



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Nonlinear Analysis of Structures

Introduction to Nonlinear Static Analysis

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

Introduction to Nonlinear Static Analysis

□ Nonlinear Static Analysis (Push Over)

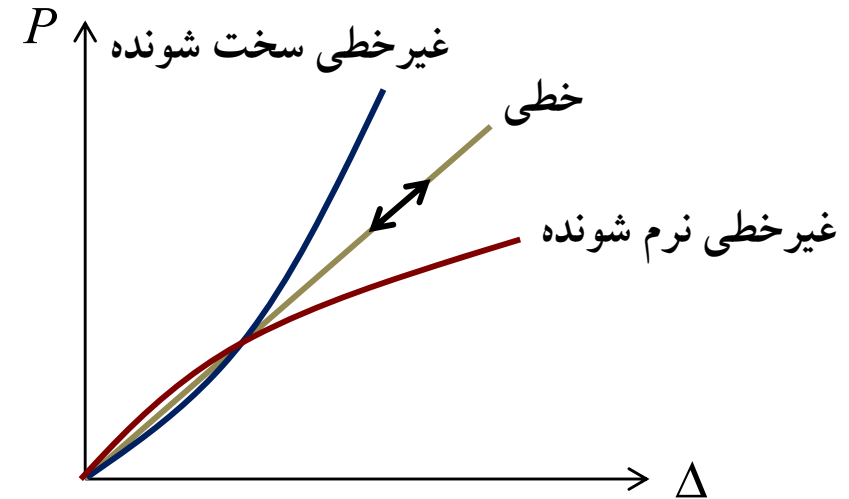
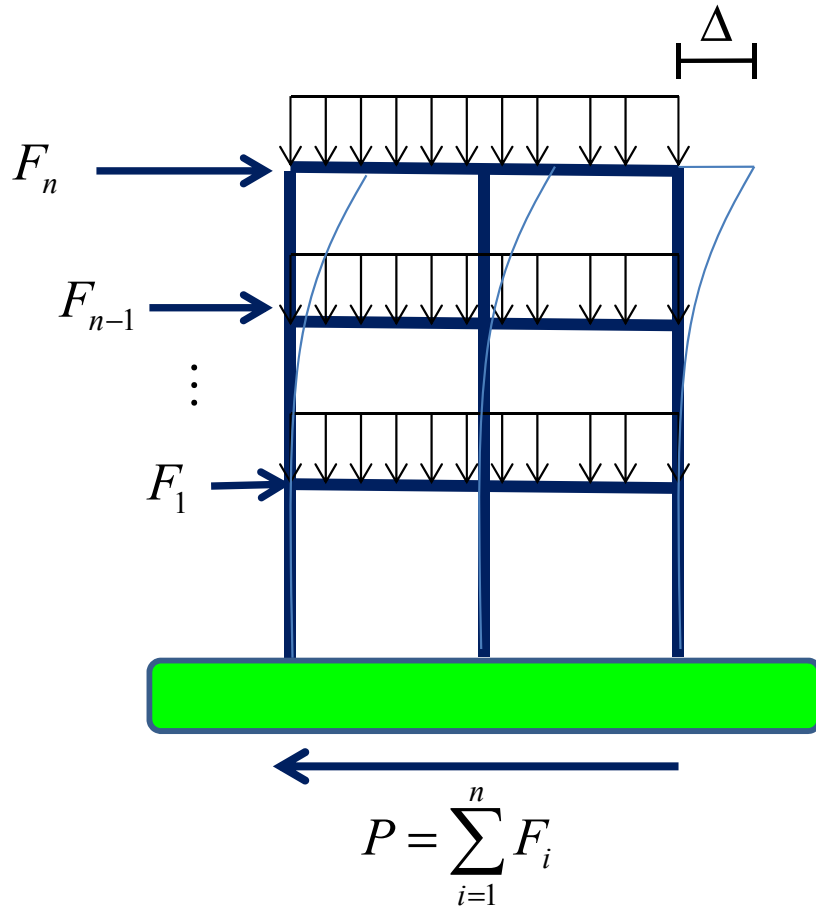


هدف:

- I. آشنایی با رفتارهای غیرخطی
- II. علل ایجاد رفتار غیرخطی
- III. نیاز به در نظر گرفتن رفتار غیرخطی
- IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

Introduction to Nonlinear Static Analysis

I. آشنایی با رفتارهای غیرخطی



مستقل از مسیر طی شده (جمع آثار)

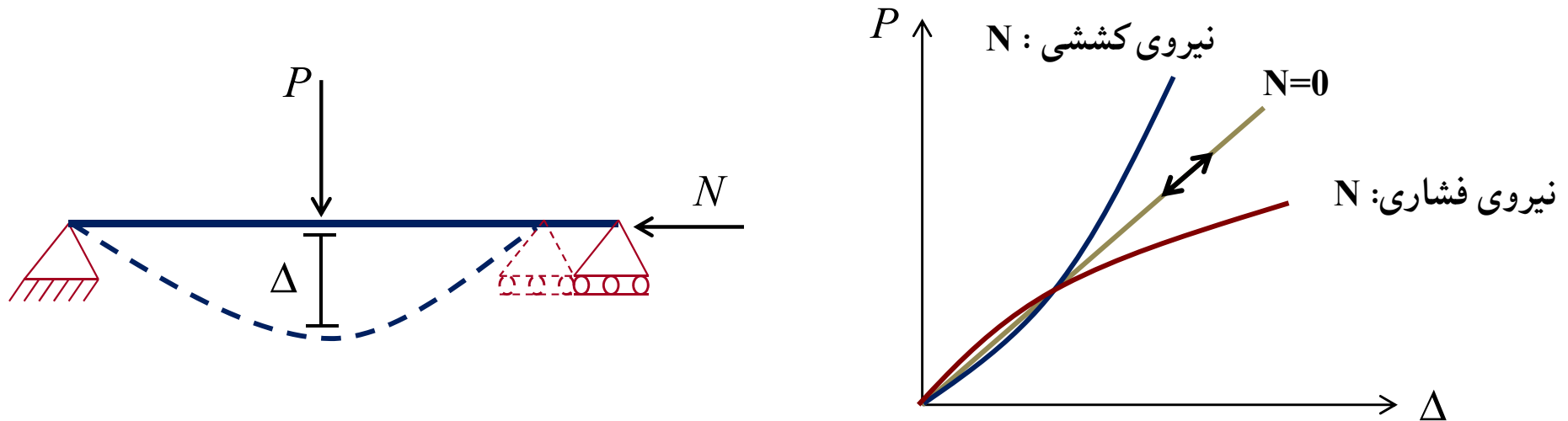
مستقل از تاریخچه بارگذاری

در رفتار خطی میزان تغییر شکلها

Introduction to Nonlinear Static Analysis

I. آشنایی با رفتارهای غیرخطی

تیر- ستون (Beam-Column)



اگر N نیروی کششی باشد منحنی رفتار از نوع سخت شونده است.
اگر N نیروی فشاری باشد منحنی رفتار از نوع نرم شونده است.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

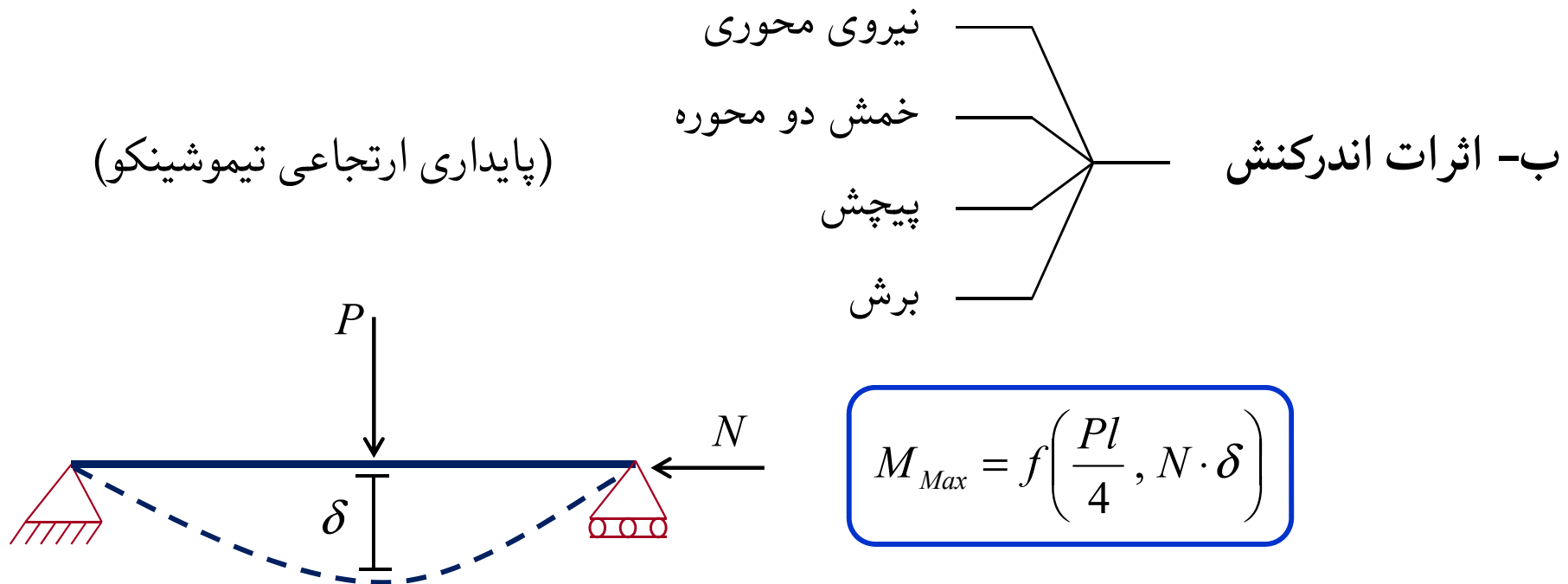
.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

(a هندسه (Geometry)

الف- جابجایی و یا دوران‌های بزرگ (Large Displacement)

- حرکت صلب: بزرگ هستند و کرنش ایجاد نمی‌شود.

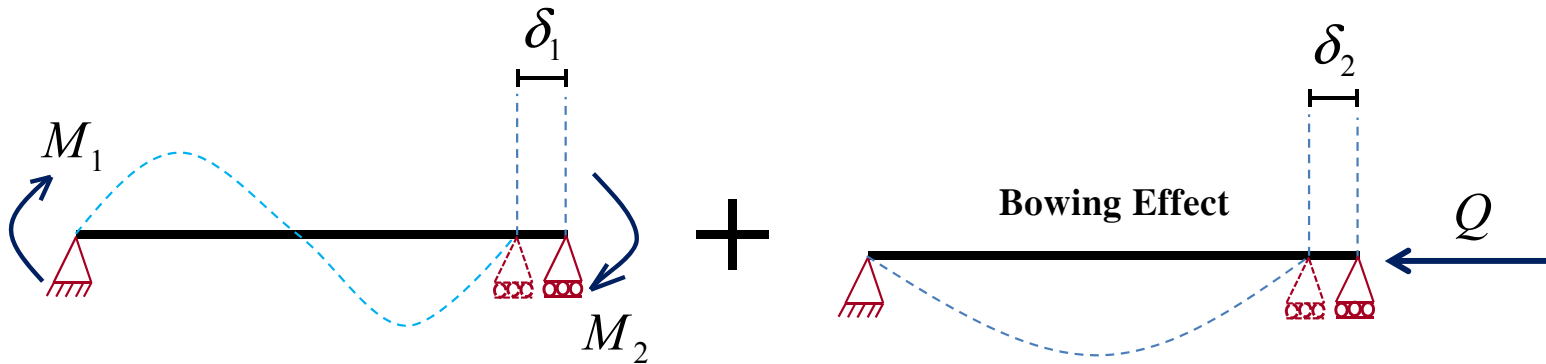
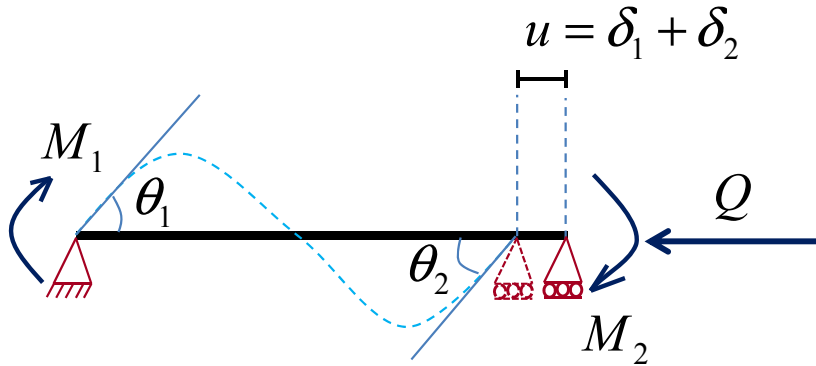
- حرکت نسبی (Large Strain): کوچک هستند و تغییر شکل یا کرنش ایجاد می‌شود.



Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

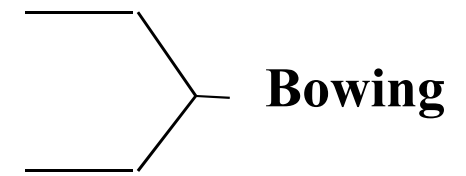
پ- اثرات کوتاه شدگی (Bowing Effect)



δ_2 : کوتاه شدگی که باعث خمش طولی می شود

کوتاه شدگی (Q فشاری) : که باعث افزایش خمش طولی می شود

بلند شدگی (Q کششی) : که باعث کاهش خمش طولی می شود



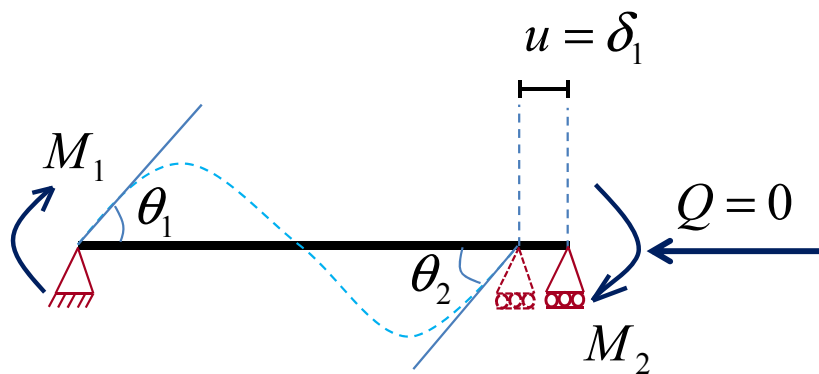
Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

پ- اثرات کوتاه شدگی (Bowing Effect)

حالت اول: از اثر Bowing و اندرکنش M و Q صرف نظر شود.

θ_1 & θ_2 & u is known $\Rightarrow M_1$ & M_2 to be determined



Slope Deflection: \Rightarrow

$$M_1 = \frac{EI}{L}(4\theta_1 + 2\theta_2)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L}(2\theta_1 + 4\theta_2)$$

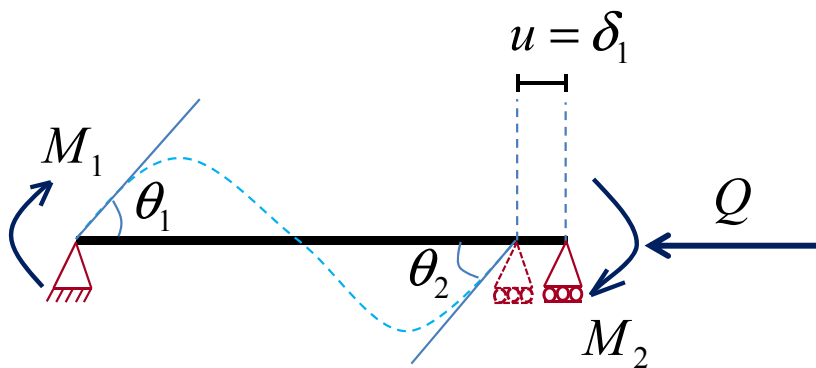
Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

پ- اثرات کوتاه شدگی (Bowing Effect)

حالت دوم: از اثر Bowing صرف نظر و اندرکنش M و Q در نظر گرفته شود.

θ_1 & θ_2 & u is known \Rightarrow M_1 & M_2 & Q to be determined



$$M_1 = \frac{EI}{L}(2C_1 + C_2)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L}(2C_2 + C_1)$$

$$Q = \frac{AE}{L}(\delta_1)$$

$$C_1 = f(Q)$$

$$C_2 = g(Q)$$

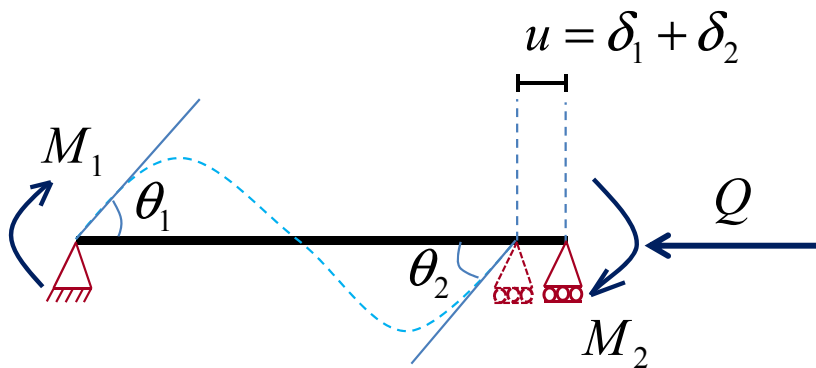
Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

پ- اثرات کوتاه شدگی (Bowing Effect)

حالت سوم: اثر Bowing و اندرکنش M و Q در نظر گرفته شود.

θ_1 & θ_2 & u is known $\Rightarrow M_1$ & M_2 & Q to be determined



$$M_1 = \frac{EI}{L}(2C_1 + C_2)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L}(2C_2 + C_1)$$

$$Q = \frac{AE}{L}(\delta_1 - \delta_2)$$

$$C_1 = f(Q)$$

$$C_2 = g(Q)$$

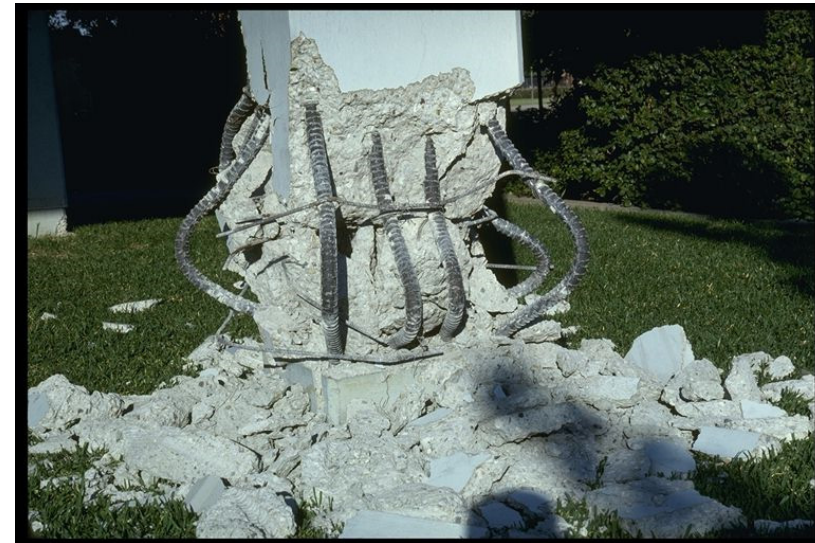
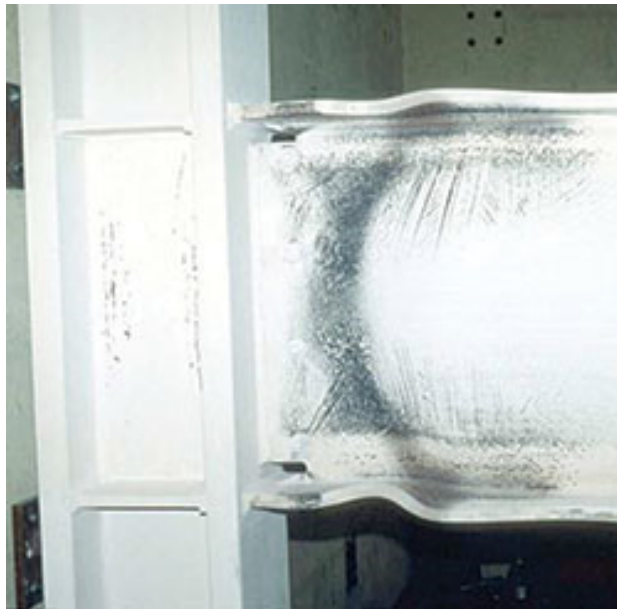
$$\delta_2 = h(C_1, C_2)$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

(a هندسه (Geometry)

ت- اثرات موضعی (کمانش، لهیدگی و ...)



ث- اعوجاج تصادفی که در اعضا وجود دارد.

(آیا شکل مستطیلی یک مقطع، مستطیل واقعی است؟)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

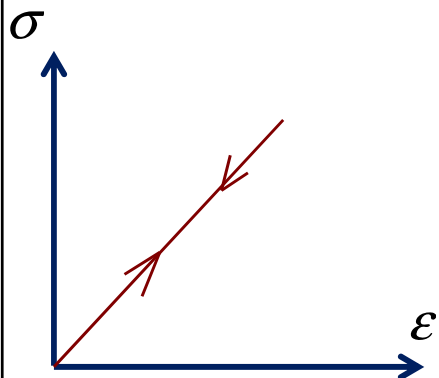
(b) مواد و مصالح (Materials)

مصالح خطی: تنش با کرنش تناسب دارد.

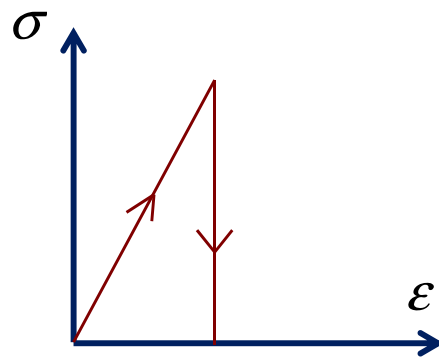
مصالح الاستیک (ارتجاعی): مسیرهای بارگذاری و باربرداری بر هم منطبق می‌باشند.

رابطه تنش - کرنش مصالح و در نتیجه سازه‌ها چهار حالت می‌تواند داشته باشند:

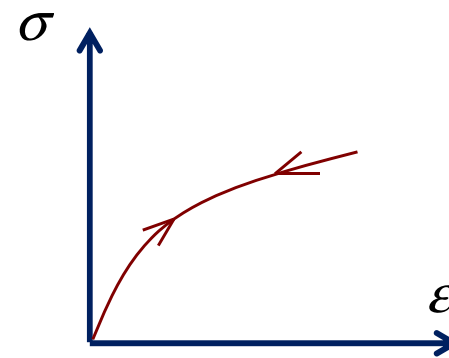
1- الاستیک - 2- غیرالاستیک - 3- خطی - 4- غیرخطی



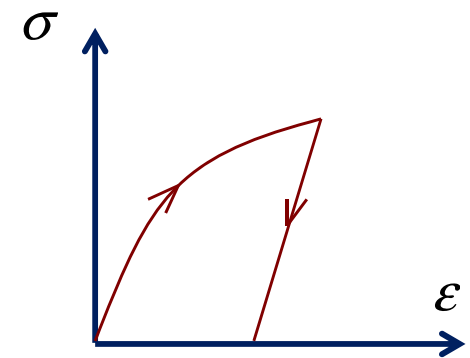
مصالح خطی و الاستیک



مصالح خطی و غیر الاستیک



مصالح غیر خطی و الاستیک



مصالح غیر خطی و غیر الاستیک

رابطه کرنش - جابجایی دارای دو حالت است: 1- خطی - 2- غیرخطی

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

(b) مواد و مصالح (Materials)

یادآوری : روابط تنش- کرنش

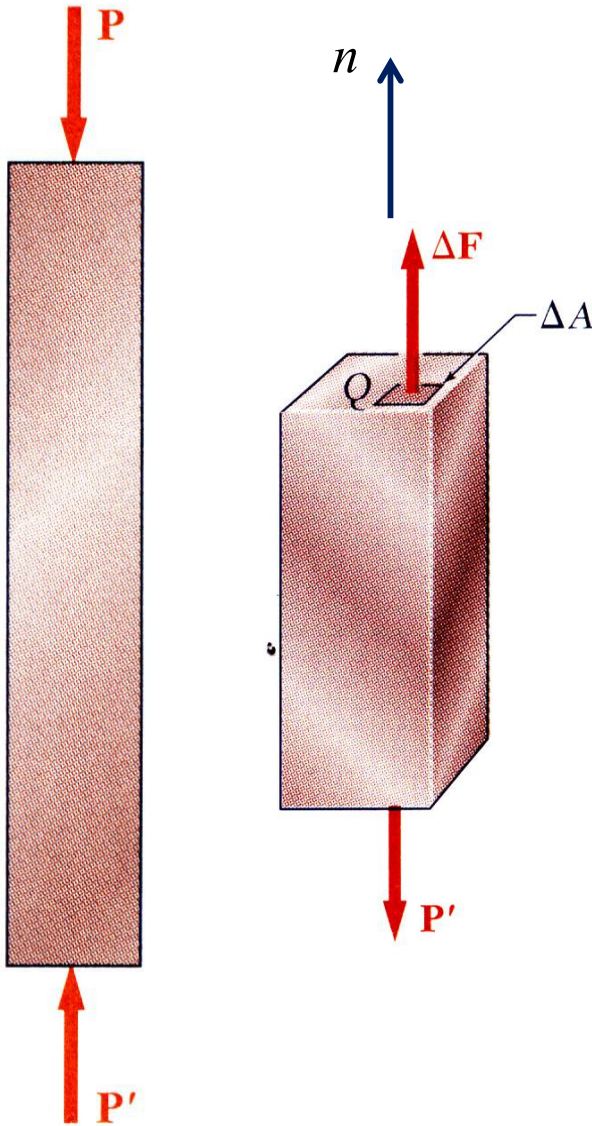
الف- تنش (Stress)

به مقدار نیروی داخلی وارد بر واحد سطح تنش گفته می شود.
کمیت تنش اولین بار توسط کوشی در حدود سال ۱۸۲۲ در نظریه الاستیسیته معرفی شد.

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

σ_n : تنش روی صفحه ای که محور عمود آن n می باشد.

این حد یکتا است و آن را طبق اصل کوشی می پذیریم



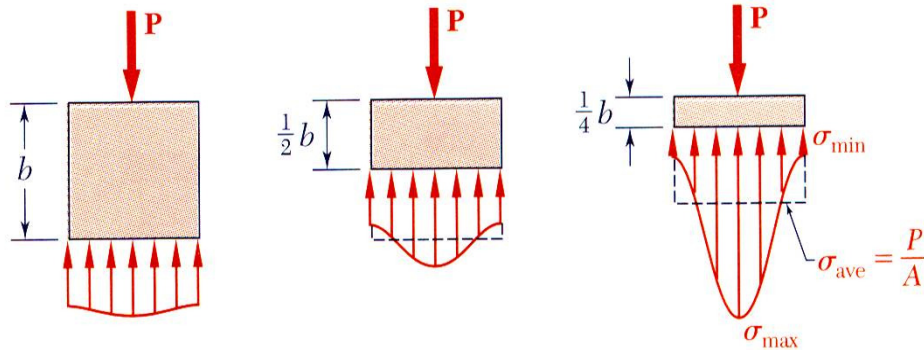
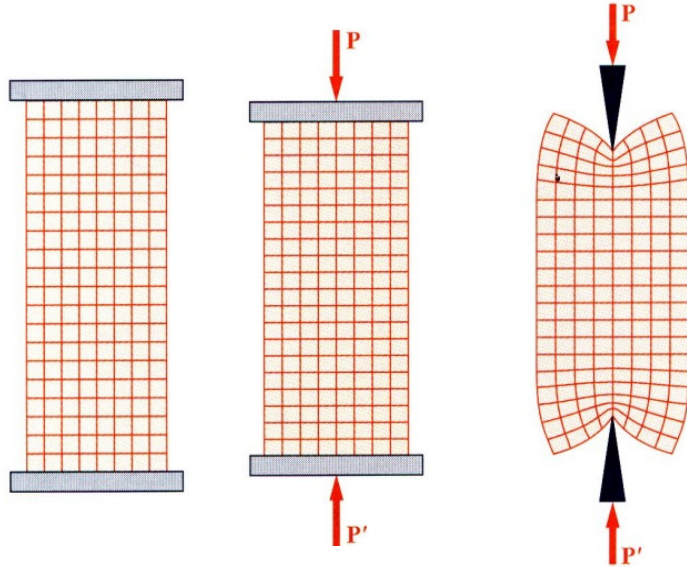
Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

Saint-Venant's Principle

الف- تنش (Stress)

فرض اول (فرض کوشی): توزیع تنش یکنواخت است یعنی اگر تنش را در مساحت ضرب کنیم و در مرکز قرار دهیم ممانی ایجاد نشود. یعنی برآیند فقط یک نیرو است.



$$P = \int dF = \int_A \sigma dA$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= 0.973\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 1.027\sigma_{\text{ave}} \end{aligned}$$

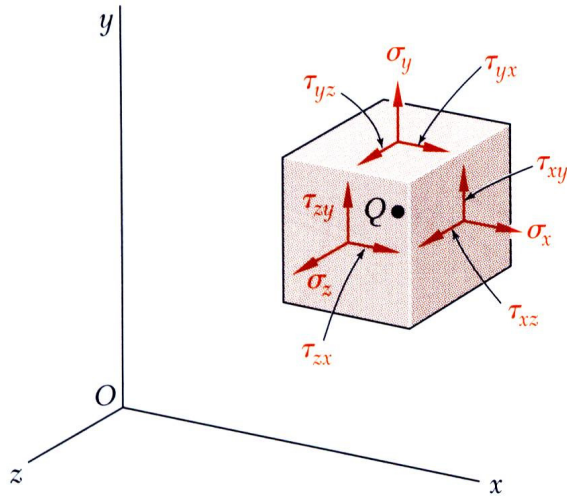
$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= 0.668\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 1.387\sigma_{\text{ave}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= 0.198\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 2.575\sigma_{\text{ave}} \end{aligned}$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

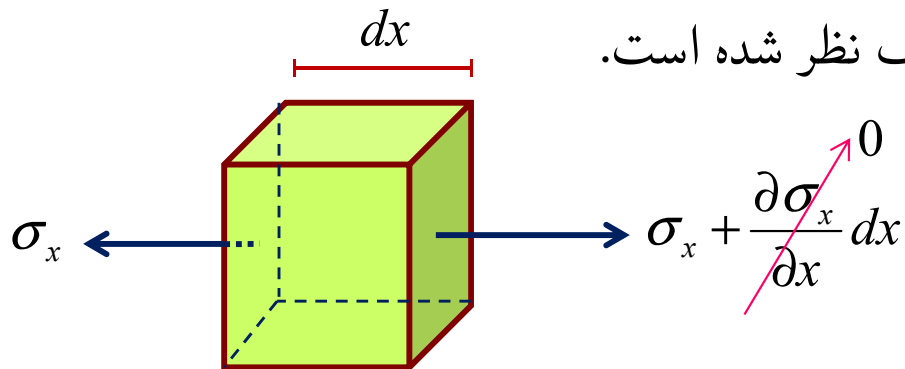
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

الف- تنش (Stress)



فرض دوم: تنش‌های عمودی روی دو سطح عمود برهم مساوی‌اند

(Note: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$)



فرض سوم: از تغییرات تنش در حجم المان صرف نظر شده است.

فرض چهارم: در نوشتن معادلات تعادل از وزن المان صرف نظر شده است.

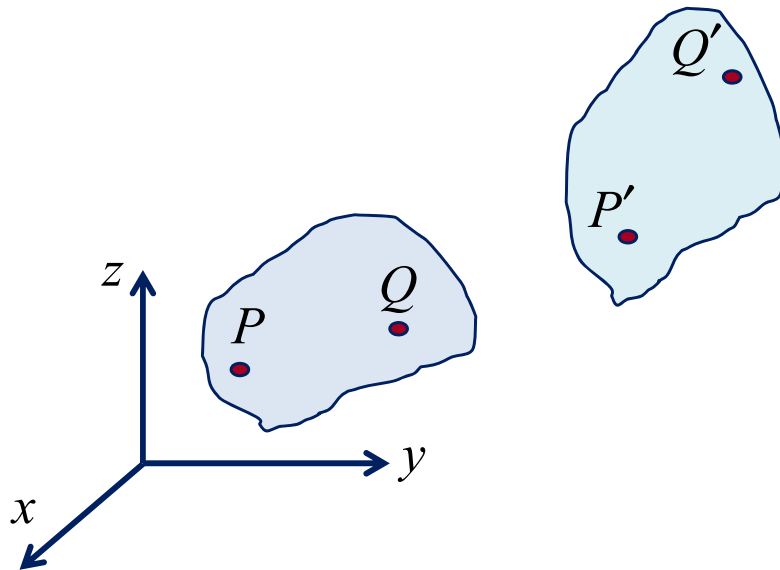
Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

(b) مواد و مصالح (Materials)

یادآوری: روابط تنش- کرنش

ب- کرنش (Strain)



تمامی اجسام شکل‌پذیر تحت بارهای مختلف، تغییر مکان (Displacement) و تغییر شکل (Deformation) می‌دهند. بدین معنی که هر نقطه‌ی P از جسم از موقعیت ابتدایی خود که به وسیله مختصات (x_p, y_p, z_p) در فضا مشخص می‌شود، به موقعیت جدید خود P' که به وسیله مختصات $(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'})$ مشخص می‌شود، انتقال می‌یابد.

نیروی وارد بر یک جسم در آن دو نوع تغییر مکان ایجاد می‌کند

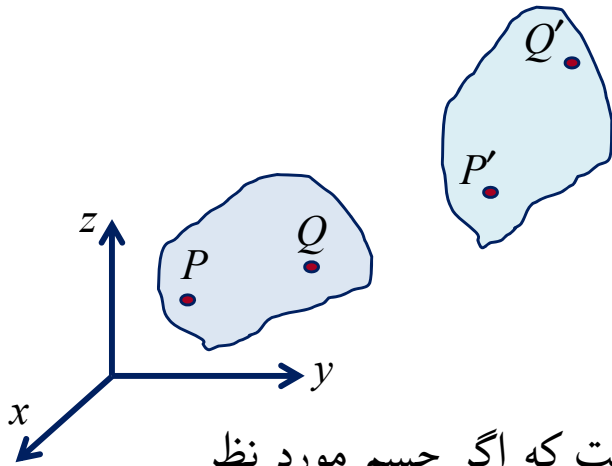
صلب

نسبی: عامل ایجاد کرنش است

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

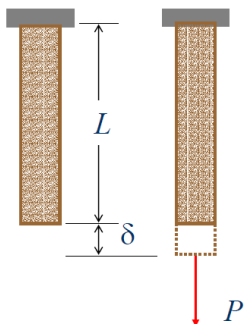
ب- کرنش (Strain)



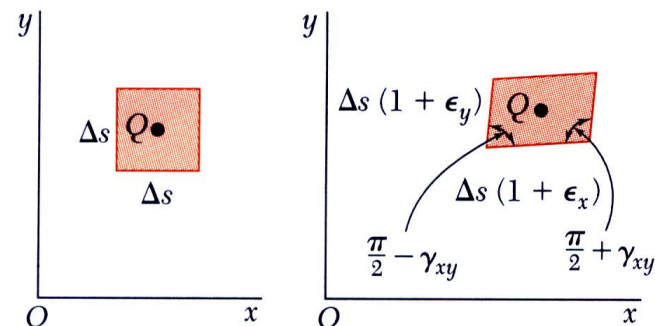
بردار PP' را بردار تغییر مکان نقطه‌ی P از جسم می‌نامند. واضح است که اگر جسم مورد نظر شکل پذیر باشد، در این صورت تغییر مکان نقاط مختلف آن با هم مساوی نیستند. عدم تساوی تغییر مکان‌های نقاط یک جسم، باعث تغییر شکل (Deformation) آن می‌شود. تغییر شکل یک جسم، توسط کمیت مؤلفه‌های مختلف کرنش در هر نقطه از جسم بیان می‌گردد.

کرنش محوری (نرمال)

کرنش برشی: ناشی از تغییرات زاویه



$$\text{if } A = cte \Rightarrow \boxed{e = \frac{\delta}{L}}$$

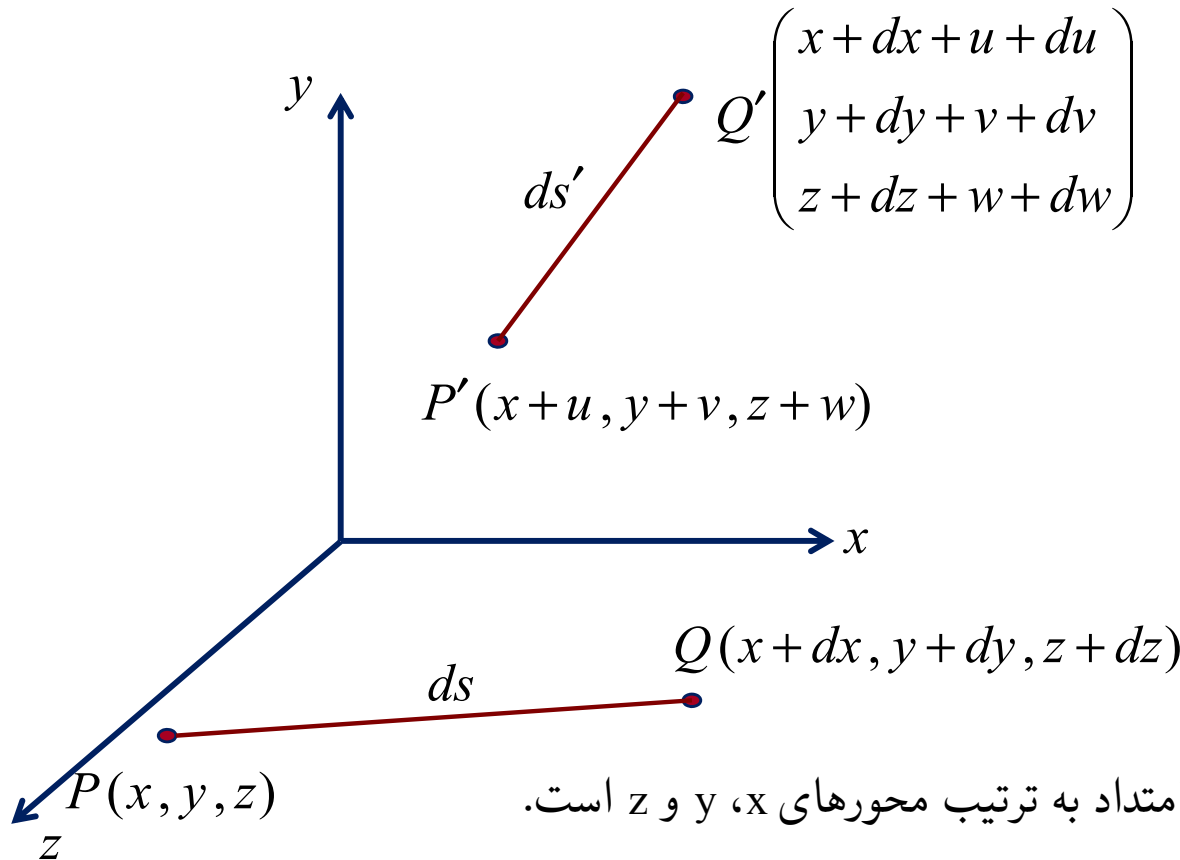


Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

ب- کرنش (Strain)

I- کرنش محوری (نرمال)



u, v و w مولفه‌های جابجایی در امتداد به ترتیب محورهای x, y و z است.

هنگامی که یک جسم تغییر شکل می‌یابد، یک ذره در نقطه P به نقطه P' و همچنین ذره‌ای در نقطه Q به نقطه Q' انتقال می‌یابد و عنصر خطی بینهایت کوچک PQ به طول ds به صورت عنصر خطی $P'Q'$ به طول ds' در می‌آید.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

ب- کرنش (Strain)

I- کرنش محوری (نرمال)

کرنش محوری مهندسی (Engineering axial strain) در نقطه P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds' - ds}{ds}$$

این کرنش در مقاومت مصالح، تئوری‌های ابتدایی و تئوری‌های تغییرشکل کوچک کاربرد دارد.

کرنش محوری لاگرانژی (Lagrangian axial strain) در نقطه P به صورت زیر تعریف می‌شود که در تغییر شکل‌های بزرگ کاربرد دارد:

$$\varepsilon = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{(ds')^2 - (ds)^2}{2(ds)^2}$$

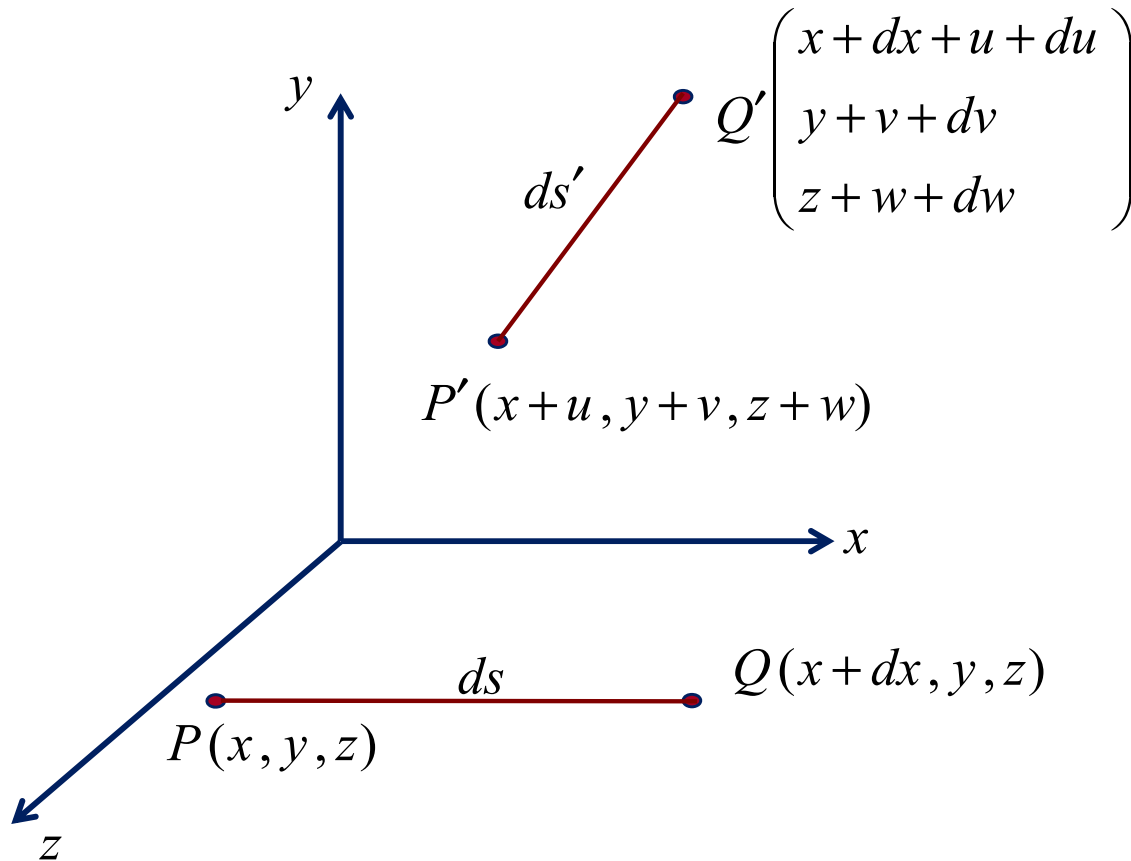
این کرنش در تئوری‌های تغییرشکل‌های بزرگ کاربرد دارد.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

ب- کرنش (Strain)

I- کرنش محوری (نرمال)



کرنش محوری را می‌توان به وسیله تغییرات تغییر مکان نقطه P بیان نمود. فرض می‌کنیم که کرنش لاگرانژی محوری نقطه P در امتداد محور xها مورد توجه باشد، در این صورت به موازات محور Ox بردار PQ را در نظر می‌گیریم.

$$|PQ| = dx$$

$$|P'Q'| = \left[(dx + du)^2 + dv^2 + dw^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

طول PQ و P'Q' به صورت زیر محاسبه می‌شود:

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

ب- کرنش (Strain)

I- کرنش محوری (نرمال)

در این صورت کرنش محوری لاگرانژی در نقطه ی P در جهت محور ox عبارت است از:

$$\varepsilon = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{(ds')^2 - (ds)^2}{2(ds)^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{(dx + du)^2 + dv^2 + dw^2 - dx^2}{2dx^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

به همین ترتیب کرنش محوری لاگرانژی در نقطه P در جهت محورهای oy و oz عبارتند از:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ب- کرنش (Strain)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

I- کرنش محوری (نرمال)

کرنش محوری مهندسی در نقطه‌ی P در جهت محورهای ox , oy , oz عبارت است از:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

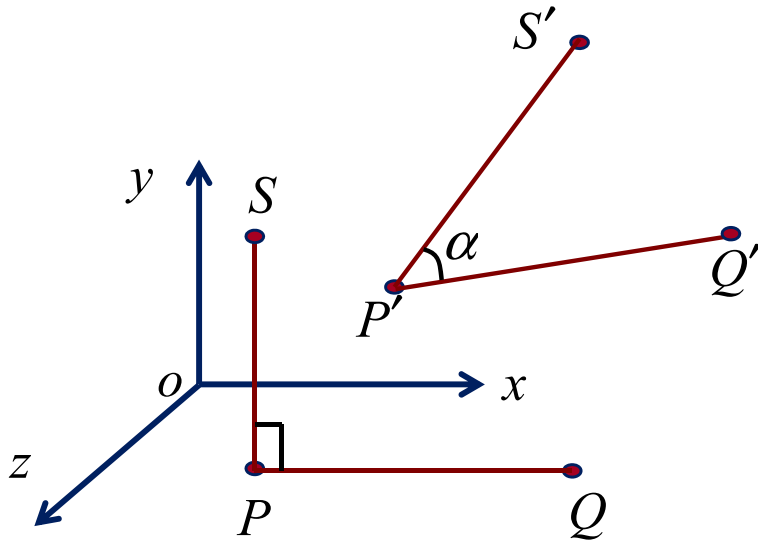
در واقع اگر از جملات درجه دومی موجود در کرنش محوری لاگرانژی صرف نظر کنیم، به کرنش محوری مهندسی می‌رسیم و این امر در واقع در تغییر شکل‌های بسیار کوچک امکان‌پذیر است و اساساً کرنش‌های محوری مهندسی و لاگرانژی هنگامی مساوی فرض می‌شوند که تغییر شکل‌ها و یا کمیت کرنش‌ها کوچک باشند.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ب- کرنش (Strain)

II- کرنش برشی (زاویه‌ای)



کرنش برشی لاگرانژی نقطه‌ی P در صفحه‌ای به موازی oxy ، oxz و oyz به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

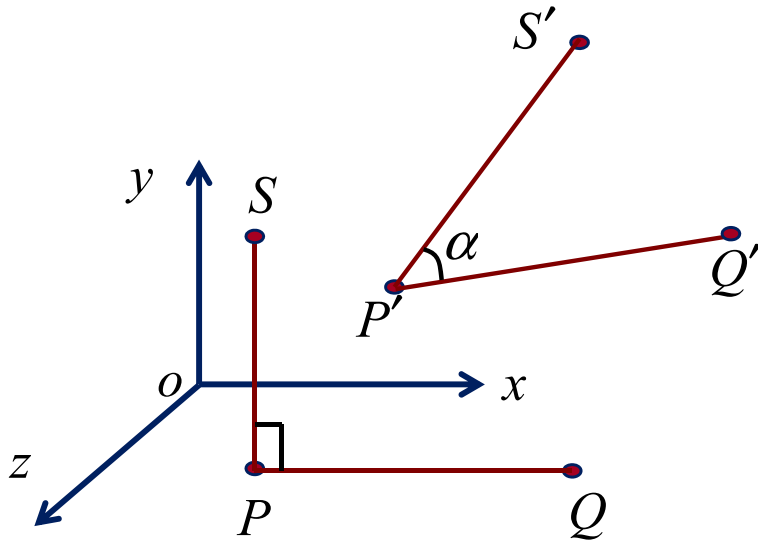
$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ب- کرنش (Strain)

II- کرنش برشی (زاویه‌ای)



کرنش برشی مهندسی در نقطه‌ی P در صفحات Oyz , Oxz , Oxy عبارت‌اند از :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) , \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) , \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

در واقع اگر از جملات درجه دومی موجود در کرنش برشی لاگرانژی صرف نظر نماییم، به کرنش برشی مهندسی می‌رسیم و این در تغییرشکل‌های کوچک امکان‌پذیر است. اساساً کرنش‌های برشی مهندسی و لاگرانژی هنگامی مساوی فرض می‌شوند که تغییرشکل‌ها و یا کمیت کرنش‌ها کوچک باشند.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

(b) مواد و مصالح (Materials)

پ- رابطه تنش - کرنش (Stress-Strain Relationship)

I - قانون تعمیم یافته هوک (The Generalized Hooke's Law)

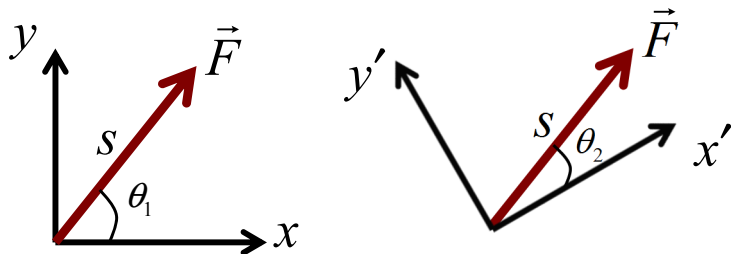
هر یک از مولفه‌های تنش در یک نقطه یک تابع خطی از مولفه‌های کرنش در آن نقطه می‌باشند.

$$\sigma_{ij} = B_{ij} + C_{ijmn} \varepsilon_{mn}$$

B_{ij} : تنش‌های اولیه

C_{ijmn} : تانسور (ماتریس) سختی

تانسور (Tensor): مقدار فیزیکی که وجود آن مستقل از دستگاه مختصات می‌باشد؛ اما از دستگاه مختصات برای تعریف تانسور برحسب مولفه‌ها استفاده می‌شود.



مقدار تانسور F در هر دو دستگاه مختصات S می‌باشد.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

I - قانون تعمیم یافته هوک (The Generalized Hooke's Law)

$$\sigma_{ij} = B_{ij} + C_{ijmn} \varepsilon_{mn}$$

i, j : اندیس‌های آزاد (Free indices) می‌باشند که در یک عبارت فقط یکبار ظاهر می‌شوند.

m, n : اندیس‌های جمع (Summation indices) می‌باشند که در یک عبارت بیش از یکبار ظاهر می‌شوند.

درجه تانسور: برابر با تعداد اندیس‌های آزاد تانسور می‌باشد. بنابراین تنش یک تانسور درجه 2 است.

تعداد مولفه‌های یک تانسور در فضای n بعدی برابر با n^p است که در آن p درجه تانسور می‌باشد.

بنابراین تعداد مولفه‌های تانسور تنش در فضای سه بعدی برابر با $3^2 = 9$ است.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

I - قانون تعمیم یافته هوک (The Generalized Hooke's Law)

تجزیه تانسور تنش

هیدروستاتیک - Hydrostatic (Spherical)

مولفه‌های تانسور تنش

برش خالص (انحرافی) - Pure Shear (Deviator)

هیدروستاتیک: باعث تغییر حجم می‌شود، مکعب به شکل مکعب باقی می‌ماند، باعث تغییر شکل نمی‌شود.

اثر مولفه‌ها

برش خالص (انحرافی): باعث تغییر زاویه و تغییر شکل می‌شود. اما باعث تغییر حجم نمی‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} + P & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} + P & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} + P \end{bmatrix}$$

میدان
تنش

مولفه هیدروستاتیک

مولفه Deviator

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

I - قانون تعمیم یافته هوک (The Generalized Hooke's Law)

با فرض تنش اولیه صفر $B_{ij} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1121} & C_{1113} & C_{1131} & C_{1123} & C_{1132} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2221} & C_{2213} & C_{2231} & C_{2223} & C_{2232} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3321} & C_{3313} & C_{3331} & C_{3323} & C_{3332} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1221} & C_{1213} & C_{1231} & C_{1223} & C_{1232} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2112} & C_{2121} & C_{2113} & C_{2131} & C_{2123} & C_{2132} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1321} & C_{1313} & C_{1331} & C_{1323} & C_{1332} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3121} & C_{3113} & C_{3131} & C_{3123} & C_{3132} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2321} & C_{2313} & C_{2331} & C_{2323} & C_{2332} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3212} & C_{3221} & C_{3213} & C_{3231} & C_{3223} & C_{3232} \end{bmatrix}_{9 \times 9} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \end{Bmatrix}_{9 \times 1}$$

(یعنی برای خصوصیات یک ماده به 81 ثابت فیزیکی نیاز داریم)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

(b) مواد و مصالح (Materials)

پ- رابطه تنش - کرنش (Stress-Strain Relationship)

II - تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

مواد براساس خصوصیات تقارن شامل 4 دسته می باشند:

- a) Isotropic Material
- b) Orthotropic Material
- c) Anisotropic Material
- d) Transversely Isotropic

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

II - تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

a) Isotropic Material

$$E, \nu = cte$$

خصوصیات مواد در تمام جهتها یکسان است
یعنی مستقل از جهت می باشد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

تنشهای عمودی تابعی از کرنشهای عمودی و تنشهای برشی تابعی از کرنشهای برشی است.

$$C_{1111} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{1122} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

(یعنی برای خصوصیات ماده به 2 ثابت
فیزیکی نیاز داریم)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

b) Orthotropic Material

Orthotropic یک حالت خاص از ناهمسانگردی می باشد. به این معنا که خواص آنها به جهتی که در آن اندازه گیری می شوند، بستگی دارند. مواد Orthotropic دارای دو یا سه محور تقارن عمود بر هم هستند و در حالت کلی، خواص مکانیکی ماده در طول هر کدام از این محورها با محور دیگر متفاوت است (مانند تنه درخت).



تنه درخت سه محور تقارن دارد:

- خصوصیات در جهت x یکسان است.
- خصوصیات در جهت y یکسان است.
- خصوصیات در جهت z یکسان است.

$$E_1, E_2, E_3$$

$$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$$

$$G_{12}, G_{13}, G_{23}$$

اما خصوصیات در جهت x, y و z با هم تفاوت دارند.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

b) Orthotropic Material

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{2323} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

تنش‌های عمودی تابعی از کرنش‌های عمودی و تنش‌های برشی تابعی از کرنش‌های برشی است.

(یعنی برای خصوصیات ماده به 9 ثابت فیزیکی نیاز داریم)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

b) Orthotropic Material

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_3 E_1 \Delta} & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_3 E_1 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{E_3 E_1 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{23} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad , \quad \Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}$$

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

c) Anisotropic Material

موادی هستند که خصوصیات آن‌ها وابسته به جهت است. برخلاف مصالح Isotropic که ویژگی‌های مواد در همه جهت‌ها یکسان است، ویژگی مصالح Anisotropic مانند مدول یانگ در راستای هر جهت تغییر می‌کند. به طور نمونه می‌توان به کامپوزیت‌ها اشاره کرد.

از آنجایی که تانسورهای تنش و کرنش متقارن هستند می‌توان نشان داد که

$$C_{ijmn} = C_{jimn} \quad , \quad C_{ijmn} = C_{ijnm}$$

براساس در نظر گرفتن مقدار انرژی ذخیره شده

$$C_{ijmn} = C_{mnji}$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

c) Anisotropic Material

براساس تعداد ضرایب الاستیک مستقل، در حالت کلی برای یک ماده الاستیک Anisotropic تعداد ضرایب الاستیک مستقل 21 عدد می باشد.

(21 پارامتر)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 2C_{1112} & 2C_{1113} & 2C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 2C_{2212} & 2C_{2213} & 2C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 2C_{3312} & 2C_{3313} & 2C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & 2C_{1212} & 2C_{1213} & 2C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & 2C_{1312} & 2C_{1313} & 2C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & 2C_{2312} & 2C_{2313} & 2C_{2323} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

تنش‌های عمودی و تنش‌های برشی تابعی از کرنش‌های عمودی و کرنش‌های برشی می باشند.

(یعنی برای خصوصیات ماده به 21 ثابت فیزیکی نیاز داریم)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیر خطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

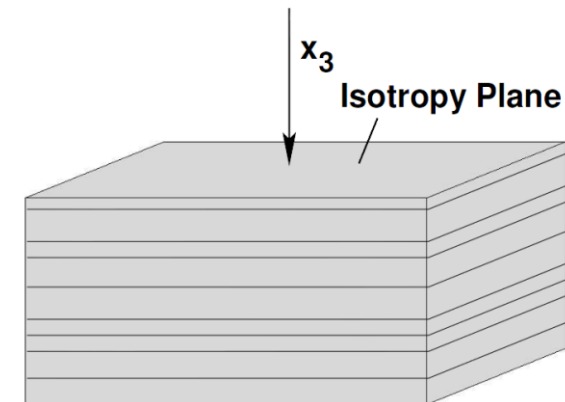
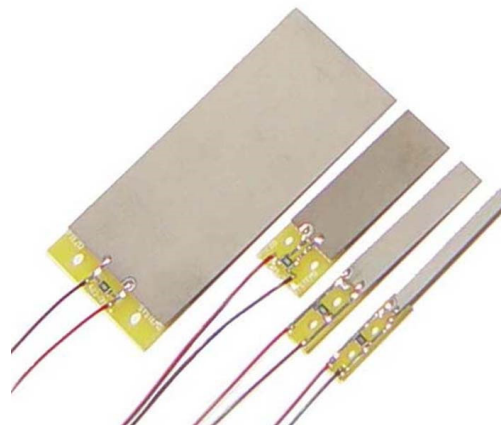
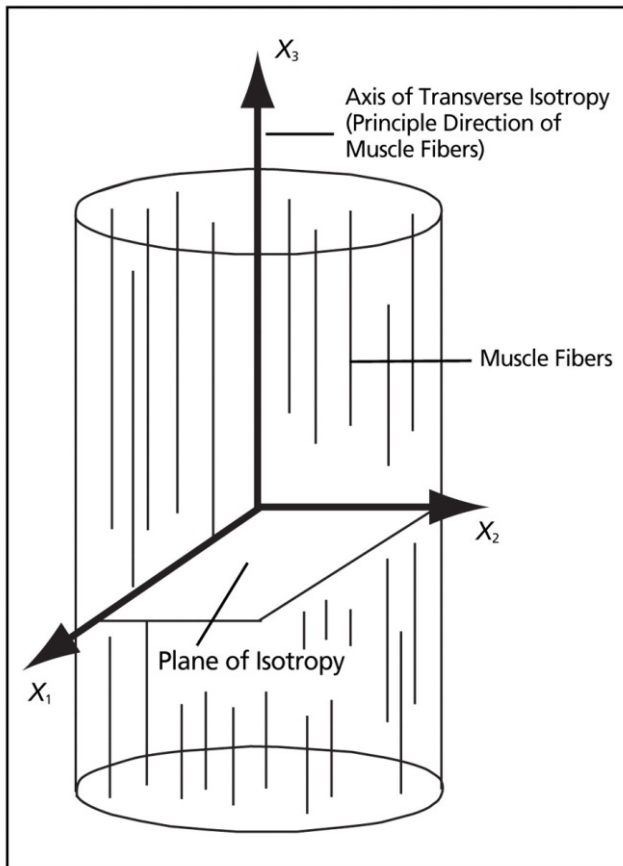
d) Transversely Isotropic

حالت خاصی از مصالح orthotropic می‌باشند که دارای یک صفحه تقارن و یک محور تقارن است. خصوصیات مصالح در صفحه تقارن در هر جهت یکسان می‌باشد؛ اما عمود بر صفحه در راستای محور تقارن متفاوت است. به طور نمونه می‌توان به حسگرهای پیزوالکتریک و کامپوزیت‌های مسلح شده با فیبر اشاره کرد

$$E_1 = E_2 = E_p \quad , \quad E_3 = E_t$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_p \quad , \quad \nu_{31} = \nu_{32} = \nu_{tp} \quad , \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{pt}$$

$$G_p = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)} \quad , \quad G_t = \text{Shear modulus in the } t\text{-direction}$$



II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

d) Transversely Isotropic

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

تنش‌های عمودی تابعی از کرنش‌های عمودی و تنش‌های برشی تابعی از کرنش‌های برشی است.

(یعنی برای خصوصیات ماده به 5 ثابت فیزیکی نیاز داریم)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

II – تقارن در خصوصیات مواد (Material Symmetry Properties)

d) Transversely Isotropic

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} E_p(1 - \nu_{pt}\nu_{tp})\Gamma & E_p(\nu_p + \nu_{pt}\nu_{tp})\Gamma & E_p(\nu_{tp} + \nu_p\nu_{tp})\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ E_p(\nu_p + \nu_{pt}\nu_{tp})\Gamma & E_p(1 - \nu_{pt}\nu_{tp})\Gamma & E_p(\nu_{tp} + \nu_p\nu_{tp})\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ E_t(\nu_{pt} + \nu_p\nu_{pt})\Gamma & E_t(\nu_{pt} + \nu_p\nu_{pt})\Gamma & E_t(1 - \nu_p^2)\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\frac{\nu_{tp}}{E_t} = \frac{\nu_{pt}}{E_p}, \quad \Gamma = \frac{1}{1 - \nu_p^2 - 2\nu_{pt}\nu_{tp} - 2\nu_p\nu_{pt}\nu_{tp}}$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

(b) مواد و مصالح (Materials)

پ- رابطه تنش - کرنش (Stress-Strain Relationship)

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)



Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Elasticity-Based Model

a) Linear Elastic Model

در مدل‌های الاستیک خطی وضعیت فعلی تنش وابسته به وضعیت فعلی کرنش است و این مستقل از تاریخچه کرنش می‌باشد (یعنی مستقل از مسیر است).

فرضیات:

$$\sigma_{ij} = \Lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

G and Λ are elastic constants which referred to as *Lamé's constants*

δ_{ij} :is Kronecker delta

if $i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$
if $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

- پیوستگی
- تنش برشی ایجاد کرنش قائم نمی‌کند. یعنی τ_{xy} فقط γ_{xy} ایجاد می‌کند.
- تنش قائم ایجاد کرنش برشی نمی‌کند.
- مصالح ایزوتروپیک گرین.
- همگن

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیر خطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

a) Linear Elastic Model

Matrix form

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \Lambda + 2G & \Lambda & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda + 2G & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

in *Isotropic Materials* $\Rightarrow \Lambda + 2G = C_{1111}$, $\Lambda = C_{1122}$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Elasticity-Based Model

b) Non-Linear Elastic Model

عملکرد مدل‌های الاستیک خطی با فرض رفتار الاستیک غیرخطی در روابط تنش-کرنش بهبود قابل توجهی می‌یابد.

I. Cauchy Elastic

در مدل کوشی حالت سه محوری تنش، یک تابع غیرخطی از تانسور کرنش است. همچنین این مدل مستقل از مسیر تابع انرژی کرنشی و برگشت پذیر (دارای حرکت رفت و برگشتی) می‌باشد.

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl})$$

$$\sigma = \Phi_1 \mathbf{1} + \Phi_2 \varepsilon + \Phi_3 \varepsilon^2$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

b) Non-Linear Elastic Model

II. Hyper-Elastic (Green Elastic) Model

در این مدل وضعیت فعلی تنش وابسته به وضعیت فعلی کرنش است.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

W_0 : انرژی کرنشی در واحد حجم.

تغییرات انرژی کرنشی نسبت به کرنش برابر است با تنش در همان امتداد مشتق (قانون اول کاستیلیانو)

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

b) Non-Linear Elastic Model

III. Hypoelastic Models

در مدل‌هایی که وضعیت فعلی تنش وابسته به وضعیت فعلی کرنش است؛ تنش‌ها به طور یکتا از وضعیت فعلی کرنش محاسبه می‌شود و بالعکس. بنابراین این‌گونه مدل‌ها در عمل برای توصیف مصالحی مانند بتن، که تغییر شکل آن وابسته به مسیر بارگذاری است، دارای محدودیت می‌باشند.

یک راه حل برای غلبه بر این مشکل، تعریف رفتار مصالح برحسب تغییرات جزئی (Increments) تنش و کرنش است. در این حالت روابط تنش کرنش با استفاده از سختی مماسی، که با وضعیت فعلی تنش تغییر می‌کند بیان می‌گردد. این نوع مدل به طور کلی وابسته به تاریخچه تغییر شکل‌ها است. رفتار این مدل در دامنه‌های کوچک به صورت برگشت‌پذیر (رفتار الاستیک) است.

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}, \sigma_{mn})$$

تغییرات تنش ($\dot{\sigma}_{ij}$) تابعی از تغییرات کرنش ($\dot{\epsilon}_{kl}$) و تنش در همان زمان مشخص (σ_{mn}) است.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

b) Non-Linear Elastic Model

III. Hypoelastic Models

The incremental stress-strain relationship for an orthotropic material

رابطه تنش کرنش نمویی برای مصالح ارتوتروپیک

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_{12}\nu_{21})G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

E_1 & E_2 : مدول سختی مماسی لحظه‌ای در جهت‌های 1 و 2

G : مدول برشی لحظه‌ای

ν_{ij} : ضریب پواسون لحظه‌ای در جهت i نسبت به تنش تک محوری در جهت j ($i,j=1,2$)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

b) Non-Linear Elastic Model

IV. Visco-Elastic Models

این مدل همزمان ویژگی‌های مصالح ویسکوز و الاستیک را دارا می‌باشد. یعنی خصوصیات مکانیک سیالات و جامدات را با هم دارد مانند قیر و عسل.

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

ویژگی جامدات

ویژگی سیالات

η : ویسکوزیتی

$\dot{\varepsilon}$: نرخ تغییرات کرنش

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

دلیل به کارگیری تنش کرنش غیرالاستیک

بتن حتی تحت اثر بارهای کم در اثر جمع شدگی و خزش رفتار غیرخطی دارد.
در فولاد شرط اصلی ورود به ناحیه غیرخطی میزان تغییر شکل های برشی است.

در اثر لغزش و خورد شدن
سنگها

از دست دادن آب وجود نیروهای
واندروالسی و حفره های کوچک

Plasticity-Based Model

تئوری پلاستیسیته در ابتدا برای نشان دادن رفتار غیر خطی مصالح فلزی به طور مناسبی مورد توسعه قرار گرفت. سپس مدل های براساس پلاستیسیته فراوانی برای توصیف رفتار بتن به کار گرفته شد. این مدل ها ویژگی های رفتاری بتن از قبیل غیرخطی، برگشت ناپذیری، وابسته به مسیر، اتساع و ... را به خوبی توصیف می کند.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

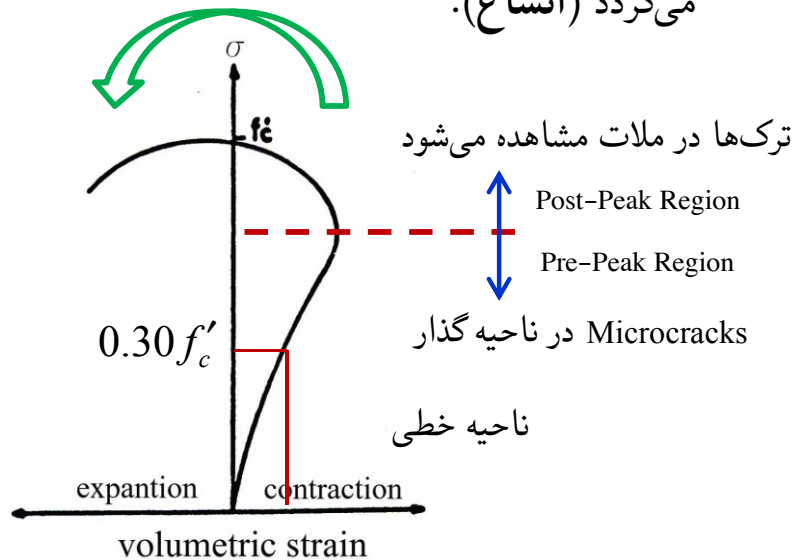
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

بتن شامل سه فاز 1) ملات (Mortar)، 2) مصالح درشت دانه (Coarse aggregate) و 3) سطح تماس درشت دانه با ملات (Mortar-coarse aggregate interface) همان ناحیه گذار (Transition zone) می باشد.

افزایش ضریب پواسون که منجر به انبساط بتن می گردد (اتساع).



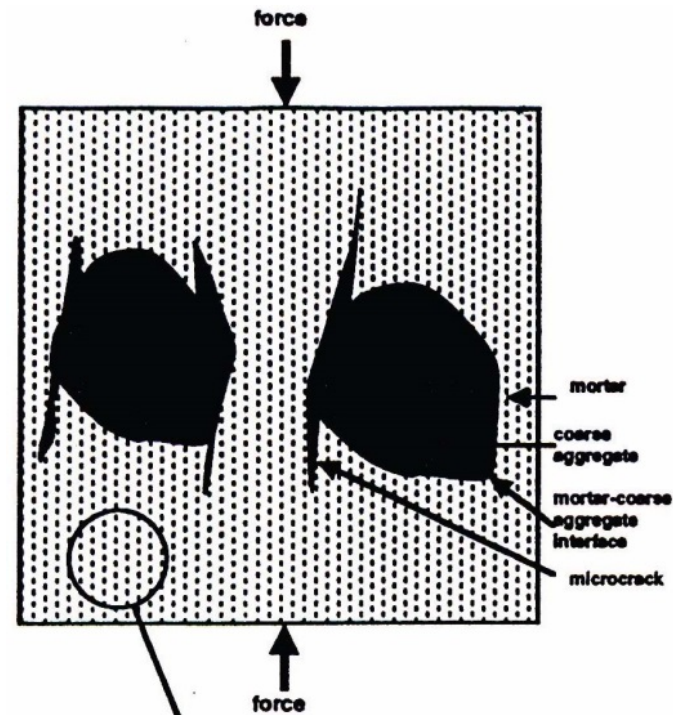
ترکها در ملات مشاهده می شود

Post-Peak Region

Pre-Peak Region

Microcracks در ناحیه گذار

ناحیه خطی



در ابتدا تحت اثر نیروهای وارده ترک های ریز (Microcracks) در ناحیه گذار تشکیل می شوند.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

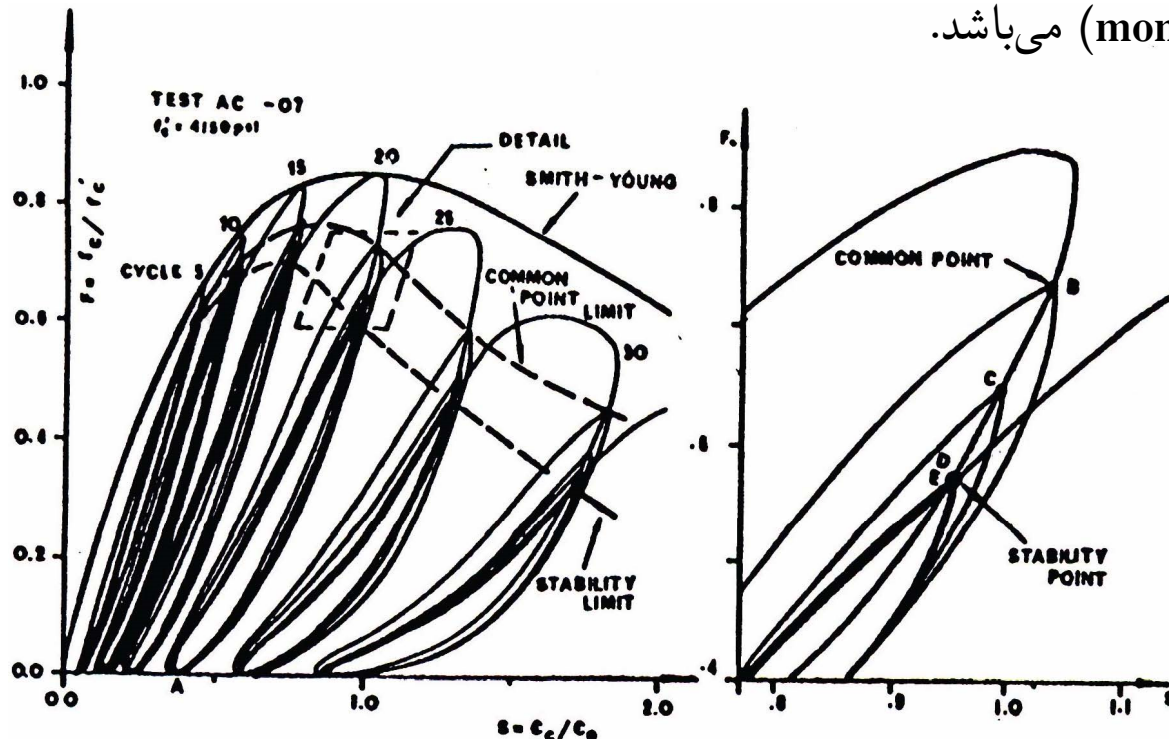
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

- مکان هندسی نقطه تلاقی منحنی‌های بارگذاری و باربرداری را نقطه مشترک حدی (Common point limit) می‌نامند.

- در آزمایش بارگذاری تکرار شونده تحت فشار (Repeated loading tests under compression) منحنی پوش بر نقاط شروع باربرداری و نقاط انتهایی چرخه بارگذاری مجدد همان منحنی تنش کرنش تحت اثر بارگذاری افزایش یافته (monotonically increasing loads) می‌باشد.



(a) Complete Load History

(b) Data II-Common Points

Variation of common and stability points under uniaxial compressive repeated loading (Karsan and Jirsa, 1969)

- با افزایش تعداد چرخه‌های بارگذاری مکان نقطه مشترک حدی به سمت نقطه‌ای معین به نام حد پایداری (stability limit) همگرا می‌شود.

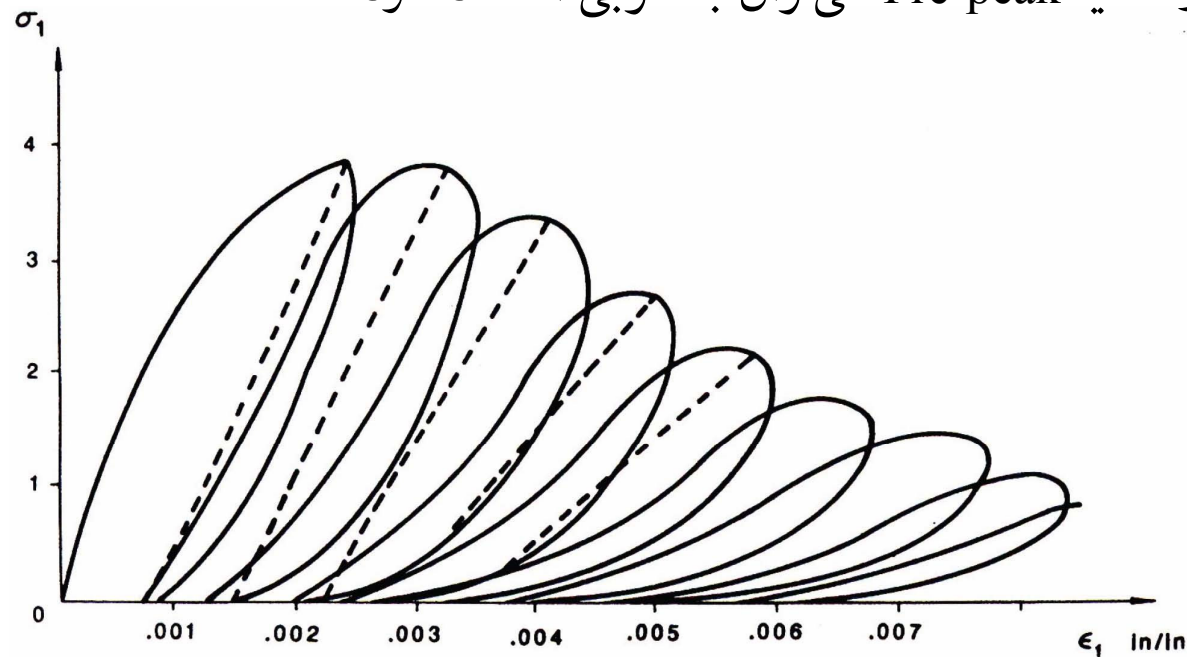
Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

مدل‌های بر اساس پلاستیسیته قادر به توصیف کاهش مدول الاستیسیته (کاهش سختی در حالت باربرداری به دلیل گسترش microcracks) در ناحیه post peak نمی‌باشد. اما از این مدل‌ها برای توصیف رفتار بتن در ناحیه Pre-peak می‌توان به خوبی استفاده کرد.



Stress-strain curve under cyclic uniaxial compressive loading (Sinha et al., 1964)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

سه فرض بکارگرفته شده در توسعه تئوری پلاستیسیته کلاسیک:

(1) سطح تسلیم اولیه (Initial yield surface)

یک تابع تنش (Stress function) مانند f وجود دارد که حد الاستیک مواد را تعریف می‌کند. اگر تغییر شکل پلاستیک رخ نداده باشد f را تابع تسلیم اولیه (Initial yield function)، و بعد از شروع تسلیم آن را تابع بارگذاری (Loading function) می‌نامند. این تابع در فضای تنش می‌تواند حالت‌هایی از تنش را که در آن تغییر شکل پلاستیک وجود ندارد ($f < 0$)، آغاز تغییر شکل پلاستیک ($f = 0$) و جاری شدن پلاستیک ($f > 0$) تعریف نماید. قبل از تسلیم ($f < 0$) مدل‌های براساس الاستیسیته می‌توانند بیان‌گر رفتار مصالح باشند.

(2) قانون سخت شوندگی (Hardening rule)

قانون سخت شوندگی تنظیم‌کننده تکامل سطح بارگذاری پیش رو، در طول مسیر جاری شدن پلاستیک است.

(3) قانون جاری شدن (Flow rule)

قانون جاری شدن رابطه تنش کرنش پلاستیک نمویی را با استفاده از یک تابع پتانسیل پلاستیک تعریف می‌کند.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

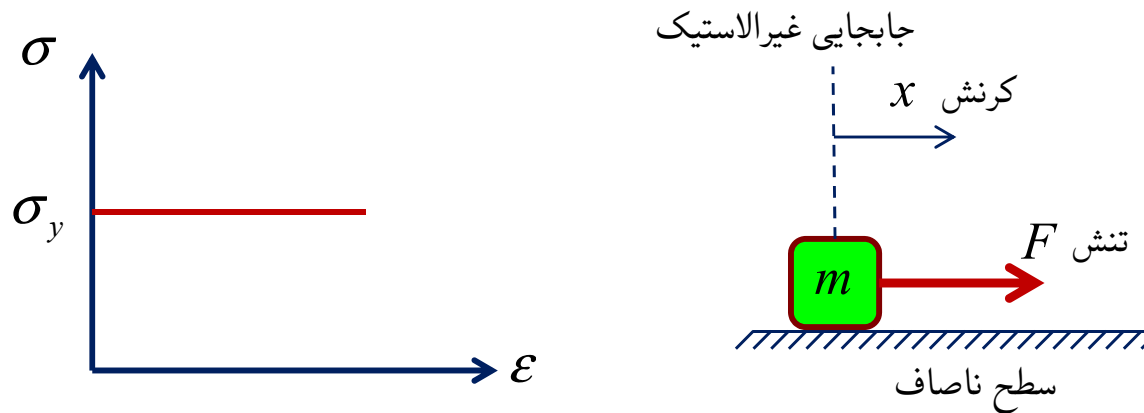
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

مدل های ساده برای شبیه سازی رفتار غیرالاستیک

1. صلب- پلاستیک کامل (Rigid-Perfectly Plastic)



Introduction to Nonlinear Static Analysis

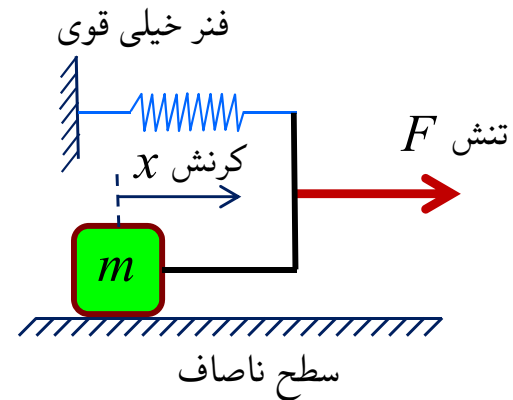
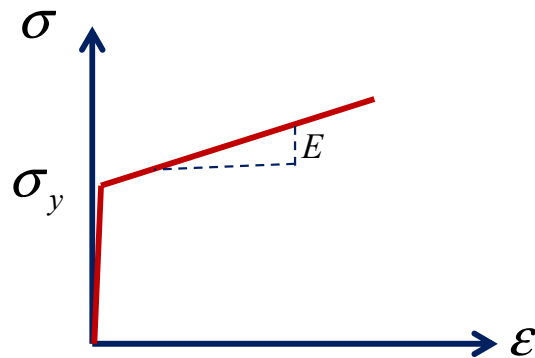
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

مدل های ساده برای شبیه سازی رفتار غیرالاستیک

2. صلب- سخت شوندگی (Rigid-Hardening)



Introduction to Nonlinear Static Analysis

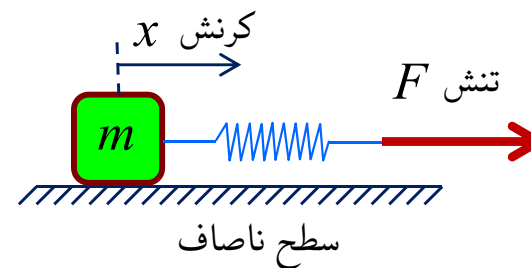
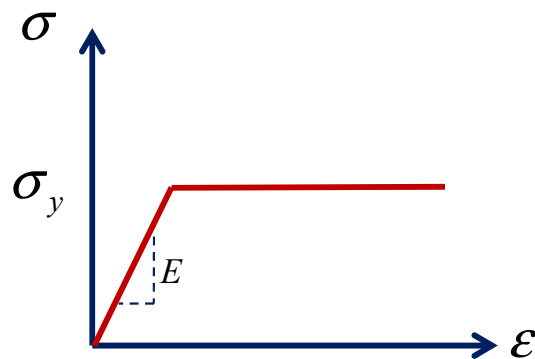
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

مدل های ساده برای شبیه سازی رفتار غیرالاستیک

3. الاستیک-پلاستیک کامل (Elastic-Perfectly Plastic)



Introduction to Nonlinear Static Analysis

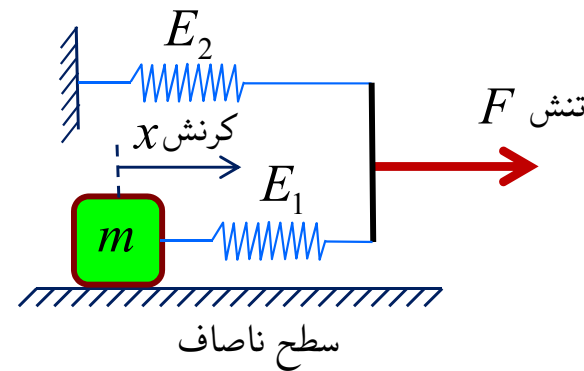
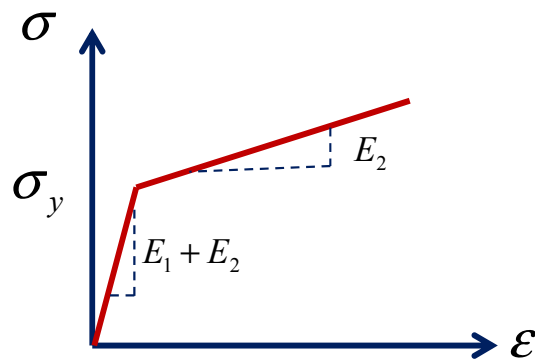
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

Plasticity-Based Model

مدل های ساده برای شبیه سازی رفتار غیرالاستیک

4. الاستیک- سخت شوندگی خطی (Elastic-Linear Hardening)



Introduction to Nonlinear Static Analysis

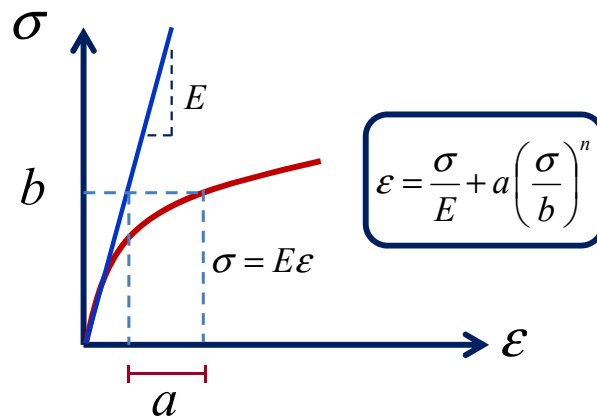
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

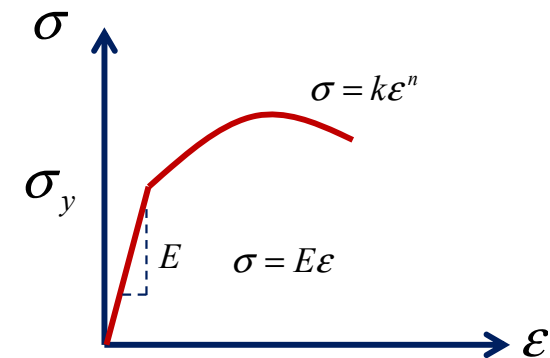
Plasticity-Based Model

مدل های ساده برای شبیه سازی رفتار غیرالاستیک

6. (Ramberg Osgood Model)



5. الاستیک - سخت شوندگی نمایی
(Elastic-Exponential Hardening)



n و K از نمونه های آزمایشگاهی به دست می آیند.

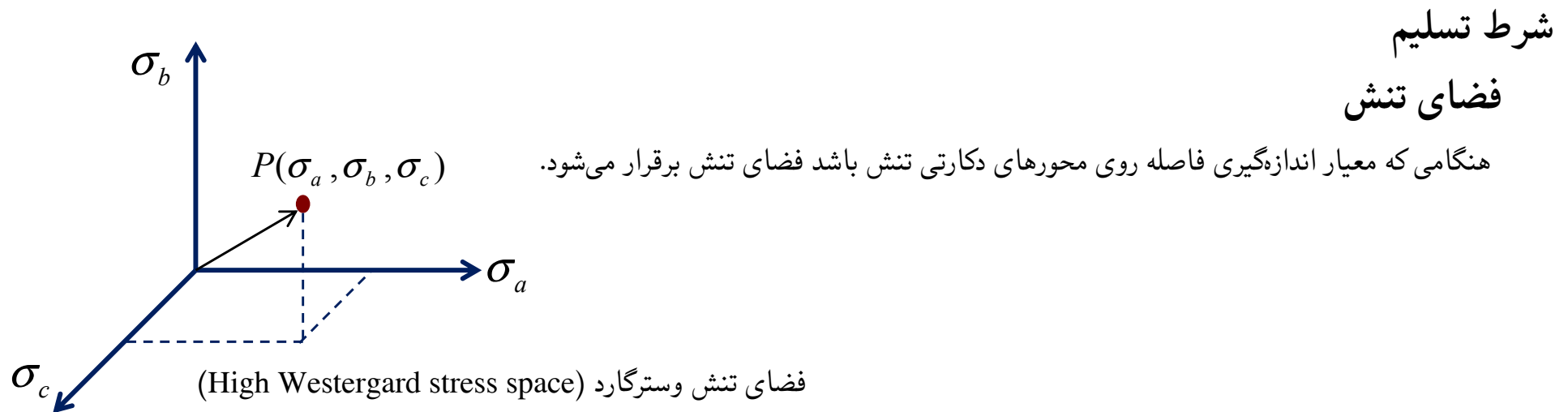
Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

ابزار لازم برای بررسی رفتار غیرالاستیک

- شرط تسلیم: استفاده از آزمایش تک محوره (کششی و پیچشی) برای ارائه معیار تسلیم برای حالت تنش چند محوره
- رابطه تنش- کرنش بعد از تسلیم (اولیه)

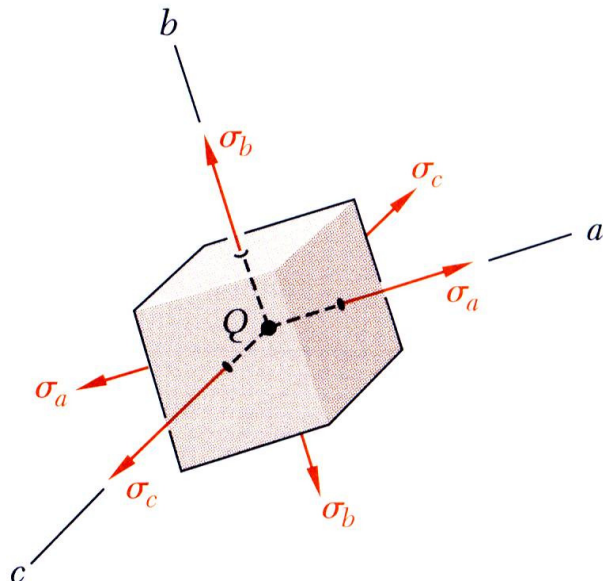


Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

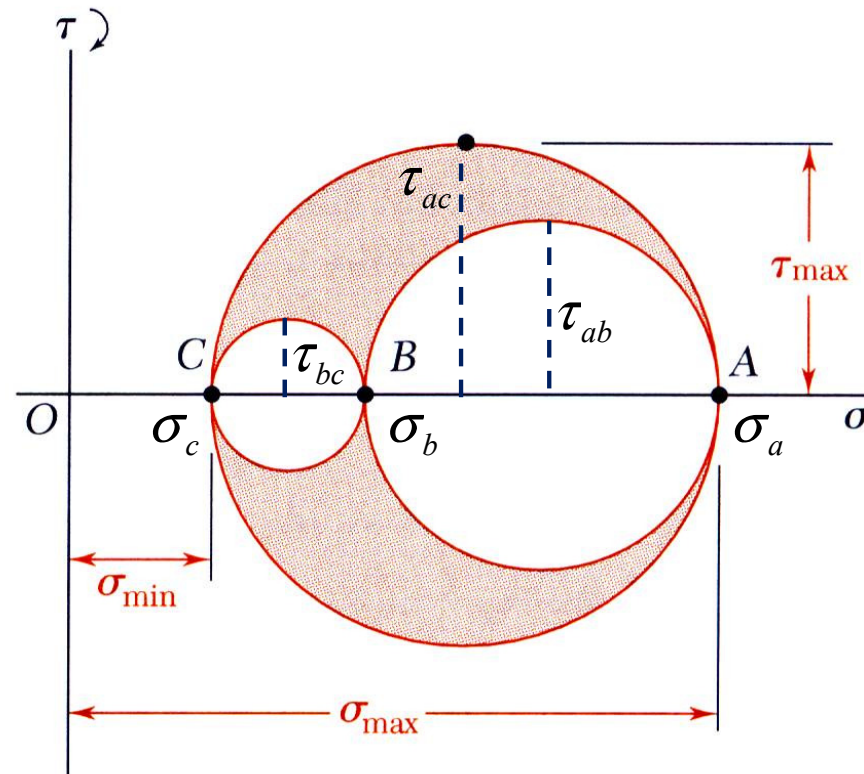
III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

شرط تسلیم



$[\sigma_{ij}]$: $\begin{cases} \text{eigenvalues} & \rightarrow \text{مقدار تنش های اصلی } (\sigma_a > \sigma_b > \sigma_c) \\ \text{eigenvectors} & \rightarrow \text{جهت های اصلی} \end{cases}$

تمام حالت های ممکن تنش در فضای هاشور خورده قرار می گیرد.



Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

شرط تسلیم

$$\begin{bmatrix} \sigma_a & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ba} & \sigma_b & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ca} & \sigma_{cb} & \sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_a + P & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ba} & \sigma_b + P & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ca} & \sigma_{cb} & \sigma_c + P \end{bmatrix}$$

$$q = -\frac{1}{3}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)$$

میدان تنش

مولفه هیدروستاتیک

مولفه Deviator

- صفحه عمود بر محور OZ است.

- OZ با محورهای مختصات زاویه مساوی تشکیل می‌دهد.

- نقطه P در فضا قرار دارد (بر روی صفحه نیست).

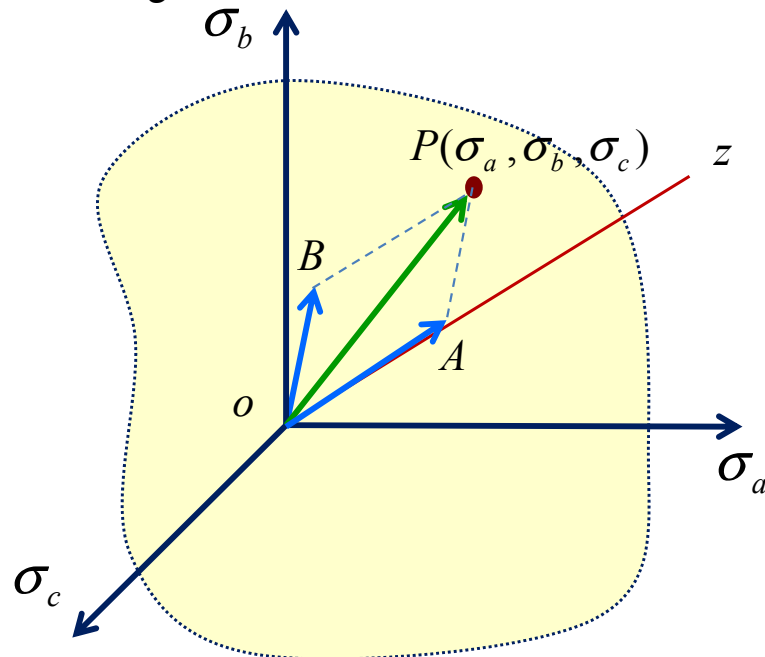
- OA مولفه هیدروستاتیک است. باعث تغییر حجم می‌شود.

$$@ OA: \sigma_a = \sigma_b = \sigma_c$$

- OB مولفه برش خالص (Deviator) است. باعث تغییر زاویه و تغییر شکل می‌شود. در صفحه قرار دارد.

- معادله صفحه از رابطه زیر به دست می‌آید که همان معیار تسلیم است

$$\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c = 0$$



Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

رابطه ریاضی شرط تسلیم

شکل روابط شرط تسلیم دو حالت دارد:

$$f(\sigma_{ij}) = C_y \quad (I)$$

C_y : ثابت تسلیم

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0 \quad (II)$$

f_1 : تابع تسلیم

در مواد ایزوتروپیک شرط تسلیم براساس تنش‌های اصلی و در نظر نگرفتن مولفه‌های هیدرواستاتیک است. فقط مولفه‌های برشی، عامل تغییر شکل، در نظر گرفته می‌شود.

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \delta_{ij} \sigma_{ij}$$

مولفه برش خالص
(Deviator)

مولفه
هیدرواستاتیک

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

رابطه ریاضی شرط تسلیم برای مواد شکل پذیر

(a) معیار تسلیم ترسکا (Maximum Shearing-Stress Criteria Tresca)

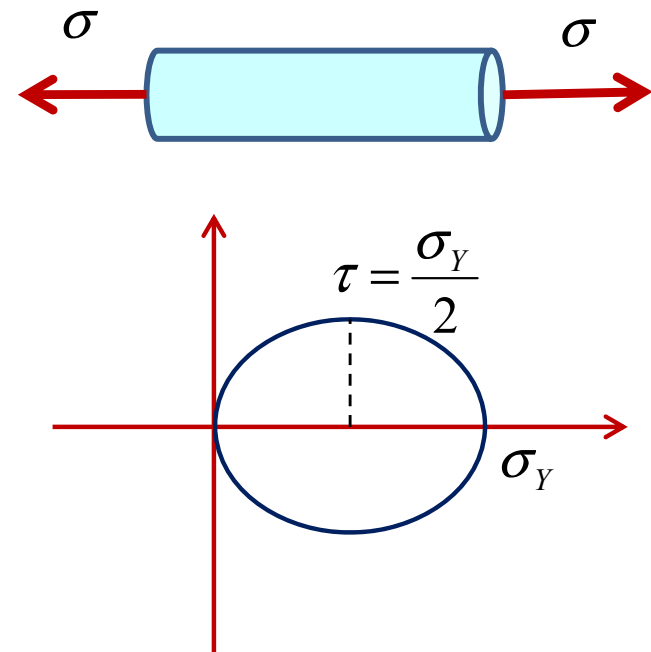
در این معیار علت جاری شدن برش است. منظور برش نظیر ماکزیمم باری که در بارگذاری استفاده شده است.

For σ_a and σ_b with the same sign

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_a|}{2} \text{ or } \frac{|\sigma_b|}{2} < \frac{\sigma_Y}{2} \Rightarrow \begin{cases} |\sigma_a| < \sigma_Y \\ |\sigma_b| < \sigma_Y \end{cases}$$

For σ_a and σ_b with opposite signs

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_a - \sigma_b|}{2} < \frac{\sigma_Y}{2} \Rightarrow |\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_Y$$



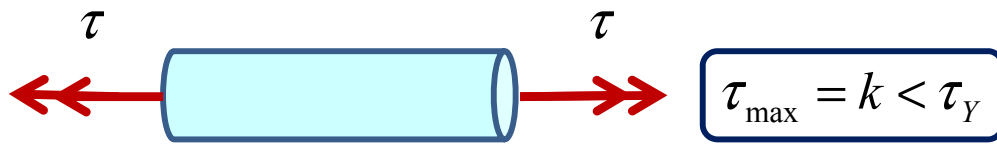
Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

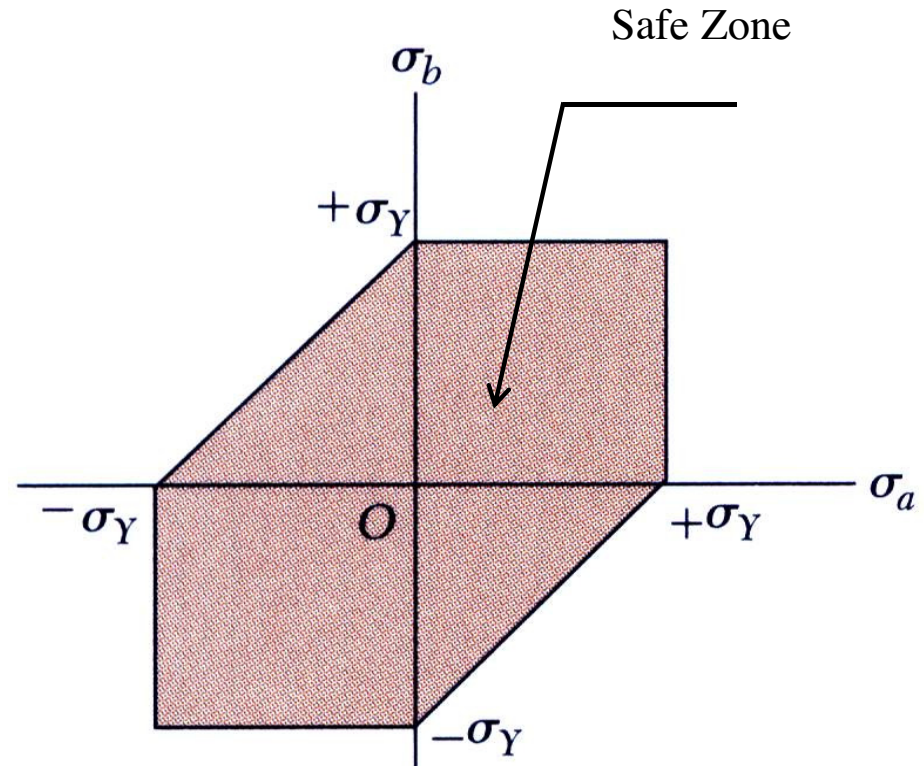
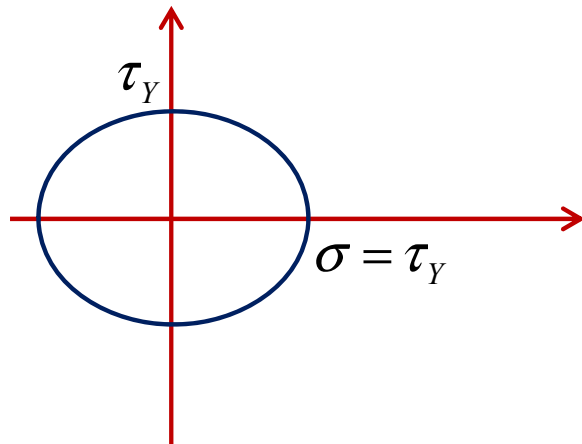
III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

رابطه ریاضی شرط تسلیم برای مواد شکل پذیر

(a) معیار تسلیم ترسکا (Maximum Shearing-Stress Criteria- Tresca)



k: برش ماکزیم ناشی از تست پیچشی است.



Tresca's hexagon

(Henri Edouard Tresca 1814-1885)

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

رابطه ریاضی شرط تسلیم برای مواد شکل پذیر

(b) معیار ون میسیز (Maximum Distortion Energy Criteria- Von Mises)

این معیار انرژی متناظر با زمان جاری شدن در آزمایش کششی نمونه استاندارد است. به عبارت دیگر مقدار انرژی که صرف تغییر شکل می شود.

مقدار انرژی کرنشی در واحد حجم از رابطه زیر محاسبه می گردد:

W_0 : مقدار انرژی کرنشی در واحد حجم

W_{0V} : مقدار انرژی صرف تغییر حجم (Volume)

W_{0d} : مقدار انرژی صرف تغییر شکل (deformation)

$$W_0 = W_{0V} + W_{0d}$$

همان تعریف کار داخلی است که باید برابر با منفی کار خارجی باشد.

$$W_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz})$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

رابطه ریاضی شرط تسلیم برای مواد شکل پذیر

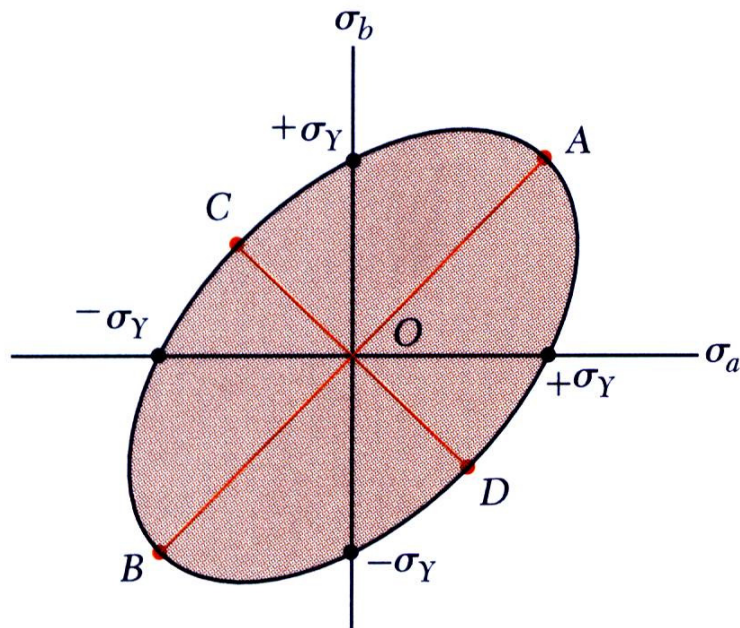
(b) معیار ون میسز (Maximum Distortion Energy Criteria- Von Mises)

(Von Mises criteria)

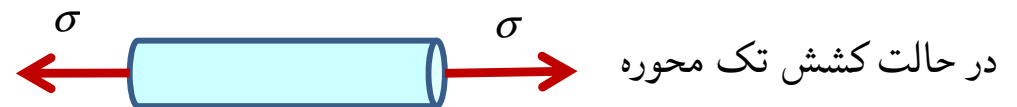
$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 = 6C$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{3} \sigma_Y^2 & \text{اگر آزمایش کششی باشد} \\ k^2 & \text{اگر آزمایش پیچشی باشد} \end{cases}$$

k: برش ماکزیم ناشی از تست پیچشی است.



Von Mises criteria
(Richard Von Mises)



$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2$$

$$A = \begin{cases} \sigma_a = \sigma_Y \\ \sigma_b = \sigma_Y \end{cases} \quad \& \quad B = \begin{cases} \sigma_a = -\sigma_Y \\ \sigma_b = -\sigma_Y \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} \sigma_a = -0.577\sigma_Y \\ \sigma_b = 0.577\sigma_Y \end{cases} \quad \& \quad C = \begin{cases} \sigma_a = 0.577\sigma_Y \\ \sigma_b = -0.577\sigma_Y \end{cases}$$

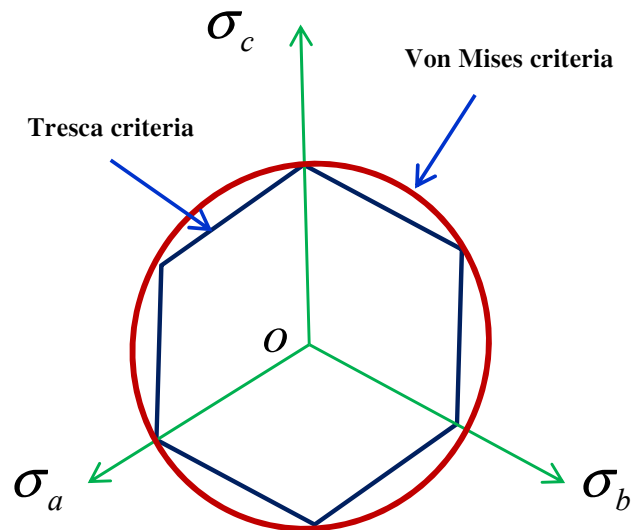
Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

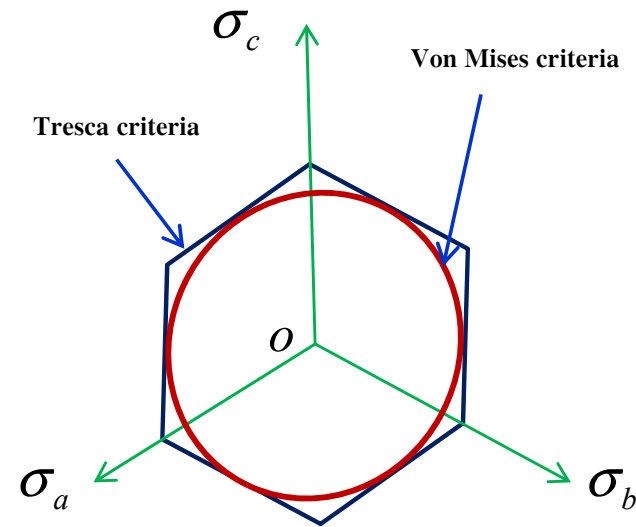
رابطه ریاضی شرط تسلیم برای مواد شکل پذیر

(b) معیار ون میسز (Maximum Distortion Energy Criteria- Von Mises)



از دید OZ عمود بر صفحه نگاه می کنیم.

دایره $R = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y$ اگر آزمایش کششی باشد



از دید OZ عمود بر صفحه نگاه می کنیم.

دایره $R = \sqrt{2}k$ اگر آزمایش پیچشی باشد

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

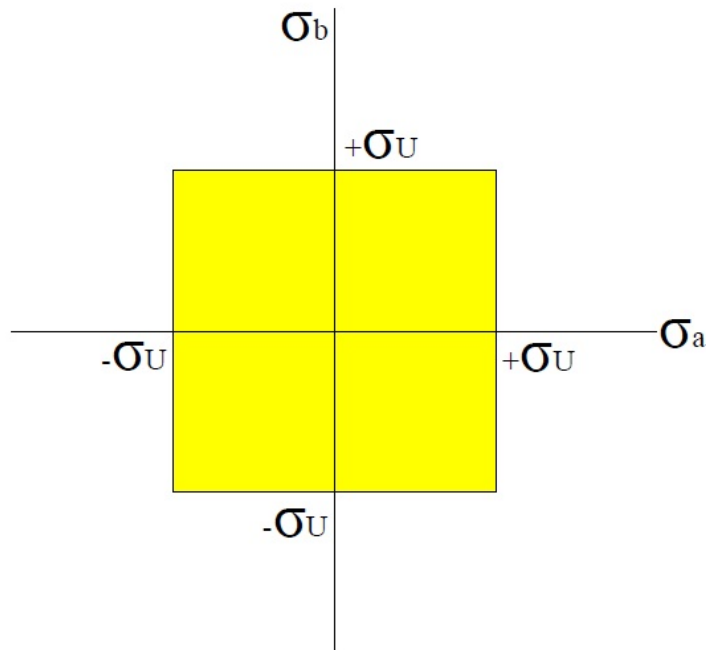
III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

رابطه ریاضی شرط تسلیم برای مواد شکننده (ترد)

مصالح ترد یا شکننده در آزمایش کششی گسیخته یا خورد می شود. شرایط گسختگی با مقاومت نهایی مشخص می گردد.

(a) معیار تنش نرمال ماکزیمم - معیار کولومب

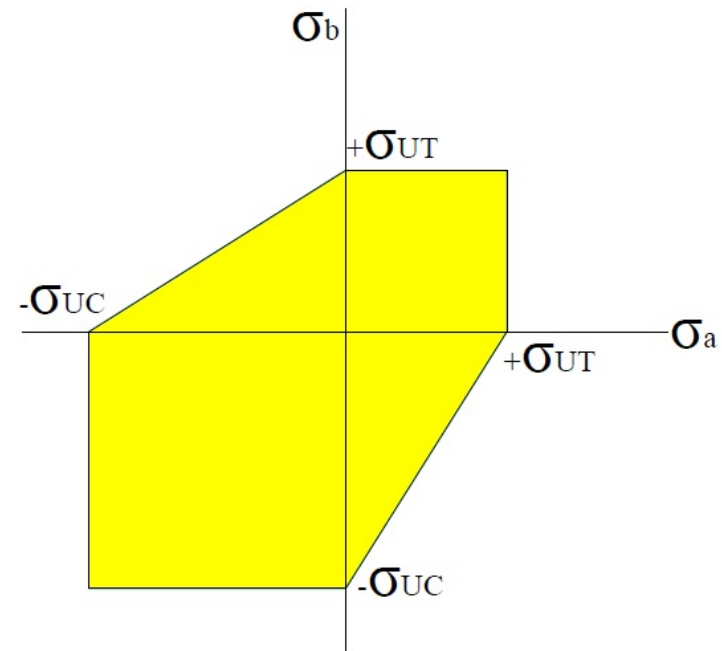
(Maximum Normal Stress Criterion-Coulomb's Criterion)



σ_U : Ultimate strength in tension and compression

(b) معیار تنش نرمال ماکزیمم - معیار موهر

(Maximum Normal Stress Criterion-Mohr's Criterion)



σ_{UT} : Ultimate strength in tension

σ_{UC} : Ultimate strength in compression

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

شرایط بعد از تسلیم

برای نمایش اثرات سخت‌شوندگی در توابع تسلیم باید مدل‌های تسلیم اصلاح گردد.

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{تابع تسلیم}$$

$$f_1(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, k) = 0 \quad \text{تابع تسلیم در حالت کلی}$$

k: وابسته به خصوصیات سخت‌شوندگی

ε_{ij}^P : کرنش پلاستیک

$$f_1 = 0 \Rightarrow \text{تسلیم}$$

$$f_1 < 0 \Rightarrow \text{الاستیک}$$

$$f_1 > 0 \Rightarrow \text{خارج از سطح تسلیم (تعریف نشده)}$$

یعنی معادلات تسلیم در زیر منحنی و روی خود منحنی صدق می‌کند. فراتر از سطح تسلیم دیگر تعریف شده نیست باید اصلاح شود.

$$f_1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} \right) \cdot d\sigma_{ij} < 0 \Rightarrow \text{الاستیک باربرداری}$$

$$f_1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} \right) \cdot d\sigma_{ij} > 0 \Rightarrow \text{الاستیک و غیرالاستیک بارگذاری}$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

شرایط بعد از تسلیم

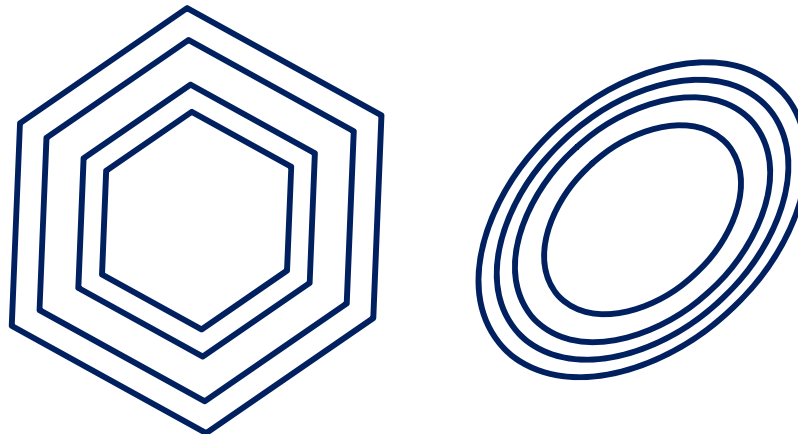
Isotropic Hardening

Kinematic Hardening

قانون سخت شوندگی

Isotropic Hardening

سطوح تسلیم (معیار تسلیم) بزرگ می شود (افزایش پیدا می کند)



Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

شرایط بعد از تسلیم

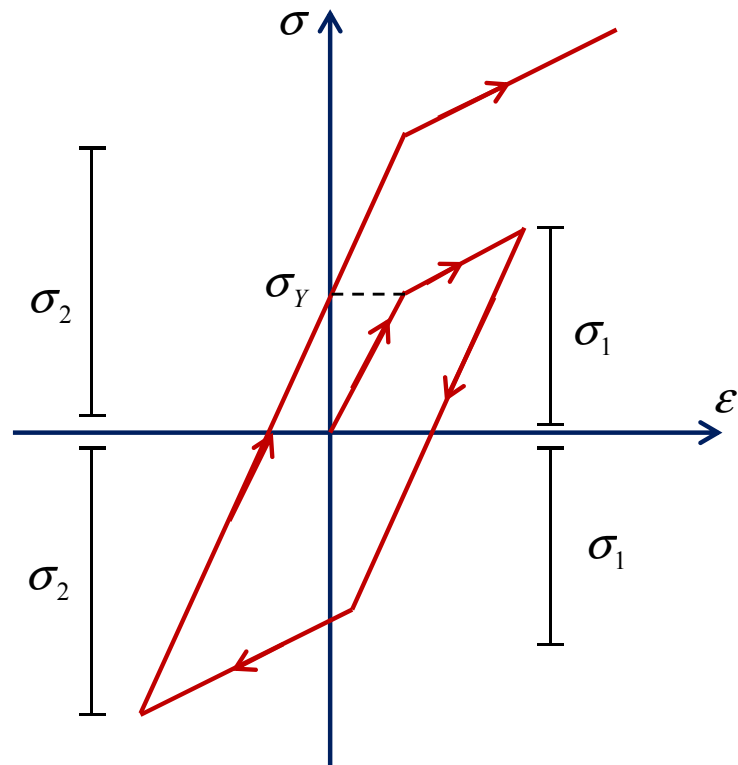
Isotropic Hardening

به طور مثال مصالحی داریم که مقاومت فشاری و کششی آن σ_Y باشد.

تسلیم در مرحله اول σ_Y

تسلیم در مرحله دوم σ_1

تسلیم در مرحله سوم σ_2



$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij}^2 - g_{ij}^2)$$

g_{ij} : تابع رشد (Growth Function) : تنش کم شده سطح تسلیم افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر بار را کم کرده مقاومت را زیاد می‌کنیم.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

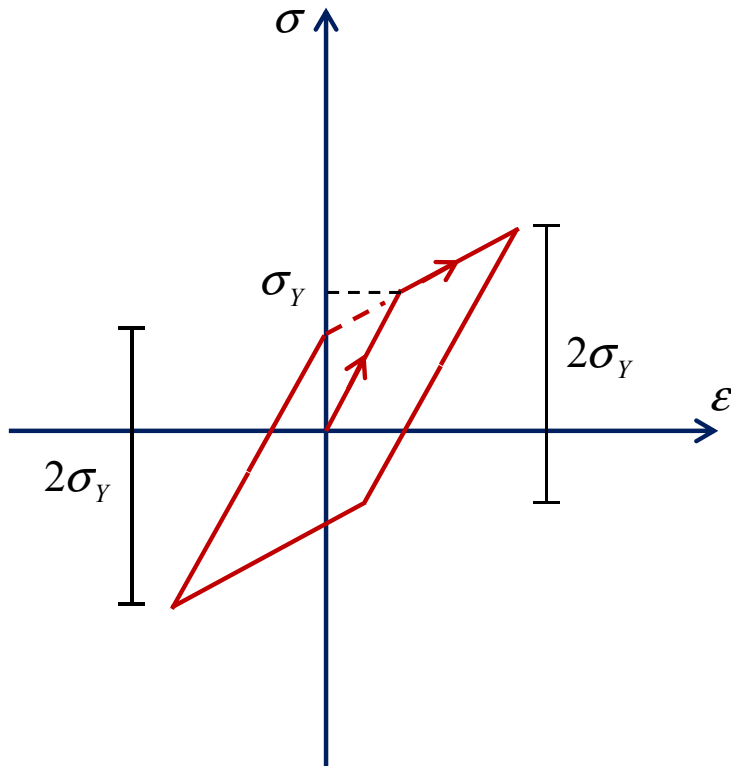
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

شرایط بعد از تسلیم

Kinematic Hardening

سطح تسلیم ثابت می ماند اما محل آن در فضای تنش تغییر می کند.



$$f_1(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij})^2 - \sigma_Y^2$$

مختصات نقطه جدید

$$\alpha_{ij} = C \varepsilon_{ij}^p$$

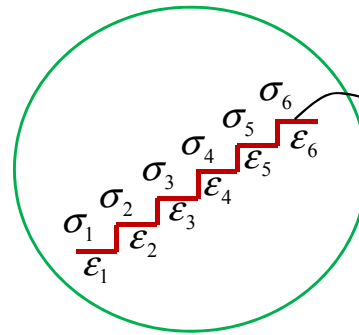
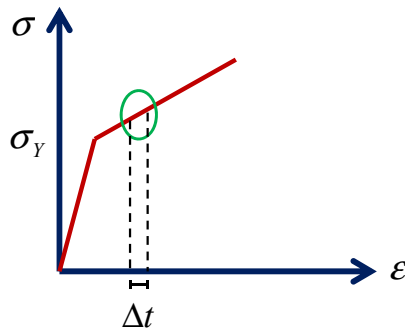
Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

EL-PL روابط تنش کرنش برای مدل های
Rig-PL

St.Venant (1870) محوره های تنش و کرنش پله ای بر هم منطبق هستند.



In this step

$$\begin{cases} \sigma = \sum \sigma_i \\ \epsilon = \epsilon_6 \end{cases}$$

همان کرنش مرحله ششم

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

EL-PL روابط تنش کرنش برای مدل‌های
Rig-PL

رابطه Levy-Mise: رابطه بین کرنش پله‌ای و تنش تقلیل یافته (همان deviator است) (1871) Levy
تغییرات کرنش برابر با تغییرات کرنش پلاستیک در هر لحظه می‌باشد که متناظر با مولفه deviator تنش است. (1913) Von-Mises

فرضیات: (1 Rigid-Plastic) (2 دایره مور تنش و کرنش پله‌ای بر هم منطبق می‌باشند)

$d\varepsilon_{ij}$: منظور کرنش پله‌ای است نه مشتق

S_{ij} : همان deviator است

$d\lambda$: مقدار ثابت مثبت برای هر پله

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^P = S_{ij} d\lambda$$

For example:

$$d\varepsilon_x = \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

⋮

$$d\gamma_{xy} = d\lambda \cdot \tau_{xy}$$

⋮

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III - مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

EL-PL

Rig-PL

روابط تنش کرنش برای مدل‌های

Prandtl-Reuss Equation (1924) : این روش برای مسائل کرنش مسطح پیشنهاد شد.

Reuss (1930) روش را کامل کرد.

فرضیات: (1 Elastic-Plastic 2) تغییرات کرنش پلاستیک در هر لحظه متناظر با مولفه deviator تنش است.

$$d\varepsilon_{ij}^P = S_{ij} d\lambda$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^P = \frac{dS_{ij}}{2G} + \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \cdot \delta_{ij} \cdot d\sigma_m + S_{ij} \cdot d\lambda$$

$d\varepsilon_{ij}$: منظور کرنش پله‌ای است نه مشتق

S_{ij} : همان deviator است

$d\lambda$: مقدار ثابت مثبت برای هر پله

δ_{ij} : هیدروستاتیک

For example:

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^P + d\varepsilon_x^e = \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)]$$

$$d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^P + d\gamma_{xy}^e = d\lambda \cdot \tau_{xy} + \frac{d\tau_{xy}}{2G}$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

III – مدل سازی مصالح (Constitutive Modeling of Materials)

EL-PL روابط تنش کرنش برای مدل‌های
Rig-PL

Prandtl-Reuss Equation (1924) : این روش برای مسائل کرنش مسطح پیشنهاد شد.
Reuss (1930) روش را کامل کرد.

$$d\varepsilon_x^P + d\varepsilon_y^P + d\varepsilon_z^P = 0$$
$$d\varepsilon_{ij}^P = 0$$

کرنش‌های پلاستیک در هر پله تغییر حجم پیدا نمی‌کنند.
شرایط عدم تراکم‌پذیری (Incompressibility)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیر خطی

(b) مواد و مصالح (Materials)

ت- خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد

انواع مواد بکارگرفته شده در مهندسی عمران: بتن - فولاد - چوب - مصالح بنایی

خزش: در حد بهره‌برداری انجام می‌شود. در اثر فشار تغییر شکل‌ها افزایش می‌یابد. و در حد بار نهایی کاهش مقاومت روی می‌دهد.

افت (Shrinkage): خروج آب از بتن باعث انقباض و جمع‌شدگی می‌شود.

رطوبت

مدول الاستیسیته: در کشش و فشار متفاوت است.

پیوستگی آرماتور و بتن

محصور شدگی

کاهش سختی

ترک مدل کردن ترک (بحث Fracture Mechanics مطرح می‌شود)

باز و بسته شدن ترک (رشد ترک)

تنش‌های پسماند

Relaxation (شبهه خزش در بتن است): ناشی از تغییر شکل زیر تنش‌های ثابت .

حرارت

اثر بوشینگر (Bauschinger effect): کاهش تنش تسلیم فولاد بعد از بارگذاری‌های متناوب

خصوصیات بتن

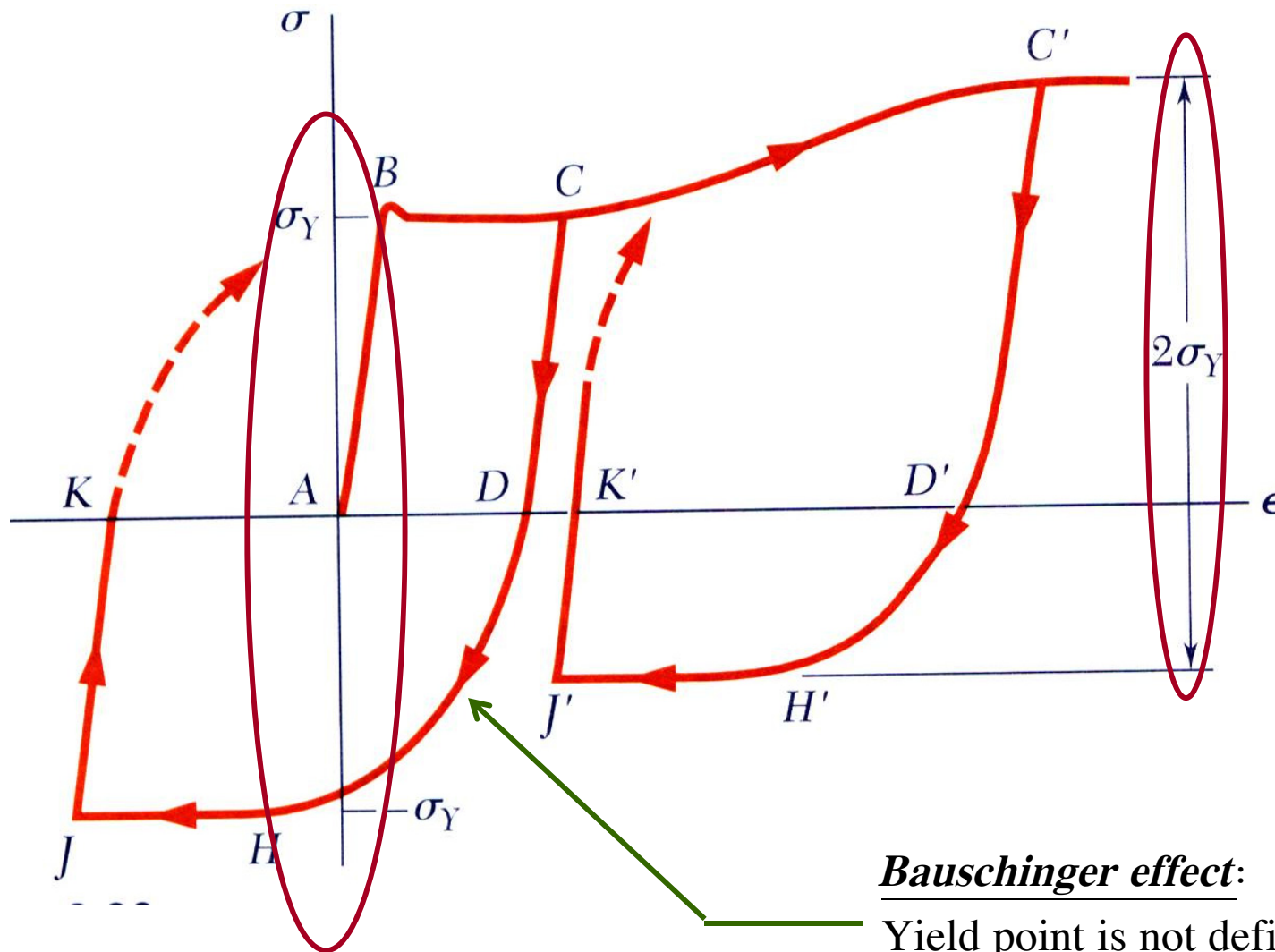
خصوصیات فولاد

Introduction to Nonlinear Static Analysis

.II علل ایجاد رفتار غیر خطی

(b) مواد و مصالح (Materials)

ت- خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد



Bauschinger effect:

Yield point is not defined clearly

Introduction to Nonlinear Static Analysis

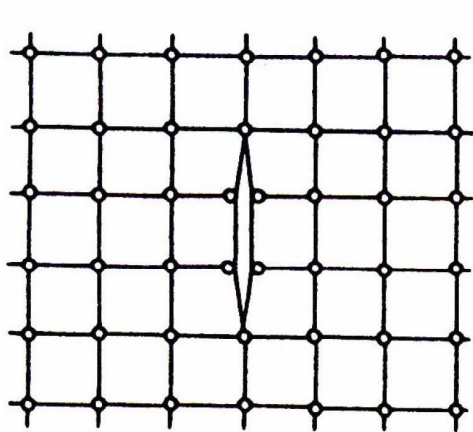
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ت- خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد

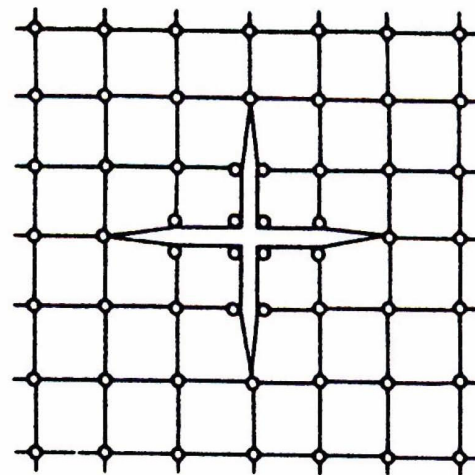
انواع ترک‌ها در بتن

1) مدل ترک مجزا (The Discrete Cracking Model)

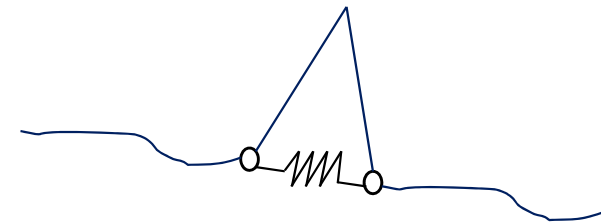
این مدل براساس مفهوم عدم پیوستگی جابجایی در طول ترک است. از معایب این ترک آن است که هندسه سازه تغییر می‌کند. یعنی با ایجاد هر ترک هندسه مدل عوض می‌شود. ABAQUS این مشکل را مرتفع نموده است. در این نوع مدل اثرات قفل و بست دانه‌ای و باز و بسته شدن ترک‌ها را می‌توان با تعبیه فنرهای عمود بر راستای ترک در نظر گرفت.



(a)



(b)



Nodal separating using two or four coincident nodes:
(a) one-directional and (b) two-directional cracking

Introduction to Nonlinear Static Analysis

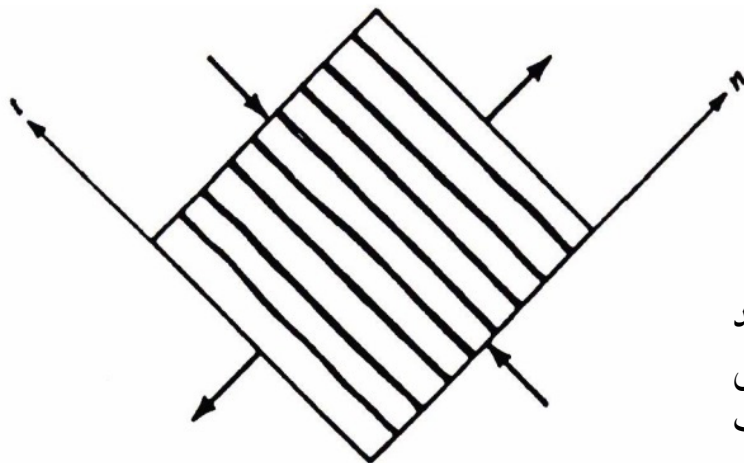
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ت- خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد

انواع ترک‌ها در بتن

1) مدل ترک پخش شده (The Smeared Cracking Model)

براساس این مدل، بتن ترک خورده با استفاده از خواص مصالح ارتوتروپیک و به کمک تعداد نامحدودی ریز ترک موازی در سطح المان به صورت پخش شده مدل می‌گردد. بعد از ایجاد ترک در بتن رابطه ماتریس مشخصه به صورت زیر می‌باشد:



Idealization of a single crack

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

که در آن E_1 ($E_1 = 0$) و E_2 مماسی به ترتیب عمود و موازی با ترک است. بعد از آن که ترک دوم عمود بر راستای ترک اول اتفاق افتاد E_2 به سمت صفر میل می‌کند. β ($0 < \beta < 1$) نقش فنرها را در مدل قفل و بست دانه‌ای بازی کرده و ضریب کاهشنده مدول برشی است.

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ت- خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد

انواع ترک‌ها در بتن

1) مدل ترک پخش شده (The Smeared Cracking Model)

انواع مدل ترک Smeared

(a) مدل ترک ثابت (Fixed crack models)

(b) مدل ترک چرخشی (Rotating crack models)

(c) مدل ترک چندتایی و غیرعمود برهم (Multiple non-orthogonal crack models)

در مدل ترک ثابت، زمانی که یک ترک شکل می‌گیرد، جهت‌های اصلی اجازه دوران نداشته و ترک دوم تنها زمانی اتفاق می‌افتد که تنش عمود بر ترک اولی از تنش نهایی کششی بتن تجاوز کند. این مدل برای اعضایی که در یک راستا آرماتور دارند (تیر) و یا در دو راستای عمود بر هم آرماتور یکسان دارند (دال) مناسب است.

در مدل ترک چرخشی، مشکل مدل ترک ثابت با امکان چرخش جهت‌های اصلی بعد از ایجاد یک یا دو ترک مرتفع شد. جهت ترک‌ها در هر مرحله از بارگذاری عمود بر کرنش‌های اصلی در نظر گرفته می‌شود.

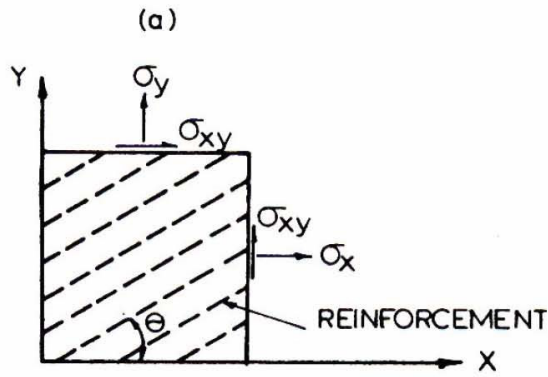
مدل ترک چندتایی و غیرعمود برهم توانایی مدل کردن چندین ترک غیر عمود برهم را در یک نقطه دارا می‌باشد. این مدل آن‌چنان مورد توجه قرار نگرفت.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ت- خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد

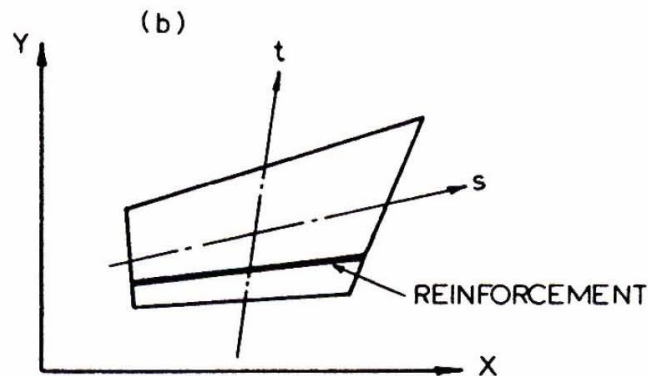
شیوه‌های مختلف مدل‌سازی آرماتور در مدل‌های المان محدود:



(1) مدل توزیع یافته یا پخش شده (Distributed or Smeared model)

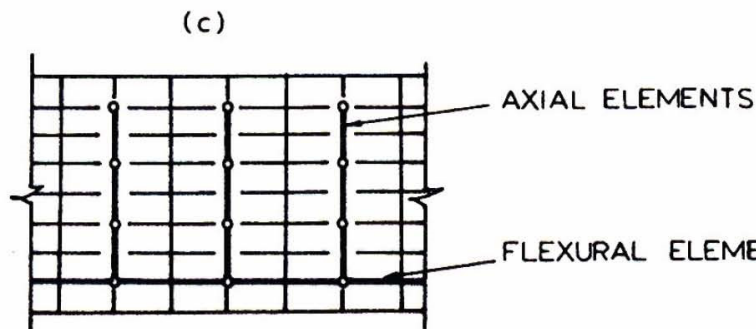
(2) مدل خوابیده (Embedded model)

(3) مدل مجزا (Discrete model)



○ در مدل توزیع یافته فولاد به صورت یک صفحه گسترده، با فرض پیوستگی کامل بین فولاد و بتن، بر روی کل المان بتن پخش می‌شود.

○ در مدل خوابیده فولاد به صورت یک المان تک محوری در بتن مدل شده به طوری که جابجایی‌های گره‌ای آن مقید به المان بتن میزبان باشد.



○ مدل مجزا مشابه با مدل خوابیده است با این تفاوت که جابجایی‌های گره‌ای میله فولادی به طور کامل مقید به المان بتن میزبان نمی‌باشد.

Typical steel representations in finite element models of concrete structures,
(a) distributed (b) embedded, and (c) discrete (ASCE, 1982)

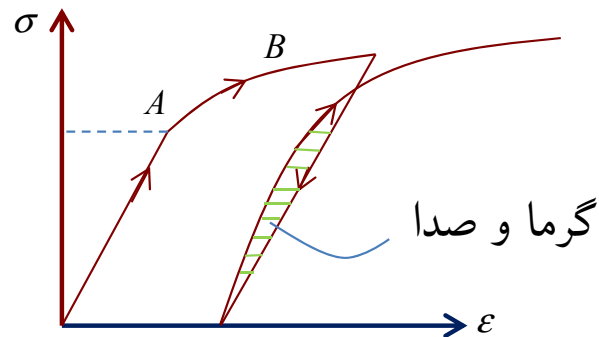
Introduction to Nonlinear Static Analysis

II. علل ایجاد رفتار غیرخطی (b) مواد و مصالح (Materials) ث- بارگذاری

- بارهای دینامیکی رفت و برگشتی (بیشتر مبحث دینامیک غیرخطی را شامل می شود)
- بارهای ثقلی نامتقارن.
- خستگی زیر اثر بارهای تکراری (مانند سازه های ساحلی و فراساحلی که تحت اثر موج قرار می گیرند)

بارهای دینامیکی

بارگذاری- باربرداری: در این حالت جهت بار عوض نمی شود.



به دلیل سخت شدگی $\sigma_B > \sigma_A$ است.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

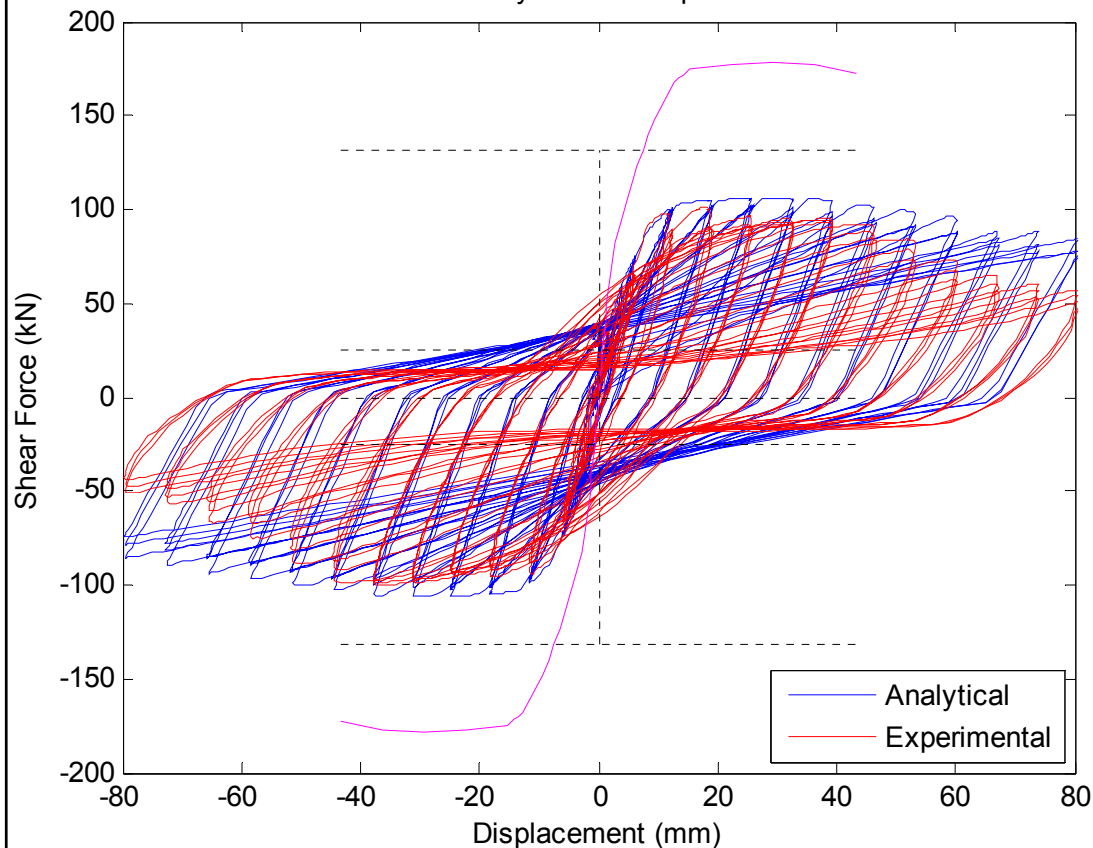
II. علل ایجاد رفتار غیرخطی

ث- بارگذاری

بارهای دینامیکی

بارهای رفت و برگشتی: در این حالت جهت بار عوض می‌شود. در بارگذاری‌های مجدد و تکراری سختی کاهش می‌یابد.

Hysteretic Loop



- نمودار نیرو جابجایی در بارگذاری رفت و برگشتی را منحنی هیسترسیس می‌نامند.
- مساحت محصور شده در منحنی هیسترسیس معرف ظرفیت جذب انرژی جهت استهلاک است.
- این منحنی‌ها نشان دهنده سختی و زمان جاری شدن است.
- عوامل موثر بر این منحنی‌ها: سیستم سازه‌ای، مواد تشکیل دهنده، نوع اتصالات (Configuration) و اثر میرایی است.
- معمولا در عمل به دلیل اثر پینچینگ (Pinching) نتایج آزمایشگاهی با تئوری قدری متفاوت است؛ و آن به دلیل ایجاد ترک در جوش، لغزش در اتصالات اصطکاکی پیچ‌ها، باز و بسته شدن ترک در بتن و عدم پیوستگی کامل بین آرماتور و بتن می‌باشند.

III. نیاز به در نظر گرفتن رفتار غیرخطی

ایمنی:

□ تعادل

□ پایداری: واژگونی و لغزش

در موضوعات زیر انجام آنالیز غیرخطی ضرورت دارد:

- در بادبندهای واگرا عملکرد بادبند زمانی شروع می‌شود که تیر رابط یا فیوز (Link Beam) جاری شود. پس آنالیز خطی عملکرد را نشان نمی‌دهد.
- رفتار کابل‌ها تنها با آنالیز غیرخطی بررسی می‌شود.
- تعیین ضریب رفتار باید با استفاده از آنالیز غیرخطی صورت گیرد.
- در نظر گرفتن اثرات بازتوزیع بار زمانی که یک عضو به ظرفیت نهایی خود برسد.
- تعیین دقیق ضرایب اطمینان
- بحث مقاومت‌سازی
- تعیین کشش زیر شالوده
- کنترل سازه‌ها: جدایشگرها، میراگرها، تجهیزات کنترلی با سختی متغیر

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

روش‌های در نظر گرفتن اثرات غیرخطی:

□ مطالعات آزمایشگاهی

□ مدل‌های تحلیلی

معایب مدل‌های آزمایشگاهی: هزینه، زمان، امکانات و مسائل فنی

یکی دیگر از مشکلات این روش آن است که باید با مقیاس نمونه‌ها را کوچک کرد. نمونه‌های کوچک‌تر بحث‌های زیادی در پی خواهند داشت.

معایب مدل‌های تحلیلی: نیاز به خصوصیات فیزیکی مواد که بستگی به تجربه و توانایی ما در درک رفتار مواد دارد.

یعنی بر اساس تجربه می‌توان از نتایج مطالعات آزمایشگاهی استفاده کرد یا باید با توجه به تجربه خصوصیات فیزیکی را حدس زد.

ملزومات مدل‌های تحلیلی:

- کالیبراسیون (Calibration): تعیین پارامترهای یک مدل براساس یک آزمایش (بازی کردن با پارامترها بر مبنای نتایج آزمایشگاهی)
- تأیید (Verification): به کار گرفتن پارامترهای کالیبره شده در یک مدل آزمایشی مستقل

Introduction to Nonlinear Static Analysis

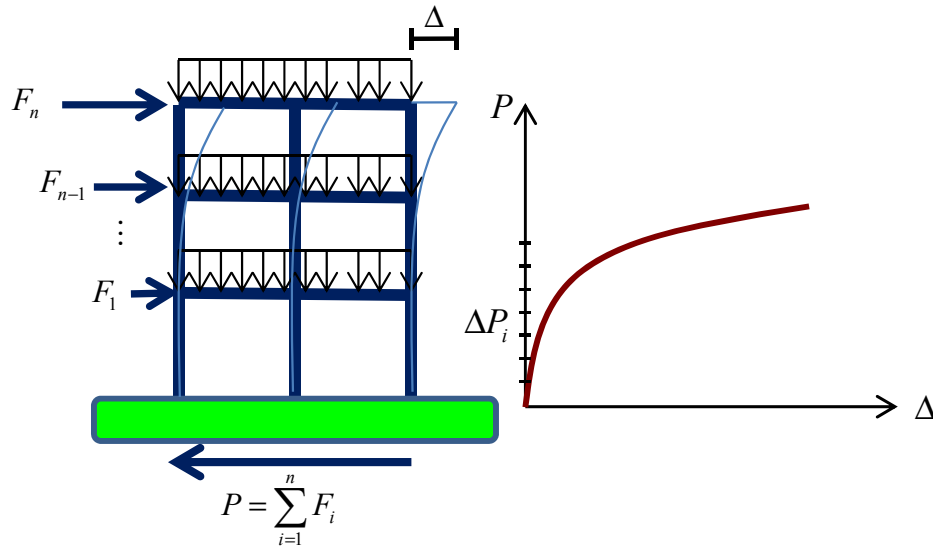
IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

انواع روش‌ها بر اساس مدل‌های تحلیلی:

- روش‌های تقریبی: مانند ضرایب تشدید در محاسبه لنگر ستون‌ها برای در نظر گرفتن اثرات $P \cdot \Delta$
- روش‌های دقیق یا روش‌های با جزئیات بیشتر

(a) روش سختی

(b) روش نرمی



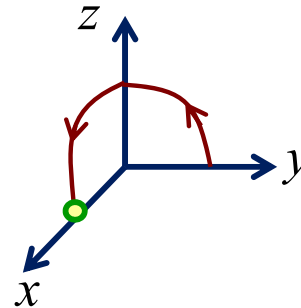
روش سختی: در این روش، تحلیل از نوع پله‌ای (Incremental) است. در هر پله فرض بر این است که تغییر شکل‌ها کوچک و رفتار خطی است.

روابط تعادل $\{P\} = [K]\{x\}$ جابجایی و دوران

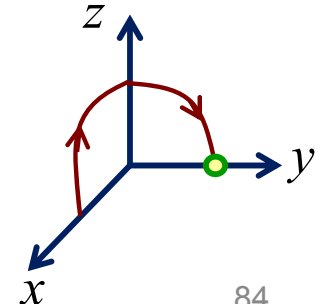
در فضای سه بعدی دوران‌های بزرگ از خاصیت برداری تبعیت نمی‌کنند.

(ترتیب چیدمان مولفه‌ها دو نقطه متفاوت نتیجه می‌دهد بنابراین ترتیب دوران‌ها مهم است.)

$$\begin{cases} \theta_x = 90^\circ \\ \theta_y = 90^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta_y = 90^\circ \\ \theta_x = 90^\circ \end{cases}$$



IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

روش سختی:

در هر پله

$$\{\Delta P\} = [\tau] \{\Delta x\}$$

$[\tau]$: ماتریس سختی مماسی (Tangent stiffness matrix) که شیب منحنی در هر پله می باشد.

در ماتریس سختی مماسی $[\tau]$ می توات اثرات زیر را دید:

- هندسه
- اندرکنش: مثلا وقتی اثر تغییر خمش کم باشد می توان از اثر $P \cdot \Delta$ صرف نظر کرد.
- مواد
- قیود: از حرکت سازه به صورت جسم صلب جلوگیری می کند (مانند واژگونی و لغزش)
- اثر سازگاری در Assemble کردن $[\tau]$ باید لحاظ گردد.

معایب روش پله ای: هندسه - مواد

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

روش سختی:

الگوریتم کلی (مراحل تحلیل روش پله‌ای):

(1) تشکیل ماتریس سختی مماسی سیستم $[\tau]_{System}$ که با Assemble کردن ماتریس سختی مماسی هر جزء $[\tau]_{Member}$ به دست می‌آید. برای انجام این کار با تعیین شیب خط پله‌ای، ماتریس سختی مماسی تخمین زده می‌شود.

(2) اعمال ΔP

(3) حل معادله $\{\Delta P\} = [\tau]\{\Delta x\}$

با استفاده از $\{\Delta x\} \Leftarrow$ تعیین تغییر شکل‌ها \Leftarrow تعیین کرنش‌ها \Leftarrow تعیین تنش‌ها \Leftarrow تعیین نیروهای داخلی

(4) کنترل تعادل: خواندن تغییر شکل‌ها از دستگاه مختصات محلی و تبدیل به دستگاه مختصات کلی و بررسی تعادل

جابجایی‌های پله‌ها را می‌توان با هم جمع کرد و جابجایی کل را به دست آورد. اما دوران پله‌ها را نمی‌توان جمع کرد و دوران کل را به دست آورد. (همان بحث دوران‌های بزرگ در فضای سه بعدی خاصیت برداری ندارند.)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

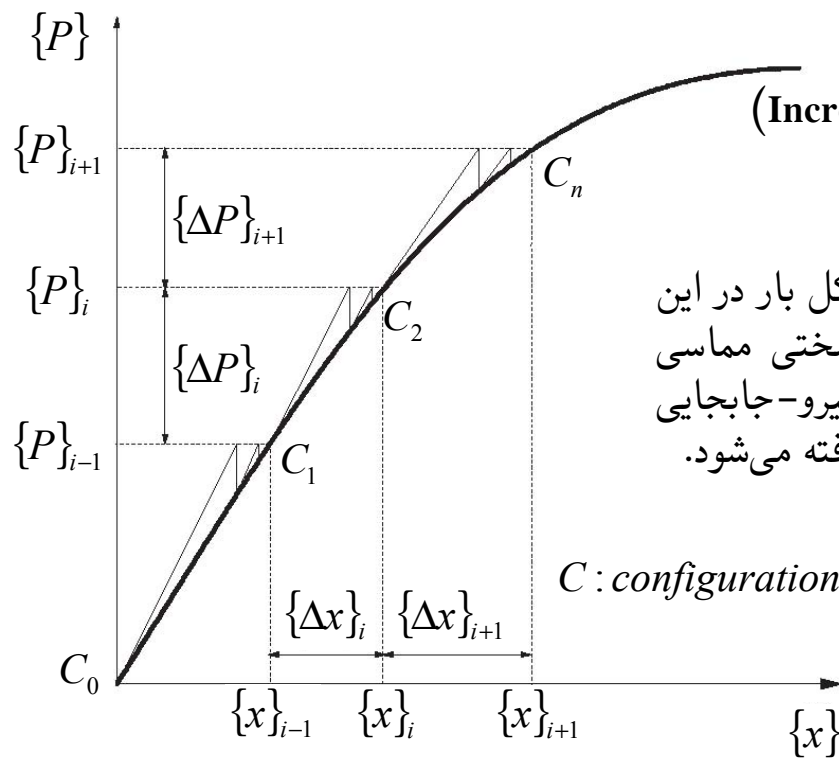
روش سختی:

برای حل مسائل غیرخطی به کمک روش المان محدود سه روش اصلی وجود دارد:

I. روش پله‌ای یا افزایشی (Incremental or Stepwise procedures)

II. روش تکراری یا نیوتنی (Iterative or Newtonian methods)

III. روش تکراری-افزایشی (Incremental-Iterative or Mixed procedures)



روش تکراری-افزایشی: در این روش چندین پله در نظر گرفته می‌شود که کل بار در این پله‌ها تقسیم می‌گردد. در روش‌های تکراری در هر پله چندین دفعه ماتریس سختی مماسی محاسبه می‌شود تا به جواب مورد نظر رسید. برای انجام این کار معیار همگرایی نیرو-جابجایی و همچنین ماکزیمم تعداد تکرارهای مجاز برای رسیدن به جواب مطلوب در نظر گرفته می‌شود.

روش اول: شیب خط اول و شیب خط‌های بعدی یکسان است.

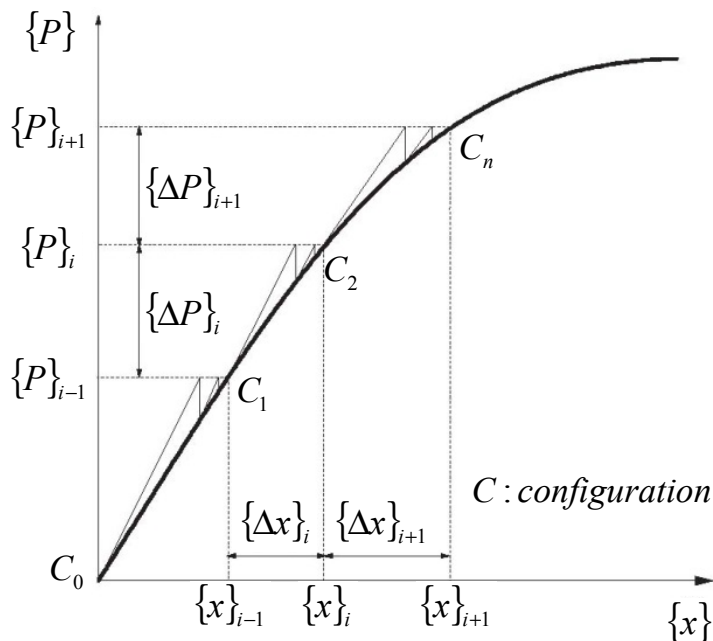
روش دوم: شیب خط دوم با شیب خط اول متفاوت است.

A Schematic Representation of the Incremental-Iterative Tangent Stiffness Method

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

فرمول‌بندی هندسی:



A Schematic Representation of the Incremental-Iterative Tangent Stiffness Method

C_0 : دستگاه مختصات محلی در وضعیتی که بارگذاری نشده است.
 C_1 : دستگاه مختصات محلی در وضعیت آخرین اعمال ΔP تا آن مرحله (n)
 C_2 : دستگاه مختصات محلی در وضعیت بعد از اعمال ΔP
 دستگاه مختصات کلی (Global Coordinate) ثابت است و حرکت ندارد.

در ابتدا هندسه مدل در دستگاه مختصات کلی تعریف می‌شود.

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

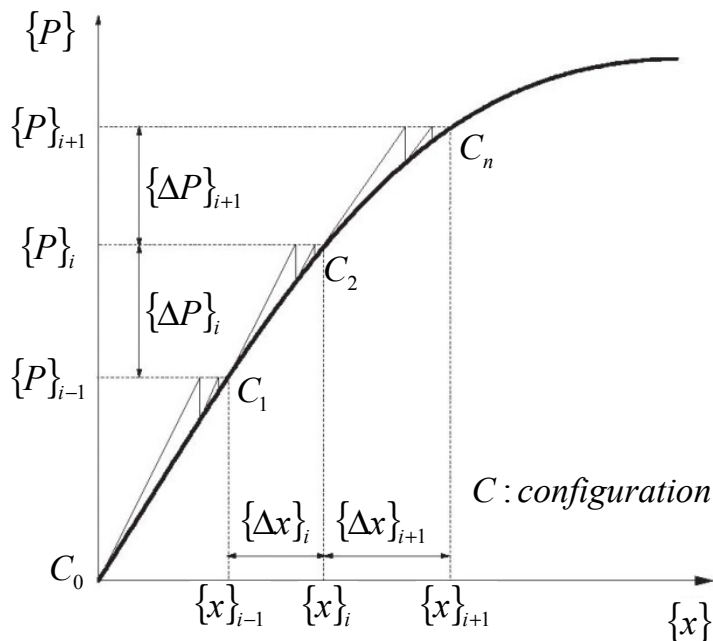
فرمول بندی هندسی:

Eulerian : یک دستگاه مختصات دارد که به عضو چسبیده و با آن حرکت می کند. بیشتر در مکانیک سیالات کاربرد دارد به طوری که تغییر شکل ها را در یک حجم کنترل شده محاسبه می کند.

Total Lagrangian : تغییر شکل ها را نسبت به دستگاه محلی خود محاسبه کرده سپس نسبت به دستگاه C_0 محاسبه می کند و بعد به دستگاه C_1 منتقل می کند.

Updated Lagrangian : تغییر شکل ها را نسبت به دستگاه محلی خود محاسبه کرده سپس نسبت به دستگاه C_1 محاسبه می کند و بعد به دستگاه C_2 منتقل می کند. در المان های تیر ستون کارایی بهتری دارد. همچنین شبیه به حالت Eulerian نیز است.

Updated Lagrangian : ترکیبی از Total و Updated می باشد.

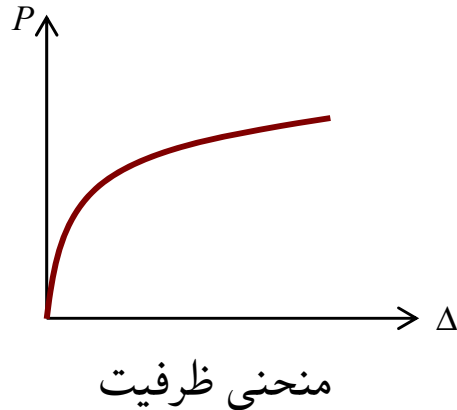


A Schematic Representation of the Incremental-Iterative Tangent Stiffness Method

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

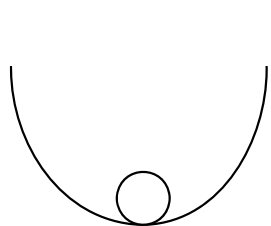
بحث پایداری (Stability)



برای بررسی باربری سازه از منحنی نیرو جابجایی استفاده می‌شود. در کنار این منحنی نیاز هست که بحث پایداری نیز بررسی شود.

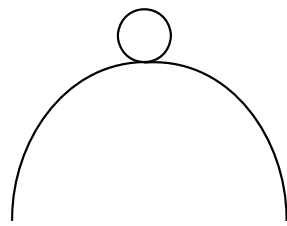
ناپایداری: تغییر هندسه باعث کاهش قدرت باربری و مختل شدن تعادل سازه می‌گردد. ناپایداری با خرابی‌های بزرگ همراه است.

نمایش سمبولیک پدیده‌های پایداری و ناپایداری



Stable

حالت تعادل پایدار



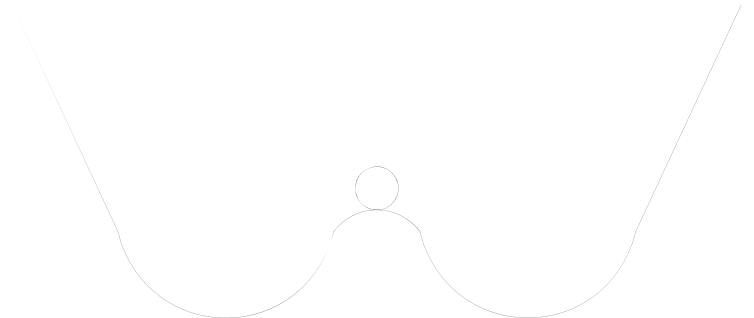
Unstable

Global Instability
حالت تعادل ناپایدار



Neutral

حالت تعادل خنثی



Local Instability

ناپایداری محلی

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

انواع ناپایداری

(a) ناپایداری (Bifurcation): برای سیستم سازه‌ای تحت بارگذاری مشخص، بیش از یک مسیرتعادل وجود دارد (چند خطی شدن مسیر تعادل- مبحث ستون‌ها).

با ازدیاد نیروی فشاری سیستم یا عضوئی که در ابتدا در جهت نیروی اعمال شده تغییرشکل می‌دهد؛ به طور ناگهان در جهت دیگر تغییرشکل دهد. نقطه چند شاخه شدن را Bifurcation Point و بار متناظر را بار بحرانی گویند.

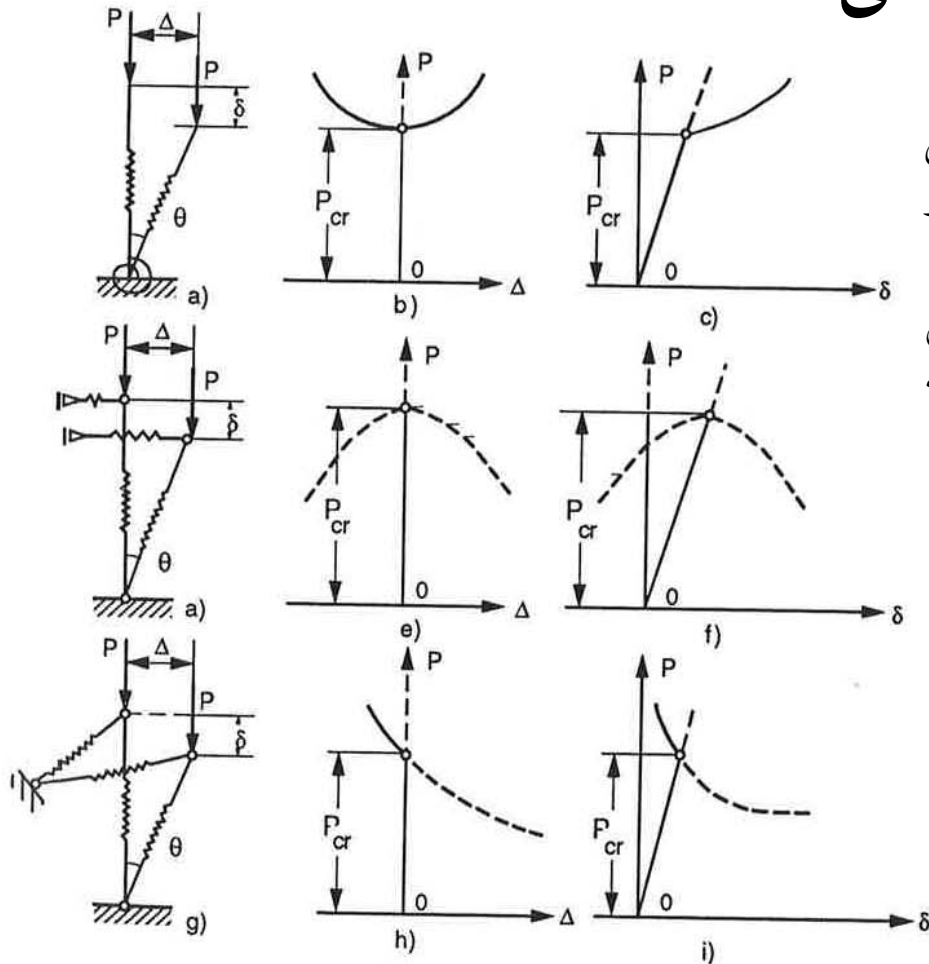
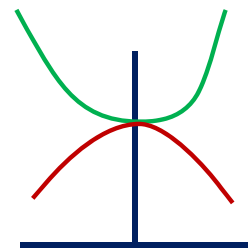
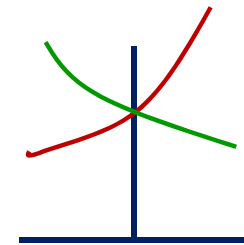


Figure (2-10) Types of bifurcation of equilibrium, (a) model of stable symmetrical bifurcation, (b) and (c) post critical behaviour of the system (a), (d) model of labile symmetrical bifurcation, (e) and (f) post critical behaviour of the system (d), (g) model of labile non-symmetric bifurcation, (h) and (i) post critical behaviour of system (g)



متقارن



نا متقارن

ناپایداری (Bifurcation):

- I. متقارن (Symmetric)
- II. نامتقارن (Asymmetric)

انواع مسیر در ناپایداری (Bifurcation):

- I. مسیره‌های پایدار
- II. مسیره‌های ناپایدار

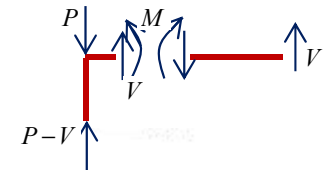
Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

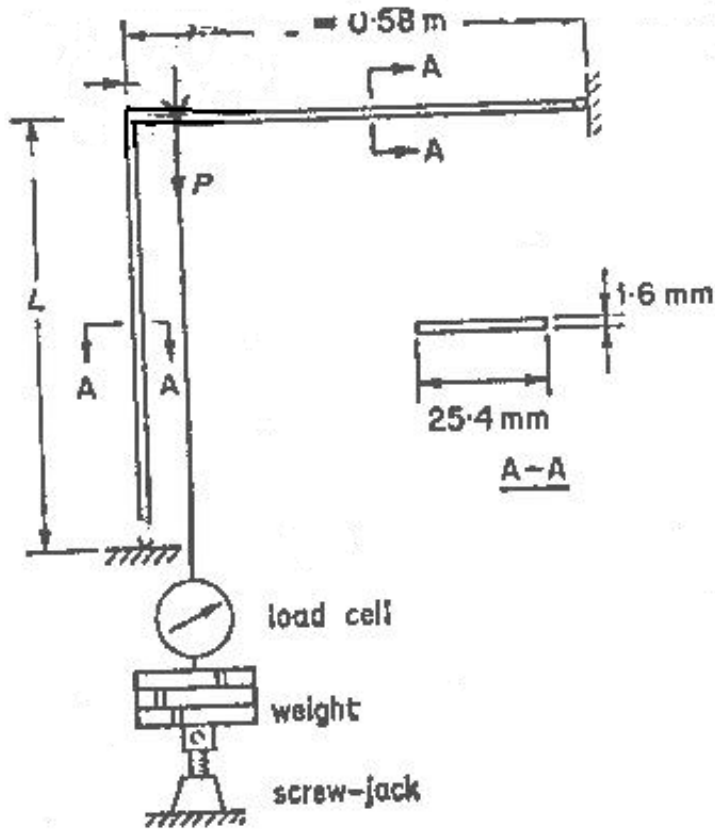
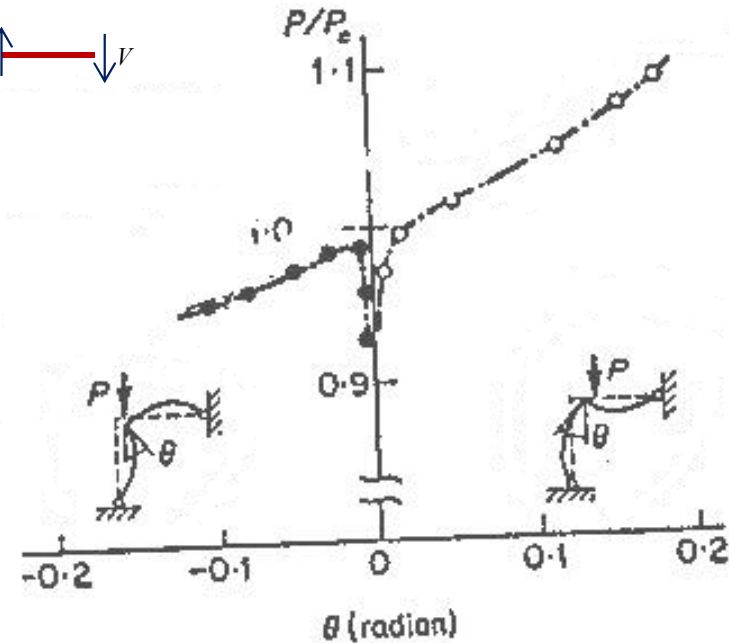
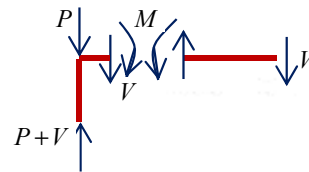
انواع ناپایداری

(a) ناپایداری (Bifurcation):

برش تیر بار محوری را کم کرده
سیستم را پایدار می‌کند



برش تیر بار محوری را زیاد کرده
سیستم را ناپایدار می‌کند

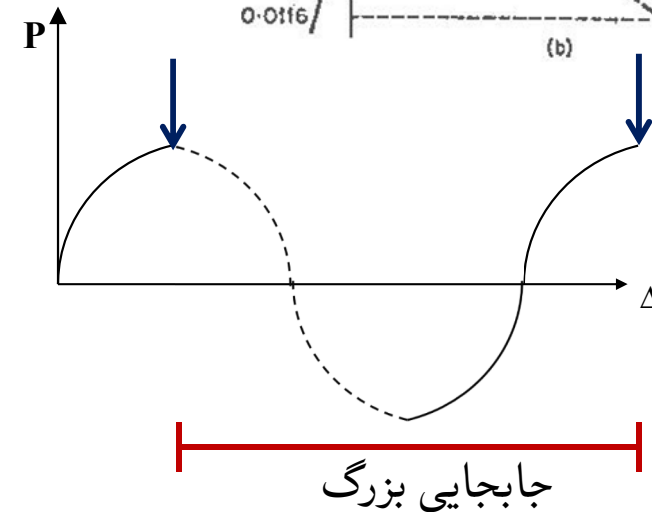
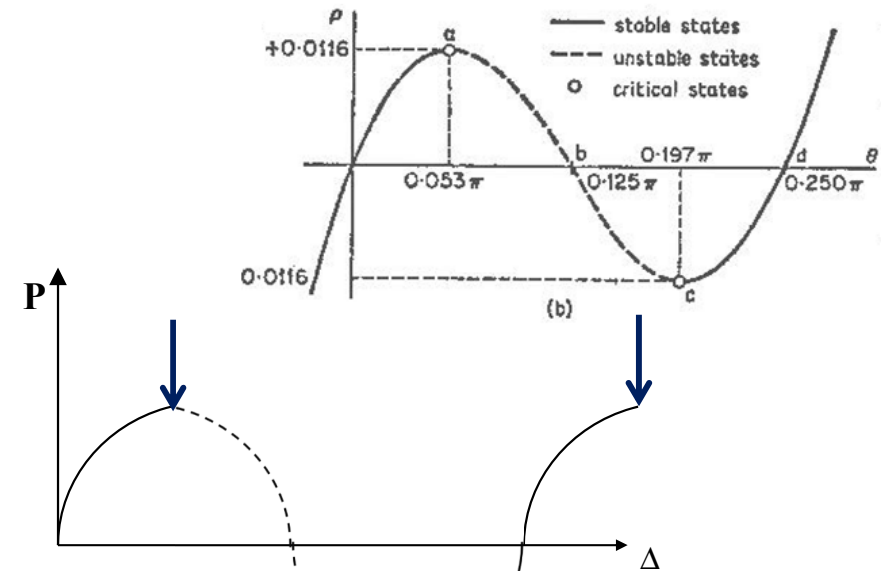
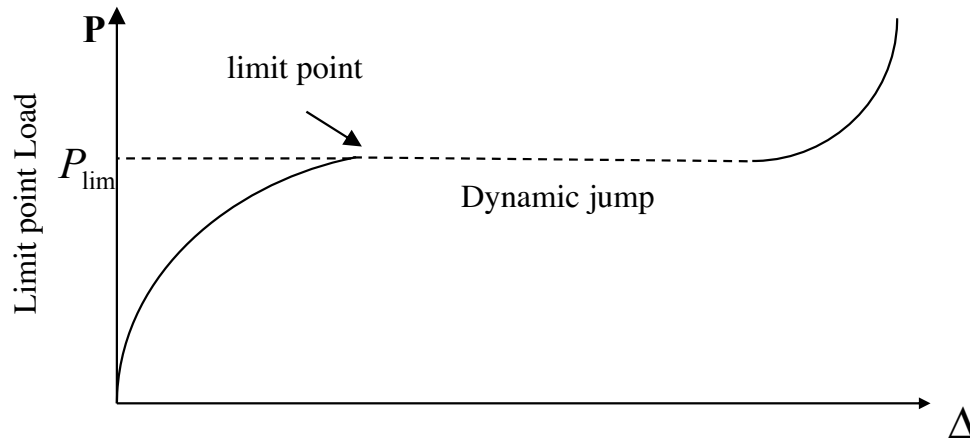


Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

انواع ناپایداری

(b) ناپایداری فروجهش (Snap-Through) یا ناپایداری نقطه حدی (Limit Load Instability): یک سازه با مشخصه نرم شوندگی که در آن سختی با افزایش بار کاهش می‌یابد، احتمالاً پایداری خود را به شیوه‌ای که ناپایداری فروجهش (نقطه حدی) نامیده می‌شود از دست بدهد. در این نوع ناپایداری، نرم شوندگی که همراه با مد اولیه تغییر شکل (Initial Mode of Deformation) می‌باشد ممکن است با کاهش تدریجی سختی به حالتی برسد که در آن سختی سازه بکلی از بین برود. در این حالت است که گفته می‌شود مسیر تعادل بار - تغییرمکان به یک نقطه حدی رسیده است که در آن یک پرش دینامیکی (Dynamic Jump) با یک رفتار بسیار تغییرشکل یافته (Highly Deformed Configuration) رخ می‌دهد. یعنی به حدی از یک بار می‌رسیم که با اعمال ΔP بعدی از یک نقطه تعادل به نقطه تعادل غیرمجاور منتقل می‌شویم که همراه با جابجایی‌های بزرگ است.

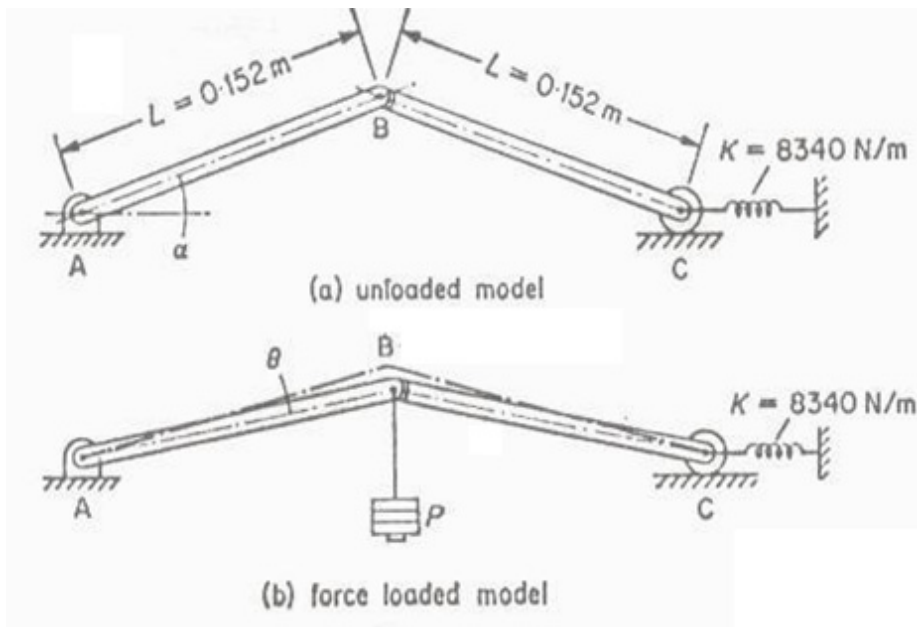


اگر سیستم کنترل بارگذاری، به جای کنترل بار (Load Control)، از نوع کنترل تغییرمکان (Displacement Control) باشد، در این صورت می‌توان خط نقطه چین را دید.

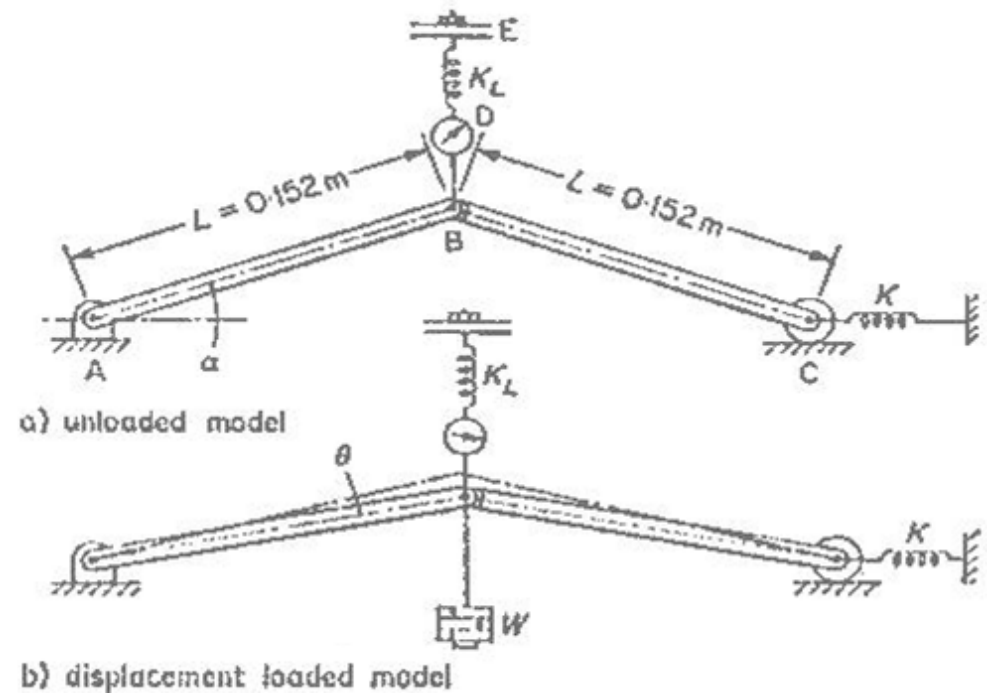
Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

انواع ناپایداری
(Limit Load Instability) یا ناپایداری نقطه حدی (Snap-Through) یا ناپایداری فروجهش (b)



کنترل بار (Load Control)

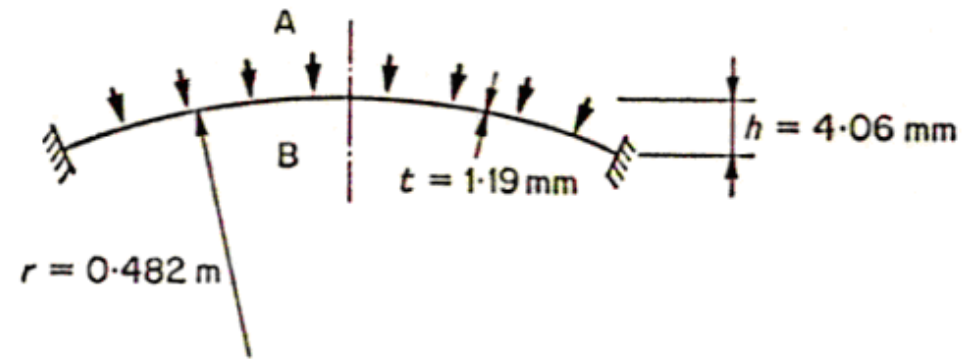
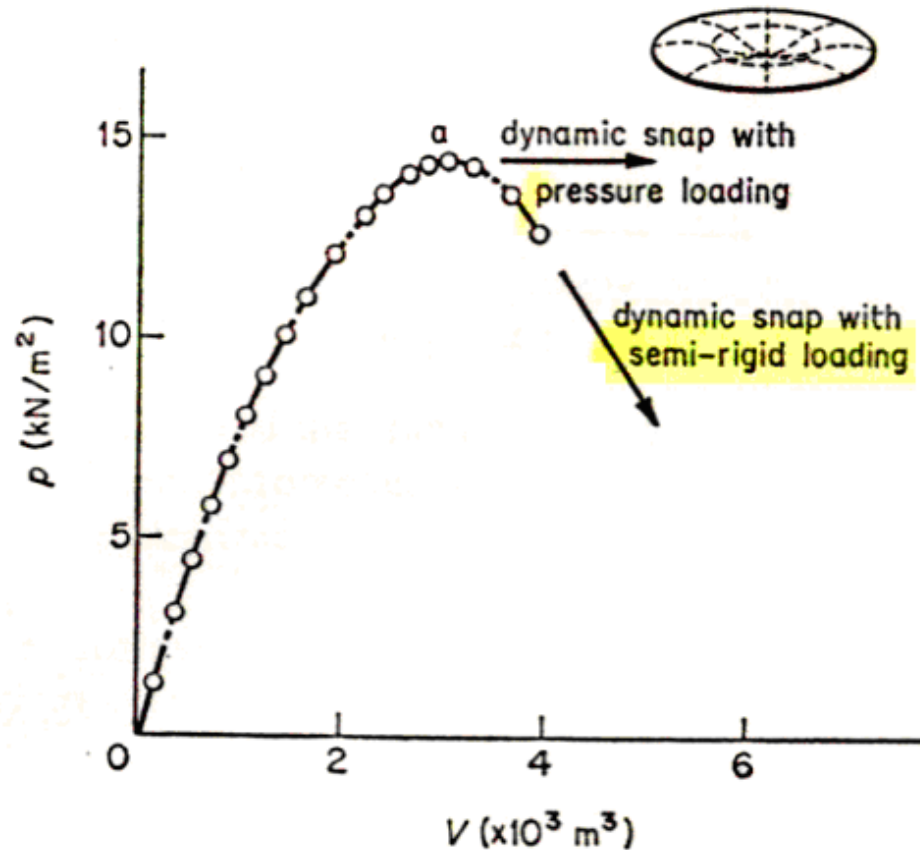


کنترل تغییر مکان (Displacement Control)

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

انواع ناپایداری
(b) ناپایداری فروجهش (Snap-Through) یا ناپایداری نقطه حدی (Limit Load Instability)



Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

انواع ناپایداری

(c) ناپایداری (Finite Disturbance Buckling): رفتاری مابین دو حالت قبلی ناپایداری را دارد. مانند پوسته‌های تحت فشار

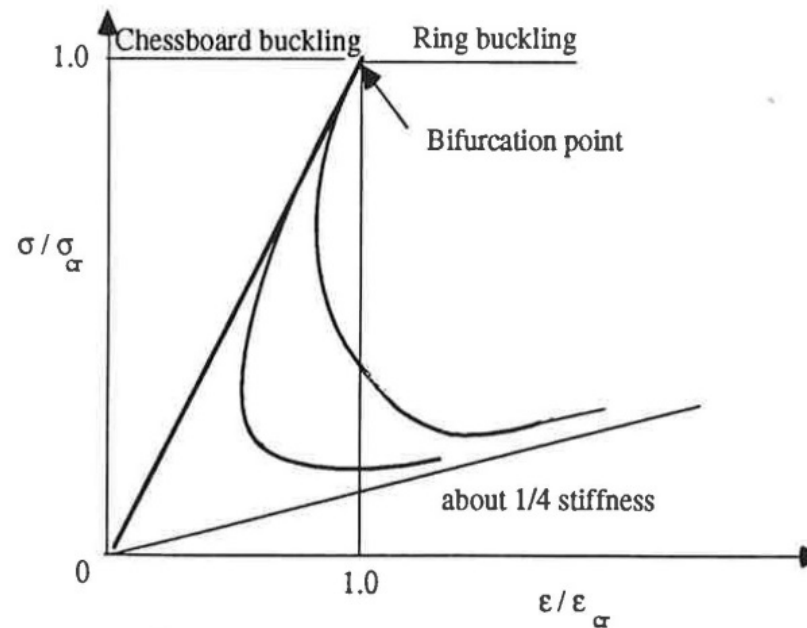
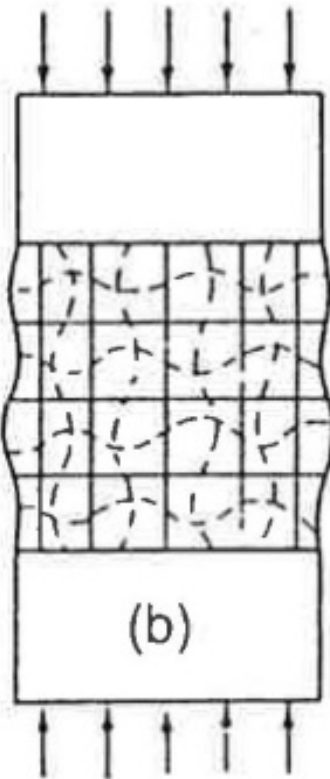


Figure (7-11) Buckling behaviour of axially compressed cylindrical shell

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

روش‌های تحلیل پایداری

.I Bifurcation Approach

.II Energy Approach

.III Dynamic Approach

Bifurcation Approach

مناسب سازه‌هایی هستند که کامل (Perfect) باشند یعنی اعوجاج و تغییر هندسه‌ای در آن‌ها وجود ندارد.

در این روش مقدار بار بحرانی برابر با مقادیر ویژه ماتریس سختی و تغییرشکل‌های مربوط به هر بار بحرانی همان بردارهای ویژه ماتریس سختی می‌باشند.

$$\text{If } \det([K]) = 0 \Rightarrow \text{Critical Load}$$

Introduction to Nonlinear Static Analysis

IV. چگونگی منظور نمودن اثرات غیرخطی

روش‌های تحلیل پایداری

Energy Approach

رابطه کل انرژی پتانسیل سیستم (E) نوشته می‌شود: کار داخلی + کار خارجی

$$\frac{dE}{d_{DOF}} = 0 \Rightarrow \text{بار بحرانی به دست می‌آید}$$

$$\frac{d^2 E}{d_{DOF}^2} = 0 \Rightarrow \text{جهت منحنی (تقعر یا تحدب) را نشان می‌دهد}$$

Dynamic Approach

به سیستم در لحظه نزدیک شدن به بار بحرانی ضربه (Pulse) می‌زنیم اگر حساسیت نشان نداد (دترمینان ماتریس سختی برابر با صفر باشد) می‌گوییم ناپایداری محلی است. اگر نزدیک نقطه ($\det([K]) = 0$) حرکت بار بحرانی اتفاق افتاد، بار بحرانی Bifurcation خواهد بود.