌باشد. ماتریس Λ_c مقادیر ویژه سیستم در حوزه پیوسته زمانی و Λ مقادیر ویژه سیستم در حوزه گسسته زمانی است که رابطه آن‌ها بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\Lambda_c &= \frac{\ln(\Lambda)}{\Delta t} \\ \lambda_i &= R_e + I_m i \\ \omega_n &= \sqrt{(R_e)^2 + (I_m)^2} \\ \xi &= \frac{R_e}{\sqrt{(R_e)^2 + (I_m)^2}} = \sin(\theta)\end{aligned}\quad (20)$$

مقادیر ویژه سیستم همان قطب‌های سیستم است که ویژگی‌های آن بصورت ترسیمی در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱) مقدار ویژه سیستم (قطب) در دستگاه مختصات مختلط

نکته مهم آن است که تبدیل مدل گسسته زمانی به مدل پیوسته زمانی یکتا نمی‌باشد. قسمت موهومی لگاریتم طبیعی یک عدد مختلط می‌تواند با افزودن ضریبی از 2π خود را تنظیم کند. این کار باعث می‌شود Λ_c مقادیر متفاوتی را در هر بار افزودن ضریبی از 2π دارا باشد. دلیل این مطلب آن است که دو فرکانس که تنها تفاوت آن‌ها ضریبی از $2\pi/\Delta t$ است در یک بازه زمانی نمی‌توان آن‌ها را از هم تشخیص داد. بنابراین در عمل اگر کسی مایل به تفسیر فرکانس‌های طبیعی یک سیستم فیزیکی باشد، یا باید گام‌های زمانی Δt به اندازه کافی کوچک باشد و یا باید یک فیلتر اضافه شود تا

فرکانس‌ها از محدوده فرکانس نایکوئیست^۱ خارج نشده و از تبدیل فرکانس‌ها به فرکانس‌های کوچکتر در تحقق جلوگیری کند. شناسایی یک سیستم با تشکیل ماتریس تعمیم یافته هَنکِل^۲ که ترکیبی از پارامترهای مارکوف است آغاز می‌شود:

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix}_{\alpha m \times \beta r} \quad (21)$$

در حالتی که $k=1$ باشد

$$\mathbf{H}_{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{1+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix}_{\alpha m \times \beta r} \quad (22)$$

توجه شود که $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$ در $\mathbf{H}_{(0)}$ موجود نیست. اگر $\alpha \geq n$ و $\beta \geq n$ (n مرتبه سیستم است) باشد رتبه $\mathbf{H}_{(k-1)}$ برابر با n خواهد بود. پارامترهای مارکوف از معادله (۱۸) در رابطه (۲۱) جایگذاری شده و سپس ماتریس $\mathbf{H}_{(k-1)}$ به سه ماتریس تجزیه می‌گردد.

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{Q}_\beta \quad (23)$$

که در آن

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix}_{\alpha m \times n} \quad \& \quad \mathbf{Q}_\beta = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B}]_{n \times \beta r} \quad (24)$$

^۱ Nyquist

^۲ Hankel

ماتریس‌های P_α و Q_β به ترتیب ماتریس‌های رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری می‌باشند. اگر رتبه سیستم n باشد ماتریس‌های P_α و Q_β دارای رتبه n است. بنابراین ماتریس هَنکِل در رابطه (۲۱) نیز دارای رتبه n می‌باشد. براساس ویژگی‌های ماتریس هَنکِل تشکیل شده از پارامترهای مارکوف، چندین روش شناسایی پارامترهای مودال وجود دارد که در ادامه الگوریتم ERA معرفی خواهد شد.

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA)^۱

در این بخش بطور خلاصه الگوریتم ERA شرح داده خواهد شد [۹]. توسعه اساسی شناسایی فضای حالت به کارهای هو و کالمن بر می‌گردد که اصل‌های مهم قضیه کمترین تحقق را ارائه کردند. در روش هو- کالمن^۲ برای ایجاد نمایش فضای حالت یک سیستم خطی با استفاده از داده‌های بدون نویز، از ماتریس هَنکِل نشان داده شده در رابطه (۲۱) استفاده می‌شود. این روش شناسایی مورد توسعه قرار گرفت و منجر به پیدایش الگوریتم ERA جهت شناسایی پارامترهای مودال از داده‌های اندازه‌گیری شده عاری از نویز گردید.

در روش‌های کلاسیک شناسایی سیستم از ماتریس تعمیم یافته هَنکِل در رابطه (۲۱) استفاده می‌شود. الگوریتم ERA با تشکیل ماتریسی از داده‌ها آغاز می‌شود که از حذف تعدادی از سطر و ستون-های ماتریس تعمیم یافته هَنکِل در رابطه (۲۱)، بطوری که قسمت مربوط به بلوک Y_k دست نخورده باقی بماند، بدست می‌آید. به علاوه مرتبه استاندارد کل ماتریس تعمیم یافته هَنکِل ممکن است با حذف تعدادی از سطر و ستون‌ها تغییر کند. ماتریس‌های ورودی و خروجی بصورت رابطه (۲۵) دوباره نوشته می‌شوند.

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_r]_{n \times r} \quad \& \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (25)$$

که در آن بردار ستونی b_i با ابعاد $n \times 1$ بردار موثر کنترل برای i امین ورودی کنترل و بردار سطری c_j با ابعاد $1 \times n$ بردار موثر اندازه‌گیری برای j امین حسگر می‌باشد. زیر مجموعه‌ای از بردارهای ستونی و سطری ماتریس‌های B و C بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

- B_i زیرمجموعه‌ای از بردارهای ستونی ماتریس B است ($i = 0, 1, 2, \dots, \eta$).

¹ Eigensystem Realization Algorithm

² Ho-Kalman

- C_j زیرمجموعه‌ای از بردارهای سطری ماتریس C است ($j=0, 1, 2, \dots, \xi$).
ماتریس بلوک داده‌های ERA به کمک رابطه (۲۶) ایجاد می‌گردد:

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = [\mathbf{Y}_{(s_j+k+t_i)}] \quad ; \quad \mathbf{Y}_{(s_j+k+t_i)} = \mathbf{C}_j \mathbf{A}^{(s_j+k-1+t_i)} \mathbf{B}_i \quad (26)$$

که در آن $s_0 = t_0 = 0$ است. s_j و t_i اعداد صحیح مثبت اختیاری می‌باشند. بسط رابطه (۲۶) در رابطه (۲۷) نشان داده شده است.

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(s_0+k+t_0)} & \mathbf{Y}_{(s_0+k+t_1)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(s_0+k+t_\eta)} \\ \mathbf{Y}_{(s_1+k+t_0)} & \mathbf{Y}_{(s_1+k+t_1)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(s_1+k+t_\eta)} \\ \mathbf{Y}_{(s_2+k+t_0)} & \mathbf{Y}_{(s_2+k+t_1)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(s_2+k+t_\eta)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{(s_\xi+k+t_0)} & \mathbf{Y}_{(s_\xi+k+t_1)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(s_\xi+k+t_\eta)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{(k-1+t_1)} \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{A}^{(k-1+t_\eta)} \mathbf{B}_\eta \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{(s_1+k-1)} \mathbf{B} & \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{(s_1+k-1+t_1)} \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{(s_1+k-1+t_\eta)} \mathbf{B}_\eta \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{(s_2+k-1)} \mathbf{B} & \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{(s_2+k-1+t_1)} \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{(s_2+k-1+t_\eta)} \mathbf{B}_\eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_\xi \mathbf{A}^{(s_\xi+k-1)} \mathbf{B} & \mathbf{C}_\xi \mathbf{A}^{(s_\xi+k-1+t_1)} \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{C}_\xi \mathbf{A}^{(s_\xi+k-1+t_\eta)} \mathbf{B}_\eta \end{bmatrix}_{w \times z}$$

ماتریس رابطه (۲۶) از نظر ریاضی این طور به نظر می‌رسد که از ماتریس رابطه (۲۱) پیچیده‌تر است. به هر حال ماتریس رابطه (۲۶) همان ماتریس رابطه (۲۱) است که در آن تعدادی از سطرها و ستون‌ها حذف شده است اما اولین بلوک آن بدون تغییر باقی مانده است. ماتریس بلوک‌های داده‌های ERA در رابطه (۲۶) این اجازه را می‌دهد که تنها سیگنال‌های اندازه‌گیری شده قوی و خوب را، بدون از دست دادن هرگونه قابلیت آن، در بگیرد. این مسئله زمانی مفید خواهد بود که تعدادی از داده‌های اندازه‌گیری شده نسبت به بقیه بیشتر آلوده به نویز بوده و یا تعدادی از حسگرها در هنگام

آزمایش به درستی عمل نکنند. از مزایای این روش مینیم شدن خطای پارامترهای شناسایی شده ناشی از نویز می‌باشد. یک انتخاب صحیح از داده‌ها و چیدمان مناسب آن‌ها در ماتریس بلوکی $\mathbf{H}_{(k)}$ ، اغلب می‌تواند محاسبه‌های این روش را کاهش دهد. بطور مثال ستون‌های $\mathbf{H}_{(k)}$ ممکن است با یک انتخاب مناسب از داده‌ها نسبت به یکدیگر مستقل باشند. این باعث می‌شود که مرتبه ماتریس برای مسئله‌های بزرگ کاهش یابد. برای داده‌های به اندازه کافی عاری از نویز، مرتبه ماتریس می‌تواند برابر با مرتبه ماتریس حالت سیستم، A ، باشد. این واقعیت از ماتریس‌های کنترل-پذیری و رویت‌پذیری نتیجه می‌گردد که در قسمت بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد.

با استفاده از رابطه (۲۶) می‌توان نشان داد که :

$$\mathbf{H}_{(k)} = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^k \mathbf{Q}_\beta \quad (28)$$

که در آن

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{s_1} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{s_2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_\alpha \mathbf{A}^{s_\alpha} \end{bmatrix}_{W \times n} \quad \& \quad \mathbf{Q}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{t_1} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}^{t_2} \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}^{t_\beta} \mathbf{B}_\beta \end{bmatrix}_{n \times Z} \quad (29)$$

در اینجا نیز t_i و s_j اعداد صحیح مثبت اختیاری می‌باشند. \mathbf{P}_α و \mathbf{Q}_β ماتریس‌های تعمیم یافته رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری هستند که تا حدی با ماتریس‌های نشان داده شده در روابط (۱۲) و (۱۳) تفاوت دارد. با این وجود \mathbf{P}_α و \mathbf{Q}_β دارای همان ویژگی‌های رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری می‌باشند که قبلاً در مورد آن‌ها بحث شده است. روند روش ERA با فاکتورگیری از رابطه (۲۶) برای حالت $k=1$ به وسیله تجزیه مقادیر منفرد یا تکین (SVD)^۱ شروع می‌شود.

$$\mathbf{H}_{(0)} = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (30)$$

که در آن ستون‌های ماتریس \mathbf{R} با ابعاد $W \times W$ و ماتریس \mathbf{S} با ابعاد $Z \times Z$ متعامد می‌باشند. $\mathbf{\Sigma}$ نیز یک ماتریس مستطیلی با ابعاد $W \times Z$ است.

^۱ Singular value decomposition

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_W \qquad \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_Z \qquad (31)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Sigma}_n]_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times (Z-n)} \\ \mathbf{O}_{(W-n) \times n} & \mathbf{O}_{(W-n) \times (Z-n)} \end{bmatrix}_{W \times Z} \qquad \begin{aligned} [\boldsymbol{\Sigma}_n]_{n \times n} &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n) \\ (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0) & \\ (i = 1, 2, \dots, n) & \end{aligned} \qquad (32)$$

در ادامه فرض می‌شود که \mathbf{R}_n و \mathbf{S}_n ماتریس‌هایی هستند که از n ستون اول ماتریس‌های \mathbf{R} و \mathbf{S} تشکیل شده‌اند.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_n]_{W \times n} & [\mathbf{R}_0]_{W \times (W-n)} \end{bmatrix}_{W \times W} \qquad \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}_n^T]_{n \times Z} \\ [\mathbf{S}_0^T]_{(Z-n) \times Z} \end{bmatrix}_{Z \times Z} \qquad (33)$$

ماتریس‌های ضرایب \mathbf{E}_m و \mathbf{E}_r بصورت رابطه (34) تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m \\ \vdots \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix}_{W \times m} \qquad \mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{O}_r \\ \vdots \\ \mathbf{O}_r \end{bmatrix}_{Z \times r} \qquad (34)$$

که در آن \mathbf{O}_i ماتریس صفر مرتبه i ، \mathbf{I}_i ماتریس واحد مرتبه i می‌باشد. با استفاده از رابطه‌های (27)، (30)، (32)، (33) و (34) تحقق با مرتبه مینیمم بصورت زیر شناسایی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_{(1)} \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} \\ \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{Y}_0 \end{aligned} \qquad (35)$$

ماتریس‌های بدست آمده در رابطه (35) تحقق مینیمم مورد نظر می‌باشد. علامت " \wedge " به معنی تخمین زده شده است تا از مقدار واقعی تمیز داده شود. مرتبه ماتریس $\hat{\mathbf{A}}$ برابر با n همان مرتبه سیستم برای داده‌های به اندازه کافی عاری از نویز است. اگر \mathbf{R}_n و \mathbf{S}_n از روش‌های دیگری غیر از SVD بدست آمده باشند بطوری که $\mathbf{R}_n \mathbf{R}_n^T \neq \mathbf{I}_W$ و $\mathbf{S}_n \mathbf{S}_n^T \neq \mathbf{I}_Z$ باشد در این صورت رابطه (35)

برقرار است اگر ماتریس‌های \mathbf{R}_n^T و \mathbf{S}_n^T به وسیله \mathbf{R}_n^\dagger و \mathbf{S}_n^\dagger جایگزین شوند. "†" علامت شبه وارون می‌باشد.

سیستم شناسایی شده در حوزه گسسته زمانی که با $\{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{A}}\}$ نشان داده شده است را می‌توان با استفاده از رابطه (۸) به حوزه پیوسته زمانی منتقل کرد. فرکانس‌ها و میرایی‌های سیستم را نیز می‌توان از مقادیر ویژه ماتریس $\hat{\mathbf{A}}$ در حوزه پیوسته زمانی محاسبه کرد. به وسیله بردارهای ویژه، می‌توان تحقق را به فضای مودال منتقل کرد. از این رو تعیین شکل‌های مودی، میرایی و ضرایب مشارکت مودی امکان‌پذیر است.

به علت اندازه‌گیری نویز، غیرخطی بودن و گرد کردن اعداد توسط کامپیوتر ماتریس بلوکی $\mathbf{H}_{(k)}$ معمولاً دارای رتبه کامل نبوده بطوری که در حالت کلی برابر با مرتبه صحیح سیستم در حال آزمایش نمی‌باشد. در حالت ایده‌آل خروجی‌های یک سیستم شناسایی شده خیلی نزدیک به مقادیر واقعی می‌باشد. اما در عمل چنین نیست. اگر روابط (۲۱) و (۳۰) به عنوان یک رابطه در نظر گرفته شود آنگاه تساوی زیر می‌تواند برقرار باشد:

$$\mathbf{H}_{(0)} = (\mathbf{R}_n \Sigma_n \frac{1}{2}) (\Sigma_n \frac{1}{2} \mathbf{S}_n^T) \equiv [\mathbf{P}_\alpha]_{W \times n} [\mathbf{Q}_\beta]_{n \times Z} \quad (36)$$

که در آن از علامت \equiv به دلیل وجود نویز و حذف مقادیر تکین غیرصفر استفاده شده است. گرامین^۱ کنترل‌پذیری $\mathbf{Q}_\beta \mathbf{Q}_\beta^T$ و گرامین رویت‌پذیری $\mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{P}_\alpha$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{Q}_\beta^T &= \Sigma_n \frac{1}{2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n \Sigma_n \frac{1}{2} = \Sigma_n \\ \mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{P}_\alpha &= \Sigma_n \frac{1}{2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n \Sigma_n \frac{1}{2} = \Sigma_n \end{aligned} \quad (37)$$

در واقع گرامین‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری برابر و قطری است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سیستم شناسایی شده $\{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{A}}\}$ همان‌طور که کنترل‌پذیر است رویت‌پذیر نیز می‌باشد. به این ویژگی تحقق متعادل داخلی می‌گویند. به این معنی که تبدیل سیگنال از ورودی به حالت و سپس از حالت به خروجی شبیه هم بوده و متعادل می‌باشند. تعدادی از مقادیر تکین $(\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_n)$ ممکن است بطور نسبی کوچک و قابل صرف نظر کردن باشد. به عبارت دیگر بجای آن که در مورد سیستم اطلاعاتی را داشته باشند بیشتر در مورد نویز اطلاعات دارند. جهت‌های شناسایی شده به

^۱ Grammain

وسیله مقادیر $(\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_n)$ کمتر کنترل پذیر و رویت پذیر می باشند. نیاز به شناسایی تحققی که شامل چنین جهت هایی باشد کار بیهوده ای است. مدل کاهش یافته با مرتبه i بعد از حذف مقادیر تکین $(\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_n)$ به عنوان بخش بسیار کنترل پذیر و بسیار رویت پذیر سیستم شناسایی شده در نظر گرفته می شود.

روش هایی برای تشخیص مدهای واقعی از مدهای آلوده به نویز

دو روش برای تشخیص مدهای واقعی از مدهای آلوده به نویز در اینجا معرفی می شود [۹] که عبارتند از:

- ضریب مشارکت جمعی مودی (MAC)

- مقادیر تکین مودی (MSV)

در ادامه هر یک از روش ها بصورت کامل توضیح داده خواهد شد.

معادله یک سیستم شناسایی شده در حوزه زمانی گسسته در مختصات مودال در زیر آمده است:

$$\begin{aligned} \mathbf{Xm}_{(k+1)} &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Xm}_{(k)} + \hat{\mathbf{B}}_m \mathbf{u}_{(k)} \\ \mathbf{y}_{(k)} &= \hat{\mathbf{C}}_m \mathbf{Xm}_{(k)} + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}_{(k)} \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(k)} &= \psi \mathbf{Xm}_{(k)} \\ \hat{\mathbf{B}}_m &= \psi^{-1} \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{C}}_m &= \hat{\mathbf{C}} \psi \\ \hat{\mathbf{A}} &= \psi^{-1} \hat{\mathbf{A}} \psi \end{aligned} \quad (39)$$

به دلیل آن که بردار اندازه گیری (خروجی) $\mathbf{y}_{(k)}$ مقادیر حقیقی است؛ تمام کمیت های مختلط در رابطه (۳۹) شامل مقادیر ویژه ای می باشند که بصورت جفت های مزدوج مختلط اتفاق می افتد. برای یک سیستم خطی، تبدیل از ورودی $\mathbf{u}_{(k)}$ به خروجی $\mathbf{y}_{(k)}$ می تواند به وسیله پارامترهای مارکوف شناسایی شده تعریف شود.

$$\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{\mathbf{D}} \quad \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{B}}_m \quad \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}}_m \quad \dots \quad \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{A}}^{l-2} \hat{\mathbf{B}}_m] \equiv [\hat{\mathbf{Y}}_0 \quad \hat{\mathbf{Y}}_1 \quad \hat{\mathbf{Y}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{Y}}_{l-1}]_{m \times lr} \quad (40)$$

¹ Modal Amplitude Coherence

² Modal Singular Value

که در آن l تعداد پارامترهای مارکوف می‌باشد. برای حالت بدون نویز، مجموعه پارامترهای مارکوف ترکیبی از پاسخ‌های ضربه است که به وسیله ایجاد ضربه واحد در مکان‌های مختلف ورودی تولید می‌شود. z امین ستون ماتریس پارامتر مارکوف \hat{Y}_i در i امین بازه زمانی، نشان دهنده پاسخ ضربه در i امین بازه زمانی به ازای یک ضربه واحد در z امین ورودی می‌باشد.

$$\hat{Y}_{(i)} = [y_1(i) \quad y_2(i) \quad y_3(i) \quad \cdots \quad y_r(i)]_{m \times r} \quad (41)$$

$y_j(i)$ با ابعاد $m \times 1$ پاسخ سیستم به ازای ورودی واحد، تنها به وسیله z امین ورودی در i امین گام زمانی است. مجموعه پارامترهای مارکوف از نظر مختصات مستقل و یکتا می‌باشند. ماتریس-های ورودی و خروجی بصورت زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

$$\hat{B}_m = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix}_{n \times r} \quad \& \quad \hat{C}_m = [\hat{c}_1 \quad \hat{c}_2 \quad \cdots \quad \hat{c}_n]_{m \times n} \quad (42)$$

که در آن n مرتبه ماتریس سیستم و یا مختصات مودال است. \hat{b}_i ، $(i=1, 2, \dots, n)$ ، بردار سطری با طول r و \hat{c}_i بردار ستونی با طول m است. به کمک رابطه (43) هر یک از پارامترهای مارکوف را می‌توان به تنهایی بصورت ترکیبی از n جز مختصات‌های مودی (درجه‌های آزادی) نوشت.

$$\hat{Y}_p = \hat{C}_m \hat{A}^{p-1} \hat{B}_m = \sum_{i=1}^n (\hat{c}_i \hat{\lambda}_i^{p-1} \hat{b}_i) \quad (p=1, 2, \dots, l-1) \quad (43)$$

که در آن l تعداد داده‌ها می‌باشد. هر یک از مقادیر ویژه دارای مجموعه‌ای از پارامترهای مارکوف است که بصورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 i=1 &\Rightarrow [\hat{\mathbf{c}}_1 \hat{\mathbf{b}}_1 \quad \hat{\mathbf{c}}_1 \hat{\lambda}_1 \hat{\mathbf{b}}_1 \quad \hat{\mathbf{c}}_1 \hat{\lambda}_1^2 \hat{\mathbf{b}}_1 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_1 \hat{\lambda}_1^{p-1} \hat{\mathbf{b}}_1 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_1 \hat{\lambda}_1^{l-2} \hat{\mathbf{b}}_1] \\
 &+ \\
 i=2 &\Rightarrow [\hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\mathbf{b}}_2 \quad \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\lambda}_2 \hat{\mathbf{b}}_2 \quad \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\lambda}_2^2 \hat{\mathbf{b}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\lambda}_2^{p-1} \hat{\mathbf{b}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\lambda}_2^{l-2} \hat{\mathbf{b}}_2] \\
 &+ \\
 &\vdots \\
 &+ \\
 i=n &\Rightarrow [\hat{\mathbf{c}}_n \hat{\mathbf{b}}_n \quad \hat{\mathbf{c}}_n \hat{\lambda}_n \hat{\mathbf{b}}_n \quad \hat{\mathbf{c}}_n \hat{\lambda}_n^2 \hat{\mathbf{b}}_n \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_n \hat{\lambda}_n^{p-1} \hat{\mathbf{b}}_n \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_n \hat{\lambda}_n^{l-2} \hat{\mathbf{b}}_n] \\
 &\downarrow \\
 &[\hat{\mathbf{Y}}_1 \quad \hat{\mathbf{Y}}_2 \quad \hat{\mathbf{Y}}_3 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{Y}}_p \quad \dots \quad \hat{\mathbf{Y}}_{l-1}]
 \end{aligned} \tag{44}$$

در نتیجه

$$i \Rightarrow [\hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^2 \hat{\mathbf{b}}_i \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^{p-1} \hat{\mathbf{b}}_i \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^{l-2} \hat{\mathbf{b}}_i] \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{45}$$

اگر q_i بصورت زیر تعریف شود:

$$\hat{\mathbf{q}}_i = [\hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\lambda}_i^2 \hat{\mathbf{b}}_i \quad \dots \quad \hat{\lambda}_i^{p-1} \hat{\mathbf{b}}_i \quad \dots \quad \hat{\lambda}_i^{l-2} \hat{\mathbf{b}}_i]_{1 \times (l-1)r} \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{46}$$

رابطه (46) بیانگر یک ساختار مجدد از تاریخچه زمانی مقدار ویژه $\hat{\lambda}_i$ و بردار سطری $\hat{\mathbf{b}}_i$ است. مجموعه کلی پارامترهای مارکوف سیستم بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}] & [\sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{q}}_i] \end{bmatrix}_{m \times r} \tag{47}$$

مجموعه $\hat{\mathbf{q}}_i$ را تاریخچه زمانی مقدار مشارکت مودی شناسایی شده¹ برای مود i ام می‌نامند. زیرا $\hat{\mathbf{q}}_i$ نشان دهنده میزان مشارکت مود i ام متناظر با بردار خروجی $\hat{\mathbf{c}}_i$ پاسخ سیستم در زمان‌های مختلف می‌باشد. بردار خروجی $\hat{\mathbf{c}}_i$ در فضای مودال نشان دهنده اطلاعات مربوط به شکل i امین مود نقاط مربوط به مکان حسگرها می‌باشد. مجموعه $\hat{\mathbf{q}}_i$ در رابطه (46) از مقادیر ویژه شناسایی شده و بردار ورودی $\hat{\mathbf{b}}_i$ شناسایی شده محاسبه می‌گردد. راه حل دیگر محاسبه مجموعه $\hat{\mathbf{q}}_i$ ، تجزیه مجموعه پارامترهای مارکوف $[\mathbf{Y}_0 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Y}_p \quad \dots \quad \mathbf{Y}_{l-1}]$ است که بطور مستقیم از پاسخ ضربه بدست می‌آید. این تکنیک با تشکیل ماتریس هَنکِل آغاز می‌گردد.

¹ Identified modal amplitude time history

$$\mathbf{H}_{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_{l-a} \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{l-a+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_a & \mathbf{Y}_{1+a} & \cdots & \mathbf{Y}_{l-1} \end{bmatrix}_{am \times (l-a)r} \quad (48)$$

که در آن α به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $m\alpha \geq n$ باشد. ماتریس هَنکِل با استفاده از SVD تجزیه می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{(0)} &\cong \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{Q}} \\ \bar{\mathbf{P}}_{am \times n} &= [\mathbf{R}_n]_{am \times n} [\boldsymbol{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}]_{n \times n} [\boldsymbol{\Psi}]_{n \times n} \\ \bar{\mathbf{Q}}_{n \times (l-a)r} &= [\boldsymbol{\Psi}^{-1}]_{n \times n} [\boldsymbol{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}]_{n \times n} [\mathbf{S}_n^T]_{n \times (l-a)r} \end{aligned} \quad (49)$$

که در آن $\boldsymbol{\Psi}$ یک ماتریس ناویژه اختیاری است که با انتخاب یک فضا (مختصات) برای مدل تعیین می‌شود. اگر فضای انتخاب شده فضای مودال باشد؛ $\boldsymbol{\Psi}$ ماتریس بردارهای ویژه ماتریس حالت سیستم واقعی \mathbf{A} است. با این وجود در عمل بردارهای ویژه ماتریس حالت تخمین زده شده $\hat{\mathbf{A}}$ را به عنوان $\boldsymbol{\Psi}$ در نظر می‌گیرند. زیرا ماتریس حالت سیستم واقعی \mathbf{A} معلوم نمی‌باشد. با جایگذاری رابطه (40) در رابطه (49) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{H}_{(0)} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m \\ \mathbf{C}_m \boldsymbol{\Lambda} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \boldsymbol{\Lambda}^{\alpha-1} \end{bmatrix}_{am \times n} [\mathbf{B}_m \quad \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}_m \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Lambda}^{l-a-1} \mathbf{B}_m]_{n \times (l-a)r} \quad (50)$$

پارامترهای $\boldsymbol{\Lambda}$ ، \mathbf{B}_m و \mathbf{C}_m نشان دهنده ماتریس‌های سیستم واقعی در فضای مودال است. بنابراین زمانی که تعدادی از مقادیر تکین به دلیل آغشته بودن به نویز، حذف شوند این رابطه تنها یک تقریب می‌باشد. $\bar{\mathbf{Q}}$ بصورت رابطه (51) تقسیم‌بندی می‌شود.

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1_{1 \times (l-a)r} \\ \bar{\mathbf{q}}_2_{1 \times (l-a)r} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}_n_{1 \times (l-a)r} \end{bmatrix}_{n \times (l-a)r} = [\mathbf{B}_m \quad \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}_m \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Lambda}^{l-a-1} \mathbf{B}_m]_{n \times (l-a)r} \quad (51)$$

\bar{Q} را می‌توان بصورت رابطه (۵۲) نشان داد

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \quad \lambda_1 \mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \lambda_1^{l-\alpha-1} \mathbf{b}_1]_{1 \times (l-\alpha)r} \\ [\mathbf{b}_2 \quad \lambda_2 \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \lambda_2^{l-\alpha-1} \mathbf{b}_2]_{1 \times (l-\alpha)r} \\ \vdots \\ [\mathbf{b}_n \quad \lambda_n \mathbf{b}_n \quad \cdots \quad \lambda_n^{l-\alpha-1} \mathbf{b}_n]_{1 \times (l-\alpha)r} \end{bmatrix}_{n \times (l-\alpha)r} \quad (52)$$

مقایسه رابطه (۴۶) و (۵۲) نشان می‌دهد که $\hat{\mathbf{q}}_i$ و $\bar{\mathbf{q}}_i$ برای حالت بدون نویز یکسان است. با وجود نویز و تعدادی مقادیر تکین کوچک غیرصفر $\hat{\mathbf{q}}_i$ تقریبی از $\bar{\mathbf{q}}_i$ می‌باشد.

روش ضریب مشارکت تجمعی مودی (MAC)

روش MAC حاصل ضرب نقطه‌ای بین دو بردار $\hat{\mathbf{q}}_i$ و $\bar{\mathbf{q}}_i$ است. بردار $\hat{\mathbf{q}}_i$ تشکیل شده از تاریخچه پاسخ ضربه واحد در زمان‌های انتخابی متناظر با مود i ام از مدل شناسایی شده می‌باشد. بردار $\bar{\mathbf{q}}_i$ بردار متناظر با داده‌های پاسخ ضربه استفاده شده در شناسایی مدل (پاسخ ضربه مدل اصلی) است.

$$MAC_i = \frac{|\bar{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_i^*|}{\sqrt{|\bar{\mathbf{q}}_i \bar{\mathbf{q}}_i^*| |\hat{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_i^*|}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (53)$$

علامت "*" نشان دهنده ترانزپوز^۱ و مزدوج مختلط می‌باشد. اگر دو بردار همزمان اتفاق بیافتند بنابراین مدل، داده‌های پاسخ ضربه را تولید کرده است. در غیر این صورت ضرب نقطه‌ای می‌تواند کسینوس زاویه بین بردارهای تاریخچه پاسخ اندازه‌گیری شده و تاریخچه پاسخ مدل شناسایی شده باشد. در عمل زمان لازم برای اندازه‌گیری MAC به اندازه کافی کوچک است.

روش مقادیر تکین مودی (MSV)

روش MSV مناسب برای تعیین میزان مشارکت هر مود شناسایی شده در تاریخچه پاسخ ضربه مدل شناسایی شده است. الگوریتم ERA سعی بر این دارد مدلی را شناسایی کند که با تاریخچه ضربه منطبق باشد. بنابراین مودی که دارای میزان مشارکت زیادی در شناسایی بوده منطقی است که دارای

^۱ Transpose

مشارکت زیادی در داده‌های پاسخ ضربه سیستم واقعی باشد. با توجه به رابطه (۴۵) روشن است که در فضای مودال هر یک از مودها در پاسخ ضربه مشارکت دارند. میزان مشارکت را می‌توان با استفاده از مقادیر تکین ماکزیمم بدست آورد.

$$MSV_i = \sqrt{|\hat{\mathbf{c}}_i| (1 + |\hat{\lambda}_i| + |\hat{\lambda}_i|^2 + \dots + |\hat{\lambda}_i|^{l-2}) |\hat{\mathbf{b}}_i|} \approx \sqrt{\frac{|\hat{\mathbf{c}}_i| |\hat{\mathbf{b}}_i|}{(1 - |\hat{\lambda}_i|)}} \quad (54)$$

رابطه تقریبی (۵۴) زمانی درست است که مقدار $|\hat{\lambda}_i|$ کمتر از یک بوده و تعداد پارامترهای مارکوف l نیز به اندازه کافی زیاد باشد.

گام‌های محاسباتی ERA

گام اول

ساخت ماتریس هَنکِل $\mathbf{H}_{(0)}$ با استفاده از رابطه (۱۸-۲) با انتخاب α ، β ، s_j و t_i مناسب بطوری که با انتخاب داده‌های اندازه‌گیری شده رابطه داشته و باعث مینیمم شدن ابعاد ماتریس هَنکِل شود. کاهش ابعاد ماتریس هَنکِل باید باعث تغییر رتبه آن نگردد.

$$\begin{aligned} s_j \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha - 1) &= j & \mathbf{C}_i &= \mathbf{C} & \mathbf{W} &= \alpha \mathbf{m} \\ t_i \quad (i = 1, 2, \dots, \beta - 1) &= i & \mathbf{B}_i &= \mathbf{B} & \mathbf{Z} &= \beta \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(k)} & \mathbf{Y}_{(k+1)} & \dots & \mathbf{Y}_{(k+\beta-1)} \\ \mathbf{Y}_{(1+k)} & \mathbf{Y}_{(1+k+1)} & \dots & \mathbf{Y}_{(1+k+\beta-1)} \\ \mathbf{Y}_{(2+k)} & \mathbf{Y}_{(2+k+1)} & \dots & \mathbf{Y}_{(2+k+\beta-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{(\alpha-1+k)} & \mathbf{Y}_{(\alpha-1+k+1)} & \dots & \mathbf{Y}_{(\alpha-1+k+\beta-1)} \end{bmatrix}_{\alpha \times \beta \times r}$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(1)} & \mathbf{Y}_{(2)} & \dots & \mathbf{Y}_{(\beta)} \\ \mathbf{Y}_{(2)} & \mathbf{Y}_{(3)} & \dots & \mathbf{Y}_{(\beta+1)} \\ \mathbf{Y}_{(3)} & \mathbf{Y}_{(4)} & \dots & \mathbf{Y}_{(\beta+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{(\alpha)} & \mathbf{Y}_{(\alpha+1)} & \dots & \mathbf{Y}_{(\alpha+\beta-1)} \end{bmatrix}_{\alpha \times \beta \times r}$$

گام دوم

با استفاده از رابطه (۳۰) ماتریس $\mathbf{H}_{(0)}$ تجزیه می‌شود

$$\mathbf{H}_{(0)} = [\mathbf{R}]_{\alpha \times \alpha} [\boldsymbol{\Sigma}]_{\alpha \times \beta} [\mathbf{S}^T]_{\beta \times \beta}$$

گام سوم

تعیین مرتبه سیستم با بررسی مقادیر تکین ماتریس $\mathbf{H}_{(0)}$ با استفاده از رابطه‌های (۳۲) و (۳۳).

گام چهارم

تشکیل ماتریس انتقال $\mathbf{H}_{(1)}$ و شناسایی تحقق $\{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{A}}\}$ با مرتبه مینیمم با استفاده از رابطه‌های (۳۴) و (۳۵)

$$k = 2 \Rightarrow \mathbf{H}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(2)} & \mathbf{Y}_{(3)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(\beta+1)} \\ \mathbf{Y}_{(3)} & \mathbf{Y}_{(4)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(\beta+2)} \\ \mathbf{Y}_{(4)} & \mathbf{Y}_{(5)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(\beta+3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{(\alpha+1)} & \mathbf{Y}_{(\alpha+2)} & \cdots & \mathbf{Y}_{(\alpha+\beta)} \end{bmatrix}_{\alpha \times \beta}$$

گام پنجم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $\hat{\mathbf{A}}$ تعیین می‌شوند. معادله‌های فضای حالت را به وسیله رابطه (۳۸) به فضای مودال منتقل کرده در نتیجه فرکانس‌ها و میرایی‌ها با استفاده از رابطه (۳۹) محاسبه می‌شوند.

گام ششم

تعیین $\hat{\mathbf{q}}_i$ و $\bar{\mathbf{q}}_i$ به وسیله یکی از روش‌های زیر:

روش اول- با استفاده از رابطه‌های (۴۲) و (۴۶)

روش دوم- با استفاده از رابطه‌های (۴۹) و (۵۱)

محاسبه MAC و MSV با استفاده از رابطه‌های (۵۳) و (۵۴)

گام هفتم

براساس شاخص‌های دقت محاسبه شده در گام ششم، مدل سیستم کاهش یافته تعیین می‌شود. پارامترهای مارکوف Y تشکیل شده و با پارامترهای مارکوف اندازه‌گیری شده مقایسه می‌گردد.

الگوریتم تحقق سیستم ویژه با داده‌های همبسته (ERA/DC)

در شناسایی سیستم، زمانی که داده‌های اندازه‌گیری شده آغشته به شدت نویز قابل توجهی باشد از ERA/DC استفاده می‌شود [۹]. در این الگوریتم بجای مقادیر پاسخ از همبستگی داده‌های اندازه‌گیری شده استفاده می‌گردد. ماتریس $\mathbf{H}_{hh(0)}$ با استفاده از ماتریس همبستگی داده‌ها $\mathbf{R}_{hh(k)}$ و با فرض $k=0$ بصورت زیر ساخته می‌شود

$$\mathbf{H}_{hh(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{hh(k)} & \mathbf{R}_{hh(k+\tau)} & \cdots & \mathbf{R}_{hh(k+Z\tau)} \\ \mathbf{R}_{hh(k+\tau)} & \mathbf{R}_{hh(k+2\tau)} & \cdots & \mathbf{R}_{hh(k+(Z+1)\tau)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{hh(k+W\tau)} & \mathbf{R}_{hh(k+(W+1)\tau)} & \cdots & \mathbf{R}_{hh(k+(W+Z)\tau)} \end{bmatrix}_{(W+1)\alpha m \times (Z+1)\alpha m} \quad (55)$$

که در آن

$$\mathbf{R}_{hh(k)} = \mathbf{H}_{(k)} \mathbf{H}_{(0)}^T \quad (56)$$

ابعاد $\mathbf{H}_{(k)}$ برابر با $\alpha m \times \beta r$ و در نتیجه ابعاد $\mathbf{R}_{hh(k)}$ برابر با $\alpha m \times \alpha m$ می‌باشد. ماتریس همبستگی داده‌ها از نظر ابعاد از ماتریس هَنکِل کوچکتر است؛ بخصوص زمانی که تعداد ستون‌های ماتریس هَنکِل به اندازه کافی بزرگ باشد. τ یک عدد صحیحی انتخابی است که از هم‌پوشانی قابل ملاحظه بلوک‌های ماتریس همبستگی \mathbf{R}_{hh} مجاور هم جلوگیری می‌کند. اعداد صحیح W و Z بیان‌گر این هستند که چه تعداد تاخیر زمانی همبستگی در آنالیز استفاده شده است. ماتریس $\mathbf{H}_{hh(0)}$ با استفاده از SVD بصورت زیر تجزیه می‌شود

$$\mathbf{H}_{hh(0)} = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (57)$$

که در آن ماتریس‌های \mathbf{R} ، $\mathbf{\Sigma}$ و \mathbf{S} به ترتیب دارای ابعاد $(W+1)\alpha m \times (W+1)\alpha m$ ، $(W+1)\alpha m \times (Z+1)\alpha m$ و $(Z+1)\alpha m \times (Z+1)\alpha m$ می‌باشند. با بررسی مرتبه سیستم مقدارهای تکین ماتریس $\mathbf{H}_{hh(0)}$ بدست می‌آید.

¹ Eigensystem Realization Algorithm with data correlations

$$\Sigma = \begin{bmatrix} [\Sigma_n]_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times ((Z+1)\alpha m - n)} \\ \mathbf{O}_{((W+1)\alpha m - n) \times n} & \mathbf{O}_{((W+1)\alpha m - n) \times ((Z+1)\alpha m - n)} \end{bmatrix}_{(W+1)\alpha m \times (Z+1)\alpha m} \quad (58)$$

$$[\Sigma_n]_{n \times n} = \text{diag}[\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_i \quad \sigma_{i+1} \quad \dots \quad \sigma_n] \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0) \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

با تعیین مقادیر تکین ماتریس $\mathbf{H}_{hh(0)}$ رابطه (57) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{H}_{hh(0)} = \mathbf{R}_n \Sigma_n \mathbf{S}_n^T \quad (59)$$

که در آن \mathbf{R}_n و \mathbf{S}_n به ترتیب از n ستون اول ماتریس‌های \mathbf{R} و \mathbf{S} بدست می‌آیند. با تعریف ماتریس‌های زیر

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m \\ \vdots \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix}_{\alpha m \times m} \quad \mathbf{E}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha m} \\ \mathbf{O}_{\alpha m} \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{\alpha m} \end{bmatrix}_{(W+1)\alpha m \times \alpha m} \quad \mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{O}_r \\ \vdots \\ \mathbf{O}_r \end{bmatrix}_{\beta r \times r} \quad (60)$$

تحقق $\{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{A}}\}$ با مرتبه مینیم با استفاده رابطه (61) شناسایی می‌گردد

$$\hat{\mathbf{A}} = \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_{hh(1)} \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{\mathbf{B}} = [\mathbf{E}_\alpha^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}}]^\dagger \mathbf{H}_{(0)} \mathbf{E}_r \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_m^T \mathbf{E}_\alpha^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \quad (61)$$

با انتخاب مناسب عدد صحیح k می‌توان اثر ناشی از اغتشاش را حذف کرد. عدد صحیح k با توجه به ویژگی‌های حسگرها تعیین می‌گردد. به منظور جلوگیری از هم‌پوشانی عبارات‌های همبستگی مجاور هم در بلوک ماتریس همبستگی، در رابطه (55) لازم است که $\tau \geq \alpha$ انتخاب شود. ساختار ماتریس \mathbf{R}_{hh} و ماتریس $\mathbf{H}_{hh(k)}$ بطور قابل توجهی تحت تاثیر انتخاب پارامتر W می‌باشد. برای $W=0$ ساختار ساده‌ترین حالت را دارد. اما بهترین پاسخ را ممکن است نتیجه ندهد.

شناسایی فیلتر کالمن / رویت‌گر (OKID)^۱

تکنیک‌های زیادی برای شناسایی سیستم مورد توسعه قرار گرفته است؛ که برای ساخت مدل فضای حالت و شناسایی پارامترهای مودال سازه‌های فضایی بزرگ مورد استفاده واقع شده‌اند. پارامترهای مودال شامل فرکانس، میرایی و شکل‌های مودی می‌باشد. مدل فضای حالت شناسایی شده اغلب برای طراحی کنترل‌گرها بکار گرفته می‌شوند. اغلب تکنیک‌های شناسایی سیستم براساس تاریخچه پاسخ سیستم به ضربه^۲، معروف به پارامترهای مارکوف، می‌باشند. معمولاً در عمل تابع‌های پاسخ فرکانس سیستم (FRFs)^۳ با تبدیل سریع فوریه (FFTs)^۴ بر روی ورودی‌ها و خروجی‌های اندازه‌گیری شده محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از معکوس تبدیل گسسته فوریه (IDFT)^۵ تاریخچه پاسخ سیستم به ضربه (پارامترهای مارکوف) بدست می‌آید. روش دیگر برای بدست آوردن پارامترهای مارکوف سیستم استفاده مستقیم از داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده در حوزه زمانی می‌باشد. در روش حوزه زمانی مستقیم، نیاز به معکوس کردن یک ماتریس ورودی است. این در حالی است که ماتریس ورودی برای سیستم‌های با میرایی کم ابعاد بزرگی دارد. معکوس کردن یک ماتریس با ابعاد بزرگ از معایب روش حوزه زمانی مستقیم است. برای حل این مشکل بجای شناسایی پارامترهای مارکوف سیستم، که ممکن است روند زوالی^۶ آهسته‌ای را از خود نشان دهد، می‌توان از یک رویت‌گر پایدار مجانبی برای تشکیل یک مدل فضای حالت پایدار در حوزه زمانی گسسته برای شناسایی می‌شود استفاده کرد. در عمل، هدف اولیه از استفاده از یک رویت‌گر، ترفندی برای فشرده‌سازی داده‌ها و بهبود نتایج سیستم می‌باشد. در روند شناسایی می‌توان هر قطب مطلوبی را برای رویت‌گر تخصیص داده و از این رو نرخ زوال را برای پارامترهای مارکوف رویت‌گر تعیین کرد. پارامترهای مارکوف رویت‌گر باید با استفاده از داده‌ها بدست آید و همچنین بطور همزمان تعداد پارامترهای مارکوف مورد نیاز باید تعیین شده بطوری که بعد از این تعداد، زوال پارامترها به گونه‌ای باشد که در یک سطح قابل اغماض قرار گیرند [۱۰]. رابطه بین تاریخچه زمانی ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم بصورت زیر می‌باشد:

$$\bar{Y} = y \times V^{\dagger} \quad (62)$$

که در آن

^۱ Observer/Kalman filter Identification
^۲ Impulse Response Time History
^۳ Frequency Response Functions
^۴ Fast Fourier Transforms
^۵ Inverse Discrete Fourier Transforms
^۶ Decay rate

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= [\mathbf{y}_{(0)} \quad \mathbf{y}_{(1)} \quad \mathbf{y}_{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{(\ell-1)}] \\
 \mathbf{v}_{(k)}^T &= [\mathbf{u}_{(k)}^T \quad \mathbf{y}_{(k)}^T] \\
 \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(0)} & \mathbf{u}_{(1)} & \mathbf{u}_{(2)} & \cdots & \mathbf{u}_{(p)} & \cdots & \mathbf{u}_{(\ell-1)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{v}_{(0)} & \mathbf{v}_{(1)} & \cdots & \mathbf{v}_{(p-1)} & \cdots & \mathbf{v}_{(\ell-2)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{v}_{(0)} & \cdots & \mathbf{v}_{(p-2)} & \cdots & \mathbf{v}_{(\ell-3)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{v}_{(0)} & \cdots & \mathbf{v}_{(\ell-p-1)} \end{bmatrix} \quad (63)
 \end{aligned}$$

ماتریس \mathbf{y} با ابعاد $m \times \ell$ نشان دهنده ماتریس داده‌های خروجی است که در آن ℓ تعداد گام‌های زمانی^۱ شناسایی سیستم می‌باشد. ماتریس \mathbf{V}^\dagger شبه وارون ماتریس \mathbf{V} با ابعاد $[(r+m)p+r] \times \ell$ است. ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}$ با ابعاد $m \times [(r+m)p+r]$ شامل p پارامتر مارکوف رویت‌گر می‌باشد. رابطه (۶۲) دارای حل یکتایی برای ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}$ است اگر تمام سطرهای ماتریس \mathbf{V} خطی و مستقل باشند. همچنین خطای ناشی از محاسبه عددی شبه وارون کردن ماتریس \mathbf{V} با خطی و مستقل بودن سطرها کاهش پیدا می‌کند. مقدار ماکزیمم عدد p باعث می‌شود که ماتریس \mathbf{V} دارای بیشترین سطرهای مستقل باشد.

$$p \leq \frac{\ell - r}{m + r} \quad (64)$$

اگر حداقل مقدار p بصورت زیر در نظر گرفته شود:

$$p \geq \frac{N}{m} \quad (65)$$

یک ماتریس حالت تحقق یافته از \mathbf{A} با مرتبه N وجود خواهد داشت. برای شناسایی i امین پارامتر مارکوف سیستم $\mathbf{Y}_i = \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}$ از پارامترهای مارکوف رویت‌گر، ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}$ بصورت رابطه (۶۶) تقسیم‌بندی می‌شود.

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{Y}}_0 \quad \bar{\mathbf{Y}}_1 \quad \bar{\mathbf{Y}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{Y}}_p] \quad (66)$$

i امین بخش ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}$ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

^۱ Time step

$$\bar{Y}_i = [\bar{Y}_i^{(1)} - \bar{Y}_i^{(2)}] \quad (67)$$

که در آن زیرماتریس‌های \bar{Y}_i ، $\bar{Y}_i^{(1)}$ و $\bar{Y}_i^{(2)}$ به ترتیب دارای ابعاد $m \times (r+m)$ ، $m \times r$ و $m \times m$ می‌باشند. رابطه کلی بین پارامترهای مارکوف سیستم با پارامترهای مارکوف رویت‌گر بصورت زیر است.

$$\begin{aligned} Y_0 &= \bar{Y}_0 \\ Y_i &= \bar{Y}_i^{(1)} - \sum_{j=1}^i \bar{Y}_j^{(2)} Y_{i-j} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \dots, p \\ Y_i &= -\sum_{j=1}^p \bar{Y}_j^{(2)} Y_{i-j} \quad \text{for } i = p+1, p+2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (68)$$

با استفاده از رابطه (68) پارامترهای مارکوف سیستم از پارامترهای رویت‌گر بدست می‌آید. بنابراین به وسیله ERA/OKID می‌توان پارامترهای مارکوف سیستم یا همان تاریخچه زمانی پاسخ ضربه سیستم را بطور مستقیم از داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده بدست آورد و با ارائه یک مدل ریاضی از سیستم در فضای حالت آن را شناسایی کرد.

نتیجه‌گیری

در این فصل روش شناسایی سیستم در فضای گسسته زمانی با استفاده از الگوریتم ERA معرفی شد. همچنین مفاهیم اساسی روش شناسایی سیستم، شامل کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری بیان گردید. رابطه‌های شناسایی سیستم در فضای گسسته زمانی فرمول‌بندی و ارائه شده است. در الگوریتم ERA/DC برای کاهش اثرهای ناشی از آلودگی داده‌های اندازه‌گیری شده به شدت بالایی از نویز، از داده‌های همبسته بجای ورودی و خروجی‌های اندازه‌گیری شده استفاده می‌شود. با معرفی یک رویت-گر فیلتر کالمن می‌توان پارامترهای مارکوف سیستم یا همان تاریخچه زمانی پاسخ ضربه سیستم را بطور مستقیم از داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده بدست آورد. پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده توسط الگوریتم ERA/OKID اساس شناسایی آسیب در این پروژه تحقیقاتی قرار گرفته که در فصل بعد به جزئیات آن پرداخته می‌شود.

فصل سوم: شناسایی آسیب در سازه‌های ساختمانی

مقدمه

در این فصل روش جدیدی برای شناسایی آسیب بطور محلی/ کلی در مدل المان محدود سازه‌ها با بکارگیری تعداد حسگرهای محدود ارائه می‌گردد. پارامترهای سازه‌ای شامل ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی با استفاده از پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده محاسبه می‌شوند. پارامترهای سازه‌ای شناسایی شده، بطور مستقیم با پارامترهای مارکوف سیستم، مکان محرک‌ها و مکان حسگرها مرتبط است. همچنین در این روش بین پارامترهای سازه‌ای شناسایی شده و شکل‌های مودی سازه رابطه صریحی وجود ندارد. بنابراین بر خلاف سایر روش‌های شناسایی آسیب که در آن‌ها شکل‌های مودی نقش بسزایی دارند؛ در این روش نیازی به نصب حسگر در تمام درجه‌های آزادی برای اندازه‌گیری پاسخ‌ها و شناسایی شکل‌های مودی سیستم نمی‌باشد. در این تحقیق اثرهای ناشی از نویز، تعداد و مکان حسگرها بر روی دقت شناسایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنیان روش، فرضیات و فرمول‌بندی‌ها در ادامه بطور مفصل شرح داده خواهد شد.

شناسایی سیستم

در این تحقیق برای شناسایی سیستم از الگوریتم ERA که در فصل ۴ بطور مفصل شرح داده شده است استفاده می‌گردد. در روش ERA اساس شناسایی سیستم بر پایه پاسخ‌های ضربه یا همان پارامترهای مارکوف سیستم است. با بکارگیری روش ERA/OKID پارامترهای مارکوف سیستم بطور

مستقیم از داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده با استفاده از رابطه (۶۸) بدست می‌آیند. مدل فضای حالت شناسایی شده معادله حرکت یک سیستم سازه‌ای دارای N حالت، r ورودی و m خروجی در فضای پیوسته زمانی در رابطه (۱) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}}_{(t)} &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{q}}_{(t)} + \tilde{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}_{(t)} \\ \hat{\mathbf{y}}_{(t)} &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{q}}_{(t)} + \tilde{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{u}}_{(t)}\end{aligned}\quad (1)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{q}}_{(t)}$ بردار حالت شناسایی شده با ابعاد $N \times 1$ ، $\hat{\mathbf{u}}_{(t)}$ بردار نیروهای خارجی (ورودی) اندازه‌گیری شده با ابعاد $r \times 1$ و $\hat{\mathbf{y}}_{(t)}$ بردار خروجی‌های اندازه‌گیری شده با ابعاد $m \times 1$ است. ماتریس سیستم $\tilde{\mathbf{A}}$ با ابعاد $N \times N$ ، ماتریس مکان ورودی‌ها $\tilde{\mathbf{B}}$ با ابعاد $N \times r$ ، ماتریس مکان خروجی‌ها $\tilde{\mathbf{C}}$ با ابعاد $m \times N$ و ماتریس $\tilde{\mathbf{D}}$ با ابعاد $m \times r$ توسط الگوریتم ERA شناسایی (تخمین زده) شده و نشان دهنده عملگر داخلی سیستم خطی پیوسته زمانی می‌باشند. همچنین i امین پارامتر مارکوف سیستم $\tilde{\mathbf{Y}}_i$ شناسایی شده بوسیله ERA/OKID باید در رابطه (۲) نیز صدق کند.

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{i-1} \tilde{\mathbf{B}} \quad (2)$$

یکی از ویژگی‌های خیلی مهم پارامترهای مارکوف آن است که در تحقق‌های مختلف از یک تابع تبدیل این پارامترها تغییرناپذیر باقی می‌مانند [۸-۶]. بدین ترتیب پارامترهای مارکوف بصورت یکتا از تابع تبدیل قابل استخراج می‌باشند. برای تعیین این پارامترها از روی تابع تبدیل می‌توان بسط تابع تبدیل را برحسب توان‌های منفی s^{-i} نوشت.

$$\mathbf{G}(s) = \tilde{\mathbf{C}} (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{g}_i s^{-i} \quad (3)$$

که در آن

$$(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} = s^{-1}\mathbf{I} + s^{-1}\tilde{\mathbf{A}} + s^{-3}\tilde{\mathbf{A}}^2 + \dots \quad (4)$$

با مقایسه رابطه‌های (۳) و (۴) مشخص می‌شود که پارامترهای مارکوف همان ضرایب بسط چند جمله‌ای \mathbf{g}_i می‌باشند.

$$\mathbf{g}_i = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-1}\tilde{\mathbf{B}} \quad (5)$$

حال اگر تحقق‌های مختلفی از یک تابع تبدیل $\mathbf{G}(s)$ وجود داشته باشد؛ لزوماً ضریب‌های بسط توانی برای کلیه تحقق‌ها بایستی یکسان باشند. بنابراین

$$\tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{A}}_1^{i-1}\tilde{\mathbf{B}}_1 = \tilde{\mathbf{C}}_2\tilde{\mathbf{A}}_2^{i-1}\tilde{\mathbf{B}}_2 \quad (6)$$

یعنی پارامترهای مارکوف تغییرناپذیر بوده و به شکل تحقق بستگی ندارد. در روش ERA ماتریس هَنکِل که از پارامترهای مارکوف تشکیل می‌شود خود تغییرناپذیر است و با نوع تحقق تغییر نمی‌کند. با این مقدمه به استخراج پارامترهای سازه‌ای از پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده می‌پردازیم.

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده (DDA/ISMP)¹

معادله حرکت یک سیستم سازه‌ای دارای n درجه آزادی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_0\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_u\mathbf{u}(t) \quad (7)$$

که در آن \mathbf{M} ، \mathbf{C}_0 و \mathbf{K}_0 با ابعاد $n \times n$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سیستم سازه‌ای می‌باشد. بردارهای $\mathbf{x}(t)$ ، $\dot{\mathbf{x}}(t)$ و $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ با ابعاد $n \times 1$ پاسخ‌های سیستم سازه‌ای به ترتیب جابجایی، سرعت و شتاب است. بردار $\mathbf{u}(t)$ با ابعاد $r \times 1$ نیروی خارجی شامل تحریک‌های دینامیکی است که به سیستم سازه‌ای وارد می‌شود. ماتریس \mathbf{B}_u با ابعاد $n \times r$ مکان محرک‌ها را نشان می‌دهد. فرم فضای حالت پیوسته زمانی معادله (7) با $2n$ حالت، r ورودی و m خروجی بصورت زیر نوشته می‌شود:

¹ Damage detection algorithm based on identified system Markov parameters (DDA/ISMP)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{(t)} &= \mathbf{A} \mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{(t)} \\ \mathbf{y}_{(t)} &= \mathbf{C} \mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{(t)}\end{aligned}\quad (8)$$

که در آن $\mathbf{q}_{(t)} = [\mathbf{x}_{(t)}^T \quad \dot{\mathbf{x}}_{(t)}^T]^T$ بردار حالت با ابعاد $2n \times 1$ و $\mathbf{y}_{(t)}$ بردار خروجی‌ها (پاسخ‌های سیستم) با ابعاد $m \times 1$ است. ماتریس سیستم \mathbf{A} با ابعاد $2n \times 2n$ ، ماتریس مکان ورودی‌ها \mathbf{B} با ابعاد $2n \times r$ ، ماتریس مکان خروجی‌ها \mathbf{C} با ابعاد $m \times 2n$ و ماتریس \mathbf{D} با ابعاد $m \times r$ نشان دهنده عملگر داخلی سیستم خطی پیوسته زمانی می‌باشند.

پاسخ جابجایی به عنوان خروجی سیستم

با فرض آن که خروجی‌های سیستم سازه‌ای، تنها پاسخ‌های جابجایی باشد؛ در این صورت حسگرهای نصب شده در درجه‌های آزادی، جابجایی را اندازه‌گیری می‌کنند. ماتریس‌های \mathbf{A} ، \mathbf{B} ، \mathbf{C} و \mathbf{D} در رابطه (8) بصورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_m \quad \mathbf{O}_{m \times n}] \quad \mathbf{D} = [\mathbf{O}_{m \times r}] \quad (9)$$

پارامترهای \mathbf{O} و \mathbf{I} ماتریس‌های صفر و واحد با ابعاد مناسب می‌باشند. ماتریس \mathbf{C} به دو بخش \mathbf{C}_m و $\mathbf{O}_{m \times n}$ تقسیم شده که به ترتیب متناظر با خروجی‌های جابجایی و سرعت سیستم سازه‌ای است. ماتریس \mathbf{C}_m با ابعاد $m \times n$ مکان حسگرها را نشان می‌دهد. i امین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_i با استفاده از رابطه (10) محاسبه می‌گردد.

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B} \quad (10)$$

با استفاده از رابطه‌های (10) و (9) دومین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_2 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} &= [\mathbf{C}_m \quad \mathbf{O}_{m \times n}] \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{C}_m \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u\end{aligned}\quad (11)$$

دومین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده \tilde{Y}_2 از رابطه (۲) بجای Y_2 در رابطه (۱۱) جایگذاری می‌شود. همچنین با پیش ضرب و پس ضرب طرفین رابطه (۱۱) در ماتریس‌های $(C_m)^\dagger$ و $(B_u)^\dagger$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (C_m)^\dagger \tilde{Y}_2 (B_u)^\dagger &= (C_m)^\dagger C_m M^{-1} B_u (B_u)^\dagger \Rightarrow \\ M^{-1} &= (C_m)^\dagger \tilde{Y}_2 (B_u)^\dagger \end{aligned} \quad (12)$$

در نتیجه ماتریس جرم M از رابطه (۱۲) بصورت زیر تعیین می‌گردد:

$$M = B_u (\tilde{Y}_2)^\dagger C_m \quad (13)$$

عملگر $(\)^\dagger$ شبه وارون ماتریس است. با استفاده از رابطه‌های (۱۰) و (۹) سومین پارامتر مارکوف سیستم Y_3 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} Y_3 = CA^2B &= [C_m \quad O_{m \times n}] \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}K_0 & -M^{-1}C_0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} O_{n \times r} \\ M^{-1}B_u \end{bmatrix} \Rightarrow \\ Y_3 &= -(C_m M^{-1}) C_0 (M^{-1} B_u) \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری سومین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده \tilde{Y}_3 از رابطه (۲) و ماتریس M^{-1} از رابطه (۱۲) در رابطه (۱۴)

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_3 &= -(C_m (C_m)^\dagger \tilde{Y}_2 (B_u)^\dagger) C_0 ((C_m)^\dagger \tilde{Y}_2 (B_u)^\dagger B_u) \Rightarrow \\ \tilde{Y}_3 &= -\tilde{Y}_2 (B_u)^\dagger C_0 (C_m)^\dagger \tilde{Y}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

با پیش ضرب و پس ضرب طرفین رابطه (۱۵) در ماتریس $(\tilde{Y}_2)^\dagger$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (\tilde{Y}_2)^\dagger \tilde{Y}_3 (\tilde{Y}_2)^\dagger &= -(\tilde{Y}_2)^\dagger \tilde{Y}_2 (B_u)^\dagger C_0 (C_m)^\dagger \tilde{Y}_2 (\tilde{Y}_2)^\dagger \Rightarrow \\ (\tilde{Y}_2)^\dagger \tilde{Y}_3 (\tilde{Y}_2)^\dagger &= -(B_u)^\dagger C_0 (C_m)^\dagger \end{aligned} \quad (16)$$

با پیش‌ضرب و پس‌ضرب طرفین رابطه (۱۶) در ماتریس‌های \mathbf{B}_u و \mathbf{C}_m ماتریس میرایی \mathbf{C}_0 تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_3(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \mathbf{C}_m &= -\mathbf{B}_u(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \mathbf{C}_m \Rightarrow \\ \mathbf{C}_0 &= -\mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_3(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \mathbf{C}_m \end{aligned} \quad (17)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۰) و (۹) چهارمین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_4 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_4 = \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{B} &= [\mathbf{C}_m \quad \mathbf{O}_{m \times n}] \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{Y}_4 &= \mathbf{C}_m(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0)^2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u - \mathbf{C}_m\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{aligned} \quad (18)$$

رابطه (۱۸) بصورت رابطه (۱۹) بازنویسی می‌گردد.

$$\mathbf{C}_m\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u = \mathbf{C}_m(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0)^2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u - \mathbf{Y}_4 \quad (19)$$

با جایگذاری چهارمین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده $\tilde{\mathbf{Y}}_4$ از رابطه (۲)، ماتریس \mathbf{M}^{-1} از رابطه (۱۲) در رابطه (۱۹) نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u &= \\ \mathbf{C}_m((\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0)^2(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u - \tilde{\mathbf{Y}}_4 &\Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 &= \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 - \tilde{\mathbf{Y}}_4 \end{aligned} \quad (20)$$

با جایگذاری ماتریس میرایی \mathbf{C}_0 از رابطه (۱۷) در رابطه (۲۰)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 &= \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_3(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \mathbf{C}_m(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_3(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \mathbf{C}_m(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 - \tilde{\mathbf{Y}}_4 &\Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 &= \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_3(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_3(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 - \tilde{\mathbf{Y}}_4 \Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_m)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 &= \tilde{\mathbf{Y}}_3(\tilde{\mathbf{Y}}_2)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_3 - \tilde{\mathbf{Y}}_4 \end{aligned} \quad (21)$$

با تعریف ماتریس‌های U_{k-dis} ، Y_{B-dis} و Y_{I-dis} با ابعاد به ترتیب $m \times r$ ، $m \times n$ و $n \times r$ در رابطه (۲۲):

$$\begin{aligned} U_{k-dis} &= \tilde{Y}_3(\tilde{Y}_2)^\dagger \tilde{Y}_3 - \tilde{Y}_4 \\ Y_{B-dis} &= \tilde{Y}_2(B_u)^\dagger \\ Y_{I-dis} &= (C_m)^\dagger \tilde{Y}_2 \end{aligned} \quad (22)$$

رابطه (۲۱) را می‌توان بصورت ساده‌تر نوشت

$$U_{k-dis} = Y_{B-dis} K_0 Y_{I-dis} \quad (23)$$

رابطه (۲۳) معادله اساسی شناسایی ماتریس سختی سیستم سازه‌ای است؛ هنگامی که خروجی‌ها پاسخ‌های جابجایی سیستم سازه‌ای باشد.

پاسخ سرعت به عنوان خروجی سیستم

با فرض آن که خروجی‌های سیستم سازه‌ای، تنها پاسخ‌های سرعت باشد؛ در این صورت حسگرهای نصب شده در درجه‌های آزادی، سرعت را اندازه‌گیری می‌کنند. ماتریس‌های A ، B ، C و D در رابطه (۸) بصورت زیر ساخته می‌شوند:

$$A = \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}K_0 & -M^{-1}C_0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} O_{n \times r} \\ M^{-1}B_u \end{bmatrix} \quad C = [O_{m \times n} \quad C_v] \quad D = [O_{m \times r}] \quad (24)$$

ماتریس C به دو بخش C_v و $O_{m \times n}$ تقسیم شده که به ترتیب متناظر با خروجی‌های سرعت و جابجایی سیستم سازه‌ای است. ماتریس C_v با ابعاد $m \times n$ مکان حسگرها را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه‌های (۱۰) و (۲۴) اولین پارامتر مارکوف سیستم Y_1 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} Y_1 = CB &= [O_{m \times n} \quad C_v] \begin{bmatrix} O_{n \times r} \\ M^{-1}B_u \end{bmatrix} \Rightarrow \\ Y_1 &= C_v M^{-1} B_u \end{aligned} \quad (25)$$

اولین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده \tilde{Y}_1 از رابطه (۲) بجای Y_1 در رابطه (۲۵) جایگذاری می‌شود. همچنین با پیش‌ضرب و پس‌ضرب طرفین رابطه (۲۵) در ماتریس‌های $(C_v)^\dagger$ و $(B_u)^\dagger$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (C_v)^\dagger \tilde{Y}_1 (B_u)^\dagger &= (C_v)^\dagger C_v M^{-1} B_u (B_u)^\dagger \Rightarrow \\ M^{-1} &= (C_v)^\dagger \tilde{Y}_1 (B_u)^\dagger \end{aligned} \quad (26)$$

در نتیجه ماتریس جرم M از رابطه (۲۶) بصورت زیر تعیین می‌گردد:

$$M = B_u (\tilde{Y}_1)^\dagger C_v \quad (27)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۰) و (۲۴) دومین پارامتر مارکوف سیستم Y_2 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} Y_2 = CAB &= [O_{m \times n} \quad C_v] \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1} K_0 & -M^{-1} C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n \times r} \\ M^{-1} B_u \end{bmatrix} \Rightarrow \\ Y_2 &= -(C_v M^{-1}) C_0 (M^{-1} B_u) \end{aligned} \quad (28)$$

با جایگذاری دومین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده \tilde{Y}_2 از رابطه (۲) و ماتریس M^{-1} از رابطه (۲۶) در رابطه (۲۸)

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_2 &= -(C_v (C_v)^\dagger \tilde{Y}_1 (B_u)^\dagger) C_0 ((C_v)^\dagger \tilde{Y}_1 (B_u)^\dagger B_u) \Rightarrow \\ \tilde{Y}_2 &= -\tilde{Y}_1 (B_u)^\dagger C_0 (C_v)^\dagger \tilde{Y}_1 \end{aligned} \quad (29)$$

با پیش‌ضرب و پس‌ضرب طرفین رابطه (۲۹) در ماتریس $(\tilde{Y}_1)^\dagger$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (\tilde{Y}_1)^\dagger \tilde{Y}_2 (\tilde{Y}_1)^\dagger &= -(\tilde{Y}_1)^\dagger \tilde{Y}_1 (B_u)^\dagger C_0 (C_v)^\dagger \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_1)^\dagger \Rightarrow \\ (\tilde{Y}_1)^\dagger \tilde{Y}_2 (\tilde{Y}_1)^\dagger &= -(B_u)^\dagger C_0 (C_v)^\dagger \end{aligned} \quad (30)$$

با پیش‌ضرب و پس‌ضرب طرفین رابطه (۳۰) در ماتریس‌های B_u و C_v ماتریس میرایی C_0 تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \mathbf{C}_v &= -\mathbf{B}_u(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \mathbf{C}_v \Rightarrow \\ \mathbf{C}_0 &= -\mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \mathbf{C}_v \end{aligned} \quad (31)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۰) و (۲۴) سومین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_3 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m \times n} & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{Y}_3 &= -\mathbf{C}_v\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u + \mathbf{C}_v\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{aligned} \quad (32)$$

رابطه (۳۲) بصورت رابطه (۳۳) بازنویسی می‌گردد.

$$\mathbf{C}_v\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u = \mathbf{C}_v\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u - \mathbf{Y}_3 \quad (33)$$

با جایگذاری سومین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده $\tilde{\mathbf{Y}}_3$ از رابطه (۲)، ماتریس \mathbf{M}^{-1} از رابطه (۲۶) در رابطه (۳۳) نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_v(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u &= \\ \mathbf{C}_v(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u - \tilde{\mathbf{Y}}_3 &\Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 &= \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 - \tilde{\mathbf{Y}}_3 \end{aligned} \quad (34)$$

با جایگذاری ماتریس میرایی \mathbf{C}_0 از رابطه (۳۱) در رابطه (۳۴)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 &= \\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \mathbf{C}_v(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \mathbf{C}_v(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 - \tilde{\mathbf{Y}}_3 &\Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 &= \tilde{\mathbf{Y}}_1(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 - \tilde{\mathbf{Y}}_3 \Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 &= \tilde{\mathbf{Y}}_2(\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 - \tilde{\mathbf{Y}}_3 \end{aligned} \quad (35)$$

با تعریف ماتریس‌های $\mathbf{U}_{k\text{-vel}}$ ، $\mathbf{Y}_{B\text{-vel}}$ و $\mathbf{Y}_{I\text{-vel}}$ با ابعاد به ترتیب $m \times r$ ، $m \times n$ و $n \times r$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{k-vel} &= \tilde{\mathbf{Y}}_2 (\tilde{\mathbf{Y}}_1)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_2 - \tilde{\mathbf{Y}}_3 \\ \mathbf{Y}_{B-vel} &= \tilde{\mathbf{Y}}_1 (\mathbf{B}_u)^\dagger \\ \mathbf{Y}_{I-vel} &= (\mathbf{C}_v)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 \end{aligned} \quad (36)$$

رابطه (35) را می‌توان بصورت ساده‌تر نوشت.

$$\mathbf{U}_{k-vel} = \mathbf{Y}_{B-vel} \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_{I-vel} \quad (37)$$

رابطه (37) معادله اساسی شناسایی ماتریس سختی سیستم سازه‌ای است؛ هنگامی که خروجی‌ها پاسخ‌های سرعت سیستم سازه‌ای باشد.

پاسخ شتاب به عنوان خروجی سیستم

با فرض آن که خروجی‌های سیستم سازه‌ای، تنها پاسخ‌های شتاب باشد؛ در این صورت حسگرهای نصب شده در درجه‌های آزادی، شتاب را اندازه‌گیری می‌کنند. ماتریس‌های A ، B ، C و D در رابطه (8) بصورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{C} = [-\mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_0 \quad -\mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_0] \quad \mathbf{D} = [\mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u]$$

ماتریس C_a با ابعاد $m \times n$ مکان حسگرها را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه‌های (10) و (38) پارامتر مارکوف سیستم در زمان $t=0$ ، \mathbf{Y}_0 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= \mathbf{D} = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u \Rightarrow \\ \mathbf{Y}_0 &= \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u \end{aligned} \quad (39)$$

پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده در زمان $t=0$ ، $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ از رابطه (2) بجای \mathbf{Y}_0 در رابطه (39) جایگذاری می‌شود. همچنین با پیش‌ضرب و پس‌ضرب طرفین رابطه (39) در ماتریس‌های $(\mathbf{C}_a)^\dagger$ و $(\mathbf{B}_u)^\dagger$ خواهیم داشت

$$(\mathbf{C}_a)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_0 (\mathbf{B}_u)^\dagger = (\mathbf{C}_a)^\dagger \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{C}_\alpha)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_0 (\mathbf{B}_u)^\dagger \quad (40)$$

در نتیجه ماتریس جرم \mathbf{M} از رابطه (40) بصورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}_u \tilde{\mathbf{Y}}_0^\dagger \mathbf{C}_\alpha \quad (41)$$

با استفاده از رابطه‌های (10) و (38) اولین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_1 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_\alpha \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_0 & -\mathbf{C}_\alpha \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Y}_1 = -\mathbf{C}_\alpha \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_0 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u \quad (42)$$

با جایگذاری اولین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ از رابطه (2) و ماتریس \mathbf{M}^{-1} از رابطه (40) در رابطه (42)

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1 = -\mathbf{C}_\alpha (\mathbf{C}_\alpha)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_0 (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_\alpha)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_0 (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1 = -\tilde{\mathbf{Y}}_0 (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_\alpha)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_0 \quad (43)$$

با پیش‌ضرب و پس‌ضرب طرفین رابطه (43) در ماتریس $(\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger$ خواهیم داشت

$$(\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 (\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger = -(\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_0 (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_\alpha)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_0 (\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \Rightarrow$$

$$(\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 (\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger = -(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_\alpha)^\dagger \quad (44)$$

با پیش‌ضرب و پس‌ضرب طرفین رابطه (44) در ماتریس‌های \mathbf{B}_u و \mathbf{C}_α ماتریس میرایی \mathbf{C}_0 تعیین می‌شود.

$$\mathbf{B}_u (\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 (\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \mathbf{C}_\alpha = -\mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_\alpha)^\dagger \mathbf{C}_\alpha \Rightarrow$$

$$\mathbf{C}_0 = -\mathbf{B}_u (\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_1 (\tilde{\mathbf{Y}}_0)^\dagger \mathbf{C}_\alpha \quad (45)$$

با استفاده از رابطه‌های (10) و (38) دومین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_2 بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$Y_2 = CAB = \begin{bmatrix} -C_\alpha M^{-1} K_0 & -C_\alpha M^{-1} C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1} K_0 & -M^{-1} C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n \times r} \\ M^{-1} B_u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Y_2 = -C_\alpha M^{-1} K_0 M^{-1} B_u + C_\alpha M^{-1} C_0 M^{-1} C_0 M^{-1} B_u \quad (46)$$

رابطه (46) بصورت رابطه (47) بازنویسی می‌گردد.

$$C_\alpha M^{-1} K_0 M^{-1} B_u = C_\alpha M^{-1} C_0 M^{-1} C_0 M^{-1} B_u - Y_2 \quad (47)$$

با جایگذاری دومین پارامتر مارکوف سیستم شناسایی شده \tilde{Y}_2 از رابطه (2)، ماتریس M^{-1} از رابطه (40) در رابطه (47) نتیجه می‌دهد.

$$C_\alpha (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger K_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger B_u =$$

$$C_\alpha (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger C_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger C_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger B_u - \tilde{Y}_2 \Rightarrow$$

$$\tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger K_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 = \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger C_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger C_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 - \tilde{Y}_2 \quad (48)$$

با جایگذاری ماتریس میرایی C_0 از رابطه (45) در رابطه (48)

$$\tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger K_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 =$$

$$\tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger B_u (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_0)^\dagger C_\alpha (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger B_u (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_0)^\dagger C_\alpha (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 - \tilde{Y}_2 \Rightarrow$$

$$\tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger K_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 = \tilde{Y}_0 (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_0 (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_0 - \tilde{Y}_2 \Rightarrow$$

$$\tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger K_0 (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0 = \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2 \quad (49)$$

با تعریف ماتریس‌های U_{k-acc} ، Y_{B-acc} و Y_{I-acc} با ابعاد به ترتیب $m \times r$ ، $m \times n$ و $n \times r$

$$U_{k-acc} = \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2$$

$$Y_{B-acc} = \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger \quad (50)$$

$$Y_{I-acc} = (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0$$

رابطه (49) را می‌توان بصورت ساده‌تر نوشت.

$$U_{k-acc} = Y_{B-acc} K_0 Y_{I-acc} \quad (51)$$

رابطه (۵۱) معادله اساسی شناسایی ماتریس سختی سیستم سازه‌ای است؛ هنگامی که خروجی‌ها پاسخ‌های شتاب سیستم سازه‌ای باشد.

شناسایی المان ماتریس سختی

روابط شناسایی پارامترهای سازه‌ای بطور خلاصه در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول (۱) روابط شناسایی پارامترهای سازه‌ای برحسب خروجی‌های اندازه‌گیری شده

خروجی‌های اندازه‌گیری شده		
شتاب	سرعت	جابجایی
$M = B_u \tilde{Y}_0^\dagger C_\alpha$	$M = B_u \tilde{Y}_1^\dagger C_v$	$M = B_u \tilde{Y}_2^\dagger C_d$
$C_0 = -B_u \tilde{Y}_0^\dagger \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_0^\dagger C_\alpha$	$C_0 = -B_u \tilde{Y}_1^\dagger \tilde{Y}_2 \tilde{Y}_1^\dagger C_v$	$C_0 = -B_u \tilde{Y}_2^\dagger \tilde{Y}_3 \tilde{Y}_2^\dagger C_d$
$U_{k-acc} = Y_{B-acc} K_0 Y_{I-acc}$	$U_{k-vel} = Y_{B-vel} K_0 Y_{I-vel}$	$U_{k-dis} = Y_{B-dis} K_0 Y_{I-dis}$
$U_{k-acc} = \tilde{Y}_1 (\tilde{Y}_0)^\dagger \tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2$	$U_{k-vel} = \tilde{Y}_2 (\tilde{Y}_1)^\dagger \tilde{Y}_2 - \tilde{Y}_3$	$U_{k-dis} = \tilde{Y}_3 (\tilde{Y}_2)^\dagger \tilde{Y}_3 - \tilde{Y}_4$
$Y_{B-acc} = \tilde{Y}_0 (B_u)^\dagger$	$Y_{B-vel} = \tilde{Y}_1 (B_u)^\dagger$	$Y_{B-dis} = \tilde{Y}_2 (B_u)^\dagger$
$Y_{I-acc} = (C_\alpha)^\dagger \tilde{Y}_0$	$Y_{I-vel} = (C_v)^\dagger \tilde{Y}_1$	$Y_{I-dis} = (C_m)^\dagger \tilde{Y}_2$

رابطه‌های (۲۳)، (۳۷) و (۵۱) با فرض آن که خروجی سیستم به ترتیب پاسخ جابجایی، سرعت و شتاب باشد؛ برای شناسایی ماتریس سختی سازه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین رابطه اساسی شناسایی ماتریس سختی بطور کلی بصورت رابطه (۵۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$U_k = Y_B K_0 Y_I \quad (52)$$

بنابراین برای تعیین ماتریس K_0 رابطه (۵۲) دوباره بازنویسی شده بطوری که ماتریس K_0 بصورت یک بردار ستونی نامعین k_0 با ابعاد $n^2 \times 1$ ظاهر می‌شود.

$$A_k k_0 = h_k \quad (53)$$

که در آن

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{Y}_B \otimes \mathbf{Y}_I^T$$

$$\mathbf{k}_0 = \{k_{11} \ \dots \ k_{1n} \ | \ k_{21} \ \dots \ k_{2n} \ | \ \dots \ | \ k_{n1} \ \dots \ k_{nm}\}^T \quad (54)$$

$$\mathbf{h}_k = \{h_{11} \ \dots \ h_{1r} \ | \ h_{21} \ \dots \ h_{2r} \ | \ \dots \ | \ h_{m1} \ \dots \ h_{mr}\}^T$$

درایه k_{ij} در بردار \mathbf{k}_0 ، متناظر با درایه (i, j) از ماتریس \mathbf{K}_0 است. همچنین درایه h_{ij} در بردار \mathbf{h}_k با ابعاد $mr \times 1$ ، متناظر با درایه (i, j) از ماتریس \mathbf{U}_k می‌باشد. در رابطه (53) ماتریس \mathbf{A}_k ضرایب با ابعاد $mr \times n^2$ است. علامت \otimes عملگر ضرب کرونیگر^۱ را نشان می‌دهد. ضرب کرونیگر دو ماتریس \mathbf{Y}_B و \mathbf{Y}_I^T یک ماتریس بزرگتر است؛ که از تمام ضرب‌های محتمل درایه‌های ماتریس \mathbf{Y}_B در درایه‌های ماتریس \mathbf{Y}_I^T بدست می‌آید.

$$\mathbf{A}_k = [\mathbf{Y}_B]_{m \times n} \otimes [\mathbf{Y}_I^T]_{r \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{B(1,1)} \mathbf{Y}_I^T & \mathbf{Y}_{B(1,2)} \mathbf{Y}_I^T & \dots & \mathbf{Y}_{B(1,n)} \mathbf{Y}_I^T \\ \mathbf{Y}_{B(2,1)} \mathbf{Y}_I^T & \mathbf{Y}_{B(2,2)} \mathbf{Y}_I^T & \dots & \mathbf{Y}_{B(2,n)} \mathbf{Y}_I^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{B(m,1)} \mathbf{Y}_I^T & \mathbf{Y}_{B(m,2)} \mathbf{Y}_I^T & \dots & \mathbf{Y}_{B(m,n)} \mathbf{Y}_I^T \end{bmatrix}_{mr \times n^2} \quad (55)$$

حل معادله (53) به روش حداقل مربعات نرم مینیم^۲ برای تعیین درایه‌های ماتریس سختی \mathbf{K}_0 ، جواب یکتایی ندارد. همچنین ویژگی‌های مربوط به تقارن^۳ و صفر بودن^۴ بعضی از درایه‌های ماتریس سختی را نیز حفظ نمی‌کند. بنابراین اطلاعات مربوط به صفر بودن بعضی از درایه‌های ماتریس سختی باید بصورت شرط قیدهای اضافی^۵ در نظر گرفته شود. این کار از نظر ریاضی با حذف درایه‌های صفر بردار \mathbf{k}_0 و همچنین حذف ستون‌های متناظر با آن‌ها در ماتریس \mathbf{A}_k انجام شدنی است.

در مدل قاب‌های جرم متمرکز با عملکرد برشی، اگر درجه آزادی i ام به درجه آزادی z ام متصل نباشد؛ در این صورت $k_{ij} = 0$ است. اگر تعداد درایه‌های صفر ماتریس \mathbf{K}_0 برابر با $\gamma = n^2 - 3n + 2$ باشد با حذف درایه‌های صفر ($k_{ij} = 0$) در بردار سختی \mathbf{k}_0 ، بردار \mathbf{k}_0^m با

¹ Kronecker product

² Minimum norm least-squares method

³ Symmetric

⁴ Sparsity

⁵ Constraint conditions

ابعاد $(n^2 - \gamma) \times 1 = (3n - 2) \times 1$ حاصل می‌شود. همچنین با حذف ستون‌هایی از ماتریس A_k که در درایه‌های صفر بردار k_0 ضرب می‌گردند؛ ماتریس A_k^m با ابعاد $mr \times (n^2 - \gamma) = mr \times (3n - 2)$ بدست می‌آید. در نتیجه رابطه (۵۳) بصورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$A_k^m k_0^m = h_k \quad (56)$$

درایه‌های ماتریس سختی کل سازه از حل معادله (۵۶) بدست می‌آید. هر یک از درایه‌های ماتریس سختی کل سازه تابعی از سختی طبقات متصل کننده بین دو درجه آزادی خاص است. به عبارت دیگر درایه‌های ماتریس سختی شناسایی شده تابعی از سختی‌های دو طبقه مختلف می‌باشد. برای شناسایی دقیق مکان، نوع و شدت آسیب در سیستم، تعیین سختی هر یک از طبقه‌های سازه بصورت مجزا ضروری است. بنابراین استفاده مستقیم از نتایج بدست آمده از حل معادله (۵۶) کمک خاصی به روند شناسایی آسیب نمی‌کند. برای رفع این مشکل یک ماتریس تبدیل معرفی خواهد شد؛ تا بتوان سختی هر یک از طبقه‌ها را از نتایج حاصله از حل معادله (۵۶) استخراج کرد. هریک از درایه‌های ماتریس سختی تابعی از سختی طبقات است. بنابراین بردار k_0^m را می‌توان بصورت زیر تشکیل داد:

$$k_0^m = T_f k_0^z \quad (57)$$

که در آن

$$k_0^z = \{k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n\}^T \quad (58)$$

در بردار k_0^z با ابعاد $n \times 1$ ، پارامترهای k_i متناظر با سختی جانبی i امین طبقه سازه می‌باشند. ماتریس T_f با ابعاد $(3n - 2) \times n$ یک ماتریس تبدیل^۱ است؛ که با ضرب آن در بردار k_0^z درایه‌های غیر صفر ماتریس سختی سازه بدست می‌آید. T_{ij}^f درایه (i, j) از ماتریس T_f از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_{ij}^f = \frac{\partial k_{0i}^m}{\partial k_j} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3, \dots, 3n - 2) \\ (j = 1, 2, 3, \dots, n) \end{matrix} \quad (59)$$

^۱ Transformation matrix

پارامتر k_{0i}^m در رابطه (۵۹) i امین درایه بردار \mathbf{k}_0^m است. با جایگذاری رابطه (۵۷) در رابطه (۵۶) خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}_k^m \mathbf{T}_f \mathbf{k}_0^z = \mathbf{h}_k \quad (۶۰)$$

با استفاده از روش حل مینیمم حداقل مربعات معادله (۶۰) بردار \mathbf{k}_0^z محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{k}_0^z = (\mathbf{A}_k^m \mathbf{T}_f)^\dagger \mathbf{h}_k \quad (۶۱)$$

با تعیین بردار \mathbf{k}_0^z از رابطه (۶۱) سختی جانبی تمام طبقه‌های سازه شناسایی می‌گردد. در عمل آسیب‌های به وجود آمده در سازه می‌تواند ناشی از عوامل مختلفی از قبیل عملکرد طولانی مدت سازه، زلزله و بادهای شدید باشد. در روش DDA/ISMP پیشنهاد شده، آسیب در مدل قاب برشی سازه‌های ساختمانی با تعیین مقدار تغییرات در بردار سختی \mathbf{k}_0^z ، شناسایی می‌گردد. مقدار آسیب از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta \mathbf{k}^z(\%) = \frac{|\mathbf{k}_0^z - \mathbf{k}_d^z|}{\mathbf{k}_0^z} \times 100 \quad (۶۲)$$

در رابطه (۶۲) \mathbf{k}_0^z سختی اولیه شناسایی شده (سازه سالم) و \mathbf{k}_d^z سختی آسیب دیده (سازه معیوب) است. با استفاده از رابطه (۶۲) مقدار، مکان و نوع آسیب در سازه ساختمانی شناسایی می‌گردد.

در روش DDA/ISMP پارامترهای سازه‌ای شناسایی شده \mathbf{M} ، \mathbf{C}_0 و \mathbf{K}_0 از معادله‌های خلاصه شده در جدول (۱)، تنها با مکان محرک‌ها \mathbf{B}_u ، مکان حسگرها \mathbf{C}_m و پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده $\tilde{\mathbf{Y}}_i$ ارتباط دارند. بنابراین پارامترهای سازه‌ای شناسایی شده با شکل‌های مودی رابطه مستقیم ندارد. به این دلیل روش پیشنهادی DDA/ISMP دارای دو مزیت مهم است:

I. نیازی به نصب حسگر در تمام درجه‌های آزادی جهت شناسایی شکل‌های مودی نمی‌باشد. بنابراین بردار \mathbf{k}_0^z با تعداد محدودی از حسگرها و محرک‌ها قابل استخراج است.

II. شناسایی بطور محلی امکان‌پذیر است. با تعبیه حسگرها و محرک‌ها در مکان‌های متناظر با یک طبقه مورد نظر پارامترهای سازه‌ای آن شناسایی می‌گردد. بنابراین سختی جانبی یک طبقه خاص در سیستم سازه‌ای قابل استخراج است.

اثرهای آلودگی ناشی از نویز

در عمل آلودگی نویز در پاسخ‌های اندازه‌گیری شده امری اجتناب ناپذیر است. منبع ایجاد نویز می‌تواند شامل خرابی حسگرها، وجود اغتشاش‌های محیطی و غیره باشد. آلودگی پاسخ‌ها به نویز منجر به ایجاد خطا در شناسایی پارامترهای مارکوف سیستم می‌گردد. بنابراین اثرهای ناشی از نویز بر روی شناسایی آسیب در روش DDA/ISMP باید مورد بررسی قرار گیرد. معمولا اغتشاش‌های محیطی را در فرآیند شبیه‌سازی، با سیگنال نویز سفید از نوع فرآیند تصادفی^۱ و یا سیگنال نویز سفید گوسی^۲ مدل می‌کنند. سپس نویز شبیه‌سازی شده براساس یک شدت خاص به پاسخ‌های سازه اضافه می‌گردد. با استفاده از ERA/OKID پارامترهای مارکوف سیستم از پاسخ‌های آلوده به نویز شناسایی شده و اثر نویز بر روی کیفیت شناسایی پارامترهای سازه‌ای مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. مقدار شدت نویز در بازه زمانی $0 \leq t \leq T$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$R(\%) = \left[m^{-1} \sum_{i=1}^m \left(\left(\int_0^T \Delta y_i^2 \cdot dt \right) \cdot \left(\int_0^T y_i^2 \cdot dt \right)^{-1} \right) \right]^{0.5} \times 100 \quad (63)$$

که در آن y_i و Δy_i به ترتیب i امین خروجی و نویز متناظر با آن است.

نتیجه‌گیری

در این فصل الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده (DDA/ISMP) معرفی گردید. فرمول‌های روش DDA/ISMP برای حالت‌های مختلف خروجی اندازه‌گیری شده استخراج شد. همچنین اثر ناشی از آلودگی خروجی‌ها به اغتشاش مورد بررسی قرار گرفت. معادله‌های بدست آمده برای شناسایی پارامترهای سازه‌ای تنها با مکان محرک‌ها، مکان حسگرها و پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده رابطه دارند. بنابراین پارامترهای سازه‌ای

¹ White noise random process signal

² White noise Gussian signal

شناسایی شده با شکل‌های مودی رابطه مستقیم ندارد. به این دلیل روش پیشنهادی DDA/ISMP دارای دو مزیت مهم است:

- I. نیازی به نصب حسگر در تمام درجه‌های آزادی جهت شناسایی شکل‌های مودی نمی‌باشد.
- II. شناسایی بطور محلی امکان‌پذیر است.

فهرست منابع

- [1] Adams, D.E. (2007) Health Monitoring of Structural Materials and Components Methods with Applications, John Wiley & Sons, Ltd.
- [2] Ansari, F. (2005) Sensing Issues in Civil Structural Health Monitoring, Springer.
- [3] Balageas, D., Fritzen, P.C. and Guemes, A. (2006) Structural Health Monitoring, ISTE Ltd.
- [4] Sohn, H., Farrar, C. R., Hemez, M. F., Shunk, D. D., Stinemates, D. D. and Nadler, R.B. (2003) A Review of Structural Health Monitoring Literature: 1996–2001, Los Alamos National Laboratory Report, LA-13976-MS.
- [5] Rytter, A. (1993). Vibration based inspection of civil engineering structures., PhD Dissertation, Denmark, Alborg University.
- [۶] تقی‌راد، ح.ر. (۱۳۸۲) مقدمه‌ای بر کنترل مدرن، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.
- [۷] خاکی صدیق، ع. (۱۳۸۸) اصول کنترل مدرن (چاپ ششم)، موسسه انتشارات دانشگاه تهران.
- [8] Xue, D., Chen, Y.Q. and Atherton, D.P. (2007) Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB, the Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [9] Juang, J.N. (1994) Applied System Identification, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [10] Juang, J.N., Phan, M., Horta, L.G. and Longman, R.W. (1993). Identification of observer/Kalman filter Markov parameters: theory and experiments., J. Guid. Control Dyn., 16:2, 320–329.
- [۱۱] Hinton, E., Rock, T. and Zienkiewicz, O.C. (1976). A note on mass lumping and related processes in the finite element method., Earthquake Engrg. Struct. Dynamics, 4:3, 245–249.



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Structural Health Monitoring

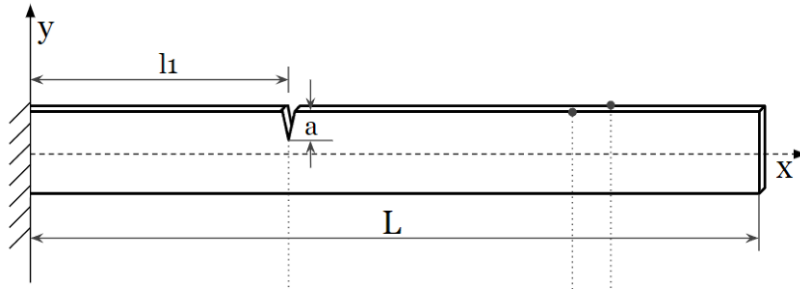
System Identification: Eigensystem Realization Algorithm

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

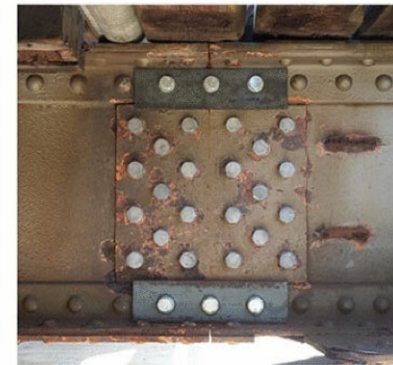
آسیب: پدیده آسیب در سازه‌ها به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شود.



آسیب خطی زمانی اتفاق می‌افتد که سازه با رفتار خطی الاستیک تحت اثر آسیب‌های ناگهانی با شدت کم بصورت خطی و الاستیک عمل کند. در این حالت پارامترهای سازه تغییر می‌کنند ولی در کل سازه بصورت خطی باقی می‌ماند. با این فرض می‌توان یک مدل ساده برای سازه تهیه کرد و معادله‌ها برحسب پارامترهای خطی نوشته می‌شوند.



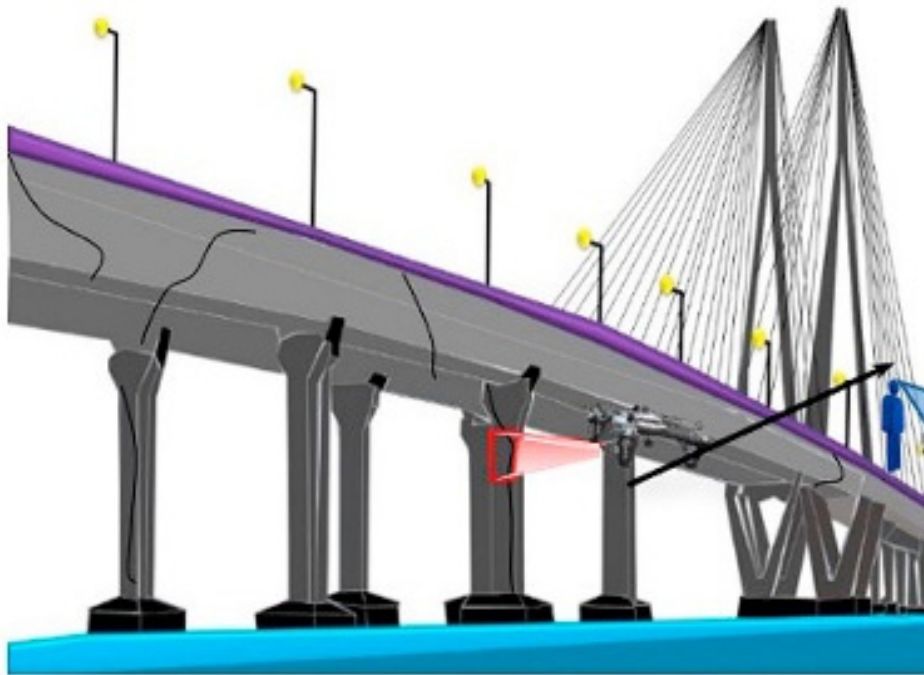
آسیب غیرخطی زمانی رخ می‌دهد که سازه خطی الاستیک پس از آسیب دچار رفتار غیرخطی شود. بطور مثال در سازه‌های بتنی، ترک‌هایی که در حین بارگذاری باز و بسته می‌شوند این رفتار را در سازه به وجود می‌آورند. یا کنده شدن اتصالات در سازه‌های فلزی.



با این وجود اکثر روش‌ها با فرض آسیب خطی مدل سازه را بررسی می‌کنند.

طبقه‌بندی روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای:

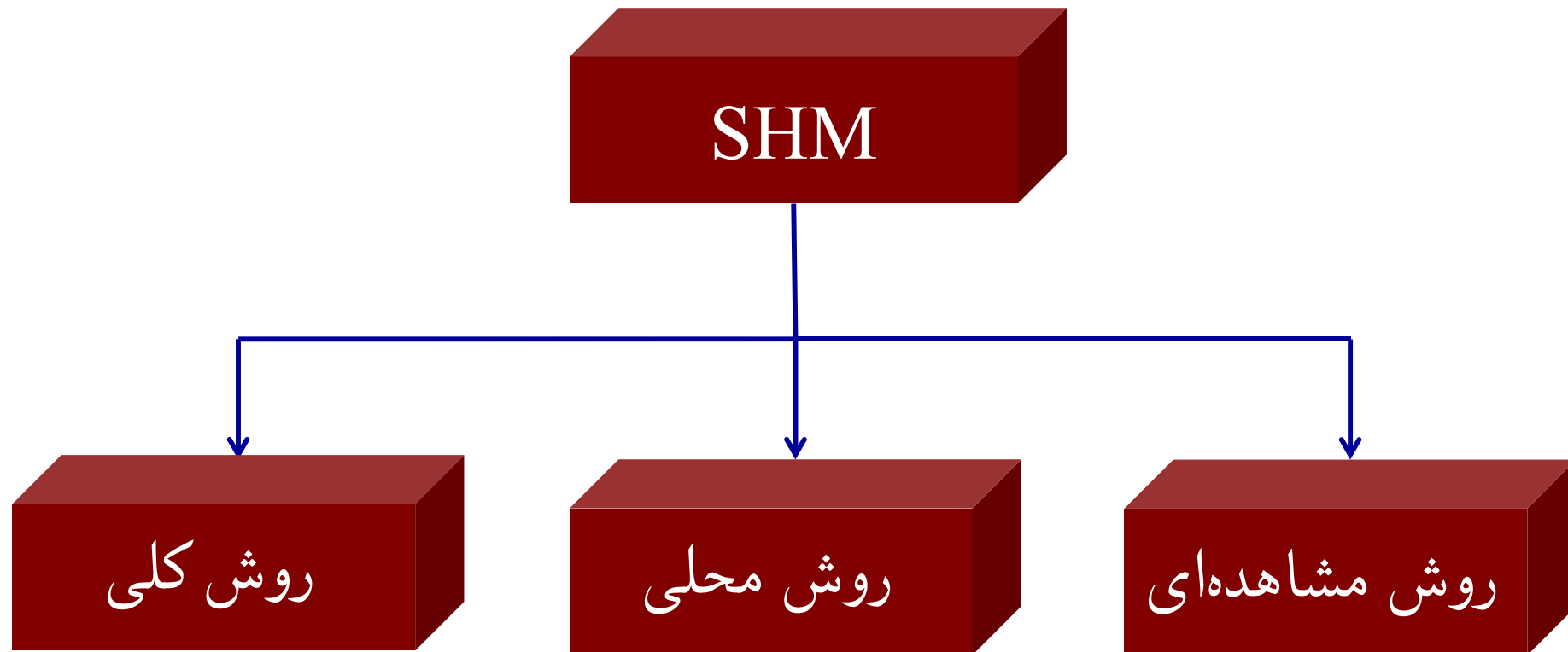
تا کنون روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای فراوانی توسعه یافته‌اند. عملکرد هر روش را می‌توان بر مبنای اطلاعات بدست آمده از آسیب ارزیابی کرد. ریتز در سال 1993 این روش‌ها را در چهار گروه طبقه‌بندی کرد:



- 1- تعیین وجود آسیب در سازه.
- 2- تعیین مکان آسیب در سازه.
- 3- کمی سازی شدت آسیب.
- 4- پیش‌بینی عمر مفید باقیمانده سازه.

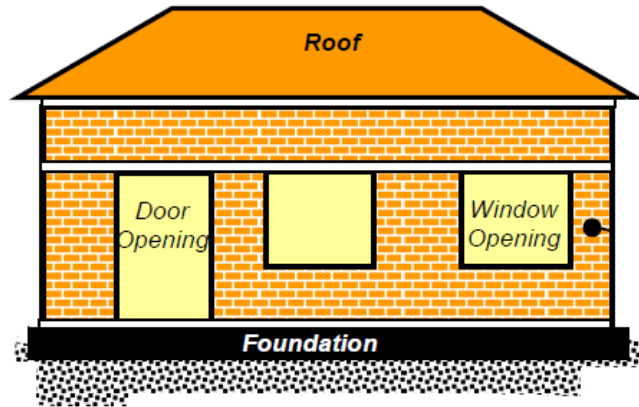
کشف آسیب در دستگاه‌های صنعتی به گروه اول محدود می‌شود و در اصطلاح به کشف خطا معروف است. اما اکثر روش‌های بررسی سلامت سازه‌ای که در مهندسی عمران مورد استفاده قرار گرفته‌اند متعلق به گروه سوم و چهارم می‌باشند. بدیهی است که در گروه‌های بالاتر اطلاعات بیشتری از آسیب بدست می‌آید. بنابراین داده‌های استفاده شده و حجم محاسبات به میزان قابل توجهی در این گروه‌ها نیز افزایش می‌یابد.

بررسی سلامت سازه‌ای: نظارت لحظه‌ای در طول عمر یک سازه است که به منظور تشخیص وجود خرابی، مقدار و مکان آن در قسمت‌های مختلف سازه صورت می‌گیرد. بطور کلی سازه باید براساس محدوده‌ی فرض شده در طراحی رفتار کند. اما به علت‌های مختلفی از قبیل فرسایش سازه ناشی از عمر زیاد آن، عوامل محیطی و رخداد‌های اتفاقی رفتار سازه در محدوده مجاز قرار نمی‌گیرد. به وسیله بررسی لحظه‌ای، بانک اطلاعاتی کاملی از تاریخچه‌ی رفتار سازه فراهم می‌شود که با استفاده از آن می‌توان آسیب را ارزیابی کرد و علاوه بر آن عمر باقی‌مانده سازه را تخمین زد.



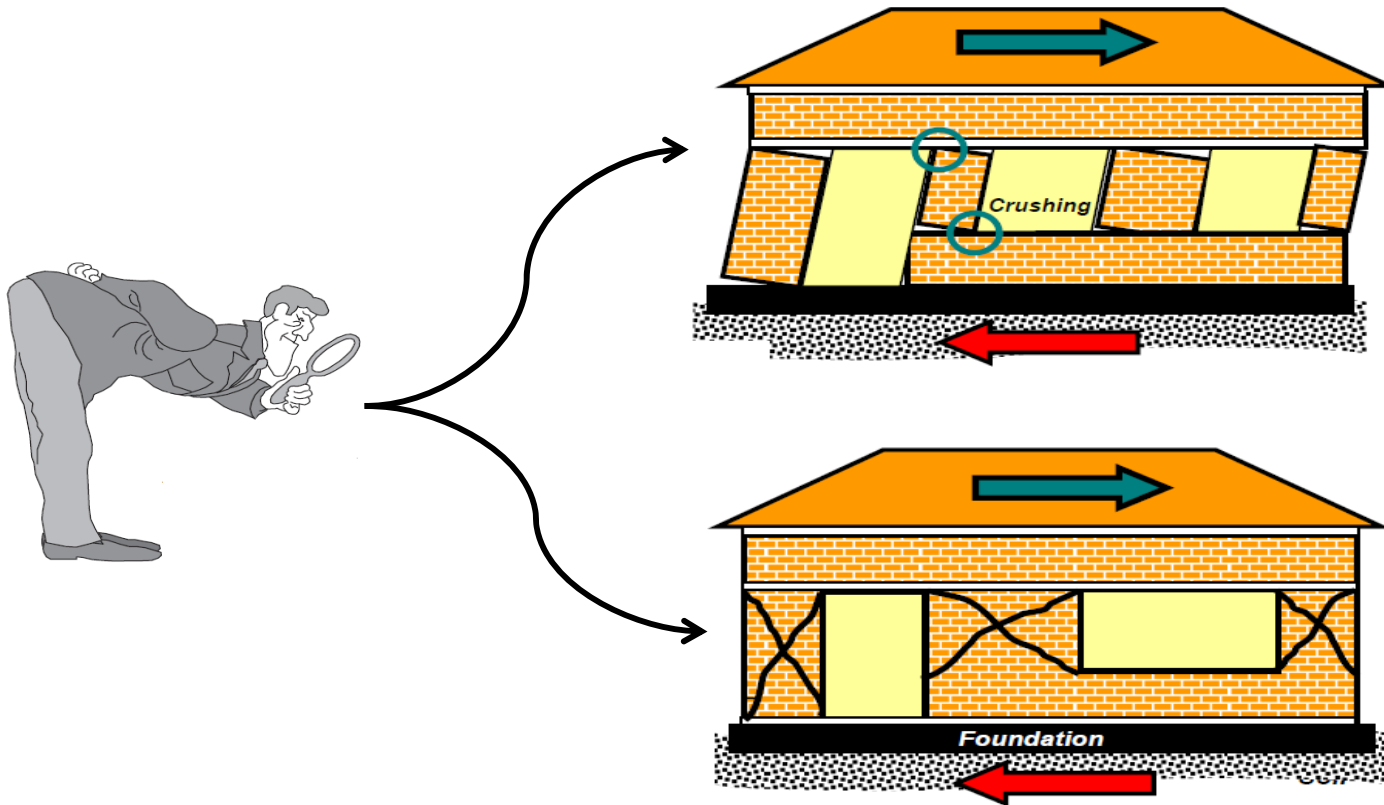
System Identification: ERA

بررسی سلامت سازه‌های (SHM)



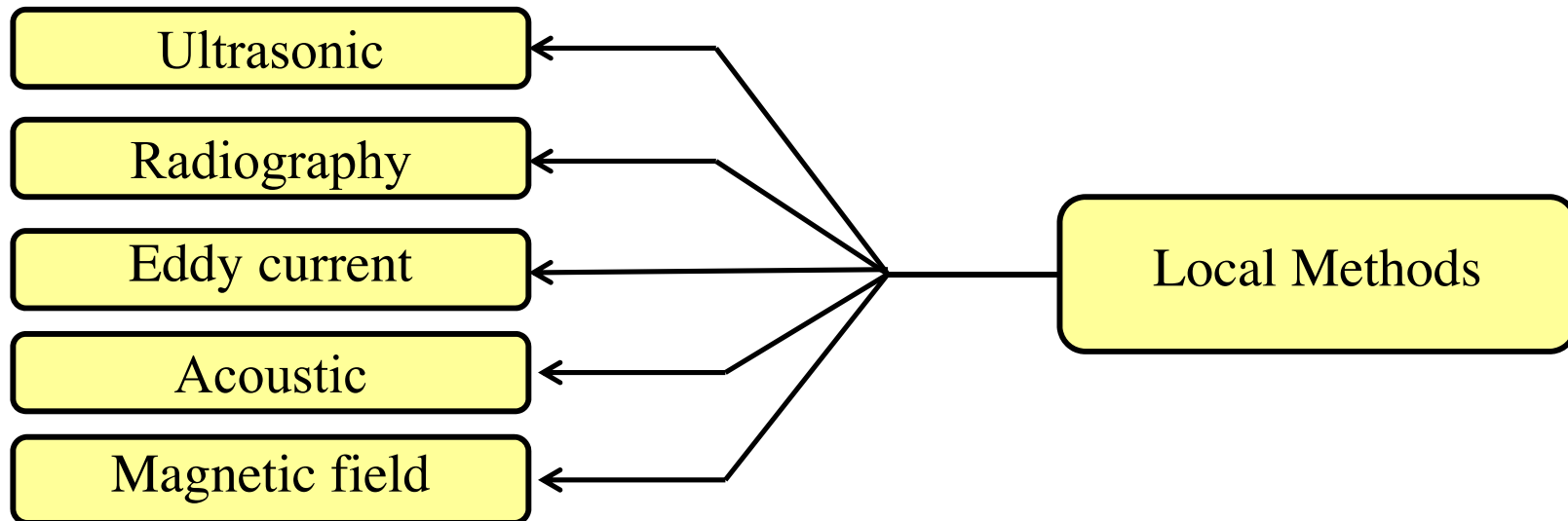
روش مشاهده‌ای

یک متخصص به بررسی ظاهری ساختمان از نظر ترک‌ها و جابجایی‌ها می‌پردازد.



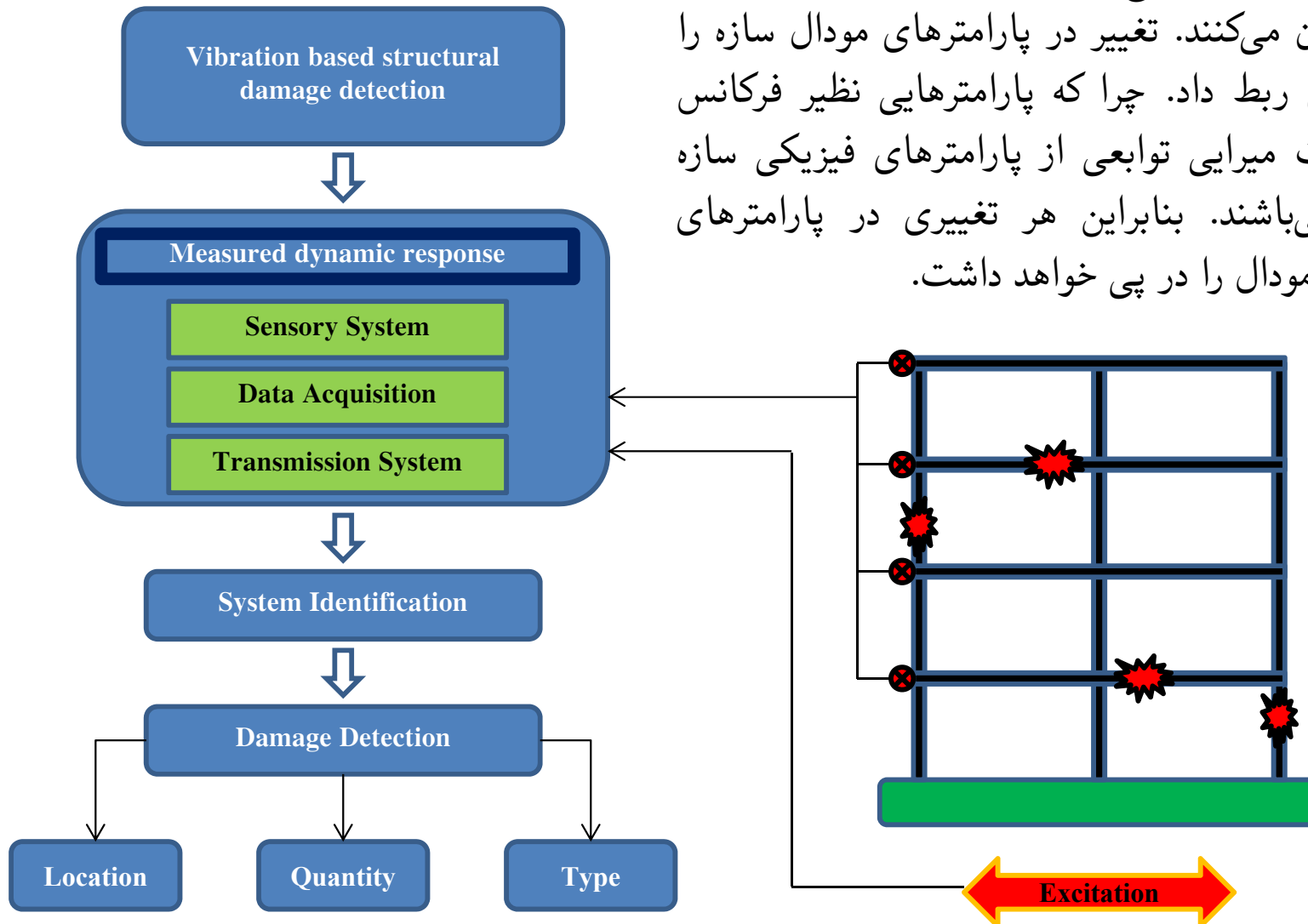
روش محلی

در روش‌های محلی مکان تقریبی آسیب مشخص می‌باشد؛ سازه را بصورت محلی بررسی کرده و آسیب‌های سطحی یا نزدیک سطح را آشکار می‌سازند. در این روش‌ها لازم است که منطقه مورد نظر از سازه به راحتی قابل دسترسی باشد تا بتوان آسیب را شناسایی کرد..

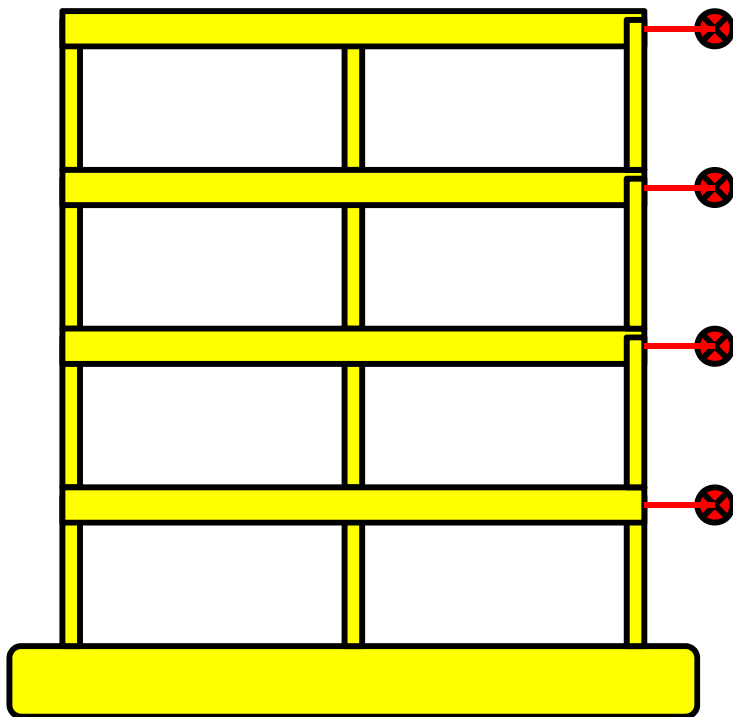


روش کلی

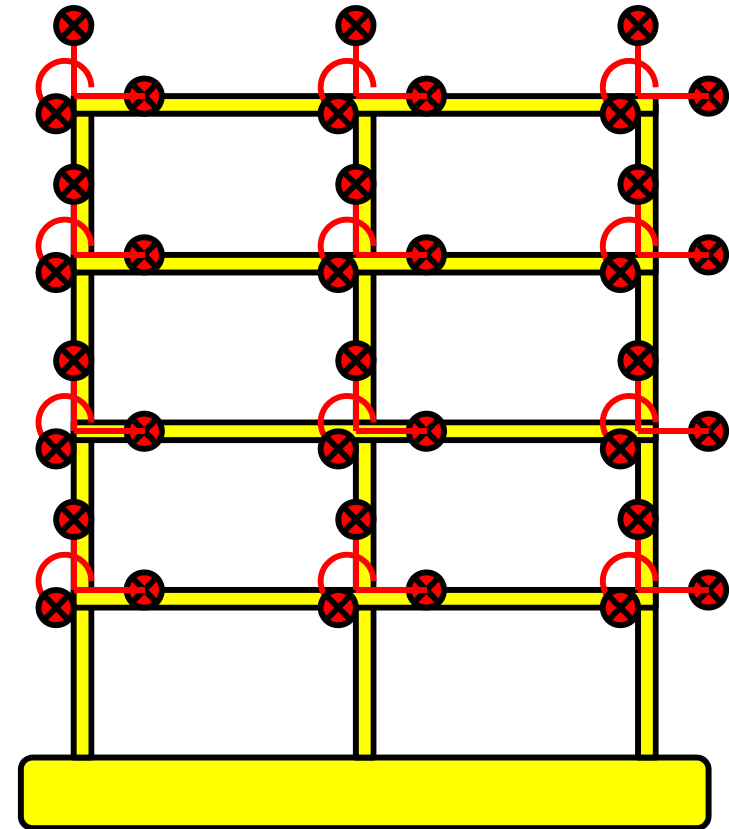
برخلاف روش‌های محلی، روش‌های کلی نیازی به اطلاعات اولیه راجع به آسیب ندارند. روش‌های کلی با بررسی پاسخ دینامیکی و پارامترهای سازه‌ای، مکان و شدت آسیب را نمایان می‌کنند. تغییر در پارامترهای مودال سازه را می‌توان به آسیب‌های سازه‌ای ربط داد. چرا که پارامترهایی نظیر فرکانس طبیعی، شکل مودی و نسبت میرایی توابعی از پارامترهای فیزیکی سازه (جرم، میرایی و سختی) می‌باشند. بنابراین هر تغییری در پارامترهای فیزیکی، تغییر در پارامترهای مودال را در پی خواهد داشت.



مشکل عمده روش‌های کلی محدودیت‌های نصب حسگر در سازه



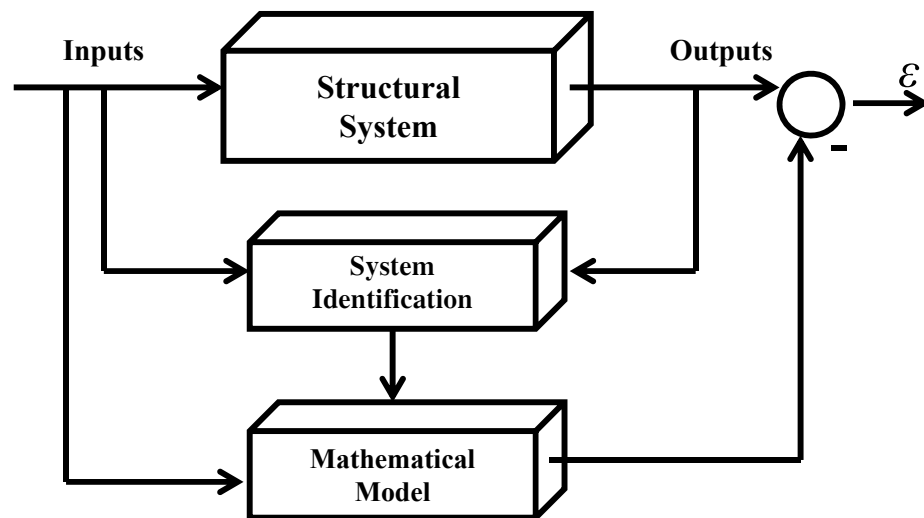
Shear Building With Lumped
Mass Model
DOFs=4



Finite Element Model
DOFs=36

تئوری شناسایی سیستم (SI)

شناسایی سیستم شامل تعیین پارامترهای دینامیکی بر مبنای تحلیل داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده می‌باشد. شناسایی سازه‌ای شامل الگوریتم‌هایی است که برای بدست آوردن وضعیت سازه و پارامترهای آن بکار می‌رود.



برای آن که رفتار مدل سازه شناسایی شده با رفتار سازه واقعی مطابقت داشته باشد؛ الگوریتم‌های شناسایی سازه باید دارای سه ویژگی باشند:

1- حساس به اغتشاش نباشد یعنی با واقعیت مطابقت داشته باشد.

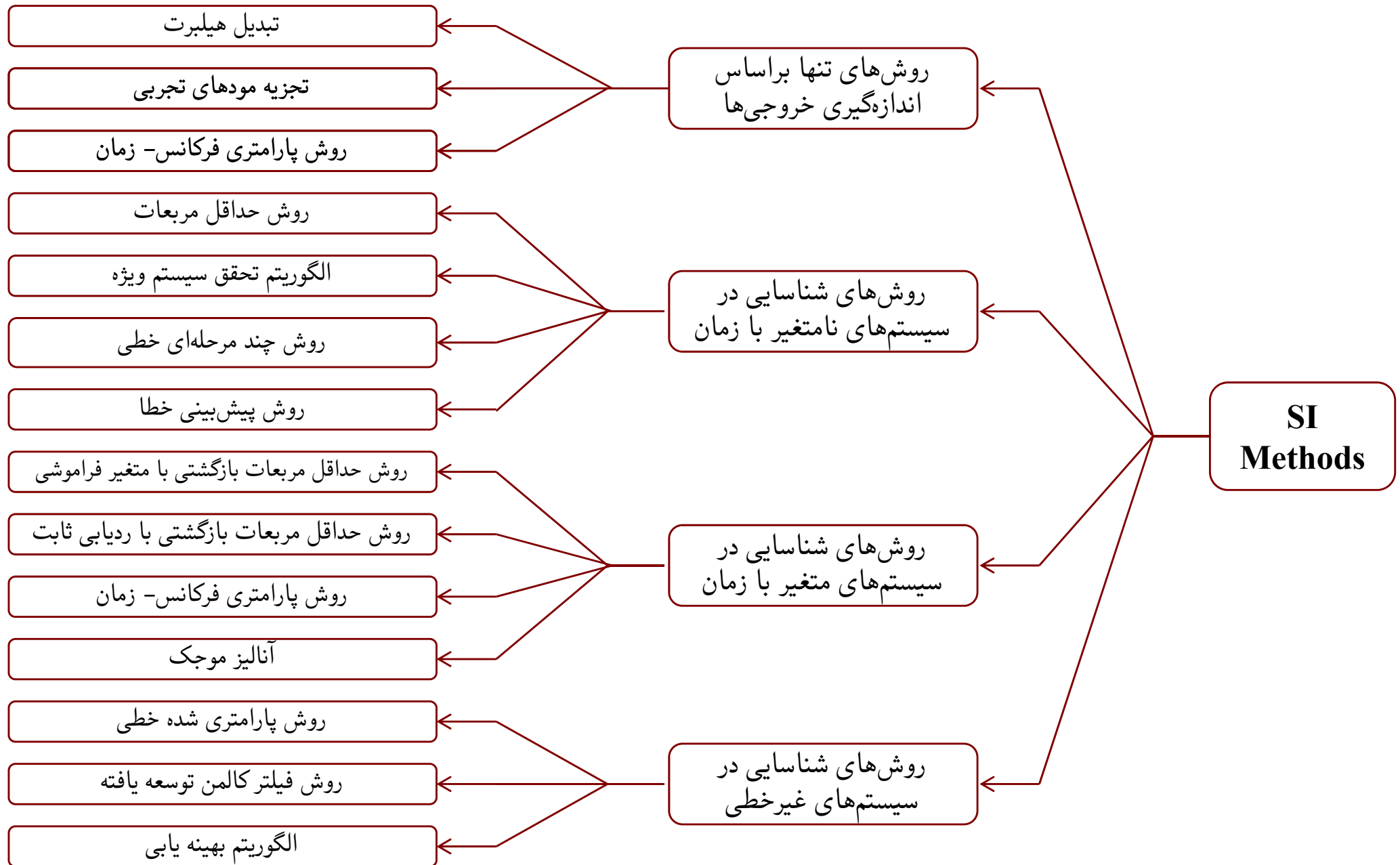
2- نیاز به اندازه‌گیری تمام درجه‌های آزادی نداشته باشد.

3- نسبت به حدس اولیه حساس نباشد تا همگرایی ایجاد شود.

در طراحی الگوریتم یک مدل ریاضی از سازه ایجاد می‌گردد. ساخت این مدل شامل دو مرحله است:

1- شناسایی ساختار: در این مرحله شکل و نوع مدل (رابطه ریاضی) تعیین می‌گردد.

2- شناسایی پارامتر: در این مرحله مدل ریاضی و سازه واقعی تحت اثر ورودی (تحریک) یکسانی قرار می‌گیرند. پاسخ مدل ریاضی با پاسخ سازه واقعی اختلاف دارد. با استفاده از تکنیک‌های شناسایی و روش‌های بهینه‌یابی این اختلاف باید به سمت صفر همگرا شود. در این صورت مدل ریاضی با سازه واقعی منطبق شده است.

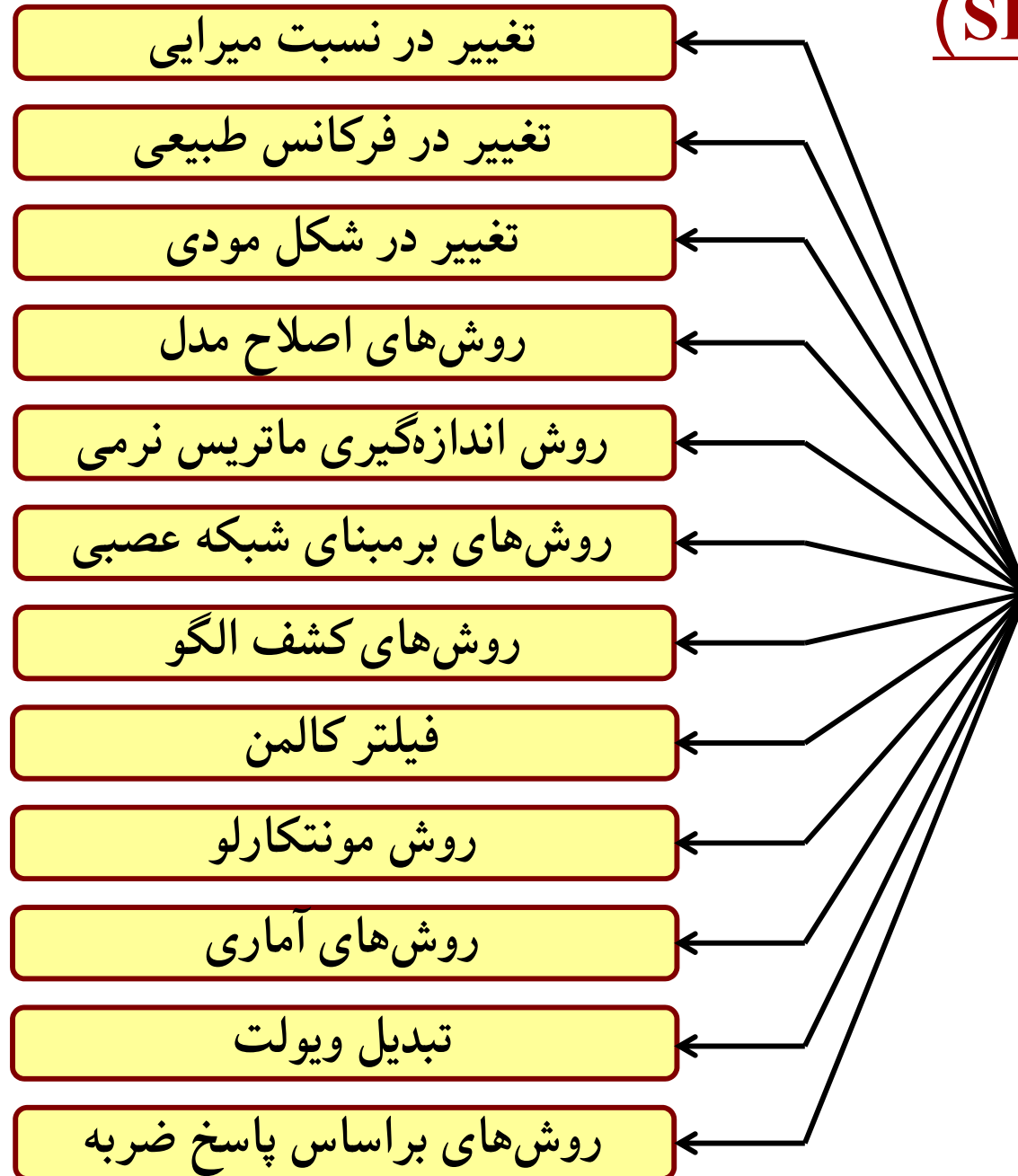


بررسی سلامت سازه‌ای (SHM)

روش کلی

روش‌های کشف آسیب
براساس پاسخ‌های دینامیکی
اندازه‌گیری شده

- نوع پاسخ اندازه‌گیری شده
- پارامتر بررسی شده برای تعیین آسیب
- روش اتخاذ شده برای کمی‌سازی آسیب



تغییر در نسبت میرایی:

میرایی عامل جذب و مستهلک کردن انرژی در سازه است. هر آسیبی که به سازه وارد می‌شود میزان جذب انرژی توسط سازه را تغییر می‌دهد. با اندازه‌گیری میزان جذب انرژی می‌توان وجود آسیب را تشخیص داد.

تغییر در فرکانس طبیعی:

فرکانس طبیعی هر سازه تابعی از سختی و جرم اعضای آن می‌باشد. هر آسیبی که به سازه وارد می‌شود، منجر به کاهش سختی شده در حالی که جرم ثابت باقی می‌ماند. نتیجه آن کاهش فرکانس‌های طبیعی است. از این رو کاهش فرکانس طبیعی می‌تواند معیاری برای آسیب‌های سازه‌ای باشد. به دو شیوه از این معیار در بررسی سلامت سازه‌ای استفاده می‌شود:

در روش اول، آسیب را بصورت ریاضی مدل و فرکانس طبیعی سازه را پیش‌بینی می‌کند. فرکانس پیش‌بینی شده با فرکانس اندازه‌گیری شده مقایسه و آسیب شناسایی می‌گردد.

در روش دوم، در سازه‌های بتنی طول ترک و مکان آن براساس تغییر فرکانس طبیعی تعیین می‌گردد. بنابراین شدت و مکان ترک را می‌توان شناسایی کرد. توجه شود که فرکانس‌های ارتعاش، یک معیار کلی است و فقط می‌تواند وجود آسیب را نمایان سازد. در نتیجه این روش در گروه اول قرار می‌گیرد. البته اگر از فرکانس‌های مودهای بالاتر استفاده شود، می‌توان تا حدودی این مشکل را حل کرد، زیرا مودهای ارتعاشی بالا مربوط به ارتعاش‌های موضعی می‌باشند.

تغییر در شکل مودی

اطلاعات شکل مودی را می‌توان برای بررسی سلامت سازه‌ای در گروه سوم بکار برد. آسیب باعث تغییر شکل مودی سازه می‌شود و با نمایش تغییرات نسبی شکل مودی در یک نمودار می‌توان آسیب را شناسایی کرد. البته لازم است در کنار بازبینی چشمی از یک معیار اطمینان مودی (MAC: Modal Assurance Criteria) نیز استفاده کرد.

روش‌های اصلاح مدل (Model Updating)

در این روش‌ها از یک مدل ریاضی استفاده شده و پارامترهای سازه‌ای (جرم، سختی و میرایی) براساس معادله حرکت و پاسخ دینامیکی اندازه‌گیری شده محاسبه می‌گردد. ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی مدل به گونه‌ای ساخته می‌شوند که پاسخ مدل تا حد ممکن به پاسخ اندازه‌گیری شده نزدیک باشد. ماتریس‌ها با هر بار اندازه‌گیری جدید پاسخ‌های سازه، اصلاح می‌گردد و با حالات قبلی مقایسه شده تا مکان و شدت آسیب مشخص شود. روش‌های اصلاح مدل فراوانی برای بررسی سلامت سازه‌ای وجود دارند. این روش‌ها را می‌توان براساس تابع هدف، قیدها و روش عددی حل معادله طبقه‌بندی کرد.

روش اندازه‌گیری ماتریس نرمی (Flexibility Matrix)

این روش آسیب را با محاسبه ماتریس نرمی از پاسخ‌های دینامیکی سازه شناسایی می‌کند. ماتریس نرمی سازه بصورت معکوس ماتریس سختی تعریف شده و هر ستون ماتریس نرمی معرف شکل تغییر مکان سازه تحت بار واحد در نقطه خاص است. ماتریس نرمی را می‌توان با محاسبه شکل‌های مودی نرمال شده نسبت به جرم و فرکانس طبیعی تشکیل داد. در حالتی که درجه‌های آزادی سازه زیاد باشد، به دلیل محدودیت در اندازه‌گیری و محاسبه شکل مودی و فرکانس ارتعاش، فقط چند مود اول که فرکانس کمتری دارند محاسبه می‌شوند. در این روش ماتریس نرمی بدست آمده از سازه آسیب دیده با ماتریس نرمی بدست آمده از سازه سالم مقایسه شده و آسیب نمایان می‌گردد. در جایی که اندازه‌گیری‌های سازه سالم وجود نداشته باشد؛ ماتریس نرمی از مدل المان محدود سازه سالم بدست می‌آید. این روش در گروه سوم بررسی سلامت سازه‌ای قرار می‌گیرد.

روش‌های برمبنای شبکه عصبی (Neural Network)

شبکه‌های عصبی که مدل ریاضی دستگاه عصبی بیولوژیکی انسان است، کاربرد موفقی در بررسی سلامت سازه‌ای داشته‌اند. شبکه عصبی یک شبکه بزرگ متشکل از واحدهای پردازشگر ساده است که اطلاعات تجربی را ذخیره و برای استفاده مهیا می‌کند. با توجه به دقت زیاد در کشف الگو، دسته‌بندی، مدل کردن غیرخطی و یادگیری، می‌توان از آن در کشف آسیب استفاده کرد. استفاده از شبکه‌های عصبی در بررسی سلامت سازه‌ای منجر به پیدایش تکنیکی به نام IVP شده است که با دقت خوبی مکان، شدت و زمان آسیب را بدون هیچ فرضی درباره خصوصیات غیرخطی آسیب بدست می‌دهد. البته مشکل اساسی که همیشه در شبکه‌های عصبی وجود داشته، مساله آموزش شبکه است. تجربه نشان داده که لازم است از تکنیک‌های دیگر در کنار شبکه عصبی استفاده شود تا عملکرد آن بهبود یابد.

IVP: Intelligent Parameter Varying Technique

روش‌های کشف الگو (Pattern Recognition)

آسیب‌های سازه‌ای موجب تغییر در پارامترهای مودال می‌شوند که باعث تغییر در الگوی پاسخ سازه می‌شود. با بررسی این الگو می‌توان زمان، مکان و شدت آسیب را تعیین کرد.

فیلتر کالمن (Kalman Filter)

روش فیلتر کالمن، روشی بر مبنای مدل است که از یک الگوریتم تکراری بهینه برای تخمین پارامترهای مربوط به آسیب استفاده می‌کند. پارامترهای سختی و میرایی را نمی‌توان بصورت مستقیم اندازه‌گیری کرد در عوض پاسخ سازه اندازه‌گیری می‌شود. روش فیلتر کالمن با استفاده از یک دستگاه معادلات حرکت، پارامترهای مورد نیاز را به پاسخ اندازه‌گیری شده ربط می‌دهد. این روش بصورت پیش‌بینی - اصلاح کار می‌کند.

روش مونت کارلو (Montecarlo Filter)

این روش متغیرهای حالت را به کمک توابع چگالی احتمال شرطی محاسبه می‌کند. تمام اطمینان‌های سیستم، متغیرهای اولیه و اغتشاش‌ها در نظر گرفته می‌شود.

روش‌های آماری

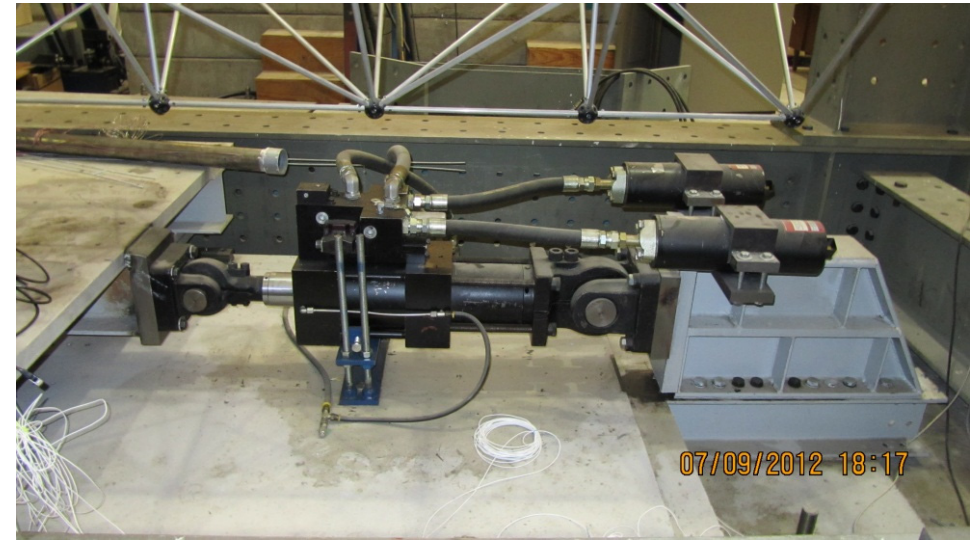
این روش نسبتاً جدید بوده و براساس تئوری بیزین که در علم آمار بسیار مشهور است عمل می‌کند. امتیاز روش بیزین این است که می‌تواند حالت منحصر به فرد نبودن مدل ریاضی را هنگامی که داده‌های اندازه‌گیری شده ناقص باشد در نظر بگیرد. این مدل آماری عدم قطعیت‌های ناشی از محدودیت تعداد حسگرها، داده‌های آلوده به اغتشاش، خطای مدل‌سازی، حساسیت کم پارامترهای مودال نسبت به آسیب و ... را در نظر می‌گیرد و اطلاعات مربوط به آسیب را با حاشیه اطمینان مورد نظر بدست می‌دهد.

تبدیل ویولت

روشی برای تجزیه یک سیگنال است و بصورت یک فیلتر در محدوده زمان-فرکانس کار می‌کند. تبدیل ویولت را بر روی پاسخ شتاب سیستم سازه‌ای اثر می‌دهند تا خواص دینامیکی آن را تعیین کنند. وقوع آسیب در نمودار فرکانس-زمان با یک پالس یا پرش‌های ناگهانی مشخص می‌شود.

شناسایی سیستم با استفاده از پاسخ‌های ضربه

در یک دهه‌ی اخیر توجه زیادی به استفاده از پاسخ‌های ضربه در عملیات شناسایی پارامترهای سازه‌ای سیستم و جستجوی آسیب در سازه‌ها شده است. در ادبیات کنترل به پاسخ‌های ضربه، پارامترهای مارکوف نیز گفته می‌شود. ضربه در سازه به کمک ابزار و روش‌های مختلفی ایجاد می‌گردد. برای این منظور می‌توان با استفاده از چکش، میز لرزان و یا با نصب محرک‌ها، در سازه ضربه ایجاد کرد. پاسخ‌های ضربه اندازه‌گیری شده در بردارنده اطلاعات ارزشمندی از پارامترهای سازه‌ای یک سیستم است. روش‌های مختلفی برای شناسایی سیستم با استفاده از پاسخ‌های ضربه در ادبیات بررسی سلامت سازه‌ای موجود می‌باشد. همچنین در سال‌های اخیر تکنیک‌های متنوعی برای استخراج پارامترهای سازه‌ای از پاسخ‌های ضربه سیستم توسط محققین پیشنهاد شده است.



دستگاه‌های مختلف ایجاد کننده ضربه و تحریک در سیستم‌های سازه‌ای: چکش، میز لرزان و محرک.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

پاسخ ضربه (پارامتر مارکوف)

معادلات سیستم N درجه آزاد شناسایی شده به فرم فضای حالت در فضای گسسته زمانی به کمک روش شناسایی ERA/OKID به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(k+1)} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{(k)} & t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t, \dots, \left(\frac{T}{\Delta t}\right)\Delta t \\ \mathbf{y}_{(k)} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{(k)} & k = 0, 1, 2, \dots, k, \dots, \left(\frac{T}{\Delta t}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ بردار ورودی، $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ بردار خروجی، ماتریس‌های $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ، $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ بیانگر عملگر داخلی سیستم خطی است که برای تعیین پاسخ سیستم در اثر هر نوع ورودی استفاده می‌شود. n تعداد حالت‌های سیستم، r تعداد ورودی و m تعداد خروجی‌های سیستم است. T مدت زمان کل تحریک می‌باشد.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

پاسخ ضربه (پارامتر مارکوف)

با فرض آن که \mathbf{u} در رابطه (1) بصورت ضربه وارد شود

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{(0)} &= \left\{ u_{1(0)} \quad u_{2(0)} \quad \cdots \quad u_{r(0)} \right\}_{r \times 1}^T = \{1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\}_{r \times 1}^T = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^r \\ \mathbf{u}_{(k)} &= \left\{ u_{1(k)} \quad u_{2(k)} \quad \cdots \quad u_{r(k)} \right\}_{r \times 1}^T = \{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\}_{r \times 1}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r\end{aligned}\tag{2}$$

با جایگذاری رابطه (2) در رابطه (1) نتیجه می‌دهد:

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

پاسخ ضربه (پارامتر مارکوف)

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{l} \\ \mathbf{y}_{(0)} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{D}\mathbf{l} \end{cases} \\ k=1 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{l} \\ \mathbf{y}_{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{l} \end{cases} \\ k=2 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(3)} = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{l} \\ \mathbf{y}_{(2)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{l} \end{cases} \\ &\vdots \\ k-1 &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(k)} = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{l} \\ \mathbf{y}_{(k-1)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B}\mathbf{l} \end{cases} \\ k &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{A}^k\mathbf{B}\mathbf{l} \\ \mathbf{y}_{(k)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{l} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

پاسخ ضربه (پارامتر مارکوف)

فرم ماتریسی رابطه (3)
بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(0)} \\ \mathbf{y}_{(1)} \\ \mathbf{y}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{(k)} \end{bmatrix}_{(k+1)m \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^k \end{bmatrix}_{(k+1)m \times n} \cdot \mathbf{x}_{(0)} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{CB} \\ \mathbf{CAB} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{(k+1)m \times r} \cdot \mathbf{1} \quad (4)$$

با فرض آن که $\mathbf{x}_{(0)} = 0$ باشد رابطه (4) می تواند بصورت یک ماتریس پاسخ ضربه با ابعاد $\mathbb{R}^{m \times r}$ برای هر $k\Delta t$ دلخواه تشکیل شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{(0)} &= \mathbf{D}\mathbf{1} = \mathbf{Y}_0\mathbf{1} \\ \mathbf{y}_{(1)} &= \mathbf{CB}\mathbf{1} = \mathbf{Y}_1\mathbf{1} \\ \mathbf{y}_{(2)} &= \mathbf{CAB}\mathbf{1} = \mathbf{Y}_2\mathbf{1} \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{(k)} &= \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{1} = \mathbf{Y}_k\mathbf{1} \end{aligned} \quad (5)$$

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

پاسخ ضربه (پارامتر مارکوف)

در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{(0)} &= \mathbf{D} \\ \mathbf{Y}_k &= \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (6)$$

ماتریس‌های متوالی $\mathbf{Y}_k \in \mathbb{R}^{m \times r}$ به پارامترهای مارکوف (MARKOV) معروف می‌باشند.

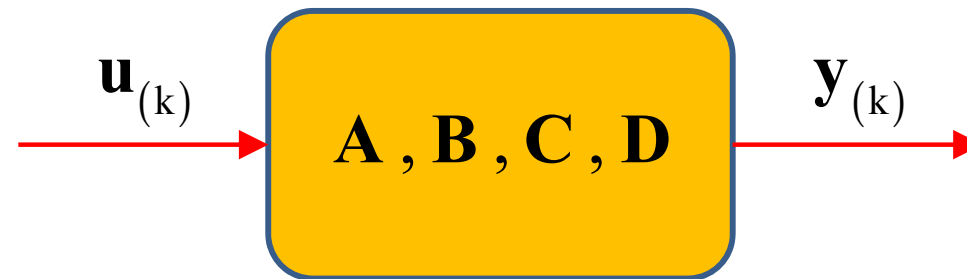
از پارامترهای مارکوف به عنوان اساس شناسایی سیستم خطی در حوزه زمانی گسسته استفاده می‌شود.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تحقق (Realization)

هر سیستم دارای تعداد نامحدودی تحقق است که پاسخهای یکسانی را برای هر ورودی مشخص پیش‌بینی می‌کند. کمترین تحقق یعنی یک مدل با کوچکترین ابعاد فضای حالت در بین تمام سیستم‌های قابل تحقق که دارای روابط ورودی-خروجی یکسانی باشد.



(7)

$$\text{Eigenvalue}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{Eigenvector}(\mathbf{A}) = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\psi_i \in \mathbb{R}^n$

تمام کمترین تحقق‌ها دارای مجموعه مقادیر ویژه یکسانی است که همان پارامترهای مودال سیستم می‌باشد.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تحقق (Realization)

با تعریف مختصات تعمیم یافته زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{z} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (1) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{(k+1)} &= \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{z}_{(k)} + \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{(k)} \\ \mathbf{y}_{(k)} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{z}_{(k)} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{(k)} \end{aligned} \quad (9)$$

رابطه (9) معادلات فضای حالت در مختصات تعمیم یافته است. تحقق $[\mathbf{C}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\Lambda}]$ تبدیل به تحقق $[\mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B}, \boldsymbol{\Lambda}]$ می شود. ماتریس قطری $\boldsymbol{\Lambda}$ شامل اطلاعات مربوط به نرخ میرایی مودال و فرکانس های طبیعی میرا شده می باشد. ماتریس $\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B}$ دامنه های مودال اولیه یا ضرایب مشارکت مودی را تعریف می کند. ماتریس $\mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}$ شکل های مودی در محل حسگرها می باشد.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تحقق (Realization)

نرخ میرایی مودال و فرکانس‌های طبیعی میرا شده، قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه Λ_c می‌باشد. ماتریس Λ_c مقادیر ویژه سیستم در حوزه پیوسته زمانی و Λ مقادیر ویژه سیستم در حوزه گسسته زمانی است که رابطه آن‌ها بصورت زیر می‌باشد:

$$\Lambda_c \in \mathbb{R}^{n \times n} = \frac{\ln(\Lambda)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} \lambda_{c1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{c2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{cn} \end{bmatrix}$$

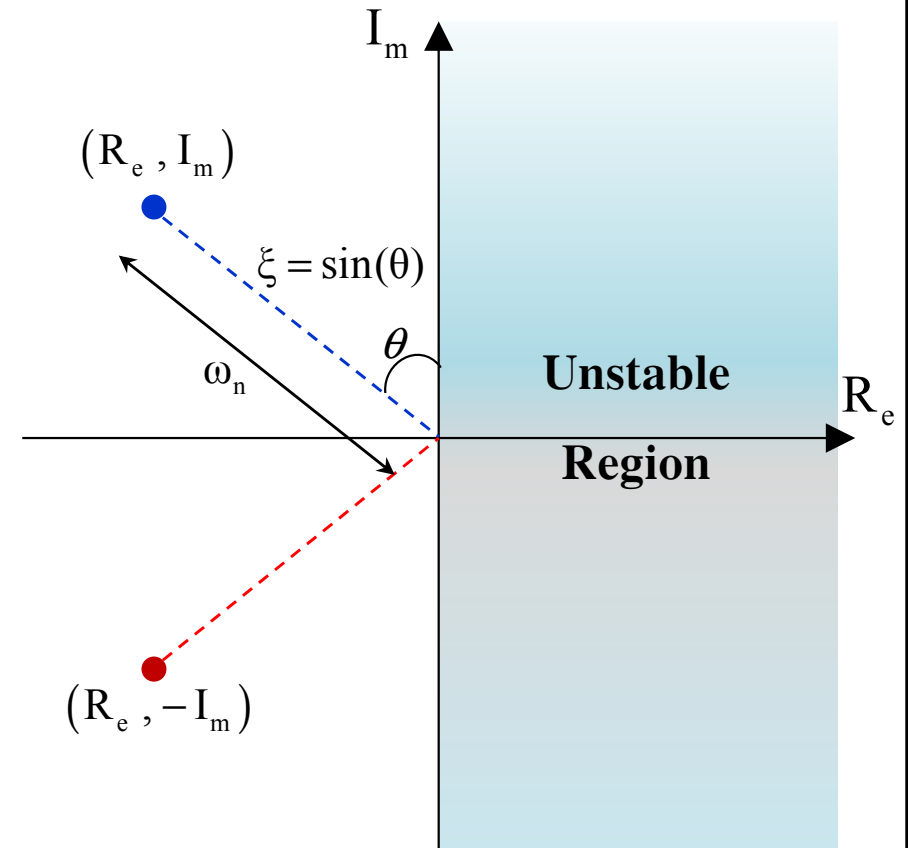
$$\lambda_{c(i)} = R_e + I_m i$$

$$\lambda_{c(i+1)} = R_e - I_m i$$

$$\omega_n = \sqrt{(R_e)^2 + (I_m)^2}$$

$$\xi = \frac{R_e}{\sqrt{(R_e)^2 + (I_m)^2}} = \sin(\theta)$$

(10)



مقدار ویژه سیستم (قطب) در دستگاه مختصات مختلط

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm) ماتریس هنکل (Hankel)

شناسایی یک سیستم با تشکیل ماتریس تعمیم یافته هنکل که ترکیبی از پارامترهای مارکوف است آغاز می‌شود

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r} \quad (11)$$

در حالتی که $k = 1, 2$ باشد:

$$\mathbf{H}_{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{1+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}, \quad \mathbf{H}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{\beta+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \cdots & \mathbf{Y}_{\beta+2} \\ \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \cdots & \mathbf{Y}_{\beta+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{\alpha+1} & \mathbf{Y}_{\alpha+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r} \quad (12)$$

توجه شود که $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$ در $\mathbf{H}_{(0)}$ موجود نیست. اگر $\alpha \geq n$ و $\beta \geq n$ (مرتبه سیستم است) باشد رتبه $\mathbf{H}_{(k-1)}$ برابر با n خواهد بود.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm) ماتریس هنکل (Hankel)

پارامترهای مارکوف از معادله (6) در رابطه (11) جایگذاری شده و سپس ماتریس $\mathbf{H}_{(k-1)}$ به سه ماتریس تجزیه می‌گردد.

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{Q}_\beta \quad (13)$$

که در آن

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{a-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{am \times n} \quad \& \quad \mathbf{Q}_\beta = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times \beta r} \quad (14)$$

ماتریس‌های \mathbf{P}_α و \mathbf{Q}_β به ترتیب ماتریس‌های رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری می‌باشند. اگر رتبه سیستم n باشد ماتریس‌های \mathbf{P}_α و \mathbf{Q}_β دارای رتبه n است. بنابراین ماتریس هنکل در رابطه (11) نیز دارای رتبه n می‌باشد.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

کنترل پذیری (Controllability)

سیستمی را کنترل پذیر گوئیم که به ازای هر متغیر حالت $\mathbf{x}_{(k)}$ در زمان $T > 0$ تابع $\mathbf{u}_{(t)}$ در بازه زمانی $0 < t \leq T$ را بتوان چنان یافت که سیستم از شرایط اولیه $\mathbf{x}_{(0)} = 0$ در زمان صفر بتواند به شرایط $\mathbf{x}_{(k)}$ در زمان T برسد. در حوزه زمانی گسسته، یک سیستم خطی با ابعاد محدود و دارای مشخصات دینامیکی ثابت از مرتبه n کنترل پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس کنترل پذیری \mathbf{Q}_β دارای رتبه n باشد. رتبه یک ماتریس تعداد سطرها و یا ستونهای مستقل آن می باشد.

رویت پذیری (Observability)

سیستمی را رویت پذیر گوئیم که شرایط اولیه متغیرهای حالت $\mathbf{x}_{(0)}$ را بتوان به صورت یکتا از اطلاعات مربوط به $\mathbf{y}_{(t)}$ و $\mathbf{u}_{(t)}$ در محدوده زمانی $T > 0$ و $t \in [0, T]$ تعیین نمود. در حوزه زمانی گسسته، یک سیستم خطی با ابعاد محدود و دارای مشخصات دینامیکی ثابت از مرتبه n و با بردار حالت اندازه گیری شده از مرتبه m رویت پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس رویت پذیری \mathbf{P}_α دارای رتبه n باشد. رتبه یک ماتریس تعداد سطرها و یا ستونهای مستقل آن می باشد.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تخمین پارامترهای مارکوف (OKID: Observer/Kalman filter Identification)

با استفاده مستقیم از داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده می‌توان پارامترهای مارکوف یک سیستم را تخمین زد. رابطه بین تاریخچه زمانی ورودی‌ها و خروجی‌های یک سیستم بصورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \times \mathbf{V}^\dagger \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{m \times [(r+m)p+r]}$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_{(0)} \quad \mathbf{y}_{(1)} \quad \mathbf{y}_{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{(\ell-1)}] \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$$

$$\mathbf{v}_{(k)} = \begin{cases} \mathbf{u}_{(k)} \\ \mathbf{y}_{(k)} \end{cases} \in \mathbb{R}^{(r+m)}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(0)} & \mathbf{u}_{(1)} & \mathbf{u}_{(2)} & \cdots & \mathbf{u}_{(p)} & \cdots & \mathbf{u}_{(\ell-1)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{v}_{(0)} & \mathbf{v}_{(1)} & \cdots & \mathbf{v}_{(p-1)} & \cdots & \mathbf{v}_{(\ell-2)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{v}_{(0)} & \cdots & \mathbf{v}_{(p-2)} & \cdots & \mathbf{v}_{(\ell-3)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{v}_{(0)} & \cdots & \mathbf{v}_{(\ell-p-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{[(r+m)p+r] \times \ell} \quad (16)$$

که در آن

ℓ : تعداد گام‌های زمانی شناسایی سیستم
 \mathbf{y} : ماتریس داده‌های خروجی
 $()^\dagger$: عملگر شبه وارون
 $\bar{\mathbf{Y}}$: شامل p پارامتر مارکوف رویت‌گر

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تخمین پارامترهای مارکوف

رابطه (15) دارای حل یکتایی برای ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}$ است اگر تمام سطرهای ماتریس \mathbf{V} خطی و مستقل باشند. همچنین خطای ناشی از محاسبه عددی شبه وارون کردن ماتریس \mathbf{V} با خطی و مستقل بودن سطرها کاهش پیدا می‌کند. مقدار ماکزیمم عدد p باعث می‌شود که ماتریس \mathbf{V} دارای بیشترین سطرهای مستقل باشد. همچنین مقدار مینیمم عدد p وجود یک ماتریس حالت تحقق یافته از \mathbf{A} با مرتبه n را تضمین می‌کند.

$$\frac{n}{m} \leq p \leq \frac{\ell - r}{m + r} \quad (17)$$

برای شناسایی i امین پارامتر مارکوف سیستم، $\mathbf{Y}_i = \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}$ ، از پارامترهای مارکوف رویت‌گر، ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}$ بصورت رابطه (18) تقسیم‌ندی می‌شود.

$$\bar{\mathbf{Y}} = \left[\bar{\mathbf{Y}}_0 \quad \bar{\mathbf{Y}}_1 \quad \bar{\mathbf{Y}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{Y}}_i \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{Y}}_p \right] \quad (18)$$

همان ماتریس \mathbf{D} می‌باشد. $\bar{\mathbf{Y}}_0 \in \mathbb{R}^{m \times r}$

$\bar{\mathbf{Y}}_i \in \mathbb{R}^{m \times (r+m)}$ i امین بخش ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}$

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm) تخمین پارامترهای مارکوف

$\bar{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{m \times [(r+m)p+r]}$ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{Y}}_0 \quad \bar{\mathbf{Y}}_1 \quad \bar{\mathbf{Y}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{Y}}_i \quad \dots \quad \bar{\mathbf{Y}}_p]$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_i = [\bar{\mathbf{Y}}_i^{(1)} \quad -\bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)}] \quad (19)$$

که در آن $\bar{\mathbf{Y}}_i^{(1)} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ $\bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ زیرماتریس‌های ماتریس $\bar{\mathbf{Y}}_i \in \mathbb{R}^{m \times (r+m)}$ است. رابطه کلی بین پارامترهای مارکوف سیستم با پارامترهای مارکوف رویت‌گر بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= \bar{\mathbf{Y}}_0 \\ \mathbf{Y}_i &= \bar{\mathbf{Y}}_i^{(1)} - \sum_{j=1}^i \bar{\mathbf{Y}}_j^{(2)} \mathbf{Y}_{i-j} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \dots, p \\ \mathbf{Y}_i &= -\sum_{j=1}^p \bar{\mathbf{Y}}_j^{(2)} \mathbf{Y}_{i-j} \quad \text{for } i = p+1, p+2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (20) پارامترهای مارکوف سیستم از پارامترهای رویت‌گر بدست می‌آید. بنابراین می‌توان پارامترهای مارکوف سیستم یا همان تاریخچه زمانی پاسخ ضربه سیستم را بطور مستقیم از داده‌های ورودی و خروجی اندازه‌گیری شده بدست آورد

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تخمین ماتریس های سیستم

ماتریس هنکل $\mathbf{H}_{(0)} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}$ به وسیله تجزیه مقادیر منفرد یا تکین (SVD: Singular Value Decomposition) به صورت زیر تجزیه می شود:

$$\mathbf{H}_{(0)} = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (21)$$

که در آن ستون های ماتریس $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \alpha m}$ و ماتریس $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\beta r \times \beta r}$ متعامد می باشند. $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}$ نیز یک ماتریس مستطیلی است.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \mathbf{R} &= \mathbf{I}_{\alpha m} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{S} &= \mathbf{I}_{\beta r} \end{aligned} \quad (22)$$

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تخمین ماتریس‌های سیستم

ماتریس‌های $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \alpha m}$ ، $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\beta r \times \beta r}$ و $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}$ به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \alpha m} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{\alpha m \times n} & \mathbf{R}_0 \in \mathbb{R}^{\alpha m \times (\alpha m - n)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}^T \in \mathbb{R}^{\beta r \times \beta r} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n^T \in \mathbb{R}^{n \times \beta r} \\ \mathbf{S}_0^T \in \mathbb{R}^{(\beta r - n) \times \beta r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n \in \mathbb{R}^{n \times n} & \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n \times (\beta r - n)} \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(\alpha m - n) \times n} & \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(\alpha m - n) \times (\beta r - n)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن

$$\mathbf{\Sigma}_n \in \mathbb{R}^{n \times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_i \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0) \\ &(i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (24)$$

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تخمین ماتریس‌های سیستم

ماتریس‌های ضرایب $\mathbf{E}_m \in \mathbb{R}^{am \times m}$ و $\mathbf{E}_r \in \mathbb{R}^{br \times r}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{E}_m \in \mathbb{R}^{am \times m} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m \\ \vdots \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_r \in \mathbb{R}^{br \times r} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{O}_r \\ \vdots \\ \mathbf{O}_r \end{bmatrix} \quad (25)$$

تحقق با مرتبه مینیمم در فضای گسسته زمانی بصورت زیر شناسایی و تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_{(1)} \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \\ \hat{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{Y}}_0 \end{aligned} \quad (26)$$

علامت (^) نشان دهنده پارامتر تخمینی است.

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تخمین ماتریس های سیستم

به کمک روابط زیر می توان ماتریس سیستم و بردار مکانی در فضای پیوسته را به ماتریس سیستم و بردار مکانی در فضای گسسته تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c^k \cdot \Delta t^k}{k!} \right) \\ \mathbf{B} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta \tau} d\tau \mathbf{B}_c = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c^k \cdot \Delta t^{k+1}}{(k+1)k!} \right) \mathbf{B}_c \end{aligned} \quad (27)$$

با فرض کوچک بودن گام زمانی اندازه گیری می توان از جملات مرتبه بالا در رابطه (27) صرف نظر کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{I}_n + \Delta t \mathbf{A}_c \\ \mathbf{B} &= \Delta t \mathbf{B}_c \end{aligned} \quad (28)$$

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

تخمین ماتریس های سیستم

به کمک رابطه (28) می توان ماتریس سیستم و بردار مکانی در فضای گسسته را به ماتریس سیستم و بردار مکانی در فضای پیوسته تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) \\ \mathbf{B}_c &= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (29)$$

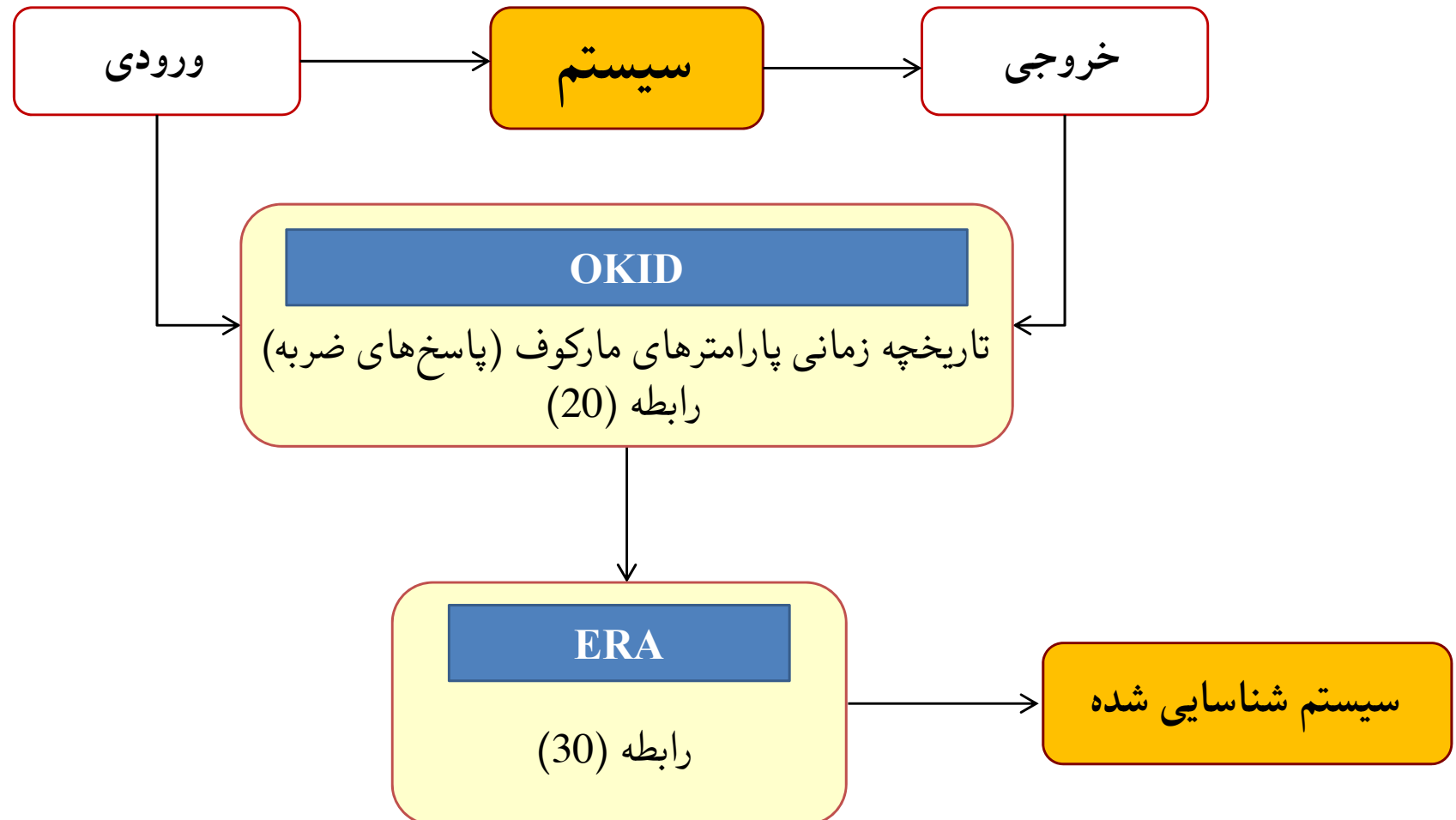
با جایگذاری رابطه (26) در رابطه (29) تحقق با مرتبه مینیمم در فضای پیوسته زمانی بصورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_c &= \frac{1}{\Delta t} \left(\boldsymbol{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_{(1)} \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{I}_n \right) \\ \hat{\mathbf{B}}_c &= \frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} \\ \hat{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{Y}}_0 \end{aligned} \quad (30)$$

System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

الگوریتم تحقق سیستم ویژه با تکنیک شناسایی فیلتر رویتگر کالمن (ERA/OKID)



System Identification: ERA

الگوریتم تحقق سیستم ویژه (ERA: Eigensystem Realization Algorithm)

اثر آلودگی ناشی از نویز

در عمل آلودگی نویز در پاسخ‌های اندازه‌گیری شده امری اجتناب ناپذیر است. منبع ایجاد نویز می‌تواند شامل خرابی حسگرها، وجود اغتشاش‌های محیطی و غیره باشد. آلودگی پاسخ‌ها به نویز منجر به ایجاد خطا در شناسایی پارامترهای مارکوف سیستم می‌گردد. بنابراین اثرهای ناشی از نویز بر روی شناسایی سیستم باید مورد بررسی قرار گیرد. به طور معمول اغتشاش‌های محیطی را در فرآیند شبیه‌سازی، با سیگنال نویز سفید از نوع فرآیند تصادفی (White noise random process signal) و یا سیگنال نویز سفید گوسی (White noise Gaussian signal) مدل می‌کنند. سپس نویز شبیه‌سازی شده براساس یک شدت خاص به پاسخ‌های سازه اضافه می‌گردد. مقدار شدت نویز در بازه زمانی $0 \leq t \leq T$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$R(\%) = \left[m^{-1} \sum_{i=1}^m \left(\left(\int_0^T \Delta \mathbf{y}_i^2 \cdot dt \right) \cdot \left(\int_0^T \mathbf{y}_i^2 \cdot dt \right)^{-1} \right) \right]^{0.5} \times 100 \quad (31)$$

که در آن \mathbf{y}_i و $\Delta \mathbf{y}_i$ به ترتیب i امین خروجی و نویز متناظر با آن است.



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Structural Health Monitoring

**Damage detection algorithm based on
identified system Markov parameters
(DDA/ISMP)**

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

معادلات حرکت سیستم n درجه آزاد شناسایی شده به فرم فضای حالت در فضای پیوسته زمانی بصورت رابطه زیر نشان داده می شود. $2n$ تعداد حالت های سیستم، r تعداد ورودی و m تعداد خروجی های سیستم است.

$$\hat{\mathbf{q}}_{(t)} = \hat{\mathbf{A}}_c \hat{\mathbf{q}}_{(t)} + \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{u}_{(t)} \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{(t)} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{q}}_{(t)} + \hat{\mathbf{D}} \mathbf{u}_{(t)} \quad (2)$$

$\hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2n}$: بردار حالت تخمین زده شده

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$: بردار ورودی

$\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$: بردار خروجی تخمین زده شده

ماتریس های سیستم تخمین زده شده به کمک روش ERA/OKID : $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$, $\hat{\mathbf{B}}_c \in \mathbb{R}^{2n \times r}$, $\hat{\mathbf{A}}_c \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

می توان ثابت کرد برای یک سیستم در فضای پیوسته زمانی که دارای بیشمار تحقق است همواره پارامترهای مارکوف یکسانی دارند.

$$\mathbf{Y}_{c0} = \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$
$$\mathbf{Y}_{ci} = \hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{A}}_{c1}^{i-1} \hat{\mathbf{B}}_{c1} = \hat{\mathbf{C}}_2 \hat{\mathbf{A}}_{c2}^{i-1} \hat{\mathbf{B}}_{c2} = \dots = \hat{\mathbf{C}}_{\infty} \hat{\mathbf{A}}_{c\infty}^{i-1} \hat{\mathbf{B}}_{c\infty} = \mathbf{C} \mathbf{A}_c^{i-1} \mathbf{B}_c = cte$$

می توان پارامترهای مارکوف را به کمک پارامترهای سیستم شناسایی شده از روش ERA/OKID در روابط (1) و (2) به صورت زیر تخمین زد:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c0} = \hat{\mathbf{D}}$$
$$\hat{\mathbf{Y}}_{ci} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{A}}_c^{i-1} \hat{\mathbf{B}}_c \quad (3)$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

معادله حرکت سیستم سازه‌ای دارای n درجه آزادی به صورت زیر است:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{B}_u \mathbf{u}_{(t)} \quad (4)$$

ماتریس جرم : $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ماتریس سختی : $\mathbf{K}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ماتریس میرایی : $\mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

بردار جابجایی : $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

بردار سرعت : $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$

بردار شتاب : $\ddot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$

بردار نیروی خارجی : $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$

ماتریس مکان نیروهای خارجی : $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{n \times r}$

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

معادلات حرکت سیستم n درجه آزاد به فرم فضای حالت در فضای پیوسته زمانی بصورت رابطه زیر نشان داده می شود. $2n$ تعداد حالت های سیستم، r تعداد ورودی و m تعداد خروجی های سیستم است.

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{q}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{q}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

$$\text{ماتریس های سیستم} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \\ \mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{2n \times r} \\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times 2n} \\ \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2n} \text{ : بردار حالت} \\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r \text{ : بردار ورودی} \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \text{ : بردار خروجی} \end{array}$$

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

با توجه به نوع خروجی اندازه گیری شده، ماتریس های سیستم در روابط (5) و (6) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \quad (7)$$

خروجی سیستم پاسخ جابجایی

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_s \quad \mathbf{O}_{m \times n}]$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{O}_{m \times r}]$$

خروجی سیستم پاسخ سرعت

$$\mathbf{C} = [\mathbf{O}_{m \times n} \quad \mathbf{C}_s]$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{O}_{m \times r}]$$

خروجی سیستم پاسخ شتاب

$$\mathbf{C} = [-\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 \quad -\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0]$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u]$$

$\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{m \times n}$: ماتریس موقعیت قرارگیری حسگرهای (خروجی های) سیستم

پارامترهای مارکوف سیستم به صورت زیر تعیین می گردد:

$$\mathbf{Y}_{c0} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{Y}_{ci} = \mathbf{C}\mathbf{A}_c^{i-1}\mathbf{B}_c \quad (8)$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: جابجایی

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) دومین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_{c2} بصورت زیر ساخته می‌شود:

(7) & (8) \Rightarrow

$$\mathbf{Y}_{c2} = \mathbf{C}\mathbf{A}_c\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{O}_{m \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Y}_{c2} = \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u} \quad (9)$$

$(\cdot)^\dagger$: علامت عملگر شبه وارون (Pseudo Inverse) را نشان می‌دهد. $(3) \rightarrow (9) \xRightarrow[\times(\mathbf{B}_u)^\dagger]{(\mathbf{C}_s)^\dagger \times}$

$$(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger = (\mathbf{C}_s)^\dagger \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \Rightarrow \boxed{\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger} \quad (10)$$

$$(10) \Rightarrow \boxed{\mathbf{M} = \mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \mathbf{C}_s} \quad (11)$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: جابجایی

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) سومین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_{c3} بصورت زیر ساخته می‌شود:

(7) & (8) \Rightarrow

$$\mathbf{Y}_{c3} = \mathbf{C}\mathbf{A}_c^2\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{O}_{m \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y}_{c3} = -(\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}_0(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u) \quad (12)$$

(3) & (10) \rightarrow (12) \Rightarrow

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c3} = -(\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger) \mathbf{C}_0 ((\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u) \Rightarrow \hat{\mathbf{Y}}_{c3} = -\hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} \quad (13)$$

$$(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \times (13) \times (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \Rightarrow (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger = -(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \Rightarrow$$

$$(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger = -(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \quad (14)$$

$\mathbf{B}_u \times (14) \times \mathbf{C}_s \Rightarrow$

$$\mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \mathbf{C}_s = -\mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \mathbf{C}_s \Rightarrow \mathbf{C}_0 = -\mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \mathbf{C}_s \quad (15)$$

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: جابجایی

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) چهارمین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_{c4} بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$(7) \ \& \ (8) \Rightarrow \ \mathbf{Y}_{c4} = \mathbf{C}\mathbf{A}_c^3\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{O}_{m \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Y}_{c4} = \mathbf{C}_s (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0)^2 \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u - \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \quad (16)$$

$$(3) \ \& \ (10) \rightarrow (16) \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c4} = \mathbf{C}_s ((\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0)^2 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u - \mathbf{C}_s (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} = \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} - \hat{\mathbf{Y}}_{c4} \quad (17)$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: جابجایی

(15) \rightarrow (17) \Rightarrow

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} = \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3}(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3}(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} - \hat{\mathbf{Y}}_{c4} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} = \hat{\mathbf{Y}}_{c3}(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} - \hat{\mathbf{Y}}_{c4} \quad (18)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{k}\text{-dis}} \in \mathbb{R}^{m \times r} = \hat{\mathbf{Y}}_{c3}(\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} - \hat{\mathbf{Y}}_{c4}$$

با تعریف ماتریس‌های زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{B}\text{-dis}} \in \mathbb{R}^{m \times n} = \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\mathbf{B}_u)^\dagger \Rightarrow \mathbf{U}_{\mathbf{k}\text{-dis}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{B}\text{-dis}} \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_{\mathbf{I}\text{-dis}} \quad (19)$$

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{I}\text{-dis}} \in \mathbb{R}^{n \times r} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: سرعت

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) اولین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_{c1} بصورت زیر ساخته می‌شود:

(7) & (8) \Rightarrow

$$\mathbf{Y}_{c1} = \mathbf{C}\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m \times n} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Y}_{c1} = \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u} \quad (20)$$

$(\cdot)^\dagger$: علامت عملگر شبه وارون (Pseudo Inverse) را نشان می‌دهد.

(3) \rightarrow (20) $\xRightarrow[\times(\mathbf{B}_u)^\dagger]{(\mathbf{C}_s)^\dagger \times}$

$$(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger = (\mathbf{C}_s)^\dagger \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \Rightarrow \boxed{\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger} \quad (21)$$

$$(21) \Rightarrow \boxed{\mathbf{M} = \mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \mathbf{C}_s} \quad (22)$$

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: سرعت

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) دومین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_{c2} بصورت زیر ساخته می‌شود:

(7) & (8) \Rightarrow

$$\mathbf{Y}_{c2} = \mathbf{C}\mathbf{A}_c\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m \times n} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Y}_{c2} = -(\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}_0(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u)} \quad (23)$$

(3) & (21) \rightarrow (23) \Rightarrow

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c2} = -(\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger) \mathbf{C}_0 ((\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u) \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{Y}}_{c2} = -\hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}} \quad (24)$$

$$(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \times (24) \times (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \Rightarrow (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger = -(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \Rightarrow$$

$$\boxed{(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger = -(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger} \quad (25)$$

$\mathbf{B}_u \times (25) \times \mathbf{C}_s \Rightarrow$

$$\mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \mathbf{C}_s = -\mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \mathbf{C}_s \Rightarrow \boxed{\mathbf{C}_0 = -\mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \mathbf{C}_s} \quad (26)$$

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: سرعت

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) سومین پارامتر مارکوف سیستم Y_{c3} بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$(7) \ \& \ (8) \Rightarrow \mathbf{Y}_{c3} = \mathbf{C}\mathbf{A}_c^2\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m \times n} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_0 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u = \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_0 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_0 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u - \mathbf{Y}_{c3} \quad (27)$$

$$(3) \ \& \ (21) \rightarrow (27) \Rightarrow$$

$$\mathbf{C}_s (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u \\ = \mathbf{C}_s (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u - \hat{\mathbf{Y}}_{c3} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} = \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} - \hat{\mathbf{Y}}_{c3} \quad (28)$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: سرعت

(26) → (28) ⇒

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} =$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} - \hat{\mathbf{Y}}_{c3} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_v)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} = \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} - \hat{\mathbf{Y}}_{c3} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} = \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} - \hat{\mathbf{Y}}_{c3} \quad (29)$$

با تعریف ماتریس‌های زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{U}_{k\text{-vel}} \in \mathbb{R}^{m \times r} = \hat{\mathbf{Y}}_{c2}(\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} - \hat{\mathbf{Y}}_{c3}$$

$$\mathbf{Y}_{B\text{-vel}} \in \mathbb{R}^{m \times n} = \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\mathbf{B}_u)^\dagger \Rightarrow$$

$$\mathbf{U}_{k\text{-vel}} = \mathbf{Y}_{B\text{-vel}} \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_{I\text{-vel}} \quad (30)$$

$$\mathbf{Y}_{I\text{-vel}} \in \mathbb{R}^{n \times r} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: شتاب

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) در زمان $t = 0$ پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_{c0} بصورت زیر ساخته می‌شود:

(7) & (8) \Rightarrow

$$\mathbf{Y}_{c0} = \mathbf{D} = \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u \Rightarrow \boxed{\mathbf{Y}_{c0} = \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u} \quad (31)$$

$(\cdot)^\dagger$: علامت عملگر شبه وارون (Pseudo Inverse) را نشان می‌دهد.

(3) \rightarrow (31) $\begin{matrix} (\mathbf{C}_s)^\dagger \times \\ \Rightarrow \\ \times (\mathbf{B}_u)^\dagger \end{matrix}$

$$(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} (\mathbf{B}_u)^\dagger = (\mathbf{C}_s)^\dagger \mathbf{C}_s \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \Rightarrow \boxed{\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} (\mathbf{B}_u)^\dagger} \quad (32)$$

$$(32) \Rightarrow \boxed{\mathbf{M} = \mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \mathbf{C}_s} \quad (33)$$

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: شتاب

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) اولین پارامتر مارکوف سیستم \mathbf{Y}_{c1} بصورت زیر ساخته می‌شود:

(7) & (8) \Rightarrow

$$\mathbf{Y}_{c1} = \mathbf{C}\mathbf{B}_c = [-\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 \quad -\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Y}_{c1} = -(\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}_0(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u)} \quad (34)$$

(3) & (32) \rightarrow (34) \Rightarrow

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c1} = -(\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger) \mathbf{C}_0 ((\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u) \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{Y}}_{c1} = -\hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}} \quad (35)$$

$$(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \times (35) \times (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \Rightarrow (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger = -(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \Rightarrow$$

$$\boxed{(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger = -(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger} \quad (36)$$

$\mathbf{B}_u \times (36) \times \mathbf{C}_m \Rightarrow$

$$\mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \mathbf{C}_s = -\mathbf{B}_u (\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \mathbf{C}_s \Rightarrow \boxed{\mathbf{C}_0 = -\mathbf{B}_u (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \mathbf{C}_s} \quad (37)$$

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

خروجی سیستم: شتاب

با استفاده از رابطه‌های (7) و (8) دومین پارامتر مارکوف سیستم Y_{c2} بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$(7) \ \& \ (8) \Rightarrow \ Y_{c2} = \mathbf{C}\mathbf{A}_c\mathbf{B}_c = [-\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 \quad -\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u = \mathbf{C}_s\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u - Y_{c2} \quad (38)$$

$$(3) \ \& \ (32) \rightarrow (38) \Rightarrow$$

$$\mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u = \mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u - \hat{\mathbf{Y}}_{c2} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} = \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} - \hat{\mathbf{Y}}_{c2} \quad (39)$$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

(37) \rightarrow (39) \Rightarrow

خروجی سیستم: شتاب

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} =$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \mathbf{C}_s(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} - \hat{\mathbf{Y}}_{c2} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} = \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} - \hat{\mathbf{Y}}_{c2} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger \mathbf{K}_0(\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0} = \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} - \hat{\mathbf{Y}}_{c2} \quad (40)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{k-acc}} \in \mathbb{R}^{m \times r} = \hat{\mathbf{Y}}_{c1}(\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} - \hat{\mathbf{Y}}_{c2}$$

با تعریف ماتریس‌های زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{B-acc}} \in \mathbb{R}^{m \times n} = \hat{\mathbf{Y}}_{c0}(\mathbf{B}_u)^\dagger$$

\Rightarrow

$$\mathbf{U}_{\mathbf{k-acc}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{B-acc}} \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_{\mathbf{I-acc}} \quad (41)$$

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{I-acc}} \in \mathbb{R}^{n \times r} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}$$

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

معادله‌های شناسایی پارامترهای سازه‌ای سیستم

خروجی‌های اندازه‌گیری شده

شتاب	سرعت	جابجایی
$\mathbf{M} = \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{Y}}_{c0}^\dagger \mathbf{C}_s$	$\mathbf{M} = \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{Y}}_{c1}^\dagger \mathbf{C}_s$	$\mathbf{M} = \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{Y}}_{c2}^\dagger \mathbf{C}_s$
$\mathbf{C}_0 = -\mathbf{B}_u \hat{\mathbf{Y}}_{c0}^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} \hat{\mathbf{Y}}_{c0}^\dagger \mathbf{C}_s$	$\mathbf{C}_0 = -\mathbf{B}_u \hat{\mathbf{Y}}_{c1}^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} \hat{\mathbf{Y}}_{c1}^\dagger \mathbf{C}_s$	$\mathbf{C}_0 = -\mathbf{B}_u \hat{\mathbf{Y}}_{c2}^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} \hat{\mathbf{Y}}_{c2}^\dagger \mathbf{C}_s$
$\mathbf{U}_{k-acc} = \mathbf{Y}_{B-acc} \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_{I-acc}$	$\mathbf{U}_{k-vel} = \mathbf{Y}_{B-vel} \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_{I-vel}$	$\mathbf{U}_{k-dis} = \mathbf{Y}_{B-dis} \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_{I-dis}$
$\mathbf{U}_{k-acc} = \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\hat{\mathbf{Y}}_{c0})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1} - \hat{\mathbf{Y}}_{c2}$	$\mathbf{U}_{k-vel} = \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\hat{\mathbf{Y}}_{c1})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2} - \hat{\mathbf{Y}}_{c3}$	$\mathbf{U}_{k-dis} = \hat{\mathbf{Y}}_{c3} (\hat{\mathbf{Y}}_{c2})^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c3} - \hat{\mathbf{Y}}_{c4}$
$\mathbf{Y}_{B-acc} = \hat{\mathbf{Y}}_{c0} (\mathbf{B}_u)^\dagger$	$\mathbf{Y}_{B-vel} = \hat{\mathbf{Y}}_{c1} (\mathbf{B}_u)^\dagger$	$\mathbf{Y}_{B-dis} = \hat{\mathbf{Y}}_{c2} (\mathbf{B}_u)^\dagger$
$\mathbf{Y}_{I-acc} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c0}$	$\mathbf{Y}_{I-vel} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c1}$	$\mathbf{Y}_{I-dis} = (\mathbf{C}_s)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_{c2}$

Damage Detection: DDA/ISMP

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

رابطه اساسی شناسایی ماتریس سختی بطور کلی بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{Y}_B \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_I \quad (42)$$
$$\left(\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{m \times r} \quad \mathbf{Y}_B \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \mathbf{Y}_I \in \mathbb{R}^{n \times r} \right)$$

برای تعیین ماتریس سختی $\mathbf{K}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، رابطه (42) دوباره بازنویسی شده بطوری که ماتریس سختی بصورت یک بردار ستونی نامعین $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$ ظاهر می شود:

$$\mathbf{A}_k \mathbf{k}_0 = \mathbf{h}_k \quad (43)$$

که در آن

$$\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{mr \times n^2} = \mathbf{Y}_B \otimes \mathbf{Y}_I^T \quad (44)$$
$$\mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}^{n^2} = \left\{ k_{11} \quad \cdots \quad k_{1n} \quad | \quad k_{21} \quad \cdots \quad k_{2n} \quad | \quad \cdots \quad | \quad k_{n1} \quad \cdots \quad k_{nn} \right\}^T$$
$$\mathbf{h}_k \in \mathbb{R}^{mr} = \left\{ h_{11} \quad \cdots \quad h_{1r} \quad | \quad h_{21} \quad \cdots \quad h_{2r} \quad | \quad \cdots \quad | \quad h_{m1} \quad \cdots \quad h_{mr} \right\}^T$$

\otimes : عملگر ضرب کرونکر (Kronecker product).

k_{ij} : متناظر با درایه (i, j) از ماتریس \mathbf{K}_0 است.

h_{ij} : متناظر با درایه (i, j) از ماتریس \mathbf{U}_k است.

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

ماتریس ضرایب \mathbf{A}_k از تمام ضرب‌های محتمل درایه‌های ماتریس \mathbf{Y}_B در درایه‌های ماتریس \mathbf{Y}_I^T بدست می‌آید:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{Y}_B \otimes \mathbf{Y}_I^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{B(1,1)} \mathbf{Y}_I^T & \mathbf{Y}_{B(1,2)} \mathbf{Y}_I^T & \cdots & \mathbf{Y}_{B(1,n)} \mathbf{Y}_I^T \\ \mathbf{Y}_{B(2,1)} \mathbf{Y}_I^T & \mathbf{Y}_{B(2,2)} \mathbf{Y}_I^T & \cdots & \mathbf{Y}_{B(2,n)} \mathbf{Y}_I^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{B(m,1)} \mathbf{Y}_I^T & \mathbf{Y}_{B(m,2)} \mathbf{Y}_I^T & \cdots & \mathbf{Y}_{B(m,n)} \mathbf{Y}_I^T \end{bmatrix} \quad (45)$$

حل معادله (43) به روش حداقل مربعات نُرم مینیمم (Minimum norm least-squares method) برای تعیین درایه‌های ماتریس سختی، جواب یکتایی ندارد. همچنین ویژگی‌های مربوط به تقارن (Symmetric) و صفر بودن (Sparsity) بعضی از درایه‌های ماتریس سختی را نیز حفظ نمی‌کند. بنابراین اطلاعات مربوط به صفر بودن بعضی از درایه‌های ماتریس سختی باید بصورت شرط قیدهای اضافی در نظر گرفته شود. این کار از نظر ریاضی با حذف درایه‌های صفر بردار \mathbf{k}_0 و همچنین حذف ستون‌های متناظر با آن‌ها در ماتریس \mathbf{A}_k انجام شدنی است.

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

در مدل قاب‌های جرم متمرکز با عملکرد برشی، اگر درجه آزادی i ام به درجه آزادی j ام متصل نباشد؛ در این صورت $k_{ij} = 0$ است. اگر تعداد درایه‌های صفر ماتریس \mathbf{K}_0 برابر با $\gamma = n^2 - 3n + 2$ باشد با حذف درایه‌های صفر در بردار سختی بردار $\mathbf{k}_0^m \in \mathbb{R}^{(3n-2)}$ حاصل می‌شود. همچنین با حذف ستون‌هایی از ماتریس \mathbf{A}_k که در درایه‌های صفر بردار سختی ضرب می‌گردند ماتریس $\mathbf{A}_k^m \in \mathbb{R}^{m \times (3n-2)}$ بدست می‌آید. در نتیجه رابطه (43) بصورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\mathbf{A}_k^m \mathbf{k}_0^m = \mathbf{h}_k \quad (46)$$

درایه‌های ماتریس سختی کل سازه از حل معادله (46) بدست می‌آید. هر یک از درایه‌های ماتریس سختی کل سازه تابعی از سختی طبقات متصل کننده بین دو درجه آزادی خاص است. به عبارت دیگر درایه‌های ماتریس سختی شناسایی شده تابعی از سختی‌های دو طبقه مختلف می‌باشد. برای شناسایی دقیق مکان، نوع و شدت آسیب در سیستم، تعیین سختی هر یک از طبقه‌های سازه بصورت مجزا ضروری است. بنابراین استفاده مستقیم از نتایج بدست آمده از حل معادله (46) کمک خاصی به روند شناسایی آسیب نمی‌کند.

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

برای رفع این مشکل یک ماتریس تبدیل معرفی خواهد شد تا بتوان سختی هر یک از طبقه‌ها را از نتایج حاصله از حل معادله (46) استخراج کرد. هریک از درایه‌های ماتریس سختی تابعی از سختی طبقات است. بنابراین بردار \mathbf{k}_0^m را می‌توان بصورت زیر تشکیل داد:

$$\mathbf{k}_0^m = \mathbf{T}_f \mathbf{k}_0^x \quad (47)$$

که در آن

$$\mathbf{k}_0^x \in \mathbb{R}^n = \{k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n\}^T \quad (48)$$

k_i : متناظر با سختی جانبی i امین طبقه است.

$\mathbf{T}_f \in \mathbb{R}^{(3n-2) \times n}$: یک ماتریس تبدیل است که با ضرب آن در بردار \mathbf{k}_0^x درایه‌های غیر صفر ماتریس سختی سازه بدست می‌آید.

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

T_{ij}^f درایه (i, j) از ماتریس \mathbf{T}_f از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_{ij}^f = \frac{\partial k_{0i}^m}{\partial k_j} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3, \dots, 3n - 2) \\ (j = 1, 2, 3, \dots, n) \end{matrix} \quad (49)$$

k_{0i}^m متناظر با i امین درایه بردار \mathbf{k}_0^m است. با جایگذاری رابطه (47) در رابطه (46) خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}_k^m \mathbf{T}_f \mathbf{k}_0^x = \mathbf{h}_k \quad (50)$$

با استفاده از روش حل مینیمم حداقل مربعات معادله (50) بردار \mathbf{k}_0^x محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{k}_0^x = (\mathbf{A}_k^m \mathbf{T}_f)^\dagger \mathbf{h}_k \quad (51)$$

با تعیین بردار \mathbf{k}_0^x از رابطه (51) سختی جانبی تمام طبقه‌های سازه شناسایی می‌گردد.

الگوریتم شناسایی آسیب بر اساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

در عمل آسیب‌های به وجود آمده در سازه می‌تواند ناشی از عوامل مختلفی از قبیل عملکرد طولانی مدت سازه، زلزله و بادهای شدید باشد. در روش DDA/ISMP پیشنهاد شده، آسیب در مدل قاب برشی سازه‌های ساختمانی با تعیین مقدار تغییرات در بردار سختی \mathbf{k}_0^x ، شناسایی می‌گردد. در نتیجه مقدار آسیب از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta \mathbf{k}^x (\%) = \frac{|\mathbf{k}_0^x - \mathbf{k}_d^x|}{\mathbf{k}_0^x} \times 100 \quad (52)$$

\mathbf{k}_0^x : سختی اولیه شناسایی شده (سازه سالم)

\mathbf{k}_d^x : سختی آسیب دیده (سازه معیوب)

با استفاده از رابطه (52) مقدار، مکان و نوع آسیب در سازه ساختمانی شناسایی می‌گردد.

الگوریتم شناسایی آسیب براساس پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده

در روش DDA/ISMP پارامترهای سازه‌ای شناسایی شده شامل جرم، سختی و میرایی تنها با مکان محرک‌ها، مکان حسگرها و پارامترهای مارکوف سیستم شناسایی شده ارتباط دارند. بنابراین پارامترهای سازه‌ای شناسایی شده با شکل‌های مودی رابطه مستقیم ندارد. به این دلیل روش DDA/ISMP دارای دو مزیت مهم است:

نیازی به نصب حسگر در تمام درجه‌های آزادی جهت شناسایی شکل‌های مودی نمی‌باشد. بنابراین سختی طبقات با تعداد محدودی از حسگرها و محرک‌ها قابل استخراج است.

شناسایی بطور محلی امکان‌پذیر است. با تعبیه حسگرها و محرک‌ها در مکان‌های متناظر با یک طبقه مورد نظر پارامترهای سازه‌ای آن شناسایی می‌گردد. بنابراین سختی جانبی یک طبقه خاص در سیستم سازه‌ای قابل استخراج است.