



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Nonlinear Analysis of Structures

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

By: Kaveh Karami

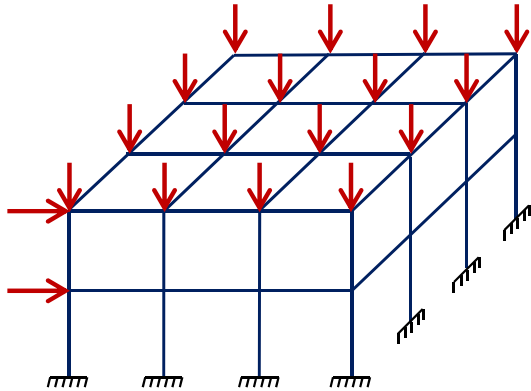
Associate Prof. of Structural Engineering

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Large Deformation Analysis of Elastic Space Frames

فرضیات:



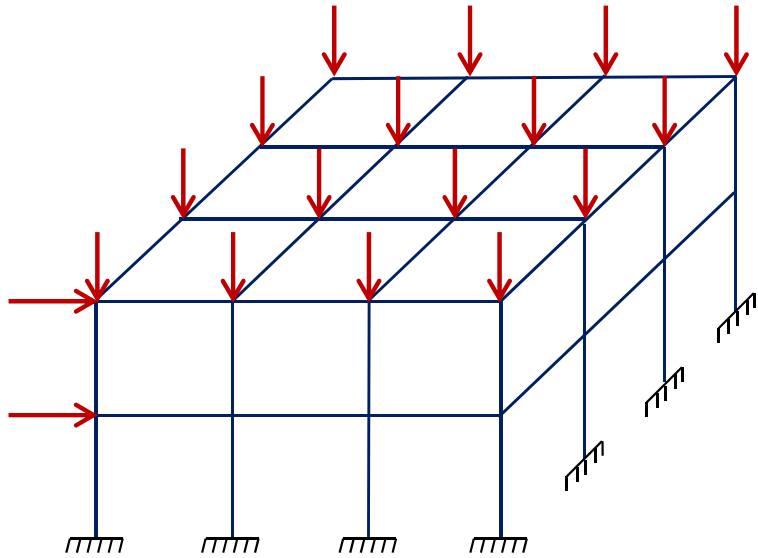
- این روش براساس فرمول بندی Eulerian است و اثر انتقال ها و دوران های بزرگ گره ای را در نظر می گیرد.
- روابط محلی (Local) نیرو تغییر شکل اعضا براساس روابط تیر- ستون می باشد؛ که در آن تغییر طول عضو ناشی از کرنش محوری و اثر Bowing ناشی از خمش لحاظ شده است.
- اثر نیروی محوری بر روی سختی پیشگی اعضا در نظر گرفته شده است.
- نیروها به صورت بار متمرکز در گره ها وارد می شود.

تفاوت اساسی بین آنالیز تغییر شکل های بزرگ قاب های فضایی و آنالیز قاب صفحه ای آن است که در مسائل سه بعدی دوران های بزرگ از خاصیت برداری تبعیت نمی کنند. برای رفع این مشکل Oran در سال 1973 مفهوم ماتریس جهت گیری گره (Joint Orientation Matrix) را برای تعیین جهت گیری یک گره در حالت تغییر شکل یافته در فضای سه بعدی ارائه کرد.

در این روش جهت گیری و تغییر شکل نسبی اعضا با استفاده از موقعیت ها و جهت گیری های تغییر شکل یافته گره های ابتدا و انتها به دست می آید.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ System Equilibrium Equations



روابط تعادل سیستم:

$$\boxed{\{f(\Gamma)\} = \{P\}} \quad (1) \quad \text{معادله تعادل سیستم}$$

Γ : معرف حالت یا هندسه تغییرشکل یافته است؛ که شامل مولفه‌های جابجایی و دوران‌های گره‌ای سازه می‌باشد. در فضای دو بعدی می‌توان Γ را به صورت بردار یا همان x نشان داد اما در فضای سه بعدی دوران‌های بزرگ از خاصیت برداری تبعیت نمی‌کنند.

$$(\vec{A} + \vec{B} \neq \vec{B} + \vec{A})$$

$\{f\}$: بردار نیروهای داخلی

$\{P\}$: بردار نیروهای خارجی و لنگرهای اعمال شده در گره‌ها نسبت به دستگاه مختصات کلی

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ System Equilibrium Equations

به منظور انجام محاسبات عددی، بهتر است که رابطه (1) به فرم دیفرانسیلی نوشته شود.

$$\{\Delta P\} = [\tau]\{\Delta x\} \quad (2)$$

$$[\tau] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (3)$$

که در آن

$\{\Delta x\}$: مقدار نمویی جابجایی‌های گره‌ای است.

$\{\Delta P\}$: مقدار نمویی نیروهای خارجی می‌باشد و مقدار آن در حدی است که مولفه‌های دورانی $\{\Delta x\}$ را می‌توان به صورت بردار نشان داد به طوری که مقادیر برای دوران‌های بزرگ از قانون جمع برداری تبعیت کنند.

$[\tau]$: ماتریس سختی مماسی سیستم که نشان دهنده تغییرات نیروهای داخلی نسبت به مولفه‌های جابجایی است.

لازم به تذکر است که اگر چه الزاما نمی‌توان x را تعیین کرد اما می‌توان بردار نمویی Δx را محاسبه نمود.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Joint Rotation Matrix

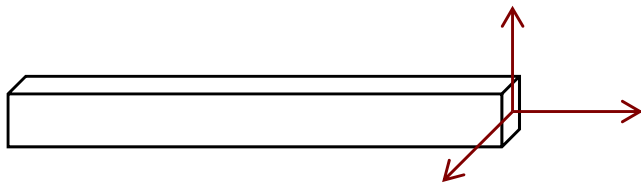
ماتریس دوران گره‌ای:

جهت‌گیری گره المان قاب فضایی در حالت تغییر شکل یافته را می‌توان توسط ماتریس جهت‌گیری گره (JOM: Joint Orientation Matrix) نشان داد.

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$[\omega]$: ماتریس جهت‌گیری گره (JOM) در وضعیت قبل از دوران

ستون‌های ماتریس ω کسینوس‌های هادی نسبت به محورهای دستگاه مختصات کلی ثابت است. که راستای سه محور این دستگاه مختصات بر هم عمود و متصل به گره می‌باشد و همراه آن حرکت می‌کند. (یعنی هر بلایی که سر گره بیاید همان بلا سر دستگاه مختصات که متصل به گره است می‌آید).



در ابتدا خطوط مرجع گره‌ای، فرض می‌شود که موازی با محورهای مختصات کلی در حالت تغییر شکل نیافته سیستم است.

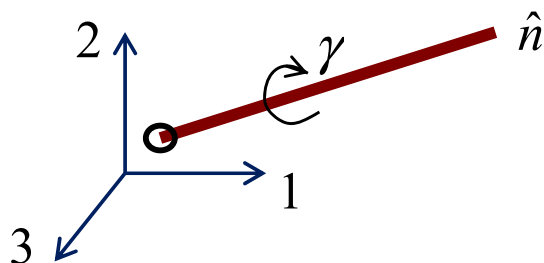
Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Joint Rotation Matrix

حال چگونه $[\omega]$ را در $\{\Delta P\}$ ها update کنیم در حالی که هندسه تغییر شکل یافته سازه تغییر می‌کند.

فرض می‌کنیم که وضعیت یک گره دلخواه $([\omega])$ را در گام n (step) ام داریم

حال اگر این گره به اندازه γ (پیچش) حول محوری با کسینوس‌های $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$ بچرخد وضعیت جدید گره $[\bar{\omega}]$ می‌شود



$$[\bar{\omega}] = [W][\omega] \quad (5)$$

که در آن

$[W]$: ماتریس دوران (Rotation Matrix) نام دارد. با استفاده از قانون دست راست می‌توان جهت مثبت دوران را تعیین نمود.

JOM: $[\bar{\omega}]$ در وضعیت بعد از دوران

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Joint Rotation Matrix

در رابطه (5)

$$[W] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -n_3 \sin \gamma & n_2 \sin \gamma \\ n_1^2 (1 - \cos \gamma) & n_1 n_2 (1 - \cos \gamma) & n_1 n_3 (1 - \cos \gamma) \\ n_3 \sin \gamma & \cos \gamma & -n_1 \sin \gamma \\ n_1 n_2 (1 - \cos \gamma) & n_2^2 (1 - \cos \gamma) & n_2 n_3 (1 - \cos \gamma) \\ -n_2 \sin \gamma & n_1 \sin \gamma & \cos \gamma \\ n_1 n_3 (1 - \cos \gamma) & n_2 n_3 (1 - \cos \gamma) & n_3^2 (1 - \cos \gamma) \end{bmatrix} \quad (6)$$

با فرض کوچک بودن γ

\Rightarrow

$$\begin{cases} \cos \gamma \approx 1 \\ \sin \gamma \approx \gamma \end{cases} \quad (7)$$

(6)&(7)

\Rightarrow

$$[W] \cong \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در آن

$$\gamma_1 = \gamma n_1; \gamma_2 = \gamma n_2; \gamma_3 = \gamma n_3 \quad (9)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Joint Rotation Matrix

ماتریس دوران W از رابطه (6) را می‌توان برای تفسیر نتایج یک آنالیز خطی در یک روش افزایشی خطی شده (Linearized incremental procedure) به صورت زیر به کار گرفت:

اگر نیروهای خارجی در گام i (Step) $\{p^{(i)}\}$ باشد؛ فرض می‌شود که هندسه تغییر شکل یافته سیستم $\Gamma^{(i)}$ معلوم است. هدف تعیین هندسه تغییر شکل یافته سیستم در گام $(i+1)$ $\Gamma^{(i+1)}$ متناظر با نیروهای خارجی $\{p^{(i+1)}\}$ در این گام می‌باشد.

$$\{p^{(i+1)}\} = \{p^{(i)}\} + \{\Delta p\}$$

که در این رابطه $\{\Delta p\}$ نشان دهنده افزایش کم و محدود بار است. حتی در قاب‌های فضایی با دوران‌های بزرگ (که در آن بردار جابجایی $\{x\}$ لزوماً مشخص نمی‌باشد)، تغییرات کوچک ایجاد شده در هندسه سیستم ناشی از $\{\Delta p\}$ را می‌توان به کمک بردار $\{\Delta x\}$ بیان کرد به طوری که درایه‌های آن دوران‌ها و انتقال‌های کوچک گره‌های سازه را نسبت به دستگاه مختصات کلی سیستم نشان می‌دهد.

در روش افزایشی خطی شده $\{\Delta x\}$ از رابطه (2) به دست آمده و $[\tau]$ در آغاز بارگذاری در گام i $\{p^{(i)}\}$ ، محاسبه می‌شود.

$$\{\Delta p\} = [\tau] \{\Delta x\} \quad (2) \quad \text{جابجایی و دوران}$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Joint Rotation Matrix

فرض کنید $\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3$ و $\Delta\gamma_3$ معرف مولفه‌های نمویی دوران برای یکی از گره‌های سازه باشد که از بردار نمویی $\{\Delta x\}$ نتیجه شده است. با استفاده از رابطه (5) ماتریس جدید جهت‌گیری این گره خاص به دست می‌آید:

$$\boxed{[\omega^{(i+1)}] = [W][\omega^{(i)}]} \quad (10)$$

که در آن W از رابطه (6) به دست آمده به طوریکه $\Delta\gamma$ جایگزین γ شده است.

$$\boxed{\Delta\gamma = (\Delta\gamma_1^2 + \Delta\gamma_2^2 + \Delta\gamma_3^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

$$\boxed{n_1 = \frac{\Delta\gamma_1}{\Delta\gamma} ; n_2 = \frac{\Delta\gamma_2}{\Delta\gamma} ; n_3 = \frac{\Delta\gamma_3}{\Delta\gamma}} \quad (12)$$

$[W]$ برای $\Delta\gamma_i$ کوچک نوشته می‌شود. یعنی در رابطه (6) از $\Delta\gamma_i$ و n_i های اصلاح شده در رابطه (12) استفاده می‌شود.

با فرض اینکه $\Delta\gamma$ کوچک است می‌توان از خاصیت برداری استفاده کرد. همچنین با کوچک در نظر گرفتن $\Delta\gamma$ ماتریس W را می‌توان از رابطه تقریبی (8) محاسبه کرد. اما باید به این نکته توجه کرد که ستون‌های W به دست آمده از رابطه تقریبی (8)، بردار واحد نبوده و به طور دقیق نسبت به یکدیگر Orthogonal نمی‌باشند؛ که این خود باعث ایجاد خطاهایی در نتایج آنالیز می‌گردد.

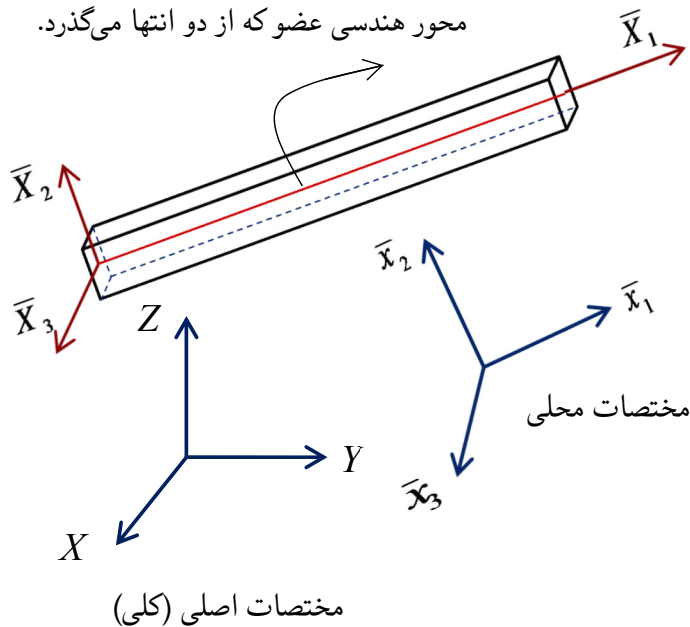
Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Orientation Matrix (MOM) and relative Deformation

ماتریس جهت‌گیری عضو و تغییر شکل نسبی:

برای جدا کردن تغییرشکل‌های صلب بزرگ یک عضو از تغییر شکل‌های نسبی (با فرض کوچک بودن) از یک سیستم مختصات اوایلین برای عضو مطابق شکل‌های (1) و (2) استفاده می‌شود.

سیستم مختصات عضو از قانون دست راست پیروی می‌کند. محور \bar{X}_1 از مرکز هندسی دو انتهای عضو عبور کرده و محورهای \bar{X}_2 و \bar{X}_3 موازی جهت‌های اصلی مقاطع عرضی می‌باشند. محور هندسی عضو که از دو انتها می‌گذرد.



از آنجایی که جهت‌های اصلی مقاطع عرضی به دلیل تغییر شکل نسبی عضو، اندکی تغییر پیدا می‌کند؛ بنابراین محورهای \bar{X}_2 و \bar{X}_3 با میانگین‌گیری جهت‌های انتهای عضو به دست می‌آید.

سیستم مختصات عضو به وسیله ماتریس جهت‌گیری عضو (MOM) $[r]$ تعریف می‌شود.

ستون‌های ماتریس $[r]$ کسینوس‌های هادی محورهای \bar{X} نسبت به محورهای X دستگاه مختصات کلی می‌باشند.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

Member Orientation Matrix (MOM) and relative Deformation

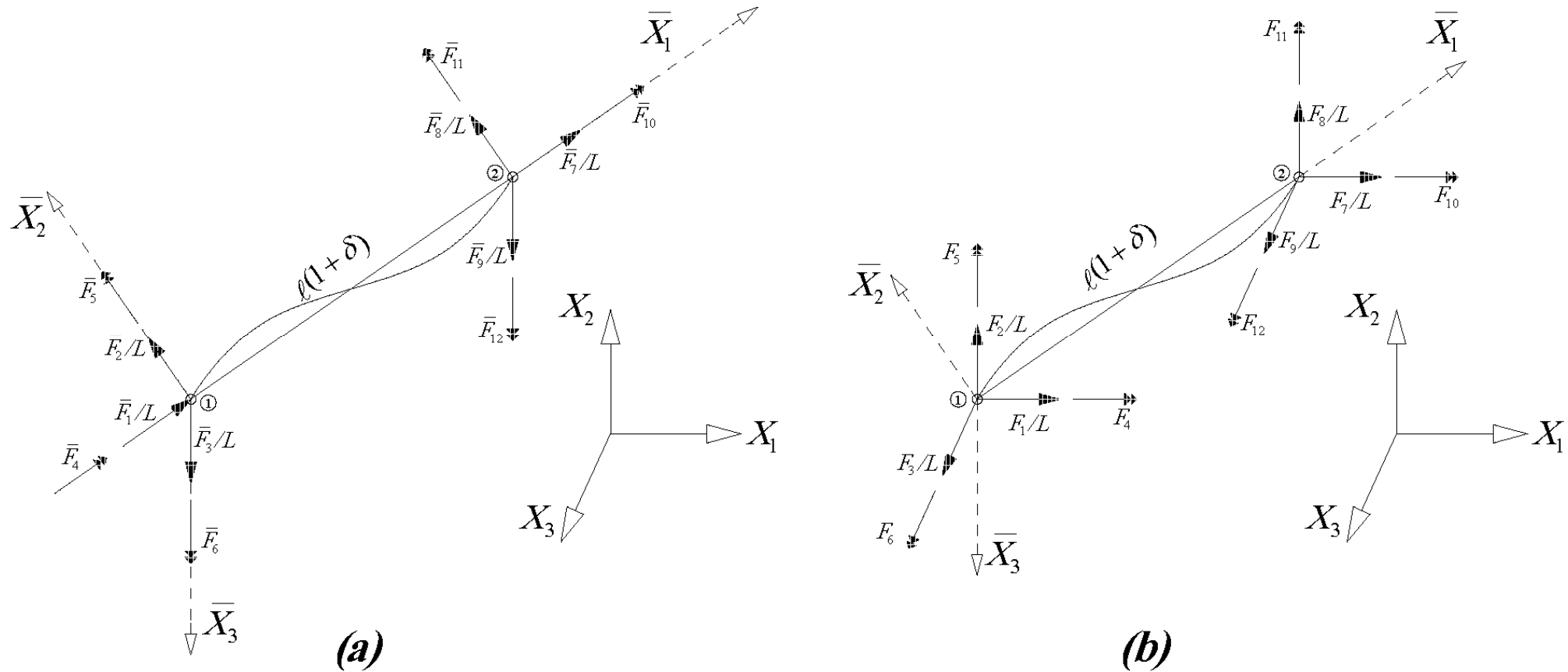


Fig. 1. Member Forces in, (a) Local, (b) Global Coordinate

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

Member Orientation Matrix (MOM) and relative Deformation

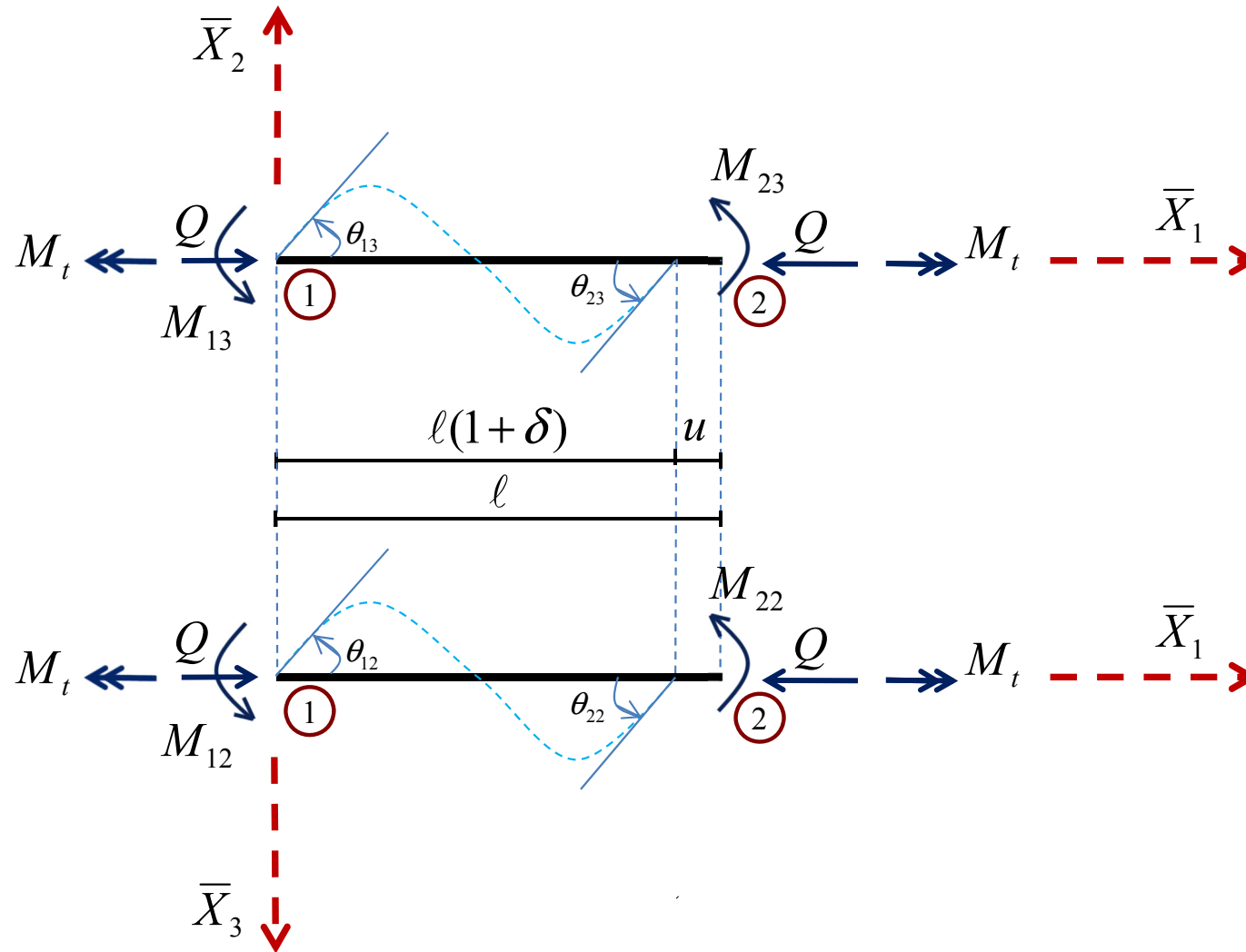


Fig. 2. Relative Member Deformations and Corresponding Forces

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Orientation Matrix (MOM) and relative Deformation

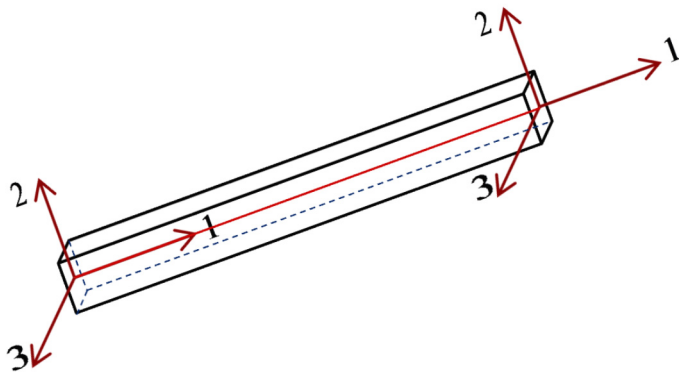
زمانی که موقعیت و جهت‌گیری تغییر شکل یافته دو گره مجاور هم معلوم باشد؛ جهت‌گیری تغییر شکل یافته و تغییر شکل نسبی عضو رابط بین این دو گره به صورت زیر تعیین می‌گردد:

اولین ستون، $\{r_1\}$ ، از ماتریس جهت‌گیری عضو تغییر شکل یافته $[r]$ (که جهت \bar{X}_1 را نیز تعیین می‌کند) و همچنین جابجایی محوری، u ، به طور مستقیم از مختصات گره‌ای تغییر شکل یافته به دست می‌آید.

با تعیین مختصات جدید ابتدا و انتها بعد از تغییر شکل، مقدار کوتاه شدگی نیز به راحتی قابل محاسبه است.

$$\Delta u = L_2 - L_1$$

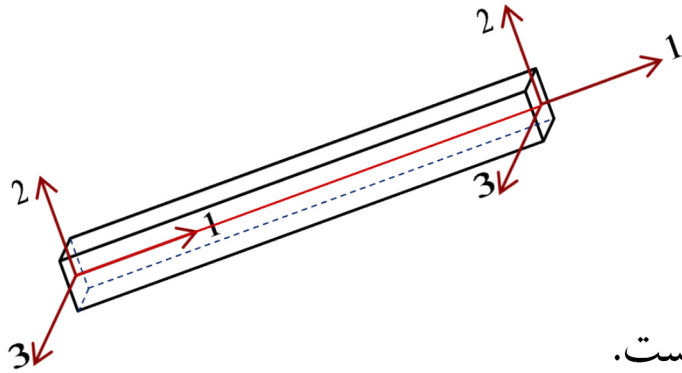
ماتریس‌های $[q^{(1)}]$ و $[q^{(2)}]$ ماتریس‌های جهت‌گیری مقاطع ابتدا و انتهای عضو تعریف می‌شود؛ که ستون‌های آن کسینوس‌های هادی جهت‌های نرمال و اصلی مقاطع ابتدا و انتهای عضو می‌باشد.



Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

Member Orientation Matrix (MOM) and relative Deformation

از آنجایی که مقاطع ابتدا و انتهای عضو به صورت صلب به گره‌ها متصل است رابطه زیر برقرار است.



$$\begin{cases} [q^{(1)}] = [\omega^{(1)}][r^{(0)}] \\ [q^{(2)}] = [\omega^{(2)}][r^{(0)}] \end{cases} \quad (13)$$

$[r^{(0)}]$: ماتریس جهت‌گیری عضو (MOM) در حالت اولیه و تغییر شکل نیافته است.

$[\omega^{(1)}]$ و $[\omega^{(2)}]$: ماتریس‌های جهت‌گیری گره‌های مقاطع ابتدا (1) و انتهای (2) عضو است که به صورت صلب به عضو متصل است.

دومین و سومین ستون‌های $\{r_2\}$ و $\{r_3\}$ ، از ماتریس جهت‌گیری عضو تغییر شکل یافته $[r]$ با محاسبه دوران‌های θ_1 و θ_2 در ابتدا و انتهای عضو از ضرب برداری زیر به دست می‌آید.

$\hat{q}_1^{(i)}$: بردار واحد عمود بر انتهای i

\hat{r}_1 : بردار واحد در جهت \bar{X}_1

$$\sin \theta_i \hat{n}_i = \hat{q}_1^{(i)} \times \hat{r}_1 \quad (i=1, 2) \quad (14)$$

\hat{n}_i : بردار واحد عمود بر صفحه شامل $\hat{q}_1^{(i)}$ و \hat{r}_1

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Orientation Matrix (MOM) and relative Deformation

سپس هر یک از مقاطع ابتدا و انتها به اندازه θ_i حول محور n_i با استفاده از ماتریس دوران W رابطه (6) چرخیده می‌شود. در این حالت به جای زاویه γ جایگزین شده و n_1 ، n_2 و n_3 نشان دهنده محورهای هادی n_i است.

$$[e^{(i)}] = [W^{(i)}][q^{(i)}] \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

$[e^{(i)}]$: ماتریس‌های دوران مقاطع ابتدا و انتهای عمود بر محور \bar{X}_1 است.

محورهای \bar{X}_2 و \bar{X}_3 به ترتیب ستون‌های دوم و سوم ماتریس $[\bar{r}]$ بوده که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[\bar{r}] \cong \frac{1}{2}([e^{(1)}] + [e^{(2)}]) \quad (16)$$

برای به دست آمدن ماتریس جهت‌گیری جدید عضو $[r]$ ماتریس $[\bar{r}]$ نرمال می‌گردد.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Orientation Matrix (MOM) and relative Deformation

با فرض کوچک بودن تغییرشکل‌های نسبی، زاویه‌های انتهایی θ_{ij} می‌توانند از مولفه‌های θ_i در جهت‌های محورهای \bar{X}_2 و \bar{X}_3 به دست آید.

$$\theta_{ij} = -\theta_i (\hat{n}_i \cdot \hat{r}_j) \quad i=1, 2 \quad j=2, 3 \quad (17)$$

θ_{ij} : دوران انتهایی i حول محور j

$$\sin \Phi_t = \hat{e}_3^{(1)T} \hat{e}_2^{(2)} \quad (18)$$

\hat{r}_j : بردار واحد در جهت محور \bar{X}_j و $j=2, 3$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Force-Deformation Relation

یک عضو دلخواه منشوری از یک قاب فضایی در نظر گرفته می‌شود. اگر بردار $\{F\}$ و $\{\bar{F}\}$ به ترتیب نشان دهنده نیروهای انتهایی اعضا در دستگاه مختصات کلی و دستگاه مختصات عضو (محلی) باشد رابطه $\{F\}$ و $\{\bar{F}\}$ به صورت زیر است

$$\{F\} = [R] \{\bar{F}\} \quad (19)$$

که در آن

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [r] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [r] \end{bmatrix} \quad (20)$$

$[R]$: ماتریس انتقال با ابعاد 12×12

ماتریس جهت‌گیری عضو $[r]$ مربوط به هندسه تغییر شکل یافته عضو است.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

Member Force-Deformation Relation

رابطه نیروهای اعضا $\{\bar{F}\}$ با تغییرشکل‌های نسبی عضو $\{\bar{S}\}$ (شکل 2) به صورت زیر است:

$$\{\bar{F}\} = [\bar{B}]\{\bar{S}\} \quad (21)$$

که در آن

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{1+\delta} & \frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+\delta} & -\frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{1+\delta} & \frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\delta} & \frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= M_{13} & \bar{S}_2 &= M_{23} & \bar{S}_3 &= M_{12} \\ \bar{S}_4 &= M_{22} & \bar{S}_5 &= M_t & \bar{S}_6 &= Q\ell \end{aligned} \quad (23)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Force-Deformation Relation

رابطه تغییرشکل‌های نسبی عضو با نیروهای انتهایی عضو (شکل 2) به صورت زیر می‌باشد:

$$M_{1j} = \frac{EI_j}{\ell} (c_{1j}\theta_{1j} + c_{2j}\theta_{2j}) \quad , \quad j = 2, 3 \quad (24)$$

$$M_{2j} = \frac{EI_j}{\ell} (c_{2j}\theta_{1j} + c_{1j}\theta_{2j}) \quad , \quad j = 2, 3 \quad (25)$$

$$M_t = \frac{c_t}{\ell} \Phi_t \quad (\text{ممان پیچشی}) \quad (26)$$

$$Q = EA \left(\frac{u}{\ell} - c_{b3} - c_{b2} \right) \quad \text{اثر کوتاه شدگی حول دو محور موجود است.} \quad (27)$$

θ_{ij} : دوران گره i ام حول محور j ام

M_{ij} : لنگر در گره i ام حول محور j ام

I_j : ممان اینرسی حول محور j ام

A : سطح مقطع عضو

E : مدول یانگ

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Force-Deformation Relation

c_{1j} و c_{2j} توابع پایداری خمشی (Bending Stability Functions) حول محور \bar{X}_j می باشد که خود تابعی از Q است.

در صورتی که Q نیروی محوری فشاری باشد

$$\text{if } Q < 0 \Rightarrow q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} > 0$$

$$c_{1j} = \frac{\phi_j \sin \phi_j - \phi_j^2 \cos \phi_j}{2 - 2 \cos \phi_j - \phi_j \sin \phi_j}, \quad c_{2j} = \frac{\phi_j^2 - \phi_j \sin \phi_j}{2 - 2 \cos \phi_j - \phi_j \sin \phi_j} \quad (28)$$

که در آن

$$\phi_j^2 = \frac{Q \ell^2}{EI_j}$$
$$q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} = \frac{Q \ell^2}{\pi^2 EI_j} \Rightarrow \phi_j^2 = \pi^2 q_j$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Force-Deformation Relation

در صورتی که Q نیروی محوری کششی باشد

$$\text{if } Q > 0 \text{ and } Q_{cr=Euler} < 0 \Rightarrow q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} < 0$$

$$c_{1j} = \frac{\psi_j^2 \cosh \psi_j - \psi_j \sinh \psi_j}{2 - 2 \cosh \psi_j + \psi_j \sinh \psi_j}, \quad c_{2j} = \frac{\psi_j \sinh \psi_j - \psi_j^2}{2 - 2 \cosh \psi_j + \psi_j \sinh \psi_j} \quad (29)$$

که در آن

$$\psi_j^2 = -\pi^2 q_j$$

در صورتی که Q نیروی محوری برابر با صفر باشد

$$\text{if } Q = 0 \text{ and } Q_{cr=Euler} < 0 \Rightarrow q_j = \frac{Q}{Q_{cr=Euler}} = 0$$

$$c_{1j} = 4, \quad c_{2j} = 2 \quad (30)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Force-Deformation Relation

در رابطه (27) ضریب اصلاح طول ناشی از تغییر شکل خمشی (Bowling) حول محور \bar{X}_j است

$$c_{bj} = b_{1j}(\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b_{2j}(\theta_{1j} - \theta_{2j})^2 \quad (31) \quad (\text{Stability Functions})$$

که در آن

b_{1j} و b_{2j} (Bowling Functions) است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$b_{1j} = \frac{(c_{1j} + c_{2j})(c_{2j} - 2)}{8\pi^2 q_j}, \quad b_{2j} = \frac{c_{2j}}{8(c_{1j} + c_{2j})} \quad (32)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

Member Force-Deformation Relation

در رابطه (26) c_t تابع پایداری پیچشی (Torsional Stability Functions) نام دارند. همچنین در این رابطه اثر نیروی محوری بر روی سختی پیچشی عضو در نظر گرفته شده است.

حالت دوم:

$$c_\omega \neq 0, \quad (GJ - Q\bar{r}_0^2) < 0$$

$$c_t = \frac{GJ - Q\bar{r}_0^2}{1 - \frac{2}{kl} \tan(kl/2)} \quad (35)$$

که در آن

$$k = \sqrt{\frac{Q\bar{r}_0^2 - GJ}{E c_\omega}} \quad (36)$$

حالت اول:

$$c_\omega \neq 0, \quad (GJ - Q\bar{r}_0^2) > 0$$

$$c_t = \frac{GJ - Q\bar{r}_0^2}{1 - \frac{2}{kl} \tanh(kl/2)} \quad (33)$$

که در آن

$$k = \sqrt{\frac{GJ - Q\bar{r}_0^2}{E c_\omega}} \quad (34)$$

GJ : صلبیت پیچشی (Torsional Rigidity)

\bar{r}_0 : شعاع ژیراسیون قطبی (Polar radius of gyration)

c_ω : ثابت اعوجاج (Warping Constant)

حالت سوم:

$$c_\omega = 0$$

$$c_t = GJ - Q\bar{r}_0^2 \quad (37)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Tangent Stiffness Matrix

رابطه نمویی بین نیروهای انتهایی عضو و جابجایی‌های انتهایی عضو در دستگاه مختصات کلی به صورت زیر است:

$$\{\Delta F\} = [T] \{\Delta V\} \quad (38)$$

که در آن ماتریس سختی مماسی عضو $[T]$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[T] = [R][\bar{B}][t][\bar{B}]^T [R]^T + \sum_{k=1}^6 \bar{S}_k [R][\bar{g}^{(k)}][R]^T \quad (39)$$

ماتریس $[t]$ توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\{\Delta \bar{S}\} = [t] \{\Delta \bar{u}\} \quad (40)$$

بردار $\{\Delta \bar{u}\}$ نشان دهنده مقادیر نمویی تغییرشکل‌های نسبی عضو است

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \theta_{13} & \bar{u}_2 &= \theta_{23} & \bar{u}_3 &= \theta_{12} \\ \bar{u}_4 &= \theta_{22} & \bar{u}_5 &= \Phi_t & \bar{u}_6 &= u / \ell \end{aligned} \quad (41)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Tangent Stiffness Matrix

$$[t] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \varepsilon_3 c_{13} + \frac{G_{13}^2}{\pi^2 H} & \varepsilon_3 c_{23} + \frac{G_{13} G_{23}}{\pi^2 H} & \frac{G_{13} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{13} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{13}}{H} \\ \varepsilon_3 c_{23} + \frac{G_{13} G_{23}}{\pi^2 H} & \varepsilon_3 c_{13} + \frac{G_{23}^2}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{23}}{H} \\ \frac{G_{13} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{12}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{12} + \frac{G_{12}^2}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{22} + \frac{G_{12} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{12}}{H} \\ \frac{G_{13} G_{22}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{22}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{22} + \frac{G_{12} G_{22}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{12} + \frac{G_{22}^2}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{22}}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_t}{EI} & 0 \\ \frac{G_{13}}{H} & \frac{G_{23}}{H} & \frac{G_{12}}{H} & \frac{G_{22}}{H} & 0 & \frac{\pi^2}{H} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Tangent Stiffness Matrix

که در آن

$$\begin{aligned} G_{1j} &= c'_{1j}\theta_{1j} + c'_{2j}\theta_{2j} \\ G_{2j} &= c'_{2j}\theta_{1j} + c'_{1j}\theta_{2j} \end{aligned} \quad (43)$$

c'_{1j} و c'_{2j} مشتق نسبت به q_j

$$H = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \sum_{j=2,3} \frac{1}{\varepsilon_j} [b'_{1j}(\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b'_{2j}(\theta_{1j} - \theta_{2j})^2] \quad (44)$$

در این روابط

$$\varepsilon_j = \frac{I_j}{I} \quad , \quad \lambda = \frac{\ell}{\sqrt{I/A}} \quad (45)$$

I : ممان اینرسی مرجع اختیاری است.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Force-Deformation Relation

Series Expressions

$$c_{1j} = 4 - \frac{2}{15} \pi^2 q_j - \frac{11}{6300} \pi^4 q_j^2 - \frac{1}{27000} \pi^6 q_j^3$$

$$c_{2j} = 2 + \frac{1}{30} \pi^2 q_j + \frac{13}{12600} \pi^4 q_j^2 + \frac{11}{378000} \pi^6 q_j^3$$

$$c'_{1j} = -\frac{2}{15} \pi^2 - \frac{11}{3150} \pi^4 q_j - \frac{1}{9000} \pi^6 q_j^2$$

$$c'_{2j} = \frac{1}{30} \pi^2 + \frac{13}{6300} \pi^4 q_j + \frac{11}{126000} \pi^6 q_j^2$$

$$b_{1j} = \frac{1}{40} + \frac{1}{2800} \pi^2 q_j + \frac{1}{168000} \pi^4 q_j^2 + \frac{37}{388080000} \pi^6 q_j^3$$

$$b_{2j} = \frac{1}{24} + \frac{1}{720} \pi^2 q_j + \frac{1}{20160} \pi^4 q_j^2 + \frac{1}{604800} \pi^6 q_j^3$$

$$b'_{1j} = \frac{1}{2800} \pi^2 + \frac{1}{84000} \pi^4 q_j + \frac{37}{129360000} \pi^6 q_j^2$$

$$b'_{2j} = \frac{1}{720} \pi^2 + \frac{1}{10080} \pi^4 q_j + \frac{1}{201600} \pi^6 q_j^2$$

این عبارات برحسب سری، که برای هر دو حالت نیروی محوری کششی و فشاری معتبر است، برای مقادیر کوچک q_j صادق است.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Member Force-Deformation Relation

در رابطه (39) ماتریس‌های هندسی (Geometric Matrices) $[\bar{g}^{(k)}]$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$[\bar{g}^{(k)}] = \begin{bmatrix} [f^{(k)}] & -[f^{(k)}] \\ -[f^{(k)}] & [f^{(k)}] \end{bmatrix} \quad (46)$$

که در آن ماتریس $[f^{(k)}]$ متقارن و دارای ابعاد 6×6 بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{for } k = 1, 2 \quad f_{ij}^{(k)} &= 0; \quad \text{except } f_{12}^{(k)} = f_{21}^{(k)} = \frac{1}{(1+\delta)^2} \\ \text{for } k = 3, 4 \quad f_{ij}^{(k)} &= 0; \quad \text{except } f_{13}^{(k)} = f_{31}^{(k)} = -\frac{1}{(1+\delta)^2} \\ \text{for } k = 5 \quad f_{ij}^{(k)} &= 0 \\ \text{for } k = 6 \quad f_{ij}^{(k)} &= 0; \quad \text{except } f_{22}^{(k)} = f_{33}^{(k)} = -\frac{1}{(1+\delta)} \end{aligned} \quad (47)$$

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Computational Technique

پاسخ‌های غیرخطی به وسیله روش افزایش بار نمویی و Newton Raphson iteration در هر یک از مراحل بارگذاری، جهت تامین معادلات تعادل در گره‌ها، به دست می‌آید.

مراحل روش:

1. ماتریس سختی مماسی $[T]$ هر یک از اعضا در دستگاه مختصات کلی با استفاده از رابطه (39) بر اساس آخرین اطلاعات در مورد هندسه عضو و نیروها تعیین می‌شود. سپس ماتریس سختی مماسی سیستم $[T]$ Assemble می‌گردد.
2. $[T]$ و $\{\Delta P\}$ در رابطه (2) جایگذاری شده و این معادله برای $\{\Delta x\}$ حل می‌شود.
3. تعیین شکل هندسه جدید سازه:
(a) تعیین مختصات جدید گره‌ها از رابطه

$$\{x^{(i+1)}\} = \{x^{(i)}\} + \{\Delta x\} \quad (48)$$

مولفه‌های انتقال $\{x^{(i+1)}\}$ مکان جدید تمام گره‌های سیستم را تعیین می‌کند. این در حالی است که مولفه‌های دوران دارای مفهوم فیزیکی خاصی نبوده و این مقادیر تجمعی صرفاً برای استفاده در معیار همگرایی محاسبه می‌شود.

- (b) تعیین ماتریس جدید جهت‌گیری گره برای هر یک از گره‌ها با استفاده از روابط (10) تا (12).

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Computational Technique

4. تعیین هندسه عضو بر اساس آخرین اطلاعات درباره مکان‌ها و جهت‌گیری‌های گره‌های سازه. برای هر یک از اعضا تغییرشکل‌های نسبی $\{\bar{u}\}$ و ماتریس جهت‌گیری $[r]$ با استفاده از روابط (13) تا (18) تعیین می‌شود.
5. تعیین نیروهای انتهایی اعضا. برای هر عضو نیروهای ابتدا و انتهای اعضا $\{\bar{S}\}$ از رابطه (24) تا (27) به دست آمده و سپس نیروهای انتهایی در دستگاه مختصات کلی تعیین می‌گردد.

$$(19) \ \& \ (21) \ \Rightarrow \ \boxed{\{F\} = [R][\bar{B}]\{\bar{S}\}} \quad (49)$$

6. نیروهای به دست آمده به گونه‌ای است که معادلات تعادل سیستم در مرحله $\{p^{(i+1)}\}$ لزوماً برقرار نمی‌باشد. این راه حل تقریبی ارائه شده به وسیله روش نیوتن رافسون تکرار شونده اصلاح شده به گونه‌ای که نیروهای نامتعادل گره‌ای از یک حد خاص کوچکتر شود. بردار $\{p\}$ در مرحله $\{p^{(i+1)}\}$ ثابت نگه داشته می‌شود.

$$\boxed{\Delta Q_j = \{p\} - f(\Gamma_j)} \quad (50)$$

j : اندیس j نشان دهنده تکرار j ام است.

ΔQ_j : نیروهای نامتعادل گره‌ای

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Computational Technique

7. با استفاده از آخرین مقادیر موجود تمام کمیت‌های هندسی و استاتیکی، ماتریس سختی مماسی $[T]$ برای هر عضو تعیین می‌شود. سپس ماتریس سختی مماسی سیستم $[\tau]$ Assemble می‌گردد.

8. با نیروهای نامتعادل گره‌ای مانند یک بار نمویی (Incremental) برخورد شده و بردار جابجایی اصلاحی $\{\Delta x\}$ از رابطه نمویی زیر به دست می‌آید.

$$[\tau_j]\{\Delta x_j\} = \{\Delta Q_j\} \quad (51)$$

9. اگر بردار جابجایی اصلاحی به مقدار کافی کوچک نباشد موقعیت جدید گره‌ها

$$\{x_{j+1}\} = \{x_j\} + \{\Delta x_j\} \quad (52)$$

و ماتریس جهت‌گیری جدید گره‌ها تعیین می‌شود. دوباره مراحل (4) تا (9) تکرار شده تا اینکه $\{\Delta x\}$ به مقدار کافی از یک معیار از پیش تعریف شده کوچکتر گردد.

10. یک مقدار جدید نیروی خارجی $\{\Delta p\}$ انتخاب شده و به مرحله (1) بر می‌گردیم.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Computational Technique

معیار همگرایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\left[\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{\sum x_i^2} \right] \leq e \quad (53)$$

در رابطه (53) e معیار همگرایی (Prescribed tolerance) است. در کاربرد این رابطه به این نکته باید توجه کرد که مولفه‌های دوران و انتقال بردار $\{x\}$ باید به صورت دو گروه مجزا در نظر گرفته شود و رابطه (53) باید به طور مستقل برای هر گروه صدق نماید.

اگر از اثرات Bowing صرف نظر شود در این صورت خواهیم داشت:

@ (27): $c_{bj} = 0$

@ (42): $G_{13} = G_{23} = G_{12} = G_{22} = 0$ & $H = \frac{\pi^2}{\lambda^2}$

در نتیجه $[t]$ تنها تابعی از نیروی محوری خواهد بود.

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Calculation of Axial Force from Relative Member Deformations

یکی از قسمت‌های دشوار محاسبات، گام (5) است که در آن $\{\bar{S}\}$ از $\{\bar{u}\}$ تعیین می‌شود. و این به دلیل آن است که عبارت نیروی محوری اعضا Q از رابطه (27) شامل Bowing Functions، b_{1j} و b_{2j} می‌باشند که این توابع خود تابعی از q است. این مشکل با استفاده از یک روند تکرار شونده رفع می‌گردد. با توجه به آن که در رابطه (27) تنها کمیت مجهول است:

$$K(q) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} q + c_{b3} + c_{b2} - \frac{u}{\ell} = 0 \quad (54)$$

راه حل تقریبی به صورت زیر می‌باشد:

$$q_{i+1} = q_i + \Delta q_i = q_i - \frac{K(q_i)}{K'(q_i)} \quad (55)$$

که در آن

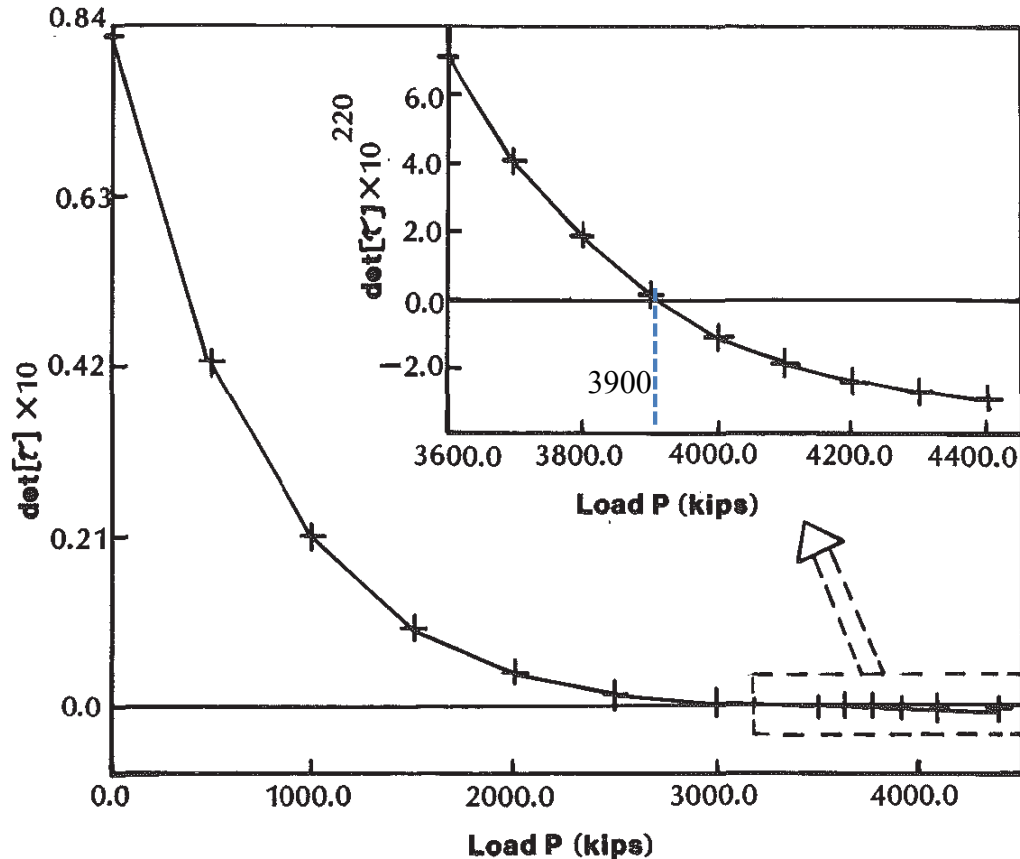
$$K'(q_i) = \frac{dK(q)}{dq} = H \quad (56)$$

و H از رابطه (44) به دست می‌آید. این تکرار تا زمانی که $\Delta q \leq e$ ادامه می‌یابد. e یک Tolerance از قبل تعریف شده است. وقتی که نیروی محوری Q با استفاده از یک روند تکرار شونده تعیین شد لنگرهای انتهایی اعضا به وسیله روابط (24) تا (26) محاسبه می‌شوند.

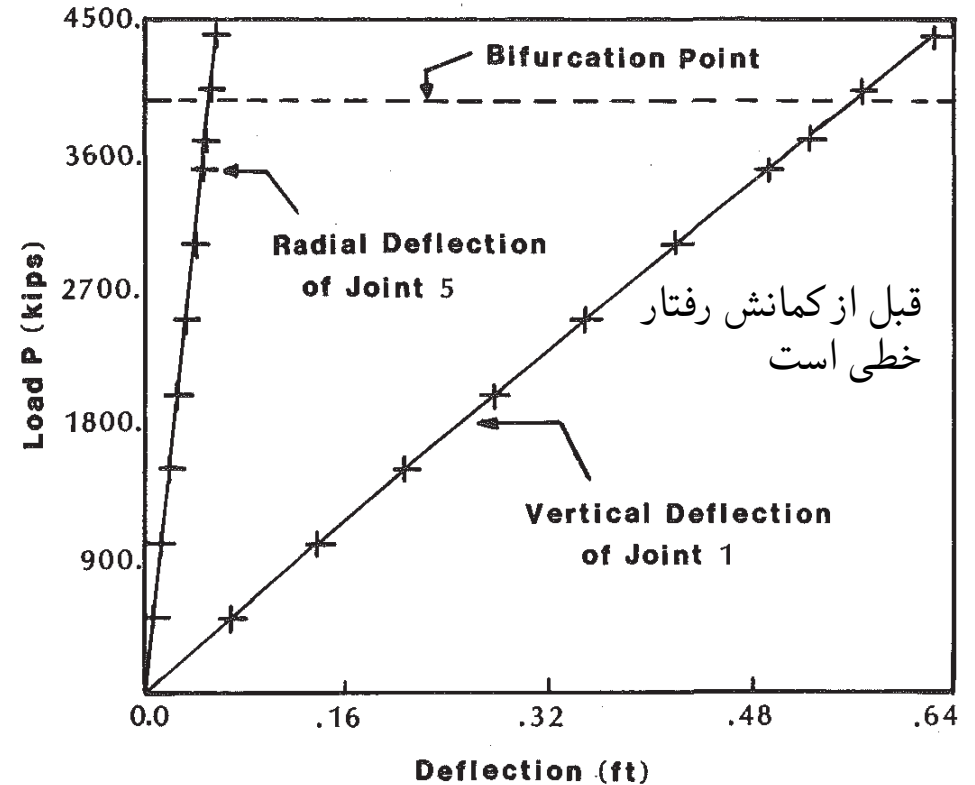
Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Numerical Solutions

Example 01



Determinant versus Load Curve for Framed Dome with Equal Vertical Loads at All Free Joints

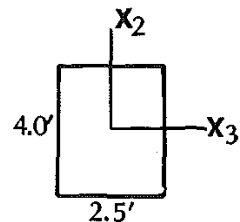
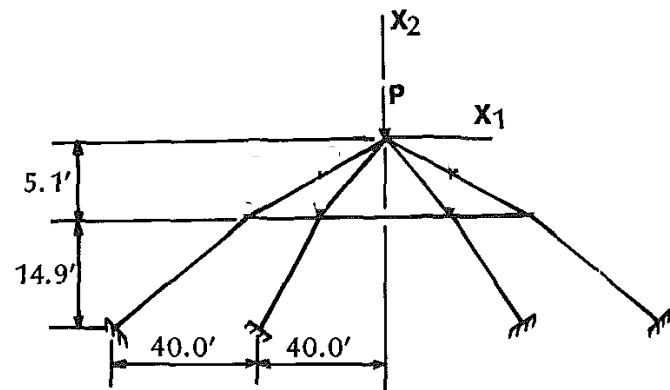
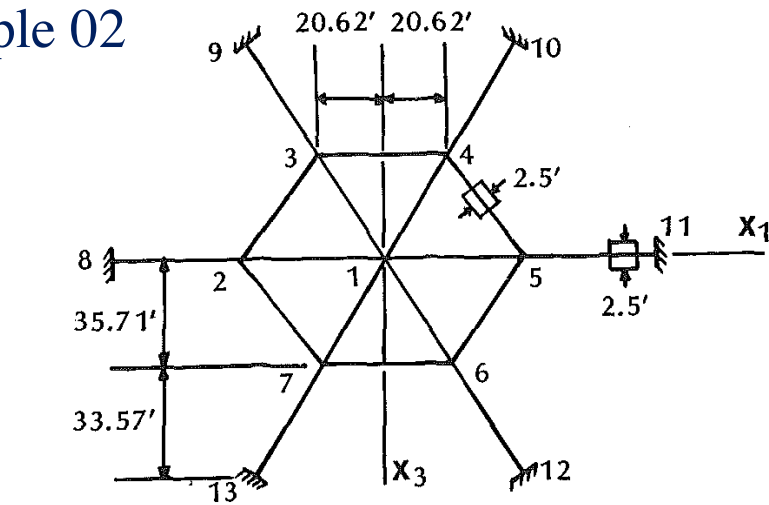


Load-Deflection Curves for Framed Dome with Equal Vertical Loads at All Free Joints

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Numerical Solutions

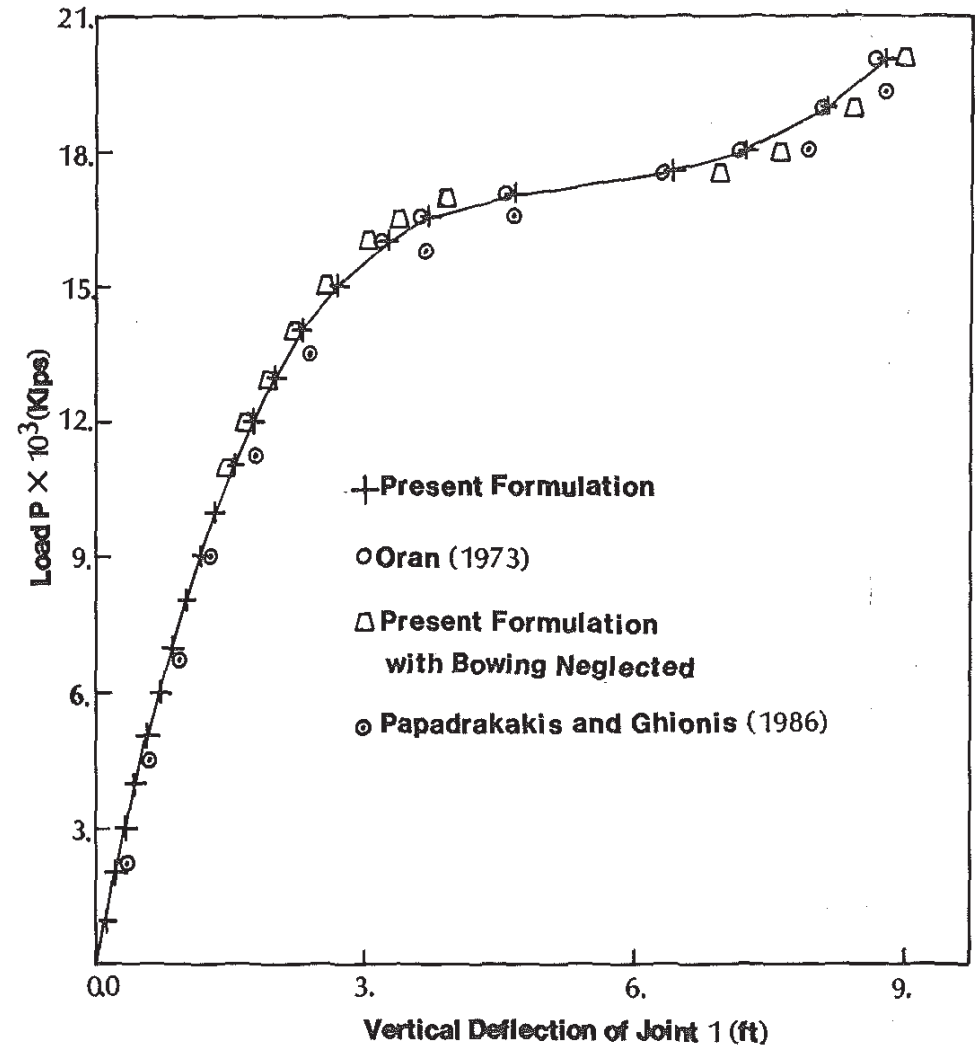
Example 02



$E=432000.0$ ksf
 $G=184320.0$ ksf

Vertical Load at Top Joint only

Typical Cross Section

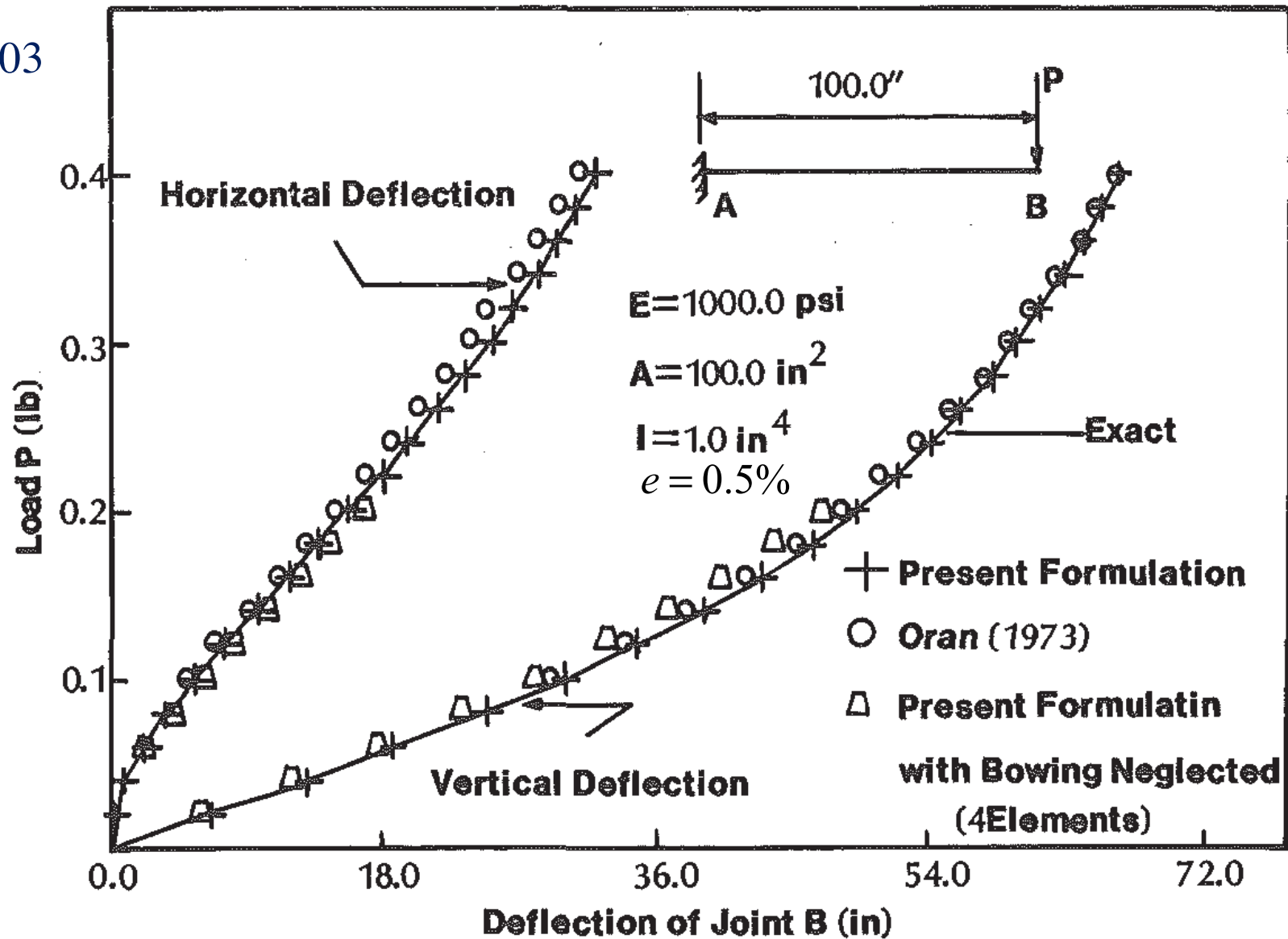


Load-Deflection Curves for Framed Dome with Vertical Load at Top Joint

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Numerical Solutions

Example 03

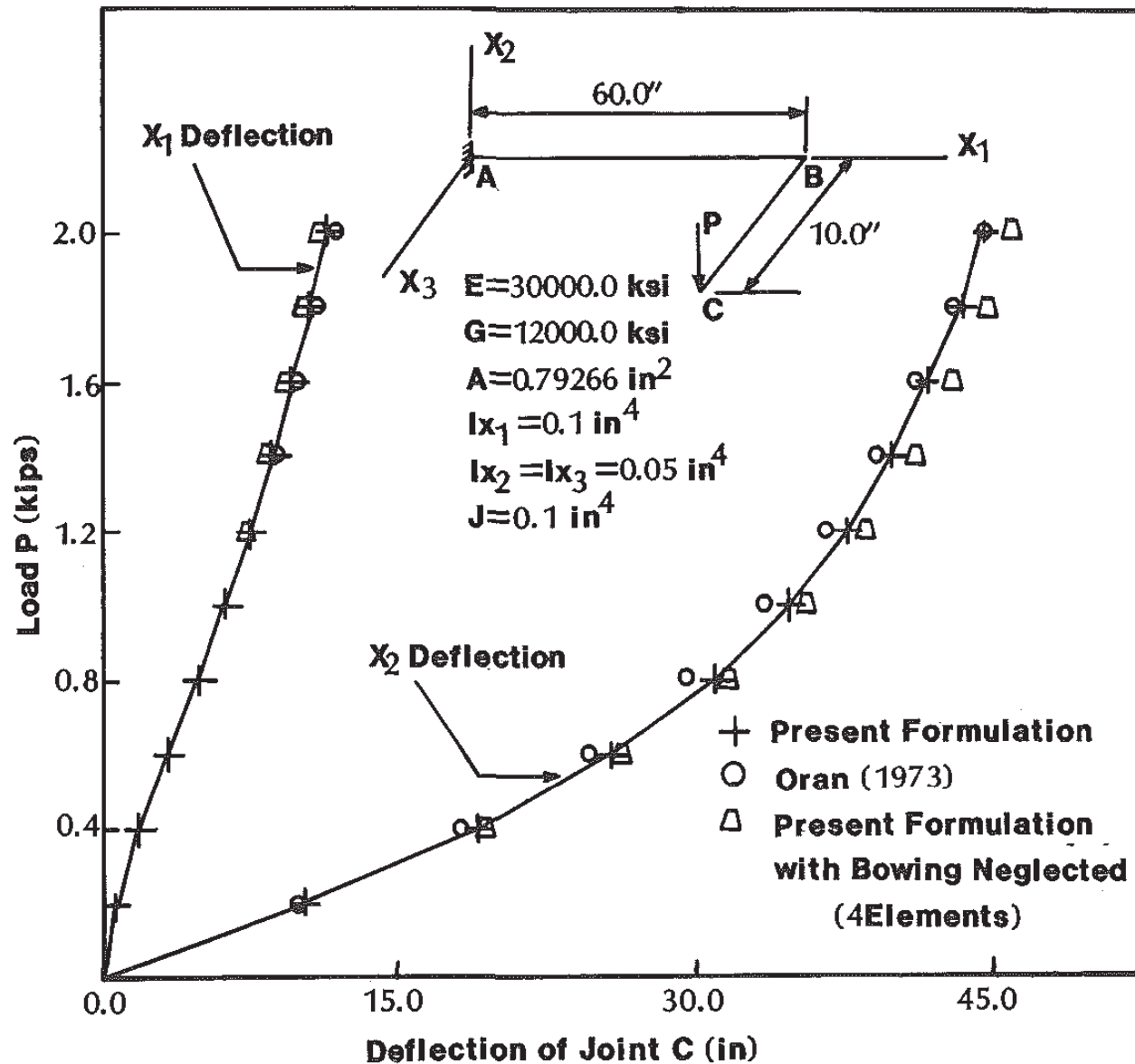


Load-Deflection Curves for Cantilever Beam

Nonlinear Static Analysis of Elastic 3D Frames

□ Numerical Solutions

Example 04



Load-Deflection Curves for Horizontal Bent-Joint C