دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Nonlinear Analysis of Structures

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Introduction

معادله تعادل دینامیکی سیستم خطی:

$$\boxed{\begin{array}{ll} M\ddot{U}_{(t)} + C\dot{U}_{(t)} + KU_{(t)} = R_{(t)} & (1) \\ F_{I(t)} + F_{D(t)} + F_{E(t)} = R_{(t)} & (2) \end{array}}$$

که در آن

$F_{I(t)} = M\ddot{U}_{(t)}$ نیروهای اینرسی (Inertia Forces)

$F_{D(t)} = C\dot{U}_{(t)}$ نیروهای میرایی (Damping Forces)

$F_{E(t)} = KU_{(t)}$ نیروهای الاستیک (Elastic Forces)

ماتریس‌های M، C و K به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سیستم است. U، $\dot{U}$ و $\ddot{U}$ به ترتیب نشان دهنده بردار جابجایی، سرعت و شتاب می‌باشد.

در حالت استاتیکی از نیروهای اینرسی و میرایی صرف نظر می‌گردد.

رابطه (1) معادلات دیفرانسیل مرتبه 2 با ضرایب ثابت، حرکت یک سیستم خطی است. اگر مرتبه ماتریس‌ها در رابطه (1) بزرگ باشد (تعداد درجه‌های آزادی سیستم زیاد باشد) حل معادله (1) با روش‌های استاندارد زمان‌بر و پرهزینه خواهد بود. از این رو تعدادی روش عددی برای حل معادله (1) در ادبیات روش‌های المان محدود ارائه شده است.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Introduction

روش‌های حل معادله (1):

- **روش‌های کلی (General Approach)**
  - **آنالیز در حوزه زمانی (Time Domain Analysis)**

در این روش با استفاده از انتگرال دوهامل (Duhamel integral) بار وارده به مجموعه‌ای متوالی از ضربه‌های کوتاه مدت (Short Duration Impulses) تبدیل می‌شود. سپس پاسخ ارتعاش آزاد هر یک از این ضربه‌ها سهمی از پاسخ کلی سیستم در زمان بعدی خواهند داشت.

  - **آنالیز در حوزه فرکانسی (Frequency Domain Analysis)**

در این روش بار وارده با استفاده از تبدیل فوریه (Fourier Transformation) به یک سری مولفه‌های هارمونیک مجزا تجزیه می‌گردد. مولفه‌های پاسخ هارمونیک متناظر سازه با ضرب مولفه‌های بار در ضریب پاسخ فرکانس سازه به دست می‌آید. و در نهایت پاسخ کلی سازه به وسیله عکس تبدیل فوریه (Inverse Fourier Transformation) با ترکیب مولفه‌های پاسخ هارمونیک محاسبه می‌شود.

همان‌طور که مشاهده شد در هر دو روش از اصل جمع آثار استفاده می‌گردد. بنابراین این دو روش در مسائل غیرخطی کاربردی نمی‌توانند داشته باشند.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Introduction

روش‌های حل معادله (1):

- **روش‌های کلی (General Approach)**
  - **روش گام به گام (Step-By-Step Procedure)**

این روش از اصل جمع آثار استفاده نمی‌کند بنابراین برای مسائل غیرخطی مناسب است. روش‌های گام به گام مختلفی وجود دارد. در تمام این روش‌ها بار و تاریخچه پاسخ‌ها به مجموعه‌ای از بازه‌های زمانی (Time Intervals) یا گام (Step) تقسیم می‌شوند. پاسخ در طول هر گام از شرایط اولیه (سرعت و جابجایی) موجود در ابتدای هر گام و از تاریخچه بارگذاری در طول گام محاسبه می‌شود. بنابراین پاسخ هر گام یک آنالیز مستقل بوده و نیازی به ترکیب مشارکت‌های پاسخ در گام نمی‌باشد. رفتار غیرخطی را می‌توان با استفاده از این شیوه در نظر گرفت به این ترتیب که فرض می‌کنیم رفتار سازه در طول هر گام ثابت است و تغییری نمی‌کند و تنها رفتار سازه می‌تواند از یک گام به گام دیگر متفاوت باشد. بنابراین در واقع آنالیز غیرخطی تبدیل می‌شود به مجموعه‌ای از آنالیزهای خطی یک سیستم متغیر.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Time–Domain Analysis

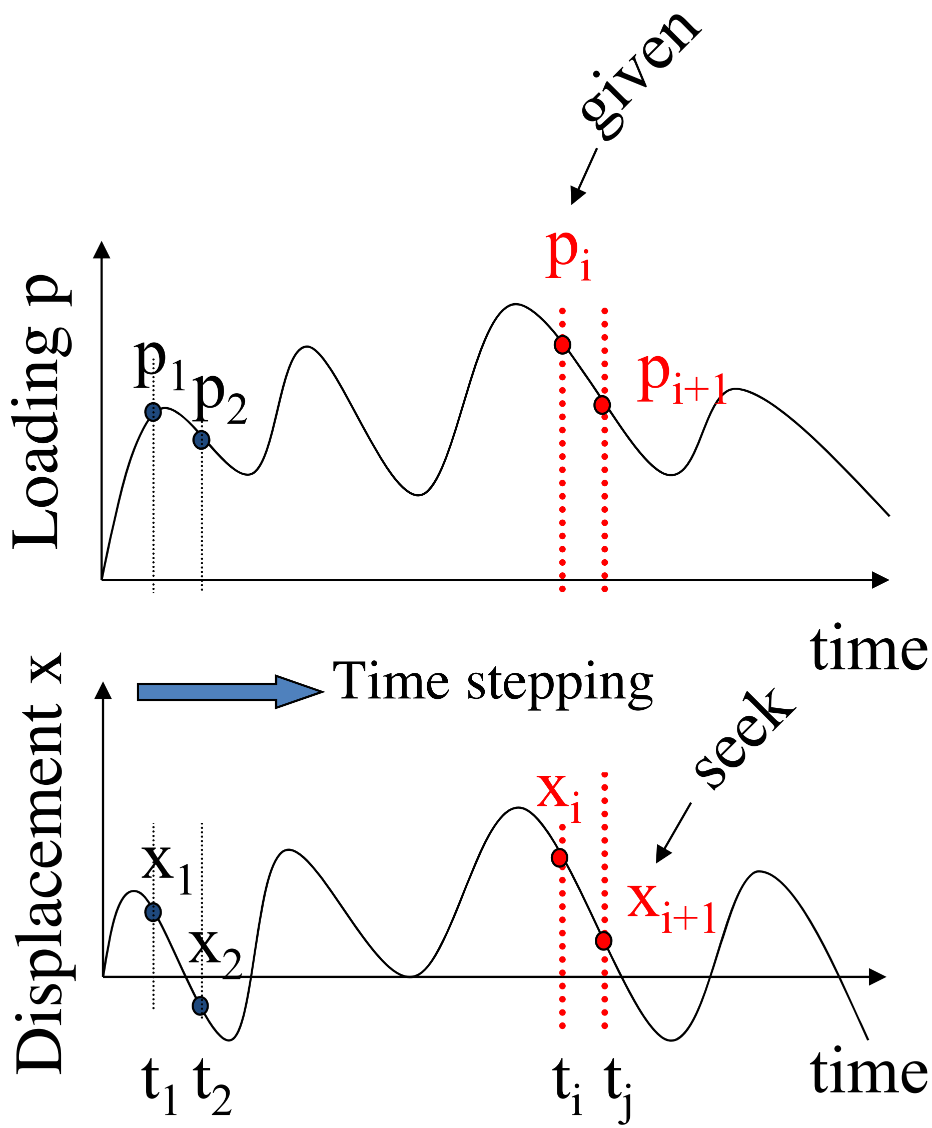
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t)$$

given

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = p_i$$

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + kx_{i+1} = p_{i+1}$$

seek



Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Piecewise Exact Method (Interpolation of Excitation)

روش دقیق تکه‌ای

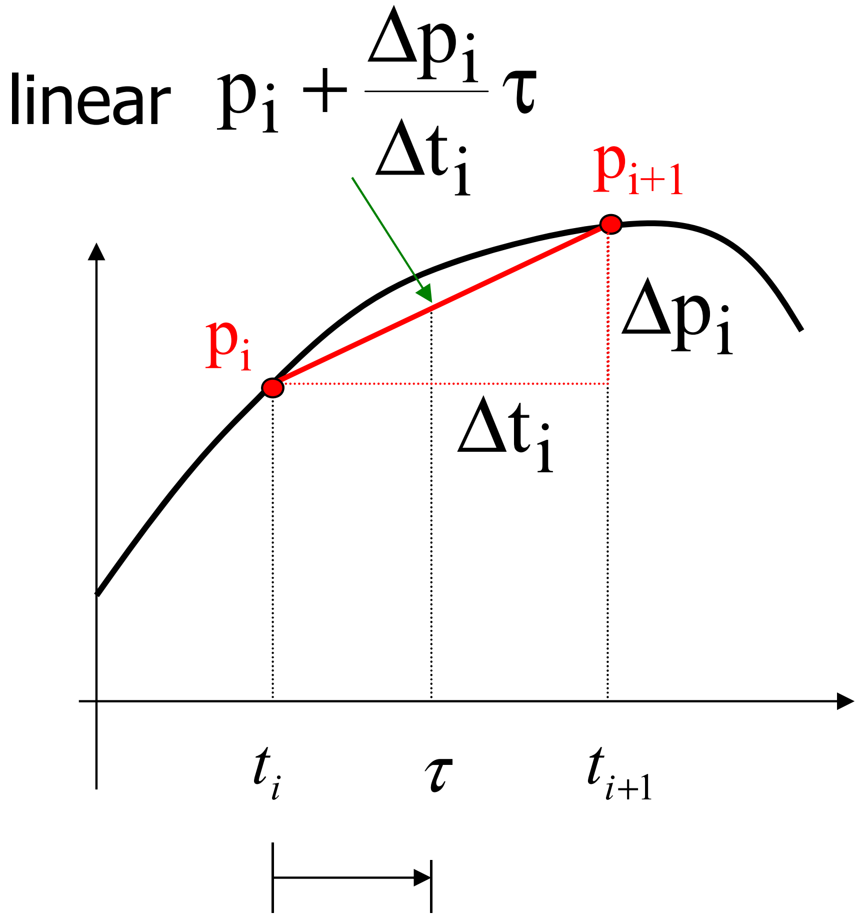
یکی از ساده‌ترین روش‌های گام به گام روش دقیق تکه‌ای است. ایده روش بر اساس حل دقیق معادله حرکت یک سیستم خطی می‌باشد. در این روش تاریخچه بارگذاری به بازه‌های زمانی تقسیم‌بندی شده و فرض می‌شود که در هر بازه شیب منحنی بار ثابت است. با کاهش بازه زمانی خطای ناشی از این تقریب کاهش پیدا می‌کند.

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = p_i$$

$$t_i \le \tau \le t_{i+1}$$

$$m\ddot{x}_\tau + c\dot{x}_\tau + kx_\tau = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau$$

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + kx_{i+1} = p_{i+1}$$



Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Piecewise Exact Method (Interpolation of Excitation)

$$m\ddot{x}_\tau + c\dot{x}_\tau + kx_\tau = \underbrace{p_i}_{\text{constant}} + \underbrace{\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau}_{\text{linear ramp}}$$

Solution of x(t) consists of 3 parts

– Step response due to p_i

– Ramp response due to $\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\tau$

– Free vibration response

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Piecewise Exact Method (Interpolation of Excitation)

پاسخ جابجایی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$x_{i+1} = A \cdot x_i + B \cdot \dot{x}_i + C \cdot p_i + D \cdot p_{i+1}$$

که در آن

$$A = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)$$

$$B = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$C = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_D\Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t - \left(1+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\right)\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_D\Delta t}\sin\omega_D\Delta t + \frac{2\xi}{\omega\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Piecewise Exact Method (Interpolation of Excitation)

پاسخ سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{\dot{x}_{i+1} = A' \cdot x_i + B' \cdot \dot{x}_i + C' \cdot p_i + D' \cdot p_{i+1}}$$

که در آن

$$A' = -e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$B' = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

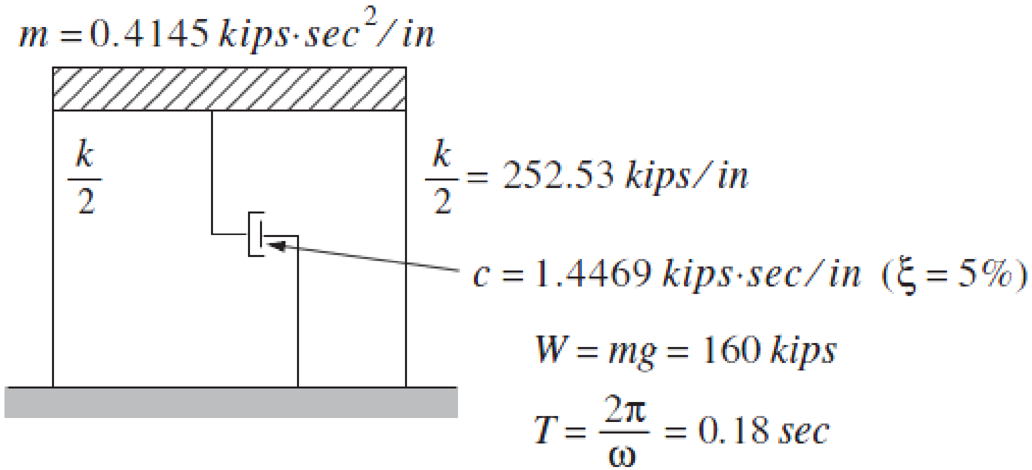
$$C' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Piecewise Exact Method (Interpolation of Excitation)

مثال1). سیستم SDOF نشان داده شده تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد. پاسخ‌های سیستم را در سه حالت زیر به روش دقیق تکه‌ای به دست آورید

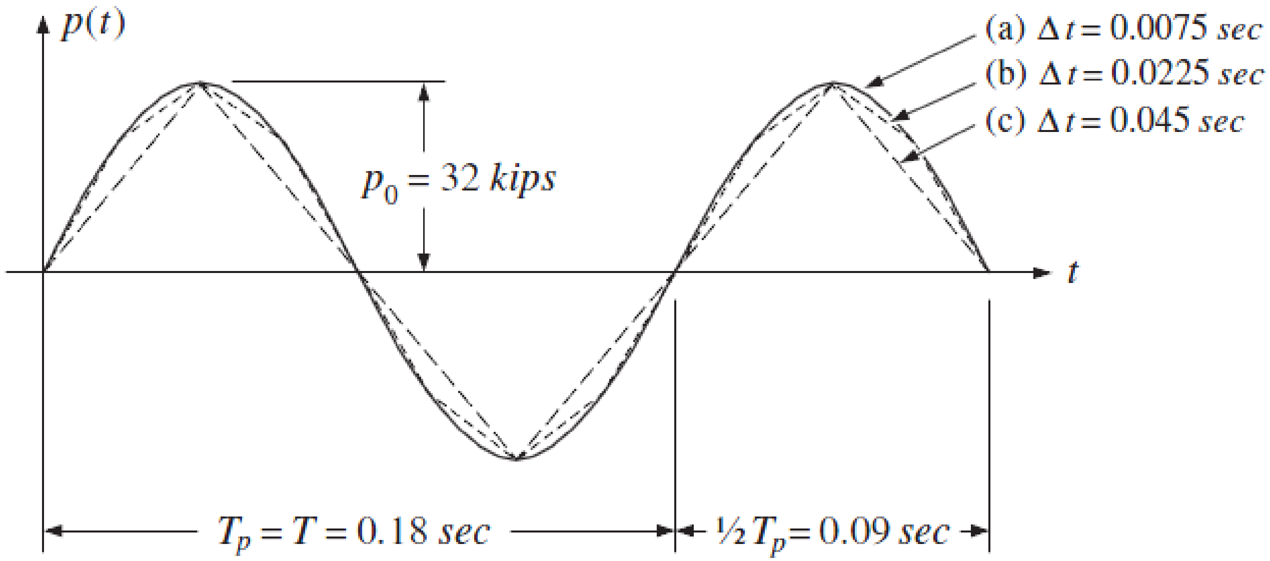


(a) SDOF properties

$$a)\ \Delta t = \frac{1}{12}\frac{T_p}{2} = 0.0075\ \text{sec}$$

$$b)\ \Delta t = \frac{1}{4}\frac{T_p}{2} = 0.0225\ \text{sec}$$

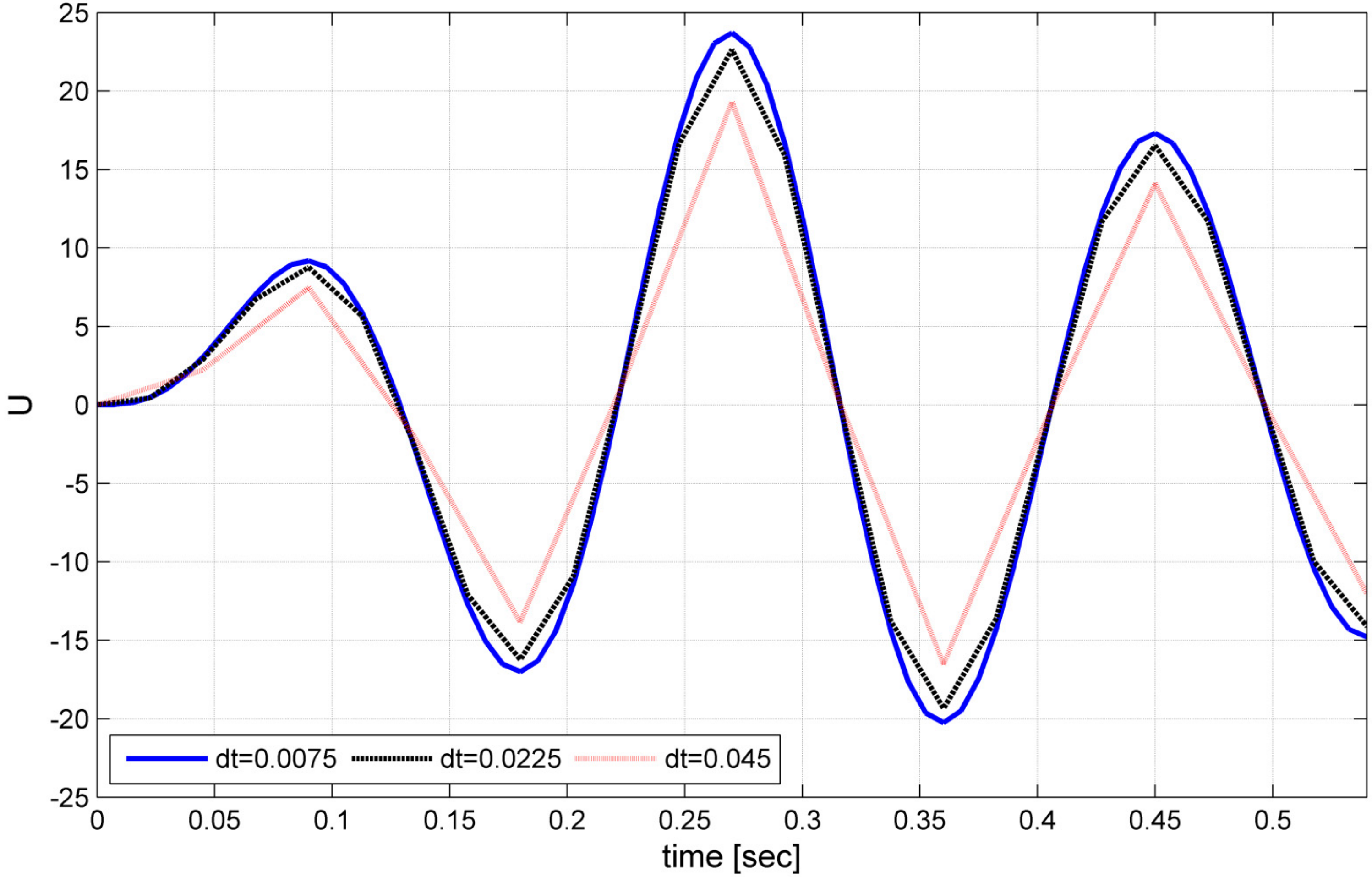
$$c)\ \Delta t = \frac{1}{2}\frac{T_p}{2} = 0.045\ \text{sec}$$



(b) Straight line approximations of sine-wave loading

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Piecewise Exact Method (Interpolation of Excitation)



Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Numerical Approximation Procedures

روش‌های تقریبی عددی

در گروه روش‌های گام به گام روش‌های تقریبی عددی زیادی در ادبیات مهندسی پیشنهاد شده است.

روش‌های تقریبی عددی بر اساس نوع عملگر در دو گروه طبقه‌بندی می‌شود:

- مشتق‌گیری عددی (Numerical Differentiation) – در مهندسی مکانیک کاربرد دارد.
- انتگرال‌گیری عددی (Numerical Integration) – در مهندسی عمران کاربرد دارد.

روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم (Direct Integration Methods) بر اساس رویه در دو گروه طبقه‌بندی می‌شود:

- روش انتگرال‌گیری صریح (Explicit Integration Method):

در این روش پاسخ در هر گام تنها براساس مقادیر پاسخ‌های به دست آمده در گام قبلی محاسبه می‌شود.

- روش انتگرال‌گیری ضمنی (Implicit Integration Method)

در این روش پاسخ در هر گام براساس مقادیر پاسخ‌های به دست آمده در گام قبلی و گام فعلی محاسبه می‌شود. بنابراین نیاز به حدس- تکرار- و کاهش خطا می‌باشد.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Numerical Approximation Procedures

Direct Integration

Explicit	**Implicit**
Short time duration dynamic analysis Wave propagation	Impact and seismic problems Complex model
Central Difference Runge-Kunta	Houbolt Wilson Newmark Hughes
Equilibrium at t for the solution of $t+\Delta t$	*Equilibrium at* $t+\Delta t$ for the solution of t+dt
Computationally cheap since effective stiffness matrix is *not required* in each step	*Computationally expensive* since effective stiffness matrix is *required* in each step
Conditionally stable	*Unconditionally stable*
Small time step required for stability	Small time step gives better accuracy

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Numerical Approximation Procedures

- ❑ انتخاب کدام روش عددی بستگی به بازده آن دارد. باید در یک زمان معقول به یک دقت مناسب یا قابل قبول دست یافت. همه روش‌ها با کوچک در نظر گرفتن گام زمانی (به ویژه برای سیستم‌هایی که دارای ورودی با فرکانس بالا می‌باشند) دقت قابل قبول دارند اما باید به هزینه و زمان نیز توجه داشت.
- ❑ عوامل باعث ایجاد خطا در این روش‌ها :
  - گرد کردن اعداد (Round off)
  - ناپایداری (Instability) به دلیل افزایش خطاها از یک گام در طول محاسبات در گام‌های بعدی باعث ناپایداری روش خواهد شد. به طور مثال انتخاب گام‌های زمانی بزرگ.
  - کوتاه‌سازی (Truncation): مثلا در سری‌ها فقط چند جمله اول در نظر گرفته شود.
- ❑ جاهایی که خطاها اثرگذار می‌باشند.
  - انتقال فاز یا تغییر فرکانس.
  - میرایی مصنوعی- افزایش یا حذف انرژی جذب سیستم دینامیکی.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Direct Integration Methods

در روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم، با استفاده از یک فرآیند گام به گام عددی (Numerical step by step procedure) از معادله (1) انتگرال گرفته می‌شود. منظور از واژه مستقیم (Direct) آن است که در فرآیند حل، معادلات حرکت به فرم دیگری تبدیل نمی‌گردد.

روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم بر اساس دو ایده زیر می‌باشد:

I. به جای حل معادله (1) در هر لحظه t ، شرایط تعادل در بازه‌های زمانی گسسته (Discrete time intervals) به صورت جدا برقرار می‌گردد. به بیان دیگر معادلات تعادل به صورت استاتیکی با در نظر گرفتن نیروهای اینرسی و میرایی در زمان‌های گسسته t و در طول بازه زمانی Δt در نظر گرفته می‌شود.

II. جابجایی‌ها، سرعت‌ها و شتاب‌ها در طول هر بازه زمانی Δt دارای یک تغییر می‌باشد.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Direct Integration Methods

فرض‌های روش انتگرال‌گیری مستقیم :

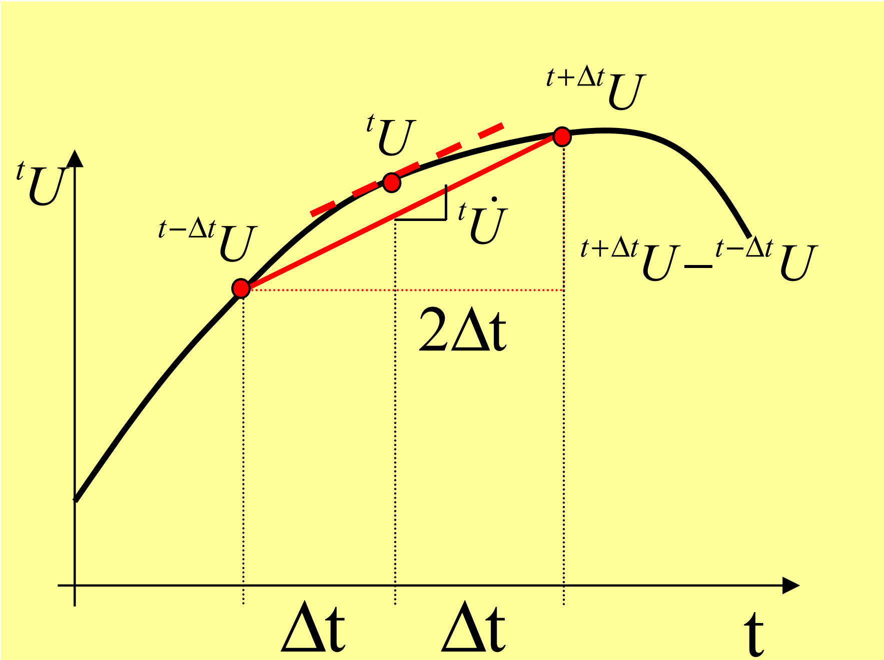
- معلوم بودن بردارهای تغییر مکان ، سرعت و شتاب در زمان 0 که به ترتیب با ${}^{0}U$, ${}^{0}\dot{U}$, ${}^{0}\ddot{U}$ نشان داده می‌شود.
- هدف یافتن پاسخ از زمان 0 تا زمان T.
- زمان در نظر گرفته شده T به n بازه زمانی مساوی تقسیم می‌گردد. $\Delta t = T / n$
- با انتگرال‌گیری یک پاسخ تقریبی مربوط به زمان‌های $0 , \Delta t , 2\Delta t , \ldots , t , t + \Delta t , \ldots , T$ به دست می‌آید.
- فرض استخراج الگوریتم: با فرض معلوم بودن پاسخ در زمان‌های $0 , \Delta t , 2\Delta t , \ldots , t$ هدف تعیین پاسخ در زمان $t + \Delta t$
- استخراج الگوریتم : شاخص محاسبات انجام شده برای بدست آوردن پاسخ‌ها در زمان Δt و به کار بستن آن در زمان های بعدی با بازه‌های زمانی

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

روش تفاضل مرکزی

رابطه (1) سیستمی از معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت است. بنابراین می‌توان عبارت‌های سرعت و شتاب را با استفاده از عبارت‌های تفاضل محدود بیان کرد.



$$\boxed{{}^{t}\ddot{U} = \frac{1}{\Delta t^{2}}\left({}^{t-\Delta t}U - 2\,{}^{t}U + {}^{t+\Delta t}U\right)} \qquad (3)$$

$$\boxed{{}^{t}\dot{U} = \frac{1}{2\Delta t}\left({}^{t+\Delta t}U - {}^{t-\Delta t}U\right)} \qquad (4)$$

پاسخ جابجایی در زمان $t+\Delta t$ با در نظر گرفتن رابطه (1) در زمان t به دست می‌آید.

$$\boxed{M\ {}^{t}\ddot{U} + C\ {}^{t}\dot{U} + K\ {}^{t}U = {}^{t}R} \qquad (5)$$

با جایگذاری روابط (3) و (4) در رابطه (5) خواهیم داشت:

$$\boxed{\left(\frac{1}{\Delta t^{2}}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right){}^{t+\Delta t}U = {}^{t}R - \left(K - \frac{2}{\Delta t^{2}}M\right){}^{t}U - \left(\frac{1}{\Delta t^{2}}M - \frac{1}{2\Delta t}C\right){}^{t-\Delta t}U} \qquad (6)$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

با استفاده از رابطه (6) پاسخ $^{t+\Delta t}U$ براساس در نظر گرفتن شرایط تعادل در زمان t به دست می‌آید. همچنین $^{t+\Delta t}U$ به طور مستقیم از رابطه (5) به دست می‌آید، روند انتگرال‌گیری را روش انتگرال‌گیری صریح (Explicit Integration Method) می‌نامند. الگوی چنین روش‌هایی به گونه‌ای است که نیاز به فاکتورگیری (تجزیه) ماتریس سختی (سختی موثر) در راه حل گام به گام نمی‌باشد. از طرف دیگر روش‌هایی مانند Houbolt، Wilson و Newmark که شرایط تعادل را در زمان $t+\Delta t$ در نظر می‌گیرند به روش انتگرال‌گیری ضمنی (Implicit Integration Method) معروف هستند.

$$^{0}\ddot{U}\ ,\ ^{0}\dot{U}\ ,\ ^{0}U \quad are\ known \quad \overset{(3)\,\&\,(4)}{\Rightarrow} \quad \boxed{^{-\Delta t}U_i = {}^{0}U_i - \Delta t\ {}^{0}\dot{U}_i + \frac{\Delta t^2}{2}\ {}^{0}\ddot{U}_i} \qquad (7)$$

اندیس i نشان دهنده درآیه i اُم بردار مورد نظر است.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

مراحل گام به گام روش تفاضل مرکزی

Step–by–step solution using central difference method (general mass and damping matrices)

A. Initial calculations;

1. Form stiffness matrix K. mass matrix M, and damping matrix C.
2. Initialize ${}^{0}U$, ${}^{0}\dot{U}$ and ${}^{0}\ddot{U}$
3. Select time step Δt , $\Delta t \le \Delta t_{cr} = \dfrac{T_n}{\pi}$, and calculate integration constants:

T_n: کوچکترین پریود مدل المان محدود سیستم با n درجه آزادی است. اگر گام زمانی از گام زمانی بحرانی کوچکتر انتخاب شود روش تفاضل مرکزی به طور مشروط پایدار می‌باشد.

4. Calculate

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t} \quad , \quad a_2 = 2a_0 \quad , \quad a_3 = \frac{1}{a_2}}$$

$$\boxed{{}^{-\Delta t}U = {}^{0}U - \Delta t \ {}^{0}\dot{U} + a_3 \ {}^{0}\ddot{U}}$$

5. Form effective mass matrix

$$\boxed{\hat{M} = a_0 M + a_1 C}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

مراحل گام به گام روش تقاضل مرکزی

B. For each time step;

1. Calculate effective loads at time *t* :

$$\boxed{{}^{t}\hat{R} = {}^{t}R - (K - a_2 M)\ {}^{t}U - (a_0 M - a_1 C)\ {}^{t-\Delta t}U}$$

2. Solve for displacements at time $t + \Delta t$

$$\boxed{\hat{M}\ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t}\hat{R}}$$

3. If required, evaluate accelerations and velocities at time *t*:

$$\boxed{\begin{gathered} {}^{t}\ddot{U} = a_0({}^{t-\Delta t}U - 2\ {}^{t}U + {}^{t+\Delta t}U) \\ {}^{t}\dot{U} = a_1(-{}^{t-\Delta t}U + {}^{t+\Delta t}U) \end{gathered}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

مثال 2) معادلات تعادل یک سیستم دارای دو درجه آزادی به صورت زیر به دست آمده است

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

فرض $\quad {}^0U = 0 \quad {}^0\dot{U} = 0$

با استفاده از روش تفاضل مرکزی مطلوب است تعیین پاسخ سیستم در دو حالت الف) $\Delta t = \dfrac{T_2}{10}$ و ب) $\Delta t = 10\, T_2$.

پاسخ:

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

با استفاده از معادله تعادل ${}^{0}\ddot{U}$ در زمان t=0 محاسبه می‌شود.

حالت اول:

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

$t = \Delta t + \Delta t = 2\Delta t \qquad i = 3$

$${}^{3\Delta t}U = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.78957 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.7631 & 0.078957 \\ 0.15791 & 1.6842 \end{bmatrix} {}^{2\Delta t}U - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{\Delta t}U$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.78957 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.7631 & 0.078957 \\ 0.15791 & 1.6842 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.031171 \\ 1.4545 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.39478 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{{}^{3\Delta t}U = \begin{Bmatrix} 0.1698 \\ 2.8493 \end{Bmatrix}}$$

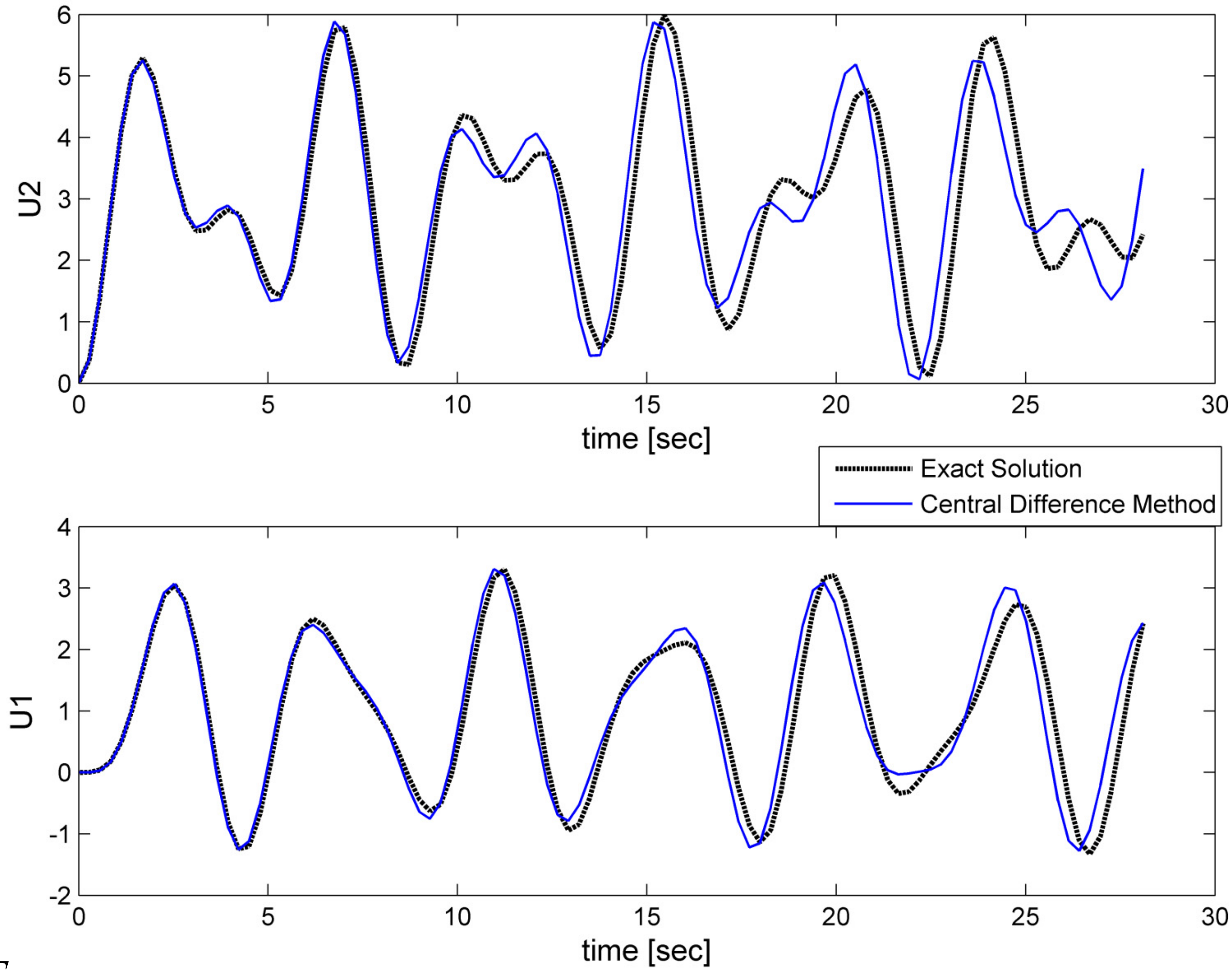
Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

time	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	0	0.39478
$2\Delta t$	0.031171	1.4545
$3\Delta t$	0.1698	2.8493
$4\Delta t$	0.49317	4.1606
$5\Delta t$	1.0282	5.0253
$6\Delta t$	1.7165	5.2549
$7\Delta t$	2.4131	4.8854
$8\Delta t$	2.9239	4.1436
$9\Delta t$	3.0692	3.3445
$10\Delta t$	2.7516	2.7633
$11\Delta t$	2.0004	2.5335
$12\Delta t$	0.97541	2.6089

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

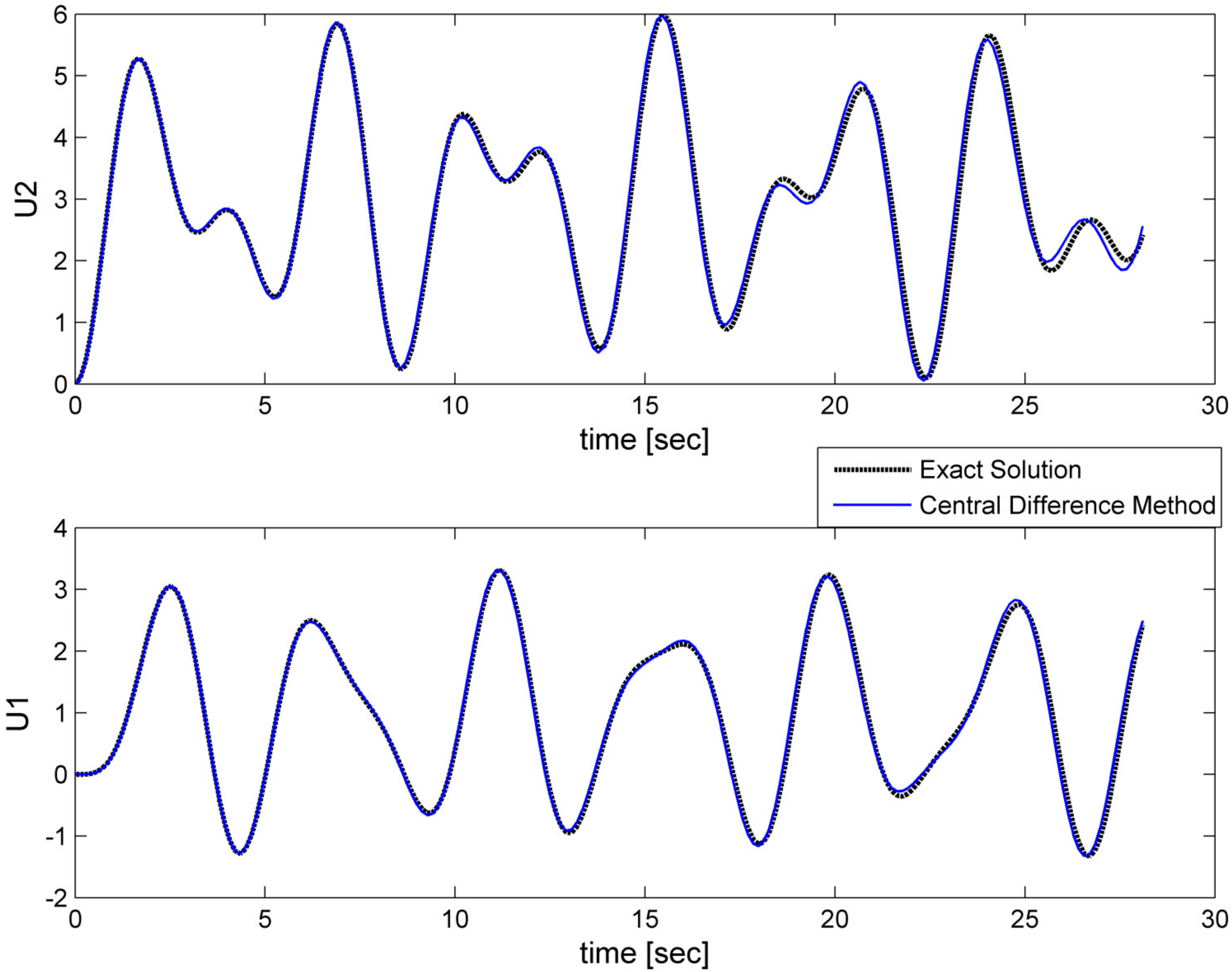
The Central Difference Method



$$for \quad \Delta t = \frac{T_2}{10} \quad \& \quad 100\Delta t$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method



$$for \quad \Delta t = \frac{T_2}{20} \quad \& \quad 200\Delta t$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Central Difference Method

حالت دوم:

$time$	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	0	3947.8
$2\Delta t$	3.1171e+006	-1.2453e+007
$3\Delta t$	-1.7209e+010	4.4226e+010
$4\Delta t$	7.5649e+013	-1.6677e+014
$5\Delta t$	-3.1071e+017	6.4582e+017

پاسخ واگرا می‌شود؛ بنابراین روش تفاضل مرکزی با انتخاب $\Delta t = 10T_2 > \Delta t_{cr}$ ناپایدار است.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

روش Houbolt

این روش تا حدی مشابه روش تفاضل مرکزی است؛ با این تفاوت که عبارت‌های سرعت و شتاب با استفاده از عبارت‌های تفاضل محدود زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\ddot{U} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(2\ {}^{t+\Delta t}U - 5\ {}^{t}U + 4\ {}^{t-\Delta t}U - {}^{t-2\Delta t}U\right)} \qquad (8)$$

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\dot{U} = \frac{1}{6\Delta t}\left(11\ {}^{t+\Delta t}U - 18\ {}^{t}U + 9\ {}^{t-\Delta t}U - 2\ {}^{t-2\Delta t}U\right)} \qquad (9)$$

پاسخ جابجایی در زمان $t+\Delta t$ با در نظر گرفتن رابطه (1) در زمان $t+\Delta t$ به دست می‌آید.

$$\boxed{M\ {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + C\ {}^{t+\Delta t}\dot{U} + K\ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}R} \qquad (10)$$

با جایگذاری روابط (8) و (9) در رابطه (10) خواهیم داشت:

$$\boxed{\left(\frac{2}{\Delta t^2}M + \frac{11}{6\Delta t}C + K\right){}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}R + \left(\frac{5}{\Delta t^2}M + \frac{3}{\Delta t}C\right){}^{t}U - \left(\frac{4}{\Delta t^2}M + \frac{3}{2\Delta t}C\right){}^{t-\Delta t}U + \left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{3\Delta t}C\right){}^{t-2\Delta t}U} \qquad (11)$$

از رابطه (11) می‌توان نتیجه گرفت که حل ${}^{t+\Delta t}U$ براساس ${}^{t}U$ ، ${}^{t-\Delta t}U$ و ${}^{t-2\Delta t}U$ است.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

مراحل گام به گام روش Houbolt

Step–by–step solution using Houbolt integration method

A. Initial calculations;

1. Form stiffness matrix K. mass matrix M, and damping matrix C.
2. Initialize ^{0}U , $^{0}\dot{U}$ *and* $^{0}\ddot{U}$
3. Select time step and calculate integration constants:

$$\boxed{\begin{array}{llll} a_0 = \dfrac{2}{\Delta t^2} \quad , & a_1 = \dfrac{11}{6\Delta t} \quad , & a_2 = \dfrac{5}{\Delta t^2} \quad , & a_3 = \dfrac{3}{\Delta t} \\ a_4 = -2a_0 \quad , & a_5 = \dfrac{-a_3}{2} \quad , & a_6 = \dfrac{a_0}{2} \quad , & a_7 = \dfrac{a_3}{9} \end{array}}$$

4. Use special starting procedure to calculate $^{\Delta t}U$ and $^{2\Delta t}U$

5. Calculate effective stiffness matrix

$$\boxed{\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

مراحل گام به گام روش Houbolt

B. For each time step;

1. Calculate effective loads at time $t+\Delta t$:

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\hat{R} = {}^{t+\Delta t}R + M(a_2\ {}^{t}U + a_4\ {}^{t-\Delta t}U + a_6\ {}^{t-2\Delta t}U) + C(a_3\ {}^{t}U + a_5\ {}^{t-\Delta t}U + a_7\ {}^{t-2\Delta t}U)}$$

2. Solve for displacements at time $t+\Delta t$

$$\boxed{\hat{K}\ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}\hat{R}}$$

3. If required, evaluate accelerations and velocities at time $t+\Delta t$:

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{U} &= a_0\ {}^{t+\Delta t}U - a_2\ {}^{t}U - a_4\ {}^{t-\Delta t}U - a_6\ {}^{t-2\Delta t}U \\ {}^{t+\Delta t}\dot{U} &= a_1\ {}^{t+\Delta t}U - a_3\ {}^{t}U - a_5\ {}^{t-\Delta t}U - a_7\ {}^{t-2\Delta t}U \end{aligned}}$$

در روش Houbolt برخلاف روش تفاضل مرکزی، محدودیتی برای گام زمانی حد بحرانی وجود ندارد؛ و گام زمانی می‌تواند بزرگتر از گام زمانی بحرانی مربوط به روش تفاضل مرکزی انتخاب شود.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

مثال 3) معادلات تعادل یک سیستم دارای دو درجه آزادی به صورت زیر به دست آمده است

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

فرض $\;{}^{0}U = 0$ ، ${}^{0}\dot{U} = 0$

با استفاده از روش Houbolt مطلوب است تعیین پاسخ سیستم در دو حالت الف) $\Delta t = \dfrac{T_2}{10}$ و ب) $\Delta t = 10\, T_2$.

پاسخ:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; K = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \omega^2 = eigenvalue\,(M^{-1}K) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T = 2\pi\omega^{-1} \;\Rightarrow\; T = \begin{bmatrix} 4.4429 & 0 \\ 0 & 2.8099 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{aligned} T_1 &= 4.4429 \sec \\ T_2 &= 2.8099 \sec \end{aligned}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

با استفاده از معادله تعادل $^{0}\ddot{U}$ در زمان t=0 محاسبه می‌شود.

حالت اول:

The Houbolt Method

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

$t = 3\Delta t\ ,\ i = 4$

$$ {}^{4\Delta t}U = \begin{Bmatrix} 0.012064 \\ 0.34177 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.035383 & 0.0012064 \\ 0.0024127 & 0.034177 \end{bmatrix} (63.326\ {}^{3\Delta t}U - 50.661\ {}^{2\Delta t}U + 12.665\ {}^{\Delta t}U) $$

$$ = \begin{Bmatrix} 0.012064 \\ 0.34177 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.035383 & 0.0012064 \\ 0.0024127 & 0.034177 \end{bmatrix} (63.326 \begin{Bmatrix} 0.1689 \\ 2.8109 \end{Bmatrix} - 50.661 \begin{Bmatrix} 0.031171 \\ 1.4545 \end{Bmatrix} + 12.665 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.39478 \end{Bmatrix}) $$

$$ \Rightarrow \boxed{ {}^{4\Delta t}U = \begin{Bmatrix} 0.4665 \\ 4.0999 \end{Bmatrix} } $$

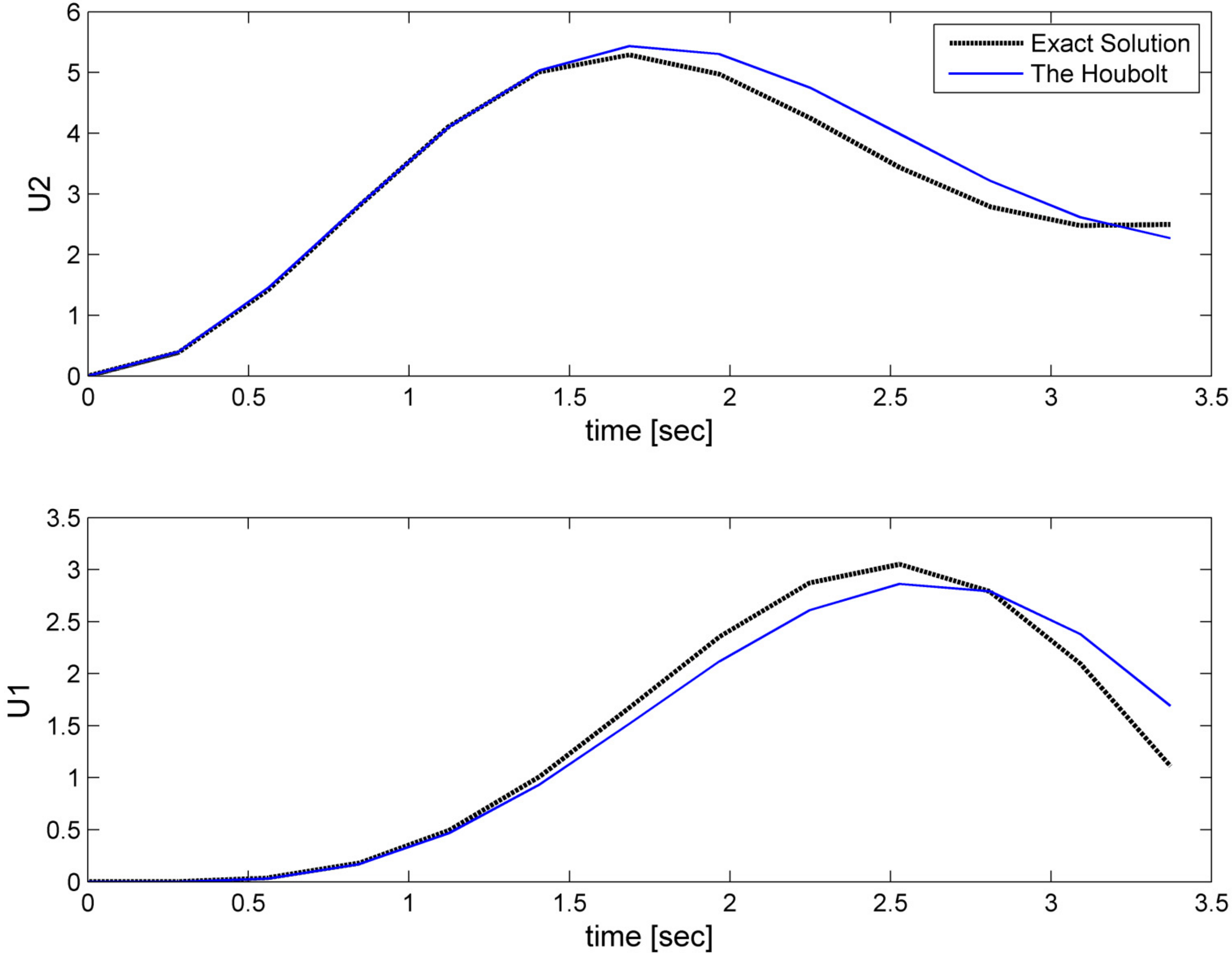
Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

time	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	0	0.39478
$2\Delta t$	0.031171	1.4545
$3\Delta t$	0.1689	2.8109
$4\Delta t$	0.4665	4.0999
$5\Delta t$	0.9322	5.0293
$6\Delta t$	1.5169	5.4352
$7\Delta t$	2.1194	5.3039
$8\Delta t$	2.6095	4.7541
$9\Delta t$	2.8618	3.9863
$10\Delta t$	2.7916	3.2167
$11\Delta t$	2.3813	2.616
$12\Delta t$	1.6905	2.2695

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method



$$for \quad \Delta t = \frac{T_2}{10} \quad \& \quad 12\Delta t$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

حالت دوم:

$$\Delta t = 10T_2 = 10(2.8099) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 28.099}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&a_0 = \frac{2}{(28)^2} = 0.002533 \quad , \quad a_1 = \frac{11}{6(28)} = 0.065245 \\
&a_2 = \frac{5}{(28)^2} = 0.0063326 \quad , \quad a_3 = \frac{3}{28} = 0.10676 \\
&a_4 = -2(0.002533) = -0.0050661 \\
&a_5 = \frac{-0.10676}{2} = -0.053382 \quad , \quad a_6 = \frac{0.002533}{2} = 0.0012665 \quad , \quad a_7 = \frac{0.10676}{9} = 0.011863
\end{aligned}}$$

$$\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + (0.002533)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (0.065245)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{K} = \begin{bmatrix} 6.0051 & -2 \\ -2 & 4.0025 \end{bmatrix} = K_{Static}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Houbolt Method

حالت دوم:

$time$	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	0	0.39478
$2\Delta t$	0.031171	1.4545
$3\Delta t$	0.99903	2.9994
$4\Delta t$	1.0019	3.0021
$5\Delta t$	0.99932	2.9992
$6\Delta t$	0.99999	3
$7\Delta t$	1	3
$8\Delta t$	1	3

from static solution

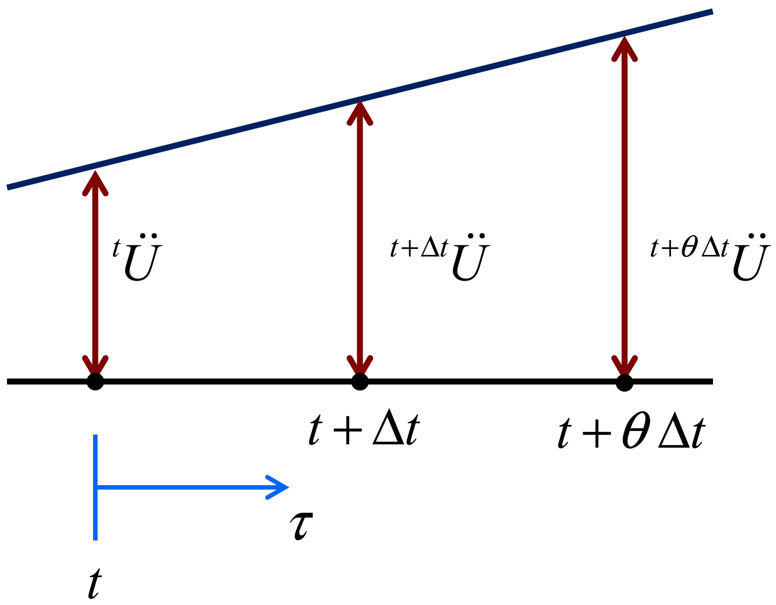
$$\Rightarrow \quad U = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

در مقایسه با حالت استاتیکی می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ جابجایی سریعا به سمت مقدار پاسخ جابجایی در حالت استاتیکی میل می‌کند.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method **روش Wilson θ**

روش Wilson θ تعمیم یافته روش شتاب خطی (Linear acceleration Method) است؛ که در آن یک تغییر خطی برای شتاب از زمان t تا $t+\Delta t$ فرض می‌گردد. در روش Wilson θ مقدار $\theta \geq 1$ در نظر گرفته می‌شود. اگر مقدار $\theta = 1$ باشد روش Wilson θ همان روش شتاب خطی خواهد بود.



Linear acceleration assumption of Wilson θ Method

τ : افزایش در زمان را نشان می‌دهد. $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$

در بازه زمانی t تا $t+\theta\Delta t$ مقدار شتاب و سرعت از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\boxed{{}^{t+\tau}\ddot{U} = {}^{t}\ddot{U} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^{t}\ddot{U}\right)} \qquad (12)$$

$$\boxed{{}^{t+\tau}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + {}^{t}\ddot{U}\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^{t}\ddot{U}\right)} \qquad (13)$$

$$\boxed{{}^{t+\tau}U = {}^{t}U + {}^{t}\dot{U}\tau + \frac{1}{2}{}^{t}\ddot{U}\tau^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t}\tau^3\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^{t}\ddot{U}\right)} \quad (14)$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

با استفاده از روابط (13) و (14) در زمان $t+\theta\Delta t$ خواهیم داشت:

$$\boxed{{}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + \frac{\theta\Delta t}{2}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} + {}^{t}\ddot{U}\right)} \qquad (15)$$

$$\boxed{{}^{t+\theta\Delta t}U = {}^{t}U + \theta\Delta t\ {}^{t}\dot{U} + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}\left({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - 2\ {}^{t}\ddot{U}\right)} \qquad (16)$$

که از آن‌ها می‌توان برای حل ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U}$ و ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U}$ بر حسب ${}^{t+\theta\Delta t}U$ استفاده کرد.

$$\boxed{{}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}\left({}^{t+\theta\Delta t}U - {}^{t}U\right) - \frac{6}{\theta\Delta t}\ {}^{t}\dot{U} - 2\ {}^{t}\ddot{U}} \qquad (17)$$

$$\boxed{{}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = \frac{3}{\theta\Delta t}\left({}^{t+\theta\Delta t}U - {}^{t}U\right) - 2\ {}^{t}\dot{U} - \frac{\theta\Delta t}{2}\ {}^{t}\ddot{U}} \qquad (18)$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

برای به دست آوردن جابجایی‌ها، سرعت‌ها و شتاب‌ها در زمان $t+\Delta t$ معادلات تعادل در رابطه (1) را در زمان $t+\theta\Delta t$ در نظر می‌گیریم. همچنین از آنجایی که تغییرات شتاب به صورت خطی فرض شده است؛ از برون‌یابی خطی برای بردار بارگذاری استفاده می‌شود.

$$\boxed{M\ {}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U}+C\ {}^{t+\theta\Delta t}\dot{U}+K\ {}^{t+\theta\Delta t}U={}^{t+\theta\Delta t}\overline{R}} \qquad (19)$$

که درآن

$$\boxed{{}^{t+\theta\Delta t}\overline{R}={}^{t}R+\theta\left({}^{t+\Delta t}R-{}^{t}R\right)} \qquad (20)$$

با جایگذاری روابط (17) و (18) در رابطه (19) می‌توان ${}^{t+\theta\Delta t}U$ را محاسبه کرد.

با جایگذاری ${}^{t+\theta\Delta t}U$ در رابطه (17)، ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U}$ به دست می‌آید که در روابط (12) تا (14) کاربرد داشته و با در نظر گرفتن $\tau=\Delta t$ مقادیر ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ ، ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ و ${}^{t+\Delta t}U$ محاسبه می‌شود.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

مراحل گام به گام روش Wilson θ

Step-by-step solution using Wilson θ integration method

A. Initial calculations;

1. Form stiffness matrix K. mass matrix M, and damping matrix C.
2. Initialize ${}^{0}U\ ,\ {}^{0}\dot{U}\ \ and\ \ {}^{0}\ddot{U}$
3. Select time step and calculate integration constants: $\theta = 1.4$ usually

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{6}{(\theta\,\Delta t)^2} \quad , \quad a_1 = \dfrac{3}{\theta\,\Delta t} \quad , \quad a_2 = 2a_1 \quad , \quad a_3 = \dfrac{\theta\,\Delta t}{2} \quad , \quad a_4 = \dfrac{a_0}{\theta} \\ a_5 = \dfrac{-a_2}{\theta} \quad , \quad a_6 = 1 - \dfrac{3}{\theta} \quad , \quad a_7 = \dfrac{\Delta t}{2} \quad , \quad a_8 = \dfrac{\Delta t^2}{6} \end{array}}$$

5. Form effective stiffness matrix

$$\boxed{\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C}$$

از آن جایی که جابجایی‌ها، سرعت‌ها و شتاب در زمان $t + \Delta t$ تنها بر حسب مقادیر یکسان در زمان t بیان می‌گردد برخلاف روش Houbolt نیاز به روند آغازین خاصی نیست.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

مراحل گام به گام روش Wilson θ

B. For each time step;

1. Calculate effective loads at time $t+\theta\Delta t$:

$$\boxed{{}^{t+\theta\Delta t}\hat{R} = {}^{t}R + \theta({}^{t+\Delta t}R - {}^{t}R) + M(a_0\ {}^{t}U + a_2\ {}^{t}\dot{U} + 2\ {}^{t}\ddot{U}) + C(a_1\ {}^{t}U + 2\ {}^{t}\dot{U} + a_3\ {}^{t}\ddot{U})}$$

2. Solve for displacements at time $t+\theta\Delta t$

$$\boxed{\hat{K}\ {}^{t+\theta\Delta t}U = {}^{t+\theta\Delta t}\hat{R}}$$

3. Calculate displacements, velocities, and accelerations at time $t+\Delta t$:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&{}^{t+\Delta t}\ddot{U} = a_4({}^{t+\theta\Delta t}U - {}^{t}U) + a_5\ {}^{t}\dot{U} + a_6\ {}^{t}\ddot{U} \\
&{}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + a_7({}^{t+\Delta t}\ddot{U} + {}^{t}\ddot{U}) \\
&{}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + \Delta t\ {}^{t}\dot{U} + a_8({}^{t+\Delta t}\ddot{U} + 2\ {}^{t}\ddot{U})
\end{aligned}
}
$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

مثال 4) معادلات تعادل یک سیستم دارای دو درجه آزادی به صورت زیر به دست آمده است

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

فرض $\begin{matrix} {}^0U = 0 \\ {}^0\dot{U} = 0 \end{matrix}$, $\theta = 1.4$

با استفاده از روش Wilson θ مطلوب است تعیین پاسخ سیستم در دو حالت الف) $\Delta t = \frac{T_2}{10}$ و ب) $\Delta t = 10\,T_2$.

پاسخ:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad K = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = eigenvalue\,(M^{-1}K) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T = 2\pi\omega^{-1} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} 4.4429 & 0 \\ 0 & 2.8099 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} T_1 = 4.4429 \text{ sec} \\ T_2 = 2.8099 \text{ sec} \end{matrix}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

با استفاده از معادله تعادل ${}^{0}\ddot{U}$ در زمان t=0 محاسبه می‌شود.

حالت اول:

The Wilson θ Method

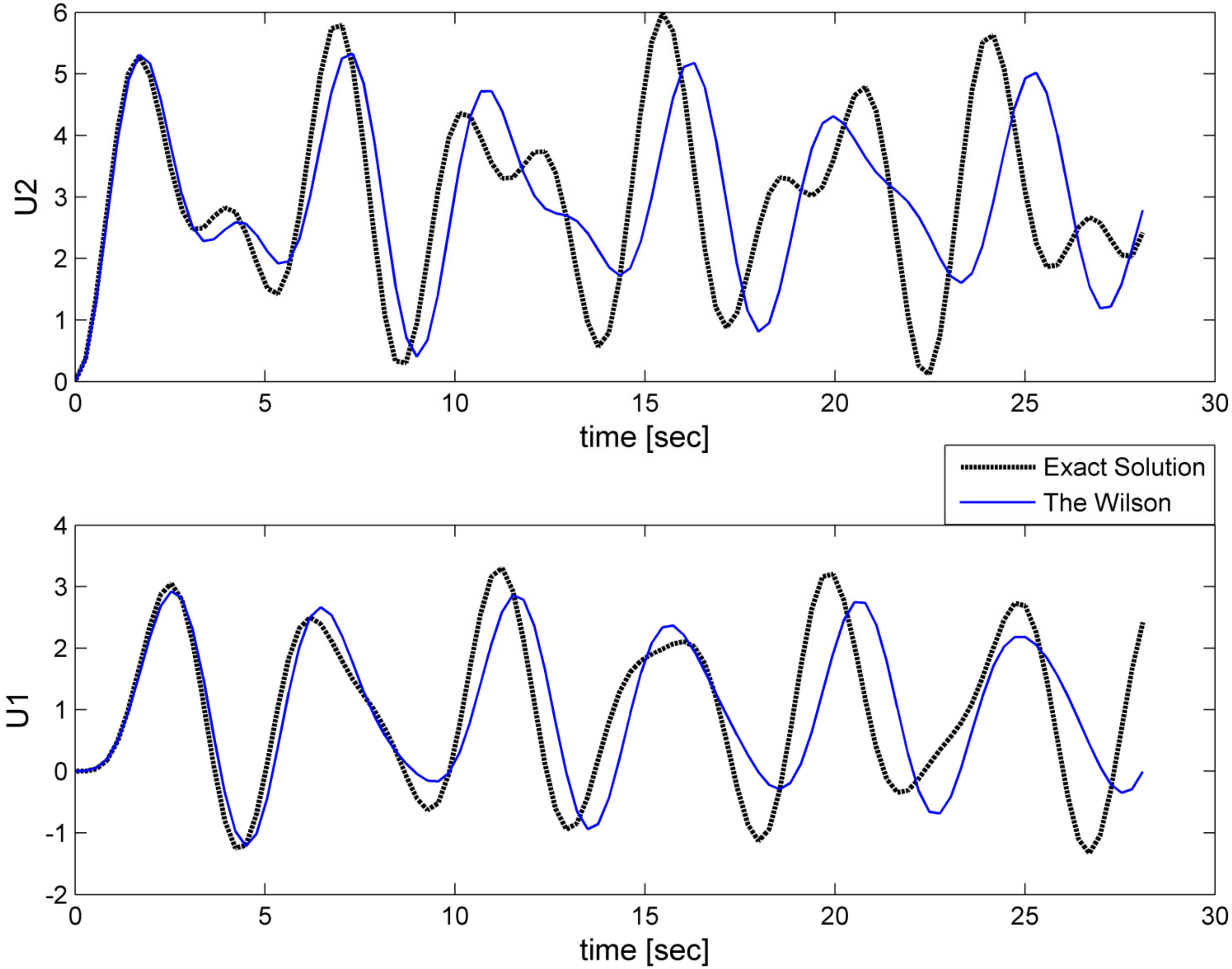
Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

time	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	0.0061264	0.3687
$2\Delta t$	0.053188	1.3474
$3\Delta t$	0.19838	2.653
$4\Delta t$	0.49504	3.9391
$5\Delta t$	0.9609	4.8911
$6\Delta t$	1.5552	5.3121
$7\Delta t$	2.1759	5.1694
$8\Delta t$	2.6803	4.5876
$9\Delta t$	2.9243	3.7945
$10\Delta t$	2.8073	3.0387
$11\Delta t$	2.309	2.5092
$12\Delta t$	1.505	2.282

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

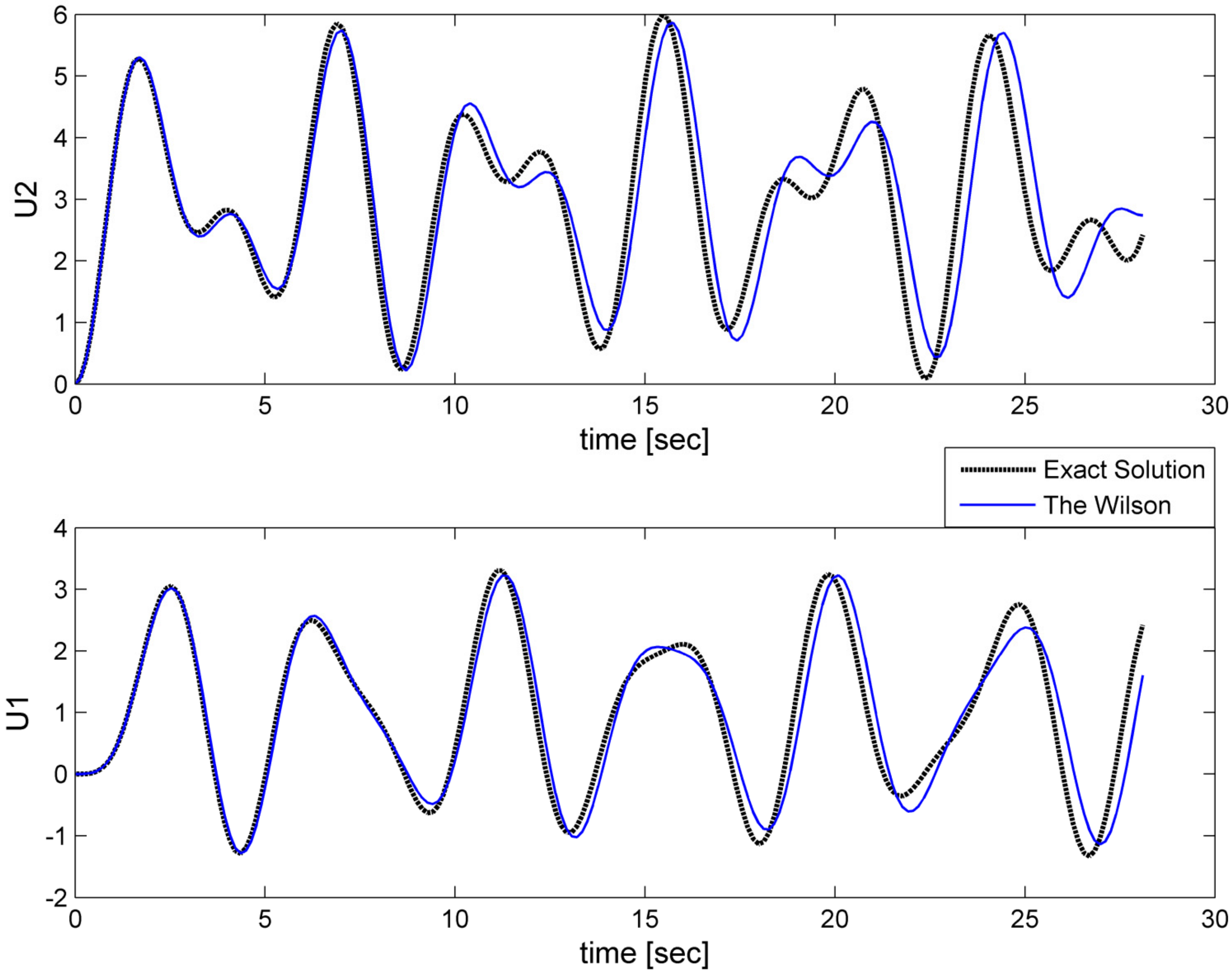
The Wilson θ Method



for $\Delta t = \dfrac{T_2}{10}$ & $100\Delta t$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method



$$for \quad \Delta t = \frac{T_2}{20} \quad \& \quad 200\Delta t$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

حالت دوم:

$$\Delta t = 10T_2 = 10(2.8099) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 28.099}$$

$$a_0 = \frac{6}{(1.4\times 28)^2} = 0.0038771 \quad , \quad a_1 = \frac{3}{1.4\times 28} = 0.07626 \quad , \quad a_2 = 2(0.07626) = 0.15252$$

$$a_3 = \frac{1.4\times 28}{2} = 19.669 \quad , \quad a_4 = \frac{0.0038771}{1.4} = 0.0027693$$

$$a_5 = \frac{-0.15252}{1.4} = -0.10894 \quad , \quad a_6 = 1 - \frac{3}{1.4} = -1.1429 \quad , \quad a_7 = \frac{28}{2} = 14 \quad , \quad a_8 = \frac{(28)^2}{6} = 131.59$$

$$\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + (0.0038771)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (0.07626)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{K} = \begin{bmatrix} 6.0078 & -2 \\ -2 & 4.0039 \end{bmatrix} = K_{Static}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Wilson θ Method

time	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	1.0903	1131.2
$2\Delta t$	2.8199	-839.98
$3\Delta t$	-2.6131	678.7
$4\Delta t$	5.8555	-522.68
$5\Delta t$	-4.4688	409.35
$6\Delta t$	6.5916	-309.96
$7\Delta t$	-4.3824	243.66
$8\Delta t$	5.9749	-181.93
$9\Delta t$	-3.4672	145.06
$10\Delta t$	4.9264	-106.12
$11\Delta t$	-2.3947	86.811
$12\Delta t$	3.8971	-61.374

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

Newmark روش

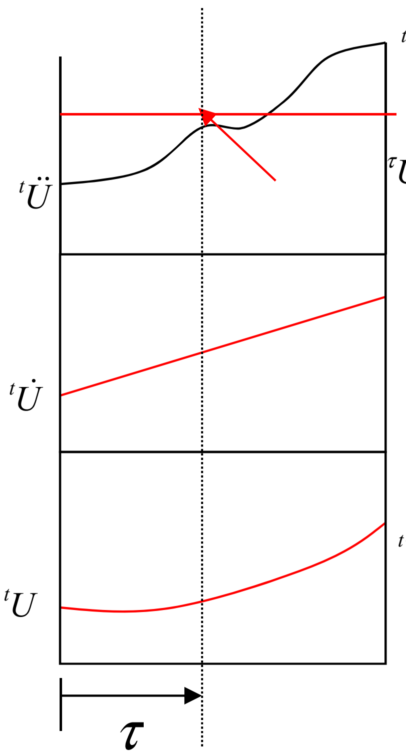
روش Newmark تعمیم یافته روش شتاب خطی (Linear acceleration Method) است؛ که در آن یک تغییر خطی برای شتاب از زمان t تا $t+\Delta t$ فرض می‌گردد.

Given $\quad M\ {}^{t}\ddot{U} + C\ {}^{t}\dot{U} + K\ {}^{t}U = {}^{t}R$

Seek $\quad M\ {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + C\ {}^{t+\Delta t}\dot{U} + K\ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}R$

Too many unknowns ! Need assumptions.

Average acceleration $\quad \delta = \frac{1}{2}\ , \alpha = \frac{1}{4}$

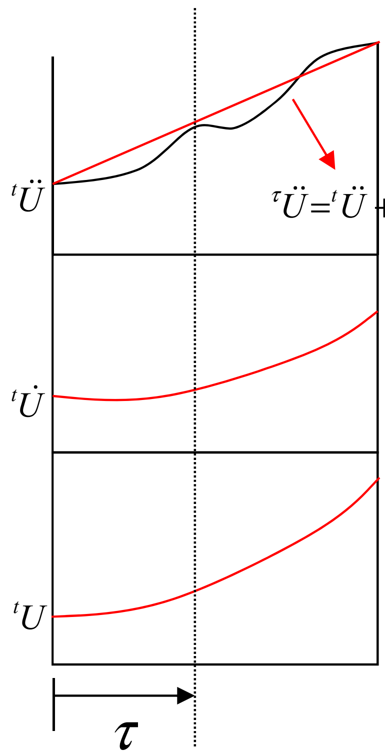


$${}^{\tau}\ddot{U} = \frac{({}^{t}\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U})}{2}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + \frac{\Delta t}{2}({}^{t}\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U})$$

$${}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + {}^{t}\dot{U}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}({}^{t}\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U})$$

Linear acceleration $\quad \delta = \frac{1}{2}\ , \alpha = \frac{1}{6}$



$${}^{\tau}\ddot{U} = {}^{t}\ddot{U} + \frac{\tau({}^{t+\Delta t}\ddot{U} - {}^{t}\ddot{U})}{\Delta t}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + \frac{\Delta t}{2}({}^{t}\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U})$$

$${}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + {}^{t}\dot{U}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{3}{}^{t}\ddot{U} + \frac{\Delta t^2}{6}{}^{t+\Delta t}\ddot{U}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method **روش Newmark**

فرض‌های زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + [(1-\delta)\,{}^{t}\ddot{U} + \delta\,{}^{t+\Delta t}\ddot{U}]\Delta t} \qquad (21)$$

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + {}^{t}\dot{U}\Delta t + [(\tfrac{1}{2}-\alpha)\,{}^{t}\ddot{U} + \alpha\,{}^{t+\Delta t}\ddot{U}]\Delta t^{2}} \qquad (22)$$

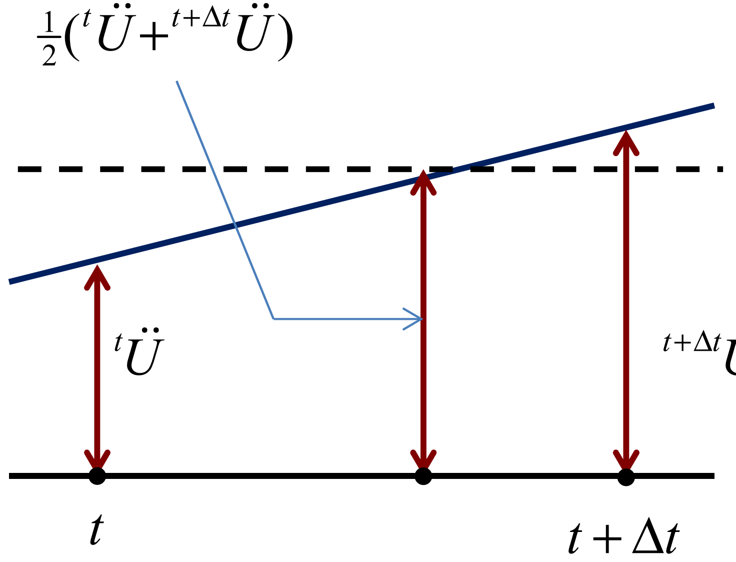
α و δ پارامترهایی هستند که به منظور دست یافتن به دقت انتگرال‌گیری و پایداری آن تعیین می‌شوند.

اگر $\alpha = \frac{1}{6}$ و $\delta = \frac{1}{2}$ باشد روابط (21) و (22) متناظر با روش شتاب خطی می‌باشند. که در روش Wilson θ به ازای $\theta = 1$ به دست آمد. روش Newmark در اصل یک شیوه پایدار غیرمشروط از روش شتاب میانگین ثابت (Constant-Average-Acceleration-Method) را پیشنهاد کرد؛ که به قاعده ذوزنقه‌ای (Trapezoidal Rule) معروف است.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

اگر $\alpha = \frac{1}{4}$ و $\delta = \frac{1}{2}$ باشد روابط (21) و (22) متناظر با روش شتاب میانگین می‌باشند



Newmark's Constant–Average–Acceleration Scheme

علاوه بر روابط (21) و (22) برای حل جابجایی‌ها، سرعت‌ها و شتاب‌ها، معادلات تعادل در رابطه (1) در زمان $t+\Delta t$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\boxed{M\ {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + C\ {}^{t+\Delta t}\dot{U} + K\ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}R} \qquad (23)$$

${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ از حل رابطه (22) بر حسب ${}^{t+\Delta t}U$ به دست می‌آید که با جایگذاری آن در رابطه (21) معادلاتی برای عبارت‌های ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ و ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ بر حسب تنها جابجایی‌های نامعلوم ${}^{t+\Delta t}U$ حاصل می‌گردد. دو رابطه به دست آمده برای ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ و ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ در رابطه (23) جایگذاری شده و با حل آن ${}^{t+\Delta t}U$ محاسبه می‌شود. سپس با جایگذاری ${}^{t+\Delta t}U$ به دست آمده در روابط (21) و (22) مقادیر ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ و ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ مشخص می‌گردد.

The Newmark Method

Newmark's Method – Stability

To keep the algorithm stable

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\delta - 2\alpha}}$$

Average acceleration $\delta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{4}$

→ Unconditional stable

Linear acceleration $\delta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{6}$

→ Conditional stable $\frac{\Delta t}{T} < 0.55$

Usually for accuracy $\Delta t < 0.1T$ or less!

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

Step–by–step solution using Newmark integration method

A. Initial calculations;

1. Form stiffness matrix K. mass matrix M, and damping matrix C.
2. Initialize ${}^{0}U$, ${}^{0}\dot{U}$ *and* ${}^{0}\ddot{U}$
3. Select time step Δt and parameters α and δ and calculate integration constants;

$$\boxed{\delta \geq 0.5 \quad , \quad \alpha \geq 0.25(0.5+\delta)^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad , \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad , \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right) \quad , \quad a_6 = \Delta t(1-\delta) \quad , \quad a_7 = \delta \Delta t$$

5. Form effective stiffness matrix

$$\boxed{\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

B. For each time step;

1. Calculate effective loads at time $t+\Delta t$:

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\hat{R} = {}^{t+\Delta t}R + M(a_0\ {}^{t}U + a_2\ {}^{t}\dot{U} + a_3\ {}^{t}\ddot{U}) + C(a_1\ {}^{t}U + a_4\ {}^{t}\dot{U} + a_5\ {}^{t}\ddot{U})}$$

2. Solve for displacements at time $t+\Delta t$

$$\boxed{\hat{K}\ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}\hat{R}}$$

3. Calculate accelerations and velocities at time $t+\Delta t$:

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{U} &= a_0\,({}^{t+\Delta t}U - {}^{t}U) - a_2\ {}^{t}\dot{U} - a_3\ {}^{t}\ddot{U} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{U} &= {}^{t}\dot{U} + a_6\ {}^{t}\ddot{U} + a_7\ {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \end{aligned}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

مثال 5) معادلات تعادل یک سیستم دارای دو درجه آزادی به صورت زیر به دست آمده است

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

فرض $\quad {}^0U = 0 \quad {}^0\dot{U} = 0$

با استفاده از روش Newmark مطلوب است تعیین پاسخ سیستم در دو حالت الف) $\Delta t = \dfrac{T_2}{10}$ و ب) $\Delta t = 10\,T_2$.

پاسخ:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; K = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega^2 = eigenvalue\,(M^{-1}K) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T = 2\pi\omega^{-1} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 4.4429 & 0 \\ 0 & 2.8099 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} T_1 = 4.4429 \text{ sec} \\ T_2 = 2.8099 \text{ sec} \end{matrix}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

با استفاده از معادله تعادل $^{0}\ddot{U}$ در زمان t=0 محاسبه می‌شود.

حالت اول:

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

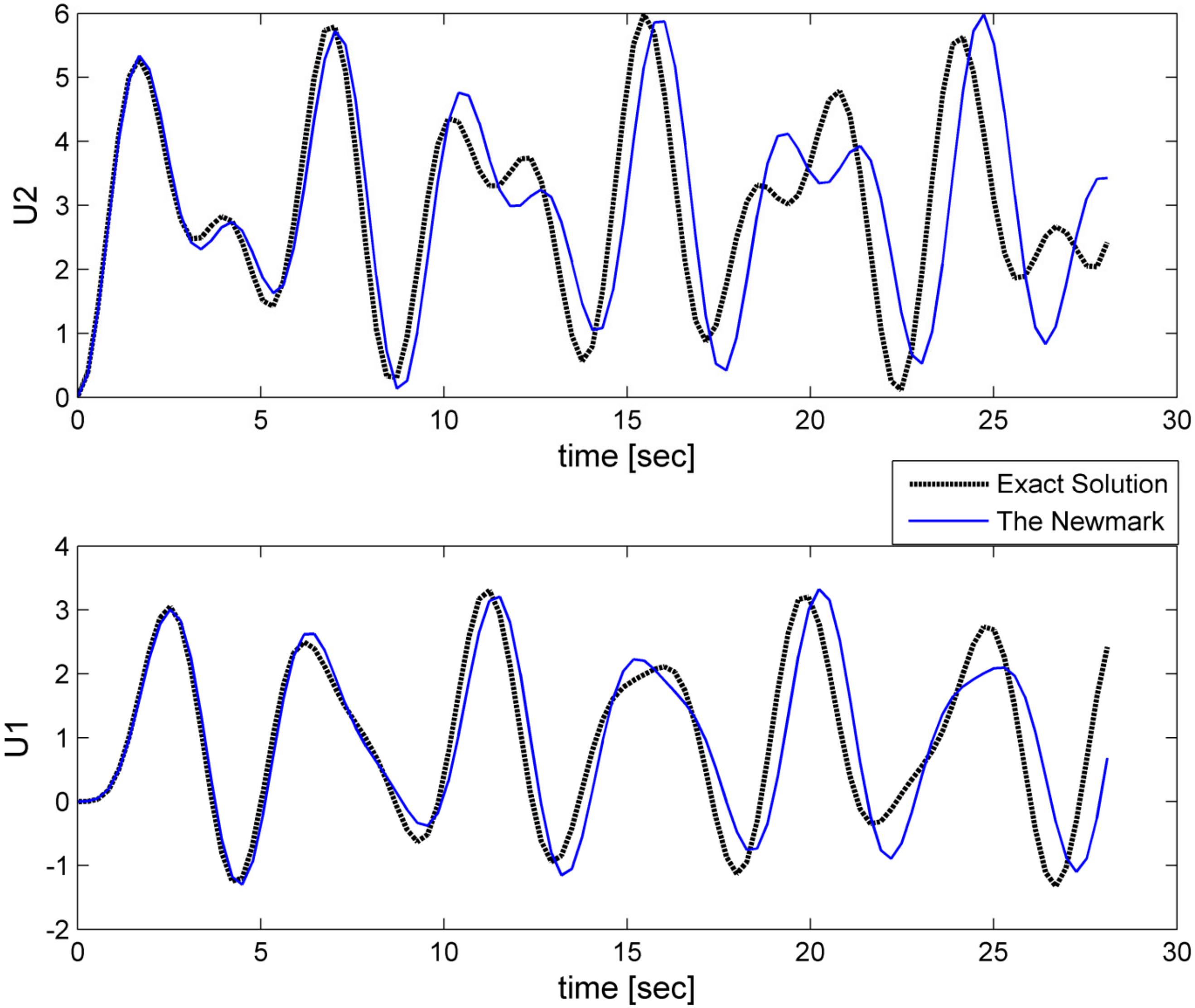
Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

time	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	0.0068233	0.36614
$2\Delta t$	0.051098	1.3593
$3\Delta t$	0.1917	2.6973
$4\Delta t$	0.49005	4.0114
$5\Delta t$	0.97104	4.9615
$6\Delta t$	1.5941	5.3384
$7\Delta t$	2.2474	5.1189
$8\Delta t$	2.7715	4.4569
$9\Delta t$	3.0047	3.6172
$10\Delta t$	2.8375	2.8755
$11\Delta t$	2.2555	2.424
$12\Delta t$	1.3561	2.3133
	0.33052	2.4511
	-0.58501	2.6556

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

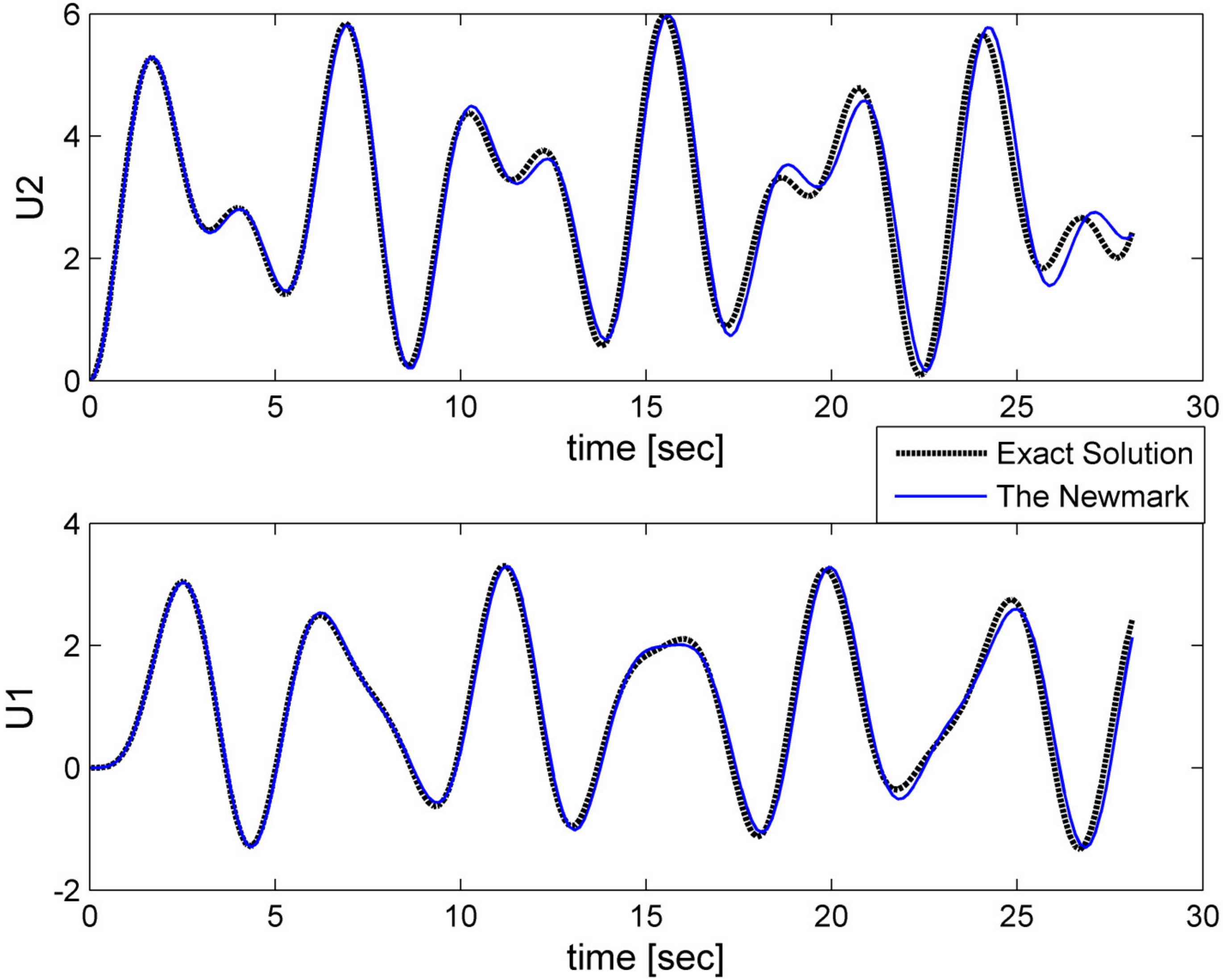
The Newmark Method



$$for \quad \Delta t = \frac{T_2}{10} \quad \& \quad 100\Delta t$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method



$$for \quad \Delta t = \frac{T_2}{20} \quad \& \quad 200\Delta t$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

حالت دوم:

$$\Delta t = 10T_2 = 10(2.8099) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 28.099}$$

$$a_0 = \frac{1}{(0.25)(28)^2} = 0.0050661 \quad , \quad a_1 = \frac{0.5}{(0.25)(28)} = 0.071176 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{(0.25)(28)} = 0.14235$$

$$a_3 = \frac{1}{2(0.25)} - 1 = 1 \quad , \quad a_4 = \frac{0.5}{(0.25)} - 1 = 1 \quad , \quad a_5 = \frac{28}{2}\left(\frac{0.5}{0.25} - 2\right) = 0$$

$$a_6 = (28)(1 - 0.5) = 14.05 \quad , \quad a_7 = (0.5)(28) = 14.05$$

$$\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + (0.0050661)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (0.071176)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{K} = \begin{bmatrix} 6.0101 & -2 \\ -2 & 4.0051 \end{bmatrix} = K_{Static}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

The Newmark Method

time	${}^{t}U$	
	${}^{t}U_1$	${}^{t}U_2$
0	0	0
Δt	1.9929	5.9889
$2\Delta t$	0.02821	0.044389
$3\Delta t$	1.9368	5.9005
$4\Delta t$	0.11157	0.17603
$5\Delta t$	1.8271	5.7267
$6\Delta t$	0.24634	0.39038
$7\Delta t$	1.6688	5.4736
$8\Delta t$	0.42643	0.68009
$9\Delta t$	1.469	5.1498
$10\Delta t$	0.64371	1.0352
$11\Delta t$	1.2367	4.7664
$12\Delta t$	0.8883	1.4437

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

EOM of nonlinear system

$$m\,\ddot{u}(t) + c\,\dot{u}(t) + (fs) = p(t)$$

$$m\,\ddot{u}_i + c\,\dot{u}_i + (fs)_i = p_i$$

$$m\,\ddot{u}_{i+1} + c\,\dot{u}_{i+1} + (fs)_{i+1} = p_{i+1}$$

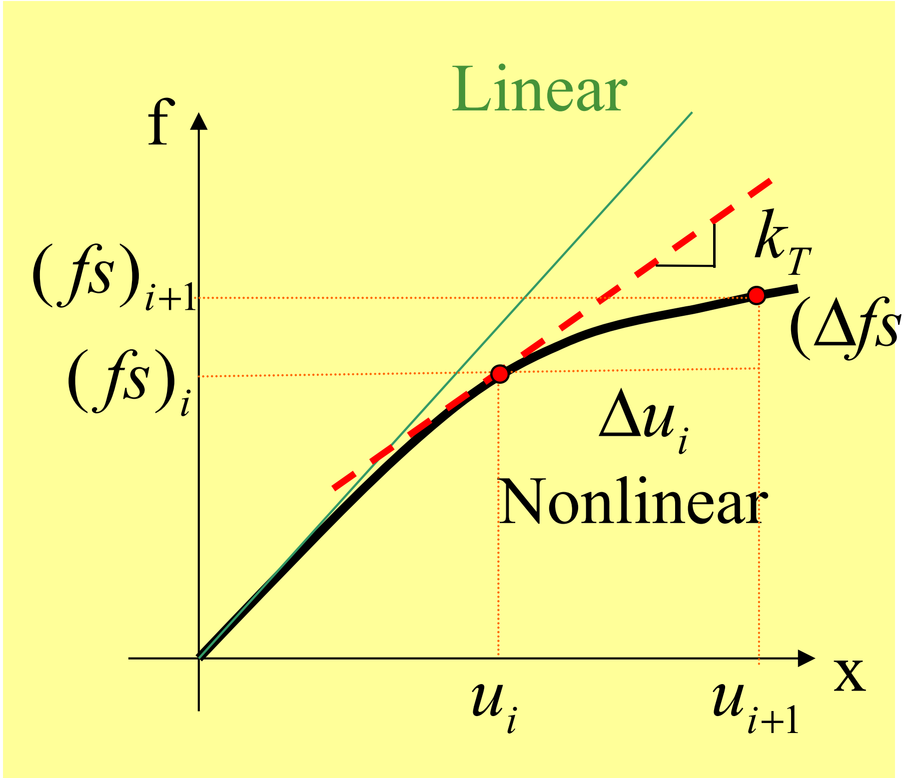
$$m\,\Delta\ddot{u}_i + c\,\Delta\dot{u}_i + (\Delta fs)_i = \Delta p_i$$

$$(\Delta fs)_i = (fs)_{i+1} - (fs)_i$$

$$= \frac{(\Delta fs)_i}{\Delta u_i}\Delta u_i \cong (k_i)_T\,\Delta u_i$$

Tangential stiffness

function of displacement



Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

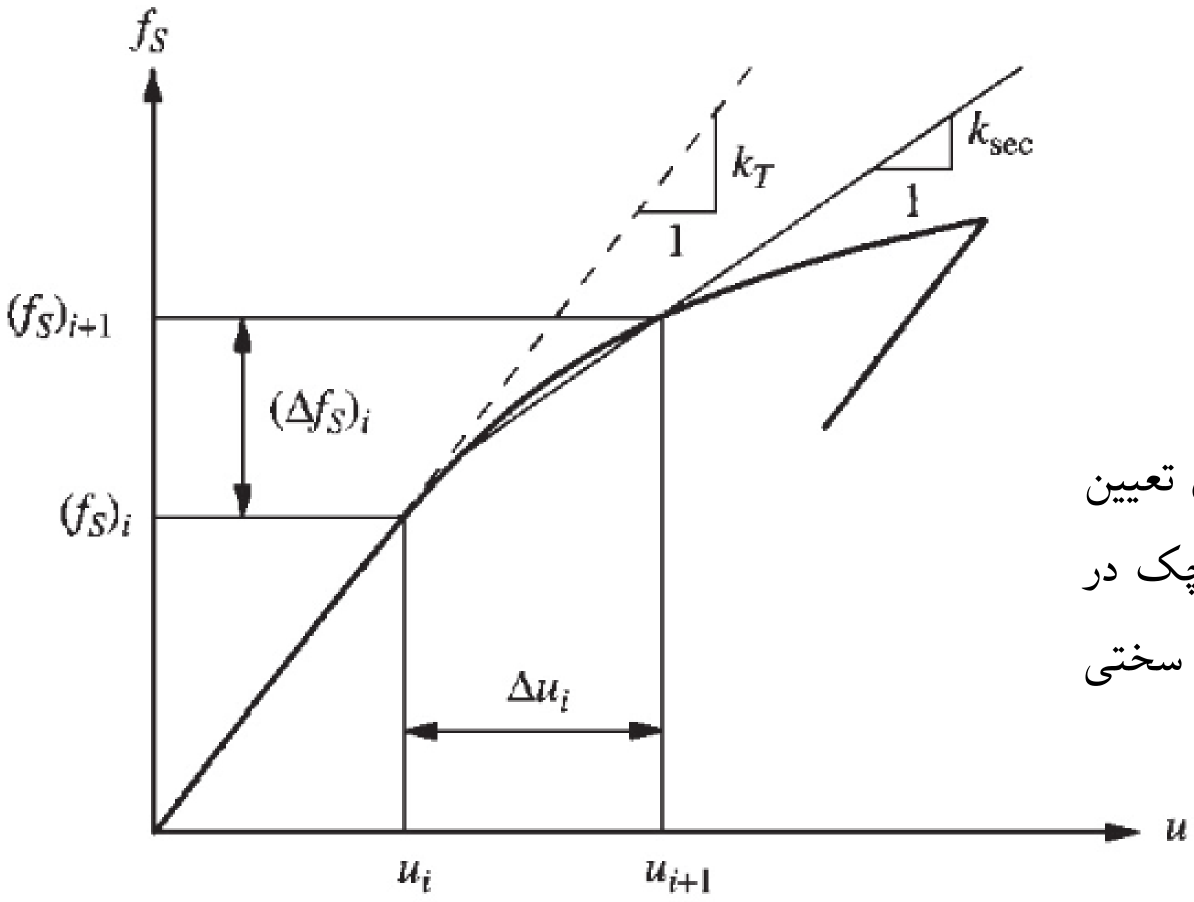
Analysis of Nonlinear Response: Newmark’s Method

معادله تعادل نمویی سیستم غیرخطی به صورت زیر می‌باشد.

$$\boxed{m\,\Delta\ddot{u}_i + c\,\Delta\dot{u}_i + (\Delta fs)_i = \Delta p_i} \quad (b1)$$

که در آن نیروی مقاوم نمویی عبارت‌اند از

$$\boxed{(\Delta fs)_i = (k_i)_{\sec}\,\Delta u_i} \qquad (b2)$$



با توجه به شکل سختی سکانتی $(k_i)_{\sec}$ را نمی‌توان تعیین کرد زیرا u_{i+1} معلوم نیست. اگر گام زمانی را کوچک در نظر بگیریم می‌توان سختی مماسی $(k_i)_T$را جایگزین سختی سکانتی کرد.

$$\boxed{(\Delta fs)_i \approx (k_i)_T\,\Delta u_i} \qquad (b3)$$

با حذف اندیس T و جایگذاری رابطه (b3) در (b1) خواهیم داشت

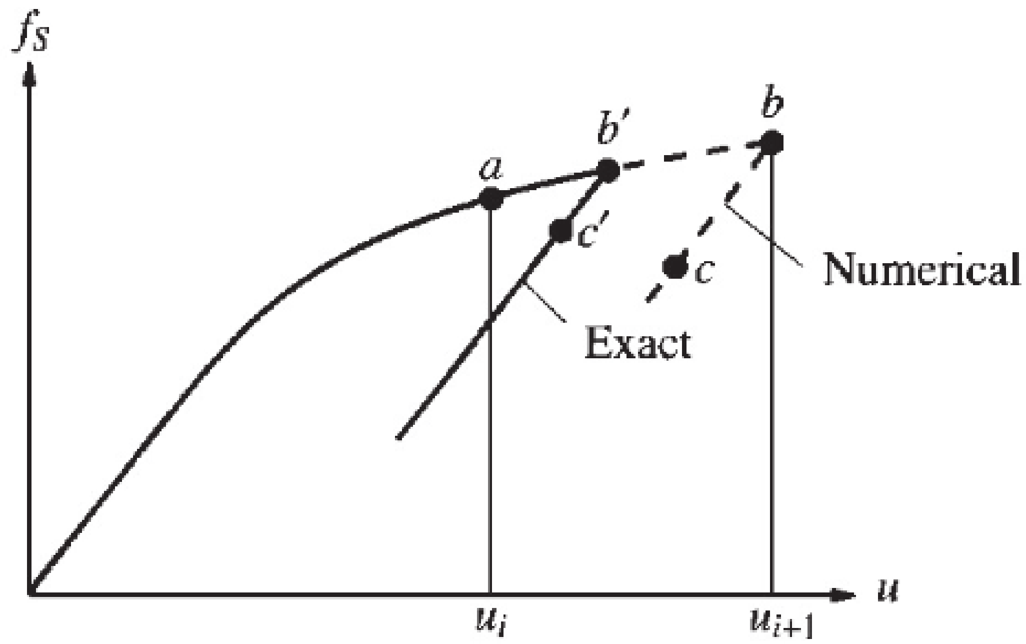
$$\boxed{m\,\Delta\ddot{u}_i + c\,\Delta\dot{u}_i + k_i\Delta u_i = \Delta p_i} \quad (b4)$$

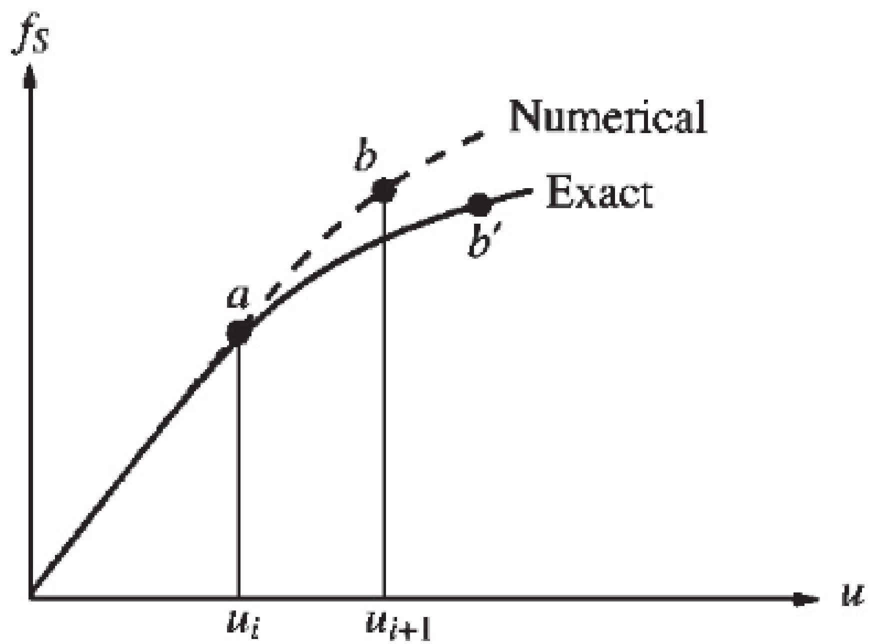
Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark’s Method

رابطه (b4) را می‌توان با روش Newmark حل کرد. اما اگر در سیستم‌های غیرخطی از یک گام زمانی ثابت استفاده شود در روند آنالیز خطاهای قابل توجهی به دو دلیل زیر به وجود می‌آید:

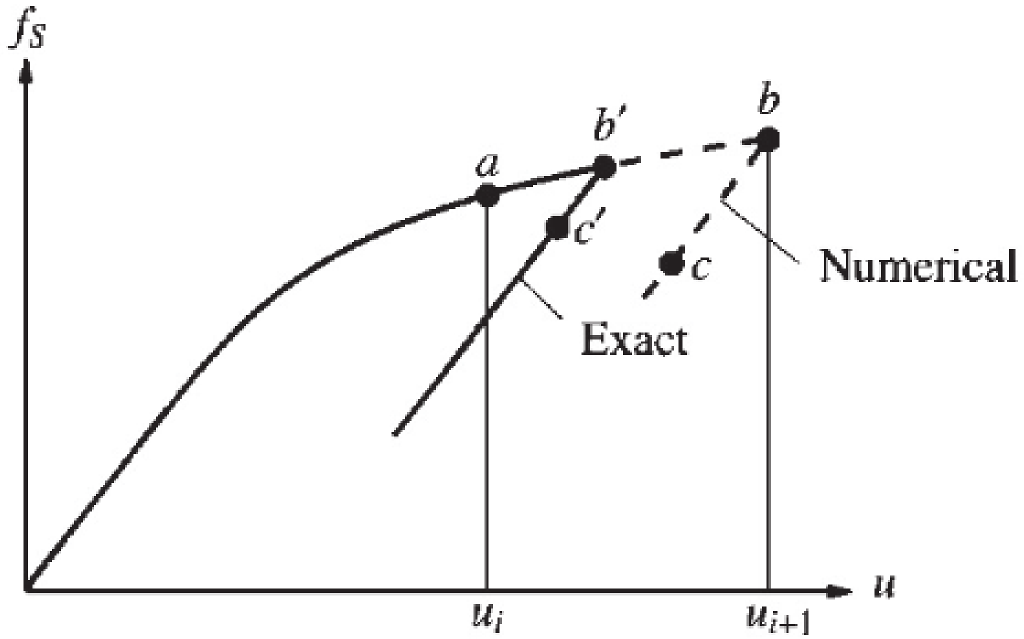
1. سختی مماسی به جای سختی سکانتی استفاده شده است. (در گام‌های زمانی بعدی خطا به صورت تجمعی افزایش می‌یابد)
2. استفاده از گام زمانی ثابت، پیدا کردن نقطه برگشت در منحنی نیرو-جابجایی را به تعویق می‌اندازد.





Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method



$@$ point $a \begin{cases} u_i \\ \dot{u}_i > 0 \end{cases}$ افزایش جابجایی داریم.

$@$ point $b \begin{cases} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{cases}$

اگر در نقطه b سرعت منفی باشد ($\dot{u}_{i+1} < 0$) پس در نتیجه در طول گام زمانی نقطه‌ای مانند b' وجود دارد که در آنجا سرعت به صفر رسیده است و جابجایی شروع به کم شدن کرده است. اگر در آنالیز عددی قادر به شناسایی نقطه b' نباشیم ، آنالیز ادامه پیدا کرده و چون در نقطه b سرعت منفی است شیب خط مماس براساس منحنی برگشت نیرو جابجایی تعیین شده و در گام زمانی بعدی به جای آن که به نقطه c' برسیم به نقطه c خواهیم رسید.

خطاهای اشاره شده با بکارگیری یک روند تکرار شونده (Iterative procedure) در طول گام زمانی کاهش پیدا خواهد کرد. بدین گونه که در طول هر گام زمانی تکرارهایی در طول گام‌های زمانی کوچکتر صورت می‌گیرد.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

برای اصلاح روش Newmark رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\boxed{\hat{k}_i \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i} \qquad (b5)$$

که در آن

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{k}_i &= k_i + a_0 m + a_1 c \\ \Delta \hat{p}_i &= \Delta p_i + \left[a_2\, m + (a_4 + 1)\, c\right] \dot{u}_i + \left[(a_3 + 1)\, m + a_5\, c\right] \ddot{u}_i \end{aligned}} \qquad (b6)$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad , \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad , \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad , \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right) \end{aligned}}$$

جهت ساده سازی در نوشتن روابط اندیس i را حذف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{k}_i &= \hat{k}_T \\ \Delta u_i &= \Delta u \\ \Delta \hat{p}_i &= \Delta \hat{p} \end{aligned}$$

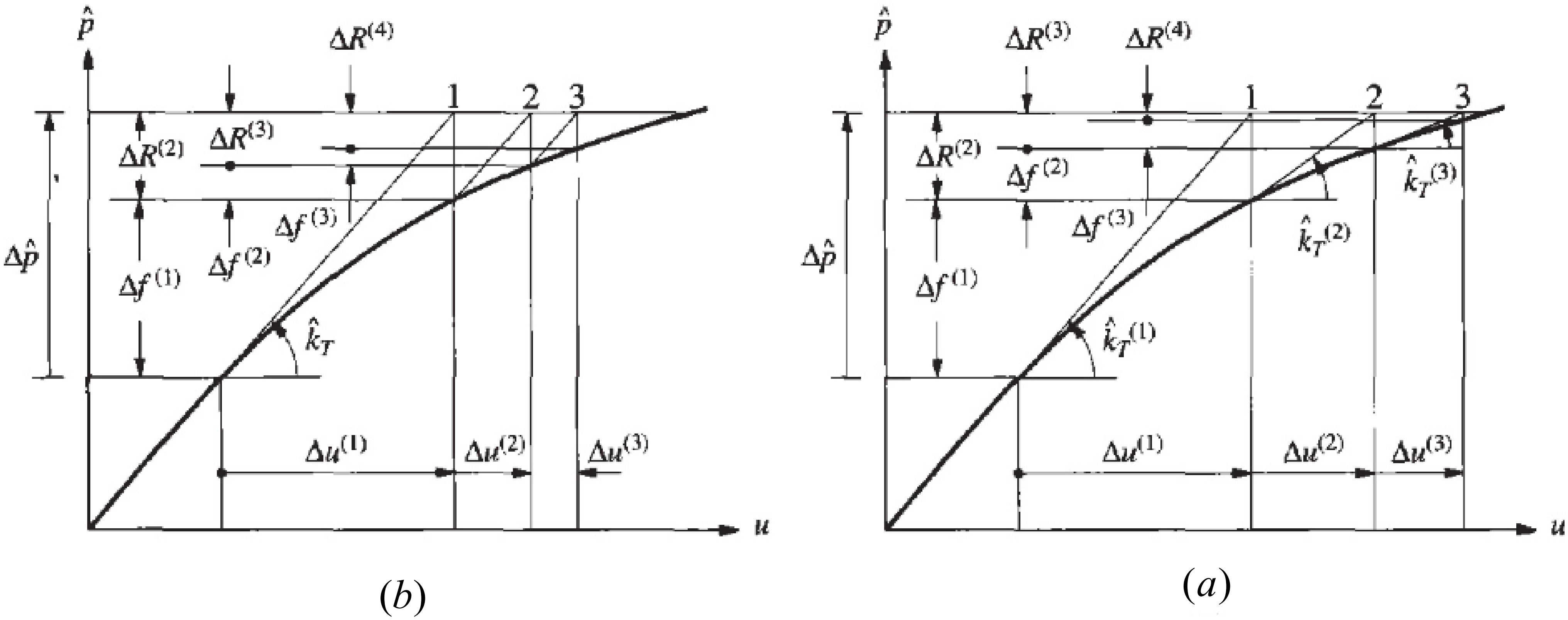
Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

در نتیجه

$$\boxed{\hat{k}_T \; \Delta u = \Delta \hat{p}} \qquad (b7)$$

$$\boxed{\hat{k}_T = k_T + a_0 m + a_1 c} \qquad (b8)$$



Iteration within a time step for nonlinear systems: (a) Newton–Raphson iteration; (b) modified Newton–Raphson iteration.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

Modified Newton–Raphson Iteration (Table1)

1) Initialize data.

$$u_{i+1}^{(0)} = u_i \qquad f_s^{(0)} = (fs)_i \qquad \Delta R^{(1)} = \Delta \hat{p}_i \qquad \hat{k}_T = \hat{k}_i$$

2) Calculations for each iteration, j = 1, 2, 3, ...

2.1 $\quad Solve: \quad \hat{k}_T \, \Delta u^{(j)} = \Delta R^{(j)} \quad \Rightarrow \quad \Delta u^{(j)} = (\hat{k}_T)^{-1} \Delta R^{(j)}$

2.2 $\quad u_{i+1}^{(j)} = u_{i+1}^{(j-1)} + \Delta u^{(j)}$

2.3 $\quad \Delta f^{(j)} = fs^{(j)} - fs^{(j-1)} + (\hat{k}_T - k_T)\Delta u^{(j)}$

2.4 $\quad \Delta R^{(j+1)} = \Delta R^{(j)} - \Delta f^{(j)}$

3) Repetition for next iteration. Replace j by j + 1 and repeat calculation steps 2.1 to 2.4.

The iterative process is terminated after ℓ iterations

$$\frac{\Delta u^{(\ell)}}{\sum_{j=1}^{\ell} \Delta u^{(j)}} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \Delta u_i = \sum_{j=1}^{\ell} \Delta u^{(j)}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

Newmark's Method: Nonlinear Systems

Special cases

(1) Average acceleration method $\delta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{4}$

(2) Linear acceleration method $\delta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{6}$

1) Initial calculations.

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - (fs)_0}{m}$

1.2 *Select* Δt.

1.3 $a_6 = a_2\, m + (a_4 + 1)\, c$ & $a_7 = (a_3 + 1)\, m + \dfrac{a_5}{\Delta t}\, c$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

Newmark's Method: Nonlinear Systems

2) Calculations for each time step, i

2.1 $\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + a_6\,\dot{u}_i + a_7\,\ddot{u}_i$

2.2 Determin the tangent stiffness k_i.

2.3 $\hat{k}_i = k_i + a_0 m + a_1 c$

2.4 Solve *for* Δu_i from $\hat{k}_i$ and $\Delta\hat{p}_i$ using iterative procedure of Table1.

2.5 $\Delta\dot{u}_i = a_1 \Delta u_i - (a_4 + 1)\,\dot{u}_i - a_5\,\ddot{u}_i$

2.6 $\Delta\ddot{u}_i = a_0 \Delta u_i - a_2\,\dot{u}_i - (a_3 + 1)\,\ddot{u}_i$

2.7 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad , \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i \quad , \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$

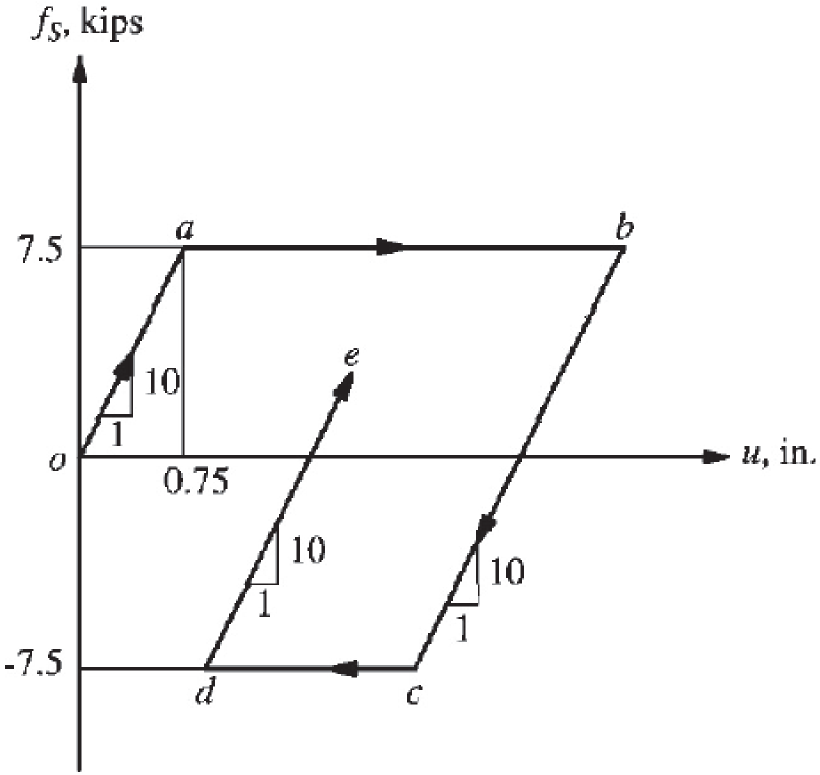
3) Repetition for the next time step. Replace i by i + 1 and implement steps 2.1 to 2.7 for the next time step.

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

مثال 6) مشخصات یک سیستم SDOF در زیر آمده است. رابطه نیرو – تغییرشکل سیستم الاستوپلاستیک مطابق شکل رو به رو می‌باشد. پاسخ سیستم را تحت اثر نیرویی برابر با نصف پالس چرخه‌ای سینوسی به دو روش الف) شتاب میانگین بدون تکرار و ب) Modified Newton Raphson Iteration با گام زمانی

$\Delta t = 0.1\,(\text{sec})$.



$m = 0.2533\ (kip - \sec^2 / in.)$

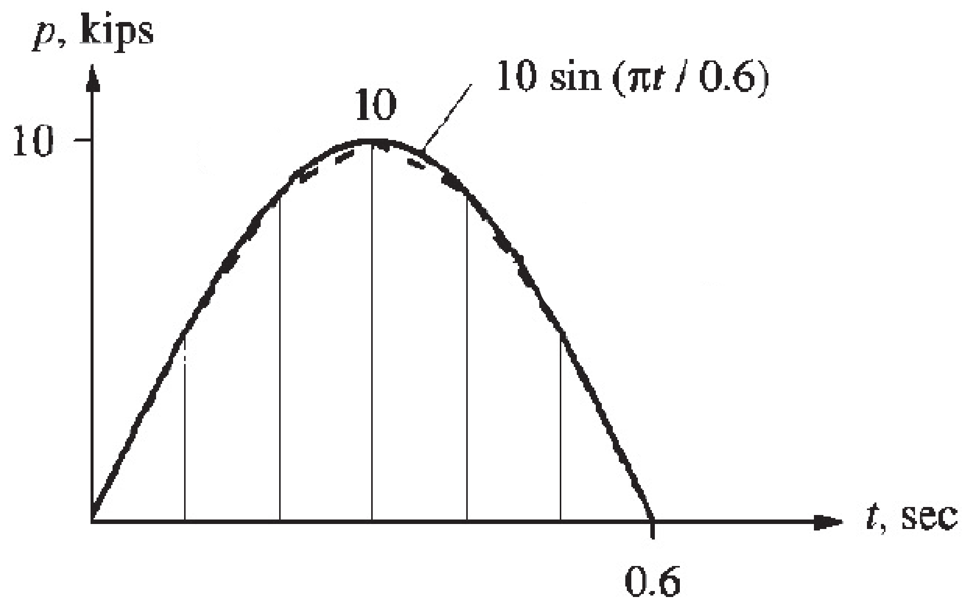
$k = 10\ (kips / in.)$

$T_n = 1\ (\sec)$

$\omega_n = 6.283\ (rad / \sec)$

$\xi = 0.05$

$c = 2\xi\omega_n m = 0.1592$



Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

1) Initial calculations. الف) شتاب میانگین بدون تکرار

$$a_0 = \frac{1}{(0.25)(0.1)^2} = 400 \quad , \quad a_1 = \frac{0.5}{(0.25)(0.1)} = 20 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{(0.25)(0.1)} = 40$$

$$a_3 = \frac{1}{2(0.25)} - 1 = 1 \quad , \quad a_4 = \frac{0.5}{(0.25)} - 1 = 1 \quad , \quad a_5 = \frac{(0.1)}{2}\left(\frac{0.5}{(0.25)} - 2\right) = 0$$

$$1.1 \quad \ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - k_0 u_0}{m} = \frac{0 - 0.1592(0) - (10)(0)}{0.2533} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u}_0 = 0$$

$$1.2 \quad \Delta t = 0.1$$

$$1.3 \quad a_6 = (20)\,(0.2533) + (1+1)\,(0.1592) = 10.45$$

$$a_7 = (1+1)\,(0.2533) + \frac{0}{0.1}(0.1592) = 0.5066$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

2) Calculations for each time step, i

الف) شتاب میانگین بدون تکرار

2.1 $\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + a_6\,\dot{u}_i + a_7\,\ddot{u}_i \quad \Rightarrow \quad \Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + 10.45\,\dot{u}_i + 0.5066\,\ddot{u}_i$

2.2 $k_i = k \;\; for\ branches\ oa, bc\ and\ de; \quad and\ k_i = 0 \;\; for\ ab\ and\ cd.$

2.3 $\hat{k}_i = k_i + a_0 m + a_1 c = k_i + 400(0.2533) + 20(0.1592) \quad \Rightarrow \quad \hat{k}_i = k_i + 104.5$

2.4 $\Delta u_i = \dfrac{\Delta\hat{p}_i}{\Delta\hat{k}_i}$

2.5 $\Delta\dot{u}_i = a_1\Delta u_i - (a_4+1)\,\dot{u}_i - a_5\,\ddot{u}_i = 20\Delta u_i - (1+1)\,\dot{u}_i - (0)\,\ddot{u}_i \quad \Rightarrow \quad \Delta\dot{u}_i = 20\Delta u_i - 2\,\dot{u}_i$

2.6 $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad , \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i$

2.7 $(fs)_{i+1} = (fs)_i + k_i \Delta u_i$

2.8 $\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{p_{i+1} - c\,\dot{u}_{i+1} - (fs)_{i+1}}{m}$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

الف) شتاب میانگین بدون تکرار

- Average acceleration without iteration using $\Delta t = 0.1\ \text{sec}$

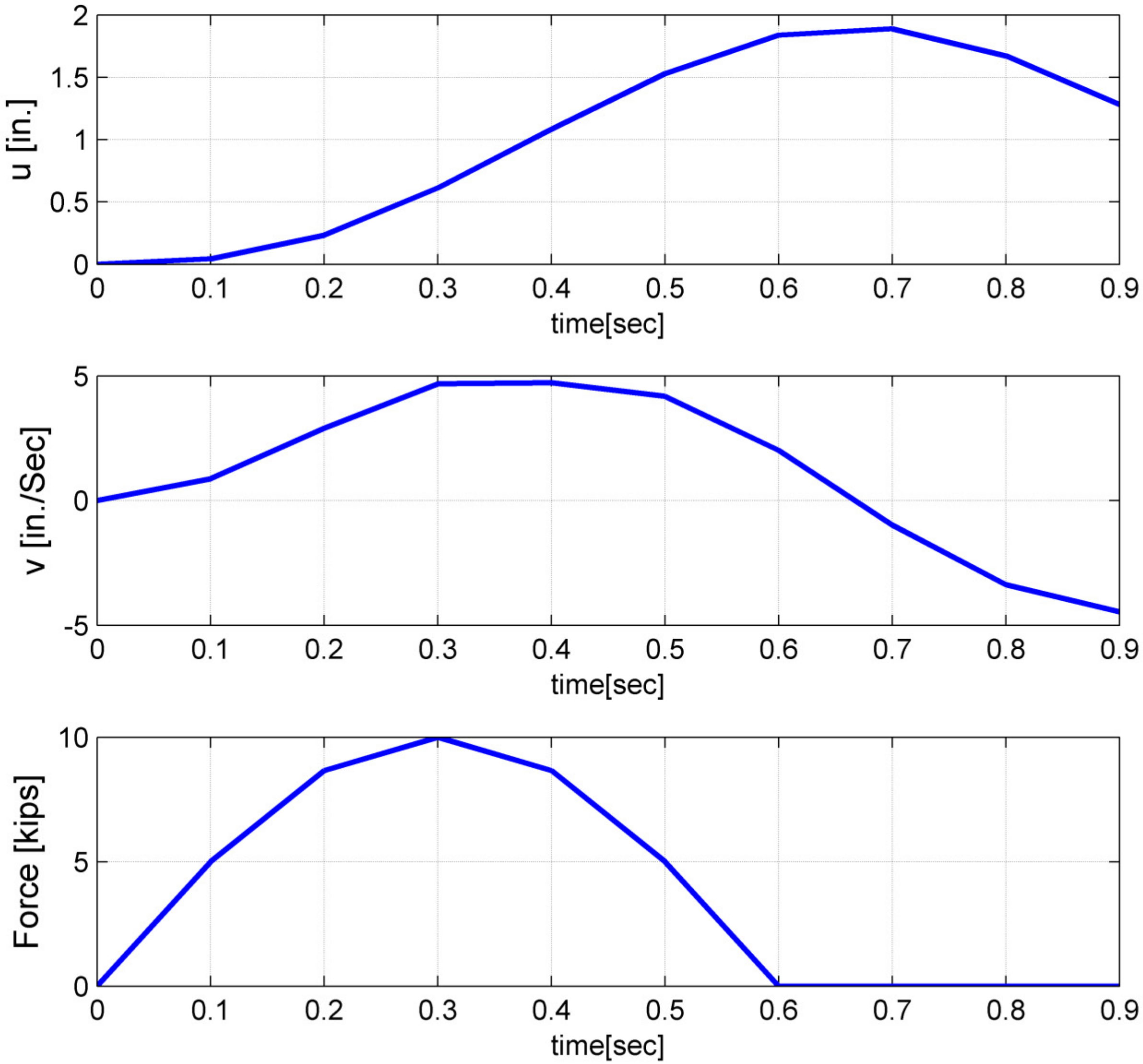
Results

t_i	p_i	$(f_S)_i$	$\ddot{u}_i$ (Step 2.8)	$\Delta\hat{p}_i$ (Step 2.1)	k_i	$\hat{k}_i$ (Step 2.3)	Δu_i (Step 2.4)	$\dot{u}_i$ (Step 2.6)	u_i (Step 2.6)
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	5.0000	10	114.5043	0.0437	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	0.4367	17.4666	21.6356	10	114.5043	0.1890	0.8733	0.0437
0.2	8.6602	2.3262	23.1803	43.4485	10	114.5043	0.3794	2.9057	0.2326
0.3	10.0000	6.1207	12.3724	53.8708	10	114.5043	0.4705	4.6833	0.6121
0.4	8.6603	7.5000	1.6110	46.5455	0	104.5043	0.4454	4.7261	1.0825
0.5	5.0000	7.5000	−12.4970	32.3703	0	104.5043	0.3098	4.1818	1.5279
0.6	0.0000	7.5000	−30.8738	5.3984	0	104.5043	0.0517	2.0132	1.8377
0.7	0.0000	7.5000	−28.9930	−24.9304	10	114.5043	−0.2177	−0.9801	1.8893
0.8	0.0000	5.3228	−18.8932	−44.8354	10	114.5043	−0.3916	−3.3744	1.6716
0.9	0.0000	1.4071	−2.7549	−47.9712	10	114.5043	−0.4189	−4.4568	1.2801

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

الف) شتاب میانگین بدون تکرار



Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

1) Initial calculations.

Modified Newton Raphson Iteration (ب

$$a_0=\frac{1}{(0.25)(0.1)^2}=400 \quad , \quad a_1=\frac{0.5}{(0.25)(0.1)}=20 \quad , \quad a_2=\frac{1}{(0.25)(0.1)}=40$$

$$a_3=\frac{1}{2(0.25)}-1=1 \quad , \quad a_4=\frac{0.5}{(0.25)}-1=1 \quad , \quad a_5=\frac{(0.1)}{2}\left(\frac{0.5}{(0.25)}-2\right)=0$$

$$1.1 \quad \ddot{u}_0=\frac{p_0-c\dot{u}_0-k_0u_0}{m}=\frac{0-0.1592(0)-(10)(0)}{0.2533} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u}_0=0$$

$$1.2 \quad \Delta t=0.1$$

$$1.3 \quad a_6=(20)\,(0.2533)+(1+1)\,(0.1592)=10.45$$

$$a_7=(1+1)\,(0.2533)+\frac{0}{0.1}(0.1592)=0.5066$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

2) Calculations for each time step, i

Modified Newton Raphson Iteration (ب

2.1 $\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + a_6\,\dot{u}_i + a_7\,\ddot{u}_i \quad \Rightarrow \quad \Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + 10.45\,\dot{u}_i + 0.5066\,\ddot{u}_i$

2.2 $k_i = k\,$ *for branches oa, bc and de;* *and* $k_i = 0\,$ *for ab and cd.*

2.3 $\hat{k}_i = k_i + a_0 m + a_1 c = k_i + 400(0.2533) + 20(0.1592) \quad \Rightarrow \quad \hat{k}_i = k_i + 104.5$

2.4 $\Delta u^{(j)} = \dfrac{\Delta R^{(j)}}{\hat{k}_T} \qquad u_{i+1}{}^{(j)} = u_{i+1}{}^{(j-1)} + \Delta u^{(j)}$

$$\Delta fs^{(j)} = fs^{(j)} - fs^{(j-1)} + (\hat{k}_T - k_T)\Delta u^{(j)} \qquad \Delta R^{(j+1)} = \Delta R^{(j)} - \Delta fs^{(j)}$$

$$\hat{k}_T = k_T + a_0 m + a_1 c$$

2.5 $\Delta\dot{u}_i = a_1\Delta u_i - (a_4+1)\,\dot{u}_i - a_5\,\ddot{u}_i = 20\Delta u_i - (1+1)\,\dot{u}_i - (0)\,\ddot{u}_i \quad \Rightarrow \quad \Delta\dot{u}_i = 20\Delta u_i - 2\,\dot{u}_i$

2.6 $\Delta\ddot{u}_i = a_0\Delta u_i - a_2\,\dot{u}_i - (a_3+1)\,\ddot{u}_i = 400\Delta u_i - 40\,\dot{u}_i - (1+1)\,\ddot{u}_i$

$\Rightarrow \quad \Delta\ddot{u}_i = 400\Delta u_i - 40\,\dot{u}_i - 2\,\ddot{u}_i$

2.7 $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

Modified Newton Raphson Iteration (ب

- Linear acceleration using $\Delta t = 0.1\,\text{sec}$

Results

t_i	p_i	$(f_S)_i$	$\Delta \hat{p}_i$ or $\Delta R^{(j)}$	k_i	$\hat{k}_i$	Δu_i or $\Delta u^{(j)}$	$\dot{u}_i$	$\ddot{u}_i$	u_i or $u_{i+1}^{(j)}$
0.0	0.0000	0.0000	5.0000	10	114.5043	0.0437	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	0.4367	21.6356	10	114.5043	0.1890	0.8733	17.4666	0.0437
0.2	8.6602	2.3262	43.4485	10	114.5043	0.3794	2.9057	23.1803	0.2326
0.3	10.0000	6.1207	53.8708	10	114.5043	0.4705	4.6833	12.3724	0.6121
			3.3254			0.0290			1.1116
			0.2904			0.0025			1.1141
			0.0254			0.0002			1.1143
			0.22E−02			0.19E−04			1.1143
0.4	8.6603	7.5000	52.9849	0	104.5043	0.5070	5.3621	1.2027	1.1143
0.5	5.0000	7.5000	38.4086	0	104.5043	0.3675	4.7782	−12.8805	1.6213
0.6	0.0000	7.5000	11.0600	0	104.5043	0.1058	2.5725	−31.2339	1.9889
0.7	0.0000	7.5000	−19.6226	10	114.5043	−0.1714	−0.4558	−29.3312	2.0947
0.8	0.0000	5.7863	−41.6857	10	114.5043	−0.3641	−2.9716	−20.9850	1.9233
0.9	0.0000	2.1458	−47.9600	10	114.5043	−0.4188	−4.3095	−5.7722	1.5593

No iteration

u_i (Step 2.6)
0.0000
0.0437
0.2326
0.6121
1.0825
1.5279
1.8377
1.8893
1.6716
1.2801

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

2) Calculations for each time step, i

Modified Newton Raphson Iteration (ب

As an example, consider the time step that begins at 0.3 sec and ends at 0.4 sec. The calculations of Table 5.7.1 are implemented as follows.

1.0 *Initialize data*

$$u_{i+1}^{(0)} = 0.6121 \qquad f_S^{(0)} = 6.1207$$

$$\Delta R^{(1)} = \Delta \hat{p}_i = 53.8708 \qquad \hat{k}_T = 114.5043$$

2.0 *First iteration, $j = 1$*

2.1 $\hat{k}_T \Delta u^{(1)} = \Delta R^{(1)}$, or $\Delta u^{(1)} = \dfrac{53.8708}{114.5043} = 0.4705.$

2.2 $u_{i+1}^{(1)} = u_{i+1}^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 0.6121 + 0.4705 = 1.0826.$

2.3 $\Delta f^{(1)} = f_S^{(1)} - f_S^{(0)} + \dfrac{a}{\Delta t}\Delta u^{(1)}$

$$= 7.500 - 6.1207 + (104.5043)0.4705 = 50.5454.$$

2.4 $\Delta R^{(2)} = \Delta R^{(1)} - \Delta f^{(1)} = 53.8708 - 50.5454 = 3.3254.$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Analysis of Nonlinear Response: Newmark's Method

2) Calculations for each time step, i

Modified Newton Raphson Iteration (ب

2.0 *Second iteration,* $j = 2$

2.1 $\hat{k}_T \, \Delta u^{(2)} = \Delta R^{(2)}$, or $\Delta u^{(2)} = \dfrac{3.3254}{114.5043} = 0.02904.$

2.2 $u_{i+1}^{(2)} = u_{i+1}^{(1)} + \Delta u^{(2)} = 1.0825 + 0.02904 = 1.1116.$

2.3 $\Delta f^{(2)} = f_S^{(2)} - f_S^{(1)} + \dfrac{a}{\Delta t} \Delta u^{(2)}$

$$= 7.500 - 7.500 + (104.5043)0.02904 = 3.0349.$$

2.4 $\Delta R^{(3)} = \Delta R^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 3.3254 - 3.0349 = 0.2904.$

2.0 *Third iteration,* $j = 3$

2.1 $\hat{k}_T \, \Delta u^{(3)} = \Delta R^{(3)}$, or $\Delta u^{(3)} = \dfrac{0.2904}{114.5043} = 0.0025.$

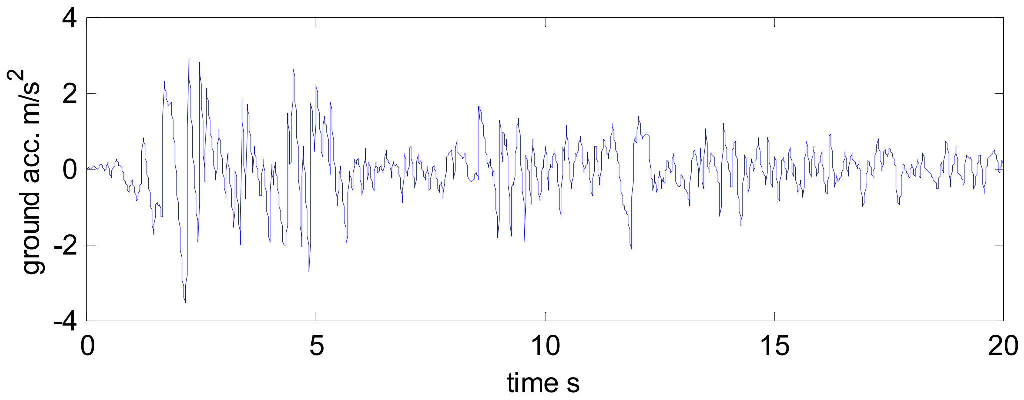
and so on. These calculations and those for additional iterations during the time step 0.3 to 0.4 sec are shown in Table E5.6.

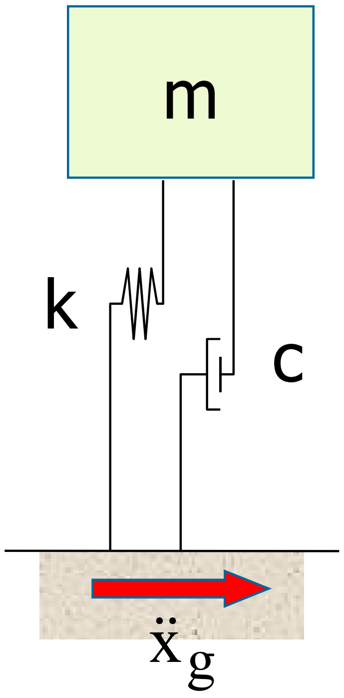
Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Commercial Software – MATLAB

Demonstration – SDOF structure under earthquake excitation

1940 El Centro EQ





75–story building

$$m = 4.61\times10^{7}\ \text{kg}$$

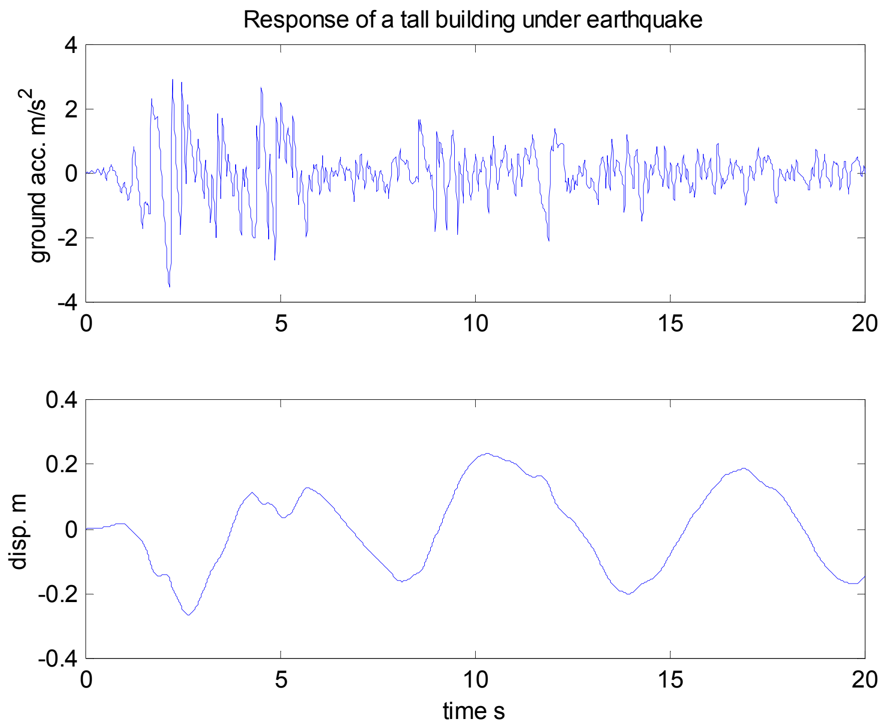
$$c = 1.04\times10^{6}\ \text{N - s/m}\ \ (1\%)$$

$$k = 5.83\times10^{7}\ \text{N/m}$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Commercial Software – MATLAB

```
clear all;

load elcen;

m=4.61*10^7; c=1.04*10^6; k=5.83*10^7;

A=[0 1; -k/m -c/m]; B=[0;-1]; C=[1 0]; D=[0];

[x temp]=lsim(A,B,C,D,acc,time);

subplot(2,1,1);
plot(time,acc);
ylabel('ground acc. m/s^2');
title('Response of a tall building under
earthquake');
subplot(2,1,2);
plot(time,x);
xlabel('time');
ylabel('disp. m');
```



Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Commercial Software – MATLAB

The lsim command operates in the STATE-SPACE domain

Original 2nd order $$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p$$

State–Space 1st order

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p \\ \dot{x} = \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{Bmatrix} p$$

output ⇐ $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \{0\} p$$

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Commercial Software – MATLAB

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$X = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{Bmatrix}$$

C and D depend on the output desired.

[x temp]=lsim(A,B,C,D,–acc,time);

Demonstration !

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

Homework

تمرین 1) معادلات تعادل یک سیستم دارای دو درجه آزادی به صورت زیر به دست آمده است

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

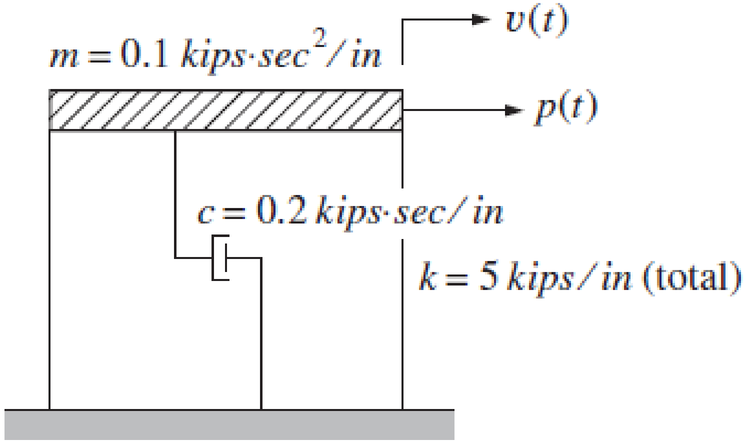
فرض $\begin{aligned} {}^0U &= 0 \\ {}^0\dot{U} &= 0 \end{aligned}$

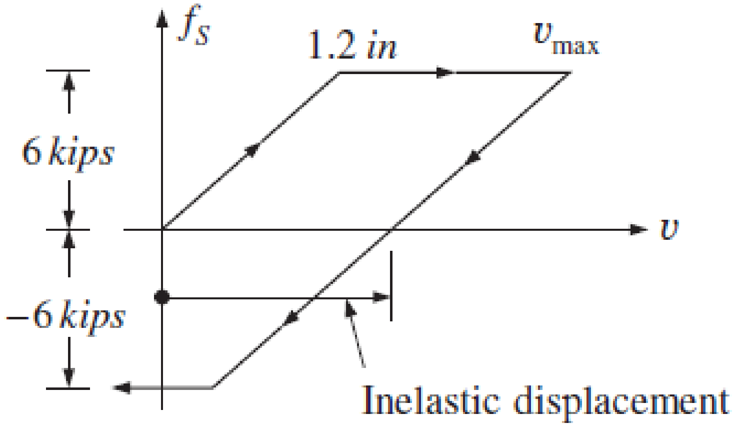
با استفاده از روش تفاضل مرکزی ، Houbolt ، Wilson θ و Newmark مطلوب است تعیین پاسخ سیستم با یک دقت قابل قبول در بازه زمانی 0 تا 4 ثانیه .   .

Solution of Nonlinear Equations in Dynamic Analysis

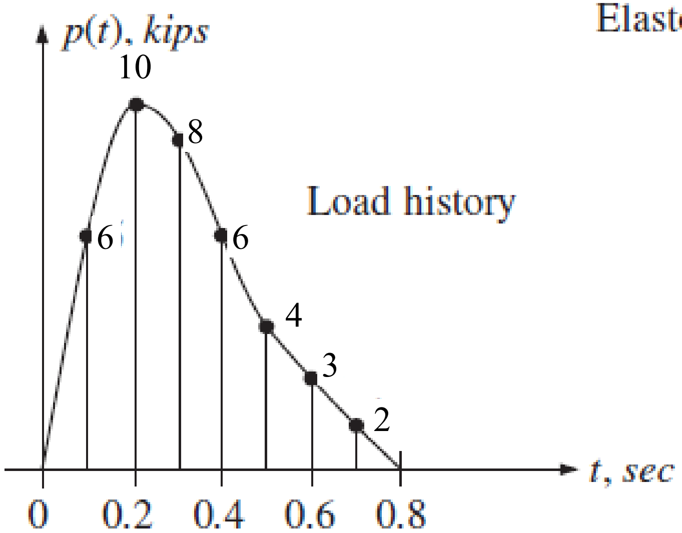
Homework

تمرین 2) پاسخ یک سیستم SDOF تحت اثر نیرویی نشان داده شده را به روش Newmark الف) با تکرار و ب) بدون تکرار به دست آورید





Elastoplastic stiffness



Load history