



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Nonlinear Analysis of Structures

Nonlinear Elastic–Plastic Analysis of Space Frames

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

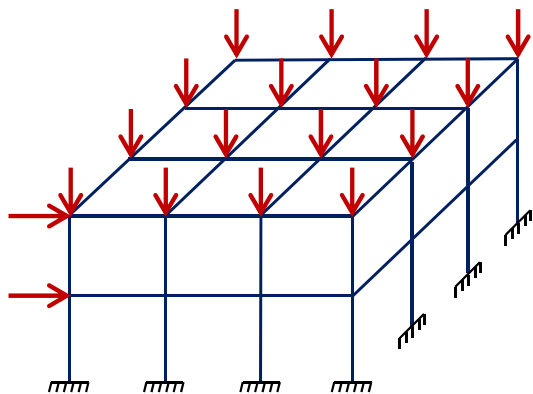
<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Large Deformation Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

فرضیات:

- این روش براساس فرمول‌بندی Eulerian است و اثر انتقال‌ها و دوران‌های بزرگ گره‌ای را در نظر می‌گیرد.
- روابط محلی (Local) نیرو تغییر شکل اعضا براساس روابط تیر-ستون می‌باشد؛ که در آن تغییر طول عضو ناشی از کرنش محوری و اثر Bowing ناشی از خمش لحاظ شده است.
- مصالح به صورت الاستیک-پلاستیک ایده‌آل فرض می‌گردد؛ و تسلیم به صورت متمرکز در دو انتهای عضو به شکل مفصل‌های پلاستیک در نظر گرفته می‌شود.
- اثر نیروی محوری بر روی سختی پیچشی، خمشی و ظرفیت خمش پلاستیک اعضا در نظر گرفته شده است.
- نیروها به صورت بار متمرکز در گره‌ها وارد می‌شود.



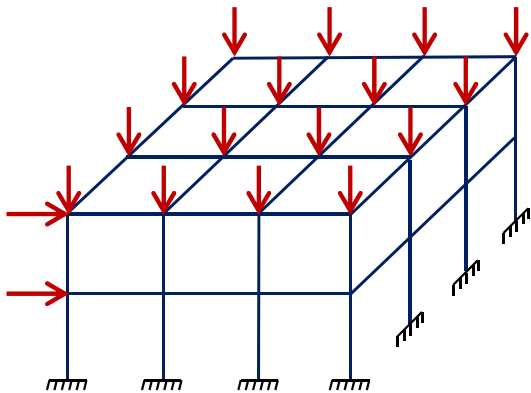
Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Large Deformation Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

دو روش المان محدود پرکاربرد برای آنالیز غیرخطی مصالح و تغییر شکل‌های بزرگ قاب‌های فضایی:

I. Bathe: که فرمول‌های Total Lagrangian و Updated Lagrangian آن براساس اصول مکانیک محیط‌های پیوسته است. به طوری که کرنش‌ها و دوران‌های نمویی جسم صلب، کوچک فرض می‌گردد. اما ممکن است جابجایی‌های انتقالی، بزرگ باشد. غیرخطی مصالح نیز با در نظر گرفتن روابط مشخصه مناسب لحاظ می‌گردد.

II. Argyris: که فرمول‌های آن براساس تکنیک مود طبیعی (Natural Mode Technique) است. در این روش از مفهوم دوران‌های نیمه مماسی برای حل مشکل جمع‌ناپذیر بودن دوران‌های بزرگ در فضا استفاده می‌شود.



در ادامه اصلاح فرمول‌بندی مربوط به تغییر شکل‌های بزرگ با در نظر گرفتن اثرات رفتار مصالح الاستیک - پلاستیک ارائه می‌گردد.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Force-Deformation Relations for Elastic Members

c_{1j} و c_{2j} توابع پایداری خمشی (Bending Stability Functions) نام دارند که خود تابعی از Q است.

در صورتی که Q نیروی محوری فشاری باشد

$$\text{if } Q < 0 \Rightarrow q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} > 0 \\ Q_{cr=Euler} < 0$$

$$c_{1j} = \frac{\phi_j \sin \phi_j - \phi_j^2 \cos \phi_j}{2 - 2 \cos \phi_j - \phi_j \sin \phi_j}, \quad c_{2j} = \frac{\phi_j^2 - \phi_j \sin \phi_j}{2 - 2 \cos \phi_j - \phi_j \sin \phi_j} \quad (5)$$

که در آن

$$\phi_j^2 = \frac{Q \ell^2}{EI_j} \\ q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} = \frac{Q \ell^2}{\pi^2 EI_j} \Rightarrow \phi_j^2 = \pi^2 q_j$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Force-Deformation Relations for Elastic Members

در صورتی که Q نیروی محوری کششی باشد

$$\text{if } Q > 0 \text{ and } Q_{cr=Euler} < 0 \Rightarrow q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} < 0$$

$$c_{1j} = \frac{\psi_j^2 \cosh \psi_j - \psi_j \sinh \psi_j}{2 - 2 \cosh \psi_j + \psi_j \sinh \psi_j}, \quad c_{2j} = \frac{\psi_j \sinh \psi_j - \psi_j^2}{2 - 2 \cosh \psi_j + \psi_j \sinh \psi_j} \quad (6)$$

که در آن

$$\psi_j^2 = -\pi^2 q_j$$

در صورتی که Q نیروی محوری برابر با صفر باشد

$$\text{if } Q = 0 \text{ and } Q_{cr=Euler} < 0 \Rightarrow q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} = 0$$

$$c_{1j} = 4, \quad c_{2j} = 2 \quad (7)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

Force-Deformation Relations for Elastic Members

c_t تابع پایداری پیچشی (Torsional Stability Functions) نام دارند
توجه: در این روابط اندرکنش لنگر و پیچش در نظر گرفته نشده است.

حالت دوم:

$$c_\omega \neq 0, \quad (GJ - Q\bar{r}_0^2) < 0$$

$$c_t = \frac{GJ - Q\bar{r}_0^2}{1 - \frac{2}{kl} \tan(kl/2)} \quad (9)$$

که در آن

$$k = \sqrt{\frac{Q\bar{r}_0^2 - GJ}{E c_\omega}}$$

حالت اول:

$$c_\omega \neq 0, \quad (GJ - Q\bar{r}_0^2) > 0$$

$$c_t = \frac{GJ - Q\bar{r}_0^2}{1 - \frac{2}{kl} \tanh(kl/2)} \quad (8)$$

که در آن

$$k = \sqrt{\frac{GJ - Q\bar{r}_0^2}{E c_\omega}}$$

GJ : صلبیت پیچشی (Torsional Rigidity)

\bar{r}_0 : شعاع ژیراسیون قطبی (Polar radius of gyration)

c_ω : ثابت اعوجاج (Warping Constant)

حالت سوم:

$$c_\omega = 0$$

$$c_t = GJ - Q\bar{r}_0^2 \quad (10)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Force-Deformation Relations for Elastic Members

در رابطه (4) c_{bj} ضریب اصلاح طول ناشی از تغییر شکل خمشی (Bowling) حول محور \bar{X}_j است

$$c_{bj} = b_{1j}(\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b_{2j}(\theta_{1j} - \theta_{2j})^2 \quad (11) \quad (\text{Stability Functions})$$

که در آن

b_{1j} و b_{2j} (Bowling Functions) است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$b_{1j} = \frac{(c_{1j} + c_{2j})(c_{2j} - 2)}{8\pi^2 q_j}, \quad b_{2j} = \frac{c_{2j}}{8(c_{1j} + c_{2j})} \quad (12)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Force-Deformation Relations for Elastic Members

Series Expressions

$$c_{1j} = 4 - \frac{2}{15} \pi^2 q_j - \frac{11}{6300} \pi^4 q_j^2 - \frac{1}{27000} \pi^6 q_j^3$$

$$c_{2j} = 2 + \frac{1}{30} \pi^2 q_j + \frac{13}{12600} \pi^4 q_j^2 + \frac{11}{378000} \pi^6 q_j^3$$

$$c'_{1j} = -\frac{2}{15} \pi^2 - \frac{11}{3150} \pi^4 q_j - \frac{1}{9000} \pi^6 q_j^2$$

$$c'_{2j} = \frac{1}{30} \pi^2 + \frac{13}{6300} \pi^4 q_j + \frac{11}{126000} \pi^6 q_j^2$$

$$b_{1j} = \frac{1}{40} + \frac{1}{2800} \pi^2 q_j + \frac{1}{168000} \pi^4 q_j^2 + \frac{37}{388080000} \pi^6 q_j^3$$

$$b_{2j} = \frac{1}{24} + \frac{1}{720} \pi^2 q_j + \frac{1}{20160} \pi^4 q_j^2 + \frac{1}{604800} \pi^6 q_j^3$$

$$b'_{1j} = \frac{1}{2800} \pi^2 + \frac{1}{84000} \pi^4 q_j + \frac{37}{129360000} \pi^6 q_j^2$$

$$b'_{2j} = \frac{1}{720} \pi^2 + \frac{1}{10080} \pi^4 q_j + \frac{1}{201600} \pi^6 q_j^2$$

این عبارات برحسب سری، که برای هر دو حالت نیروی محوری کششی و فشاری معتبر است، برای مقادیر کوچک q صادق است.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Large Deformation Elastic-Plastic Analysis

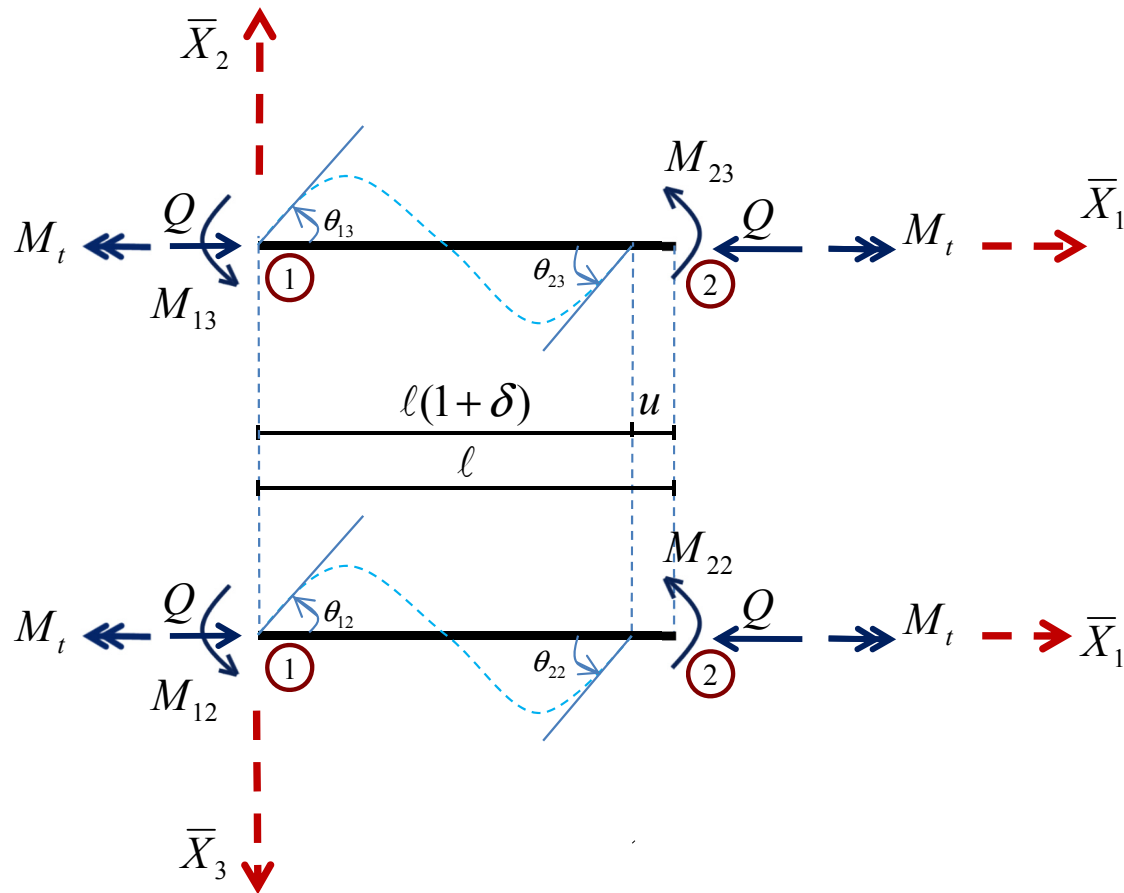


Fig. 2. Relative Member Deformations and Corresponding Forces

رابطه نمویی بین تغییر شکل نسبی اعضا و نیروهای متناظر به صورت زیر است:

$$\{\Delta \bar{S}\} = [t] \{\Delta \bar{u}\} \quad (13)$$

بردار $\{\Delta \bar{u}\}$ نشان دهنده مقادیر نمویی تغییر شکل های نسبی عضو است

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \theta_{13} & \bar{u}_2 &= \theta_{23} & \bar{u}_3 &= \theta_{12} \\ \bar{u}_4 &= \theta_{22} & \bar{u}_5 &= \Phi_t & \bar{u}_6 &= u/l \end{aligned} \quad (14)$$

بردار تغییر شکل های نسبی عضو $\{\bar{S}\}$ نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= M_{13} & \bar{S}_2 &= M_{23} & \bar{S}_3 &= M_{12} \\ \bar{S}_4 &= M_{22} & \bar{S}_5 &= M_t & \bar{S}_6 &= Ql \end{aligned} \quad (15)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Large Deformation Elastic-Plastic Analysis

در رابطه (13) ماتریس سختی مماسی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$[t] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \varepsilon_3 c_{13} + \frac{G_{13}^2}{\pi^2 H} & \varepsilon_3 c_{23} + \frac{G_{13} G_{23}}{\pi^2 H} & \frac{G_{13} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{13} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{13}}{H} \\ \varepsilon_3 c_{23} + \frac{G_{13} G_{23}}{\pi^2 H} & \varepsilon_3 c_{13} + \frac{G_{23}^2}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{23}}{H} \\ \frac{G_{13} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{12}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{12} + \frac{G_{12}^2}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{22} + \frac{G_{12} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{12}}{H} \\ \frac{G_{13} G_{22}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{22}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{22} + \frac{G_{12} G_{22}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{12} + \frac{G_{22}^2}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{22}}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_t}{EI} & 0 \\ \frac{G_{13}}{H} & \frac{G_{23}}{H} & \frac{G_{12}}{H} & \frac{G_{22}}{H} & 0 & \frac{\pi^2}{H} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Large Deformation Elastic-Plastic Analysis

که در رابطه (16)

$$\begin{aligned} G_{1j} &= c'_{1j} \theta_{1j} + c'_{2j} \theta_{2j} \\ G_{2j} &= c'_{2j} \theta_{1j} + c'_{1j} \theta_{2j} \end{aligned} \quad (17)$$

c'_{1j} و c'_{2j} مشتق نسبت به q_j

$$H = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \sum_{j=2,3} \frac{1}{\varepsilon_j} [b'_{1j} (\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b'_{2j} (\theta_{1j} - \theta_{2j})^2] \quad (18)$$

در این روابط

$$\varepsilon_j = \frac{I_j}{I} \quad , \quad \lambda = \frac{\ell}{\sqrt{I/A}} \quad (19)$$

I : ممان اینرسی مرجع اختیاری است.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Inelastic Effects

توسعه فرمول بندی الاستیک قاب‌های سه بعدی

فرضیات:

- رفتار مصالح الاستیک - پلاستیک ایده‌آل

- جاری شدن در انتهای اعضا به صورت مفصل پلاستیک (متمرکز)

- اعضا در طول بین دو مفصل پلاستیک به صورت الاستیک باقی می‌مانند.

- از اثرات کرنش سخت‌شوندگی و باربرداری الاستیک (برگشت تنش) در مفاصل پلاستیک صرف نظر شده است.

تعدیل‌ها و تصحیح‌های لازم:

- تعیین معیاری جهت جاری شدن (تشکیل مفصل پلاستیک)

- تصحیح روابط نیرو - تغییر شکل به علت وجود مفصل پلاستیک

روابط بر اساس اتصال گیردار بوده باید برای مفصل پلاستیک اصلاح شود.

- تصحیح [t] به علت وجود مفصل پلاستیک

- تصحیح [r] به علت وجود مفصل پلاستیک

- روابط لازم برای محاسبه نیروی محوری اعضا با استفاده از

تغییر شکل‌های نسبی و ظرفیت ممان پلاستیک.

بعد از تسلیم ممان ثابت نمی‌ماند ($P - M - \bar{M}$)
P افزایش M نیز افزایش پیدا می‌کند.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Inelastic Effects

معیار تسلیم (Yielding Criteria) برای تشکیل مفاصل پلاستیک به صورت زیر فرض می‌گردد:

$$g_i = \left[\left(\frac{\bar{M}_t}{M_{p1}} \right)^2 + \sum_{j=2}^3 \left(\frac{\bar{M}_{ij}}{M_{pj}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\bar{Q}}{Q_y} \right)^2 \quad (i=1, 2) \quad (20)$$

$$Q_y = F_y A \quad (21)$$

\bar{M}_t : لنگر پیچشی زمانی که مفاصل پلاستیک در انتهای i عضو تشکیل شده است.

\bar{Q} : نیروی محوری، زمانی که مفاصل پلاستیک در انتهای عضو تشکیل شده است.

\bar{M}_{ij} : لنگر در گره i ام حول محور \bar{X}_j زمانی که در انتهای i عضو مفاصل پلاستیک تشکیل شده است.

M_{p1} : ممان پلاستیکی که مقطع در پیش خالص (در غیاب نیروی محوری و لنگر خمشی) می‌تواند تحمل کند.

M_{pj} : ممان پلاستیکی تک محوره حول محور \bar{X}_j ($j=2,3$) که مقطع در خمش خالص می‌تواند تحمل کند.

F_y : تنش تسلیم

$g_i < 1 \Rightarrow$ مقطع الاستیک

$g_i = 1 \Rightarrow$ مقطع در مرز پلاستیک

$g_i > 1 \Rightarrow$ تعریف نشده است.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Inelastic Effects

زمانی که مفصل‌های پلاستیک ظاهر می‌شوند دوران‌های نسبی انتهای عضو در مفصل‌های انتهایی به جای استفاده از ماتریس‌های جهت‌گیری گره‌های مجاور، از روابط تغییر شکل‌های نسبی و نیروهای متناظر عضو، روابط (1) تا (4)، به دست می‌آیند.

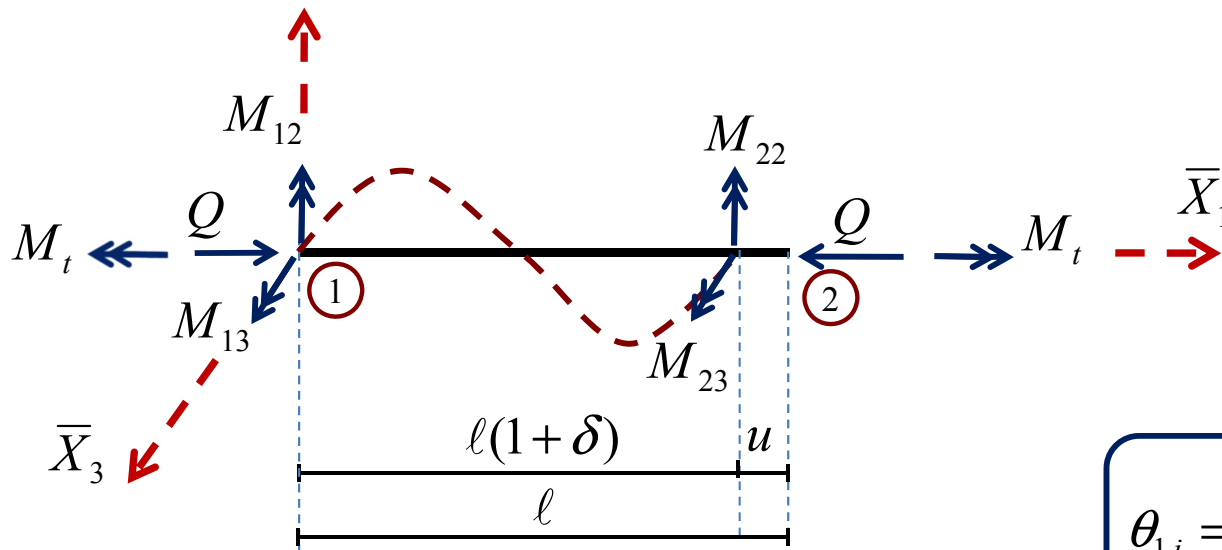


Fig. 1. Member Forces

یا توجه به شکل (1)

با فرض وجود مفصل پلاستیک در انتهای 1 عضو

$$\theta_{1j} = \frac{\ell \bar{M}_{1j}}{EI_j c_{1j}} - \frac{c_{2j}}{c_{1j}} \theta_{2j} \quad (j = 2, 3) \quad (22)$$

با فرض وجود مفصل پلاستیک در انتهای 2 عضو

$$\theta_{2j} = \frac{\ell \bar{M}_{2j}}{EI_j c_{1j}} - \frac{c_{2j}}{c_{1j}} \theta_{1j} \quad (j = 2, 3) \quad (23)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Inelastic Effects

با فرض وجود مفصل پلاستیک در دو انتهای عضو

$$\theta_{1j} = \frac{\ell(c_{1j}\bar{M}_{1j} - c_{2j}\bar{M}_{2j})}{EI_j(c_{1j}^2 - c_{2j}^2)} \quad (j = 2, 3) \quad (24)$$

$$\theta_{2j} = \frac{\ell(c_{1j}\bar{M}_{2j} - c_{2j}\bar{M}_{1j})}{EI_j(c_{1j}^2 - c_{2j}^2)} \quad (j = 2, 3) \quad (25)$$

$$\phi_t = \frac{\ell\bar{M}_t}{c_t} \quad (26)$$

در هر یک از سه حالت مطرح شده، زوایه پیچش نسبی انتهای عضو برابر است با

در حالی که مفصل‌ها واقعی باشد، در روابط (22) تا (26) $\bar{M}_{1j} = \bar{M}_{2j} = \bar{M}_t = 0$

برای عضوی که دارای مفصل واقعی در یک انتها و در انتهای دیگر دارای مفصل پلاستیک باشد، دوران‌های نسبی انتهایی θ_{1j} و θ_{2j} از روابط (24) و (25) به دست می‌آیند.

برای مثال اگر عضوی دارای یک مفصل حقیقی در انتهای 1 و یک مفصل پلاستیک در انتهای 2 باشد

$$\theta_{1j} = -\frac{\ell c_{2j}\bar{M}_{2j}}{EI_j(c_{1j}^2 - c_{2j}^2)} ; \theta_{2j} = \frac{\ell c_{1j}\bar{M}_{2j}}{EI_j(c_{1j}^2 - c_{2j}^2)} \quad (j = 2, 3) \quad (27)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Inelastic Effects

[t] ماتریس سختی مماسی در رابطه (16) برای تغییر شکل‌های نسبی عضوایی که دارای مفصل در دو انتها می‌باشد به این صورت به دست می‌آید که:

مختصات آزاد شده از روابط (1) تا (4) حذف می‌گردد. از روابط به دست آمده، جمله به جمله، نسبت به مختصات باقی‌مانده مشتق گرفته می‌شود. اگر از تغییرات نمویی در ظرفیت‌های لنگر پلاستیک صرف نظر شود (یعنی با مفصل‌های پلاستیک مانند مفصل‌های واقعی رفتار شود) درایه‌های غیر صفر ماتریس 6×6 [t] به صورت زیر به دست می‌آید.

برای عضوایی که دارای یک مفصل در انتهای 1 است:

$$t_{ij} = t_{ji} = \frac{a_{ij}}{z_{11}z_{33} - z_{13}^2} \quad (\text{for } i, j = 2, 4, 6) \quad (28)$$

که در آن

$$a_{ij} = z_{1i}z_{13}z_{3j} - z_{1i}z_{1j}z_{33} + z_{13}z_{i3}z_{1j} - z_{11}z_{i3}z_{3j} + z_{11}z_{ij}z_{33} - z_{13}^2 z_{ij} \quad (29)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Inelastic Effects

برای عضوی که دارای یک مفصل در انتهای 2 است:

$$t_{ij} = t_{ji} = \frac{a_{ij}}{Z_{22}Z_{44} - Z_{24}^2} \quad (\text{for } i, j = 1, 3, 6) \quad (30)$$

که در آن

$$a_{ij} = Z_{i2}Z_{24}Z_{j4} - Z_{i2}Z_{2j}Z_{44} + Z_{ij}Z_{22}Z_{44} - Z_{ij}Z_{24}^2 + Z_{i4}Z_{2j}Z_{24} - Z_{i4}Z_{22}Z_{j4} \quad (31)$$

و برای عضوی که در دو انتها دارای مفصل باشد:

$$t_{66} = AE\ell \quad (32)$$

در روابط (28) تا (31) پارامترهای Z_{ij} مربوط به درایه‌های ماتریس سختی مماسی $[t]$ ، رابطه (16)، است که در انتهای عضو مفصلی وجود نداشته باشد (یعنی t در حالت الاستیک).

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Inelastic Effects

در روابط (28) تا (31) از تغییرات نمویی در ظرفیت‌های لنگر پلاستیک صرف نظر شده است

$$\Delta \bar{M}_{1j} = \Delta \bar{M}_{2j} = \Delta \bar{M}_t = 0$$

همچنین در رابطه (32) از اثر Bowing خمشی بر روی نیروی محوری عضو صرف نظر شده است

$$\Delta c_{bj} = 0$$

باید توجه شود که این ساده سازی‌ها تنها به ماتریس‌های سختی مماسی محدود می‌شود و برای معادلات تعادل سیستم لحاظ نمی‌گردد. زمانی که از تکرار Newton Raphson برای حل معادلات تعادل سیستم استفاده می‌شود؛ هرگونه تقریب محدود به ماتریس‌های سختی مماسی، به طور معمول بر روی نرخ همگرایی در فرآیند تکرار اثر گذاشته اما تاثیری بر روی روند همگرایی به پاسخ واقعی ندارد.

ماتریس سختی مماسی عضو $[T]$ در دستگاه مختصات کلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[T] = [R][\bar{B}][t][\bar{B}]^T [R]^T + \sum_{k=1}^6 \bar{S}_k [R][\bar{g}^{(k)}][R]^T \quad (33)$$

پارامترهای موجود در رابطه (33) در بخش (4) معرفی شده است.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Solution Technique

روند محاسباتی مشابه با روش افزایش بارِ نمویی همراه با Newton Raphson تکرار شونده در آنالیز الاستیک تغییر شکل‌های بزرگ قاب فضایی است. به جز آن که در اینجا از روابط ارائه شده در ارتباط با نیرو- تغییر شکل و سختی مماسی برای آزاد سازی اعضا ناشی از مفصل پلاستیک استفاده شده است.

در رابطه (4) مربوط به نیروی محوری اعضا Q شامل Bowing Functions، b_{1j} و b_{2j} ، و دوران‌ها در انتهای آزاد شده است؛ که این توابع خود تابعی از Q می‌باشند. با استفاده از یک روند تکرار شونده نیروی محوری یک عضو براساس هندسه تغییر شکل یافته معلوم محاسبه می‌شود. برای انجام این کار باید رابطه (4) برحسب یک پارامتر نیروی محوری بدون بعد نوشته می‌شود.

$$K(q) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} q + \sum_{j=2}^3 c_{bj} - \frac{u}{\ell} = 0 \quad (34)$$

که در آن

$$q = \frac{Q\ell^2}{\pi^2 EI} \quad , \quad \lambda = \frac{\ell}{\sqrt{I/A}} \quad (35)$$

I : ممان اینرسی مرجع اختیاری است.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Solution Technique

راه حل تقریبی به صورت زیر می باشد:

$$q_{i+1} = q_i + \Delta q_i = q_i - \frac{K(q_i)}{K'(q_i)} \quad (36)$$

Δq به اندازه کافی کوچک است.

که در آن

$$K'(q_i) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \sum_{j=2}^3 c'_{bj} \quad (37)$$

$$c'_{bj} = b'_{1j}(\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b'_{2j}(\theta_{1j} - \theta_{2j})^2 + 2b_{1j}(\theta_{1j} + \theta_{2j})(\theta'_{1j} + \theta'_{2j}) + 2b_{2j}(\theta_{1j} - \theta_{2j})(\theta'_{1j} - \theta'_{2j}) \quad (38)$$

$(j = 2, 3)$

عبارت‌های θ'_{ij} در انتهای اعضای بدون مفصل که به صورت صلب به گره‌ها متصل شده است برابر با صفر است.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Solution Technique

برای یک عضو دارای مفصل عبارت θ'_{ij} در انتهای آزاد با مشتق‌گیری از روابط (22) تا (27) نسبت به q به دست می‌آید. بنابراین برای یک عضو با مفصل پلاستیک در انتهای 1

$$\theta'_{1j} = \frac{\ell}{EI_j c_{1j}^2} (\bar{M}'_{1j} c_{1j} - \bar{M}_{1j} c'_{1j}) + \frac{\theta_{2j}}{c_{1j}^2} (c'_{1j} c_{2j} - c_{1j} c'_{2j}) \quad , \quad (j = 2, 3) \quad (39)$$

برای یک عضو با مفصل پلاستیک در انتهای 2

$$\theta'_{2j} = \frac{\ell}{EI_j c_{1j}^2} (\bar{M}'_{2j} c_{1j} - \bar{M}_{2j} c'_{1j}) + \frac{\theta_{1j}}{c_{1j}^2} (c'_{1j} c_{2j} - c_{1j} c'_{2j}) \quad , \quad (j = 2, 3) \quad (40)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Solution Technique

و برای عضوی که در دو انتها دارای مفصل باشد:

$$\theta'_{1j} = \frac{\ell}{EI_j (c_{1j}^2 - c_{2j}^2)^2} [(c'_{1j} \bar{M}_{1j} + c_{1j} \bar{M}'_{1j} - c'_{2j} \bar{M}_{2j} - c_{2j} \bar{M}'_{2j})$$
$$(c_{1j}^2 - c_{2j}^2) - 2(c_{1j} \bar{M}_{1j} - c_{2j} \bar{M}_{2j})(c_{1j} c'_{1j} - c_{2j} c'_{2j})] \quad , \quad (j = 2, 3) \quad (41)$$

$$\theta'_{2j} = \frac{\ell}{EI_j (c_{1j}^2 - c_{2j}^2)^2} [(c'_{1j} \bar{M}_{2j} + c_{1j} \bar{M}'_{2j} - c'_{2j} \bar{M}_{1j} - c_{2j} \bar{M}'_{1j})$$
$$(c_{1j}^2 - c_{2j}^2) - 2(c_{1j} \bar{M}_{2j} - c_{2j} \bar{M}_{1j})(c_{1j} c'_{1j} - c_{2j} c'_{2j})] \quad , \quad (j = 2, 3) \quad (42)$$

در روابط (39) تا (42) \bar{M}'_{ij} ، مشتق ظرفیت لنگر پلاستیک، از مشتق‌گیری تابع تسلیم رابطه (20) نسبت به نیروی محوری q به دست می‌آید.

در حالتی که مفصل‌ها واقعی باشد در روابط (39) تا (42)

$$\bar{M}_{ij} = \bar{M}'_{ij} = 0$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Solution Technique

$$\begin{aligned}\bar{M}'_{12} &= \frac{d\bar{M}_{12}}{dq} = \frac{\partial\bar{M}_{12}}{\partial\bar{Q}} \cdot \frac{\partial\bar{Q}}{\partial q} + \frac{\partial\bar{M}_{12}}{\partial\bar{M}_t} \cdot \frac{\partial\bar{M}_t}{\partial\bar{Q}} \cdot \frac{d\bar{Q}}{dq} + \frac{\partial\bar{M}_{12}}{\partial\bar{M}_{13}} \cdot \frac{\partial\bar{M}_{13}}{\partial\bar{Q}} \cdot \frac{d\bar{Q}}{dq} \\ \bar{M}'_{13} &= \frac{d\bar{M}_{13}}{dq} = \frac{\partial\bar{M}_{13}}{\partial\bar{Q}} \cdot \frac{\partial\bar{Q}}{\partial q} + \frac{\partial\bar{M}_{13}}{\partial\bar{M}_t} \cdot \frac{\partial\bar{M}_t}{\partial\bar{Q}} \cdot \frac{d\bar{Q}}{dq} + \frac{\partial\bar{M}_{13}}{\partial\bar{M}_{12}} \cdot \frac{\partial\bar{M}_{12}}{\partial\bar{Q}} \cdot \frac{d\bar{Q}}{dq}\end{aligned}\quad (43)$$

$$\frac{\partial\bar{M}_t}{\partial\bar{Q}} = \frac{A}{[(g_1 - (\bar{Q}/Q_y)^2)^2 - (\bar{M}_{12}/M_{p2})^2 - (\bar{M}_{13}/M_{p3})^2]^{0.5}}, \quad A = \left(\frac{-2}{Q_y^2}\right) \bar{Q} (1 - (\bar{Q}/Q_y)^2) \quad (44)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{M}_{12}}{\partial\bar{Q}} &= \frac{A}{[(g_1 - (\bar{Q}/Q_y)^2)^2 - (\bar{M}_{13}/M_{p3})^2 - (\bar{M}_t/M_{p1})^2]^{0.5}} \\ \frac{\partial\bar{M}_{13}}{\partial\bar{Q}} &= \frac{A}{[(g_1 - (\bar{Q}/Q_y)^2)^2 - (\bar{M}_t/M_{p1})^2 - (\bar{M}_{12}/M_{p2})^2]^{0.5}}\end{aligned}\quad (45)$$

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Solution Technique

$$\frac{\partial \bar{M}_{12}}{\partial \bar{M}_t} = \frac{-(M_{p2} / M_{p1}^2) \bar{M}_t}{[(g_1 - (\bar{Q} / Q_y)^2)^2 - (\bar{M}_{13} / M_{p3})^2 - (\bar{M}_t / M_{p1})^2]^{0.5}} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{12}}{\partial \bar{M}_{13}} = \frac{-(M_{p2} / M_{p3}^2) \bar{M}_{13}}{[(g_1 - (\bar{Q} / Q_y)^2)^2 - (\bar{M}_{13} / M_{p3})^2 - (\bar{M}_t / M_{p1})^2]^{0.5}}$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{13}}{\partial \bar{M}_t} = \frac{-(M_{p3} / M_{p1}^2) \bar{M}_t}{[(g_1 - (\bar{Q} / Q_y)^2)^2 - (\bar{M}_t / M_{p1})^2 - (\bar{M}_{12} / M_{p2})^2]^{0.5}} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{13}}{\partial \bar{M}_{12}} = \frac{-(M_{p3} / M_{p2}^2) \bar{M}_{12}}{[(g_1 - (\bar{Q} / Q_y)^2)^2 - (\bar{M}_t / M_{p1})^2 - (\bar{M}_{12} / M_{p2})^2]^{0.5}}$$

مشابه عملیات بالا انجام می‌گیرد \bar{M}'_{23} و \bar{M}'_{22}

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Solution Technique

بعد از آن که نیروی محوری عضو با روند تکراری تعیین شد؛ لنگرهای انتهایی اعضا از روابط (1) تا (3) به دست می‌آید. زمانی که در مقاطع انتهایی معیار تسلیم، رابطه (20)، برقرار شد، مفصل‌های پلاستیک به اعضای مربوطه اضافه می‌گردد. اگر مفصل‌های پلاستیک قبلاً در انتهای عضو تشکیل شده باشد، ظرفیت لنگر آن به صورت زیر بروز می‌گردد:

$$\Delta \bar{M}_{ij} = \left(\frac{\ell^2}{\pi^2 EI} \right) \bar{M}'_{ij}(\Delta Q) \quad , \quad (i=1, 2 \quad , \quad j=2, 3) \quad (48)$$

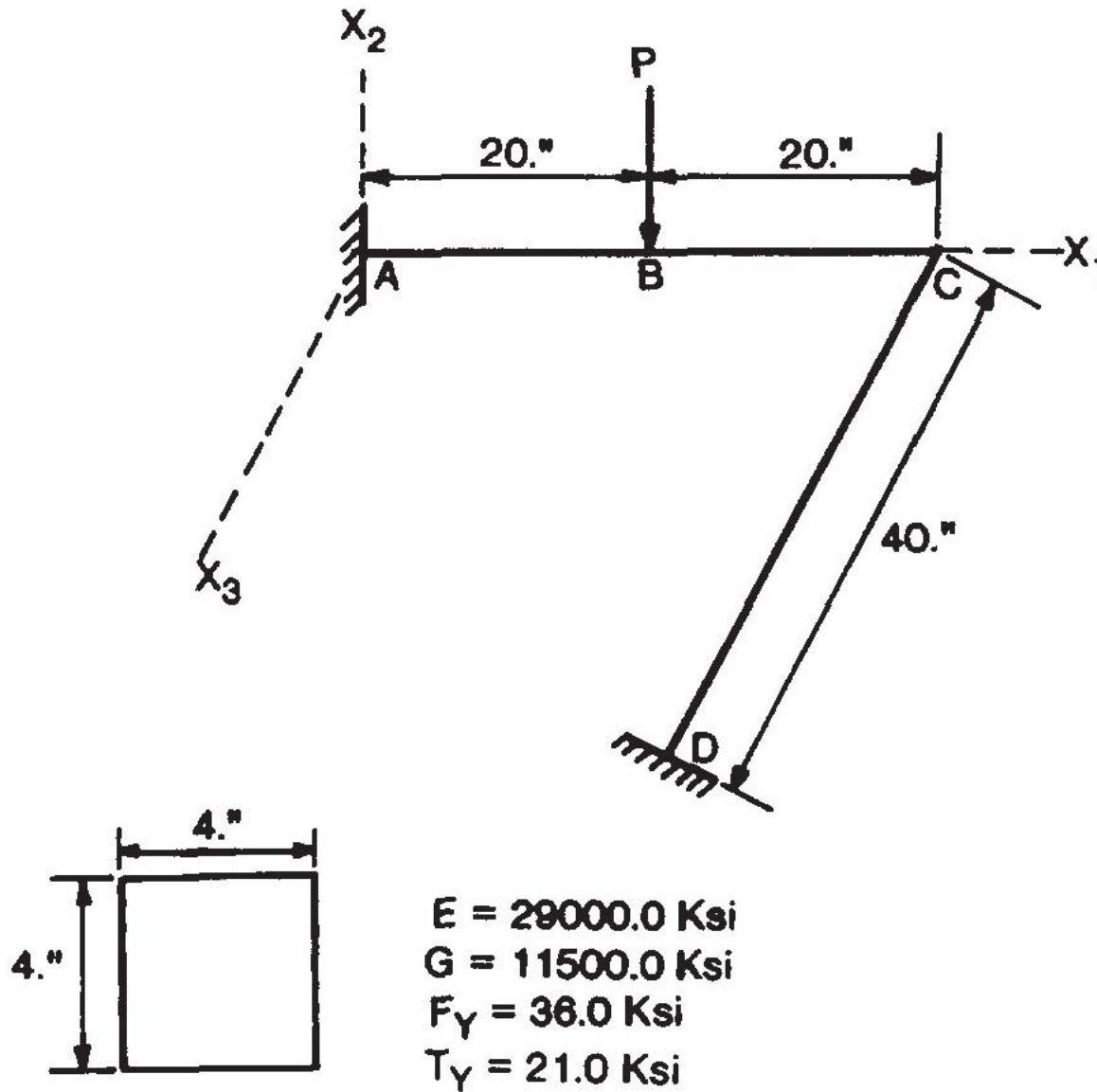
$$\Delta \bar{M}_t = \left(\frac{\ell^2}{\pi^2 EI} \right) \bar{M}'_t(\Delta Q) \quad (49)$$

برای اطمینان از آن که رابطه (20) از مقدار مجاز تجاوز نکند.

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 01

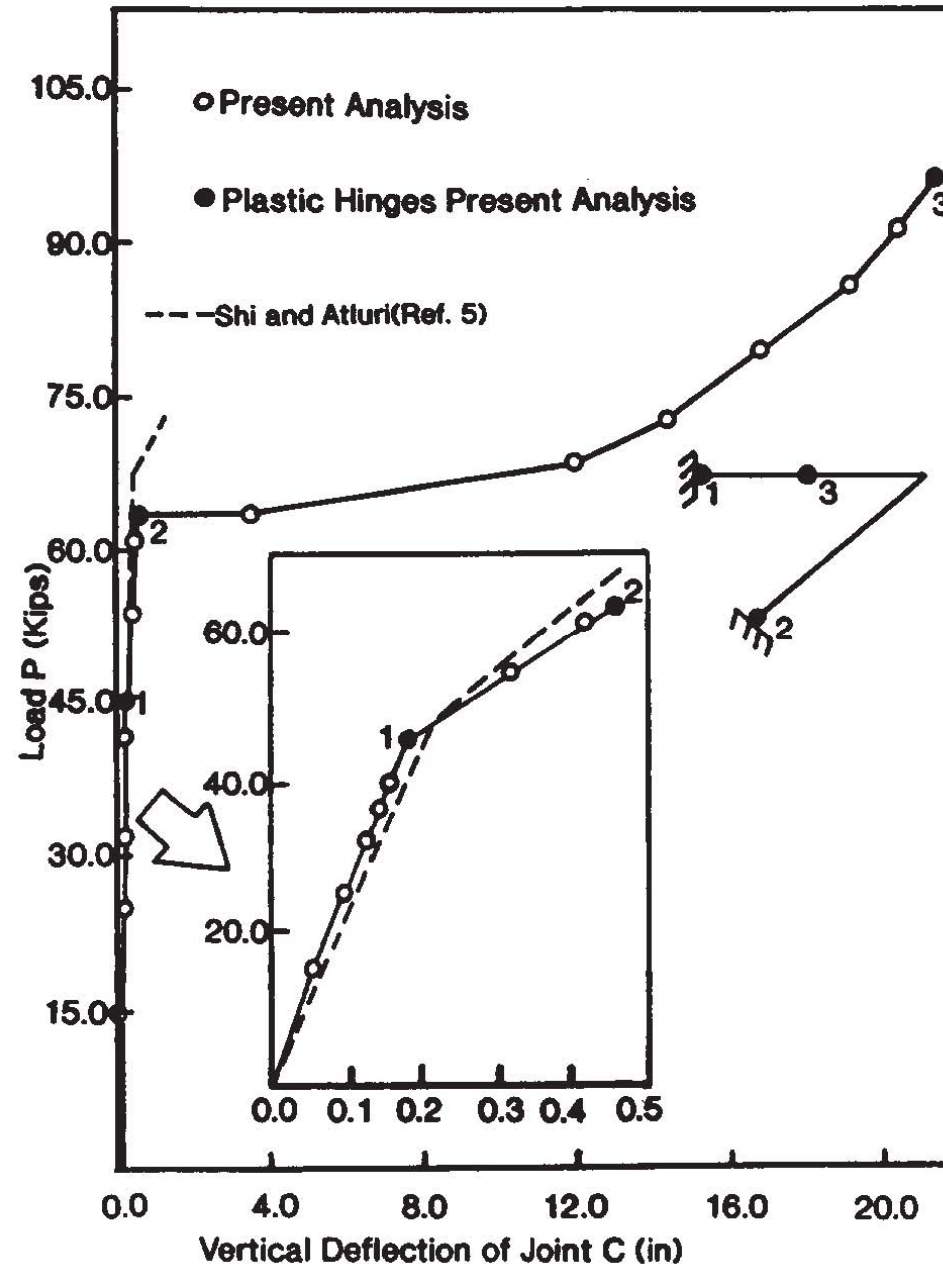


Horizontal bent: dimensions and properties (1 kip = 4.45 kN, 1 in. = 25.4 mm).

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 01

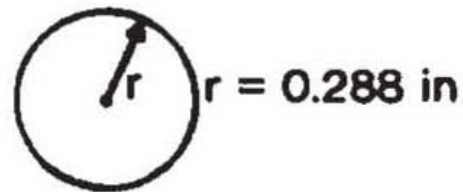
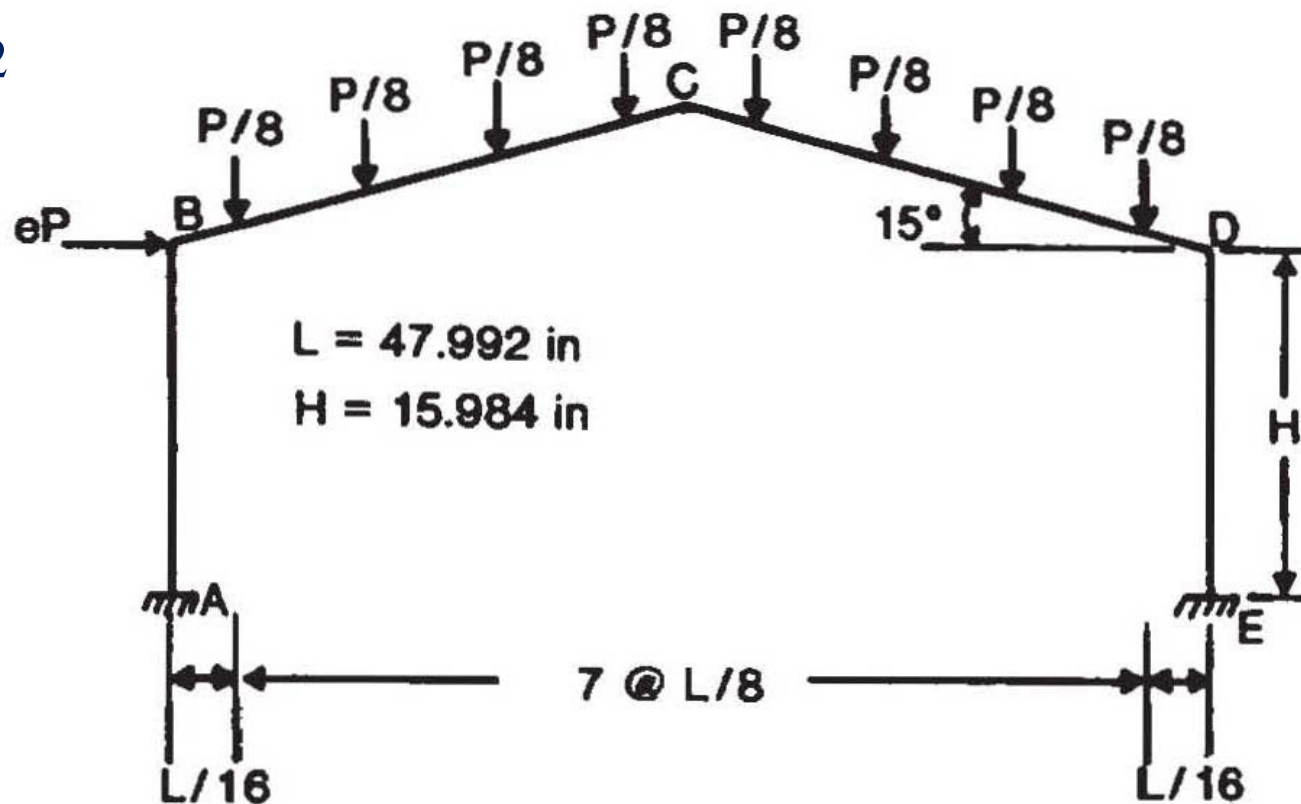


Load-deflection curves for horizontal bent (1 kip = 4.45 kN, 1 in. = 25.4 mm).

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 02



Typical Cross-Section

$$E = 29000.0 \text{ Ksi}$$

$$G = 12000.0 \text{ Ksi}$$

$$F_Y = 42.0 \text{ Ksi}$$

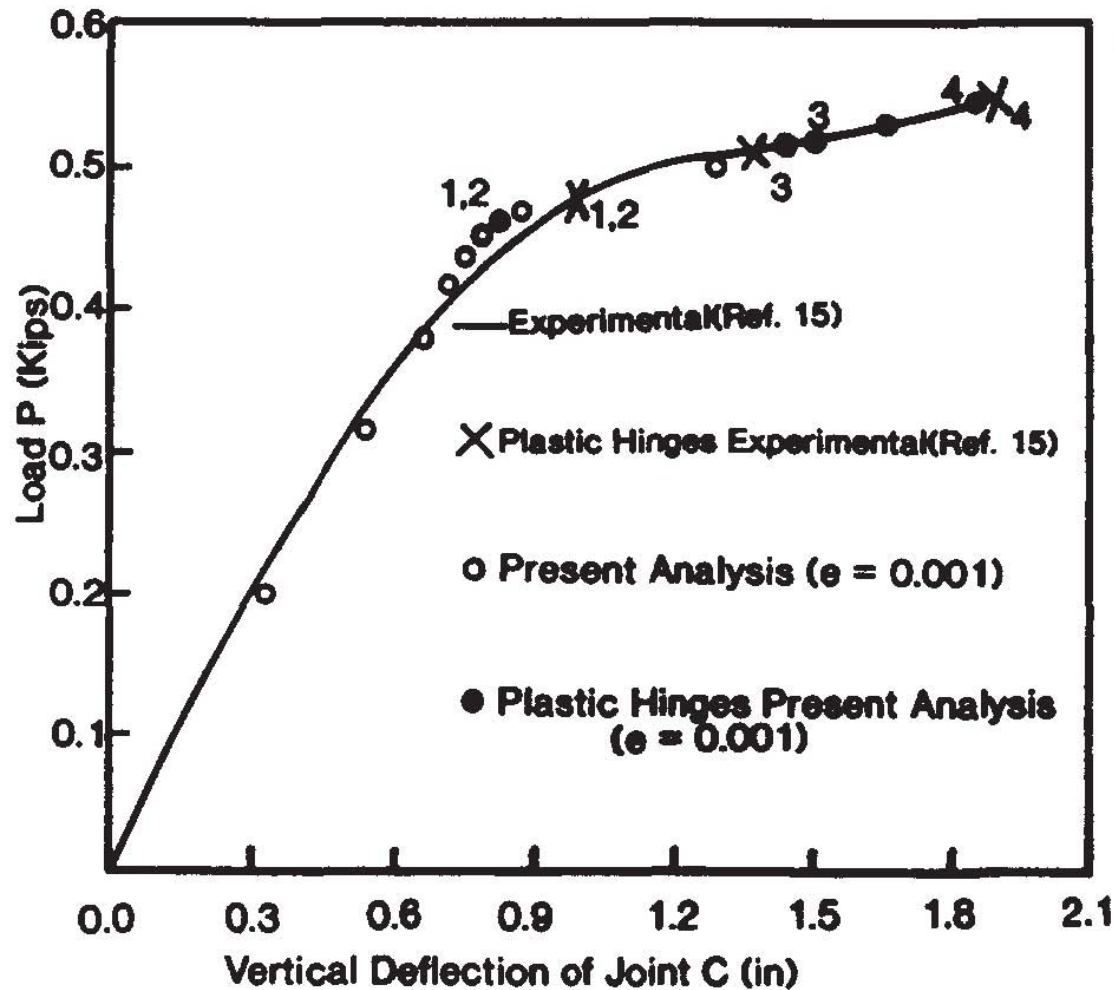
$$T_Y = 26.7 \text{ Ksi}$$

Gable frame: dimensions and properties (1 kip = 4.45 kN, 1 in.=2.54 mm).

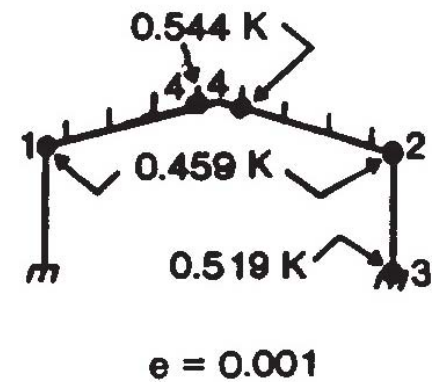
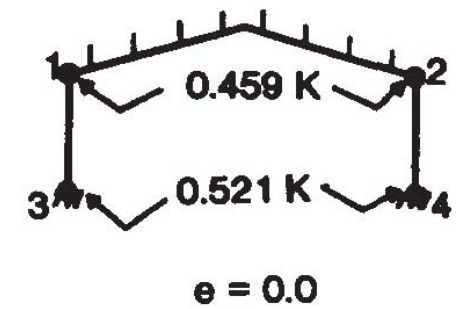
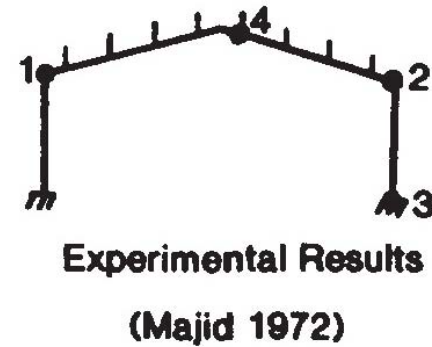
Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 02



Load-deflection curves for gable frame (vertical deflection) (1 kip=4.45kN, 1 in. = 2.54 mm).



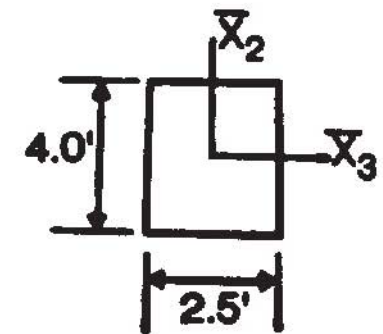
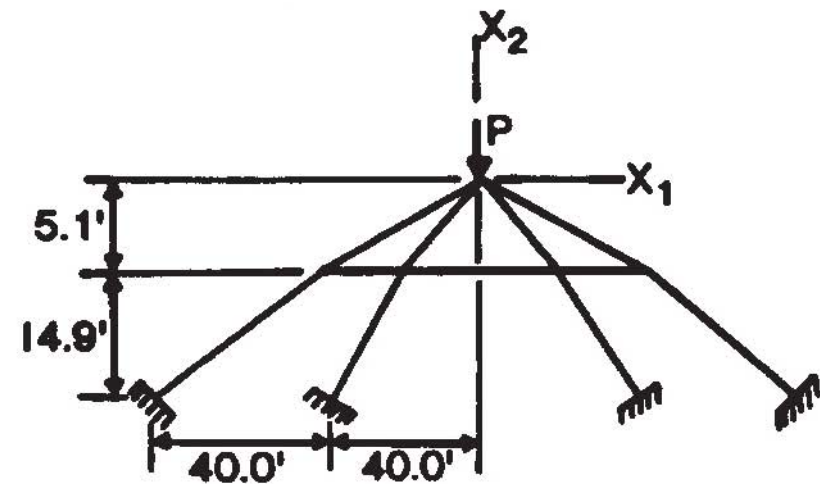
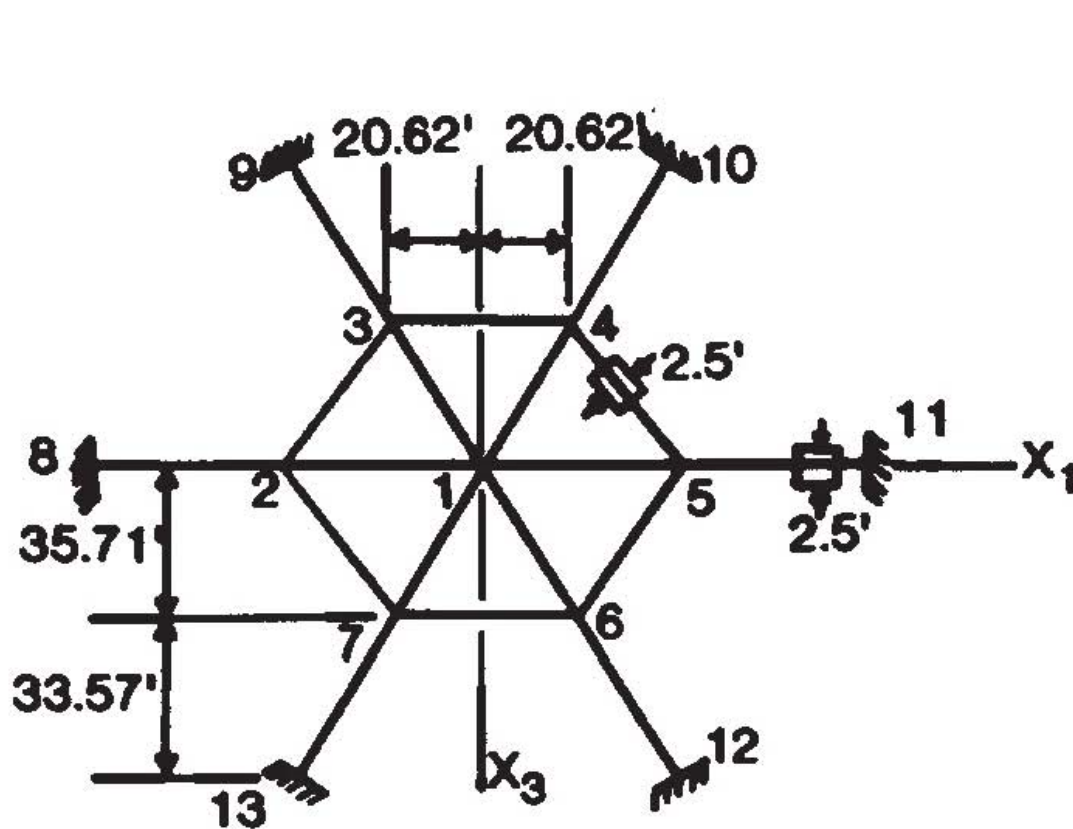
● Plastic Hinges

Plastic hinges at collapse-gable frame

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 03



$E = 432000.0 \text{ Ksf}$
 $G = 184320.0 \text{ Ksf}$
 $F_Y = 2160.0 \text{ Ksf}$
 $T_Y = 1200.0 \text{ Ksf}$

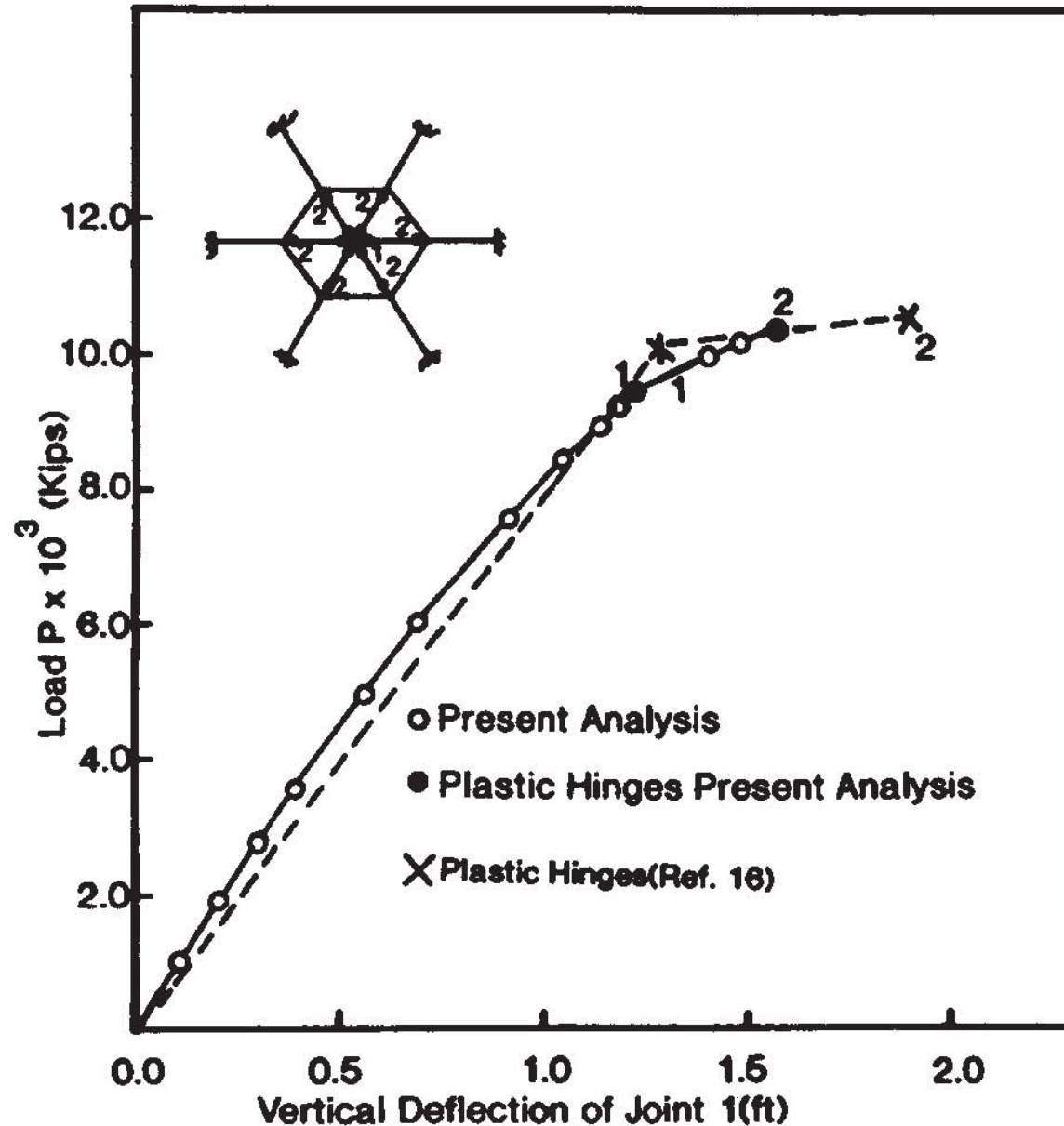
Typical Cross-Section

Framed dome: dimensions and properties (1 ft. = 0.305 m, 1 kip = 4.45 kN).

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 03

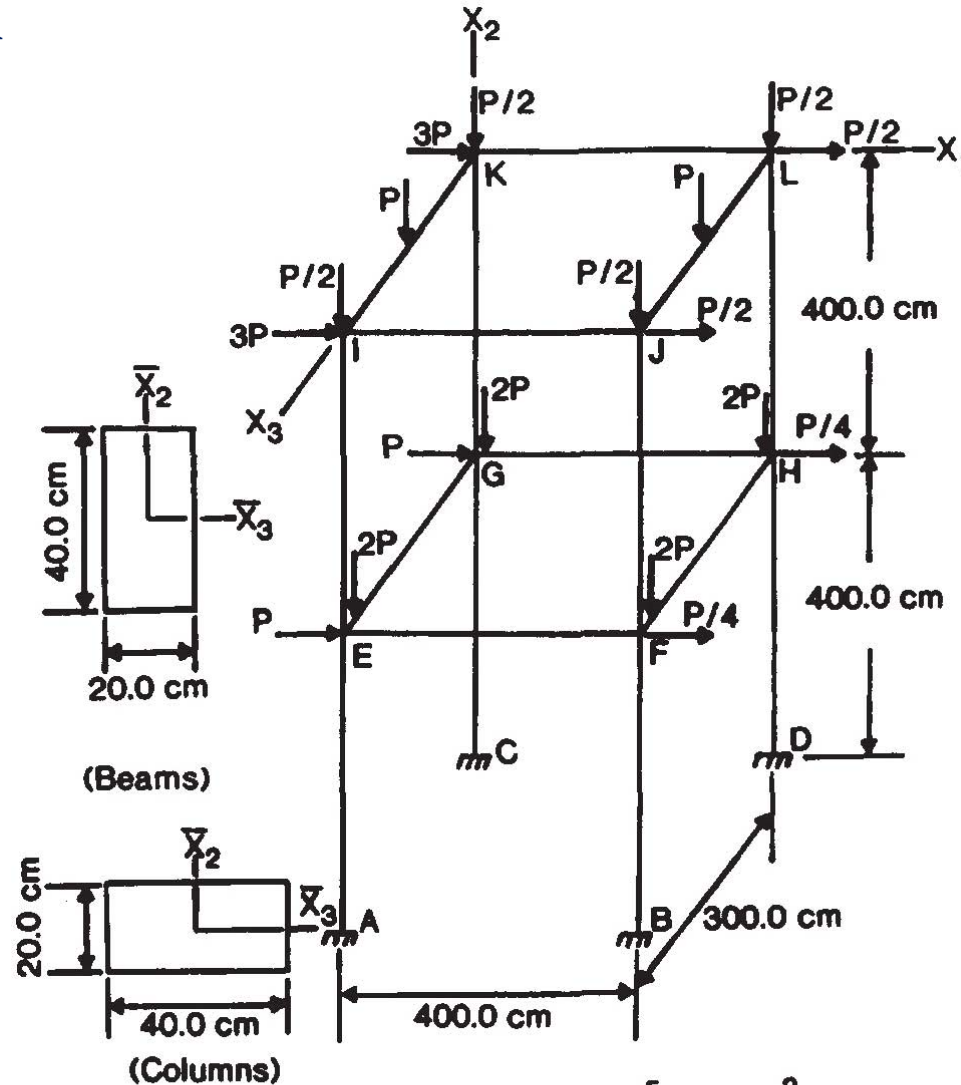


Load--deflection curves for framed dome (1 kip =4.45 kN, 1 ft. =0.305 m).

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 04



Typical Cross-Sections

$$E = 2 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$G = 85470.0 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$F_Y = 1000.0 \text{ Kgf/cm}^2$$

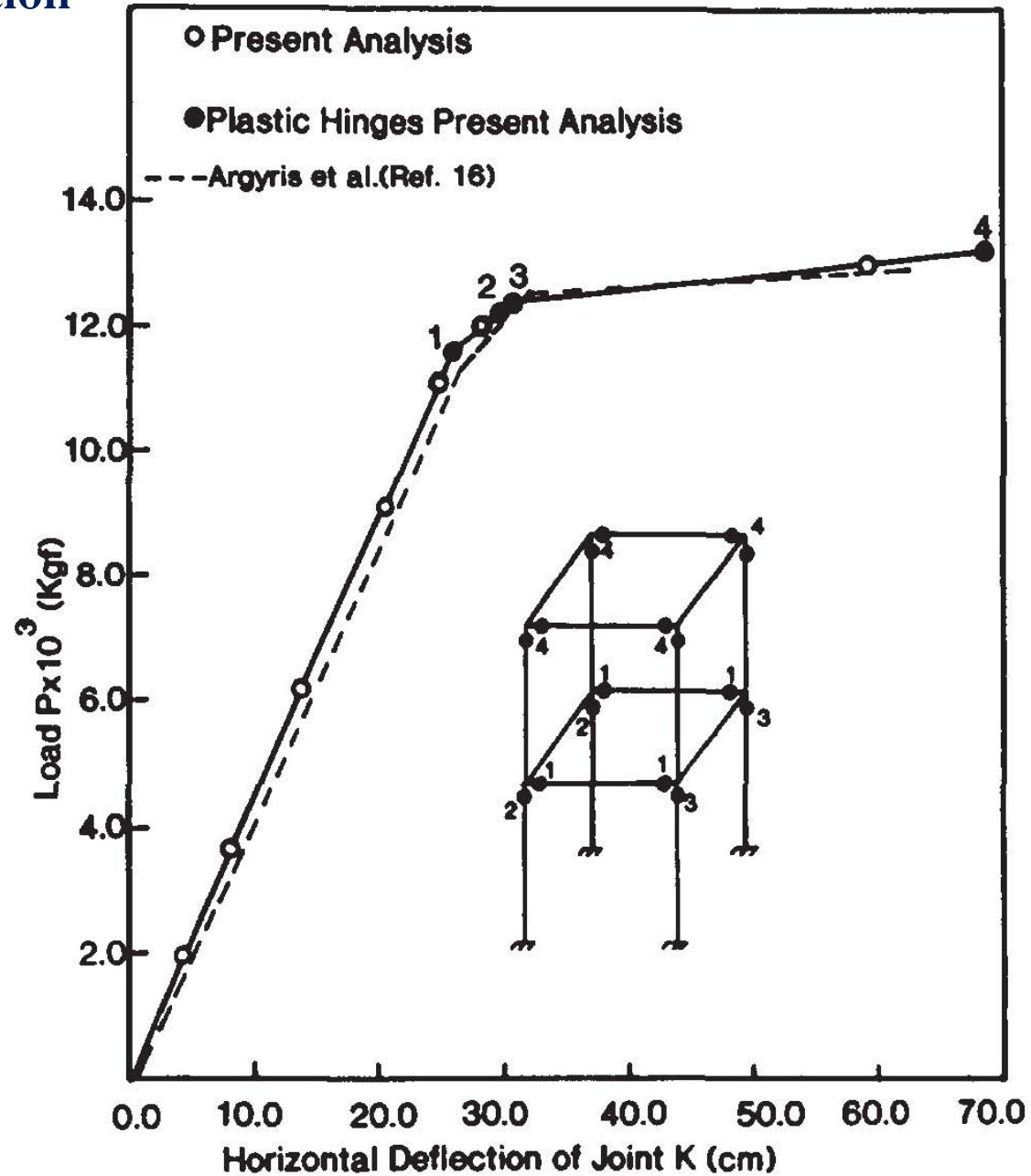
$$T_Y = 570.0 \text{ Kgf/cm}^2$$

Two-storey frame: dimensions and properties (1 kgf = 2.2046lb).

Nonlinear Elastic-Plastic Analysis of Space Frames

□ Numerical Solution

Example 04



Load-deflection curves for two-storey frame.