دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Nonlinear Analysis of Structures

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

فهرست مطالب این فصل

- روش‌های Newton-Raphson
- روش BFGS
- روش‌های نیرو- تغییرمکان- قید
- معیارهای همگرایی

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

معادلات اساسی که باید در تحلیل غیرخطی در زمان t+Δt حل شوند عبارتند از :

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0}$$

که در آن

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}R &= {}^{t+\Delta t}R_B + {}^{t+\Delta t}R_S + {}^{t+\Delta t}R_C \\ {}^{t+\Delta t}F &= {}^{t}F + F \; ; \; F = {}^{t}KU \end{aligned}$$

بردار ${}^{t+\Delta t}R$ شامل بارهای گرهی وارد خارجی و ${}^{t+\Delta t}F$ بردار نیروهای نقاط گرهی است که معادل با تنش‌های المان می‌باشند. بردار ${}^{t+\Delta t}F$ رابطه غیرخطی با جابجایی‌های گره‌ای دارد. بردار ${}^{t+\Delta t}R$ مستقل از تغییرشکل‌ها و ناپیوسته است و بستگی به شرایط تکیه‌گاهی (Pounding و Uplift) دارد. دو بردار مذکور با استفاده از اصل تغییرمکان‌های مجازی تعیین می‌شوند.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

روش تکرار شونده Newton-Raphson با فرض اینکه بارها مستقل از تغییرشکل‌ها هستند، به ازای i=1,2,3,... بصورت زیر معرفی می‌گردد :

$$\Delta R^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \qquad (1)$$

$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}\Delta U^{(i)} = \Delta R^{(i-1)} \qquad (2)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \qquad (3)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^{t}U; \qquad {}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^{t}F; \qquad {}^{t+\Delta t}K^{(0)} = {}^{t}K$$

در هر تکرار، رفتار سازه خطی فرض می‌شود. در رابطه (1) يك بردار بار نامتعادل را محاسبه می‌کنیم که منجر به يك نمو در تغییرمکان بدست آمده در رابطه (2) می‌شود و تکرارها را تا حدی ادامه می‌دهیم که بردار بار نامتعادل $\Delta R^{(i-1)}$ نمو تغییرمکان $\Delta U^{(i)}$ به اندازه کافی کوچك شوند. در نهایت ${}^{t+\Delta t}U$ حاصل می‌شود. سپس با استفاده تغییرمکان گره‌ای کرنش‌ها محاسبه شده و براساس روابط تنش-کرنش نیروهای داخلی F حاصل می‌گردد.

در برنامه‌های تجاری که غیرخطی هستند پیش فرض برنامه‌ها قابل قبول است. اما در نرم‌افزارهای حرفه‌ای باید تک تک پارامترها را تعیین کرد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

اجزای مهم کلیه روش‌های حل ، محاسبه بردار $^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ و ماتریس سختی مماسی $^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ و حل معادلات به فرم رابطه (2) می‌باشند.

ارضای شرایط تعادل المان محدود معادل یافتن جواب معادله زیر است :

$$\boxed{f(U^*)=0} \qquad (4)$$

که در آن داریم :

$$\boxed{f(U^*)={}^{t+\Delta t}R(U^*)-{}^{t+\Delta t}F(U^*)} \qquad (5)$$

در اینجا و در ادامه بحث آرایه کامل جواب را با U^* نمایش می‌دهیم ولی باید در نظر گرفته شود که این بردار شامل متغیرهایی به جز تغییرمکان مانند متغییرهای تنش و دوران‌ها نیز باشد .

بردار $^{t+\Delta t}R(U^*)$ وابسته پیوسته به u نمی‌باشد بلکه به صورت ناپیوسته وابسته به u است که با شرایط اولیه معادله انجام می‌شود. در نتیجه:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial R}{\partial u}=0}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

فرض کنید که در روش حل تکراری، ${}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}$ را تعیین کرده‌ایم، در این صورت از یك بسط سری Taylor نتیجه زیر بدست می‌آید :

$$f(U^*) = f({}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}) + \left[\frac{\partial f}{\partial U}\right]\Bigg|_{{}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}} (U^* - {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}) + higher - order\ terms \qquad (6)$$

از جایگذاری رابطه (5) در رابطه (6) و با استفاده از رابطه (4) نتیجه زیر حاصل می‌شود :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial U}\right]\Bigg|_{{}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}} (U^* - {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}) + higher - order\ terms = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \qquad (7)$$

که در آن فرض کرده‌ایم که بارهای وارد خارجی مستقل از تغییر شکل‌ها هستند .

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

اگر از عبارات مرتبه بالاتر در معادله (7) صرفنظر نمائیم (به این معنی که رفتار سازه را در هر iteration خطی فرض کنیم) می‌توان یک نمو در تغییر مکان‌ها را به صورت زیر محاسبه کرد :

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}\Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}} \qquad (8)$$

که در آن ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ ماتریس سختی مماسی کنونی است:

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} = \left[\frac{\partial f}{\partial U}\right]\Bigg|_{{}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}}} \qquad (9)$$

و جواب اصلاح شده تغییرمکان عبارت است از :

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)}} \qquad (10)$$

روابط (8) و (10) روش حل Newton-Raphson معادله شرایط تعادل سیستم المان محدود را تشکیل می‌دهند. و شرایط اولیه در این تکرار عبارتند از :

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^{t}U; \qquad {}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^{t}F; \qquad {}^{t+\Delta t}K^{(0)} = {}^{t}K}$$

مشخصه این روش تکراری آن است که در هر تکرار يك ماتریس سختی مماسی جدید محاسبه می‌شود و بدین دلیل است که روش مذکور به روش نام Newton-Raphson معروف است .

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

شکل زیر فرآیند حل مذکور را در هنگام کاربرد آن برای یك سیستم با یك درجه آزادی نشان می‌دهد .
مشخصات پاسخ غیرخطی به‌گونه‌ای هستند که همگرایی سریعاً حاصل می‌شود .

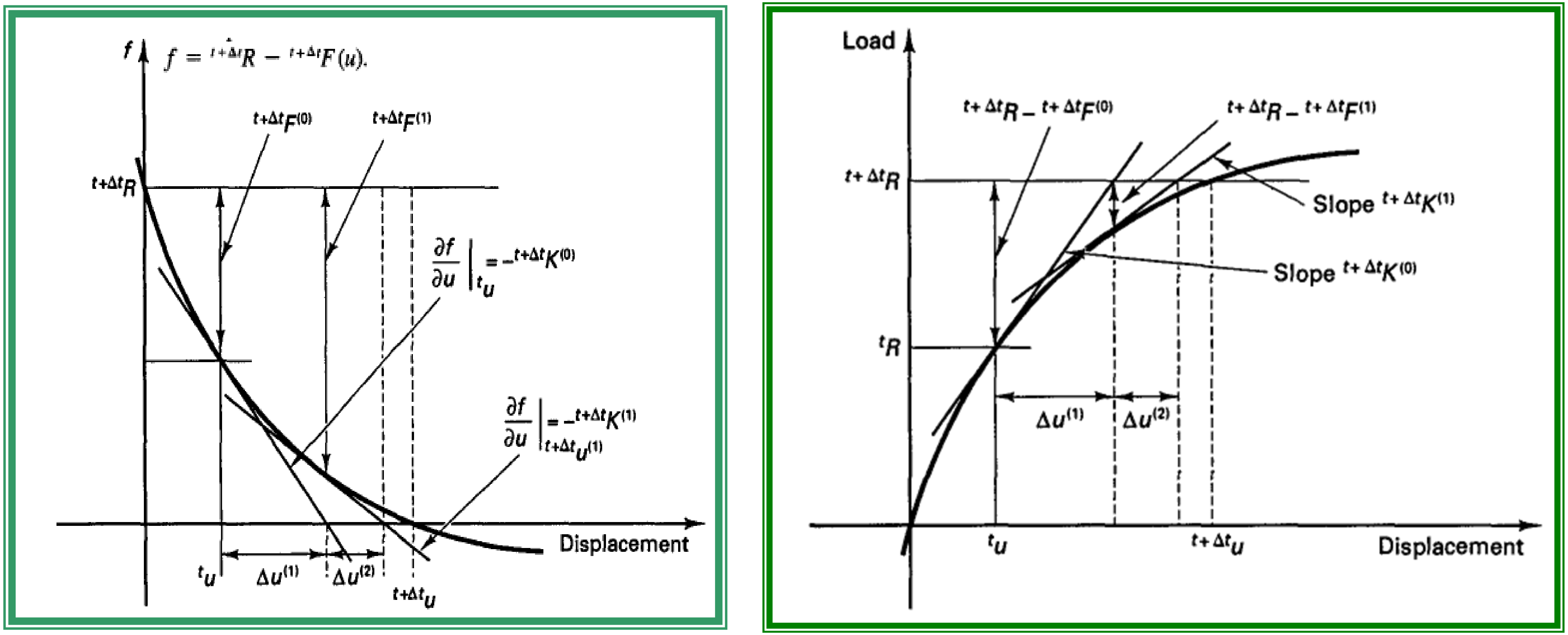


Figure 8.11 Illustration of Newton-Raphson iteration in solution of a (generic) single degree of freedom system. Top shows load-displacement relation, bottom shows iteration for zero of function f used in (8.84). Here $f = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F(u)$.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

مثال 1 : برای یك سیستم با یك درجه آزادی داریم :

$$^{t+\Delta t}R = 10\,; \quad ^{t+\Delta t}F = 4 + 2\left|\left(^{t+\Delta t}U\right)^{\frac{1}{2}}\right| \quad , \; ^{t}U = 1$$

از روش تکراری حل Newton-Raphson برای محاسبه $^{t+\Delta t}U$ استفاده کنید.

حل مثال 1 : در این حالت متناظر با رابطه (8) به عنوان معادله‌حاکم داریم :

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U^{(i)} = \left|\left(^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right|\left(6 - 2\left|\left(^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right|\right)}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

حل مثال 1

$$i=3: \qquad \Delta U^{(3)}=0.5738 \quad \Rightarrow \quad {}^{t+\Delta t}U^{(3)}=8.9902$$

$$i=4: \qquad \Delta U^{(4)}=0.0098 \quad \Rightarrow \quad {}^{t+\Delta t}U^{(4)}=9.0000$$

و همگرایی در چهار تکرار حاصل می‌شود .

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

برخی از خواص مهم روش حل Newton-Raphson برای حل‌پذیر بودن روش باختصار بصورت زیر بیان می‌گردد:

معکوس‌پذیر باشد (Nonsingular)

- **خاصیت اول عبارت است از :**

- اگر ماتریس سختی مماسی ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ غیرتکین بوده و f و مشتقات نخست آن نسبت به متغیرهای حل (به عبارت دیگر عناصر ماتریس سختی مماسی) در همسایگی U^* پیوسته بوده (یعنی در یک نقطه دو شیب یا دو سختی نداشته باشیم پیوسته باشد و بدون شکستگی) و همچنین اگر ${}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}$ در آن همسایگی واقع باشد ، در اینصورت ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$ به U^* نزدیکتر از ${}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}$ خواهد بود و دنباله جواب‌های تکراری ایجاد شده به وسیله الگوریتم (8) تا (10) به U^* همگرا خواهد شد.

- **خاصیت دوم عبارت است از :**

- اگر ماتریس سختی مماسی به ازای کلیه U_1 و U_2ها در همسایگی U^* و $L>0$ ، رابطه زیر را نیز ارضا نماید:

نُرم، مجموع بردار یا ماتریس را به یک عدد تبدیل می‌کند.

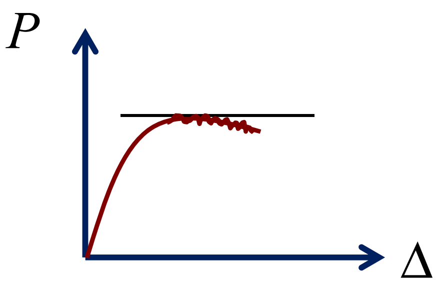
$$\left\| {}^{t+\Delta t}K\big|_{U_1} - {}^{t+\Delta t}K\big|_{U2} \right\| \le L \left\| U_1 - U_2 \right\| \qquad (11)$$

در این‌صورت همگرایی از نوع درجه‌دوم خواهد بود . بدین معنی که اگر بعد از تکرار i ، خطا از مرتبه ε باشد، در اینصورت خطا بعد از تکرار i+1 از مرتبه ε^2 خواهد بود .

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

اگر در عملیات تکرار راه حل مذکور، به مقدار کافی به پاسخ U^* نزدیک شود و ماتریس سختی مماسی به صورت ناگهانی تغییراتی نداشته باشد؛ انتظار می‌رود که همگرایی سریع اتفاق بیافتد. منحنی باید smooth باشد تا تغییرات ناگهانی سختی نداشته باشیم. اگر تغییرات سختی Smooth نباشد باید روش دیگری را انتخاب کرد.



حل در این ناهمواری‌ها گیر می‌کند.

در یك برنامه المان محدود مؤثر، در صورت امکان از ماتریس سختی مماسی کامل استفاده خواهد شد و بنابراین روش اصلی برای رسیدن به همگرایی (درصورتی که با اشکالات همگرایی مواجه شویم) کاهش مقدار پله بار است.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson Iteration Method

با در نظر گرفتن روش تکراری Newton-Raphson ، ملاحظه می‌شود که زمان و هزینه آنالیز به بروز کردن ماتریس سختی در ابتدای هر Step و ابتدای هر iteration بستگی دارد. از آنجا که در سیستم‌های از مرتبه بالاتر این محاسبات می‌توانند کاملاً پرهزینه باشند، از اینرو استفاده از الگوریتم‌های تعدیل یافته Newton-Raphson کامل می‌تواند نقش مؤثری در کاهش هزینه‌ها داشته باشد.

چون در روش F.N.R شیب خط در هر لحظه تغییر می‌کند این روش رفتار غیر خطی مواد را به خوبی در نظر می‌گیرد. معمولا در سازه‌های عمرانی حداکثر یک منحنی دو خطی سختی را در نظر می‌گیریم که شیب آن فقط در یک نقطه تغییر می‌کند. بنابراین غیرخطی بودن مصالح زیاد کاربرد ندارد. پس بحث غیرخطی هندسی مطرح می‌شود. بنابراین بهتر است از تکنیک‌های دیگری استفاده کنیم تا غیرخطی‌های دیگر (به غیر از مواد) حساس باشند.

در تحلیل یک قطعه بتنی تنها، که رابطه تنش-کرنش کاملا غیرخطی است روش F.N.R انتخاب مناسبی است.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Initial Stress Method

الف – روش تنش اولیه : یکی از روشهای تعدیل یافته است، کاربرد ماتریس سختی اولیه ^{0}K در رابطه (8) است و از اینرو معادلات به صورت زیر در می‌آیند :

$$\boxed{{}^{0}K\Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}} \qquad (12)$$

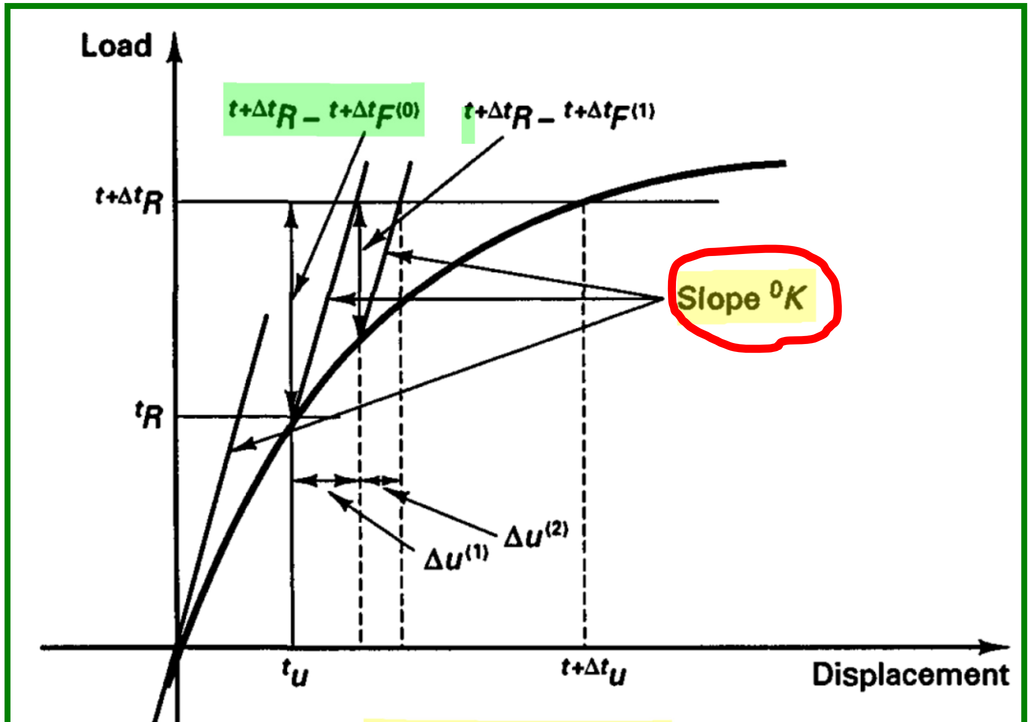
و شرایط اولیه در این تکرار عبارتند از :

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^{t}F \quad , \quad {}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^{t}U}$$

در این روش سرعت همگرایی کم و امکان واگرایی وجود دارد.

کاربرد: در درس پایداری برای محاسبه بار بحرانی، تعادل در حالت تغییرشکل یافته همراه با سختی در حالت اولیه در نظر گرفته می‌شود.

شکل زیر عملکرد روش تنش اولیه را برای یك سیستم یك درجه آزادی نشان می‌دهد.



Initial stress method

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Modified Newton Raphson Iteration Method

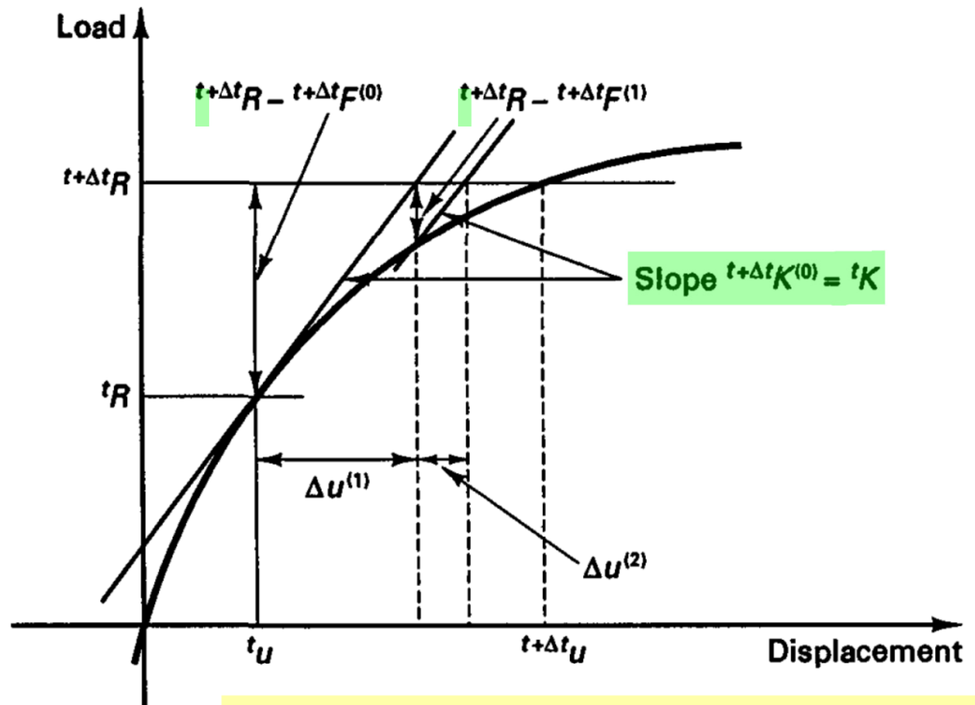
در روش تکراری تعدیل یافته Newton-Raphson ، از شیوه‌ای که حدوداً بین روش Newton-Raphson کامل و روش تنش اولیه است استفاده می‌شود. در این روش از رابطه زیر استفاده می‌گردد:

$$\boxed{{}^{\tau}K\Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}} \quad (13)$$

و شرایط اولیه در این تکرار عبارتند از :

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^{t}F \quad , \quad {}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^{t}U}$$

شکل زیر عملکرد روش تکراری تعدیل یافته Newton-Raphson را برای یك سیستم یك درجه آزادی نشان می‌دهد.



Modified Newton-Raphson method

τ متناظر با یکی از configurationهای تعادل قابل قبول در زمان‌های 0 و Δt و 2Δt و . . . یا t است.

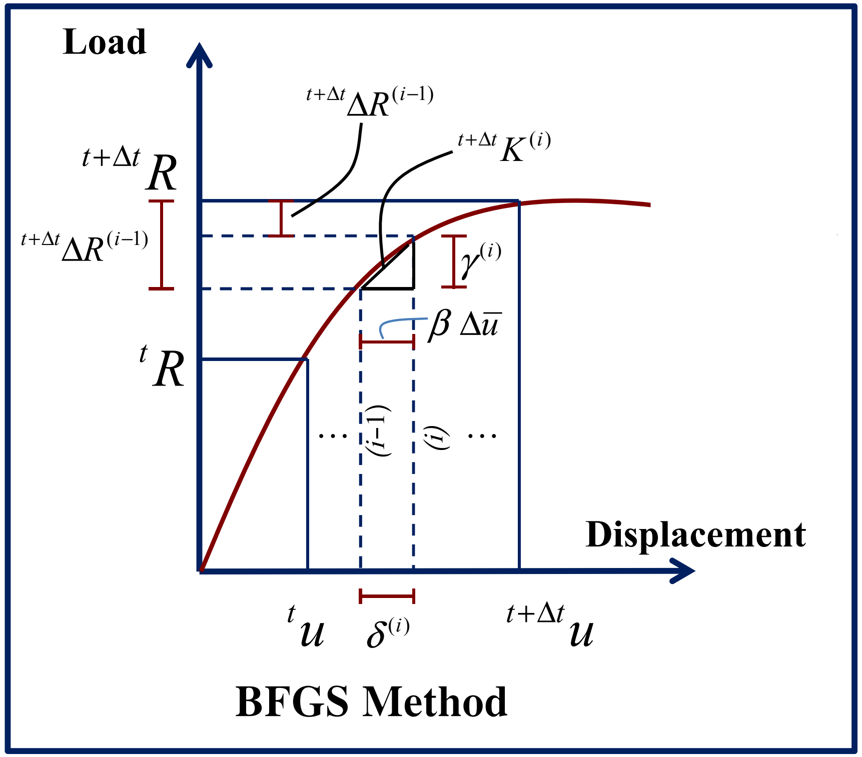
در روش تکراری تعدیل یافته Newton-Raphson، تعداد موارد تشکیل ماتریس سختی کمتر از تعداد مورد نظر در روش تکراری Newton-Raphson کامل است و در آن روش، ماتریس سختی در یك Configuration تعادلی قابل قبول به هنگام می‌شود. انتخاب پله‌های زمانی (Time Step)، در هنگامی که ماتریس سختی باید Update شود، بستگی به درجه غیرخطی بودن پاسخ سیستم دارد، به عبارت دیگر هر اندازه پاسخ سیستم غیرخطی‌تر باشد، به همان میزان تعداد موارد Update ماتریس سختی باید افزایش یابد .

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Quasi Newton Methods (Secant Stiffness Matrix)

در میان روش‌های شبه نیوتنی روش **BFGS** کاربرد خاصی در مهندسی دارد.

این روش توسط Broyden, Fletcher, Goldfarb and Shanne بر روی آن کار شده است. در این روش بحثی با عنوان Line Search مطرح می‌شود.



- تعریف یک نمو تغییر مکان

$$\boxed{\delta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i)} - {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}}$$

- تعریف یک نمو در بارهای نامتعادل

$$\boxed{\gamma^{(i)} = \Delta R^{(i-1)} - \Delta R^{(i)}}$$

$$\Delta R^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma^{(i)} = {}^{t+\Delta t}F^{(i)} - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}}$$

- صدق ماتریس Update شده ${}^{t+\Delta t}K^{(i)}$ در معادله شبه نیوتنی

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(i)}\delta^{(i)} = \gamma^{(i)}}$$

${}^{t+\Delta t}K^{(i)}$

${}^{t+\Delta t}u^{(i)}$ مجهولات

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS Methods

روش تکرار(i) برای تعیین $^{t+\Delta t}U^{(i)}$

گام اول : تعیین یک نمو بردار تغییر مکان (Displacement Vector Increment)

$$\boxed{\Delta\bar{U} = ({}^{t+\Delta t}K^{-1})^{(i-1)}\,({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)})}$$

همان فرمول Newton Raphson است که فقط از سختی سکانت استفاده شده است.

$\Delta\bar{u}$ یک بردار n بعدی است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{n-1 بُعد Direction} \\ \text{1 بُعد Magnitude} \longrightarrow \text{Line Search} \end{array}\right\}$$

فلسفه این کار آن است که در روش‌های قبلی تمامی n بعد مورد iteration قرار می‌گرفت؛ اما در اینجا فرض می‌شود که n-1 بعد (جهت) درست انتخاب شده است و فقط مقدار بردار، مورد جستجوی iteration قرار می‌گیرد. به طور مثال پلیس در تعقیب یک دزد از n مسیر محتمل n-1 مسیر را فرض می‌کند که مسیر فرار دزد نیست و در 1 مسیر باقی‌مانده با جزئیات بیشتری جستجو را انجام می‌دهد. در مسائل SDOF موضوع Line Search همان iteration است.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS Methods

روش تکرار(i) برای تعیین $^{t+\Delta t}U^{(i)}$

گام دوم : یک جستجوی خطی در راستای $\Delta\overline{U}$ برای ارضای تعادل در این راستا

$$\boxed{^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \beta\,\Delta\overline{U}} \qquad (I)$$

β : یک ضریب اسکالر که بارهای نامتعادل متناظر با این تغییر مکان محاسبه می‌گردد. این پارامترتا آنجا تغییر می کند که مولفه بارهای نامتعادل در راستای $\Delta\overline{U}$ که بوسیله حاصل ضرب داخلی زیر تعریف می‌شود رواداری همگرایی STOL را ارضا کند.

$$\boxed{\frac{\Delta\overline{U}^{T}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i)}\right)}{\Delta\overline{U}^{T}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}\right)} \le STOL}$$

خطای انرژی : $\Delta\overline{U}^{T}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i)}\right)$

مقدار نهایی β که در رابطه بالا صدق کند مقدار $^{t+\Delta t}U^{(i)}$ در عبارت (I) تعیین می‌گردد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS Methods

4. گام سوم : تصحیحی برای ماتریس ضریب

بعد از محاسبه β در گام پیشین و محاسبه ${}^{t+\Delta t}K^{(i)}$ با استفاده از $\delta^{(i)}$ و $\gamma^{(i)}$ ماتریس ضریب Update شده را به صورت حاصل ضرب مقابل تعریف خواهیم کرد.

$$\boxed{({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1})^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)^T}({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1})^{(i-1)}\mathbf{A}^{(i)}}$$

که در آن

$$\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{I} + \mathbf{v}^{(\mathbf{i})}\mathbf{w}^{(\mathbf{i})^T}$$

$$\mathbf{v}^{(\mathbf{i})} = -\left(\frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)^T}\boldsymbol{\gamma}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)^T}\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\boldsymbol{\delta}^{(i)}}\right)^{1/2}\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\boldsymbol{\delta}^{(i)} - \boldsymbol{\gamma}^{(i)} \qquad \mathbf{w}^{(\mathbf{i})} = \left(\frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)^T}\boldsymbol{\gamma}^{(i)}}\right)$$

BFGS Methods

مثال2 : برای یك سیستم با یك درجه آزادی داریم :

$$ {}^{t+\Delta t}R = 10 \,; \qquad {}^{t+\Delta t}F = 4 + 2\left| \left({}^{t+\Delta t}U \right)^{1/2} \right| \qquad , \; {}^{t}U = 1 $$

از روش BFGS بدون در نظر گرفتن Line Search برای محاسبه ${}^{t+\Delta t}U$ استفاده کنید.

حل مثال 2

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS Methods

حل مثال 2

$$i=2: \quad \Delta\overline{U} = \left({}^{t+\Delta t}K^{-1}\right)^{(1)}\left(6-2\left|\left({}^{t+\Delta t}U^{(1)}\right)^{1/2}\right|\right) = 1.618\left(6-2\left|(5)^{1/2}\right|\right) \Rightarrow \boxed{\Delta\overline{U} = 2.472}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(2)} = {}^{t+\Delta t}U^{(1)} + \beta\Delta\overline{U} = 5+(1)(2.472) \Rightarrow \boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(2)} = 7.472}$$

$$\gamma^{(2)} = 2\left(\left|\left({}^{t+\Delta t}U^{(2)}\right)^{1/2}\right| - \left|\left({}^{t+\Delta t}U^{(1)}\right)^{1/2}\right|\right) = 2\left(\left|(7.472)^{1/2}\right| - \left|(5)^{1/2}\right|\right) \Rightarrow \boxed{\gamma^{(2)} = 0.995}$$

$$\delta^{(2)} = {}^{t+\Delta t}U^{(2)} - {}^{t+\Delta t}U^{(1)} = 7.472-5 \Rightarrow \boxed{\delta^{(1)} = 2.472}$$

$${}^{t+\Delta t}K^{(2)} = \frac{\gamma^{(2)}}{\delta^{(2)}} = \frac{0.995}{2.472} \Rightarrow \boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(2)} = 0.402} \Rightarrow \left({}^{t+\Delta t}K^{-1}\right)^{(2)} = 2.485$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS Methods

حل مثال 2

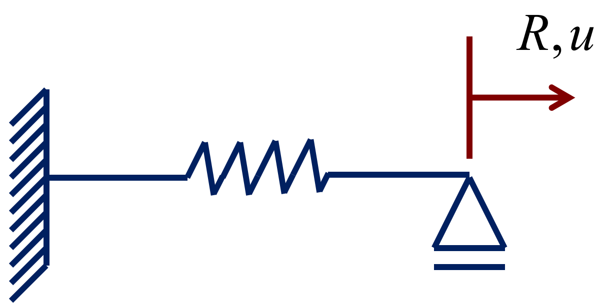
i	$\Delta\overline{U}$	${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$	$\gamma^{(i)}$	$\delta^{(i)}$	${}^{t+\Delta t}K^{(i)}$	$\left({}^{t+\Delta t}K^{-1}\right)^{(i)}$
1	4	5	2.4721	4	0.618	1.618
2	2.472	7.472	0.995	2.472	0.402	2.485
3	1.324	8.796	0.465	1.324	0.351	2.850
4	0.194	8.991	0.065	0.194	0.335	2.982
5	0.009	9.000	0.003	0.009	0.333	2.999

بعد از 5 تکرار به همگرایی می‌رسد.

مثال3 : در سیستم SDOF نشان داده شده در شکل زیر مطلوب است:

الف) با استفاده از روش‌های Newton Raphson کامل، initial Stress و BFGS پاسخ سیستم را محاسبه نمایید.

ب) مقدار c را در حالتی که روش Newton Raphson کامل، همگرا نباشد را تعیین کنید.



$$R = 4$$

$$F = u + cu^3 \quad , \quad c = 0.1$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson method

حل مثال 3

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Full Newton Raphson method

حل مثال 3

$$i=3: \quad {}^{t+\Delta t}F^{(2)} = {}^{t+\Delta t}u^{(2)} + 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(2)}\right)^3 = 2.897 + 0.1\,(2.897)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(2)} = 5.327}$$

$${}^{t+\Delta t}K^{(2)} = 1 + 0.3\left({}^{t+\Delta t}u^{(2)}\right)^2 = 1 + 0.3\,(2.897)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(2)} = 3.517}$$

$$\Delta U^{(3)} = \left({}^{t+\Delta t}K^{(2)}\right)^{-1}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(2)}\right) = (3.517)^{-1}(4-5.327) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U^{(3)} = -0.377}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(3)} = {}^{t+\Delta t}U^{(2)} + \Delta U^{(3)} = 2.897 - 0.377 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(3)} = 2.519}$$

$$i=4: \quad {}^{t+\Delta t}F^{(3)} = {}^{t+\Delta t}u^{(3)} + 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(3)}\right)^3 = 2.519 + 0.1\,(2.519)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(3)} = 4.118}$$

$${}^{t+\Delta t}K^{(3)} = 1 + 0.3\left({}^{t+\Delta t}u^{(3)}\right)^2 = 1 + 0.3\,(2.519)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(3)} = 2.904}$$

$$\Delta U^{(4)} = \left({}^{t+\Delta t}K^{(3)}\right)^{-1}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(3)}\right) = (2.904)^{-1}(4-4.118) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U^{(4)} = -0.041}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(4)} = {}^{t+\Delta t}U^{(3)} + \Delta U^{(4)} = 2.519 - 0.041 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(4)} = 2.478}$$

$$i=5: \quad {}^{t+\Delta t}F^{(4)} = {}^{t+\Delta t}u^{(4)} + 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(4)}\right)^3 = 2.478 + 0.1\,(2.478)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(4)} = 4.001}$$

$${}^{t+\Delta t}K^{(4)} = 1 + 0.3\left({}^{t+\Delta t}u^{(4)}\right)^2 = 1 + 0.3\,(2.478)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(4)} = 2.843}$$

$$\Delta U^{(5)} = \left({}^{t+\Delta t}K^{(4)}\right)^{-1}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(4)}\right) = (2.843)^{-1}(4-4.001) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U^{(5)} = 0.0004}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(5)} = {}^{t+\Delta t}U^{(4)} + \Delta U^{(5)} = 2.478 + 0.0004 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(5)} = 2.478}$$

بعد از 5 تکرار به همگرایی می‌رسد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Initial Stress method

حل مثال 3

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Initial Stress method

حل مثال 3

$$i=3: \quad {}^{t+\Delta t}F^{(2)} = {}^{t+\Delta t}u^{(2)} + 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(2)}\right)^3 = -2.4 + 0.1(-2.4)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(2)} = -3.782}$$

$$\Delta U^{(3)} = \left({}^{0}K\right)^{-1}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(2)}\right) = (1)^{-1}(4+3.782) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U^{(3)} = 7.782}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(3)} = {}^{t+\Delta t}U^{(2)} + \Delta U^{(3)} = -2.4 + 7.782 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(3)} = 5.382}$$

$$i=4: \quad {}^{t+\Delta t}F^{(3)} = {}^{t+\Delta t}u^{(3)} + 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(3)}\right)^3 = 5.382 + 0.1(5.382)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(3)} = 20.971}$$

$$\Delta U^{(4)} = \left({}^{0}K\right)^{-1}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(3)}\right) = (1)^{-1}(4-20.971) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U^{(4)} = -16.971}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(4)} = {}^{t+\Delta t}U^{(3)} + \Delta U^{(4)} = 5.382 - 16.971 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(4)} = -11.589}$$

$$i=5: \quad {}^{t+\Delta t}F^{(4)} = {}^{t+\Delta t}u^{(4)} + 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(4)}\right)^3 = -11.589 + 0.1(-11.589)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(4)} = -167.254}$$

$$\Delta U^{(5)} = \left({}^{0}K\right)^{-1}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(4)}\right) = (1)^{-1}(4+167.254) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U^{(5)} = 171.254}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(5)} = {}^{t+\Delta t}U^{(4)} + \Delta U^{(5)} = -11.589 + 171.254 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}U^{(5)} = 159.665}$$

پاسخ واگرا می‌شود.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS method without line search **حل مثال 3**

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS method without line search

حل مثال 3

$$i=2: \qquad \Delta\bar{u} = \left({}^{t+\Delta t}K^{-1}\right)^{(1)}\left[4 - {}^{t+\Delta t}u^{(1)} - 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(1)}\right)^3\right] = (0.3846)\left[4-4-0.1\left(4\right)^3\right] \Rightarrow \boxed{\Delta\bar{u} = -2.4615}$$

$${}^{t+\Delta t}u^{(2)} = {}^{t+\Delta t}u^{(1)} + \beta\Delta\bar{u} = 4+(1)(-2.4615) \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(2)} = 1.5385}$$

$${}^{t+\Delta t}F^{(2)} = {}^{t+\Delta t}u^{(2)} + 0.1\left({}^{t+\Delta t}u^{(2)}\right)^3 = 1.5385 + 0.1\left(1.5385\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(1)} = 1.9026}$$

$$\gamma^{(2)} = {}^{t+\Delta t}F^{(2)} - {}^{t+\Delta t}F^{(1)} = 1.9026 - 10.4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma^{(2)} = -8.4973}$$

$$\delta^{(2)} = {}^{t+\Delta t}u^{(2)} - {}^{t+\Delta t}u^{(1)} = 1.5385 - 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta^{(2)} = -2.4615}$$

$${}^{t+\Delta t}K^{(2)} = \frac{\gamma^{(2)}}{\delta^{(2)}} = \frac{-8.4973}{-2.4615} \quad \Rightarrow \quad {}^{t+\Delta t}K^{(2)} = 3.4521 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left({}^{t+\Delta t}K^{-1}\right)^{(2)} = 0.2897}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS method without line search

حل مثال 3

i	$\Delta\overline{U}$	${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$	${}^{t+\Delta t}F^{(i)}$	$\gamma^{(i)}$	$\delta^{(i)}$	${}^{t+\Delta t}K^{(i)}$	$\left({}^{t+\Delta t}K^{-1}\right)^{(i)}$
1	4	4	10.4	10.4	4	2.6	0.3846
2	-2.4615	1.5385	1.9026	-8.4974	-2.4615	3.4521	0.2897
3	0.6076	2.1460	3.1344	1.2318	0.6076	2.0274	0.4932
4	0.4270	2.5730	4.2764	1.1420	0.4270	2.6748	0.3739
5	-0.1033	2.4697	3.9760	-0.3004	-0.1033	2.9074	0.3440
6	0.0083	2.4779	3.9994	0.0234	0.0083	2.8359	0.3526
7	0.0002	2.4781	4.0000	0.0006	0.0002	2.8422	0.3518

بعد از 7 تکرار به همگرایی می‌رسد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS method by line searching only | حل مثال 3

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

BFGS method by line searching only

حل مثال 3

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

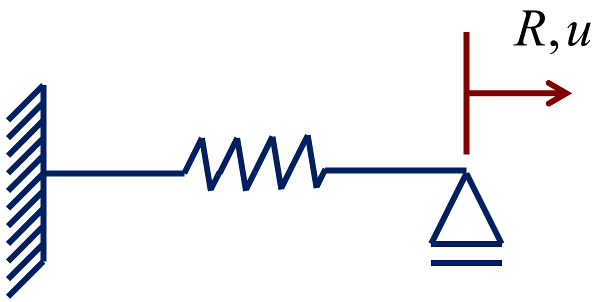
حل مثال 3

برای همگرایی در روش Full Newton Raphson iteration باید K معکوس‌پذیر (Nonsingular) باشد

تمرین : در سیستم SDOF نشان داده شده در شکل زیر مطلوب است:

الف) با استفاده از روش‌های Newton Raphson کامل، Modified Newton Raphson ، initial Stress و BFGS پاسخ سیستم را محاسبه نمایید.

Time step را برابر با 0.25 sec در نظر بگیرید.



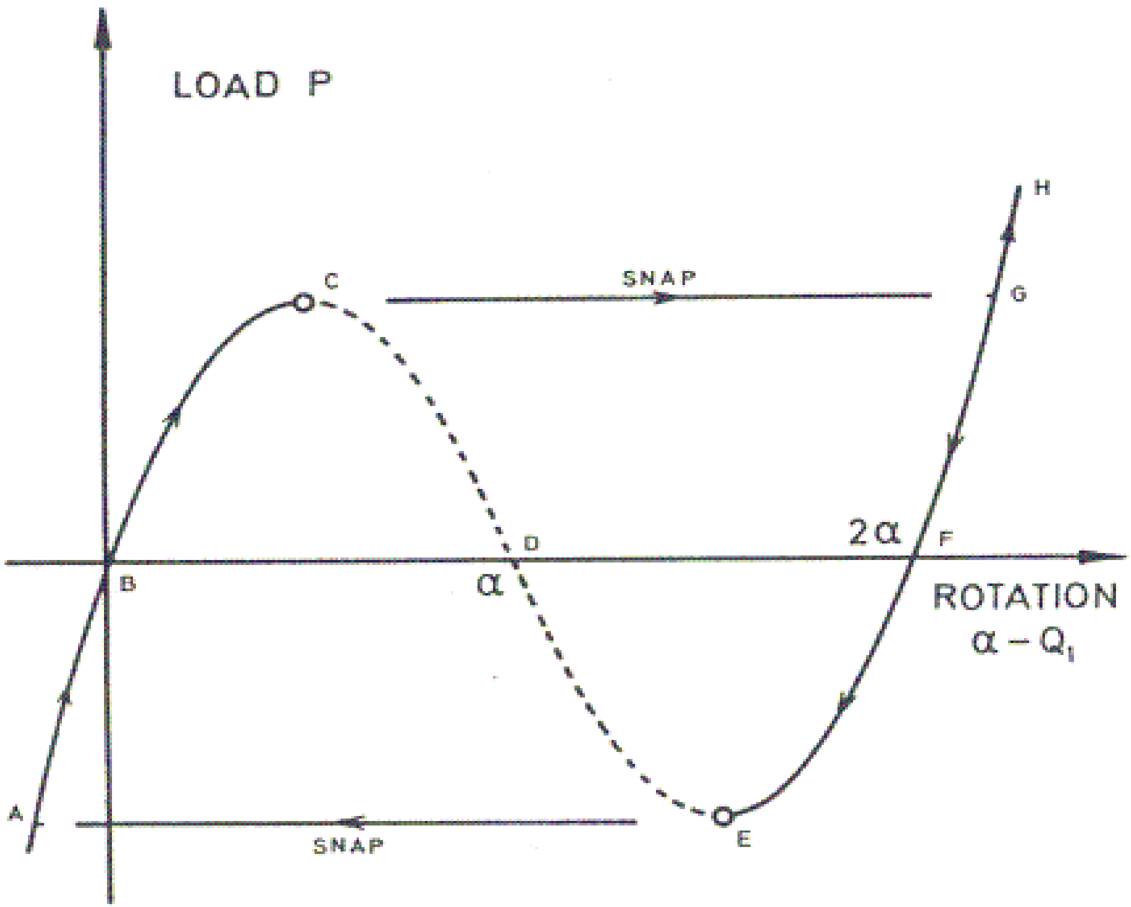
$$R = \begin{cases} 1.5t & 0 \le t \le 1 \\ -0.75t + 2.25 & 1 \le t \le 2 \\ 0.75 & 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

$$F = 1.5\sin(u/L) \quad , \quad L = 1.0$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

ناپایداری نقطه حدی

در ناپایداری نقطه حدی، یک سازه با مشخصه نرم شوندگی غیرخطی، پایداری خود را از طریق کمانش ناگهانی به یک مود تغییرشکل که مطابق با مود اولیه تغییرشکل می‌باشد از دست می‌دهد.

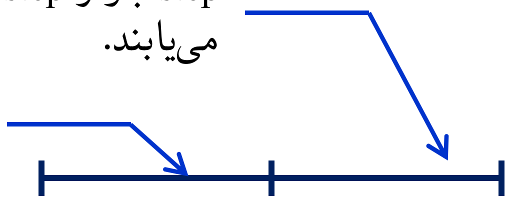


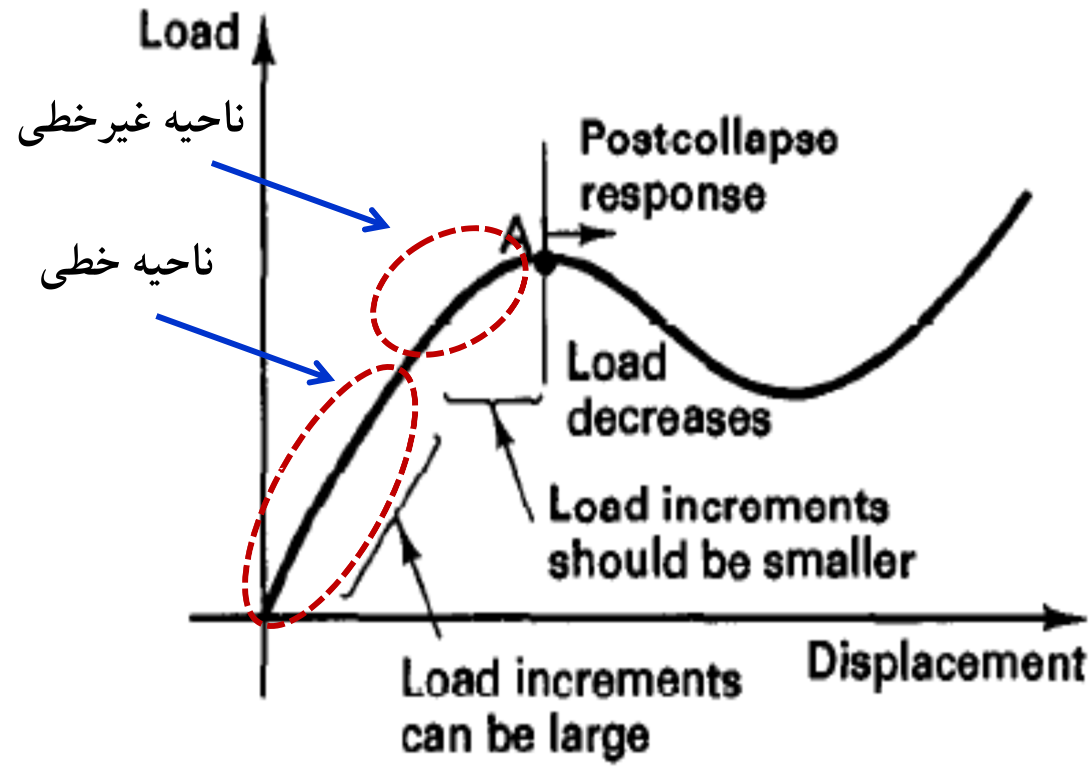
Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

ناپایداری نقطه حدی

یکی از اهداف ورود به رفتار غیرخطی سازه پیدا کردن ظرفیت نهایی سازه است. و یا به عبارت دیگر پیدا کردن نقطه Collapse سازه می‌باشد (تحلیل ظرفیت سازه مانند آنالیز Pushover).

در نزدیکی ظرفیت نهایی به دلیل کاهش کم، در بار و افزایش زیاد، در تغییرمکان، باید براساس مقدار تغییرمکان، پاسخ مقدار قدم بار تعیین شود.



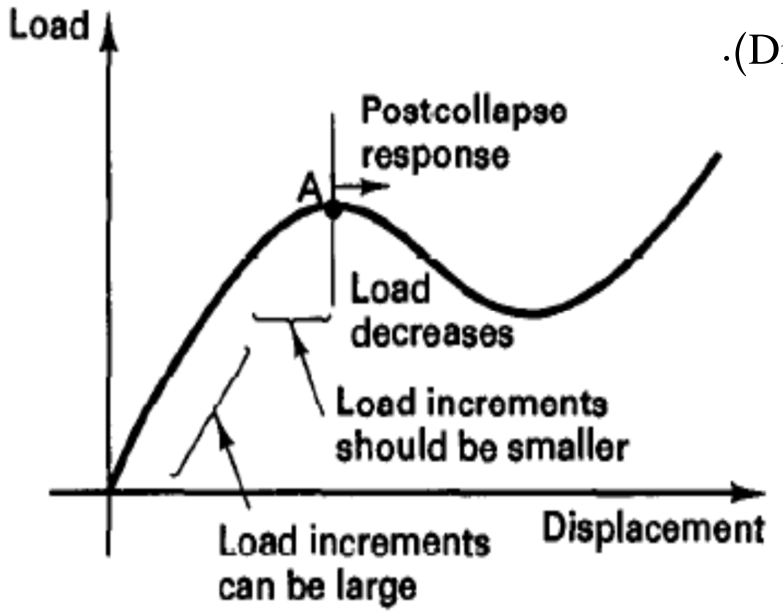


- برای محاسبه پاسخ سازه، ابتدا نموهای بار می‌توانند بزرگ باشند.
- با نزدیک شدن به نقطه حدی، نموهای بار باید کوچک انتخاب شوند.
- در نقطه حدی، ماتریس سختی تکین می‌باشد.
- برای انجام تحلیل فراتر از نقطه حدی، تکنیک خاصی که کاهش در بار و افزایش در تغییرمکان را اجازه دهد، لازم می باشد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

ناپایداری نقطه حدی

در قسمت غیرخطی با تغییر نیروی کم تغییرمکان زیاد داریم. که تغییرمکان زیاد باعث ایجاد خطا می‌شود. بنابراین stepها باید طوری انتخاب گردد که تغییرمکان stepها کوچک شود (Displacement Control).



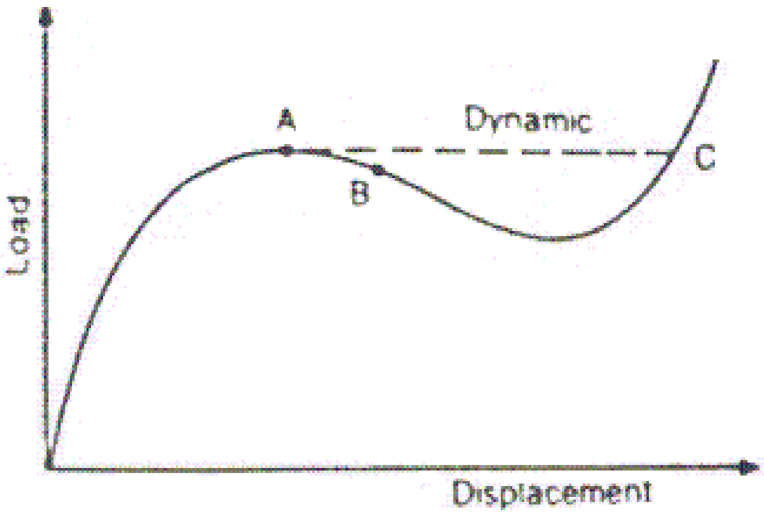
به منظور عبور از نقطه A (سختی صفر)، یک سختی مصنوعی (Artificial Stiffness) به سازه اختصاص داده می‌شود تا از این نقطه عبور کند. Artificial Stiffness روشی است که نقطه A را در برنامه‌های غیرخطی تعیین می‌کند. وقتی که Artificial Stiffness تعیین شود برنامه از نقطه A می‌تواند عبور کند.

در قسمت کاهش نمودار، باید آن را با تغییر مکان کنترل کرد (Displacement Control). در عمل بارگذاری افزایش می‌یابد اما در اینجا Load Step به صورت منفی خود را نشان می‌دهد؛ پس باید جابجایی را کنترل کرد.

بعد از نقطه A که سازه Collapse کرده و ناحیه کاهشی رد شد تغییرشکل‌ها افزایش یافته و خود این افزایش تغییر مکان‌ها باعث افزایش دوباره مقاومت می‌گردد. (Tension Field – بیشترین مقاومت در کمترین مصالح – در ورق‌ها که ظریف هستند کاربرد زیادی دارد).

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

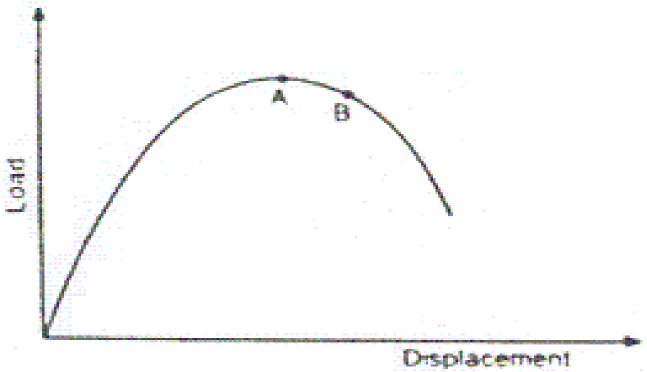
لزوم انجام تحلیل فراتر از نقطه حدی

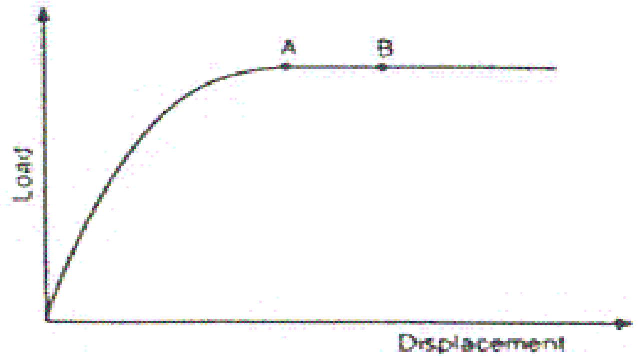


1) ممکن است نقطه حدی، نقطه ماکزیمم موضعی باشد.

2) سازه مورد تحلیل ممکن است یک زیرسازه باشد، که پاسخ بار- تغییرمکان آن برای تحلیل کل سازه لازم می‌باشد.

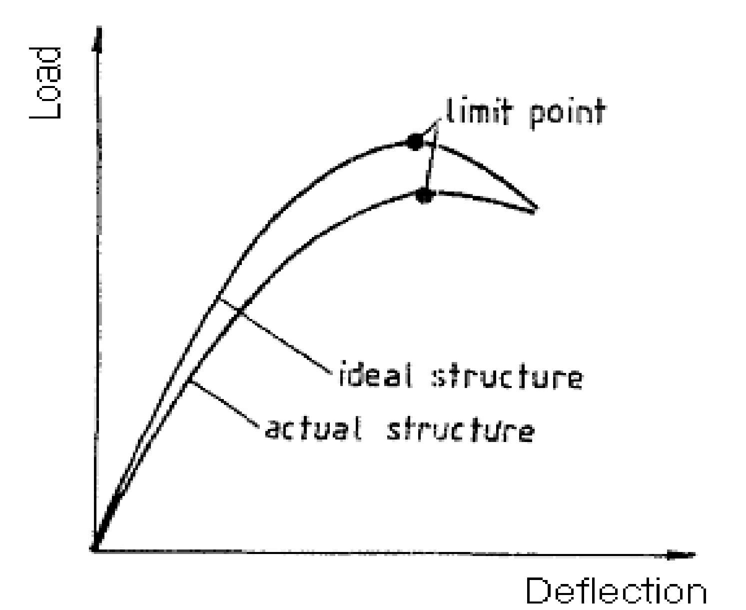
3) یکی از مسائل مهم در بحث خرابی سازه‌ها، ماهیت خرابی می‌باشد. اینکه آیا اساساً وقوع خرابی بصورت ترد است یا شکل‌پذیر.





Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

لزوم انجام تحلیل فراتر از نقطه حدی



4) حتی در مواردی که بار حدی، بیانگر بار خرابی است، ممکن است انجام تحلیل فراتر از نقطه حدی، برای اطمینان از همگرایی و امکان بررسی رفتار مکانیکی سازه (تعیین شکل‌پذیری) لازم باشد.

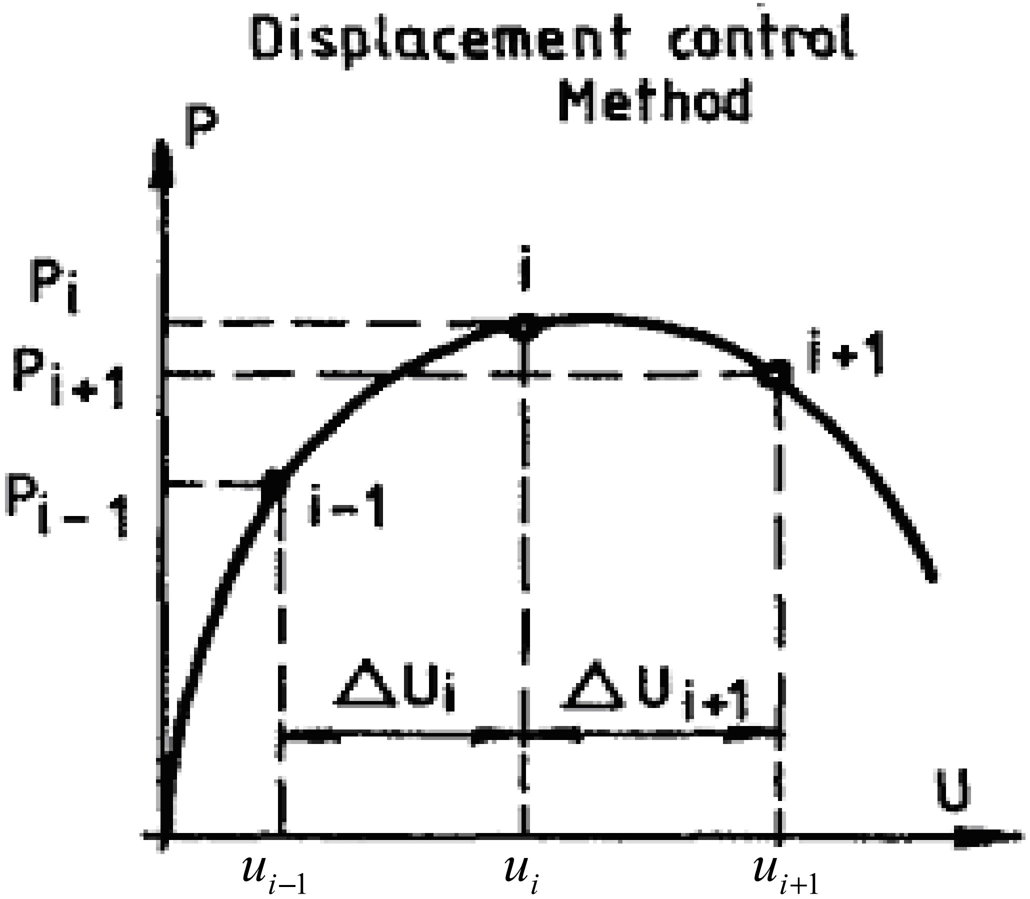
Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Load Displacement Constraint Method

روشهای انجام تحلیل فراتر از نقطه حدی (روش‌های نیرو- تغییرمکان- قید)

1) روش بارگذاری کنترل شده تغییرمکانی

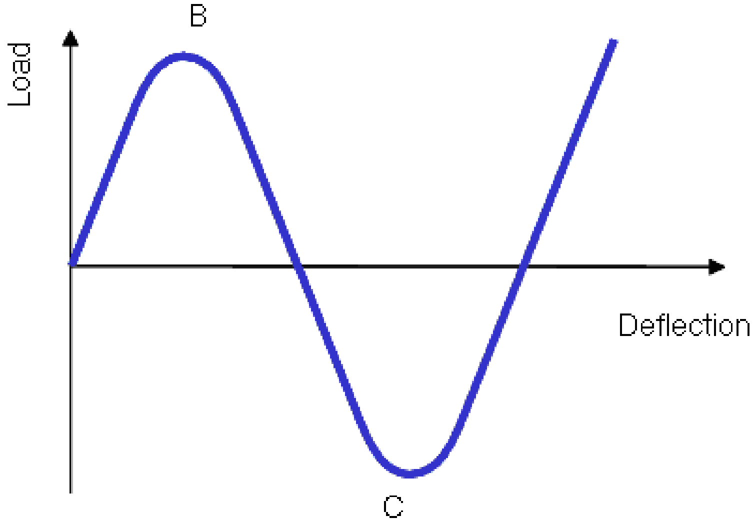
در این روش، نمو تغییرمکان به سازه اعمال می‌شود و نیروی
متناظر با این نموها توسط الگوریتم مربوطه محاسبه می‌گردد.

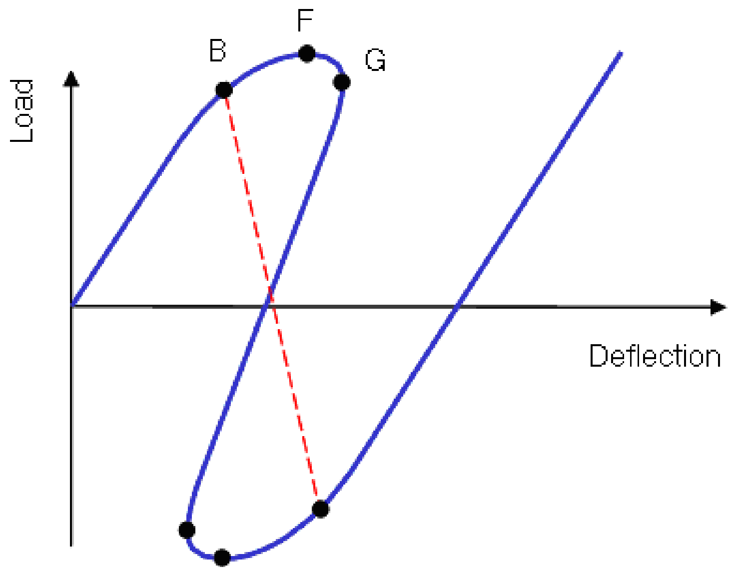


Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Load Displacement Constraint Method

روشهای انجام تحلیل فراتر از نقطه حدی (روش‌های نیرو- تغییرمکان- قید)





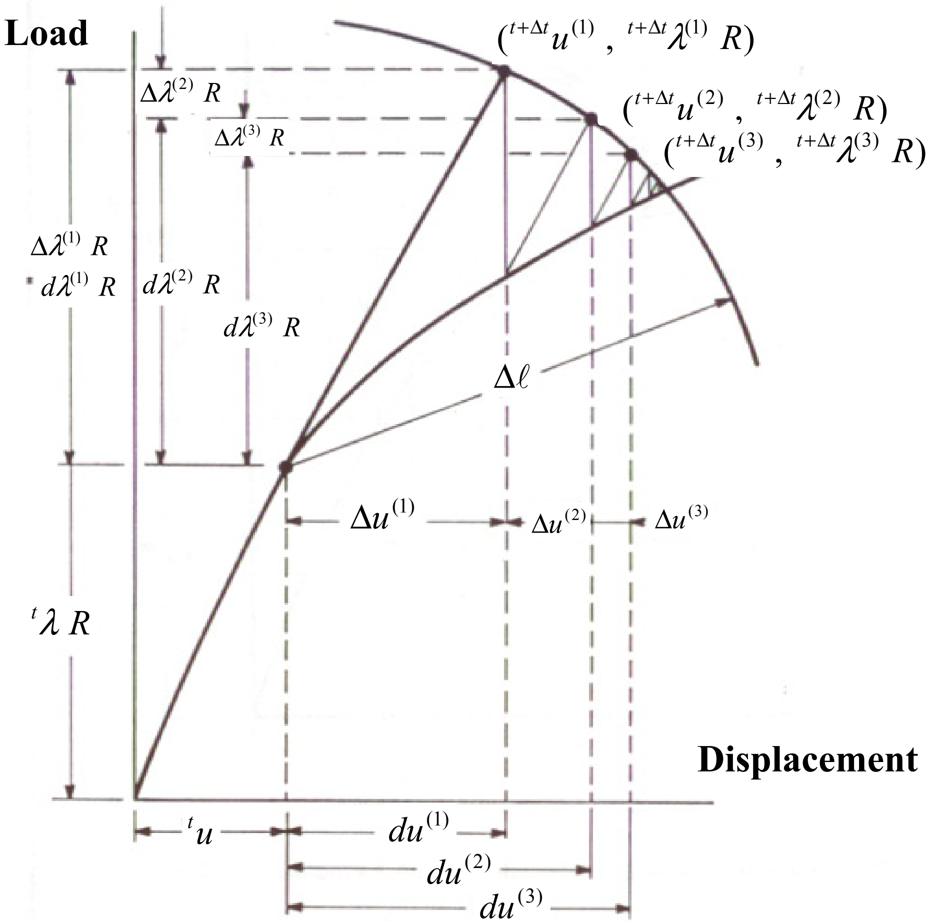
با استفاده از روش بارگذاری کنترل شده تغییرمکانی می‌توان در شکل روبه‌رو، نقطه حدی B و نقاط متناظر با کاهش بار مسیر BC را بدست آورد. اما این روش در نقطه G یا حتی قبل از آن، کارایی نخواهد داشت. چرا که ممکن است رفتار غیرخطی شدید در G باعث شود که روش تحلیلی نموی/ تکراری در F واگرا شود و تحلیل متوقف گردد. در این حالت هیچ علمی نسبت به ماهیت توقف تحلیل در F وجود ندارد. حتی نمی‌توان ناپایداری روش تحلیل و یا خود سازه را تشخیص داد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Load Displacement Constraint Method

روشهای انجام تحلیل فراتر از نقطه حدی (روش‌های نیرو- تغییرمکان- قید)

2) روش‌های طول-کمان



ایده اصلی این روش‌ها، معرفی یک ضریب بار است که شدت بارهای وارده را افزایش یا کاهش می‌دهد. بنابراین ضمن همگرایی سریع در هر گام بار، گذر از نقطه حدی و بررسی پاسخ فراتر از نقطه حدی را میسر می‌سازد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

روش‌های طول-کمان در حالت کلی (General Approach)

معادلات اساسی که باید در تحلیل غیرخطی در زمان t+Δt حل شوند عبارتند از :

$$ {}^{t+\Delta t}\lambda \cdot R - {}^{t+\Delta t}F = 0 $$

${}^{t+\Delta t}\lambda$: ضریب بار (a scalar load multiplier) که مجهول می‌باشد.

R : بردار بار مرجع (reference load vector) که ثابت است.

n معادله و n+1 مجهول داریم (n تغییرمکان و یک مجهول λ). بنابراین نیاز به یک معادله اضافی می‌باشد.

به طور مثال اگر یکی از روش‌های حل معادله‌های غیرخطی مانند Newton-Raphson یا Modified N.R. را به کار ببریم خواهیم داشت:

N.R.

$$ {}^{t+\Delta t}k^{(i-1)}\ \Delta u^{(i)} = ({}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)})\ R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} = 0 $$

Modified N.R.

$$ {}^{t}k\ \Delta u^{(i)} = ({}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)})\ R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} = 0 \qquad (1) $$

$\Delta u^{(i)}$: بردار نمو تغییرمکان (n مجهول).

$\Delta\lambda^{(i)}$: ضریب افزایشی بار (یک مجهول).

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

روش‌های طول-کمان در حالت کلی (General Approach)

یکی از مشکلات حل معادلات حاکم عناصر محدود، انتخاب مناسب ضریب مجهول می باشد که طول گام بار را نشان می دهد. برای حل این مشکل، معادله اضافی برای مقید کردن طول گام بار بصورت زیر استفاده می شود.

این معادله می‌تواند از جنس انرژی باشد

$$\boxed{f(\Delta\lambda^{(i)}, \eta^{(i)}, \Delta u^{(i)}) = 0} \quad (2)$$

در یک Load step روابط زیر را تعریف می‌کنیم

Total increment in displacements within the load step up to iteration (i):

$$\boxed{u^{(i)} = \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \cdots + \Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}u^{(i)} - {}^{t}u} \quad (3)$$

Corresponding total increment in load multiplier:

$$\boxed{\lambda^{(i)} = \Delta\lambda^{(1)} + \Delta\lambda^{(2)} + \cdots + \Delta\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} - {}^{t}\lambda} \quad (4)$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

Load Displacement Constraint Method

$$du^{(i)} = du^{(i-1)} + \eta^{(i)} \Delta u^{(i)}$$

$$du^{(0)} \equiv 0$$

$$d\lambda^{(i)} = d\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)}$$

$$d\lambda^{(0)} = 0$$

$${}^{t+\Delta t}u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}u^{(i-1)} + \eta^{(i)} \Delta u^{(i)}$$

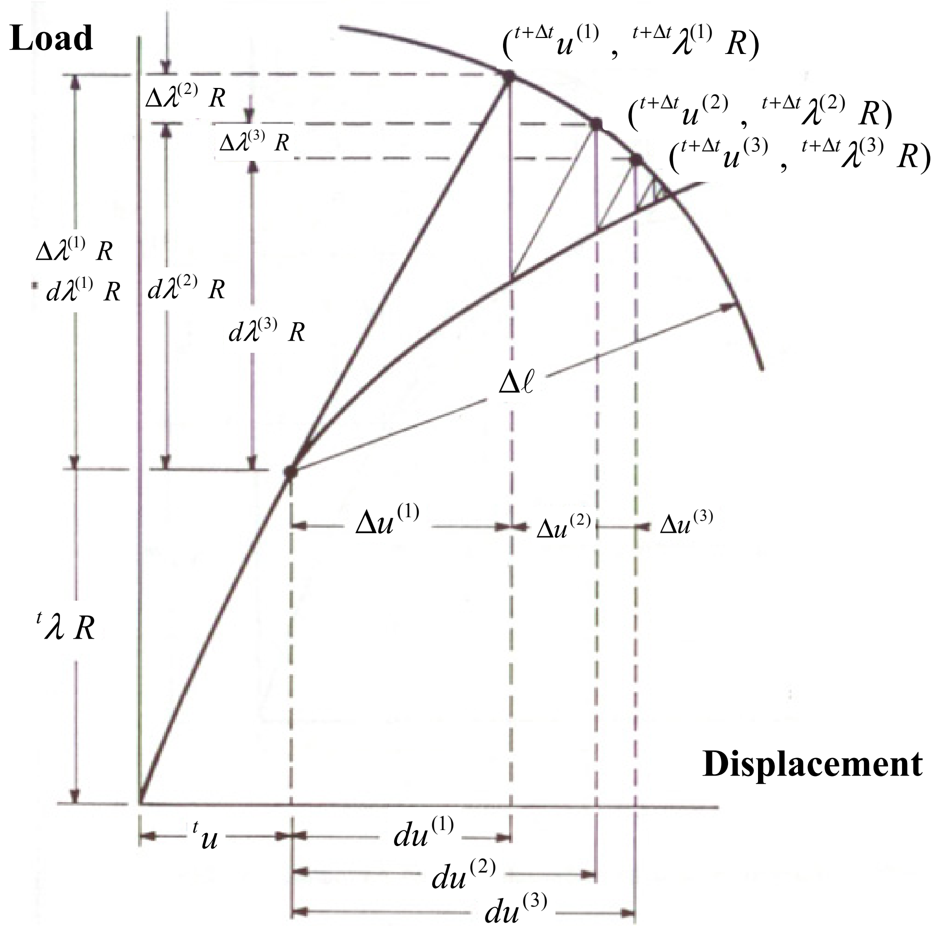
$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)}$$

$${}^{t+\Delta t}F^{(i)} = {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}k^{(i-1)} \, \eta^{(i)} \, \Delta u^{(i)}$$

$${}^{t+\Delta t}u^{(0)} \equiv {}^{t}u$$

$${}^{t+\Delta t}F^{(0)} \equiv {}^{t}F$$

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(0)} \equiv {}^{t}\lambda$$



Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

I. **معیار طول کمان ثابت کُره‌ای (Spherical constant arc length criteria)**

یکی از معادلات موثر برای ارتباط بین تغییرمکان و بار (همان Additional equation) معیار طول کمان ثابت کُره‌ای است.

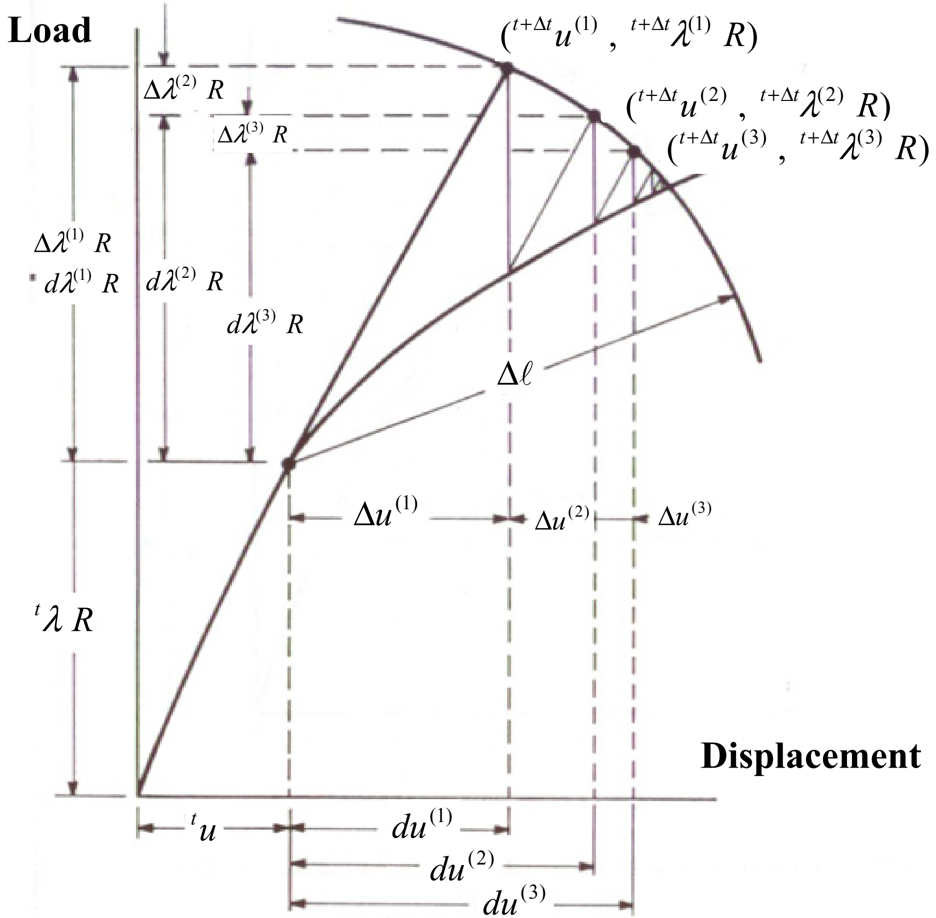
توان 2 طول بردار

$$\boxed{(\lambda^{(i)})^2 + \frac{u^{(i)^T} u^{(i)}}{\beta} = (\Delta\ell)^2} \qquad (5)$$

$\Delta\ell$: طول کمان (Arc Length) برای step

β : ضریبی نرمال کردن (Normalizing Factor) برای بدون بُعد کردن

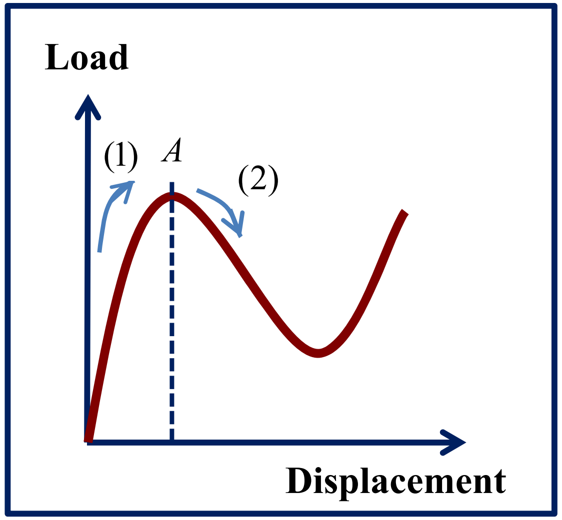
ابتدا همگرایی انجام می‌شود بعد $\Delta\ell$ انتخاب می‌گردد. اگر واگرایی شد $\Delta\ell$ کوچک و اگر همگرایی شد $\Delta\ell$ بزرگ انتخاب می‌شود. بنابراین انتخاب $\Delta\ell$ بر اساس اولین همگرایی است؛ دومین و سومین براساس $\Delta\ell$ اولیه انتخاب می‌شود. معمولا اگر رفتار تقریبا خطی باشد مقدار $\Delta\ell$ بزرگ و اگر رفتار غیرخطی زیاد باشد مقدار آن را کوچک انتخاب می‌کنیم.



Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

II. نمو ثابت کار خارجی (Constant increment of external work)

این روش بسیار موثر در نزدیکی نقطه collapse (جایی که سختی یا شیب منحنی صفر است) می‌باشد. در این معیار در نقطه collapse هم قدم بار و هم قدم تغییر مکان کوچک است.



$$
\begin{aligned}
&\left({}^{t}\lambda+\frac{1}{2}\Delta\lambda^{(1)}\right) R^{T}\ \Delta u^{(1)}=w \quad , \quad iteration=1 \quad (1)\\
&\left({}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)}+\frac{1}{2}\Delta\lambda^{(i)}\right) R^{T}\ \Delta u^{(i)}=0 \quad , \quad i=2\,,3\,,\cdots \quad (2)
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

w: براساس تاریخچه iterationها در stepهای نمویی قبلی انتخاب می‌شود.

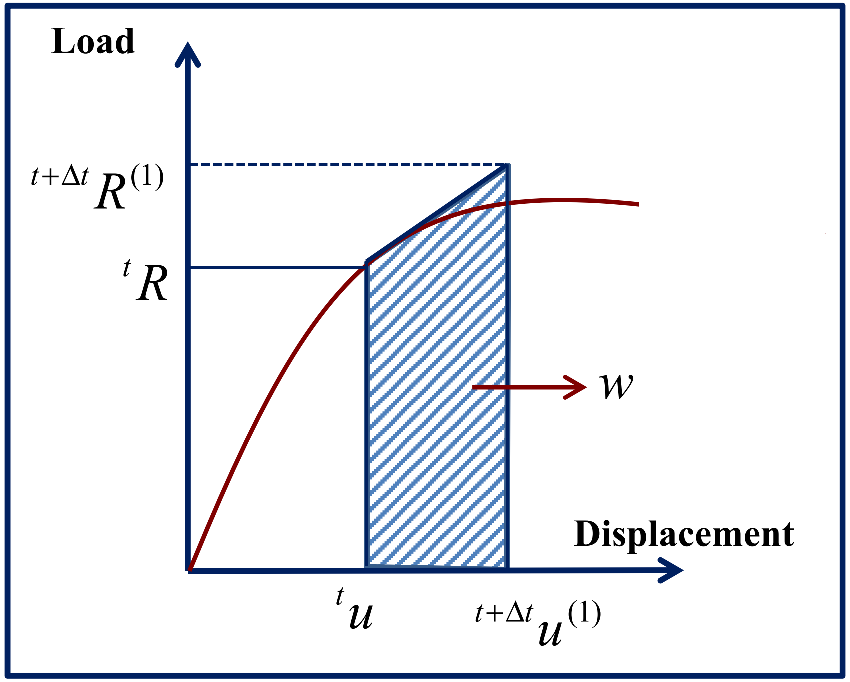
در (1) به A می‌رسیم و در (2) A را رد می‌کنیم.

در نقطه A بحث غیرخطی بودن مسئله نیست بلکه بحث عبور از نقطه k=0 است؛ که در این ناحیه از این روش استفاده می‌کنیم.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

II. نمو ثابت کار خارجی (Constant increment of external work)

در iteration اول به k=0 می‌رسیم که برای این کار مقداری انرژی لازم داریم. اما بعد از نقطه A انرژی زیاد مصرفی نیاز نداریم A را رد می‌کند.



برای حل معادلات، رابطه (1) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$^{t}k\ \Delta\bar{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)}\ R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (7)$$

$$^{t}k\ \Delta\bar{\bar{u}} = R \quad (8)$$

$$\Delta u^{(i)} = \Delta\bar{u}^{(i)} + \Delta\lambda^{(i)}\Delta\bar{\bar{u}} \quad (9)$$

$$\lambda^{(i)} = \lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)} \quad (10)$$

$$u^{(i)} = u^{(i-1)} + \Delta\bar{u}^{(i)} + \Delta\lambda^{(i)}\Delta\bar{\bar{u}} \quad (11)$$

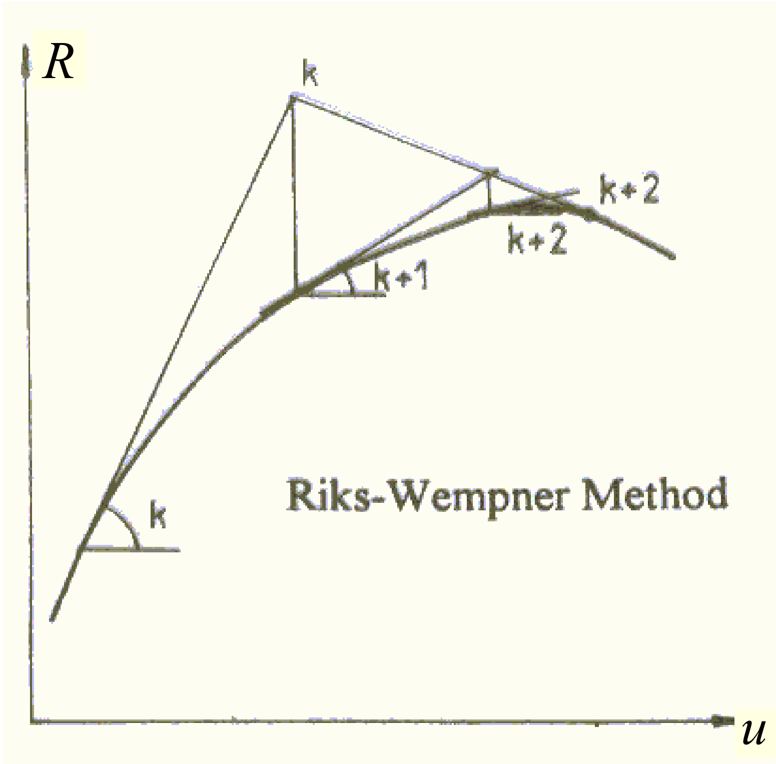
با جایگذاری روابط (10) و (11) در رابطه (5) یک معادله درجه 2 بر حسب $\Delta\lambda^{(i)}$ به دست می‌آید. $\Delta\lambda^{(1)}$ به طور مستقیم از رابطه (6) به دست می‌آید.

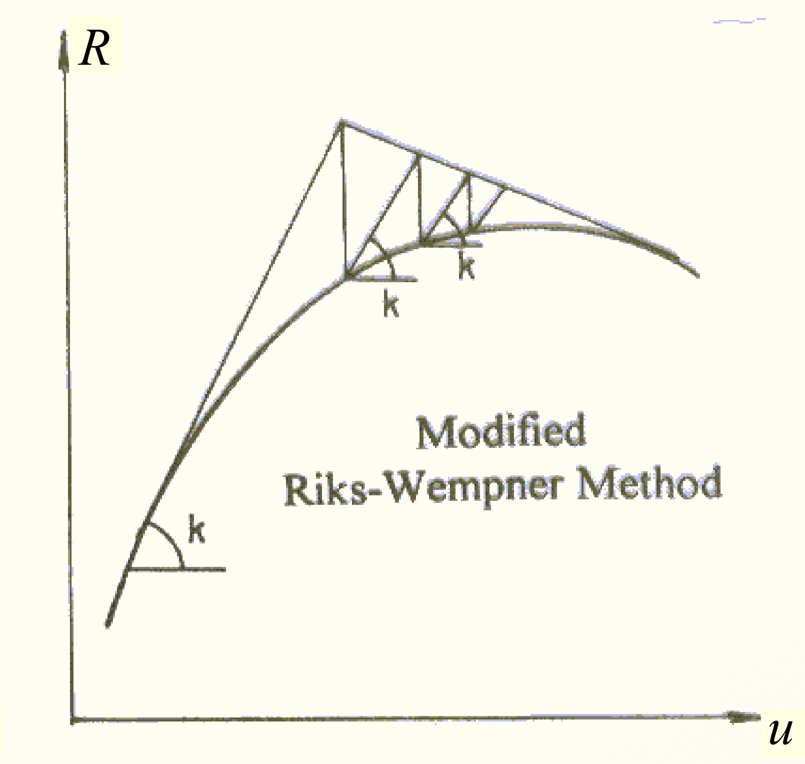
$$(6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\lambda^{(i)} = -\frac{R^{T}\Delta\bar{u}^{(i)}}{R^{T}\Delta\bar{\bar{u}}}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

III. روش Riks

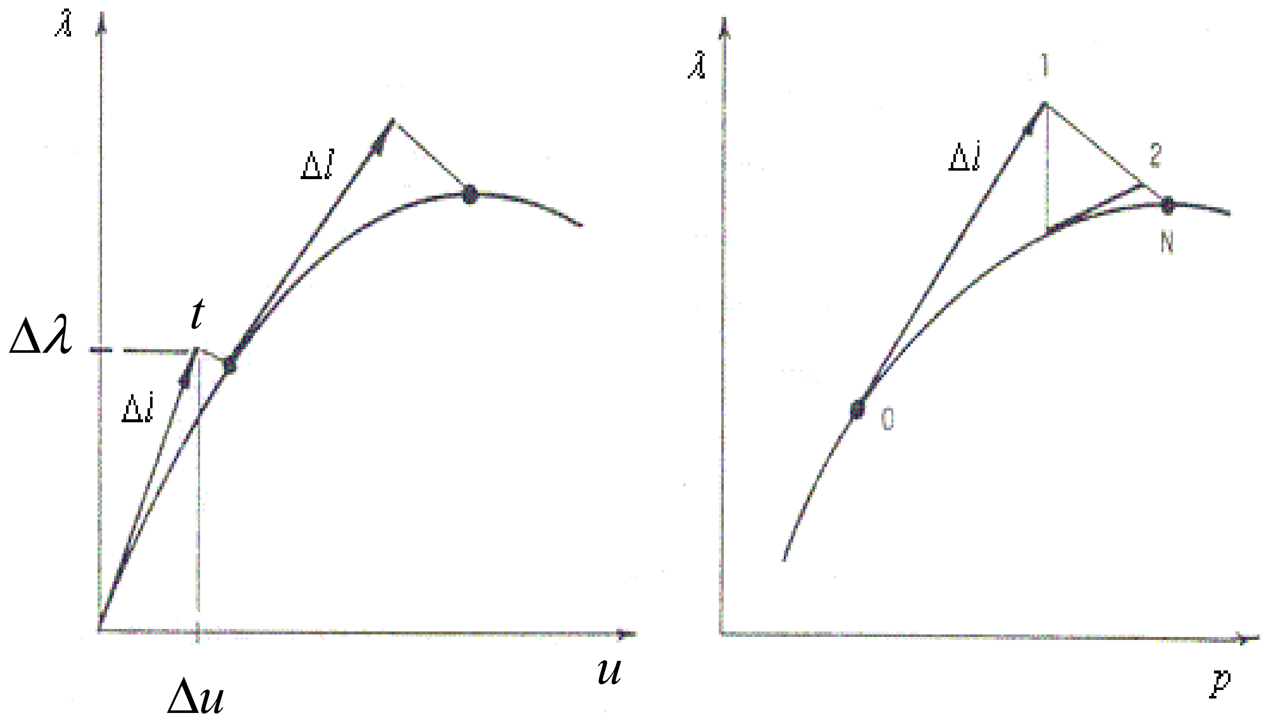
دراین روش یک معادله قیدی نمو بار را کنترل می‌کند، تا اینکه موجب شود مسیر تکرار صفحه‌ای عمود بر مماس بر نقطه آغازگر تکرار را دنبال نماید.





Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

.III روش Riks



$$t = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Delta l = |t| = \sqrt{\Delta u^T . \Delta u + (\Delta\lambda)^2}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

III. روش Riks

با فرض

$$\boxed{\Delta u = \Delta\lambda\, \Delta\overline{u}^{(i)}}$$

که در آن

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}k^{(i-1)}\ \Delta\overline{u}^{(i)} = R}$$

معادله قیدی تبدیل می‌شود به

$$\boxed{\Delta l = \Delta\lambda\sqrt{\Delta\overline{u}^{(i)^T}\,\Delta\overline{u}^{(i)} + 1}}$$

برای کنترل تکرار درگام‌های بعدی، Ramm معادله زیر را پیشنهاد داده است.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\Delta l = {}^{t}\Delta l\ \left(\frac{I_d}{{}^{t}I}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

${}^{t}(\Delta l)$: طول استفاده شده درگام t

${}^{t}I$: تعداد تکرار درگام قبلی

$I_d \approx 3-4$: تعداد تکرار مطلوب

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

III. روش Riks

گام اول:

$$t^{(0)} = \Delta r^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta u^{(0)} \\ \Delta\lambda^{(0)} \end{bmatrix} \quad (I)$$

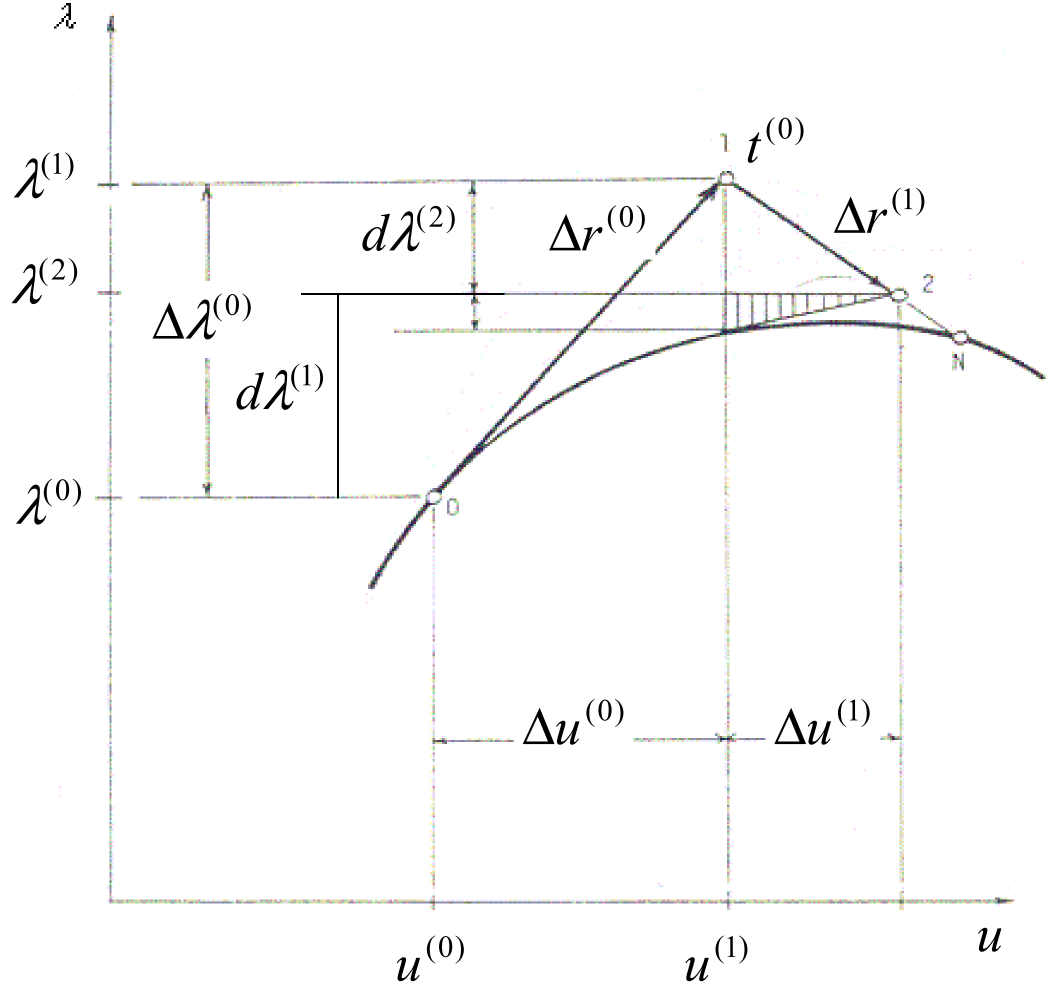
$$u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta u^{(0)}$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^{(0)}$$

$$\Delta u^{(0)} = \Delta\lambda^{(0)}\ \Delta\overline{u}^{(0)}$$

$${}^{t+\Delta t}k^{(0)} \Delta\overline{u}^{(0)} = R$$

$$\Delta\lambda^{(0)} = \pm \frac{{}^{t+\Delta t}\Delta\ell}{\sqrt{\Delta\overline{u}^{(0)^T} \Delta\overline{u}^{(0)} + 1}}$$



Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

III. روش Riks

تکرار روی صفحه نرمال: حل همزمان معادلات تعادل خطی شده و معادله قیدی (همچنان که Riks به این روش حل نمود) باعث می‌شود که تقارن ماتریس سختی و نواری بودن آن حفظ نگردد. برای حل این مساله، Wessels روش دو گامی را مشابه آنچه Batoz و Dhatt پیشنهاد دادند، ارائه داد.

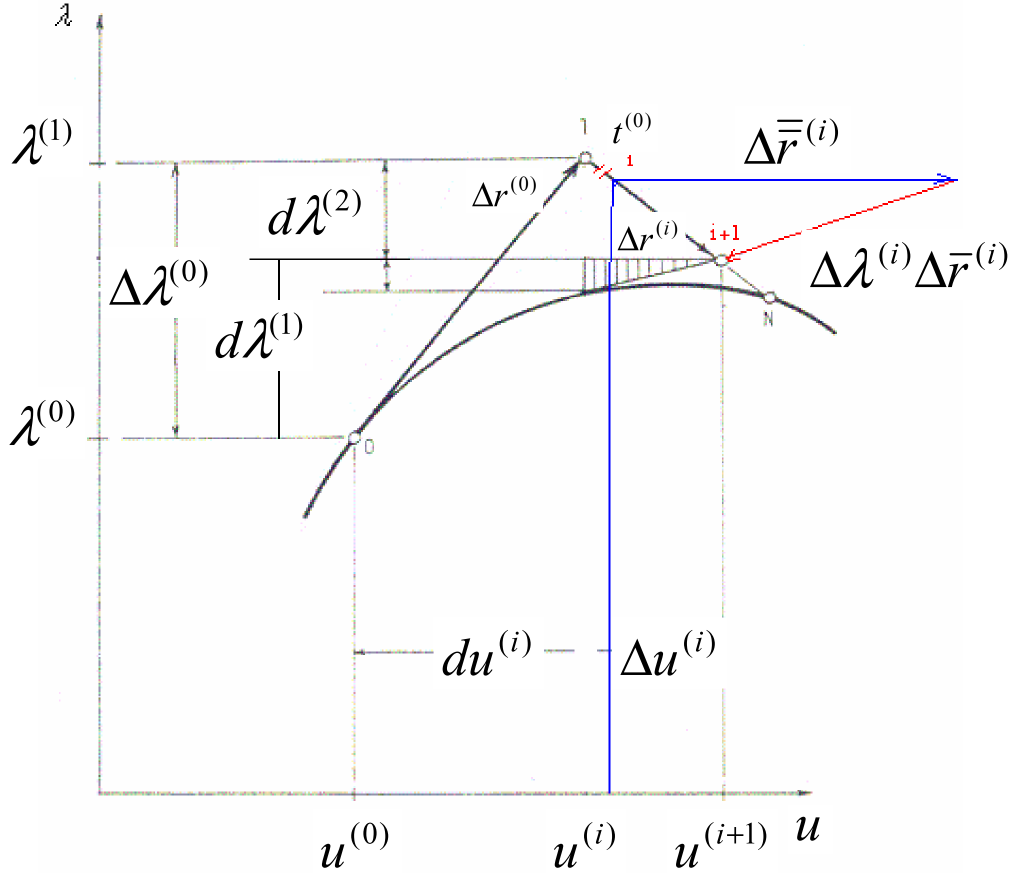
$$\Delta r^{(i)} = \Delta\lambda^{(i)}\Delta\bar{r}^{(i)} + \Delta\bar{\bar{r}}^{(i)}$$

$$\Delta r^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta u^{(i)} \\ \Delta\lambda^{(i)} \end{bmatrix} = \Delta\lambda^{(i)} \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{u}}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (II)$$

$$\Delta u^{(i)} = \Delta\lambda^{(i)}\Delta\bar{u}^{(i)} + \Delta\bar{\bar{u}}^{(i)}$$

$${}^{t}k^{(i-1)}\Delta\bar{u}^{(i)} = R$$

$${}^{t}k^{(i-1)}\,\Delta\bar{\bar{u}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)}\,R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$$



$\Delta\lambda^{(i)}$: از شرط تعامد روش Riks بصورت زیر بدست می آید.

$$\boxed{t^{(0)}.\Delta r^{(i)} = 0}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

III. روش Riks

با استفاده از معادلات (I) و (II) خواهیم داشت:

$$(I)\ \&\ (II) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\lambda^{(i)} = -\frac{\Delta u^{(0)}.\ \Delta\overline{\overline{u}}^{(i)}}{\Delta u^{(0)}.\ \Delta\overline{u}^{(i)} + \Delta\lambda^{(0)}}}$$

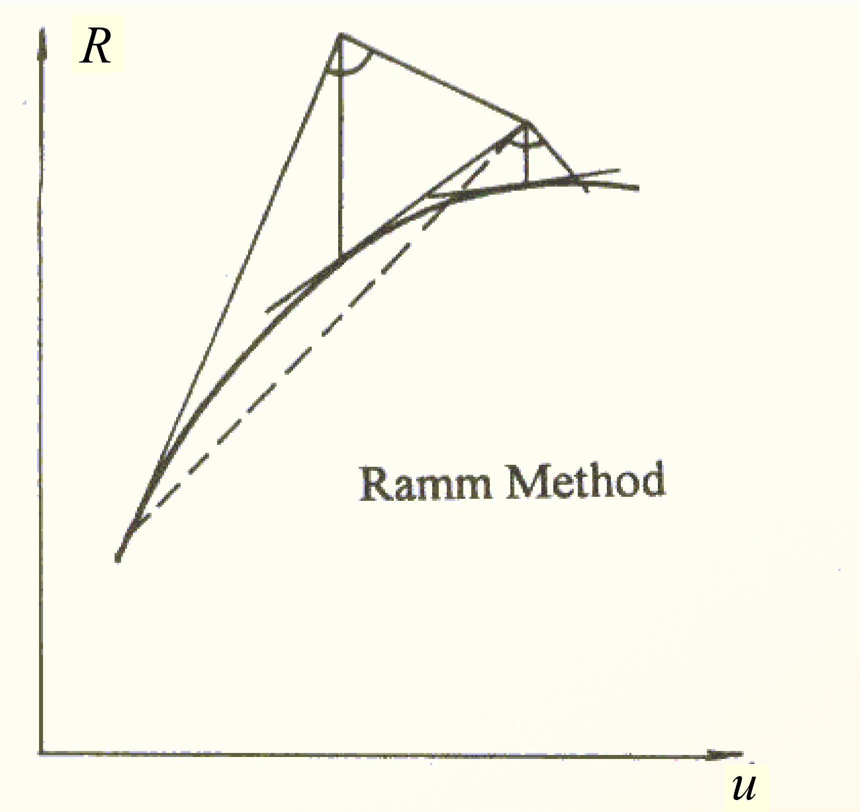
اگر ماتریس سختی در طی تکرار Update نشود، خواهیم داشت :

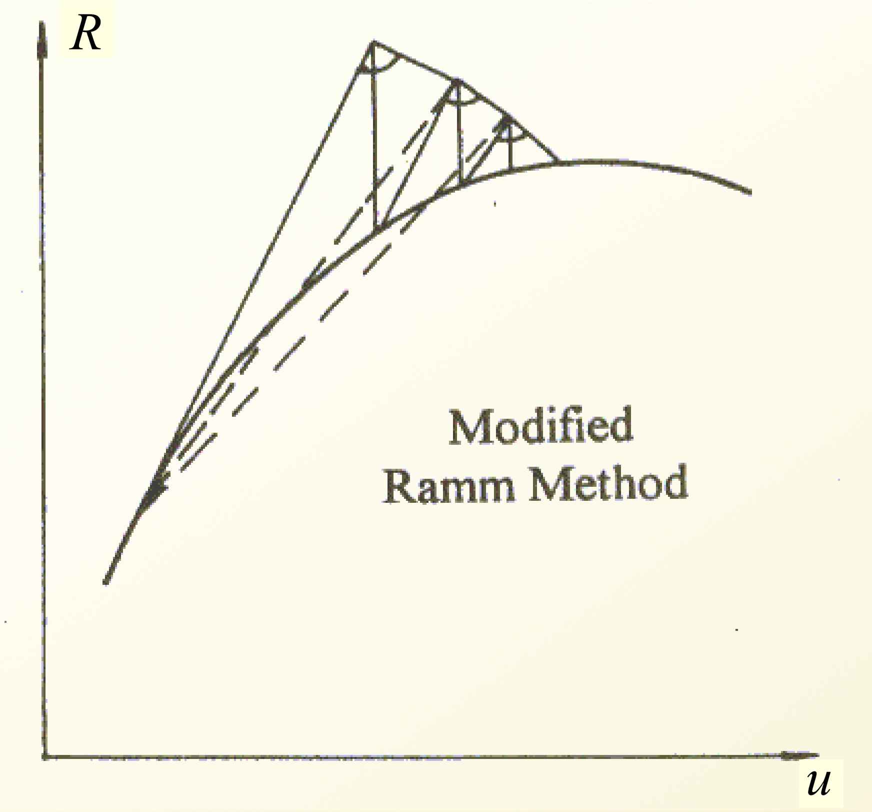
$$\boxed{\begin{gathered} {}^{t}k^{(i-1)} = {}^{t}k \\ \Delta\overline{u}^{(i)} = \Delta\overline{u}^{(0)} \end{gathered}}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

IV. روش Ramm

این روش، اصلاح یافته روش Riks می‌باشد. ایده این روش تجدید شرط تعامد، که در روش Riks بیان شد، در هر تکرار می‌باشد.

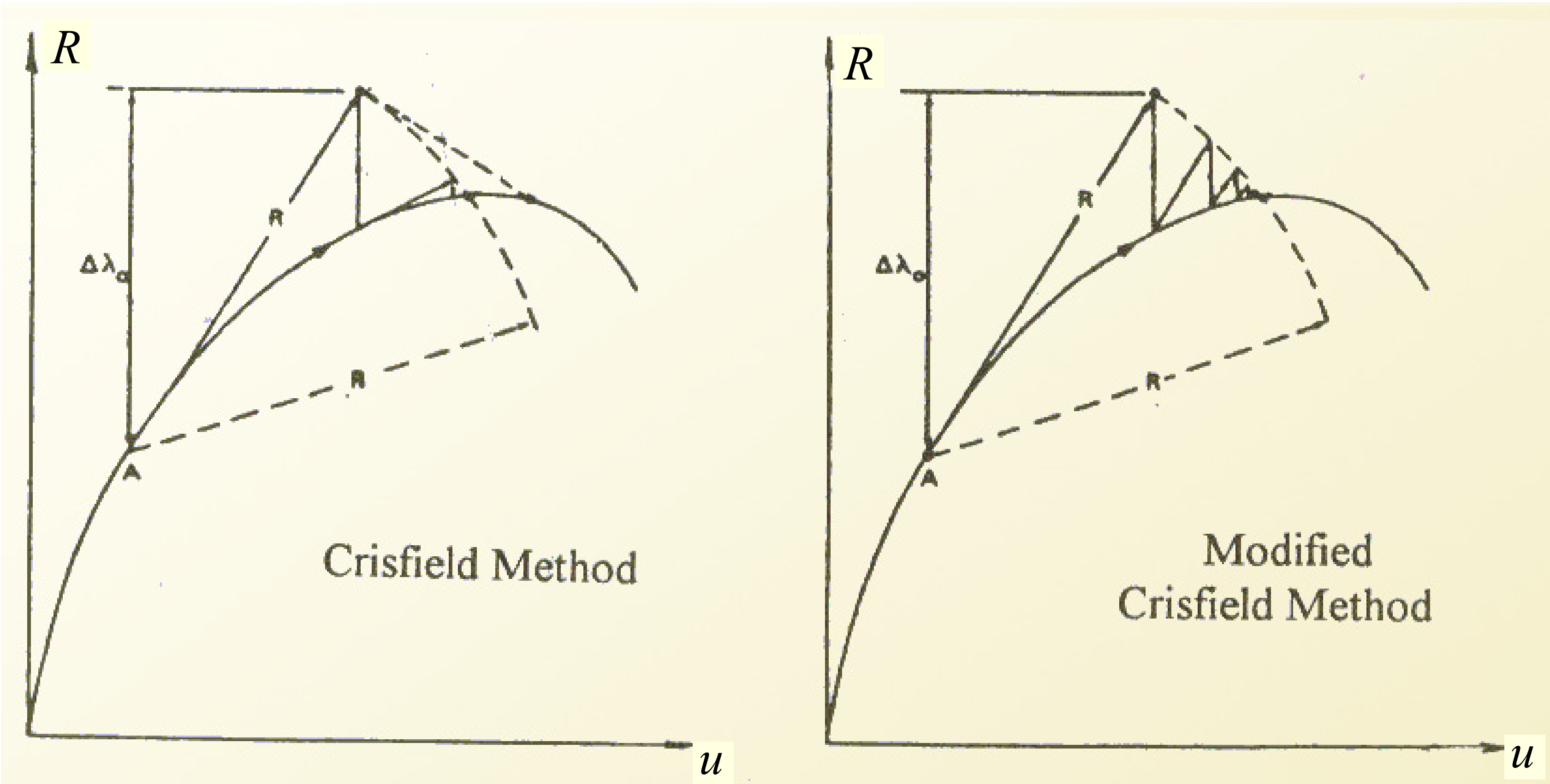




Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

V. روش **Crisfield**

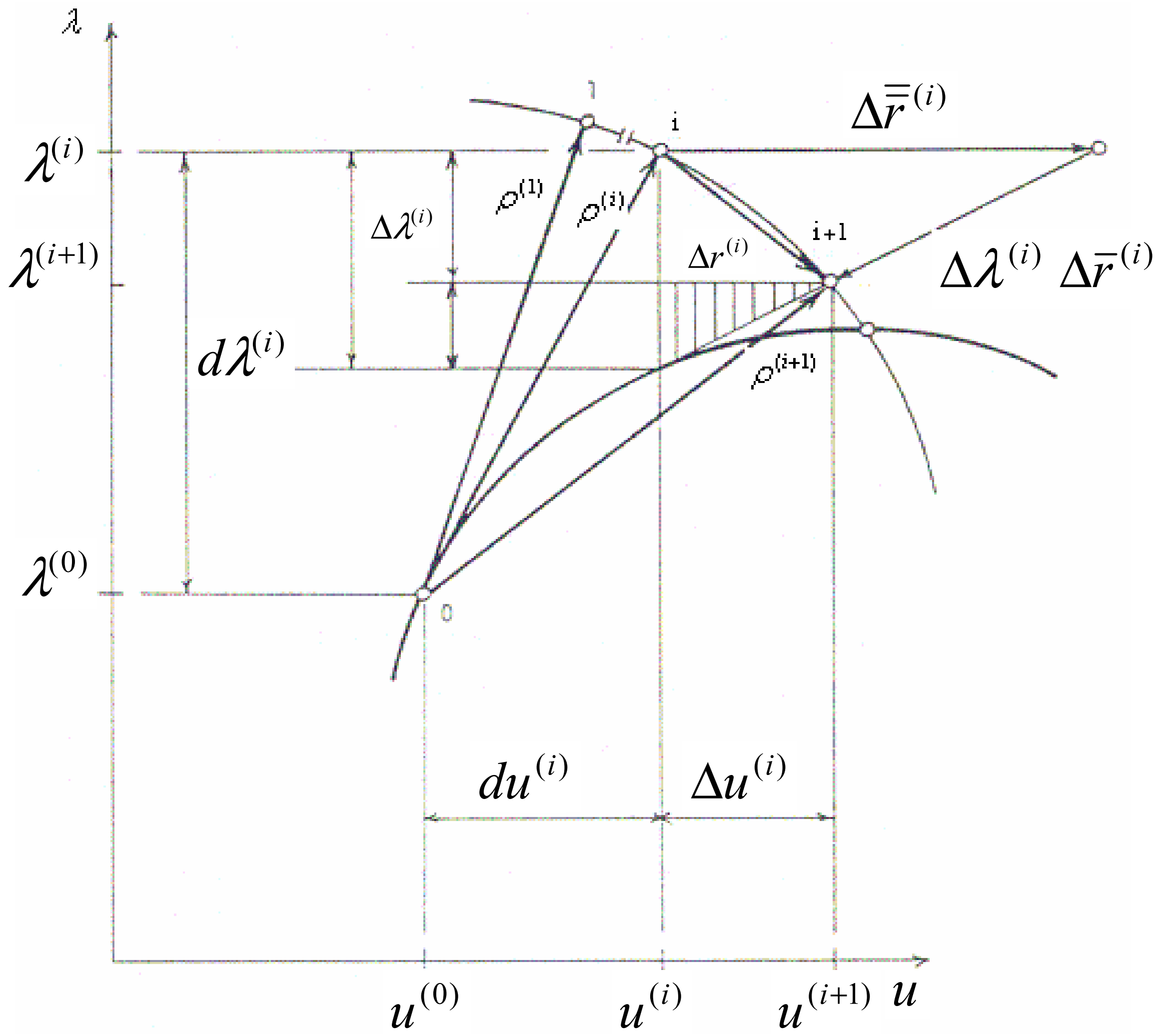
این روش را می‌توان اصلاح یافته روش کلاسیک Riks نامید. در این روش، یک معادله قیدی نمو بار را کنترل می‌کند تا اینکه موجب شود مسیر تکرار، کره‌ای که مرکز آن در نقطه آغازگر تکرار قرار دارد را دنبال نماید.



Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

V. روش Crisfield

در این حالت نیز روش دوگامی ذکر شده در روش Riks را اعمال خواهیم نمود. بجای شرط تعامد ذکر شده در روش Riks، خواهیم داشت:



$$i = 0,1,2,\ldots$$

$$|\rho^{(i+1)}| = \Delta l \qquad (12)$$

$$\rho^{(i+1)} = \rho^{(i)} + \Delta r^{(i)} \qquad (13)$$

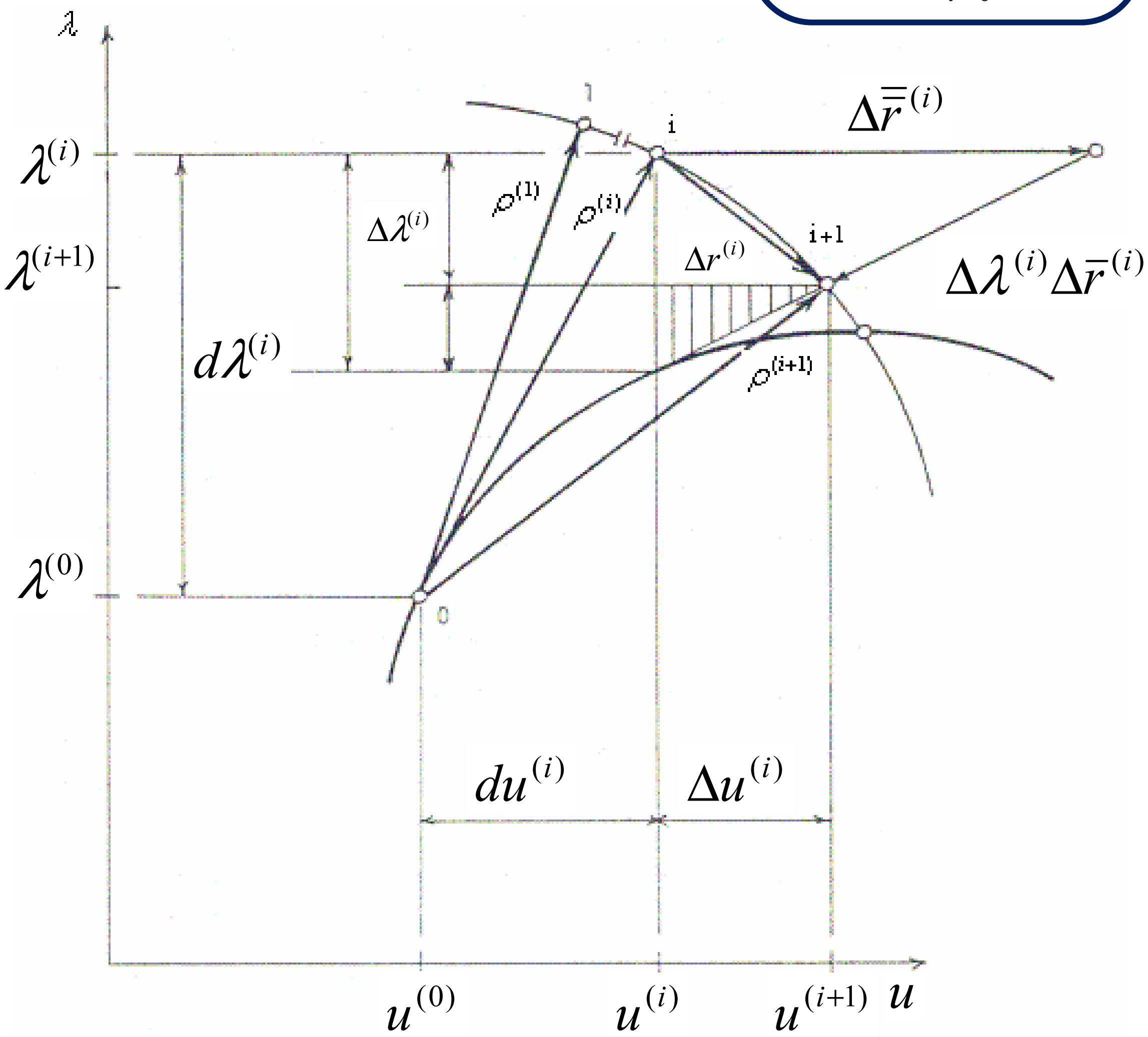
$$\rho^{(i)} = \begin{bmatrix} du^{(i)} \\ d\lambda^{(i)} \end{bmatrix}$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

V. روش Crisfield

$$du^{(i)} = \sum_{i=0}^{i-1} \Delta u^{(i)}$$

$$d\lambda^{(i)} = \sum_{i=0}^{i-1} \Delta \lambda^{(i)}$$



از معادلات12 و 13 نتیجه می‌گیریم :

$$\Delta r^{(i)^T} . \Delta r^{(i)} + 2\, \Delta r^{(i)} . \rho^{(i)} = 0 \qquad (14)$$

$$a\, (\Delta\lambda^{(i)})^2 + 2b\, \Delta\lambda^{(i)} + c = 0$$

که در آن

$$a = 1 + \Delta\overline{u}^{(i)^T} . \Delta\overline{u}^{(i)}$$

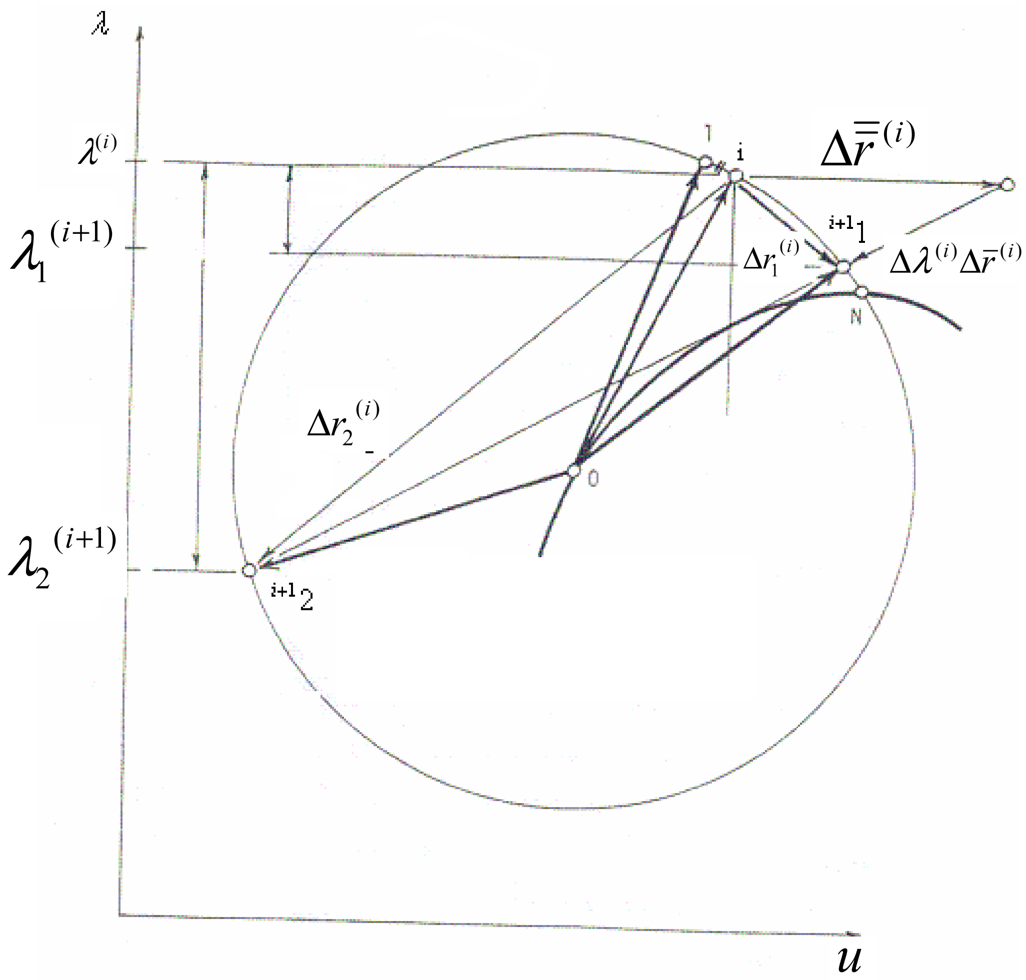
$$b = \lambda^{(i)} + \Delta\overline{u}^{(i)^T} . (\Delta\overline{\overline{u}}^{(i)} + du^{(i)})$$

$$c = \Delta\overline{\overline{u}}^{(i)^T} . (\Delta\overline{\overline{u}}^{(i)} + 2du^{(i)})$$

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

V. روش Crisfield

از حل معادله 14، دو جواب برای $\Delta\lambda^{(i)}$ بدست خواهد آمد. که جواب بزرگ معادل با "doubling back" خواهد بود. بنابراین جواب بهینه، جواب کوچک می‌باشد.



Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

معیارهای همگرایی (Converge Criteria)

معیار همگرایی برای توقف iteration استفاده می‌شود. اگر درست انتخاب نشود مقدار خطاها به طور جمع شونده در stepهای بعدی مشکل‌ساز خواهد بود. ممکن است تعداد iterationها زیاد شود. و یا اینکه همگرایی اتفاق نیافتد.

لزوم استفاده از معیار همگرایی:

- ➢ کنترل جواب برای بررسی همگرایی تکرارهای انجام شده
- ➢ کنترل جواب برای بررسی روند واگرایی در تکرارهای بعدی

ویژگی‌های رواداری همگرایی (Convergence Tolerance):

- ✓ بیش از اندازه سست بودن رواداری همگرایی باعث نتایج غیر دقیق می‌گردد.
- ✓ بیش از اندازه سفت بودن رواداری همگرایی کوشش زیاد برای دقت غیرضروری است.

کنترل غیرموثر واگرایی:

- ❖ به پایان رسیدن تکرار هنگامی که جواب به طور واقعی واگر نشود.
- ❖ ادامه فرآیند تکرار برای جستجوی پاسخی دست نیافتنی.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

1) معیار همگرایی جابجایی (Displacement Converge Criteria)

ε_d : Displacement Convergence Tolerance

$$\frac{\left\|\Delta u^{(i)}\right\|_2}{\left\|{}^{t+\Delta t}u\right\|_2} \le \varepsilon_d$$

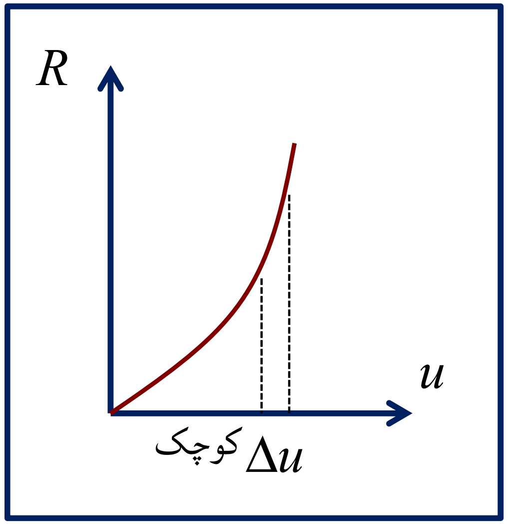
نُرم 2 همان اندازه بردار است.

$$\left\|\mathbf{V}\right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\left|v_i\right|^2\right)^{1/2}$$

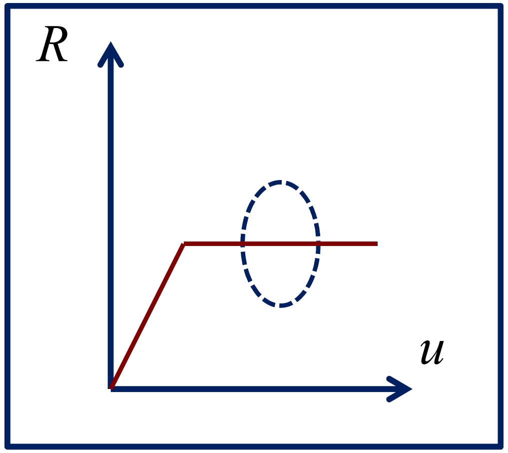
بردار تغییر مکان مجهول است می‌توان از ${}^{t+\Delta t}u^{(i)}$ استفاده کرد

دور بودن جواب حاصل از جواب واقعی هنگامی که تغییرمکان‌های محاسبه شده در هر تکرار اندکی تغییر کند ولی تکرارهای زیادی دارای تغییرات مداومی باشند.

این معیار در در رفتار غیرخطی سخت شونده که منجر به پاسخ تغییرمکان‌های کوچک می‌شود مناسب نیست.



مناسب نیست



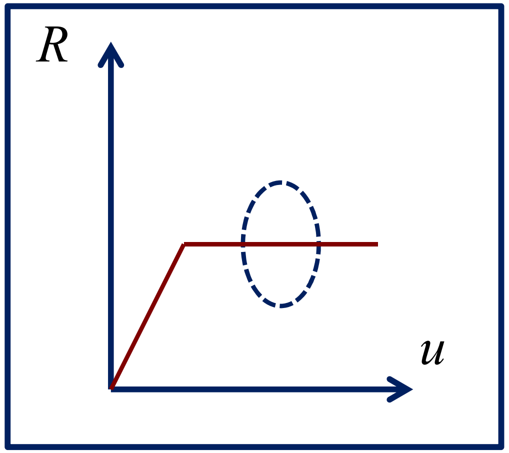
مناسب است

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

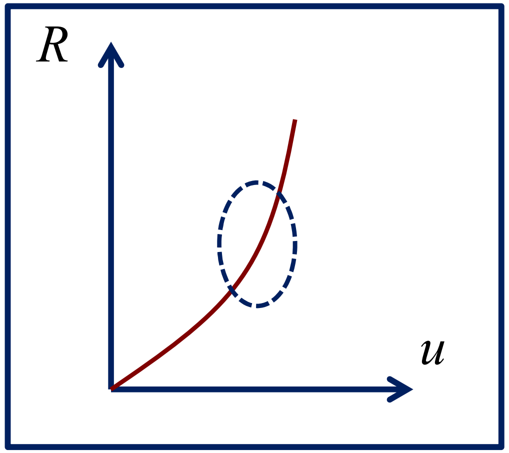
2) معیار همگرایی نیرو (Force Converge Criteria)

$$\boxed{\frac{\left\| {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i)} \right\|_2}{\left\| {}^{t+\Delta t}R - {}^{t}F \right\|_2} \le \varepsilon_f}$$

ε_f : Force Convergence Tolerance



مناسب نیست



مناسب است

3) معیار همگرایی کنترل انرژی (Energy Control Converge Criteria)

$$\boxed{\frac{\Delta u^{(i)^T}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}\right)}{\Delta u^{(1)^T}\left({}^{t+\Delta t}R - {}^{t}F\right)} \le \varepsilon_f}$$

ε_e : Energy Control Convergence Tolerance

این معیار ترکیبی از حالت (1) و (2) است. زمانی کاربرد دارد که ما ندانیم کدام یک از معیارهای (1) یا (2) را باید استفاده کرد.

Solution of Nonlinear Equations in Static Analysis

تمرین

Use a computer program to calculate the response of the plane stress cantilever shown. Use the Von Mises yield condition with isotropic hardening and increase the load P until full collapse of the structure. Compare the solution efficiencies when using the **full Newton-Raphson**, **modified Newton-Raphson**, and the **BFGS methods** and also use a **load-displacement-constraint procedure**.