دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

روش المان محدود

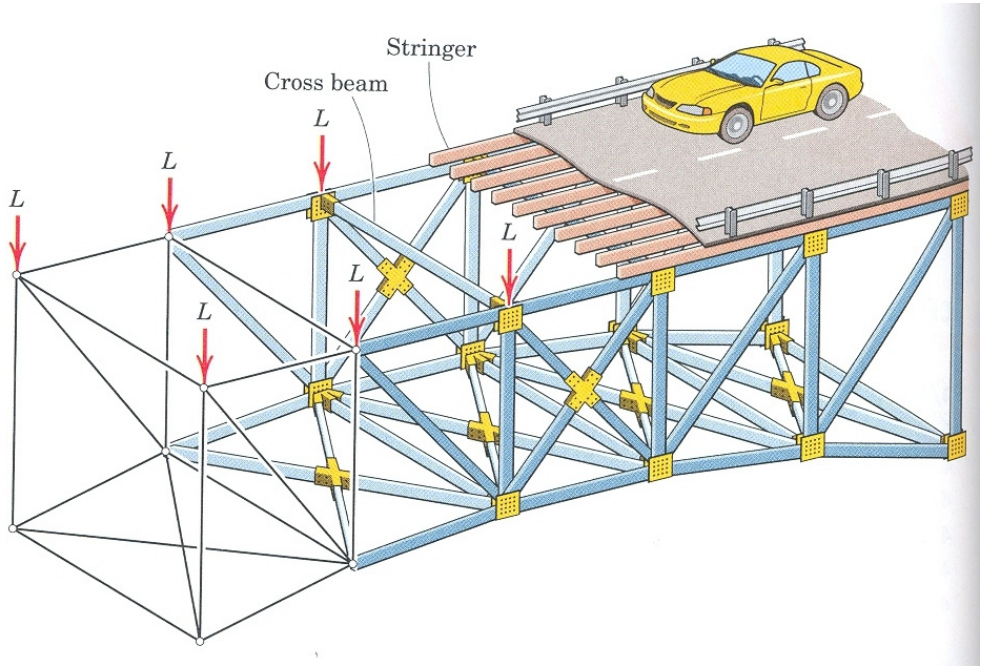
خرپاها (Trusses)

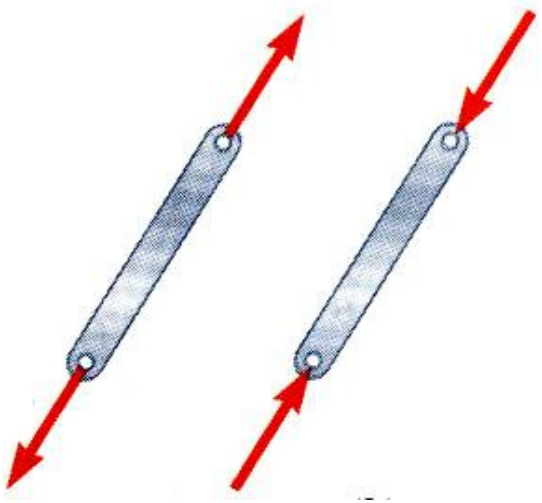
تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

خرپاها (Trusses)

مقدمه (Introduction)

در این فصل، آنالیز سازه‌های خرپایی به روش المان محدود ارائه می‌شود. آنالیز خرپاهای دو بعدی (یا خرپاهای صفحه‌ای) به طور کامل ارائه می‌گردد. در ادامه از آنالیز دو بعدی به راحتی برای بررسی خرپاهای سه‌بعدی تعمیم داده می‌شود. خرپاها فقط از اعضای دو نیرویی تشکیل شده است. یعنی هر المان خرپا فقط در کشش یا فشار مستقیم کار می‌کند. در یک خرپا، لازم است که تمام بارها و واکنش‌ها فقط در مفاصل اعمال شوند و همه اعضا در انتهای خود توسط اتصالات پین بدون اصطکاک به هم متصل شوند. هر دانشجوی مهندسی، در درس استاتیک، خرپاها را با استفاده از روش مفاصل و روش مقاطع تحلیل کرده است. این روش‌ها، در حالی که اصول استاتیک را نشان می‌دهند، وقتی برای سازه‌های خرپایی با مقیاس بزرگ از نظر استاتیکی نامعین به کار گرفته می‌شوند، خسته‌کننده خواهند بود. علاوه بر این، جابجایی مفاصل به راحتی قابل دستیابی نیستند. از سوی دیگر، روش المان محدود برای سازه‌های استاتیکی معین یا نامعین به طور یکسان قابل استفاده است. روش المان محدود همچنین جابجایی گرهی در اتصالات را به راحتی محاسبه می‌کند. همچنین، اثرات تغییرات دما و نشست‌های تکیه‌گاهی نیز می‌توانند به طور معمول محاسبه شوند.

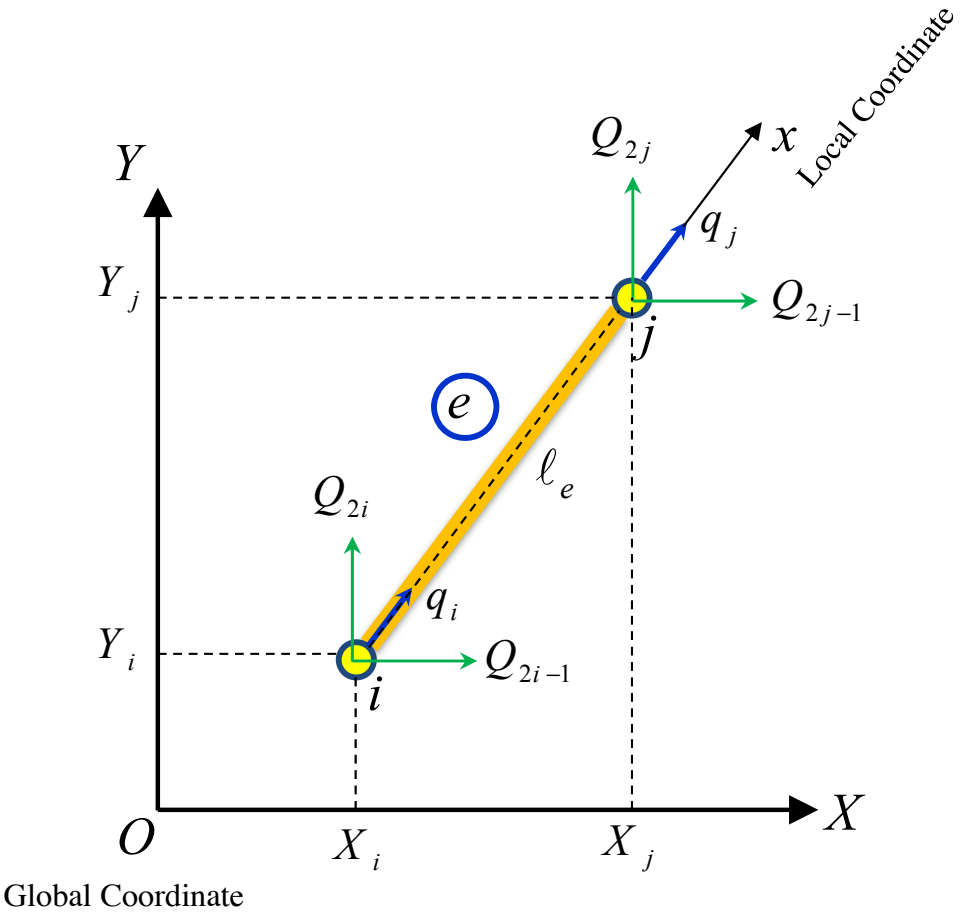




خرپاها (Trusses)

مختصات‌های محلی و کلی (Local and Global Coordinates)

تفاوت اصلی بین سازه‌های یک بعدی در فصل قبل و خرپا آن است که المان‌های یک خرپا می‌توانند در جهت‌گیری‌های مختلفی قرار گیرند. به همین دلیل، برای منظور نمودن جهت‌گیری‌های متفاوت، سیستم‌های مختصات محلی و کلی در نظر گرفته می‌شود.



$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

$\mathbf{q}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار جابجایی گرهی المان در مختصات محلی.

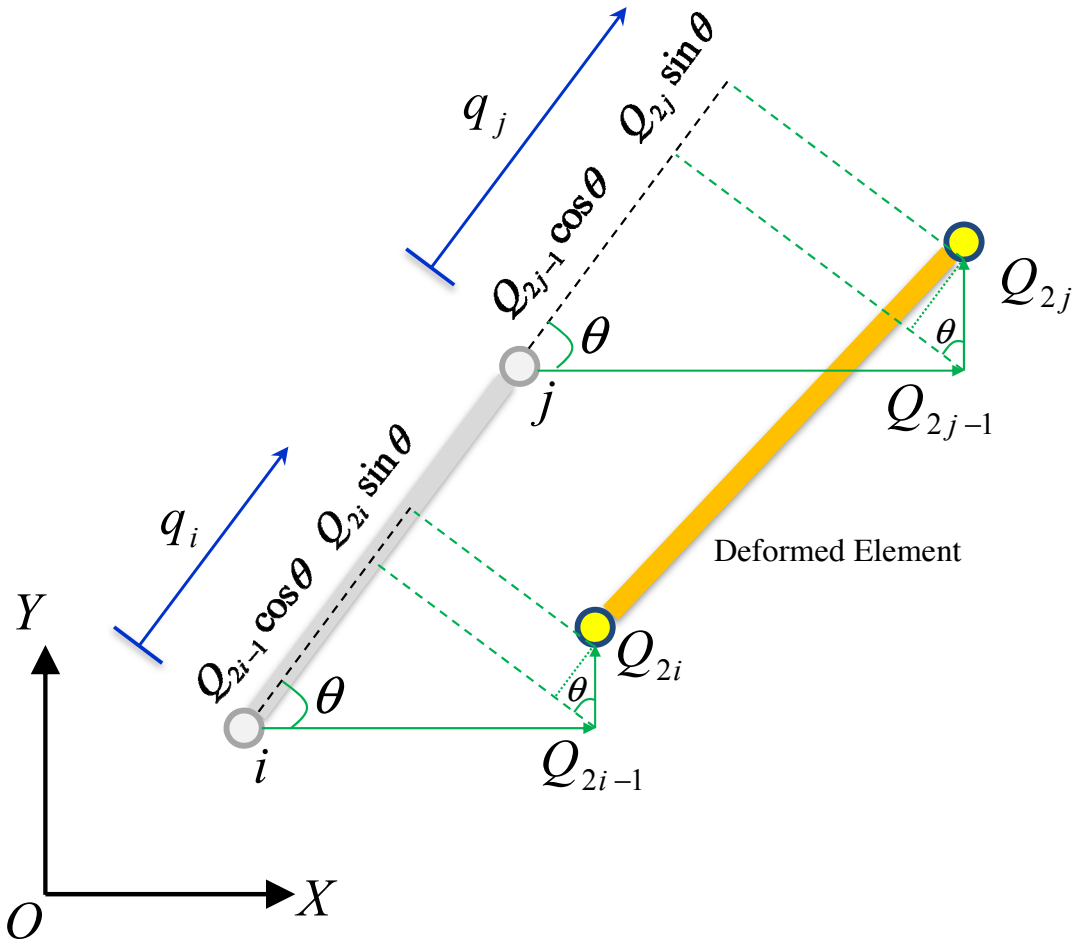
$$\mathbf{Q}^e = \begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

$\mathbf{Q}^e \in \mathbb{R}^4$: بردار جابجایی گرهی المان در مختصات کلی.

مختصات‌های محلی و کلی (Local and Global Coordinates)

با بررسی هندسه تغییرشکل یافته المان رابطه بین مختصات محلی و کلی را می توان استخراج نمود:

$$\begin{aligned} q_i &= Q_{2i-1}\cos\theta + Q_{2i}\sin\theta \\ q_j &= Q_{2j-1}\cos\theta + Q_{2j}\sin\theta \end{aligned} \qquad (3)$$



برای ساده سازی تعریف زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \ell &= \cos\theta \\ m &= \sin\theta \end{aligned} \qquad (4)$$

فرم ماتریسی رابطه (3) به صورت زیر است:

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{L}\mathbf{Q}^e \qquad (5)$$

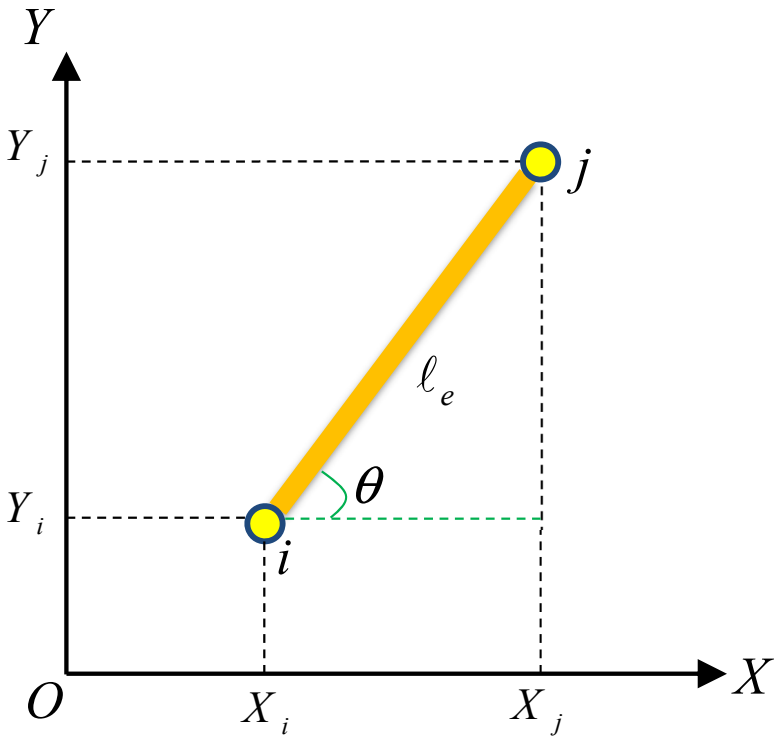
که در آن

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$: ماتریس تبدیل (Transformation Matrix) مختصات کلی به مختصات محلی

مشخصات هندسی المان (Geometric Properties of Element)

با توجه به موقعیت قرارگیری المان در مختصات کلی می‌توان مشخصات هندسی المان را محاسبه نمود. با توجه به شکل نشان داده شده طول المان برابر است با:



$$\ell_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \qquad (7)$$

همچنین مقادیر مربوط به sin و cos زاویه راستای المان با افق به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\ell = \cos\theta = \frac{X_j - X_i}{\ell_e}$$

$$m = \sin\theta = \frac{Y_j - Y_i}{\ell_e} \qquad (8)$$

خرپاها (Trusses)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

ماتریس سختی المان یک بُعدی در لکچر قبل به صورت زیر به دست آمد:

$$\mathbf{k}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{matrix} \\ i \\ j \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} i & \quad j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad (L\,04-34)$$

انرژی کرنشی المان در مختصات محلی به صورت زیر است:

$$U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e \qquad (L\,04-33)$$

با جایگذاری رابطه (5) در رابطه (L04-33) خواهیم داشت:

$$(5) \rightarrow (L\,04-33) \quad \Rightarrow \quad U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T \left(\mathbf{L}^T \mathbf{k}^e \mathbf{L}\right) \mathbf{Q}^e \qquad (9)$$

خرپاها (Trusses)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

رابطه (9) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e} \qquad (10)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{K}^e = \mathbf{L}^T \mathbf{k}^e \mathbf{L}} \qquad (11)$$

$\mathbf{K}^e \in \mathbb{R}^{4\times4}$: ماتریس سختی المان e اُم (Element Stiffness Matrix) در مختصات کلی

با جایگذاری روابط (6) و (L04-34) در رابطه (11) خواهیم داشت:

$$(6)\,\&\,(L\,04-34) \rightarrow (11) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} \ell & 0 \\ m & 0 \\ 0 & \ell \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \end{bmatrix}} \qquad (12)$$

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با بسط رابطه (12) ماتریس سختی المان در مختصات کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(12) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c} \\ 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2i-1 & 2i & 2j-1 & 2j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (13)$$

محاسبه تنش

تنش در المان بر اساس قانون هوک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^e = E_e \varepsilon^e \qquad (14)$$

همچنین مقدار کرنش در المان نیز برابر است با:

$$\varepsilon^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e \qquad (15)$$

خرپاها (Trusses)

محاسبه تنش

با جایگذاری رابطه (15) در (14) رابطه تنش برحسب جابجایی گرهی المان در مختصات محلی نتیجه می‌شود:

$$(15) \rightarrow (14) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^e = E_e \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e} \qquad (16)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{B}^e = \frac{1}{\ell_e}\{-1 \quad 1\} \quad , \quad \mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix}} \qquad (17)$$

با جایگذاری روابط (5) در رابطه (16) خواهیم داشت:

$$(5) \rightarrow (16) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^e = E_e \mathbf{B}^e \mathbf{L} \mathbf{Q}^e} \qquad (18)$$

خرپاها (Trusses)

محاسبه تنش

با جایگذاری روابط (2)، (6) و (17) در رابطه (18) خواهیم داشت:

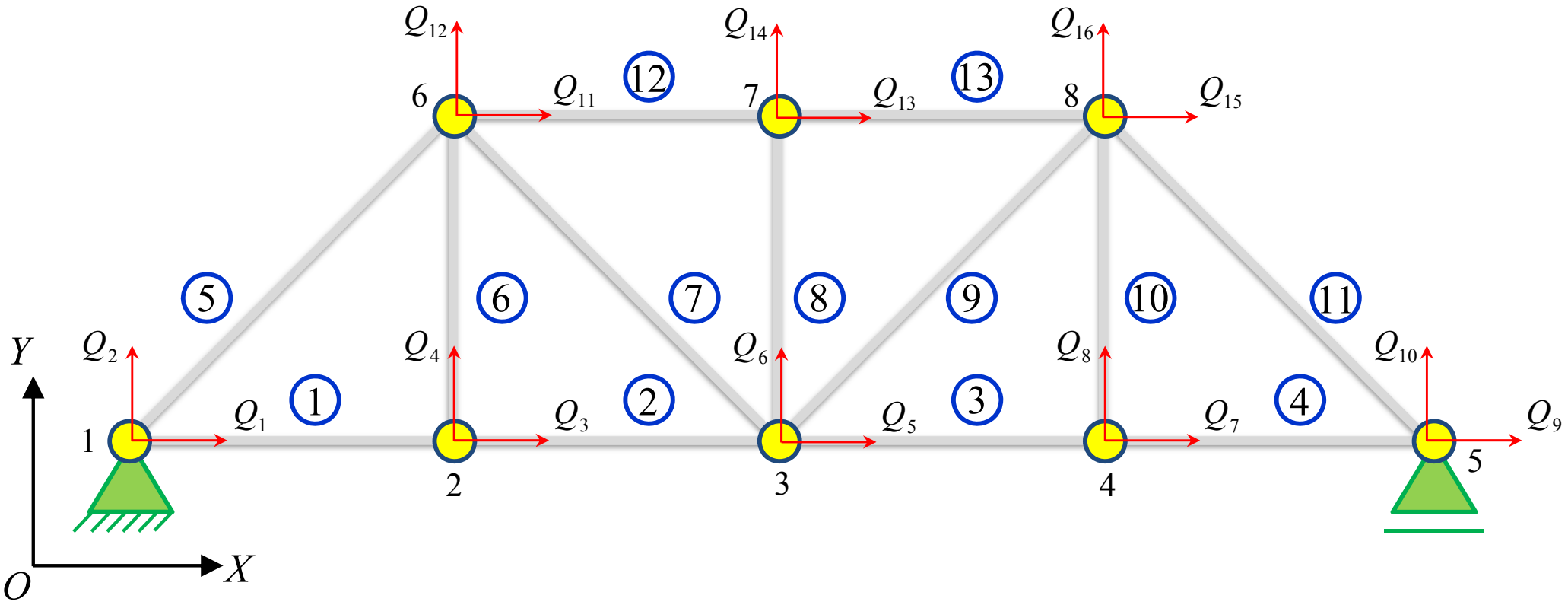
$$(2),(6)\,\&\,(17)\rightarrow(18)\quad\Rightarrow\quad \sigma^e = E_e\,\frac{1}{\ell_e}\{-1\quad 1\}\begin{bmatrix}\ell & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ell & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_{2i-1}\\ Q_{2i}\\ Q_{2j-1}\\ Q_{2j}\end{Bmatrix} \qquad (19)$$

با بسط دادن رابطه (19) مقدار تنش المان در مختصات کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(19)\quad\Rightarrow\quad \sigma^e = \frac{E_e}{\ell_e}\{-\ell\quad -m\quad \ell\quad m\}\begin{Bmatrix}Q_{2i-1}\\ Q_{2i}\\ Q_{2j-1}\\ Q_{2j}\end{Bmatrix} \qquad (20)$$

خرپاها (Trusses)

مدل‌سازی المان محدود (Finite Element Modeling)



$$Q_1 = Q_2 = Q_{10} = 0 \quad : BC$$

$$n_e = 13$$

$$n_{DOF} = 16$$

تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

شماره المان e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
شماره گره i	1	2	3	4	1	2	3	3	3	4	5	6	7
شماره گره j	2	3	4	5	6	6	6	7	8	8	8	7	8

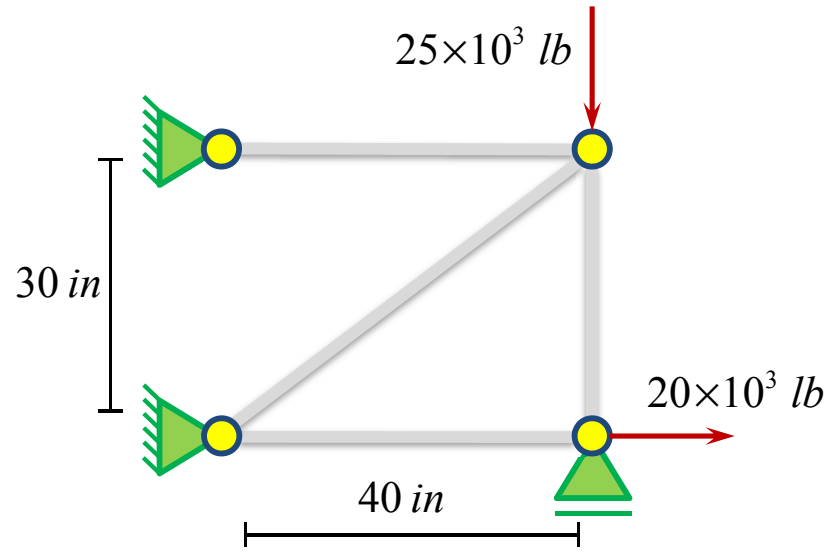
خرپاها (Trusses)

مثال 1- در خرپای نشان داده شده در شکل مطلوب است تعیین:

الف- جابجایی گرهی.

ب- تنش ایجاد شده در هر عضو.

ج- عکس العمل‌های تکیه‌گاهی.



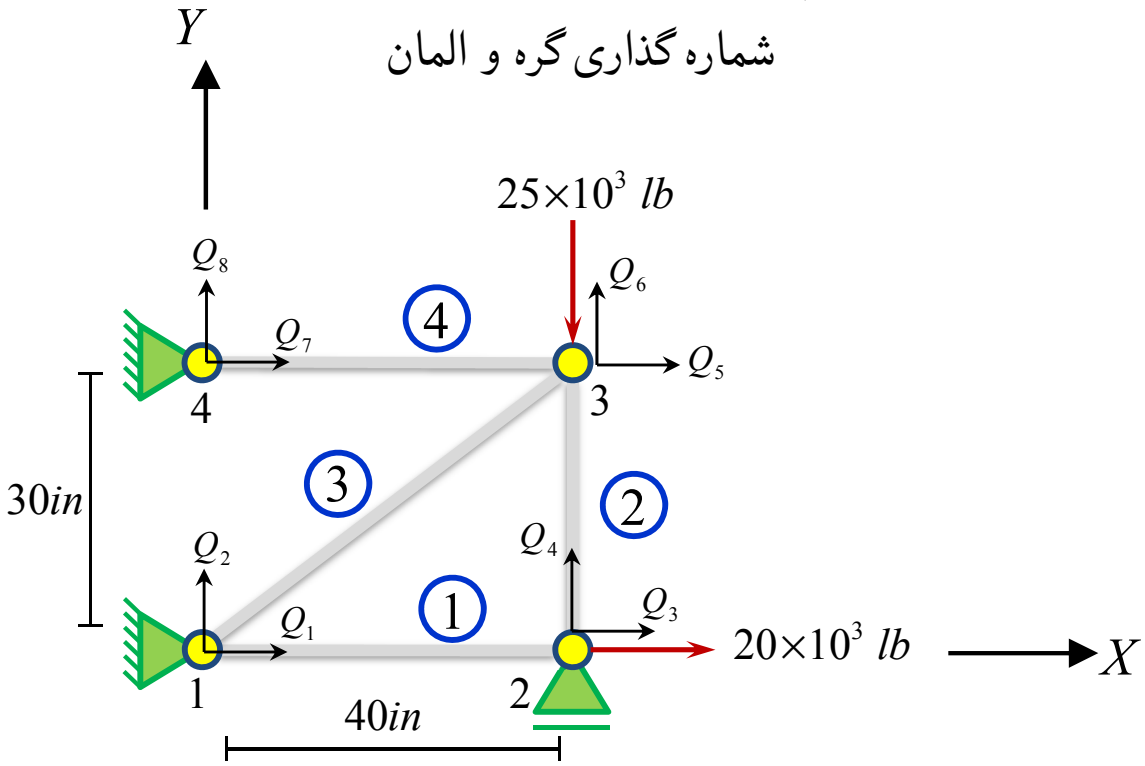
$A = 1\ in^2$

$E = 29.5\times10^6\ lb/in^2$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-

تقسیم‌بندی خرپا به المان‌های مختلف و
شماره گذاری گره و المان

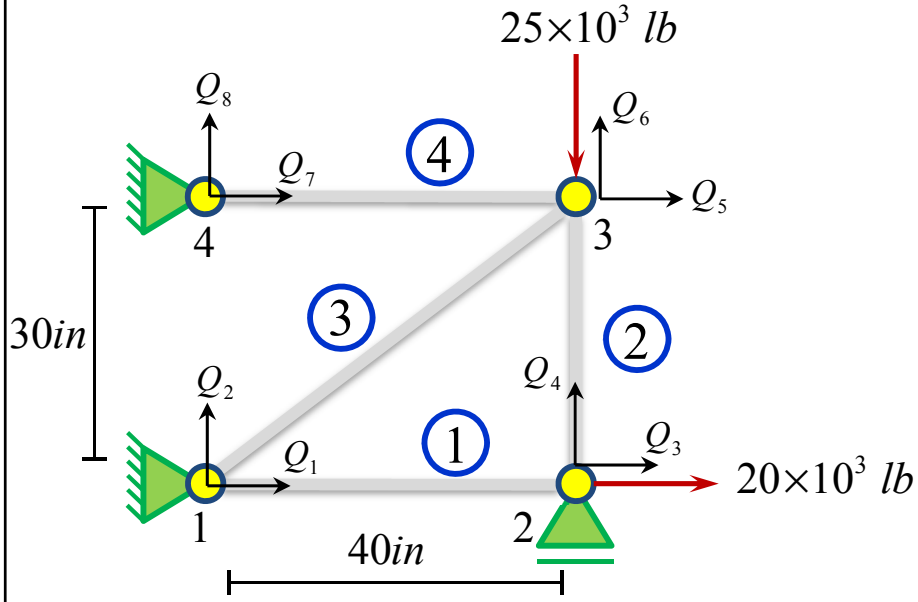


Node No.	Node Coordinate	
	X	Y
1	0	0
3	40	30
4	0	30

Element No.	i	j	$\ell_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$	$\ell = (X_j - X_i)/\ell_e$	$m = (Y_j - Y_i)/\ell_e$
1	1	2	$\sqrt{(40-0)^2+(0-0)^2} = 40$	$\frac{40-0}{40} = 1$	$\frac{0-0}{40} = 0$
2	2	3	$\sqrt{(40-40)^2+(30-0)^2} = 30$	$\frac{40-40}{30} = 0$	$\frac{30-0}{30} = 1$
4	4	3	$\sqrt{(40-0)^2+(30-30)^2} = 40$	$\frac{40-0}{40} = 1$	$\frac{30-30}{40} = 0$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-



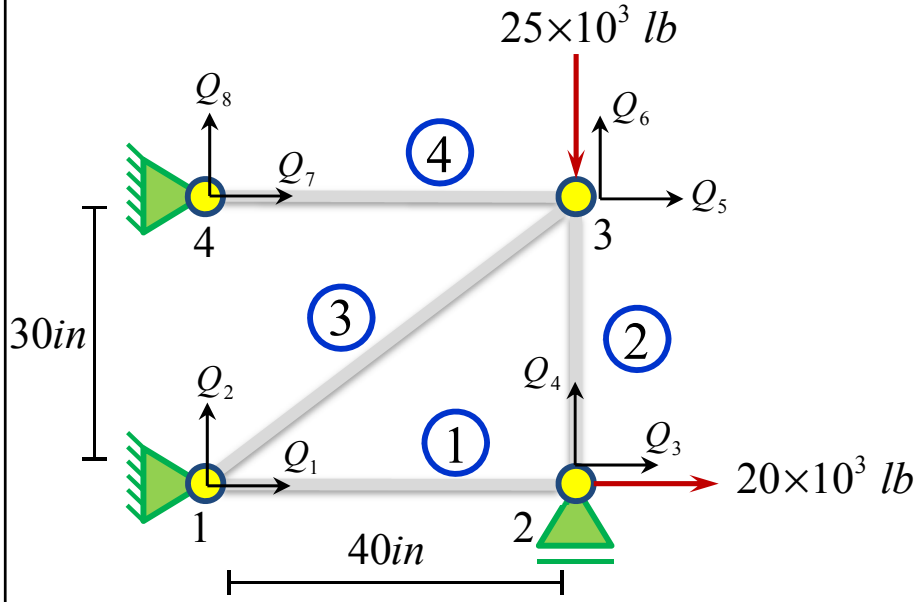
تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (13)

$$(13) \Rightarrow \mathbf{K}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c} \\ 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2i-1 & 2i & 2j-1 & 2j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{30} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1.2)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-



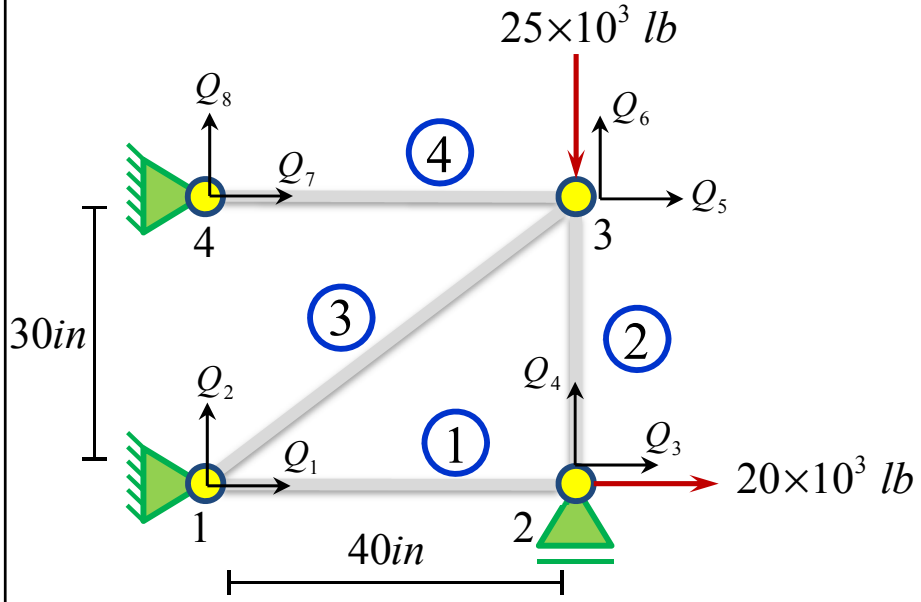
تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (13)

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{50}\begin{matrix}\\ 1\\ 2\\ 5\\ 6\end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix}\\ 1\\ 2\\ 5\\ 6\end{matrix} \qquad (1.3)$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{40}\begin{matrix}\\ 7\\ 8\\ 5\\ 6\end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix}\\ 7\\ 8\\ 5\\ 6\end{matrix} \qquad (1.4)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-



تشکیل ماتریس سختی کل خرپا به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

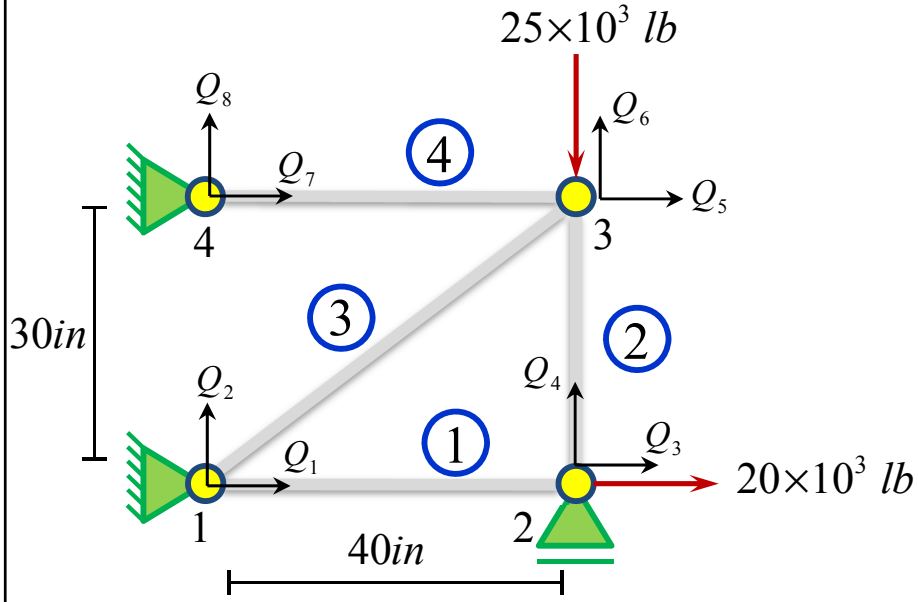
$$\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{8\times8}=\sum_{e=1}^{4}\mathbf{K}^{e}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{K}=\frac{29.5\times10^{6}}{600}\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8\end{matrix}\\\begin{bmatrix}22.68&5.76&-15&0&-7.68&-5.76&0&0\\5.76&4.32&0&0&-5.76&-4.32&0&0\\-15&0&15&0&0&0&0&0\\0&0&0&20&0&-20&0&0\\-7.68&-5.76&0&0&22.68&5.76&-15&0\\-5.76&-4.32&0&-20&5.76&24.32&0&0\\0&0&0&0&-15&0&15&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{matrix}\qquad(1.5)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-

تشکیل بردار نیروهای گرهی کل خرپا



خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

$$Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_7 = Q_8 = 0$$

گام اول: ذخیره‌کردن سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و بردار نیروهای گرهی

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{28} \\ K_{41} & K_{42} & \cdots & K_{48} \\ K_{71} & K_{72} & \cdots & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} = \frac{29.5\times10^6}{600} \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

گام دوم: سطر و ستون‌های 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از درایه‌های بردار نیروهای گرهی کل اصلاح گردد:

$$\bar{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{3\times 3} = \frac{29.5\times 10^{6}}{600}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (1.9)$$

پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

گام دوم: سطر و ستون‌های 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از درایه‌های بردار نیروهای گرهی کل اصلاح گردد:

$$\mathbf{F} = 10^3 \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (1.10)$$

پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

گام دوم: سطر و ستون‌های 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از درایه‌های بردار نیروهای گرهی کل اصلاح گردد:

چون تمامی شرایط مرزی مقادیر صفر دارند از این رو:

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=\alpha_7=\alpha_8=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_i=F_i \qquad i=3,5,6} \qquad (1.12)$$

$$(L04-88) \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{Q}}=\bar{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{29.5\times10^6}{600}\begin{bmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 22.68 & 5.76\\ 0 & 5.76 & 24.32\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_3\\ Q_5\\ Q_6\end{Bmatrix}=10^3\times\begin{Bmatrix}20\\ 0\\ -25\end{Bmatrix}} \qquad (1.13)$$

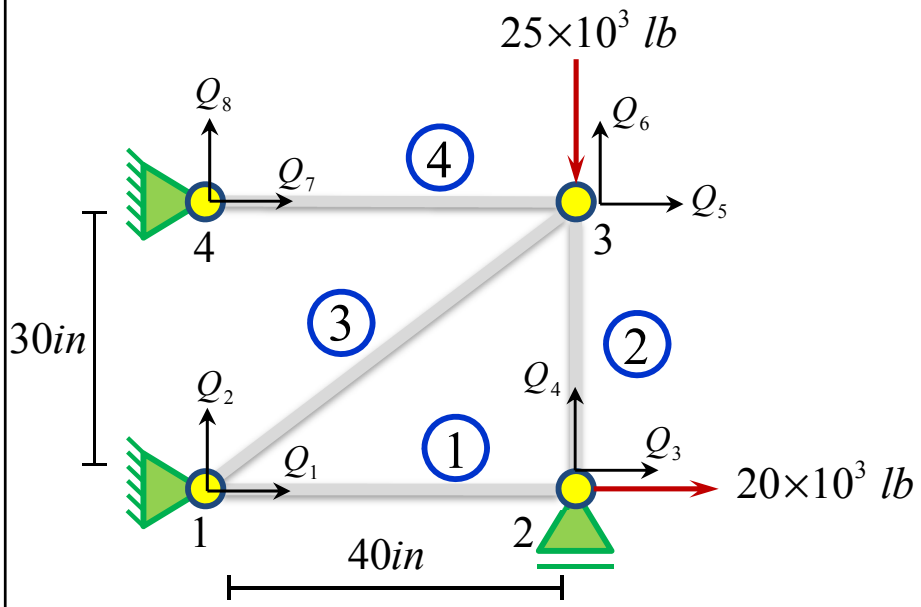
پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

از حل معادله (1.13) خواهیم داشت:

$$(1.13) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27.12 \\ 5.65 \\ -22.25 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}\, in \qquad (1.14)$$

در نتیجه بردار جابجایی گرهی کل به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(1.14) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.12 \\ 0 \\ 5.65 \\ -22.25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}\, in \qquad (1.15)$$



پاسخ مثال 1-

محاسبه تنش:

$$(20) \Rightarrow \boxed{\sigma^{(e)} = \frac{E_e}{\ell_e}\{-\ell \quad -m \quad \ell \quad m\}\begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix}}$$

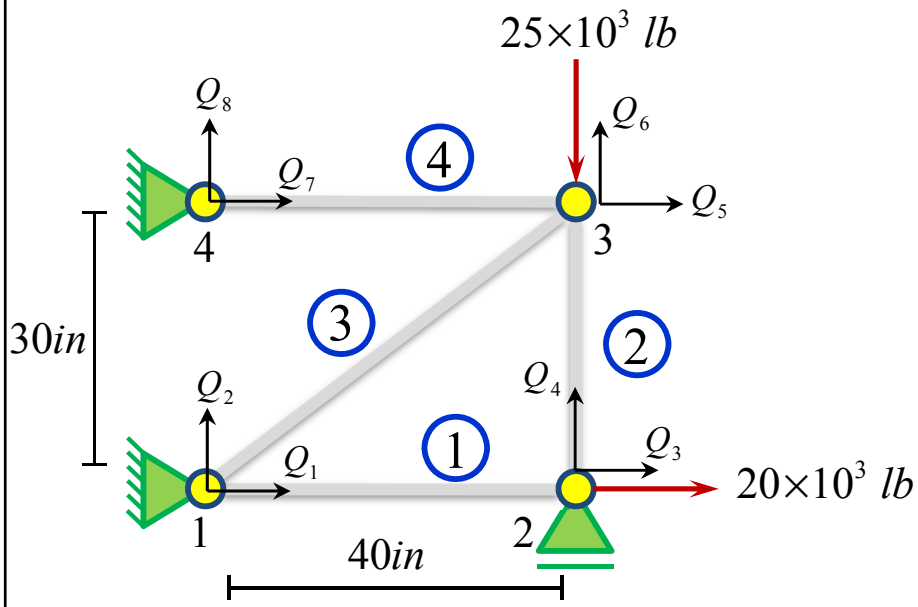
$$\sigma^{(1)} = \frac{29.5\times10^6}{40}\{-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.12\times10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(1)} = 20000\ psi} \quad (1.16)$$

$$\boxed{\sigma^{(2)} = -21880\ psi} \quad (1.17)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-

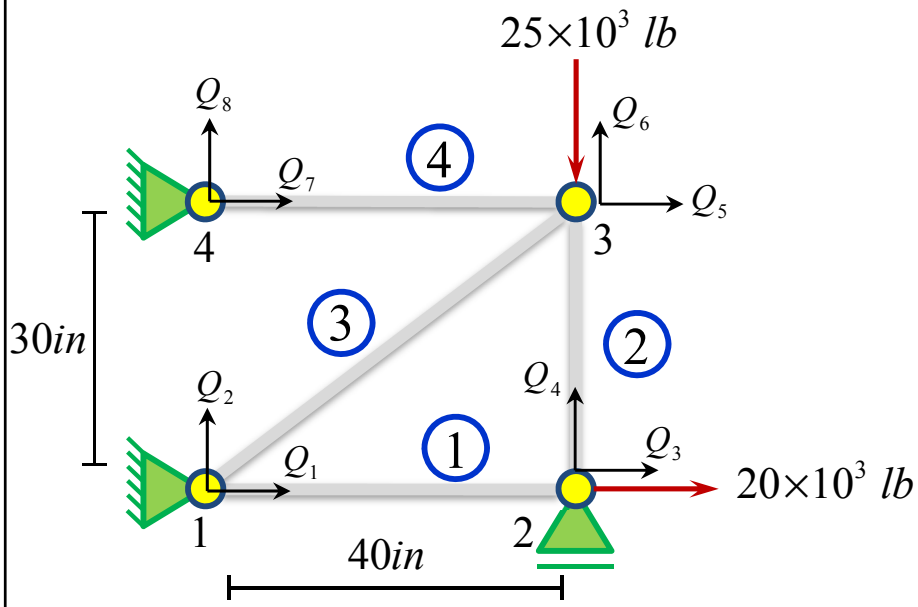
محاسبه تنش:



$$\sigma^{(3)}=\frac{29.5\times10^6}{50}\{-0.8\quad -0.6\quad 0.8\quad 0.6\}\begin{Bmatrix}0\\0\\5.65\times10^{-3}\\-22.25\times10^{-3}\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\5\\6\end{matrix}\Rightarrow\boxed{\sigma^{(3)}=-5208\ psi}\qquad(1.18)$$

$$\sigma^{(4)}=\frac{29.5\times10^6}{40}\{-1\quad 0\quad 1\quad 0\}\begin{Bmatrix}0\\0\\5.65\times10^{-3}\\-22.25\times10^{-3}\end{Bmatrix}\begin{matrix}7\\8\\5\\6\end{matrix}\Rightarrow\boxed{\sigma^{(4)}=4167\ psi}\qquad(1.19)$$

خرپاها (Trusses)



پاسخ مثال 1-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

با استفاده از اطلاعات ذخیره شده در گام اول، واکنش‌های تکیه‌گاهی در درجات آزادی که مربوط به تکیه‌گاه است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

پاسخ مثال 1- محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$(1.7),(1.8)\,\&\,(1.15)\rightarrow(1.20)\quad\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\\R_4\\R_7\\R_8\end{Bmatrix}=\frac{29.5\times10^6}{600}\begin{bmatrix}22.68&5.76&-15&0&-7.68&-5.76&0&0\\5.76&4.32&0&0&-5.76&-4.32&0&0\\0&0&0&20&0&-20&0&0\\0&0&0&0&-15&0&15&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\27.12\\0\\5.65\\-22.25\\0\\0\end{Bmatrix}\times10^{-3}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\quad(1.21)$$

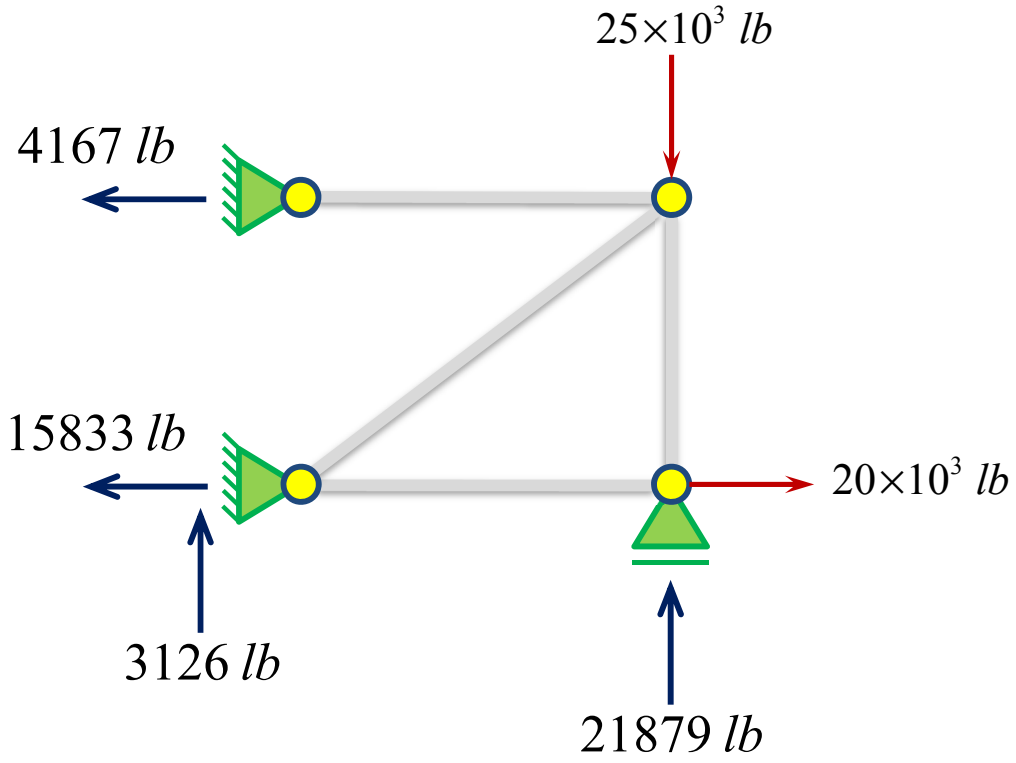
با حل رابطه (1.21) نتیجه می‌شود:

$$(1.21)\quad\Rightarrow\quad\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\\R_4\\R_7\\R_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-15833\\3126\\21879\\-4167\\0\end{Bmatrix}lb\quad(1.22)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:



خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 1-

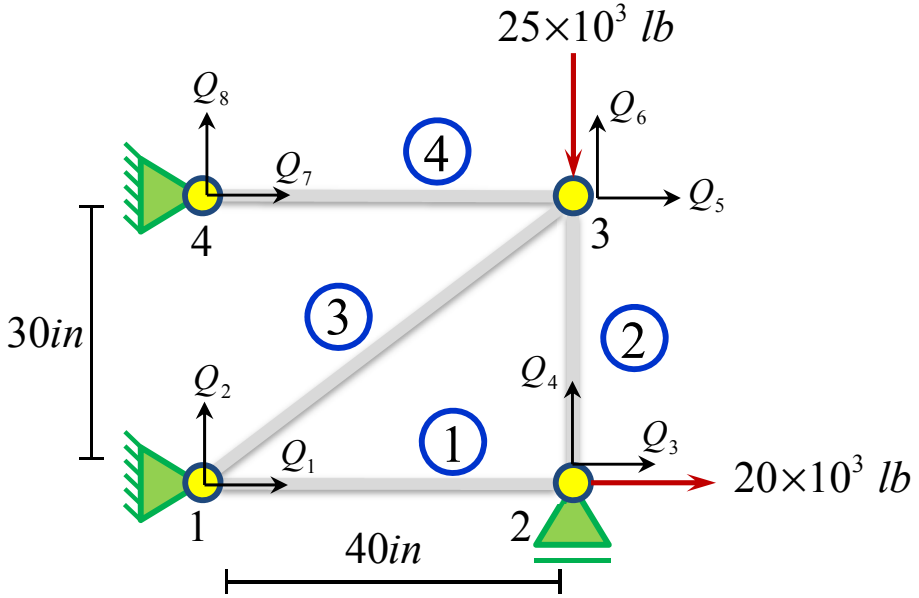
نام فایل برنامه: truss2d.m

نام فایل ورودی: L05EX01.txt

نام فایل خروجی: RL05EX01.txt

L05EX01.txt

```
Next line is problem title      << 2D TRUSS ANALYSIS >>
EXAMPLE 5.1
NN NE NM NDIM NEN NDN
 4  4  1  2    2   2
ND NL NCH NPR NMPC
 5  2  2   2   0
Node#  X    Y
 1     0   0
 2    40   0
 3    40  30
 4     0  30
Elem#  N1  N2  Mat#  Area  TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1      1   2   1     1     0
 2      2   3   1     1     0
 3      1   3   1     1     0
 4      4   3   1     1     0
DOF#  Displacement
 1     0
 2     0
 4     0
 7     0
 8     0
DOF#  Load
 3     20000
 6    -25000
MAT#  PROP1    PROP2
 1    29.5E6   12E-6
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



پاسخ مثال 1-

RL05EX01.txt

Output for Input Data from file L05EX01.txt
EXAMPLE 5.1

Node#	X-Displ	Y-Displ
1	1.3241E-06	-2.6138E-07
2	2.7120E-02	-1.8294E-06
3	5.6507E-03	-2.2247E-02
4	3.4850E-07	0.0000E+00

Elem#	Stress
1	2.0000E+04
2	-2.1875E+04
3	-5.2089E+03
4	4.1671E+03

DOF#	Reaction
1	-1.5833E+04
2	3.1254E+03
4	2.1875E+04
7	-4.1671E+03
8	0.0000E+00

خرپاها (Trusses)

اثرات حرارت و نقص عضو (Defect and Temperature Effects)

بردار بار حرارتی یا نقص عضو در المان دو گرهی در مختصات محلی به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\theta}^e = E_e A_e \varepsilon_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \qquad (21)$$

$\boldsymbol{\theta}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار نیروی حرارتی المان (نقص عضو) در مختصات محلی

که در آن

$$\varepsilon_0 = \alpha \Delta T_e \quad or \quad \varepsilon_0 = \frac{\Delta \ell_e}{\ell_e} \qquad (22)$$

α : ضریب انبساط حرارتی (Coefficient of Thermal Expansion)

ΔT : تغییرات حرارتی (Temperature Gradient)

$\Delta \ell_e$: تغییرشکل ناشی از نقص عضو e اُم (عضو کوتاهتر منفی، عضو با طول بیشتر مثبت)

اثرات حرارت و نقص عضو (Defect and Temperature Effects)

از آنجایی که انرژی بار حرارتی (نقص عضو) در هر دو مختصات محلی و کلی باید یکی باشد در نتیجه:

$$(\mathbf{Q}^e)^T \boldsymbol{\Theta}^e = (\mathbf{q}^e)^T \boldsymbol{\theta}^e \quad (23)$$

$\boldsymbol{\Theta}^e \in \mathbb{R}^4$: بردار نیروی حرارتی (نقص عضو) المان در مختصات کلی

با جایگذاری رابطه (5) در رابطه (23) خواهیم داشت:

$$(5) \rightarrow (23) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{Q}^e)^T \boldsymbol{\Theta}^e = (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\theta}^e \quad (24)$$

از رابطه (24) می‌توان نتیجه گرفت:

$$(24) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta}^e = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\theta}^e \quad (25)$$

با جایگذاری رابطه (21) در رابطه (25) بردار نیروی حرارتی (نقص عضو) المان در مختصات کلی به دست می‌آید:

$$(6)\,\&\,(21) \rightarrow (25) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta}^e = E_e A_e \varepsilon_0 \begin{Bmatrix} -\ell \\ -m \\ \ell \\ m \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{matrix} \quad (26)$$

اثرات حرارت و نقص عضو (Defect and Temperature Effects)

از آنجایی که اثرات حرارت (نقص عضو) به صورت کرنش اولیه ظاهر می‌شود از این رو تنش ایجاد شده برابر است با:

$$\sigma^e = E_e(\varepsilon^e - \varepsilon_0) \qquad (27)$$

با جایگذاری روابط (20) و (22) در رابطه (27) خواهیم داشت:

$$(20)\,\&\,(22) \rightarrow (27) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma^e = E_e\left[\frac{1}{\ell_e}\{-\ell \quad -m \quad \ell \quad m\}\begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} - \alpha\Delta T_e\right] \qquad (28)$$

(تنش در المان تحت اثر حرارت)

$$\sigma^e = \frac{E_e}{\ell_e}\left[\{-\ell \quad -m \quad \ell \quad m\}\begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} - \Delta\ell_e\right] \qquad (29)$$

(تنش در المان تحت اثر نقص عضو)

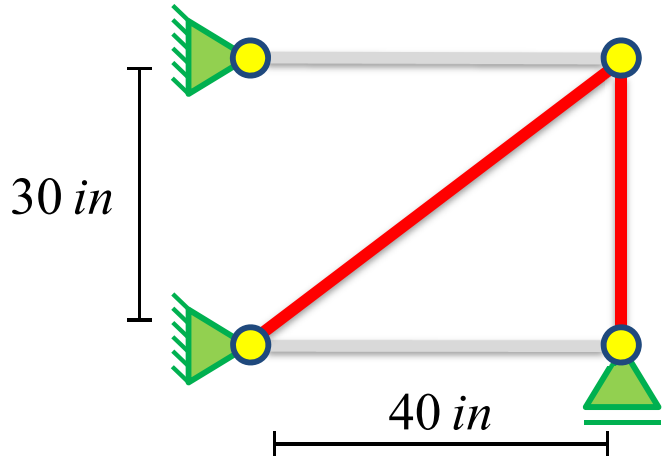
خرپاها (Trusses)

مثال 2- در خرپای نشان داده شده دمای دو عضو مورب و قائم به اندازه $\Delta T = 50^{oF}$ افزایش می‌یابد مطلوب است تعیین:

الف- جابجایی گرهی.

ب- تنش ایجاد شده در هر عضو.

ج- عکس العمل‌های تکیه‌گاهی.



$$A = 1\,in^2$$

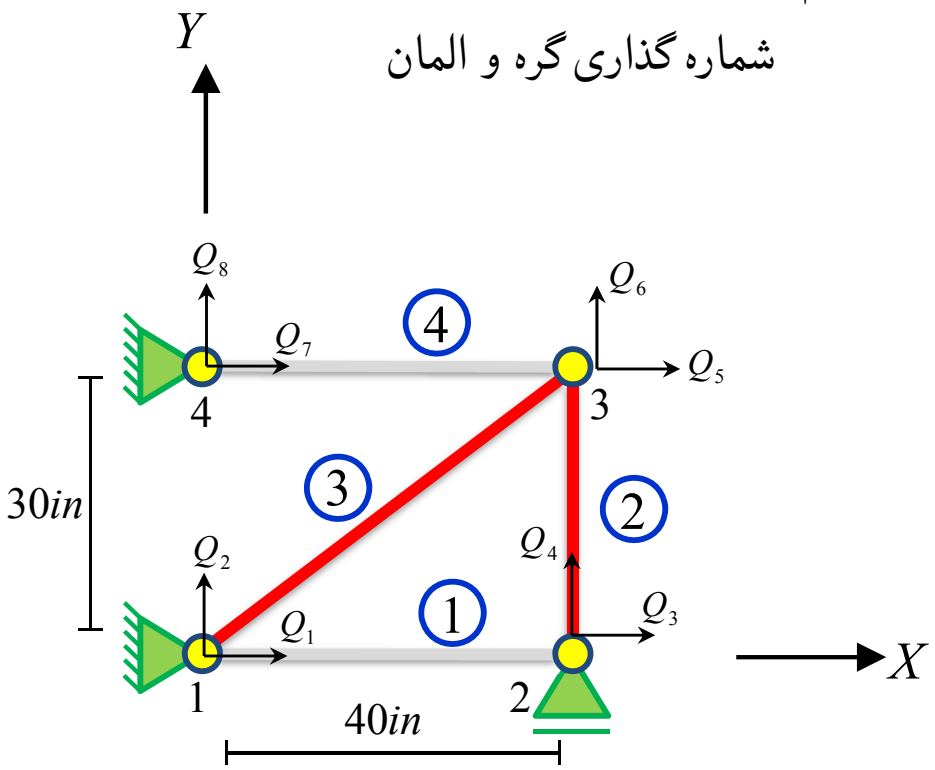
$$E = 29.5\times10^6\ lb/in^2$$

$$\alpha = \frac{1}{150\times10^3}\frac{1}{F^o}$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-

تقسیم‌بندی خرپا به المان‌های مختلف و
شماره گذاری گره و المان



Node No.	Node Coordinate	
	X	Y
1	0	0
2	40	0
3	40	30
4	0	30

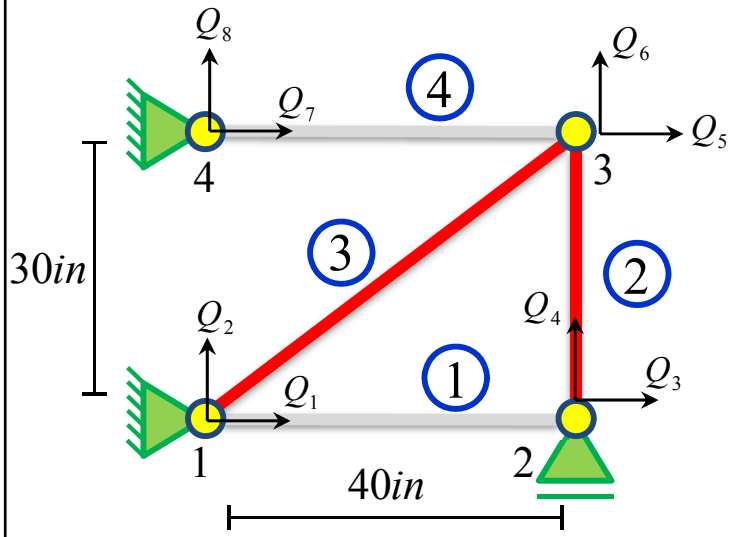
$$n_{DOF} = 8 \qquad n_e = 4$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_7 = Q_8 = 0 : BC$$

Element No.	i	j	$\ell_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$	$\ell = (X_j - X_i)/\ell_e$	$m = (Y_j - Y_i)/\ell_e$
1	1	2	$\sqrt{(40-0)^2 + (0-0)^2} = 40$	$\frac{40-0}{40} = 1$	$\frac{0-0}{40} = 0$
2	2	3	$\sqrt{(40-40)^2 + (30-0)^2} = 30$	$\frac{40-40}{30} = 0$	$\frac{30-0}{30} = 1$
3	1	3	$\sqrt{(40-0)^2 + (30-0)^2} = 50$	$\frac{40-0}{50} = 0.8$	$\frac{30-0}{50} = 0.6$
4	4	3	$\sqrt{(40-0)^2 + (30-30)^2} = 40$	$\frac{40-0}{40} = 1$	$\frac{30-30}{40} = 0$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-



تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (13)

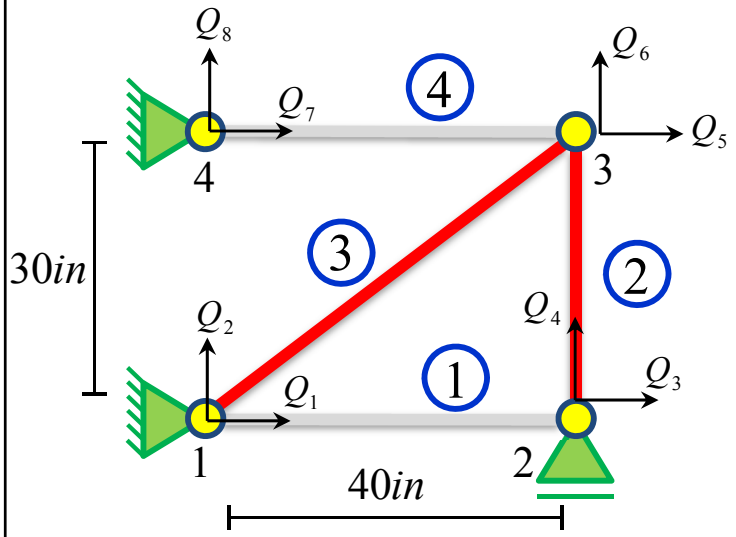
$$(13) \Rightarrow \mathbf{K}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c} \begin{matrix} 2i-1 & 2i & 2j-1 & 2j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{40} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{30} \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (2.2)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-



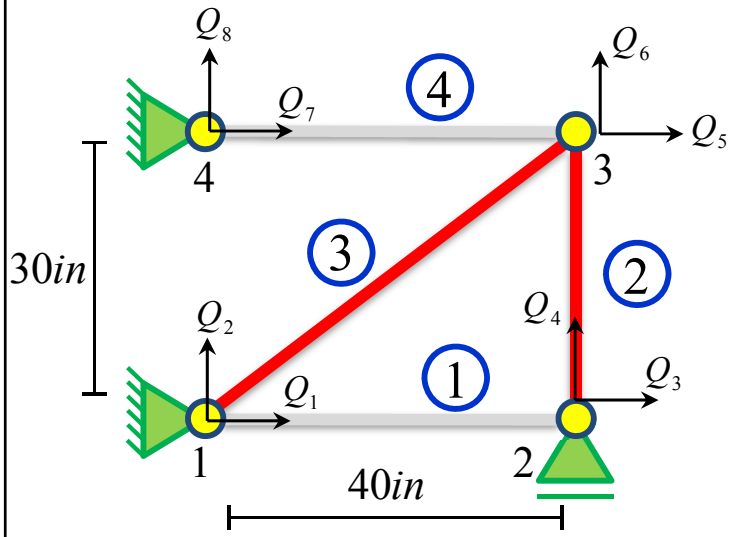
تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (13)

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{1\times(29.5\times10^{6})}{50}\begin{matrix}\\1\\2\\5\\6\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1 & 2 & 5 & 6\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48\\0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36\\-0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48\\-0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36\end{bmatrix}\end{matrix} \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \frac{1\times(29.5\times10^{6})}{40}\begin{matrix}\\7\\8\\5\\6\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}7 & 8 & 5 & 6\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{matrix} \qquad (2.4)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-



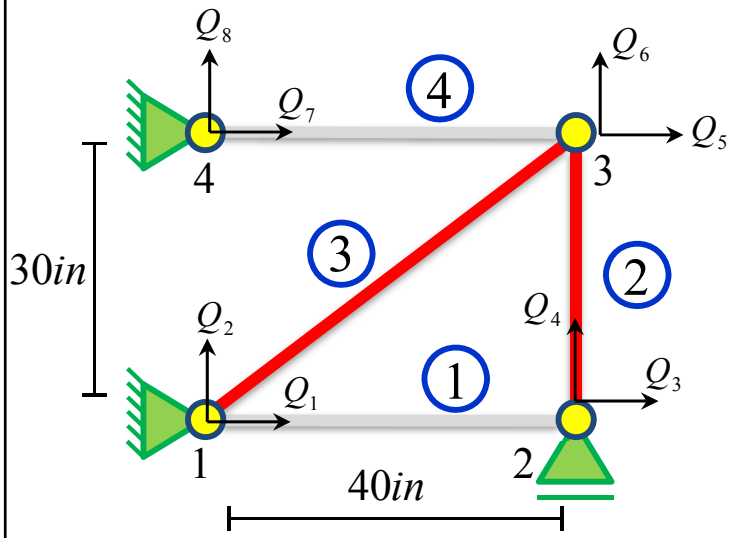
تشکیل ماتریس سختی کل خرپا به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{8\times 8} = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{K}^e \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{K} = \frac{29.5\times 10^6}{600}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (2.5)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-

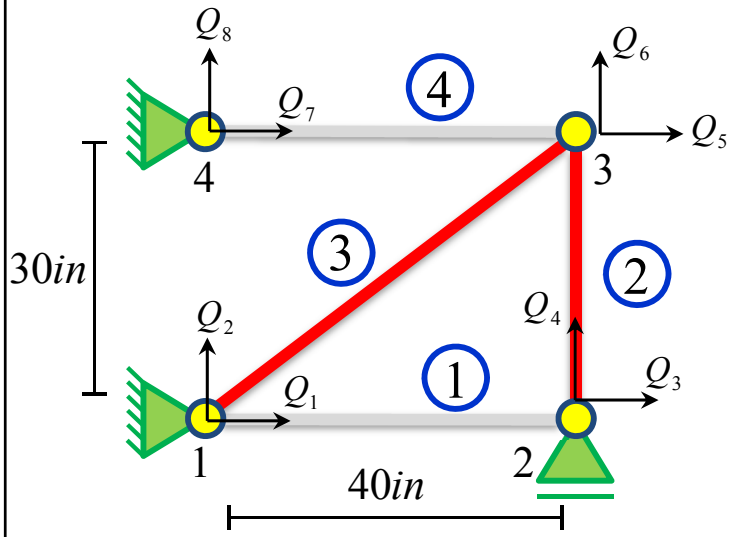


تشکیل بردار نیروهای گرهی ناشی از حرارت از رابطه (26):

$$\boldsymbol{\Theta}^{(3)} = \frac{(29.5\times10^{6})\times1\times50}{150\times10^{3}}\begin{Bmatrix}-0.8\\-0.6\\0.8\\0.6\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\5\\6\end{matrix} \qquad (2.7)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-

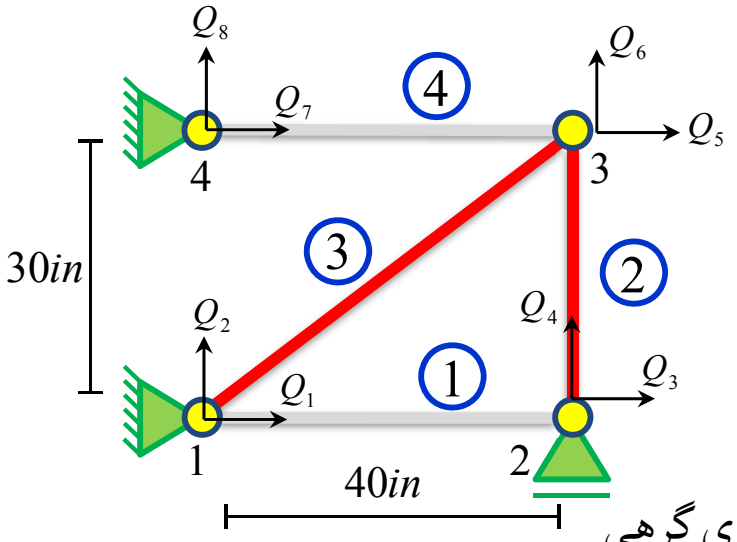


تشکیل بردار نیروهای گرهی کل خرپا

$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^8 = \frac{(29.5\times10^6)\times1\times50}{150\times10^3}\times\begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ 0 \\ -1 \\ 0.8 \\ 1.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (2.8)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-



اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

$$Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_7 = Q_8 = 0$$

گام اول: ذخیره‌کردن سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و بردار نیروهای گرهی

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{28} \\ K_{41} & K_{42} & \cdots & K_{48} \\ K_{71} & K_{72} & \cdots & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} = \frac{29.5\times10^6}{600} \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} = \frac{(29.5\times10^6)\times1\times50}{150\times10^3} \times \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

پاسخ مثال 2- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

گام دوم: سطر و ستون‌های 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از درایه‌های بردار نیروهای گرهی کل اصلاح گردد:

$$\bar{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{3\times 3} = \frac{29.5\times 10^{6}}{600}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (2.11)$$

پاسخ مثال 2- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

گام دوم: سطر و ستون‌های 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از درایه‌های بردار نیروهای گرهی کل اصلاح گردد:

$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^8 = \frac{(29.5\times10^6)\times1\times50}{150\times10^3}\times\begin{Bmatrix} -0.8 & 1 \\ -0.6 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0.8 & 5 \\ 1.6 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \end{Bmatrix} \qquad (2.12)$$

پاسخ مثال 2- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

گام دوم: سطر و ستون‌های 1، 2، 4، 7 و 8 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطرهای 1، 2، 4، 7 و 8 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از درایه‌های بردار نیروهای گرهی کل اصلاح گردد:

$$(L04-94) \Rightarrow \boxed{\bar{F}_i = F_i - (K_{i1}\alpha_1 + K_{i2}\alpha_2 + K_{i4}\alpha_4 + K_{i7}\alpha_7 + K_{i8}\alpha_8) \qquad i = 3,5,6} \qquad (2.13)$$

چون تمامی شرایط مرزی مقادیر صفر دارند از این رو:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{F}_i = F_i \qquad i = 3,5,6} \qquad (2.14)$$

$$(L04-88) \Rightarrow \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{F}} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 22.68 & 5.76 \\ 0 & 5.76 & 24.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.16 \\ 0.32 \end{Bmatrix}} \qquad (2.15)$$

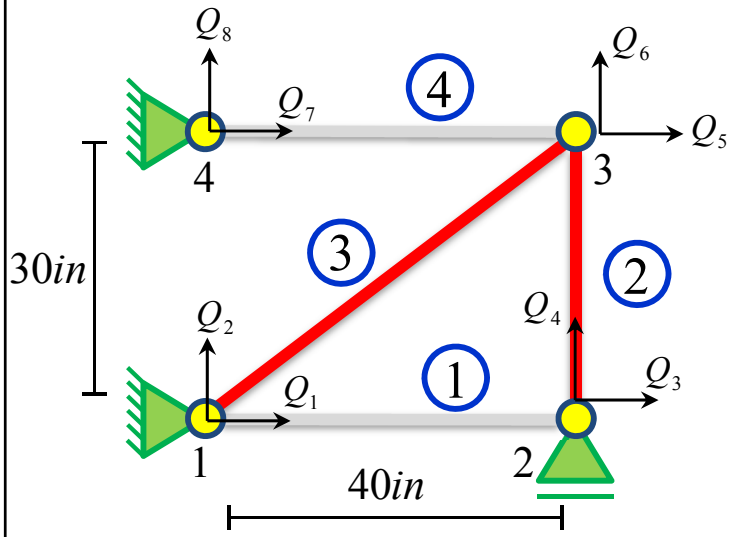
پاسخ مثال 2- اعمال شرایط مرزی به روش حذفی

از حل معادله (2.15) خواهیم داشت:

$$(2.15) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.003951 \\ 0.01222 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}\, in \qquad (2.16)$$

در نتیجه بردار جابجایی گرهی کل به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(2.16) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.003951 \\ 0.01222 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} in \qquad (2.17)$$



پاسخ مثال 2-

محاسبه تنش:

$$(28) \Rightarrow \sigma^e = E_e \left(\frac{1}{\ell_e} \{ -\ell \quad -m \quad \ell \quad m \} \begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2i-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} - \alpha \Delta T_e \right)$$

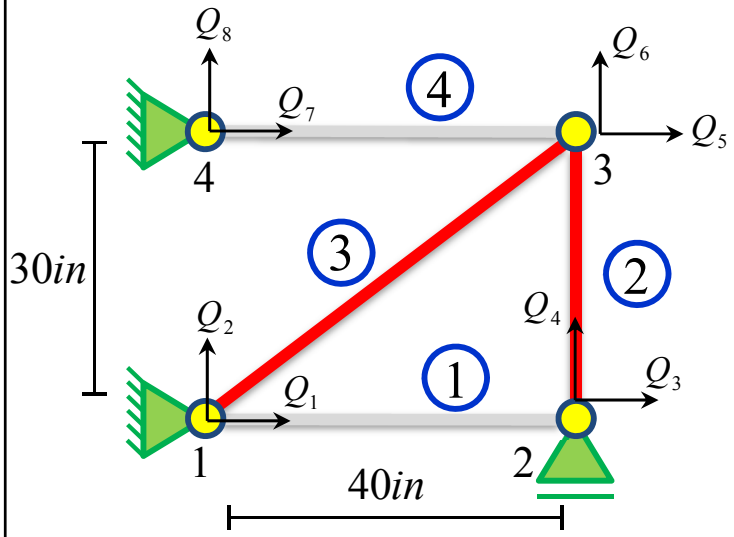
$$\sigma^{(1)} = 29.5\times10^6 \left(\frac{1}{40} \{ -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} - \frac{0}{150\times10^3} \right) \Rightarrow \boxed{\sigma^{(1)} = 0} \quad (2.18)$$

$$\boxed{\sigma^{(2)} = 2183\ psi} \quad (2.19)$$

خرپاها (Trusses)

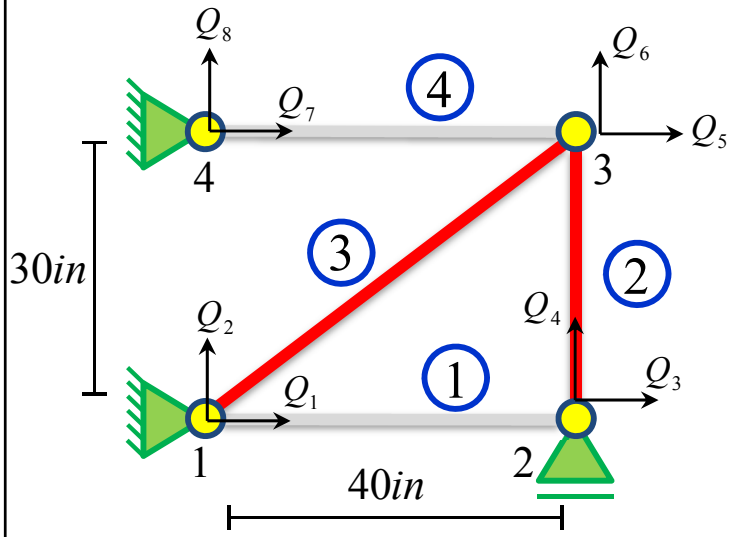
پاسخ مثال 2-

محاسبه تنش:



$$\sigma^{(3)} = 29.5\times10^{6}\left(\frac{1}{50}\{-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6\}\begin{Bmatrix}0\\0\\0.003951\\0.01222\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\5\\6\end{matrix} - \frac{50}{150\times10^{3}}\right) \Rightarrow \boxed{\sigma^{(3)} = -3643\ psi} \qquad (2.20)$$

$$\sigma^{(4)} = 29.5\times10^{6}\left(\frac{1}{40}\{-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}\begin{Bmatrix}0\\0\\0.003951\\0.01222\end{Bmatrix}\begin{matrix}7\\8\\5\\6\end{matrix} - \frac{0}{150\times10^{3}}\right) \Rightarrow \boxed{\sigma^{(4)} = 2914\ psi} \qquad (2.21)$$



پاسخ مثال 2-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

با استفاده از اطلاعات ذخیره شده در گام اول، واکنش‌های تکیه‌گاهی در درجات آزادی که مربوط به تکیه‌گاه است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(L04-95) \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{28} \\ K_{41} & K_{42} & \cdots & K_{48} \\ K_{71} & K_{72} & \cdots & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} \qquad (2.22)$$

پاسخ مثال 2- محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$(2.9),(2.10)\,\&\,(2.17)\rightarrow(2.22)\quad\Rightarrow \tag{2.23}$$

$$\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\\R_4\\R_7\\R_8\end{Bmatrix}=\frac{29.5\times10^6}{600}\begin{bmatrix}22.68&5.76&-15&0&-7.68&-5.76&0&0\\5.76&4.32&0&0&-5.76&-4.32&0&0\\0&0&0&20&0&-20&0&0\\0&0&0&0&-15&0&15&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0.003951\\0.01222\\0\\0\end{Bmatrix}-\frac{(29.5\times10^6)\times1\times50}{150\times10^3}\times\begin{Bmatrix}-0.8\\-0.6\\-1\\0\\0\end{Bmatrix}$$

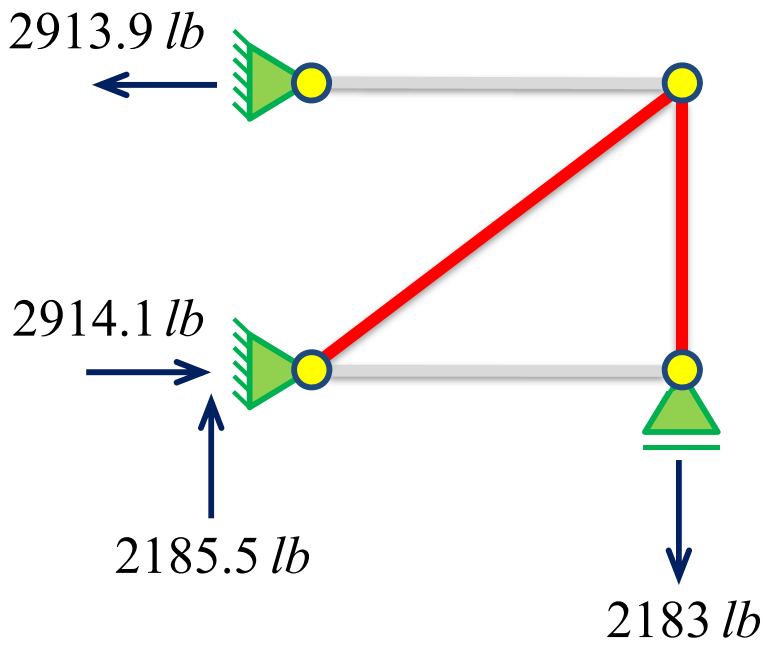
با حل رابطه (2.23) نتیجه می‌شود:

$$(2.23)\quad\Rightarrow\quad\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\\R_4\\R_7\\R_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2914.1\\2185.5\\-2183\\-2913.9\\0\end{Bmatrix}lb \tag{2.24}$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:



خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 2-

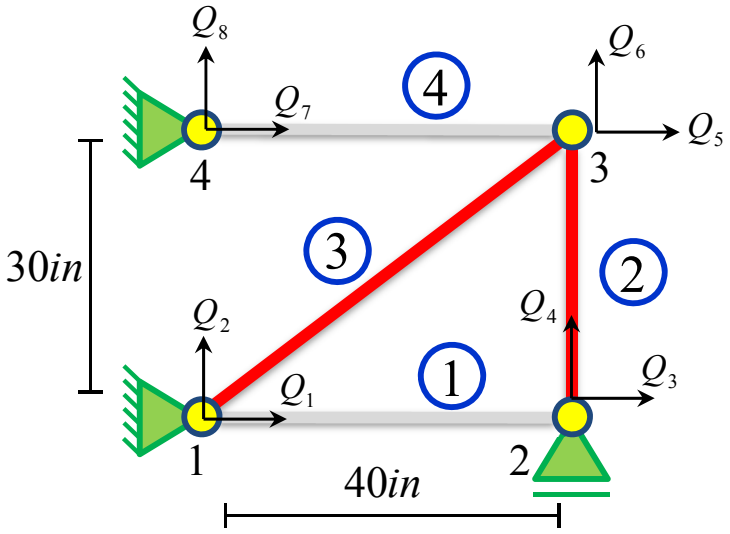
نام فایل برنامه: truss2d.m

نام فایل ورودی: L05EX02.txt

نام فایل خروجی: RL05EX02.txt

L05EX02.txt

```
Next line is problem title      << 2D TRUSS ANALYSIS >>
EXAMPLE 5.2
NN NE NM NDIM NEN NDN
 4  4  1  2    2   2
ND NL NCH NPR NMPC
 5  0  2   2   0
Node#  X    Y
 1     0   0
 2    40   0
 3    40  30
 4     0  30
Elem#  N1  N2  Mat#  Area  TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1      1   2   1     1     0
 2      2   3   1     1     50
 3      1   3   1     1     50
 4      4   3   1     1     0
DOF#  Displacement
 1     0
 2     0
 4     0
 7     0
 8     0
DOF#  Load
MAT#  PROP1    PROP2
 1    29.5E6  6.6667E-6
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



پاسخ مثال 2-

RL05EX02.txt

Output for Input Data from file L05EX02.txt
EXAMPLE 5.2

Node#	X-Displ	Y-Displ
1	-2.4365E-07	-1.8274E-07
2	-2.4365E-07	1.8274E-07
3	3.9507E-03	1.2222E-02
4	2.4365E-07	0.0000E+00

Elem#	Stress
1	0.0000E+00
2	2.1851E+03
3	-3.6418E+03
4	2.9134E+03

DOF#	Reaction
1	2.9134E+03
2	2.1851E+03
4	-2.1851E+03
7	-2.9134E+03
8	0.0000E+00

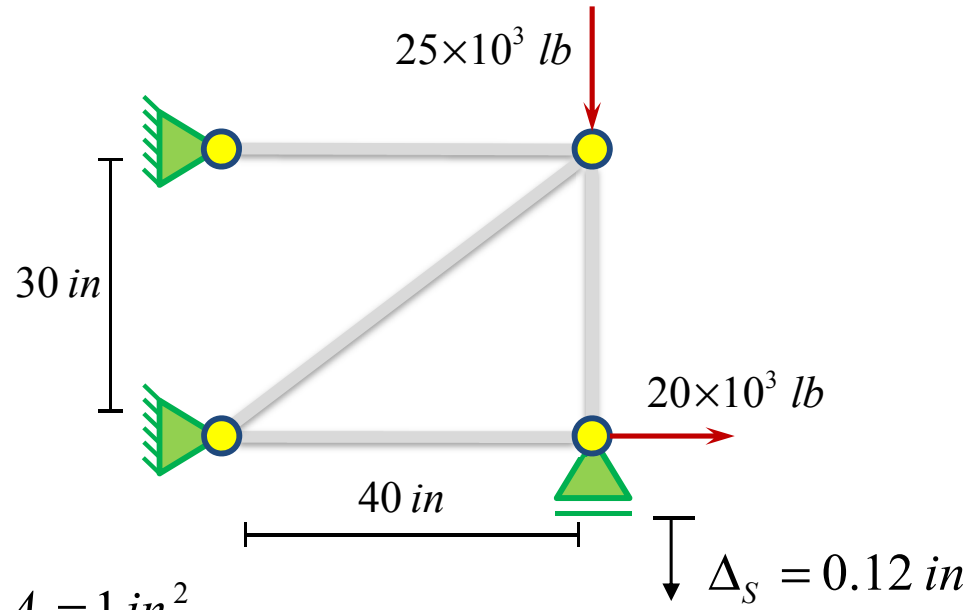
خرپاها (Trusses)

مثال 3- در خرپای نشان داده شده در یکی از تکیه‌گاه‌ها نشست وجود دارد مطلوب است تعیین:

الف- جابجایی گرهی.

ب- تنش ایجاد شده در هر عضو.

ج- عکس العمل‌های تکیه‌گاهی.



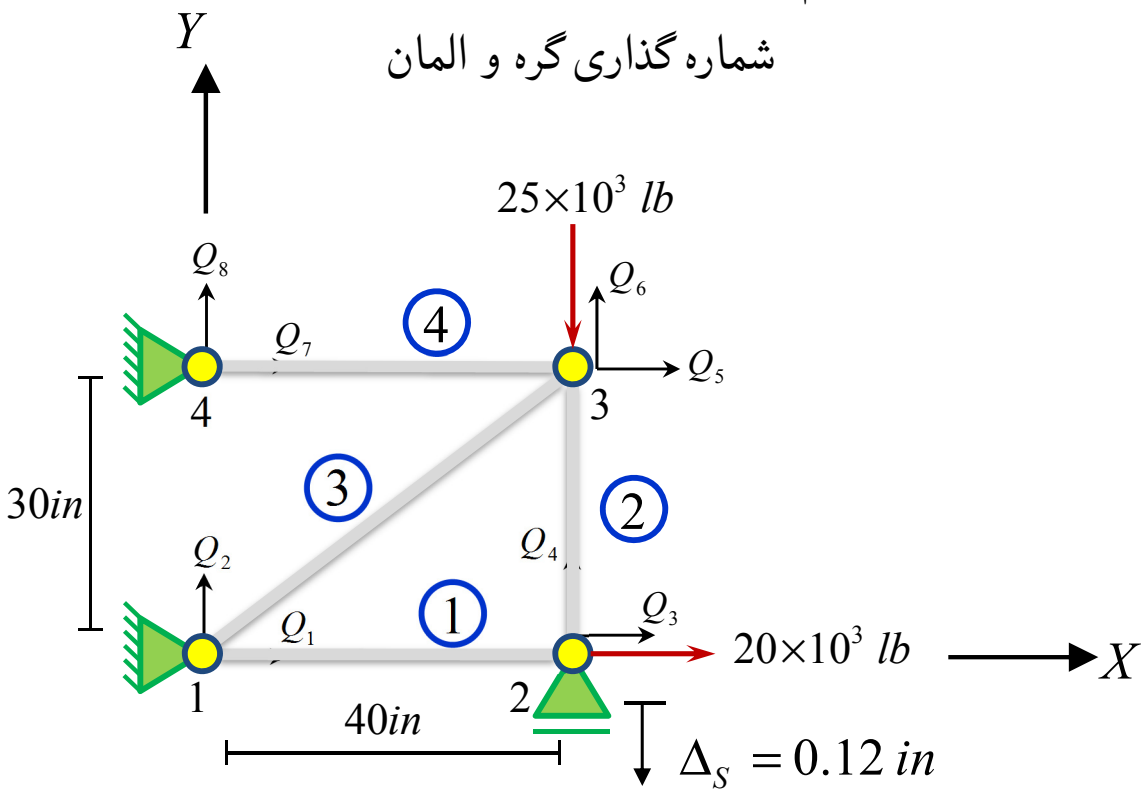
$A = 1\ in^2$

$E = 29.5\times10^6\ lb/in^2$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-

تقسیم‌بندی خرپا به المان‌های مختلف و
شماره گذاری گره و المان



Node No.	Node Coordinate	
	X	Y
1	0	0
2	40	0
3	40	30
4	0	30

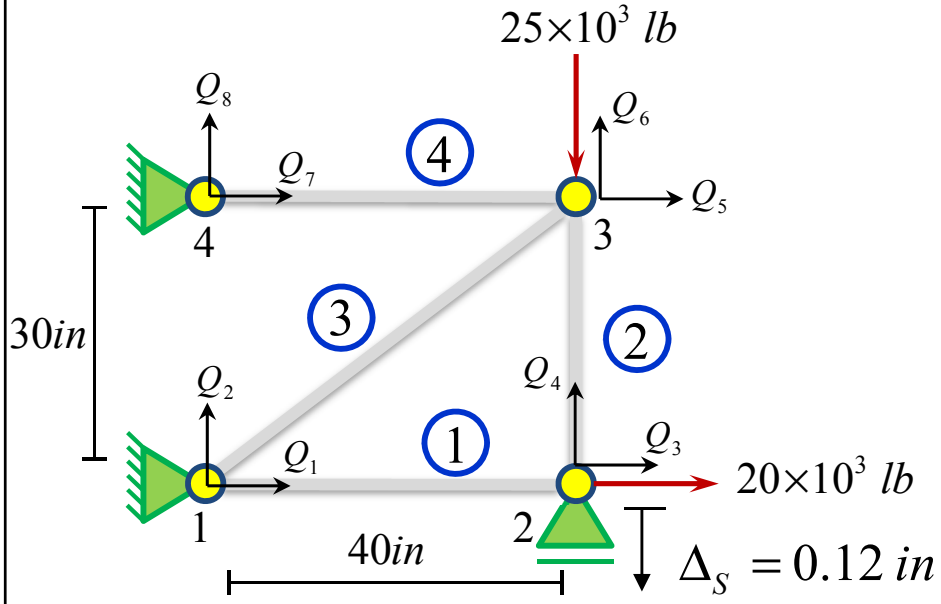
$n_{DOF} = 8$ $n_e = 4$

$:BC$

Element No.	i	j	$\ell_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$	$\ell = (X_j - X_i)/\ell_e$	$m = (Y_j - Y_i)/\ell_e$
1	1	2	$\sqrt{(40-0)^2+(0-0)^2} = 40$	$\frac{40-0}{40} = 1$	$\frac{0-0}{40} = 0$
2	2	3	$\sqrt{(40-40)^2+(30-0)^2} = 30$	$\frac{40-40}{30} = 0$	$\frac{30-0}{30} = 1$
3	1	3	$\sqrt{(40-0)^2+(30-0)^2} = 50$	$\frac{40-0}{50} = 0.8$	$\frac{30-0}{50} = 0.6$
4	4	3	$\sqrt{(40-0)^2+(30-30)^2} = 40$	$\frac{40-0}{40} = 1$	$\frac{30-30}{40} = 0$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-



تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (13)

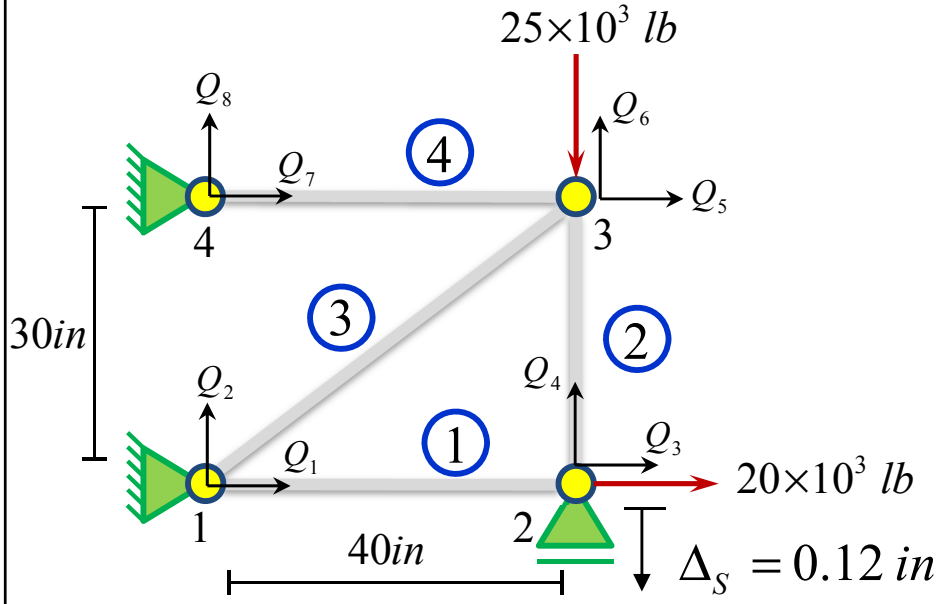
$$(13) \Rightarrow \mathbf{K}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c} \begin{matrix} 2i-1 & 2i & 2j-1 & 2j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{40} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{30} \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (3.2)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-



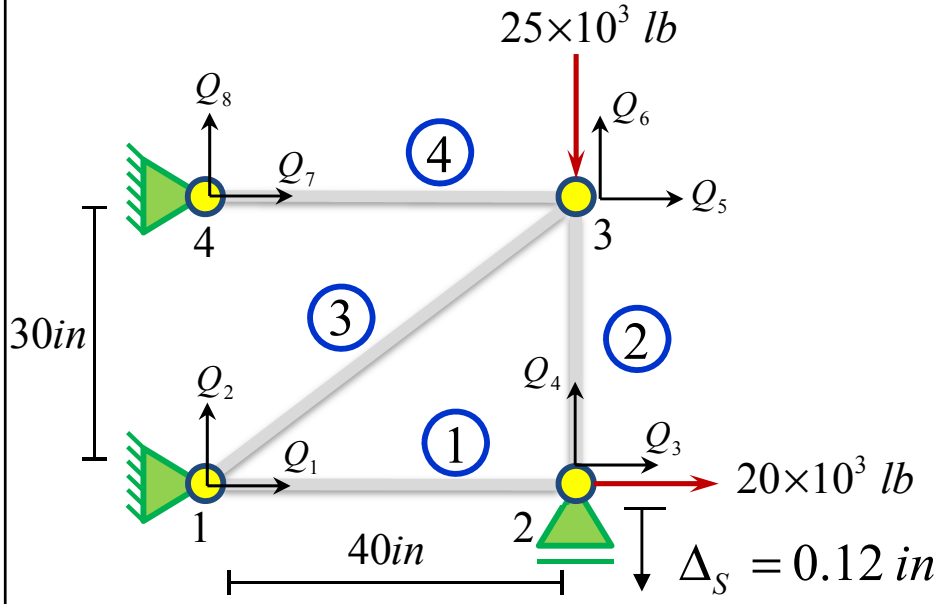
تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (13)

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{50}\begin{matrix}\\ 1\\ 2\\ 5\\ 6\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1 & 2 & 5 & 6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48\\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36\\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48\\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36\end{bmatrix}\end{matrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \frac{1\times(29.5\times10^6)}{40}\begin{matrix}\\ 7\\ 8\\ 5\\ 6\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}7 & 8 & 5 & 6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{matrix} \quad (3.4)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-



تشکیل ماتریس سختی کل خرپا به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

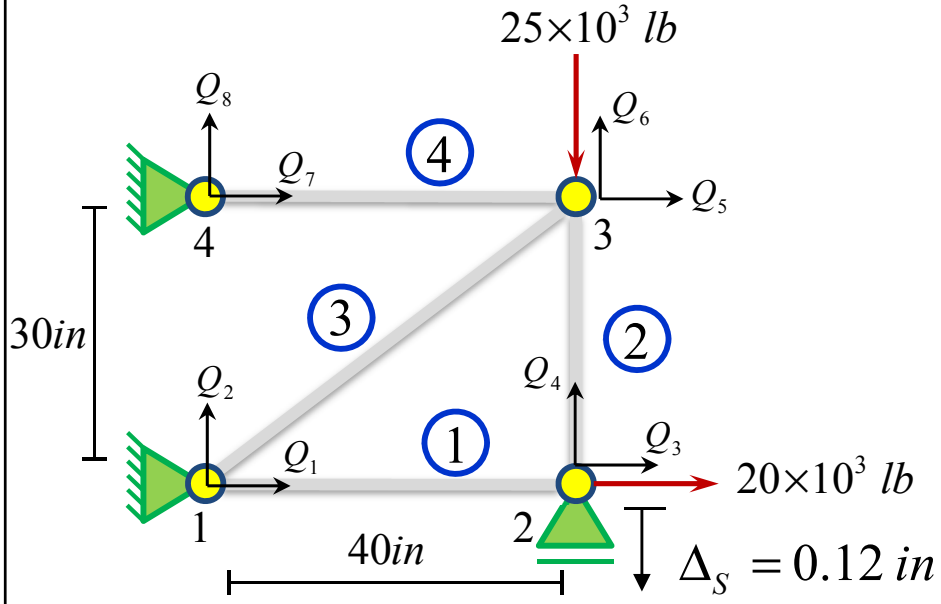
$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{8\times8} = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{K}^e \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{K} = \frac{29.5\times10^6}{600}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\
5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\
-15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\
-7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\
-5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}
\end{array} \qquad (3.5)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-

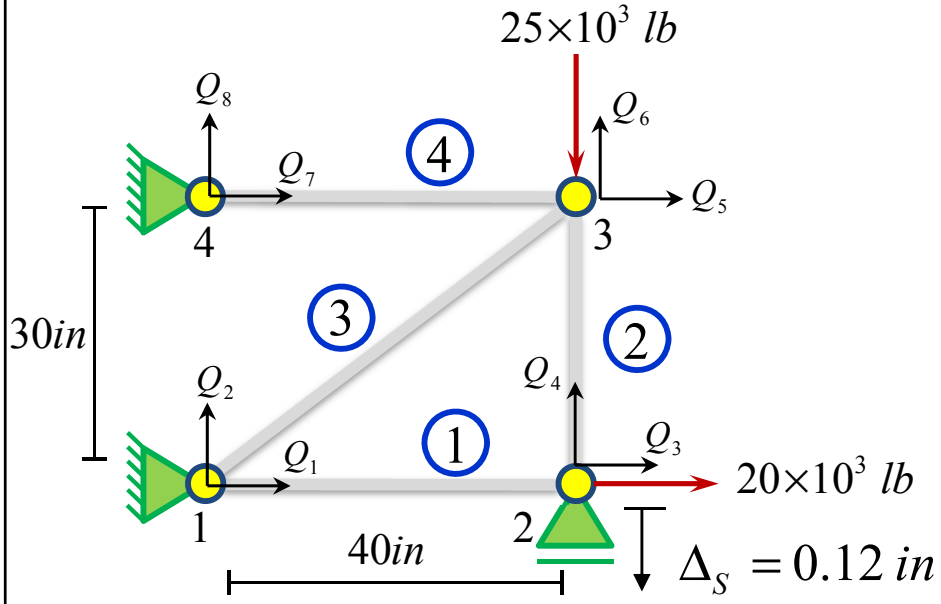
تشکیل بردار نیروهای گرهی کل خرپا



$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^8 = 10^3 \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (3.6)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-



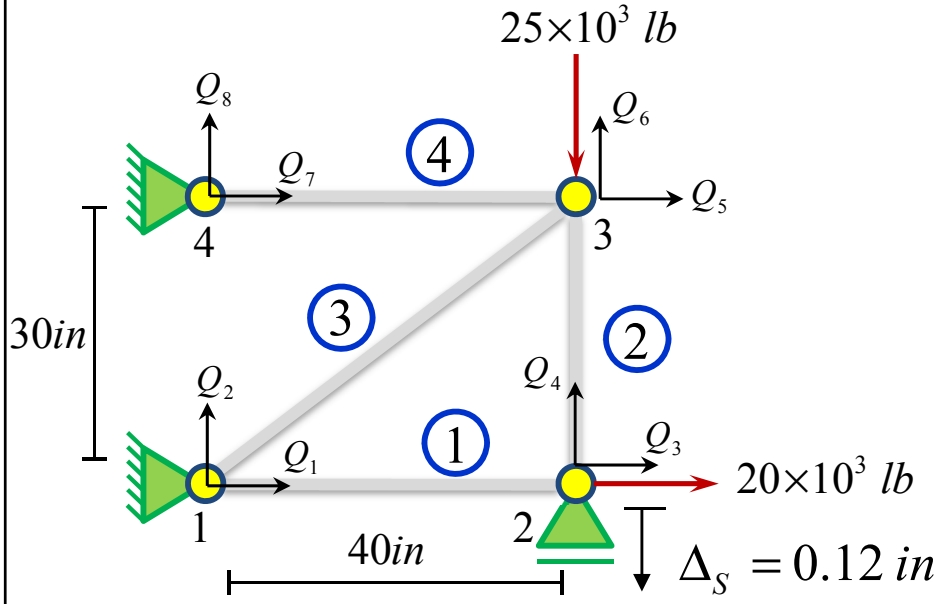
اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$$C = \frac{29.5\times10^6}{600}\times(24.32\times10^4) \qquad (3.7)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-



اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

$$Q_1 = Q_2 = Q_7 = Q_8 = 0 \quad , \quad Q_4 = -0.12$$

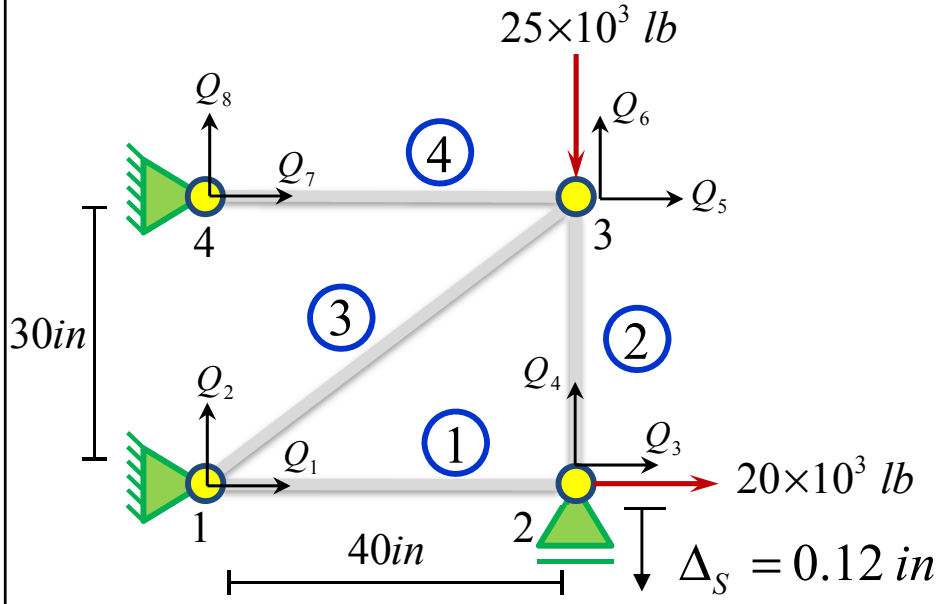
گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$(3.5)\ \&\ (3.7) \quad \Rightarrow$

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{29.5\times10^6}{600}\begin{bmatrix} 22.68+24.32\times10^4 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32+24.32\times10^4 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20+24.32\times10^4 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15+24.32\times10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0+24.32\times10^4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (3.8)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-



اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

$$Q_1 = Q_2 = Q_7 = Q_8 = 0 \quad , \quad Q_4 = -0.12$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$(3.6)\ \&\ (3.7) \Rightarrow$

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} 0+C\alpha_1 \\ 0+C\alpha_2 \\ 20\times10^3 \\ 0+C\alpha_4 \\ 0 \\ -25\times10^3 \\ 0+C\alpha_7 \\ 0+C\alpha_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0+C(0) \\ 0+C(0) \\ 20\times10^3 \\ \\ \\ 0 \\ -25\times10^3 \\ 0+C(0) \\ 0+C(0) \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20\times10^3 \\ -1.4349\times10^9 \\ 0 \\ -25\times10^3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad (3.9)$$

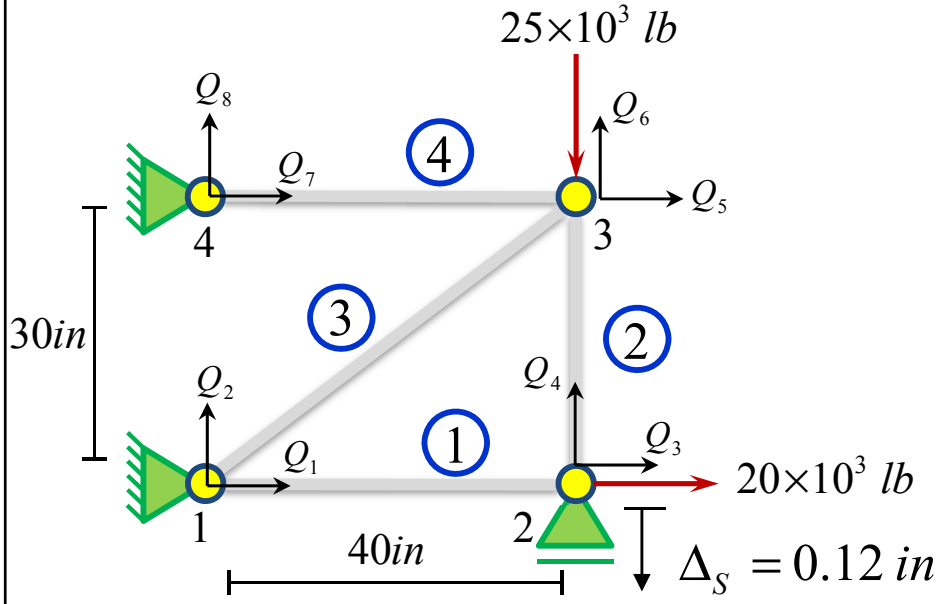
پاسخ مثال 3-

معادله تعادل به صورت زیر نوشته و حل می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}=(\bar{\mathbf{K}})^{-1}\bar{\mathbf{F}} \quad \overset{(3.8)\&(3.9)}{\Rightarrow} \quad \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.2053\times10^{-7} \\ -1.4949\times10^{-6} \\ 0.027118 \\ -0.120000596 \\ 0.032317 \\ -0.12725 \\ 1.9931\times10^{-6} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.10)$$

پاسخ مثال 3-

محاسبه تنش:



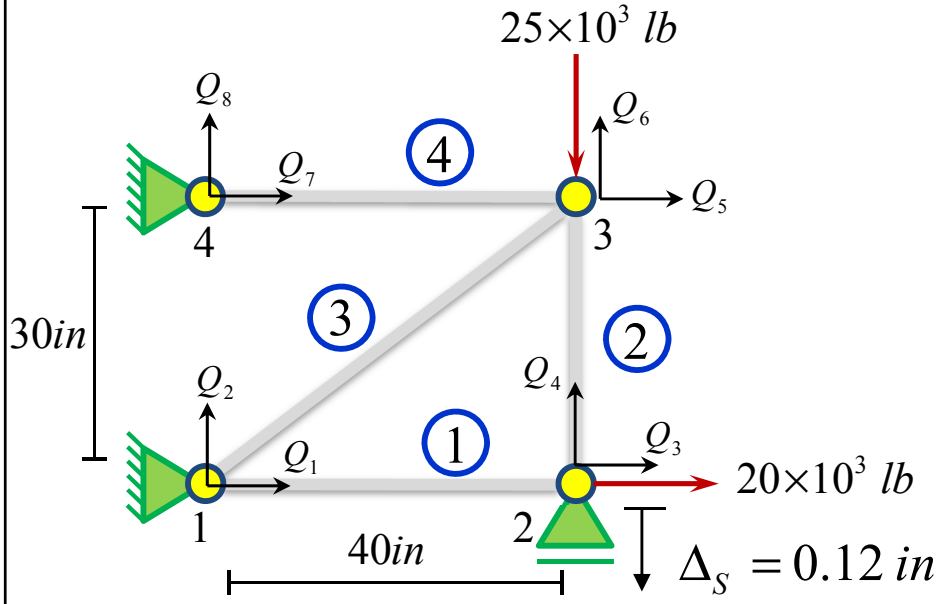
$$(20) \Rightarrow \boxed{\sigma^{(e)} = \frac{E_e}{\ell_e}\{-\ell \quad -m \quad \ell \quad m\}\begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix}}$$

$$\sigma^{(1)} = \frac{29.5\times10^6}{40}\{-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}\begin{Bmatrix} -3.2053\times10^{-7} \\ -1.4949\times10^{-6} \\ 0.027118 \\ -0.120000596 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(1)} = 20000\ psi} \quad (3.11)$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{29.5\times10^6}{30}\{0 \quad 1 \quad 0 \quad -1\}\begin{Bmatrix} 0.027118 \\ -0.120000596 \\ 0.032317 \\ -0.12725 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(2)} = 7125.5\ psi} \quad (3.12)$$

پاسخ مثال 3-

محاسبه تنش:

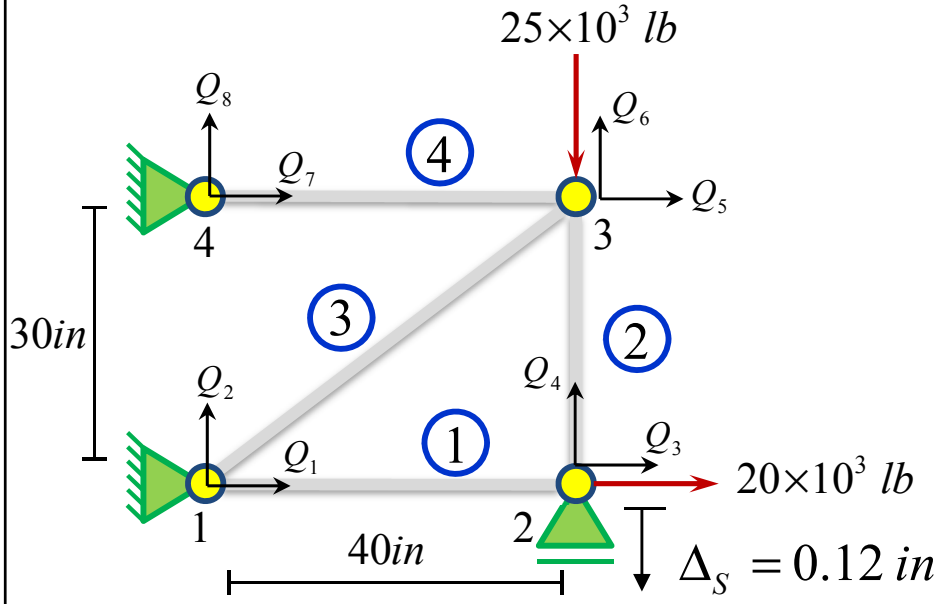


$$\sigma^{(3)} = -29791\ psi \qquad (3.13)$$

$$\sigma^{(4)} = \frac{29.5\times10^6}{40}\{-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}\begin{Bmatrix} 1.9931\times10^{-6} \\ 0 \\ 0.032317 \\ -0.12725 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \Rightarrow \sigma^{(4)} = 23833\ psi \qquad (3.14)$$

پاسخ مثال 3-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:



(3.15) $\Rightarrow$

$$R_1 = -C\left(Q_1 - \alpha_1\right) = -\frac{29.5\times24.32\times10^{10}}{600}\left(-3.2053\times10^{-7} - 0\right) \Rightarrow \boxed{R_1 = 3832.7\ lb} \quad (3.16)$$

$$R_2 = -C\left(Q_2 - \alpha_2\right) = -\frac{29.5\times24.32\times10^{10}}{600}\left(-1.4949\times10^{-6} - 0\right) \Rightarrow \boxed{R_2 = 17875\ lb} \quad (3.17)$$

$$R_4 = -C\left(Q_4 - \alpha_4\right) = -\frac{29.5\times24.32\times10^{10}}{600}\left(-0.120000596 - (-0.12)\right) \Rightarrow \boxed{R_4 = 7125.5\ lb} \quad (3.18)$$

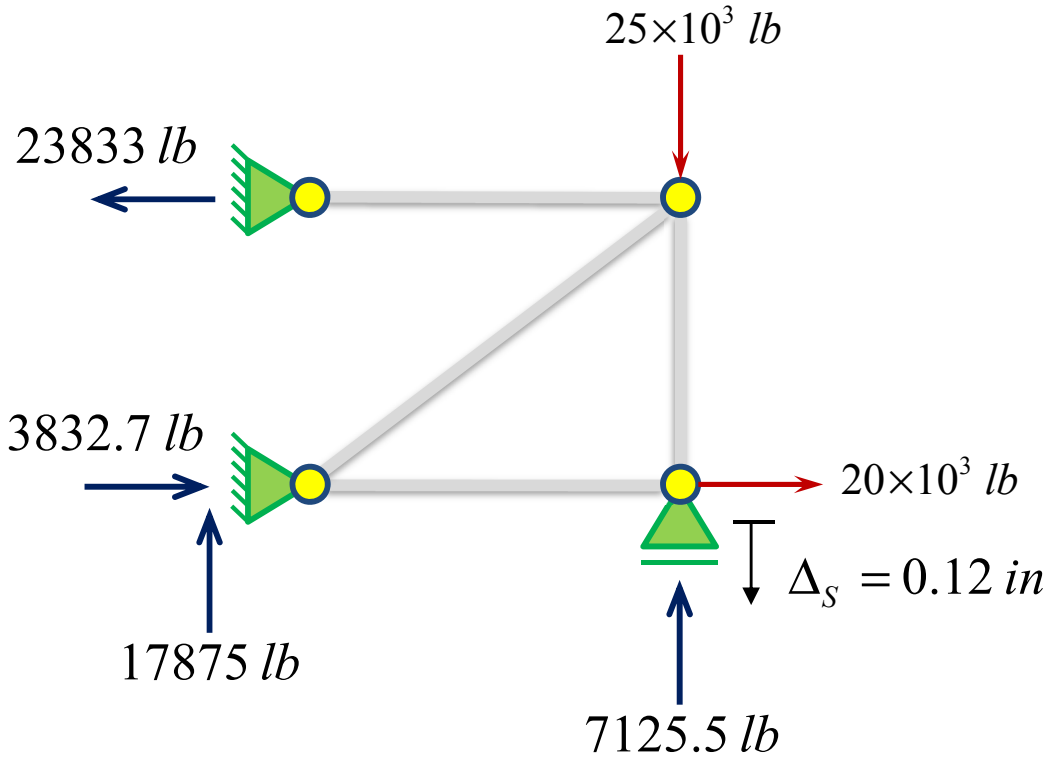
$$\boxed{R_7 = -23833\ lb} \quad (3.19)$$

$$R_8 = -C\left(Q_8 - \alpha_8\right) = -\frac{29.5\times24.32\times10^{10}}{600}\left(0 - 0\right) \Rightarrow \boxed{R_8 = 0} \quad (3.20)$$

خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:



خرپاها (Trusses)

پاسخ مثال 3-

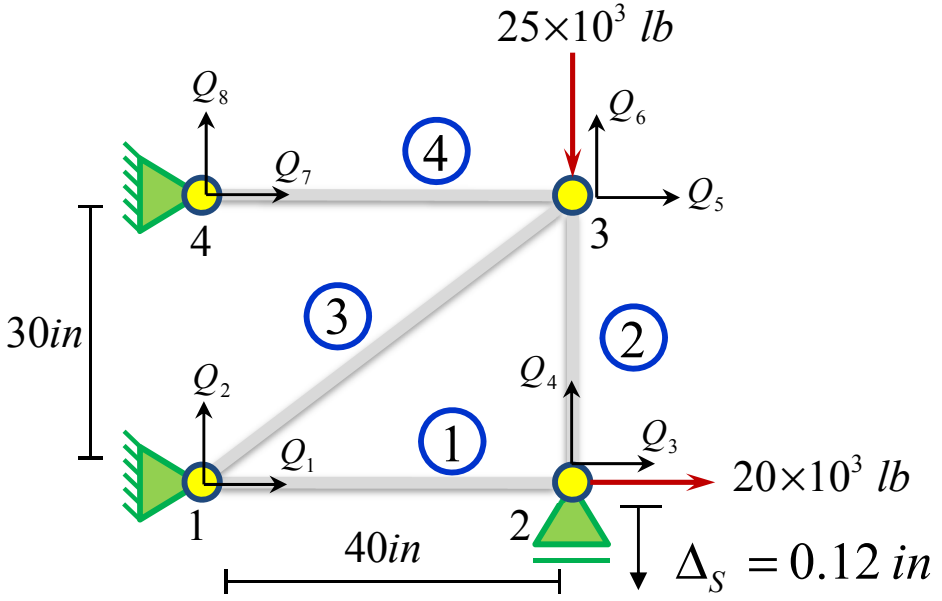
نام فایل برنامه: truss2d.m

نام فایل ورودی: L05EX03.txt

نام فایل خروجی: RL05EX03.txt

L05EX03.txt

```
Next line is problem title      << 2D TRUSS ANALYSIS >>
EXAMPLE 5.3
NN NE NM NDIM NEN NDN
 4  4  1  2    2   2
ND NL NCH NPR NMPC
 5  2  2   2   0
Node#  X    Y
 1     0   0
 2    40   0
 3    40  30
 4     0  30
Elem#  N1  N2  Mat#  Area  TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1      1   2   1     1     0
 2      2   3   1     1     0
 3      1   3   1     1     0
 4      4   3   1     1     0
DOF#  Displacement
 1     0
 2     0
 4    -0.12
 7     0
 8     0
DOF#  Load
 3     20000
 6    -25000
MAT#  PROP1   PROP2
 1    29.5E6  12E-6
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



پاسخ مثال 3-

RL05EX03.txt

Output for Input Data from file L05EX03.txt
EXAMPLE 5.3

Node#	X-Displ	Y-Displ
1	-3.2053E-07	-1.4949E-06
2	2.7118E-02	-1.2000E-01
3	3.2317E-02	-1.2725E-01
4	1.9931E-06	0.0000E+00

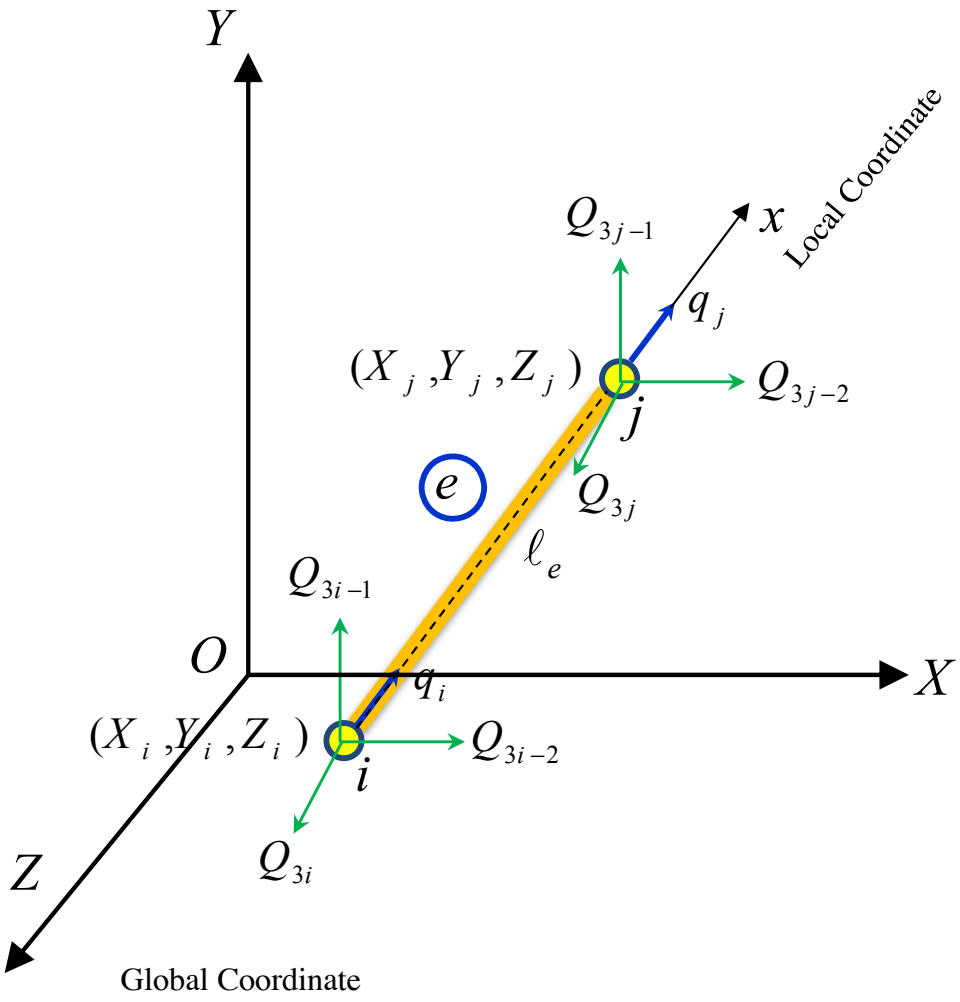
Elem#	Stress
1	2.0000E+04
2	-7.1255E+03
3	-2.9791E+04
4	2.3833E+04

DOF#	Reaction
1	3.8327E+03
2	1.7875E+04
4	7.1255E+03
7	-2.3833E+04
8	0.0000E+00

خرپاهای سه بعدی (3D-Trusses)

مختصات‌های محلی و کلی (Local and Global Coordinates)

به آسانی می‌توان روابط مربوط به خرپاهای دو بُعدی را به خرپاهی سه بُعدی تعمیم داد



$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$ (تکراری)

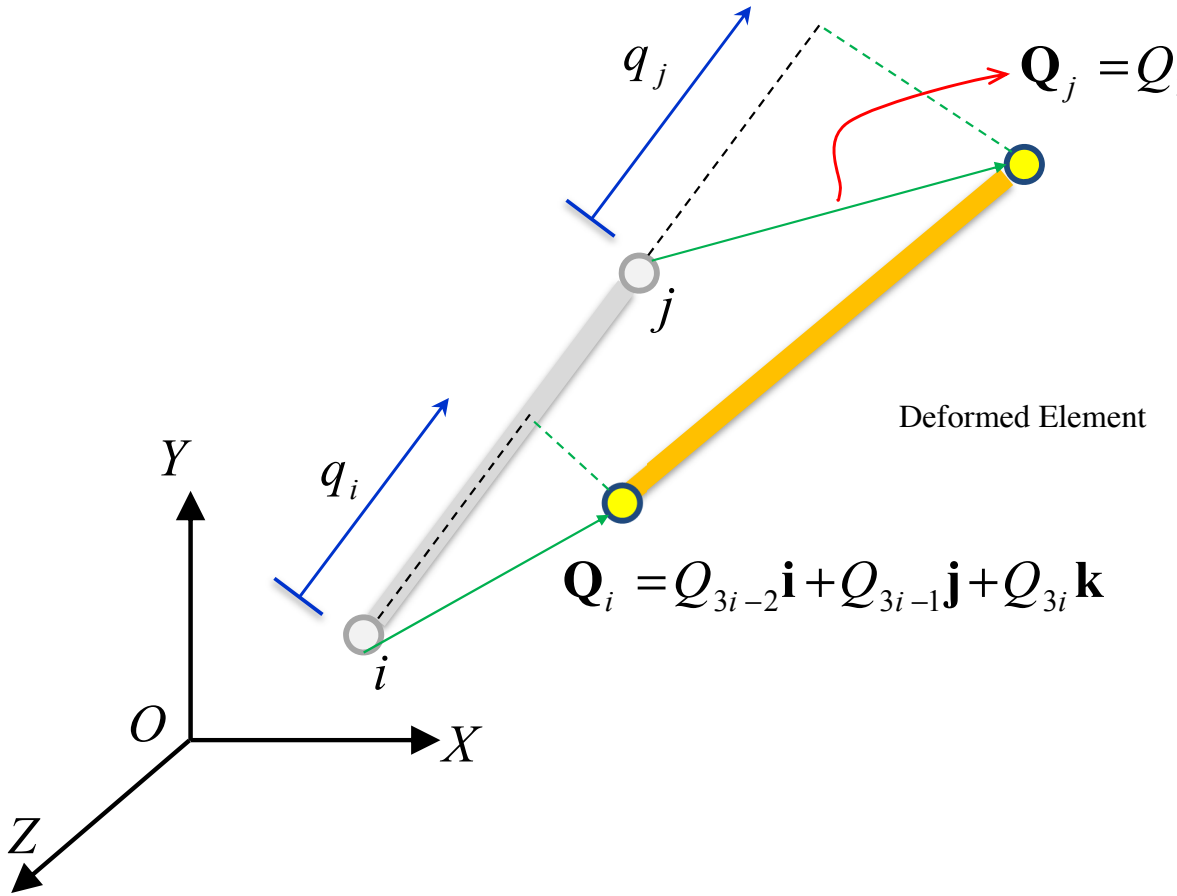
$\mathbf{q}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار جابجایی گرهی المان در مختصات محلی.

$$\mathbf{Q}^e = \begin{Bmatrix} Q_{3i-2} \\ Q_{3i-1} \\ Q_{3i} \\ Q_{3j-2} \\ Q_{3j-1} \\ Q_{3j} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$\mathbf{Q}^e \in \mathbb{R}^6$: بردار جابجایی گرهی المان در مختصات کلی.

خرپاهای سه بعدی (3D-Trusses)

مختصات‌های محلی و کلی (Local and Global Coordinates)



با بررسی هندسه تغییرشکل یافته المان رابطه بین مختصات محلی و کلی را می توان استخراج نمود:

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{L}\mathbf{Q}^e \qquad (5)$$ (تکراری)

که در آن

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & n \end{bmatrix} \qquad (31)$$

$\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{2\times 6}$: ماتریس تبدیل (Transformation Matrix) مختصات کلی به مختصات محلی در حالت سه بُعدی

خرپاهای سه بعدی (3D-Trusses)

مشخصات هندسی المان (Geometric Properties of Element)

ℓ ، m و n کسینوس‌های هادی المان در حالت تغییر شکل نیافته می‌باشند که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\ell = \cos\theta_X = \frac{X_j - X_i}{\ell_e} \quad , \quad m = \cos\theta_Y = \frac{Y_j - Y_i}{\ell_e} \quad , \quad n = \cos\theta_Z = \frac{Z_j - Z_i}{\ell_e} \tag{32}$$

که در آن طول المان برابر است با:

$$\ell_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \tag{33}$$

خرپاهای سه بعدی (3D-Trusses)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با جایگذاری روابط (31) و (L04-34) در رابطه (11) خواهیم داشت:

$$(31)\,\&\,(L04-34)\rightarrow(11)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{K}^e=\frac{A_eE_e}{\ell_e}\begin{bmatrix}\ell & 0\\ m & 0\\ n & 0\\ 0 & \ell\\ 0 & m\\ 0 & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ell & m & n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & n\end{bmatrix}\qquad(34)$$

$\mathbf{K}^e\in\mathbb{R}^{6\times6}$: ماتریس سختی المان e اُم (Element Stiffness Matrix) در مختصات کلی در حالت سه بُعدی

خرپاهای سه بعدی (3D-Trusses)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با بسط رابطه (34) ماتریس سختی المان در مختصات کلی در حالت سه بُعدی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(34) \Rightarrow \mathbf{K}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c} \begin{matrix} 3i-2 & 3i-1 & 3i & 3j-2 & 3j-1 & 3j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & \ell n & -\ell^2 & -\ell m & -\ell n \\ \ell m & m^2 & mn & -\ell m & -m^2 & -mn \\ \ell n & mn & n^2 & -\ell n & -mn & -n^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & -\ell n & \ell^2 & \ell m & \ell n \\ -\ell m & -m^2 & -mn & \ell m & m^2 & mn \\ -\ell n & -mn & -n^2 & \ell n & mn & n^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3i-2 \\ 3i-1 \\ 3i \\ 3j-2 \\ 3j-1 \\ 3j \end{matrix} \qquad (35)$$

$\mathbf{K}^e \in \mathbb{R}^{6\times 6}$: ماتریس سختی المان e اُم (Element Stiffness Matrix) در مختصات کلی در حالت سه بُعدی