روش المان محدود

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

فرمول‌بندی روش المان محدود (FEM Formulation)

مشکل اصلی روش باقیمانده وزنی آن است که یافتن توابع تقریبی مناسب $\psi_{(x)}$ دشوار است. زیرا ممکن است فرد هیچ دانش قبلی از رفتار سیستم یا همان حل مورد نظر $\phi_{(x)}$ نداشته باشد.

در چنین مواردی اغلب چند جمله‌ای‌ها به عنوان تابع حدسی انتخاب می‌شوند. به طوری که با انجام درون‌یابی شرایط مرزی معادله دیفرانسیل را برآورده نماید. اما زمانی که کل حوزه (سیستم) Ω بزرگ است این امکان وجود دارد که درون‌یابی و برازش ضعیفی انجام گیرد.

$$\boxed{g_i(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_m)} \quad (1)$$

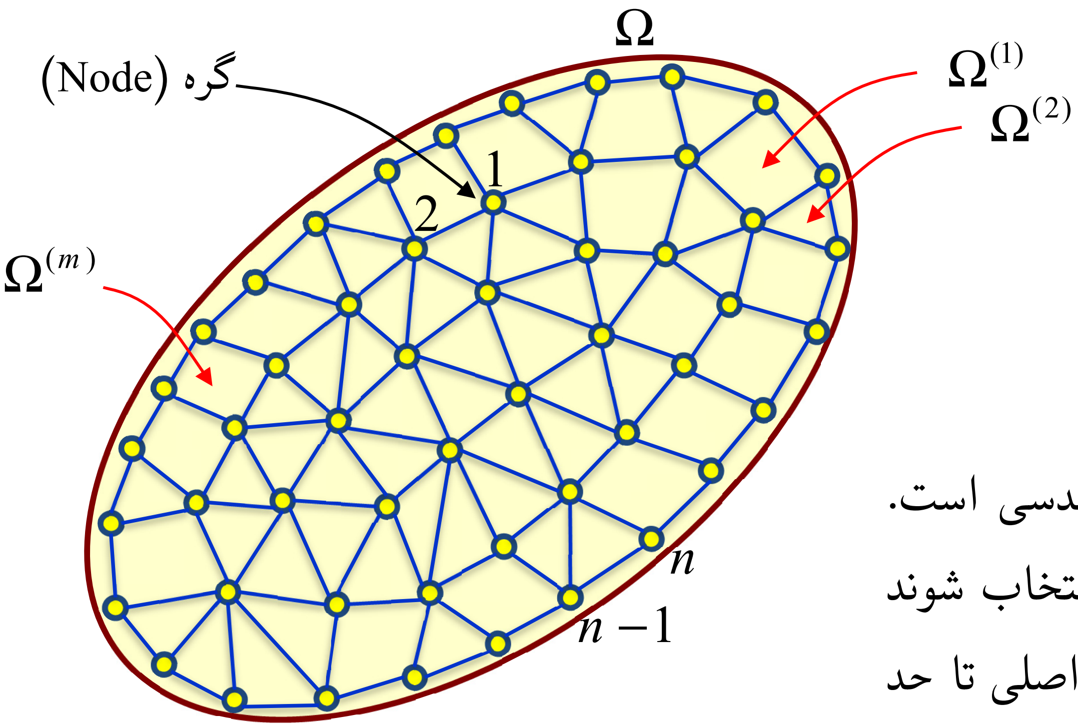
تجربه نشان داده است که اگر کل حوزه Ω (سیستم) کوچک باشد، چند جمله‌ای‌های درجه پایین می‌تواند رفتار تابع را منعکس نماید. بنابراین، امیدواریم با تقسیم کل حوزه (سیستم) Ω به زیر- حوزه‌های (المان‌های) کوچک‌تر $\Omega^{(e)}$، روش‌های باقیمانده وزنی را با استفاده از چند جمله‌ای درجه پایین با موفقیت اعمال کنیم. به این معنا که ما از چند جمله‌ای درجه پایین‌تر به صورت تکه‌ای در زیر- حوزه‌های (المان‌های) کوچک‌تر $\Omega^{(e)}$ استفاده می‌کنیم، به جای اینکه از چند جمله‌ای درجه بالاتر برای کل حوزه (سیستم) Ω استفاده کنیم. **این همان استراتژی مورد استفاده در روش المان محدود است.**

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

گام‌های روش المان محدود (Steps in FEM)

گام اول- روش المان محدود کل حوزه (سیستم) Ω را به تعداد محدودی زیر- حوزه (المان) $\Omega^{(e)}$ تبدیل می‌کند.

زیر – حوزه‌ها با هم همپوشانی ندارند.



$$\boxed{\Omega = \bigcup_{e=1}^{m} \Omega^{(e)}} \quad (2)$$

$\Omega^{(e)}$: زیر- حوزه (المان) e اُم در سیستم مورد بررسی

m: تعداد زیر حوزه (المان‌های) سیستم

فرآیند گسسته سازی اساسا براساس تمرین و قضاوت مهندسی است. شکل، اندازه و تعداد المان‌ها (زیر- حوزه‌ها) باید با دقت انتخاب شوند به گونه‌ای که بدون افزایش حجم محاسبات، حوزه (سیستم) اصلی تا حد امکان شبیه سازی شود.

زیر- حوزه‌ها (المان‌ها) توسط گره‌ها به همدیگر متصل می‌شوند. در گره‌ها باید پیوستگی (Continuity) برقرار باشد. با این کار پیوستگی در جابجایی، کرنش، تنش، ولتاژ و ... برقرار می‌شود.

n: تعداد گره‌ها

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

گام‌های روش المان محدود (Steps in FEM)

گام دوم- یک تابع تقریبی به عنوان چند جمله‌ای درون‌یابی برای $\psi_{(x)}$ انتخاب کنید تا تغییرات $\phi_{(x)}$ را بر روی المان‌ها نشان دهد.

گام سوم- در هر المان به طور جداگانه روش گالرکین اعمال می‌گردد تا با توجه به معادله دیفرانسیل بین مقادیر گرهی انتهایی $\psi_{(x_i)}$ و $\psi_{(x_j)}$ درون‌یابی انجام شود.

گام چهارم- نتیجه اعمال روش گالرکین بر روی المان eاُم یک سری معادله است که مجهولات آن همان مقادیر گرهی در انتهای المان eاُم می‌باشد. وقتی این کار برای هر المان انجام شود، دسته معادلاتی تشکیل می‌گردد که تمام مقادیر گرهی را شامل می‌شود. به عبارت دیگر با سرهم بندی کردن معادلاتِ تمامی المان‌ها، یک دستگاه جامع معادلات برای کل حوزه (سیستم) شکل می‌گیرد. به طور مثال در حالت یک بعدی مجموعه‌ای از معادلات جبری شکل می‌گیرد که هر معادله متناظر با یک المان است.

گام پنجم- این معادلات برای شرایط مرزی تنظیم شده و برای بدست آوردن تقریب $\phi_{(x)}$ در گره‌ها حل می‌شوند. با درونیابی خطی مقادیر میانی برای $\phi_{(x)}$ بدست می‌آید.

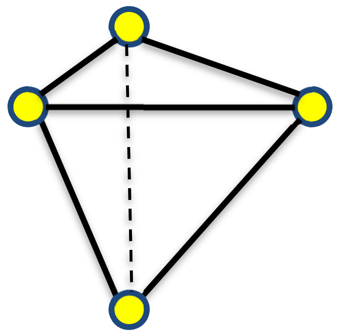
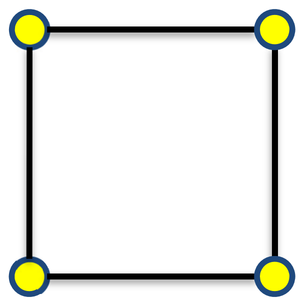
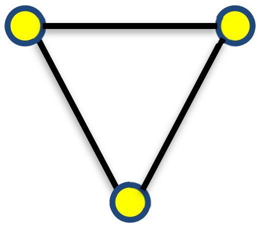
گام ششم- سپس سیستم معادلات جبری حل می‌شود تا جواب تقریبی $\phi_{(x)}$ به دست آید.

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

انتخاب المان‌ها (Selection of Elements)

یکی از مهمترین مراحل در آنالیز روش FEM، انتخاب نوع مناسب المان‌ها و تعریف تابع تقریبی مناسب بر روی المان است. تابع تقریبی به چند جمله‌ای درون‌یابی اشاره دارد. هر المان با چندین ویژگی مشخص می‌شود. بنابراین، وقتی سوال می‌شود که "از چه نوع المانی برای یک مسئله خاص استفاده می کنید"، در واقع هدف مشخص کردن اطلاعات متمایز زیر است:

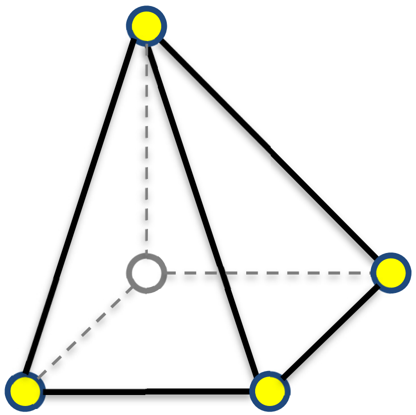
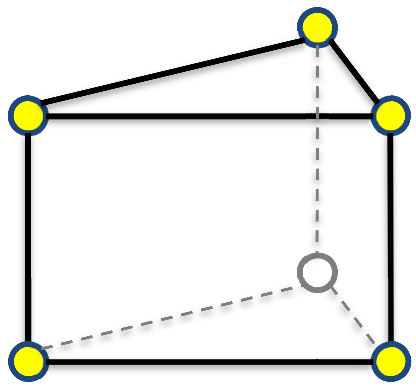
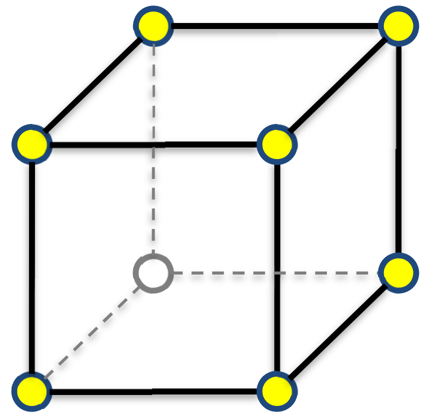
۱- شکل هندسی المان که می‌تواند قطعات خطی، مثلثی، مستطیلی، چهار وجهی و غیره باشد.

سه بعدی (3D)	دو بعدی (2D)	دو بعدی (2D)	یک بعدی (1D)
المان چهاروجهی چهار گرهی (Tetrahedron element)	المان چهارضلعی چهار گرهی (Quadrangle element)	المان مثلثی سه گرهی (Triangle element)	المان خطی دو گرهی (Segment element)
			

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

انتخاب المان‌ها (Selection of Elements)

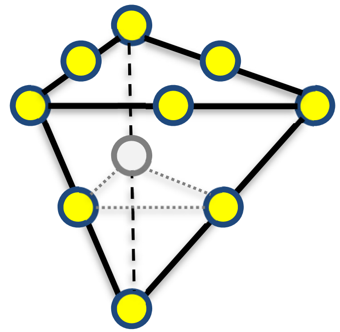
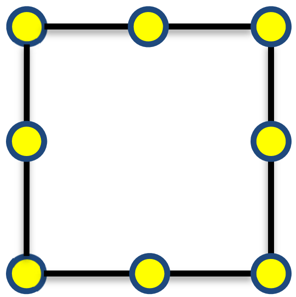
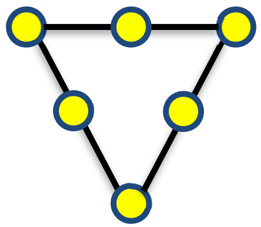
۱- شکل هندسی المان که می‌تواند قطعات خطی، مثلثی، مستطیلی، چهار وجهی و غیره باشد.

سه بعدی (3D)	سه بعدی (3D)	سه بعدی (3D)
المان هرمی پنج گرهی (Pyramid element)	المان پنج وجهی یا منشوری شش گرهی (Pentahedron or prism element)	المان شش وجهی هشت گرهی (Hexahedron element)
		

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

انتخاب المان‌ها (Selection of Elements)

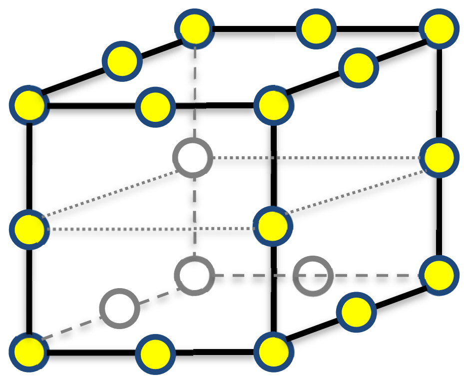
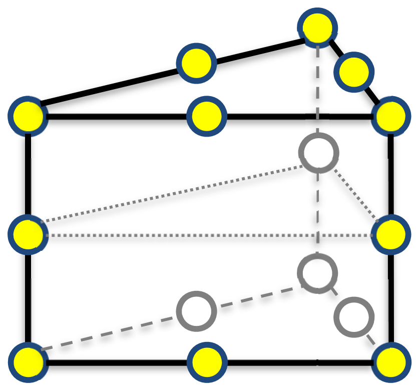
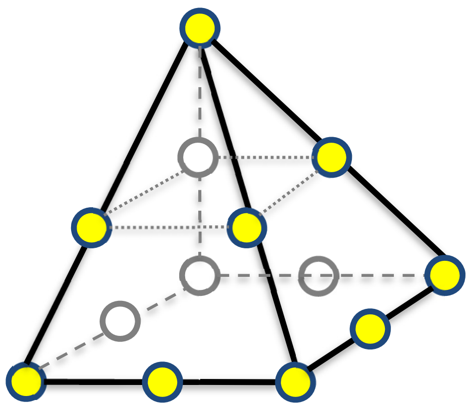
۲– تعداد و انواع گره‌ها در هر المان به این معنی که آیا المان شامل دو گره یا سه گره و غیره است. منظور از نوع گره، داخلی یا خارجی بودن گره‌ها است. گره‌های خارجی گره‌هایی هستند که بر روی مرزهای المان قرار دارند و نقطه اتصال بین مرزهای المان‌ها را نشان می‌دهند. گره‌های داخلی گره‌هایی هستند که به المان‌های مجاور متصل نمی‌شوند.

سه بعدی (3D)	دو بعدی (2D)	دو بعدی (2D)	یک بعدی (1D)
المان چهاروجهی 10 گرهی (Tetrahedron element)	المان چهارضلعی 8 گرهی (Quadrangle element)	المان مثلثی 6 گرهی (Triangle element)	المان خطی 3 گرهی (Segment element)
			

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

انتخاب المان‌ها (Selection of Elements)

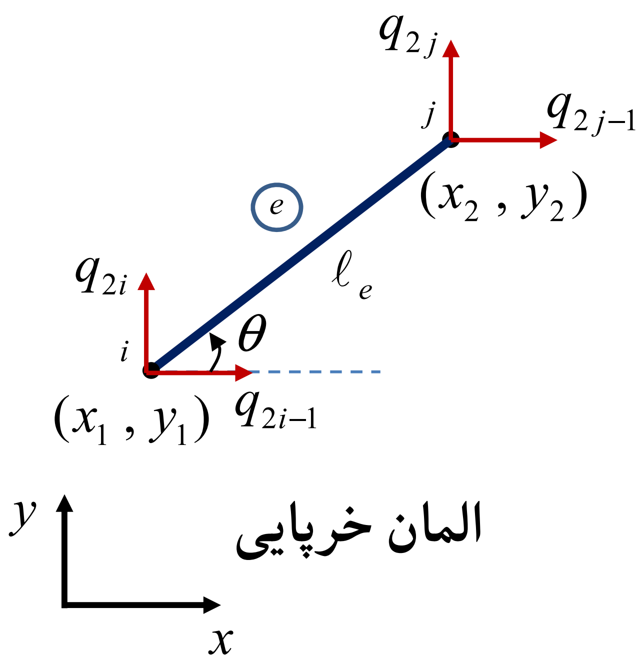
۲- تعداد و انواع گره‌ها در هر المان به این معنی که آیا المان شامل دو گره یا سه گره و غیره است. منظور از نوع گره، داخلی یا خارجی بودن گره‌ها است. گره‌های خارجی گره‌هایی هستند که بر روی مرزهای المان قرار دارند و نقطه اتصال بین مرزهای المان‌ها را نشان می‌دهند. گره‌های داخلی گره‌هایی هستند که به المان‌های مجاور متصل نمی‌شوند.

سه بعدی (3D)	سه بعدی (3D)	سه بعدی (3D)
المان شش وجهی 20 گرهی (Hexahedron element)	المان پنج وجهی یا منشوری 15 گرهی (Pentahedron or prism element)	المان هرمی 13 گرهی (Pyramid element)
		

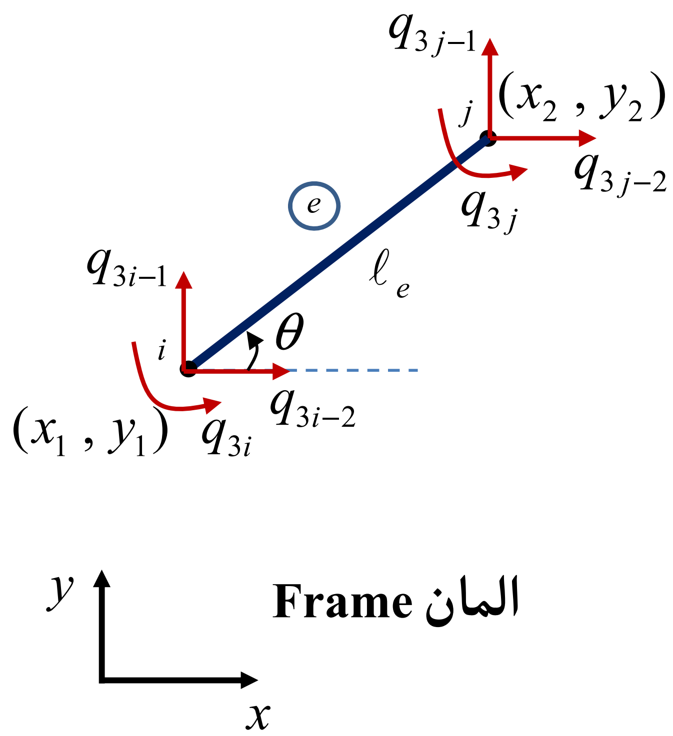
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

انتخاب المان‌ها (Selection of Elements)

۳- نوع متغیر گرهی که می‌تواند با توجه به شرایط مسئله از نوع یک درجه آزادی تا چندین درجه آزادی متفاوت باشد.



المان خرپایی



المان Frame

۴- نوع تابع تقریبی که می‌تواند چند جمله‌ای، مثلثاتی و غیره باشد. توابع تقریبی چند جمله‌ای مقبولیت گسترده‌ای پیدا کرده‌اند زیرا به راحتی قابل دستکاری ریاضی هستند.

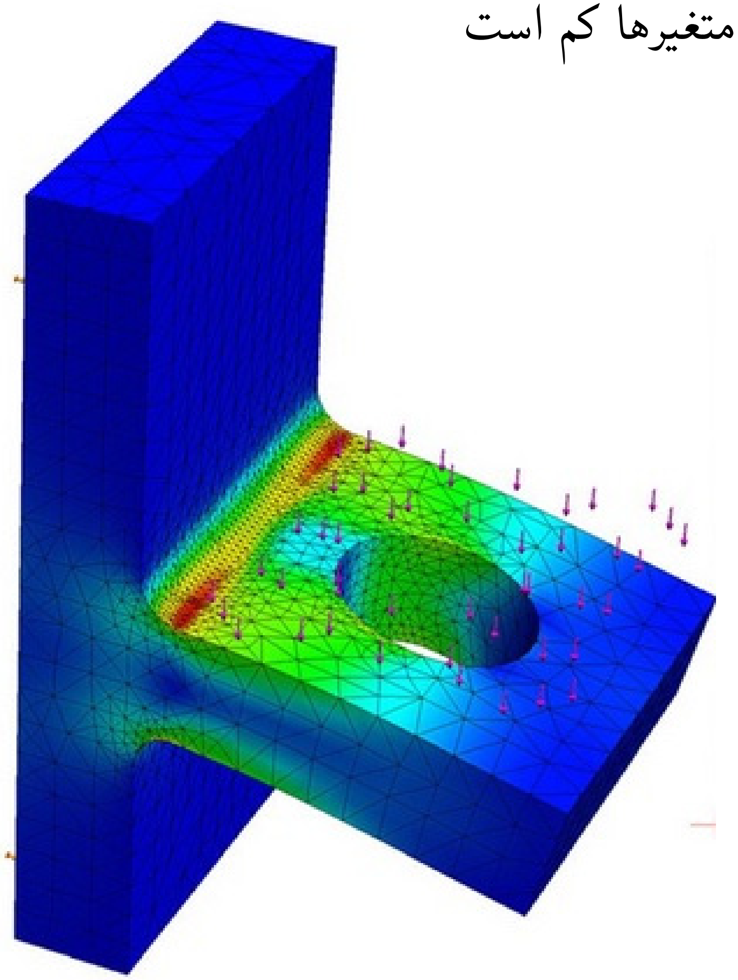
اگر هر کدام از این ویژگی‌های مشخصه وجود نداشته باشد، توصیف المان ناقص است.

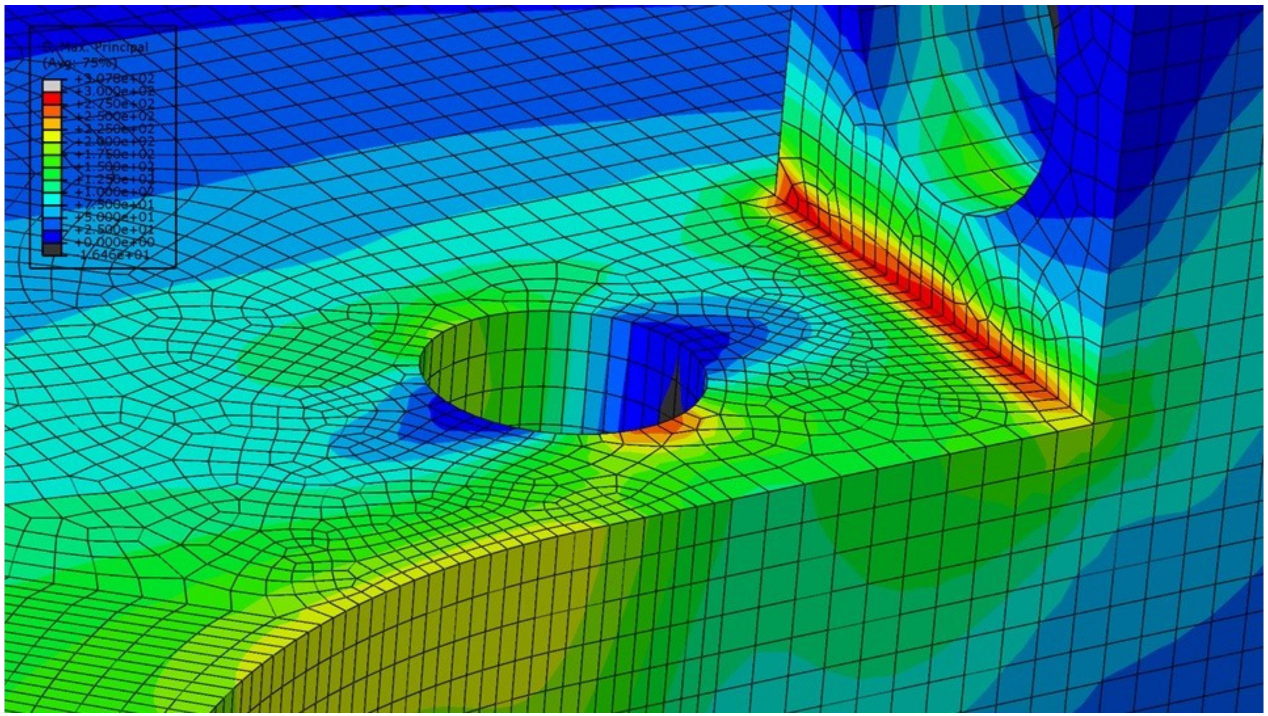
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

انتخاب گره‌ها (Selection of Nodes)

بهتر است شماره گذاری گره‌ها الگوی مناسبی داشته باشد مثلا از چپ به راست یا از پایین به بالا و یا برعکس. همچنین انتخاب مکان گره‌ها دلخواه نیست قوانین خاصی هستند که باید رعایت شوند:

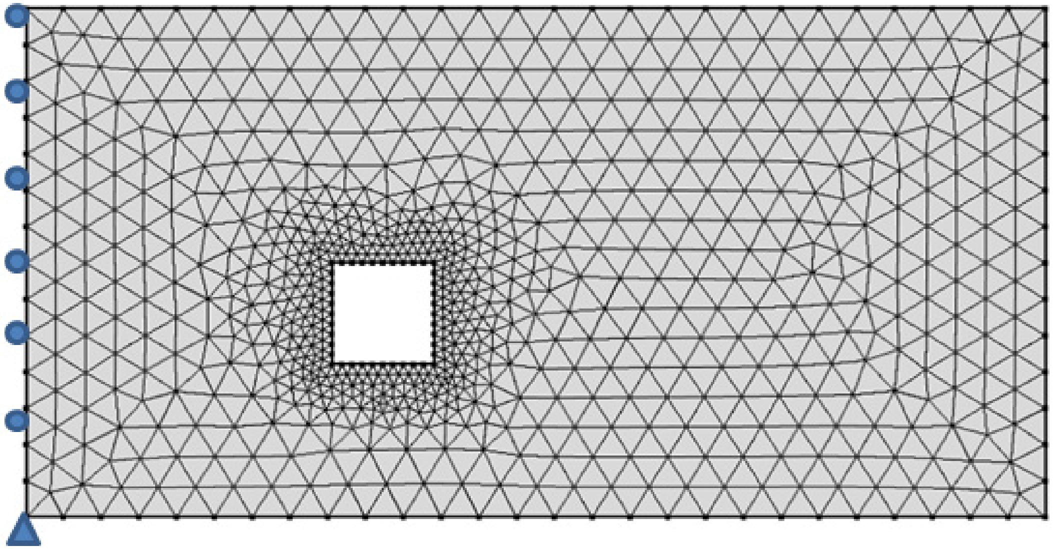
۱- در نواحی که نرخ تغییر متغیرها (مانند وجود تمرکز تنش) زیاد است بهتر است که محل گره‌ها نزدیک‌تر به هم انتخاب گردد. به همین ترتیب در نواحی که نرخ تغییر متغیرها کم است محل گره‌ها می‌تواند دورتر از هم انتخاب گردد.



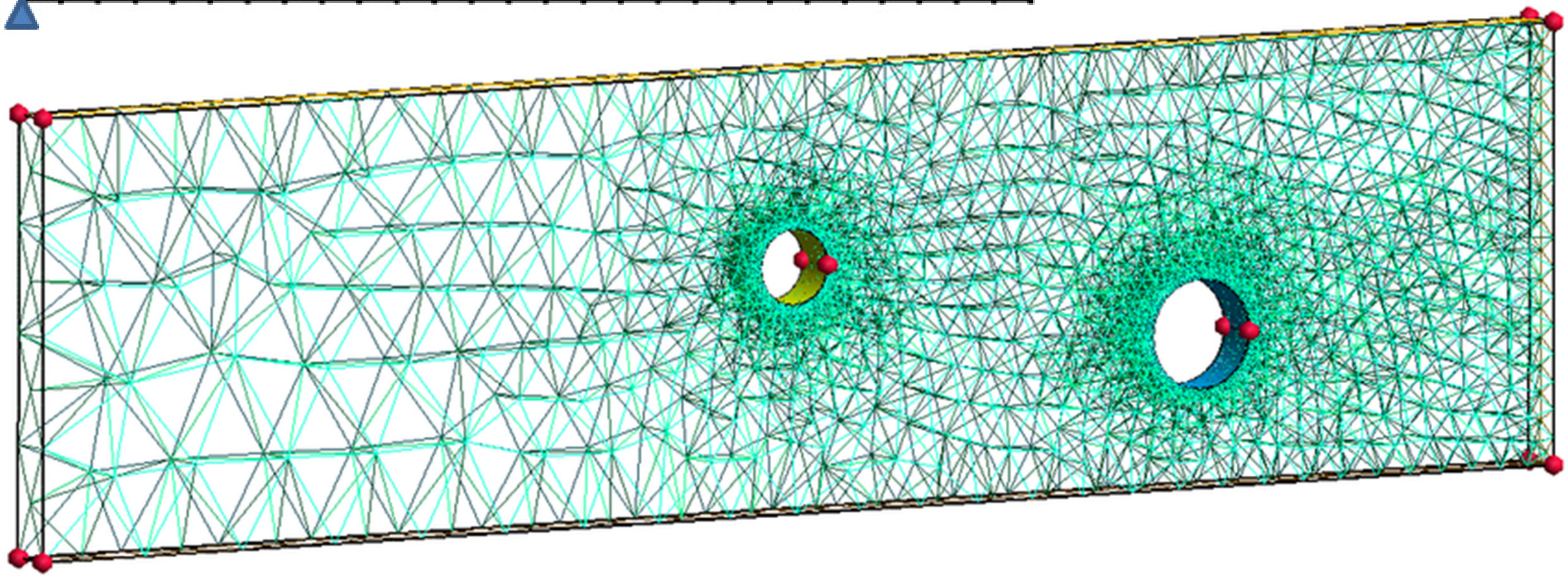


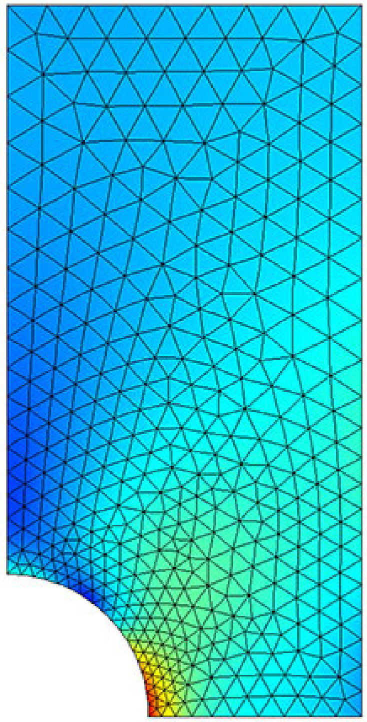
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

انتخاب گره‌ها (Selection of Nodes)



۲- در جاهایی که تغییرات ناگهانی در خواص هندسی (تغییرات ناگهانی سطح مقطع، وجود سوراخ یا ترک) و مصالح روی دهد وجود گره ضروری است.





۳- در جاهایی که مقدار عددی متغیر مجهول مورد نظر است (مثلا جابجایی یک مکان خاص)، گره قرار داده می‌شود.

رعایت این قوانین مستلزم آن است که کاربر اطلاعاتی در مورد رفتار متغیر مجهول در حوزه داشته باشد. برای این منظور دانش و قضاوت مهندسی می‌تواند به کمک گرفته شود.

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

زمانی که بر روی المان کار می کنیم نیازی به ارضای شرایط مرزی نیست. چون ممکن است المان در ناحیه میانی حوزه کلی قرار گرفته باشد و در نزدیکی نواحی مرزی نباشد. بعد از اتمام بررسی تمامی المان‌ها در آخر شرایط مرزی اعمال می‌گردد. به همین دلیل ترم $\bar{\psi}_{(x)}$ در عبارت پاسخ تقریبی از رابطه (L2-9) حذف می‌شود که این کار مورد پسند ما است چرا که دیگر نیازی به حدس $\bar{\psi}_{(x)}$ نمی‌باشد. پاسخ تقریبی در المان e اُم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i(x)} \qquad (3)$$

n: تعداد گره‌های المان

$N_i(x)$: تابع شکل (Shape Function) نظیر گره i اُم. تابع شکل بر روی المان نظارت دارد.

α_i: ثابت مجهول نظیر گره i اُم که برابر با مقدار $\psi_{(x)}$ در گره i اُم است (از نظر فیزیکی معادل جابجایی نظیر گره i اُم می‌باشد).

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

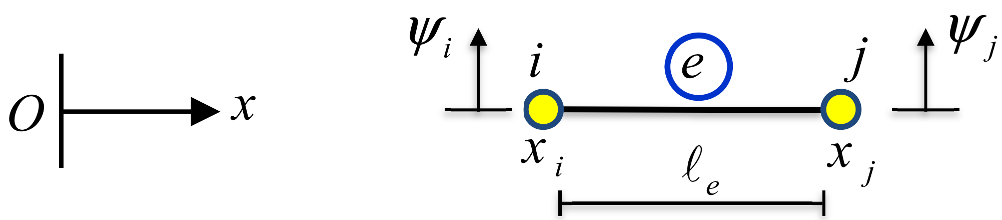
توابع شکل (Shape Functions)

المان خطی یک بعدی (One-dimensional Linear Element)

برای یک المان خطی می‌توان پاسخ تقریبی در المان e اُم را به فرم یک چندجمله‌ای درون‌یابی به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x} \qquad (4)$$

مقادیر دو ثابت α_1 و α_2 را می‌توان برحسب مجهولات گرهی بیان کرد. اگر شماره گره‌های ابتدا و انتهای برابر با i و j باشد بنابراین مقدارگرهی متناظر نیز برابر با ψ_i و ψ_j خواهد بود.



ℓ_e : طول المان

براساس دستگاه مختصات انتخابی، x_i و x_j به ترتیب مختصات گره‌های i و j می‌باشد. از این رو طول المان e اُم برابر است با:

$$\boxed{\ell_e = x_j - x_i} \qquad (5)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان خطی یک بعدی (One-dimensional Linear Element)

رابطه (4) تابع تقریبی را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت:

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}} \qquad (6)$$

که در آن:

$$\boxed{\mathbf{P} = \{1 \quad x\} \quad , \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}} \qquad (7)$$

تابع تقریبی باید در هریک از گره‌ها برقرار باشد. از این رو، با جایگذاری مختصات گره‌ها در رابطه (4) مجموعه معادلات زیر حاصل می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ \psi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j \end{aligned}} \qquad (8)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان خطی یک بعدی (One-dimensional Linear Element)

فرم ماتریسی رابطه (8) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}} \quad (9)$$

که در آن:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}} \quad (10)$$

با حل رابطه (9) بردار $\boldsymbol{\alpha}$ به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\psi} \quad \overset{(5)\&(7)\&(10)}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\alpha_1 = \frac{\psi_i x_j - \psi_j x_i}{\ell_e} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\psi_j - \psi_i}{\ell_e}} \quad (11)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان خطی یک بعدی (One-dimensional Linear Element)

با جایگذاری دو مقدار ثابت α_1 و α_2 از رابطه (11) در رابطه پاسخ تقریبی رابطه (4) خواهیم داشت:

$$(11) \rightarrow (4) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \left(\frac{x_j - x}{\ell_e}\right)\psi_i + \left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right)\psi_j} \quad (12)$$

با تعریف:

$$\boxed{N_i(x) = \left(\frac{x_j - x}{\ell_e}\right) \quad , \quad N_j(x) = \left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right)} \quad (13)$$

رابطه (12) به صورت زیر در می‌آید:

$$(13) \rightarrow (12) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = N_i(x)\psi_i + N_j(x)\psi_j} \quad (14)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان خطی یک بعدی (One-dimensional Linear Element)

فرم ماتریسی رابطه (14) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \mathbf{N}(x)\boldsymbol{\psi}} \quad (15)$$

که در آن:

$$\boxed{\mathbf{N}(x) = \{N_i(x) \quad N_j(x)\}} \quad (16)$$

$\mathbf{N}(x)$: بردار سطری از توابع شکل است. در پاسخ تقریبی، تابعی که در مقادیر گرهی ضرب می شود را تابع شکل یا تابع درون یابی (Interpolation function) نامیده می شود. در ادامه نشان داده خواهد شد که از توابع شکل به عنوان توابع وزنی بر روی المان در روش باقیمانده وزنی استفاده خواهد شد.

$\boldsymbol{\psi}$: مقادیر گرهی المان است

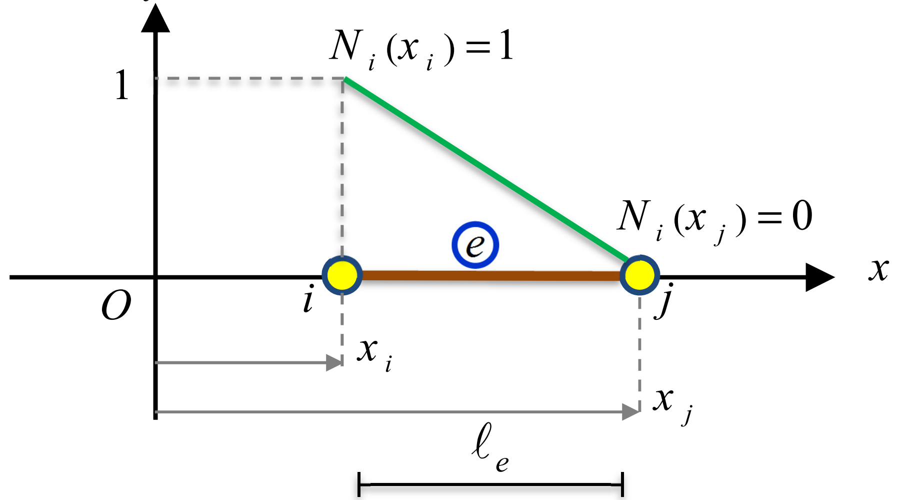
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان خطی یک بعدی (One-dimensional Linear Element)

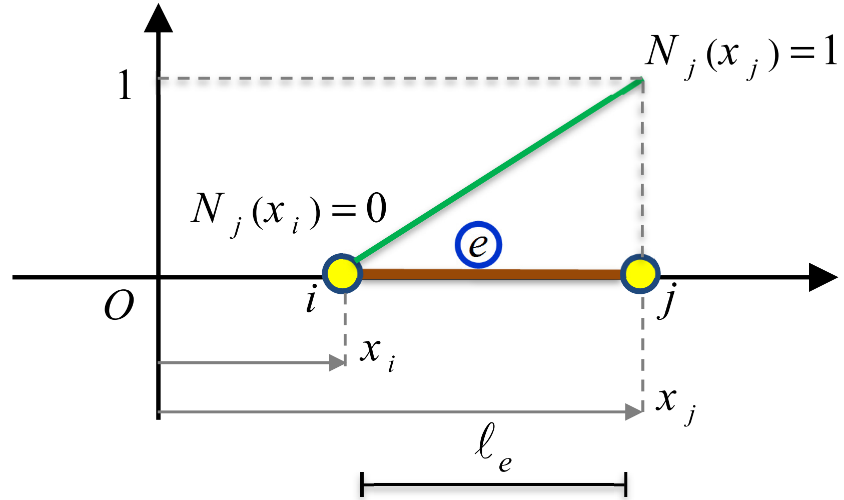
نمودار توابع شکل بر روی المان به صورت زیر رسم می‌شوند:

$$N_i(x) = \frac{1}{\ell_e}(x_j - x)$$



نمودار تابع شکل $N_i(x)$ بر روی المان خطی یک بعدی

$$N_j(x) = \frac{1}{\ell_e}(x - x_i)$$



نمودار تابع شکل $N_j(x)$ بر روی المان خطی یک بعدی

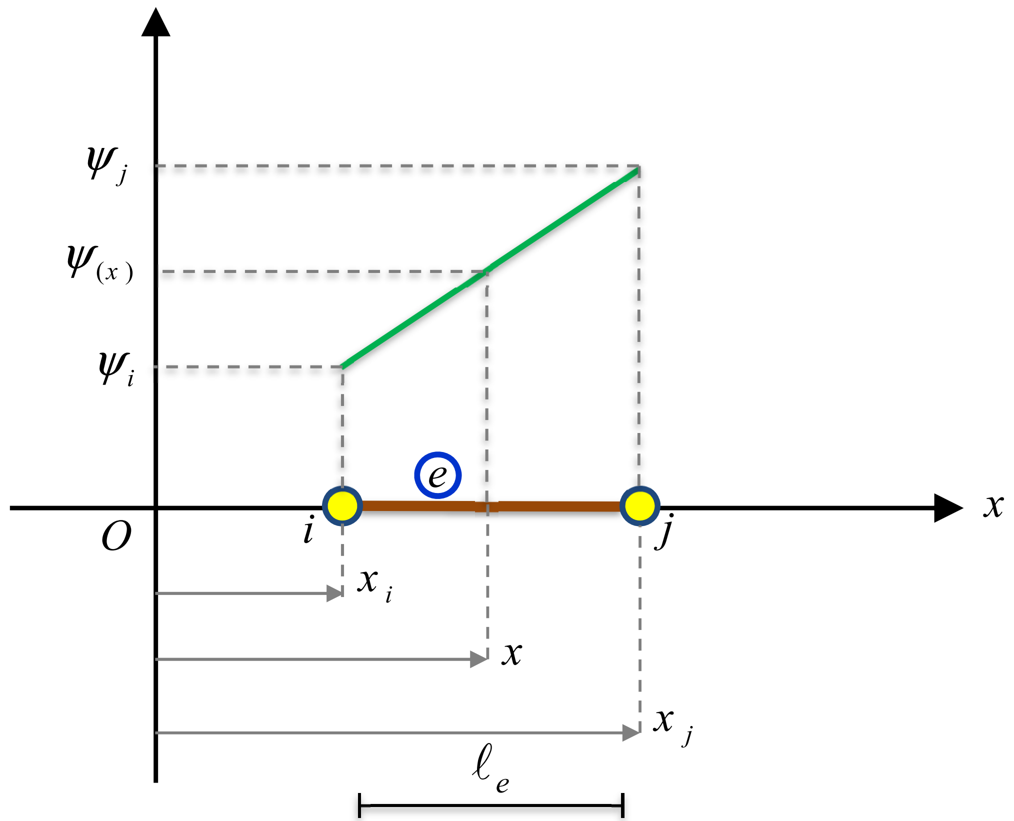
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان خطی یک بعدی (One-dimensional Linear Element)

پاسخ تقریبی به صورت زیر رسم می‌شوند:

$$\psi^{(e)}_{(x)} = N_i(x)\psi_i + N_j(x)\psi_j$$



نمودار تغییرات تابع تقریبی خطی $\psi^{(e)}_{(x)}$ بر روی المان e اُم

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

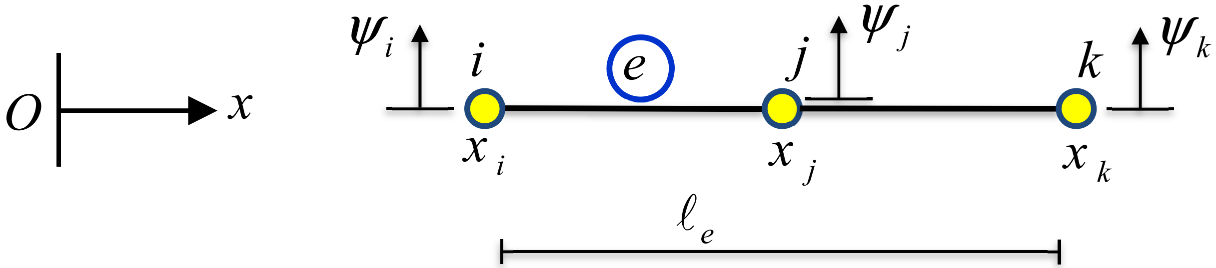
توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

برای یک المان درجه دوم می‌توان پاسخ تقریبی در المان eاُم را به فرم یک چندجمله‌ای درون‌یابی به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2} \qquad (17)$$

مقادیر سه ثابت α_1، α_2 و α_3 را می‌توان برحسب مجهولات گرهی بیان کرد. از آنجایی که تابع تقریبی دارای سه ثابت است از این رو المان درجه دوم یک بعدی باید دارای 3 گره باشد. اگر شماره گره‌های را با i، j و k نشان داهیم؛ از این رو، مقدارگرهی متناظر نیز برابر با ψ_i، ψ_j و ψ_k خواهد بود.



ℓ_e : طول المان

براساس دستگاه مختصات انتخابی x_i، x_j و x_k به ترتیب مختصات گره‌های i، j و k می‌باشد. از این رو طول المان e اُم برابر است با:

$$\boxed{\ell_e = x_k - x_i} \qquad (18)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

رابطه (17) تابع تقریبی را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت:

$$\psi_{(x)}^{(e)} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \qquad (19)$$

که در آن:

$$\mathbf{P} = \{1 \quad x \quad x^2\} \quad , \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

تابع تقریبی باید در هر یک از گره‌ها برقرار باشد. از این رو، با جایگذاری مختصات گره‌ها در رابطه (17) مجموعه معادلات زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 x_i^2 \\ \psi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 x_j^2 \\ \psi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 x_k^2 \end{aligned} \qquad (21)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

فرم ماتریسی رابطه (21) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}} \qquad (22)$$

که در آن:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{bmatrix}} \qquad (23)$$

با حل رابطه (23) بردار $\boldsymbol{\alpha}$ به دست می‌آید:

$$(23) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\psi}} \qquad (24)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

با جایگذاری مقادیر ثابت α_1، α_2 و α_3 از رابطه (24) در رابطه پاسخ تقریبی رابطه (17) خواهیم داشت:

$$(24) \rightarrow (17) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \frac{2}{\ell_e^{\,2}}(x - x_j)(x - x_k)\psi_i - \frac{4}{\ell_e^{\,2}}(x - x_i)(x - x_k)\psi_j + \frac{2}{\ell_e^{\,2}}(x - x_i)(x - x_j)\psi_k} \quad (25)$$

با تعریف:

$$\boxed{\begin{aligned} N_i(x) &= \frac{2}{\ell_e^{\,2}}(x - x_j)(x - x_k) \\ N_j(x) &= -\frac{4}{\ell_e^{\,2}}(x - x_i)(x - x_k) \\ N_k(x) &= \frac{2}{\ell_e^{\,2}}(x - x_i)(x - x_j) \end{aligned}} \quad (26)$$

رابطه (25) به صورت زیر در می‌آید:

$$(26) \rightarrow (25) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = N_i(x)\psi_i + N_j(x)\psi_j + N_k(x)\psi_k} \quad (27)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

فرم ماتریسی رابطه (27) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\psi^{(e)}_{(x)} = \mathbf{N}(x)\boldsymbol{\psi}} \qquad (28)$$

که در آن:

$$\boxed{\mathbf{N}(x) = \left\{ N_i(x) \quad N_j(x) \quad N_k(x) \right\}} \qquad (29)$$

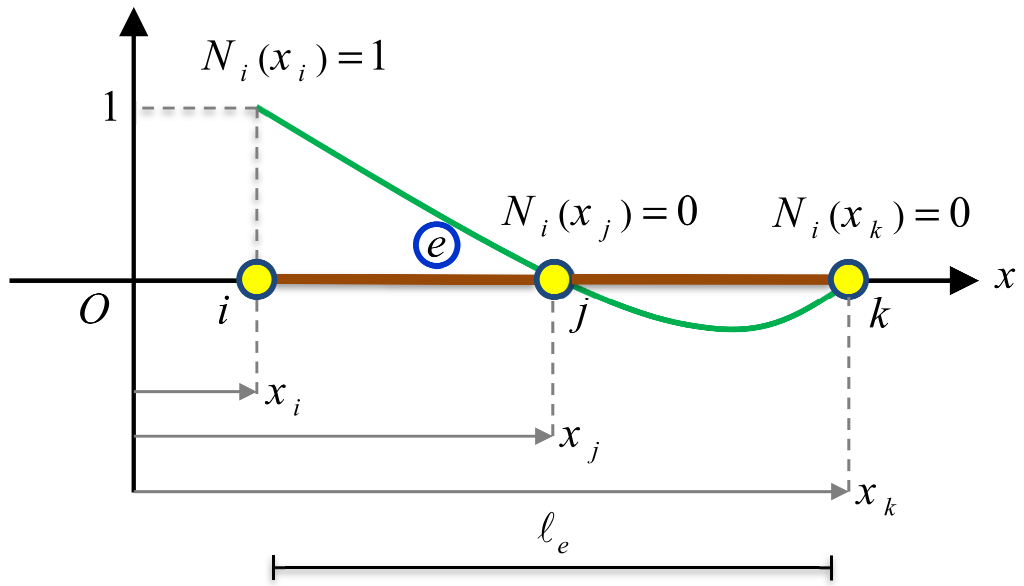
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

نمودار توابع شکل بر روی المان به صورت زیر رسم می‌شوند:

$$N_i(x) = \frac{2}{\ell_e^2}(x - x_j)(x - x_k)$$



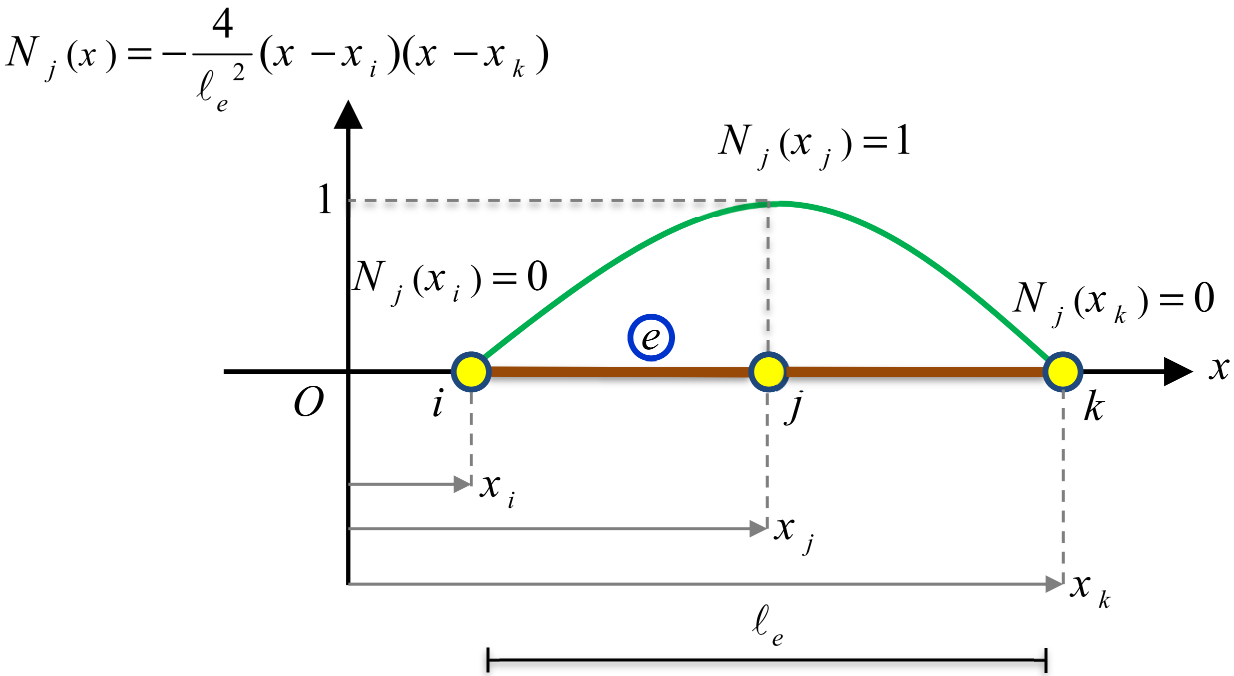
نمودار تابع شکل $N_i(x)$ بر روی المان درجه دوم یک بعدی

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

نمودار توابع شکل بر روی المان به صورت زیر رسم می‌شوند:



نمودار تابع شکل $N_j(x)$ بر روی المان درجه دوم یک بعدی

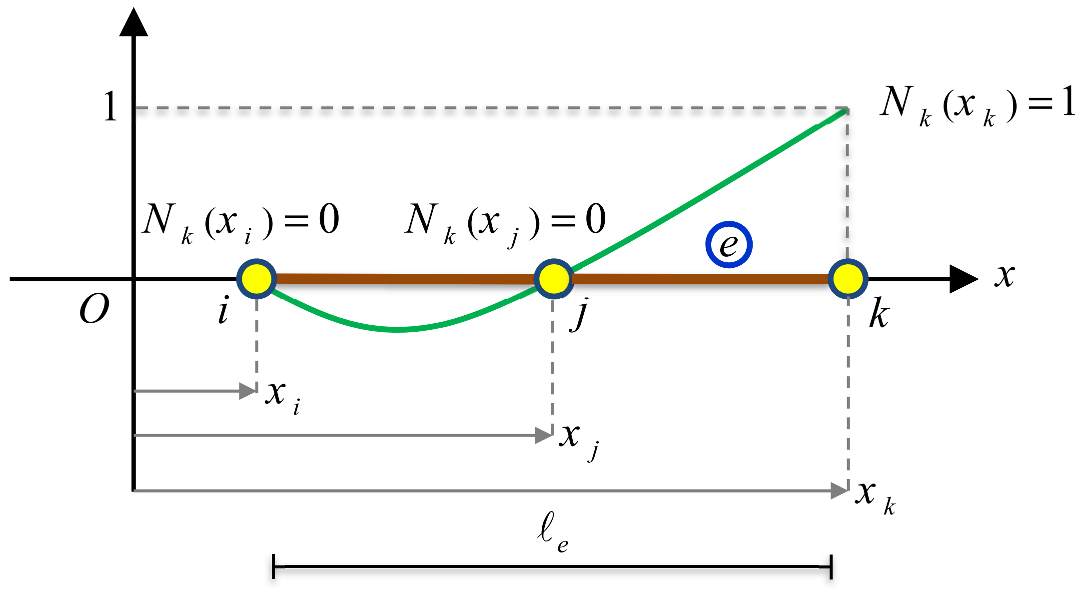
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

نمودار توابع شکل بر روی المان به صورت زیر رسم می‌شوند:

$$N_k(x) = \frac{2}{\ell_e^2}(x - x_i)(x - x_j)$$



نمودار تابع شکل $N_k(x)$ بر روی المان درجه دوم یک بعدی

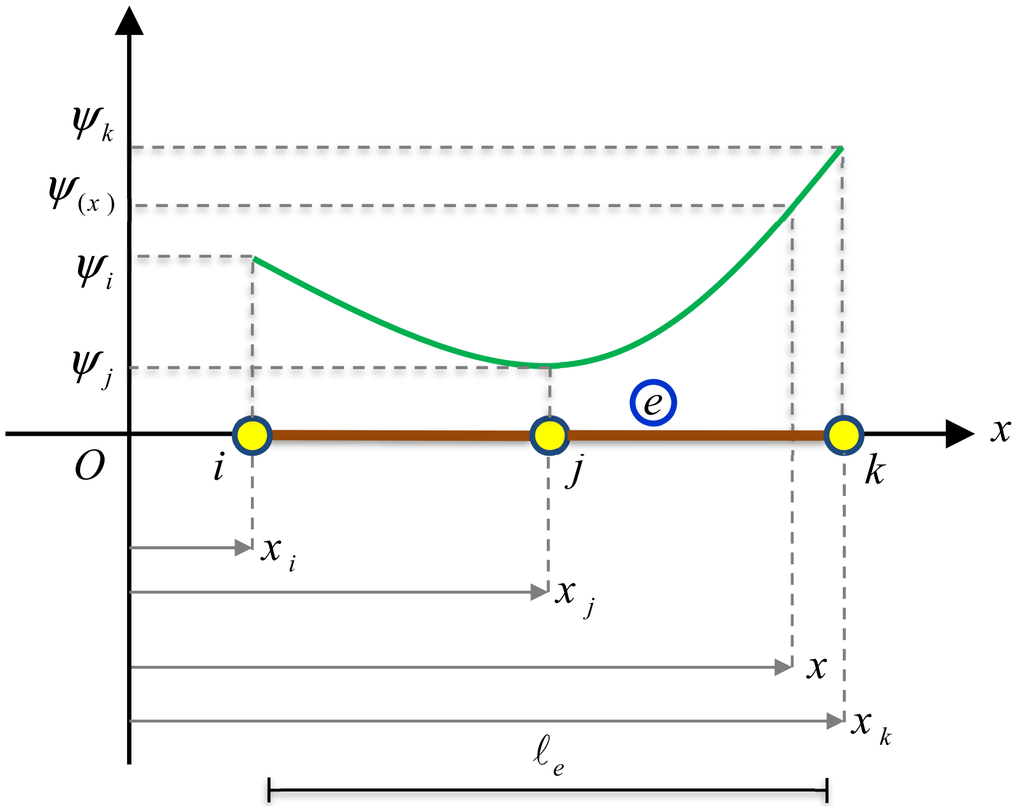
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان درجه دوم یک بعدی (One-dimensional Quadratic Element)

پاسخ تقریبی به صورت زیر رسم می‌شوند:

$$\psi_{(x)}^{(e)} = N_i(x)\psi_i + N_j(x)\psi_j + N_k(x)\psi_k$$



نمودار تغییرات تابع تقریبی درجه دوم $\psi^{(e)}_{(x)}$ بر روی المان e اُم

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

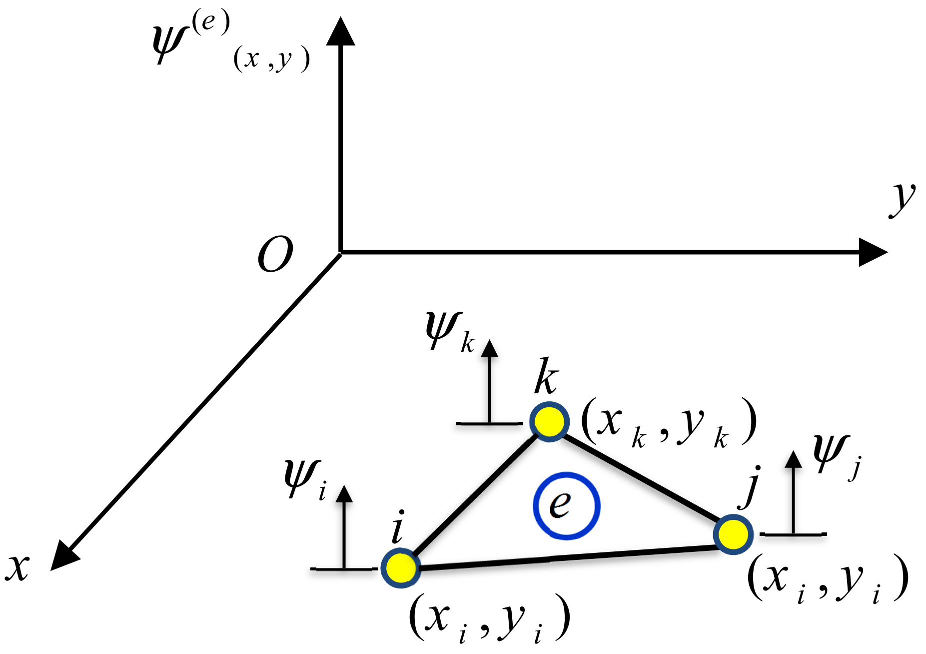
المان مثلثی خطی (Linear Triangular Element)

المان مثلثی خطی دارای لبه‌های مستقیم و یک گره در هر گوشه است.

پاسخ تقریبی در المان eاُم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\psi^{(e)}_{(x)} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad (30)$$

تابع تقریبی یک چند جمله ای کامل بر حسب x و y است؛ زیرا شامل یک عبارت ثابت و تمام جمله‌های ممکن بر حسب x و y می‌باشد. در نتیجه، المان مثلثی می‌تواند هر گونه جهت‌گیری را در حوزه داشته باشد. در اینجا، α_1، α_2 و α_3 ثابت‌هایی هستند که مقدار آنها را می‌توان بر حسب مجهولات گرهی بیان کرد. از آنجایی که تابع تقریبی دارای سه ثابت است از این رو المان مثلثی خطی باید دارای 3 گره باشد. اگر شماره گره‌های را با i، j و k نشان داهیم؛ از این رو، مقدارگرهی متناظر نیز برابر با $\psi_{(x_i,y_i)}$، $\psi_{(x_j,y_j)}$ و $\psi_{(x_k,y_k)}$ خواهد بود.



روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان مثلثی خطی (Linear Triangular Element)

رابطه (30) تابع تقریبی را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت:

$$\psi^{(e)}_{(x,y)} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \qquad (31)$$

که در آن:

$$\mathbf{P} = \{1 \quad x \quad y\} \quad , \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \qquad (32)$$

تابع تقریبی باید در هر یک از گره‌ها برقرار باشد. از این رو، با جایگذاری مختصات گره‌ها در رابطه (30) مجموعه معادلات زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ \psi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ \psi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{aligned} \qquad (33)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان مثلثی خطی (Linear Triangular Element)

فرم ماتریسی رابطه (33) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}} \quad (34)$$

که در آن:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}} \quad (35)$$

با حل رابطه (35) بردار $\boldsymbol{\alpha}$ به دست می‌آید:

$$(35) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\psi}} \quad (36)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان مثلثی خطی (Linear Triangular Element)

با جایگذاری مقادیر ثابت α_1 ، α_2 و α_3 از رابطه (36) در رابطه پاسخ تقریبی رابطه (30) خواهیم داشت:

$(36) \rightarrow (30) \quad \Rightarrow$

$$\psi_{(x,y)}^{(e)} = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)\psi_i + \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y)\psi_j + \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y)\psi_k \quad (37)$$

پارامتر A مساحت سطح المان است و از رابطه رو به رو به دست می‌آید:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (38)$$

با تعریف:

$$\begin{aligned} N_i(x,y) &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j(x,y) &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k(x,y) &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (39)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

توابع شکل (Shape Functions)

المان مثلثی خطی (Linear Triangular Element)

که در آن:

$$
\begin{array}{lll}
a_i = x_j y_k - x_k y_j & b_i = y_j - y_k & c_i = x_k - x_j \\
a_j = x_k y_i - x_i y_k & b_j = y_k - y_i & c_j = x_i - x_k \\
a_k = x_i y_j - x_j y_i & b_k = y_i - y_j & c_k = x_j - x_i
\end{array}
\qquad (40)
$$

رابطه (37) به صورت زیر در می‌آید:

$$
(39) \rightarrow (37) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x,y)}^{(e)} = N_i(x,y)\psi_i + N_j(x,y)\psi_j + N_k(x,y)\psi_k \qquad (41)
$$

فرم ماتریسی رابطه (41) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\psi_{(x,y)}^{(e)} = \mathbf{N}(x,y)\boldsymbol{\psi} \qquad (42)
$$

که در آن:

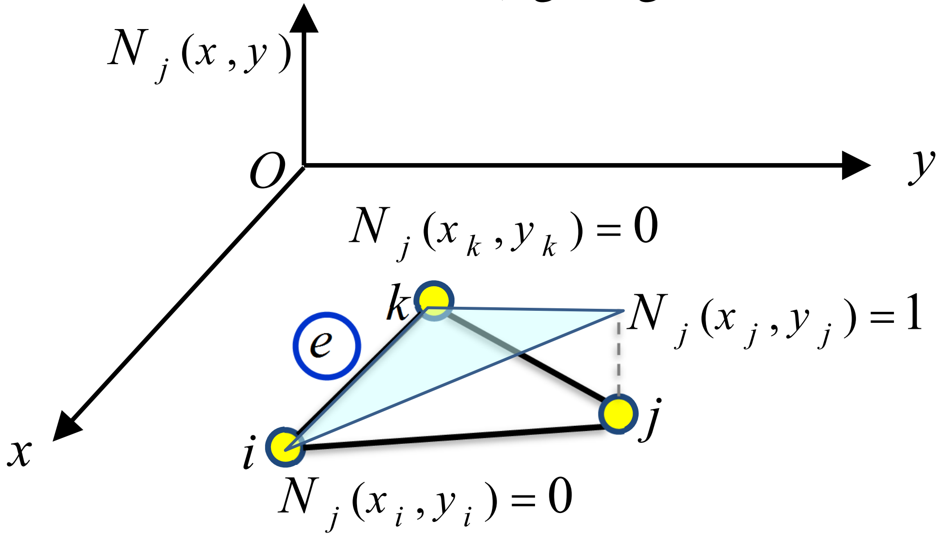
$$
\mathbf{N}(x,y) = \{N_i(x,y) \quad N_j(x,y) \quad N_k(x,y)\} \qquad (43)
$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

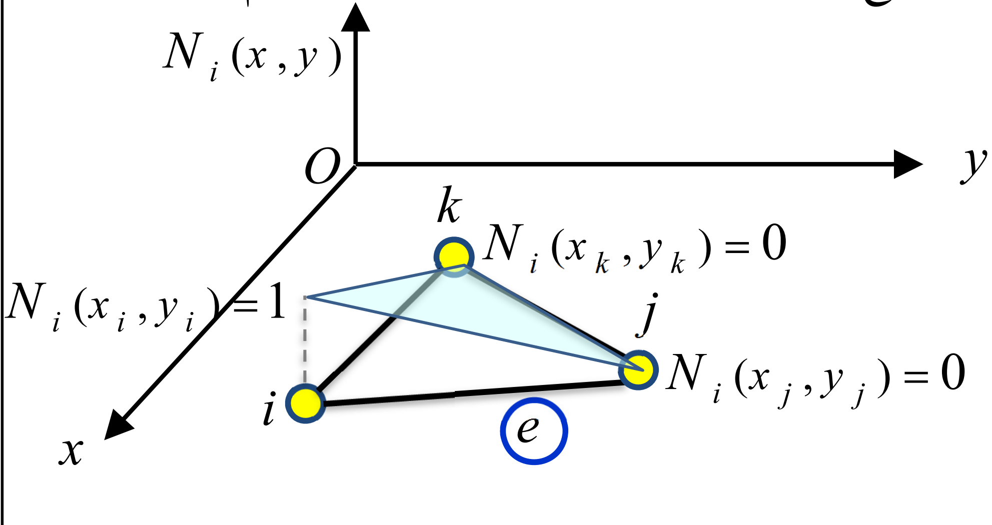
توابع شکل (Shape Functions)

المان مثلثی خطی (Linear Triangular Element)

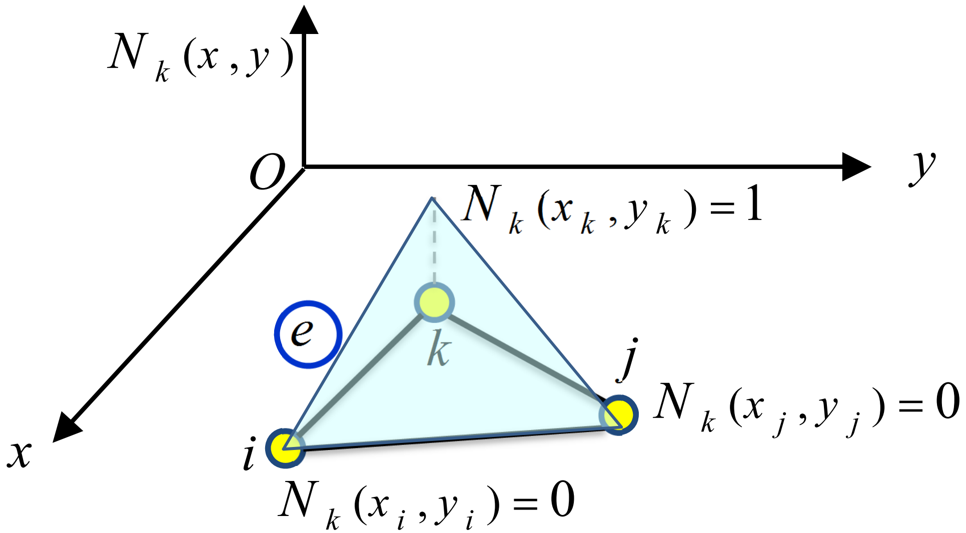
نمودار توابع شکل بر روی المان به صورت زیر رسم می‌شوند:



نمودار تابع شکل $N_j(x,y)$ بر روی المان مثلثی خطی



نمودار تابع شکل $N_i(x,y)$ بر روی المان مثلثی خطی



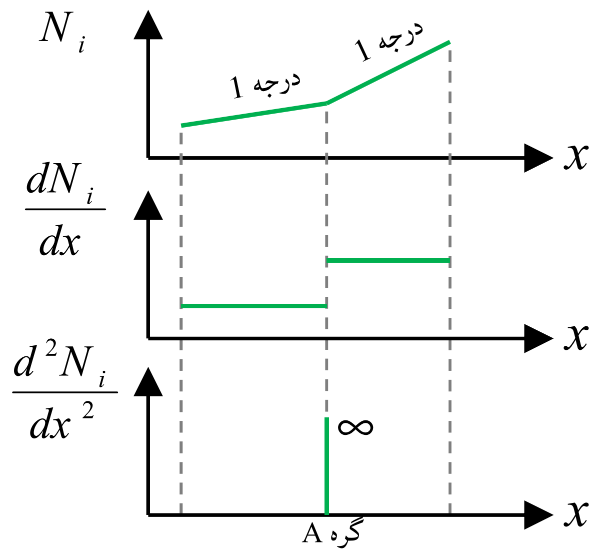
نمودار تابع شکل $N_k(x,y)$ بر روی المان مثلثی خطی

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

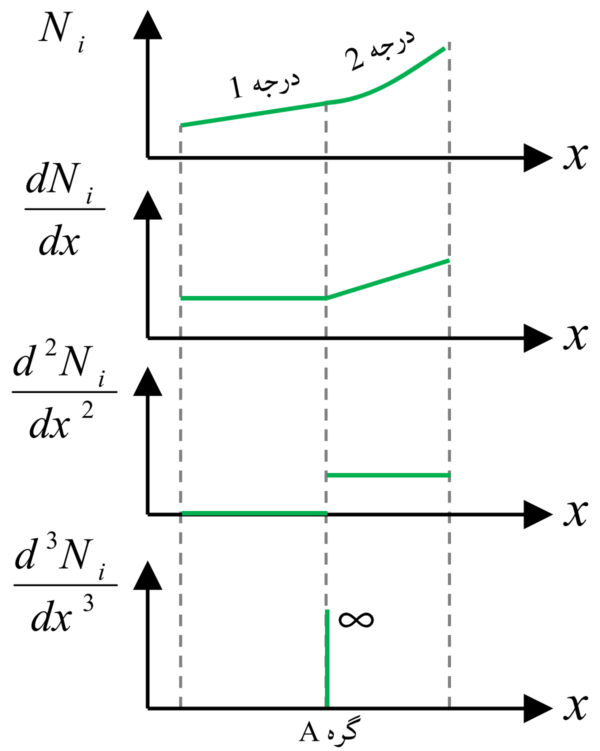
ویژگی‌های توابع شکل (Properties of Shape Functions)

الف- شرایط پیوستگی (Continuity conditions)

1) شرط پیوستگی مشتقات. اگر درجه دیفرانسیلی $R_{(x)}$ در روش ریتز گالرکین (RGM) پس از اعمال انتگرال‌گیری جزء به جزء معادل S باشد توابع شکل باید به صورت C^{S-1} پیوسته و مشتق‌پذیر باشد. C مخفف همان Continuity است.



در گره A پیوستگی این تابع شکل C^0 است. یعنی درجه مشتق‌پذیری آن صفر و فقط خود تابع پیوسته است. مشتق‌های آن پیوسته نیست.

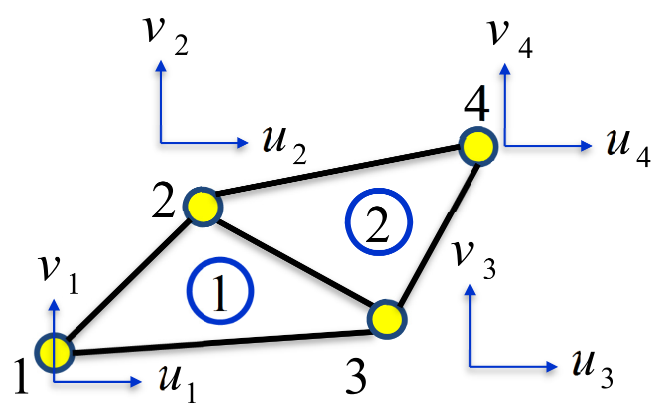


در گره A پیوستگی این تابع شکل C^1 است. یعنی درجه مشتق‌پذیری آن صفر و فقط خود تابع پیوسته است. مشتق‌های آن پیوسته نیست.

ویژگی‌های توابع شکل (Properties of Shape Functions)

الف- شرایط پیوستگی (Continuity conditions)

2) پیوستگی در گره‌ها ارضا شود. این مطلب به سادگی می‌تواند با تعریف درجات آزادی که متعلق به گره هستند (نه به گره یک المان خاص) این شرط به طور خودکار تامین می‌شود.

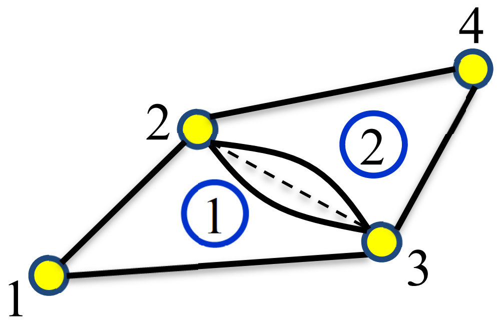


به طور مثال درجات آزادی u_3 و v_3 مربوط به گره 3 می‌باشد. کاری به آن نداریم که گره 3 مربوط به المان 1 است یا 2.

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

ویژگی‌های توابع شکل (Properties of Shape Functions)

الف- شرایط پیوستگی (Continuity conditions)



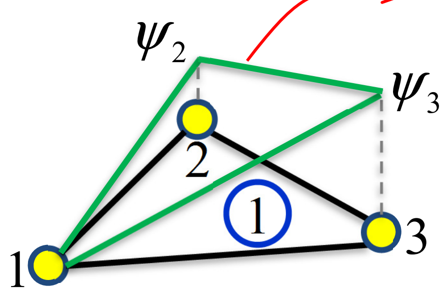
3) پیوستگی در لبه‌ها ارضا شود. به طور مثال اگر پیوستگی در لبه‌ها اتفاق نیافتد در لبه 2-3 یک فاصله (Gap) ایجاد می‌شود که با واقعیت مغایرت دارد. از این رو این GAP باید رفع شود.

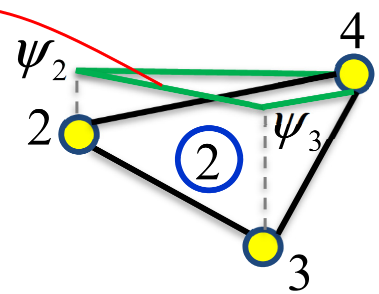
برای ارضای این شرط باید کاری کرد که جابجایی هر لبه به جابجایی‌گره‌های همان لبه وابسته باشد و جابجایی سایر گره‌ها در جابجایی آن لبه تاثیری نداشته باشد.

$$(41) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \psi^{(1)} &= N_1\psi_1 + N_2\psi_2 + N_3\psi_3 \\ \psi^{(2)} &= N_2\psi_2 + N_3\psi_3 + N_4\psi_4 \end{aligned}} \quad (44)$$

$$(44) \Rightarrow \begin{aligned} {\psi_{2-3}}^{(1)} &= \underbrace{N_1}_{0}\psi_1 + N_2\psi_2 + N_3\psi_3 \\ {\psi_{2-3}}^{(2)} &= N_2\psi_2 + N_3\psi_3 + \underbrace{N_4}_{0}\psi_4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} {\psi_{2-3}}^{(1)} &= N_2\psi_2 + N_3\psi_3 \\ {\psi_{2-3}}^{(2)} &= N_2\psi_2 + N_3\psi_3 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{{\psi_{2-3}}^{(1)} = {\psi_{2-3}}^{(2)}} \quad (45)$$

$$N_2\psi_2 + N_3\psi_3$$





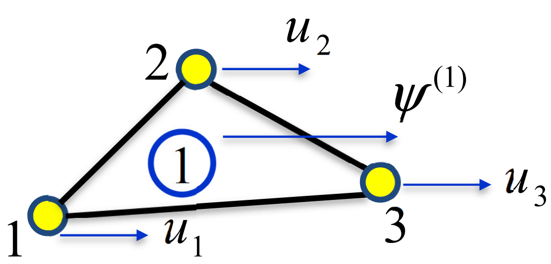
روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

ویژگی‌های توابع شکل (Properties of Shape Functions)

ب- شرایط کامل بودن (Completeness condition)

1) تابع شکل باید به صورتی تعریف گردد که اگر S (درجه دیفرانسیلی $R_{(x)}$ در روش ریتز گالرکین پس از اعمال انتگرال‌گیری جزء به جزء) بار از آن مشتق گرفته شودحاصل مقدار ثابت شود.

2) تابع شکل باید به صورتی تعریف شود که امکان حرکت صلب گونه در المان را میسر سازد.



$$\left.\begin{array}{ll} (41) \quad \Rightarrow & \psi^{(1)} = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ \text{حرکت صلب گونه} \quad \Rightarrow & u_1 = u_2 = u_3 = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \psi^{(1)} = (N_1 + N_2 + N_3)\alpha \overset{\text{باید}}{\Rightarrow} N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

$$\overset{\text{تا}}{\Rightarrow} \psi^{(1)} = \alpha$$

بنابراین مجموع توابع شکل در کل المان برابر با یک است.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} N_i(x) = 1} \quad (46)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

ویژگی‌های عمومی توابع شکل (General properties of Shape Functions)

1) تعداد توابع شکل یک المان به تعداد گره‌های المان بستگی دارد. هر تابع شکل به یک گره منحصر به فرد مرتبط است.

2) هر تابع شکل دارای مقدار یک در گره خود و صفر در گره‌های دیگر است.

4) توابع شکل و تابع تقریبی (چند جمله‌ای درون‌یابی) یک المان از یک مرتبه (نوع) هستند. به طور مثال اگر تابع تقریبی درجه دوم باشد در نتیجه توابع شکل حاصل نیز درجه دوم هستند.

5) جمع مشتق توابع شکل نسبت به متغیر مستقل برابر با صفر است.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x)\right) = 0} \quad (47)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

با فرض استفاده از المان خطی یک بعدی تابع تقریبی نظیر المان e اُم بر اساس رابطه (14) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = N_i^{(e)}(x)\psi_i + N_j^{(e)}(x)\psi_j} \quad (14)$$

$N_i^{(e)}(x)$: تابع شکل نظیر گره i اُم در المان e اُم

$N_j^{(e)}(x)$: تابع شکل نظیر گره j اُم در المان e اُم

ψ_i : مقدار تابع تقریبی در گره i اُم

ψ_j : مقدار تابع تقریبی در گره j اُم

توابع شکل در المان خطی یک بعدی از رابطه (13) به دست می‌آیند:

$$\boxed{N_i^{(e)}(x) = \left(\frac{x_j - x}{\ell_e}\right) \quad , \quad N_j^{(e)}(x) = \left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right)} \quad (13)$$

که در آن طول المان e اُم برابر است با:

$$\boxed{\ell_e = x_j - x_i} \quad (5)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

همان طور که پیش‌تر اشاره شد در روش المان محدود کل حوزه به تعداد محدودی زیر- حوزه تبدیل می‌شود به طوری که زیر – حوزه‌ها با هم همپوشانی نداشته باشند.

$$\left.\begin{array}{ll} (2): & \Omega = \bigcup_{e=1}^{m} \Omega^{(e)} \\ (L2-52): & \int_{\Omega} \mathbf{W}(x) R_{(x)} dx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathbf{W}(x) R_{(x)} dx = 0 = \sum_{e=1}^{m} \left(\int_{e} \mathbf{W}_{(x)}^{(e)} R_{(x)}^{(e)} dx \right) = 0} \quad (48)$$

m : تعداد زیر حوزه (المان‌های) سیستم

$R_{(x)}^{(e)}$: مقدار باقیمانده بر روی زیر حوزه یا المان e اُم که براساس رابطه (L3-4) به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\boxed{\mathcal{L}(\psi_{(x)}^{(e)}) + p_{(x)}^{(e)} = R_{(x)}^{(e)} \qquad in \quad \Omega} \quad (49)$$

که در آن

$$\boxed{\psi_{(x)}^{(e)} = \mathbf{N}_{(x)}^{(e)} \boldsymbol{\psi}^{(e)} \quad \mathbf{N}_{(x)}^{(e)} = \left\{ N_i^{(e)}(x) \quad N_j^{(e)}(x) \right\} \quad \boldsymbol{\psi}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{Bmatrix}} \quad (50)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

تابع وزنی براساس روش گارکین به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{W}_{(x)}^{(e)} = \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T = \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix}} \qquad (51)$$

با جایگذاری رابطه (51) در رابطه (48) یک دستگاه n معادله n مجهول به دست می‌آید:

$$(51) \rightarrow (48) \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T R_{(x)}^{(e)} dx\right) = 0} \qquad (52)$$

n : تعداد تمامی گره‌های سیستم

عبارت داخل سیگما در رابطه (52) یک دستگاه دو معادله دو مجهول در سطح المان e اُم است که فرمت ماتریسی آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T R_{(x)}^{(e)} dx \quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{s}^{(e)}\boldsymbol{\psi}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}} \quad (53)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{s}^{(e)} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \boldsymbol{\psi}^{(e)} \in \mathbb{R}^{2} \quad \mathbf{f}^{(e)} \in \mathbb{R}^{2}} \quad (54)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

بعد از آن که رابطه (54) برای تمامی زیر-حوزه‌ها (المان‌ها) نوشته شد در نهایت معادلات در کل حوزه با سرهم‌بندی کردن (Assembling) معادلات المان‌ها (52) به دست می‌آید. فرمت ماتریسی رابطه (52) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{S}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F}} \quad (55)$$

که در آن:

$$\boxed{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{s}^{(e)} \qquad \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{n} = \sum_{e=1}^{m} \boldsymbol{\psi}^{(e)} \qquad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n} = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{f}^{(e)}} \quad (56)$$

اعمال شرایط مرزی:

باید شرایط مرزی در تعیین مقدار تابع تقریبی در گره‌ها لحاظ گردد. از این رو، با فرض آن که اگر مقدار تابع تقریبی در گره‌های p_1 تا p_r معلوم باشد:

$$\boxed{\psi_{p_1} = \alpha_1 \quad , \quad \psi_{p_2} = \alpha_2 \quad , \quad \cdots \quad , \quad \psi_{p_r} = \alpha_r} \quad (57)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

اعمال شرایط مرزی:

سطر و ستون‌های p_1 تا p_r از ماتریس $\mathbf{S}$ و بردار $\mathbf{F}$ حذف می‌گردد و ابعاد پارامترهای رابطه (55) به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\boxed{\begin{gathered}\bar{\mathbf{S}}\bar{\boldsymbol{\psi}} = \bar{\mathbf{F}} \\ \bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)} \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\psi}} \in \mathbb{R}^{(n-r)} \quad , \quad \bar{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{(n-r)}\end{gathered}} \qquad (58)$$

$\bar{\boldsymbol{\psi}} \in \mathbb{R}^{(n-r)}$: بردار مقادیر گرهی است که مقدار آن‌ها معلوم نمی‌باشد.

هریک از درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{F}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\bar{F}_i = F_i - (S_{i,p_1}\alpha_1 + S_{i,p_2}\alpha_2 + \cdots + S_{i,p_r}\alpha_r)} \qquad (59)$$

اندیس i مربوط به تمام گره‌هایی است که مقدار تابع تقریبی در آن معلوم نمی‌باشد. در نهایت بردار مقادیر گرهی مجهول از حل رابطه (58) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

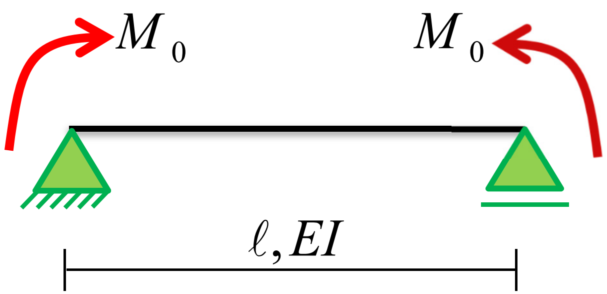
$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\psi}} = \bar{\mathbf{S}}^{-1}\bar{\mathbf{F}}} \qquad (60)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

مثال 1- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل خیز تیر نشان داده شده را به روش FEM محاسبه نمایید.

$$EI\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2}-M_0=0 \qquad x\in(0,\ell)$$



$$BC:\begin{cases} @x=0 \Rightarrow y_{(0)}=0 \\ @x=\ell \Rightarrow y_{(\ell)}=0 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

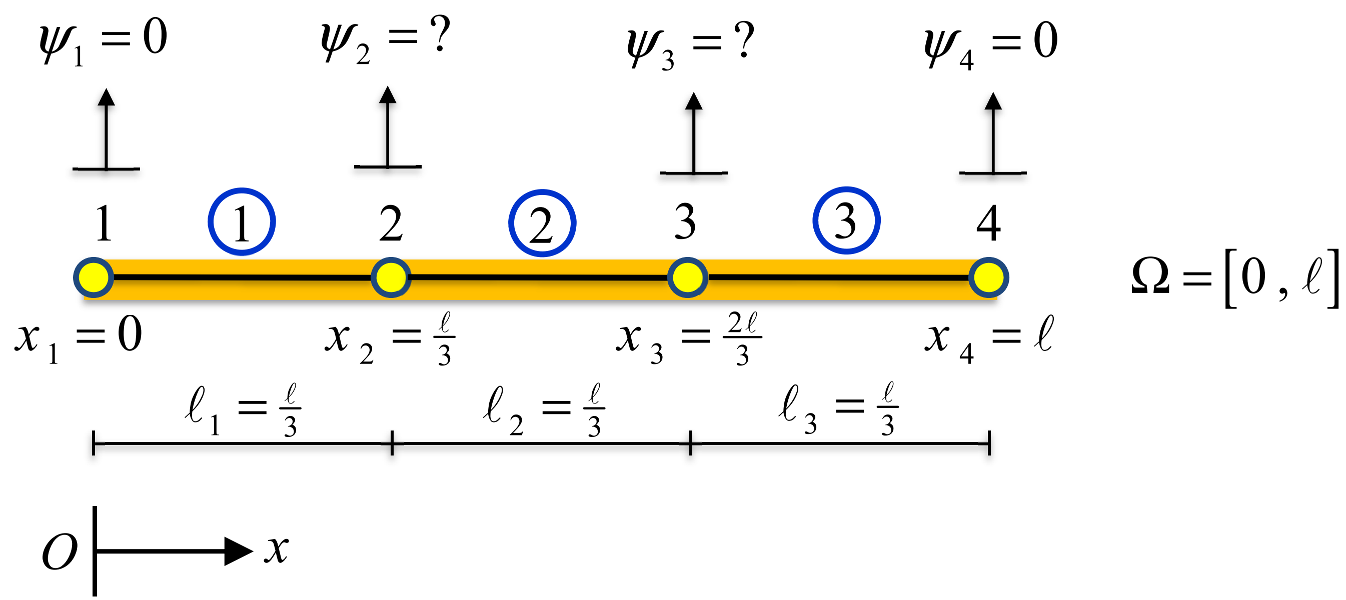
$$y_{(x)}=\frac{M_0}{2EI}x(x-\ell)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

در این جا کل حوزه به سه زیر حوزه تقسیم می‌شود.



روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- مقدار باقیمانده براساس رابطه (49) محاسبه می‌گردد:

با جایگذاری مقدار باقیمانده در رابطه (52) نتیجه می‌شود:

با بسط رابطه (1.2) خواهیم داشت:

$$(1.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\frac{d^{2}\psi_{(x)}^{(e)}}{dx^{2}}dx\right)-\frac{M_{0}}{EI}\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}dx\right)=0} \quad (1.3)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء عبارت اول در رابطه (1.3) ساده می‌گردد:

$$\int_e \underbrace{\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T}_{u} \underbrace{\frac{d^2\psi_{(x)}^{(e)}}{dx^2}}_{v'} dx$$

$$u \qquad v' \Rightarrow \int uv'dx = uv - \int u'v dx$$

با جایگذاری رابطه (1.4) در رابطه (1.3) نتیجه می‌شود:

$$(1.4) \to (1.3) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}dx\right) = \sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e\right) - \frac{M_0}{EI}\sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T dx\right)} \qquad (1.5)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء منجر به دو نتیجه مهم شده است:

$$\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}dx\right)=\sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{e}\right)-\frac{M_{0}}{EI}\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}dx\right)$$

1- به صورت طبیعی اعمال تعدادی شرایط مرزی در گره‌ها به طور مستقیم در حل دستگاه معادلات وارد می‌شود.

2- درجه مشتق یک مرتبه کاهش یافته است (درجه دو به درجه یک) این امر باعث می‌شود که حفظ پیوستگی فقط در تابع تقریبی نیاز باشد و نیازی به رعایت پیوستگی در $\frac{d}{dx}\psi_{(x)}^{(e)}$ نیست.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

با جایگذاری تابع تقریبی از رابطه (50) در عبارات سمت چپ رابطه (1.5) خواهیم داشت:

با توجه به رابطه (1.6) پارامترهای رابطه (53) به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{s}^{(e)} &= \int_e \left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^T \frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx} dx \\ \mathbf{f}^{(e)} &= \left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e - \frac{M_0}{EI}\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T dx \end{aligned}} \qquad (1.7)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (50) در رابطه (1.7) خواهیم داشت:

$$
(50) \rightarrow (1.7) \quad \Rightarrow \quad
\boxed{
\begin{aligned}
\mathbf{s}^{(e)} &= \int_e \begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \\[2mm] \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} & \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} dx \\
\mathbf{f}^{(e)} &= \left(\begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right) \Bigg|_e - \frac{M_0}{EI} \int_e \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} dx
\end{aligned}
}
\qquad (1.8)
$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- با بسط دادن رابطه (1.8) نتیجه می‌شود:

$$(1.8) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathbf{s}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \int_e \frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}dx & \int_e \frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}dx \\ \int_e \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}dx & \int_e \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}dx \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^{(e)} &= \begin{Bmatrix} \left.\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e - \frac{M_0}{EI}\int_e N_i^{(e)}(x)dx \\ \left.\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e - \frac{M_0}{EI}\int_e N_j^{(e)}(x)dx \end{Bmatrix} \end{aligned}} \qquad (1.9)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- مشتق توابع شکل به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}&=-\frac{1}{\ell_e}\\ \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}&=\frac{1}{\ell_e}\end{aligned}} \qquad (1.10)$$

همچنین درایه‌های بردار $\mathbf{f}^{(e)}$ به صورت زیر ساده می‌شود:

(1.11)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e&=-\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\Bigg|_{x_i}\\ \left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e&=\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\Bigg|_{x_j}\end{aligned}}$$

$$\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e=\left(\overset{1}{\cancel{N_j^{(e)}}}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{x_j}-\left(\overset{0}{\cancel{N_j^{(e)}}}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{x_i}\Rightarrow$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

با جایگذاری روابط (1.10) و (1.11) در رابطه (1.9) خواهیم داشت:

$$(1.10)\,\&\,(1.11)\rightarrow(1.9)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{s}^{(e)}=\begin{bmatrix}\displaystyle\int_e \frac{1}{\ell_e^{\,2}}dx & \displaystyle-\int_e \frac{1}{\ell_e^{\,2}}dx\\ \displaystyle-\int_e \frac{1}{\ell_e^{\,2}}dx & \displaystyle\int_e \frac{1}{\ell_e^{\,2}}dx\end{bmatrix}\\ \mathbf{f}^{(e)}=\begin{Bmatrix}\displaystyle-\left.\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i} & \displaystyle-\frac{M_0}{EI}\int_e N_i^{(e)}(x)dx\\ \displaystyle\left.\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j} & \displaystyle-\frac{M_0}{EI}\int_e N_j^{(e)}(x)dx\end{Bmatrix}\end{array}}\qquad(1.12)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- درایه‌های ماتریس $\mathbf{s}^{(e)}$ و بردار $\mathbf{f}^{(e)}$ در رابطه (1.12) را محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{\int_e N_i^{(e)}(x)dx = \frac{\ell_e}{2}} \quad (1.14)$$

$$\int_e N_j^{(e)}(x)dx \stackrel{(13)}{=} \int_e \left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right)dx = \frac{1}{\ell_e}\left(\frac{x^2}{2} - x_i x\right)\Bigg|_{x_i}^{x_j} \Rightarrow \boxed{\int_e N_j^{(e)}(x)dx = \frac{\ell_e}{2}} \quad (1.15)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

با جایگذاری روابط (1.13) تا (1.15) در رابطه (1.12) خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathbf{s}^{(e)} = \frac{3}{\ell}\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}} \qquad (1.16)$$

$$\boxed{\mathbf{f}^{(e)} = \left\{\begin{array}{c} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i} - \dfrac{M_0\ell}{6EI} \\[2ex] \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j} - \dfrac{M_0\ell}{6EI} \end{array}\right\}\begin{array}{c} i \\[2ex] j \end{array}} \qquad (1.17)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- روابط (1.16) و (1.17) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{s}^{(2)}=\begin{bmatrix} s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} \\ s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} \end{bmatrix}=\frac{3}{\ell}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad (1.19)$$

$$\mathbf{s}^{(3)}=\begin{bmatrix} s_{11}^{(3)} & s_{12}^{(3)} \\ s_{21}^{(3)} & s_{22}^{(3)} \end{bmatrix}=\frac{3}{\ell}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array} \qquad (1.20)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- روابط (1.16) و (1.17) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{f}^{(2)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{\ell}{3}}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2\ell}{3}}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \end{Bmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad (1.22)$$

$$\mathbf{f}^{(3)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2\ell}{3}}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\ell}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \end{Bmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \qquad (1.23)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{s}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{S}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{S} = \frac{3}{\ell}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}} \quad (1.24)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{f}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی **F** به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F}=\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{\ell}{3}}-\dfrac{M_0\ell}{6EI}-\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{\ell}{3}}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2\ell}{3}}-\dfrac{M_0\ell}{6EI}-\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2\ell}{3}}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\ell}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F}=\begin{array}{c} \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \\ -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\ell}-\dfrac{M_0\ell}{6EI} \end{Bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}} \quad (1.25)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- با جایگذاری روابط (1.24) و (1.25) در دستگاه معادلات (55) خواهیم داشت:

$$(1.24)\ \&\ (1.25) \rightarrow (55) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{3}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 - \dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \\ -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_\ell - \dfrac{M_0\ell}{6EI} \end{Bmatrix}} \qquad (1.26)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

اعمال شرایط مرزی:

سطر و ستون‌های 1 و 4 از ماتریس **S** و بردار **F** حذف می‌گردد.

$$\frac{3}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi^{(e)}_{(x)}}{dx}\right|_0 - \dfrac{M_0\ell}{6EI} \\ -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \\ -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \\ \left.\dfrac{d\psi^{(e)}_{(x)}}{dx}\right|_\ell - \dfrac{M_0\ell}{6EI} \end{Bmatrix}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی:

بر اساس رابطه (59) هریک از درایه‌های بردار $\overline{\mathbf{F}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\overline{F}_2 = -\frac{M_0\ell}{3EI}} \qquad (1.28)$$

$$\overline{F}_3 = F_3 - (S_{3,1}\alpha_1 + S_{3,4}\alpha_4) = -\frac{M_0\ell}{3EI} - \left((0)(0) + \left(-\frac{3}{\ell}\right)(0)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{F}_3 = -\frac{M_0\ell}{3EI}} \qquad (1.29)$$

در نتیجه رابطه (58) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{3}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \\ -\dfrac{M_0\ell}{3EI} \end{Bmatrix}} \qquad (1.30)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

از حل رابطه (1.30) خواهیم داشت:

$$(3.30)\quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \left(\frac{3}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} -\dfrac{M_0 \ell}{3EI} \\ -\dfrac{M_0 \ell}{3EI} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{M_0 \ell^2}{9EI} \\ -\dfrac{M_0 \ell^2}{9EI} \end{Bmatrix}} \qquad (1.31)$$

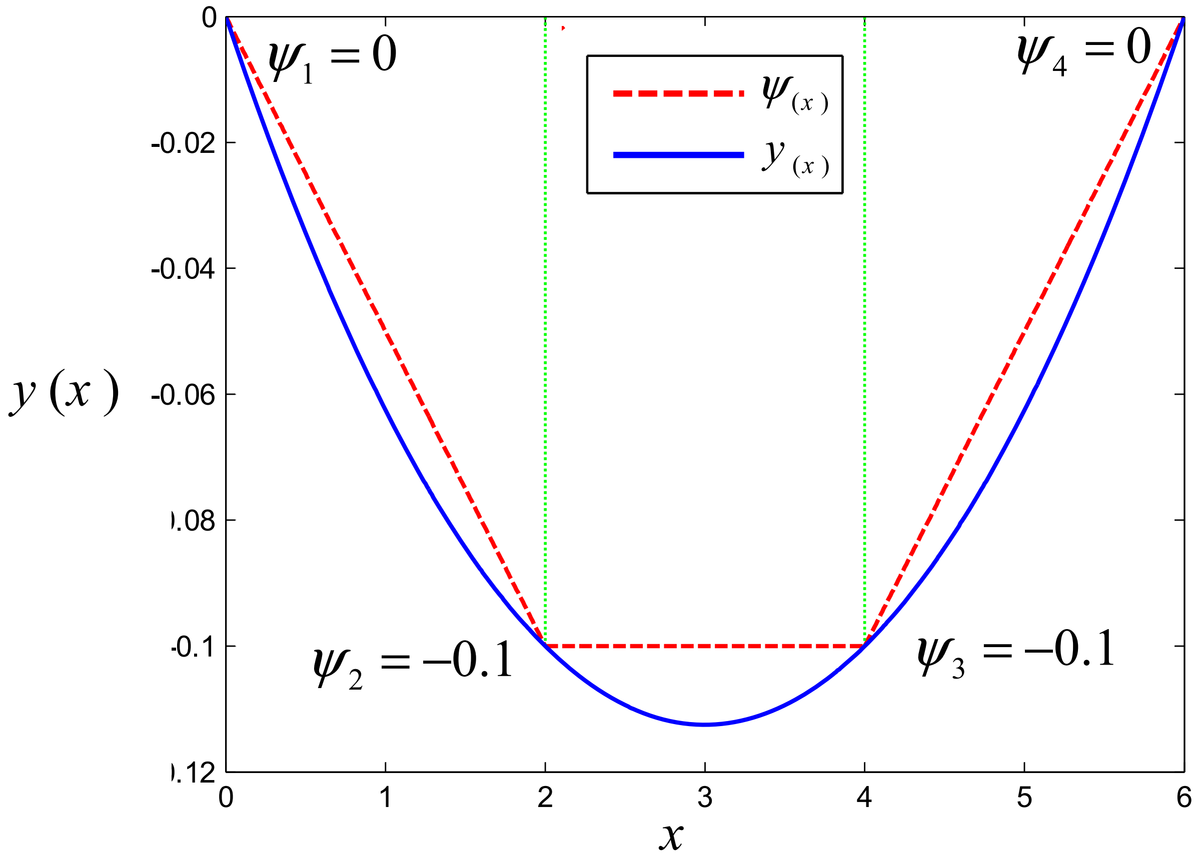
براساس رابطه (1.31) بردار کلی $\boldsymbol{\psi}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{M_0 \ell^2}{9EI} \\ -\dfrac{M_0 \ell^2}{9EI} \\ 0 \end{Bmatrix}} \qquad (1.32)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر در حالت 3 زیر حوزه

$$(M_0 = 5 \quad , \quad EI = 200 \quad , \quad \ell = 6)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

مشاهده شد که با تقسیم‌بندی کل حوزه به سه زیر حوزه دقت پاسخ تقریبی به دست آمده زیاد نمی‌باشد. از این رو، در ادامه با فرض تقسیم کل حوزه به 10 زیر حوزه، پاسخ تقریبی محاسبه خواهد شد.

روابط (1.16) و (1.17) به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\mathbf{s}^{(e)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(e)} & s_{12}^{(e)} \\ s_{21}^{(e)} & s_{22}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\ell_e} & -\dfrac{1}{\ell_e} \\ -\dfrac{1}{\ell_e} & \dfrac{1}{\ell_e} \end{bmatrix} \xRightarrow{\ell_e = \frac{\ell}{10}} \boxed{} \qquad (1.33)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i} - \dfrac{M_0 \ell_e}{2EI} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j} - \dfrac{M_0 \ell_e}{2EI} \end{Bmatrix} \xRightarrow{\ell_e = \frac{\ell}{10}} \boxed{} \qquad (1.34)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-

با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{s}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{S}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$
\Rightarrow \mathbf{S}=\frac{10}{\ell}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array}
\qquad (1.35)
$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{f}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{F}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\mathbf{F}=-\frac{M_0\ell}{10EI}\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c}\left.\dfrac{10EI}{M_0\ell}\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0+\dfrac{1}{2}\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ \left.-\dfrac{10EI}{M_0\ell}\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_\ell+\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\end{array}\begin{array}{l}1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9\\ 10\\ 11\end{array}\qquad(1.36)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- با جایگذاری روابط (1.33) و (1.34) در دستگاه معادلات (55) خواهیم داشت:

$$(1.35)\ \&\ (1.36) \rightarrow (55) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \\ \psi_{11} \end{Bmatrix} = -\frac{M_0 \ell^2}{100EI} \begin{Bmatrix} \dfrac{10EI}{M_0 \ell} \left. \dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right|_0 + \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\dfrac{10EI}{M_0 \ell} \left. \dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right|_\ell + \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی:

سطر و ستون‌های 1 و 11 از ماتریس **S** و بردار **F** حذف می‌گردد.

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\\ \psi_5\\ \psi_6\\ \psi_7\\ \psi_8\\ \psi_9\\ \psi_{10}\\ \psi_{11}
\end{Bmatrix}
= -\frac{M_0\ell^2}{100EI}
\begin{Bmatrix}
\left.\frac{10EI}{M_0\ell}\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 + \frac{1}{2}\\
1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\
-\left.\frac{10EI}{M_0\ell}\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_\ell + \frac{1}{2}
\end{Bmatrix}
$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی:

بر اساس رابطه (59) هریک از درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{F}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F}_2 = F_2 - (S_{2,1}\alpha_1 + S_{2,11}\alpha_{11}) = -\frac{M_0\ell^2}{100EI} - \big((-1)(0) + (0)(0)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_2 = -\frac{M_0\ell^2}{100EI}} \quad (1.38)$$

$$\boxed{\bar{F}_3 = -\frac{M_0\ell^2}{100EI}} \quad (1.39)$$

$$\vdots$$

$$\bar{F}_{10} = F_{10} - (S_{10,1}\alpha_1 + S_{10,11}\alpha_{11}) = -\frac{M_0\ell^2}{100EI} - \big((0)(0) + (-1)(0)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_{10} = -\frac{M_0\ell^2}{100EI}} \quad (1.40)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1- اعمال شرایط مرزی:

در نتیجه رابطه (58) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \end{Bmatrix} = -\frac{M_0 \ell^2}{100EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (1.41)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

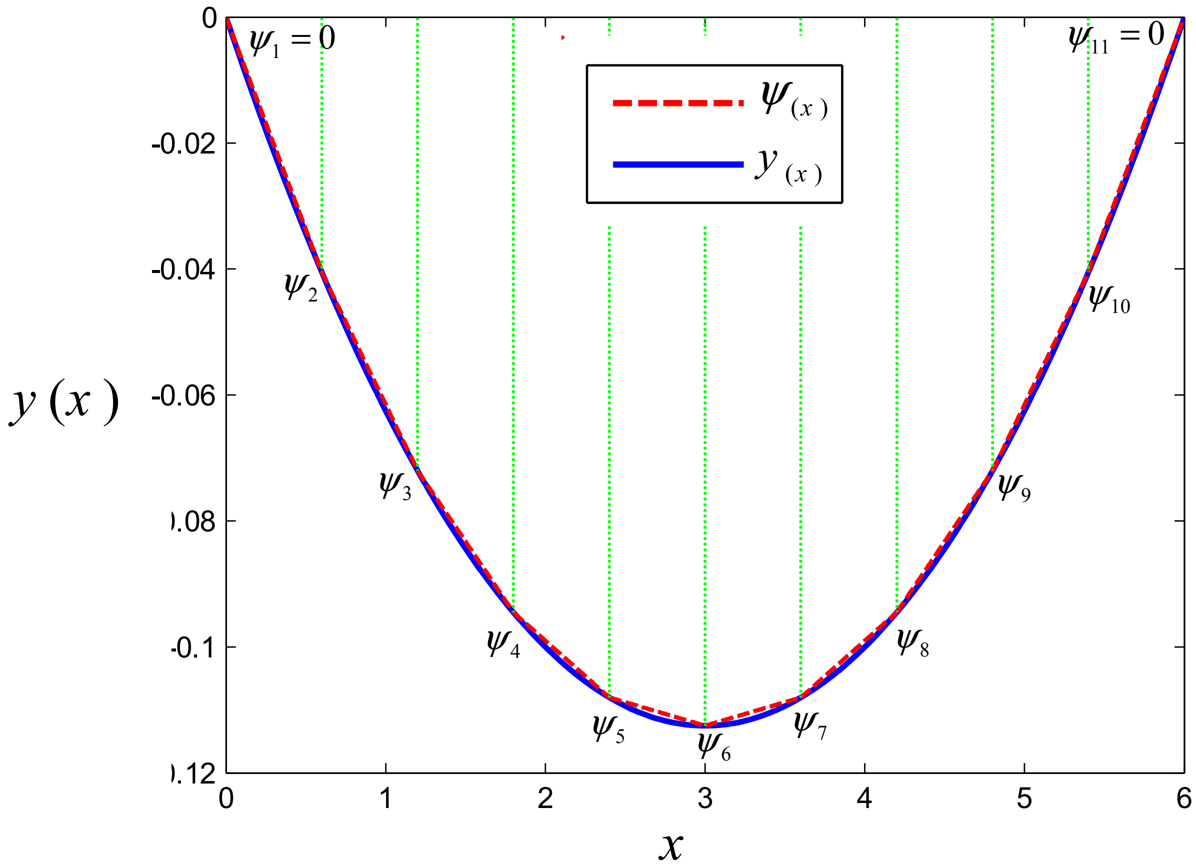
پاسخ مثال 1- در نهایت بردار کلی $\boldsymbol{\psi}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{M_0 \ell^2}{100EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ 4.5 \\ 8 \\ 10.5 \\ 12 \\ 12.5 \\ 12 \\ 10.5 \\ 8 \\ 4.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (1.42)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 1-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر در حالت 10 زیر حوزه

$$(M_0 = 5 \quad , \quad EI = 200 \quad , \quad \ell = 6)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

مثال 2- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش FEM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \qquad x \in (0\,,2) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x=0 \Rightarrow y_{(0)}=0 \\ @x=2 \Rightarrow y_{(2)}=5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

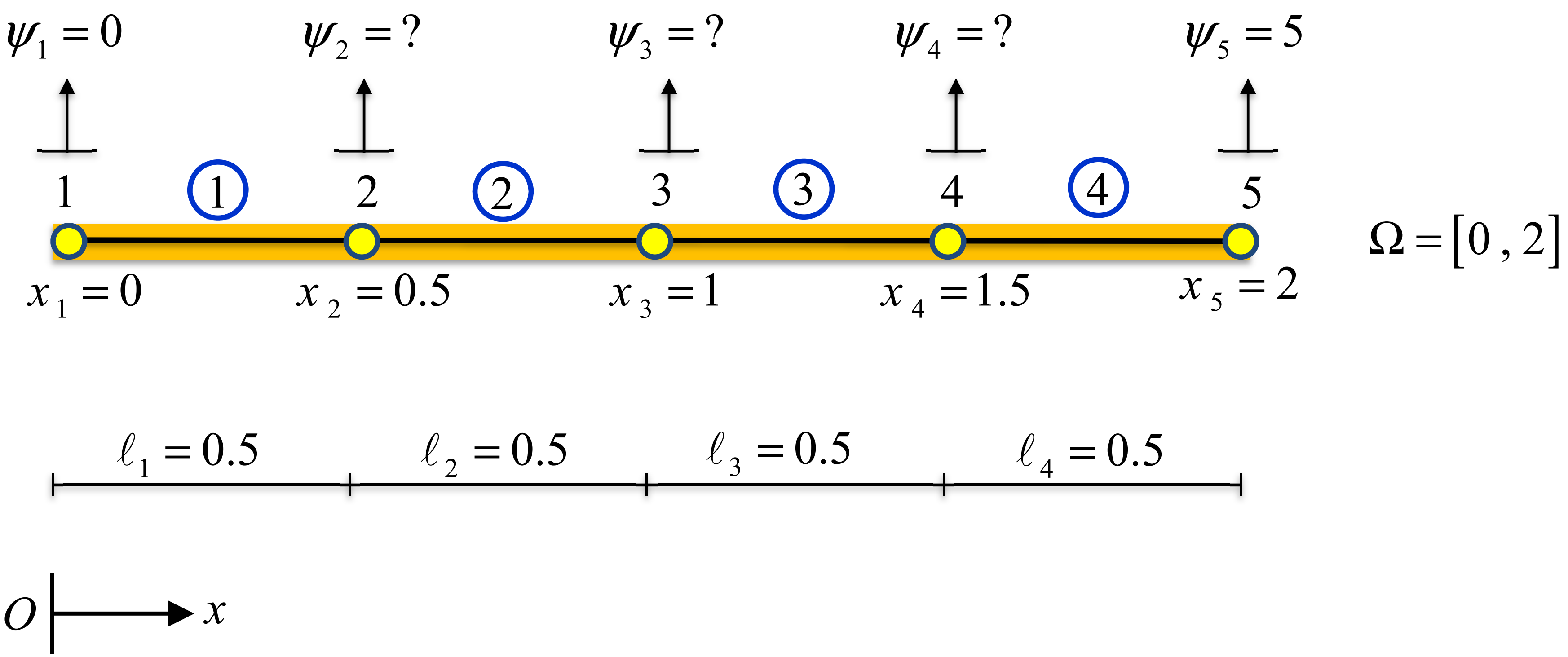
$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)}\sin(x) + x$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

در این جا کل حوزه به چهار زیر حوزه تقسیم می‌شود.



حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- مقدار باقیمانده براساس رابطه (49) محاسبه می‌گردد:

با جایگذاری مقدار باقیمانده در رابطه (52) نتیجه می‌شود:

$$(2.1) \rightarrow (52) \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\left(\frac{d^{2}\psi_{(x)}^{(e)}}{dx^{2}}+\psi_{(x)}^{(e)}-x\right)dx\right)=0} \qquad (2.2)$$

با بسط رابطه (2.2) خواهیم داشت:

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء عبارت اول در رابطه (2.3) ساده می‌گردد:

$$\int_e \underbrace{\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T}_{u} \underbrace{\frac{d^2\psi_{(x)}^{(e)}}{dx^2}}_{v'} dx \qquad v' \Rightarrow \quad \int uv'dx = uv - \int u'v dx$$

با جایگذاری رابطه (2.4) در رابطه (2.3) نتیجه می‌شود:

$$(2.4) \rightarrow (2.3) \quad \Rightarrow \qquad (2.5)$$

$$\boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}dx\right) - \sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \psi_{(x)}^{(e)}dx\right) = \sum_{e=1}^{m}\left(\left.\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e\right) - \sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T x\,dx\right)}$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء منجر به دو نتیجه مهم شده است:

$$\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}dx\right)-\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\psi_{(x)}^{(e)}dx\right)=\sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{e}\right)-\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}x\,dx\right)$$

1- به صورت طبیعی اعمال تعدادی شرایط مرزی در گره‌ها به طور مستقیم در حل دستگاه معادلات وارد می‌شود.

2- درجه مشتق یک مرتبه کاهش یافته است (درجه دو به درجه یک) این امر باعث می‌شود که حفظ پیوستگی فقط در تابع تقریبی نیاز باشد و نیازی به رعایت پیوستگی در $\frac{d}{dx}\psi_{(x)}^{(e)}$ نیست.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

با جایگذاری تابع تقریبی از رابطه (50) در عبارات سمت چپ رابطه (2.5) خواهیم داشت:

با توجه به رابطه (2.6) پارامترهای رابطه (53) به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{s}^{(e)} &= \int_e \left(\left(\frac{d\,\mathbf{N}^{(e)}_{(x)}}{dx} \right)^T \frac{d\,\mathbf{N}^{(e)}_{(x)}}{dx} - \left(\mathbf{N}^{(e)}_{(x)}\right)^T \mathbf{N}^{(e)}_{(x)} \right) dx \\ \mathbf{f}^{(e)} &= \left(\left(\mathbf{N}^{(e)}_{(x)}\right)^T \frac{d\psi^{(e)}_{(x)}}{dx} \right)\Bigg|_e - \int_e \left(\mathbf{N}^{(e)}_{(x)}\right)^T x\,dx \end{aligned}} \qquad (2.7)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (50) در رابطه (2.7) خواهیم داشت:

$$(50) \rightarrow (2.7) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{s}^{(e)} &= \int_e \left(\begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \\[2mm] \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} & \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) & N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \right) dx \\
\mathbf{f}^{(e)} &= \left(\begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right) \Bigg|_e - \int_e \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} x\,dx
\end{aligned}} \quad (2.8)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- با بسط دادن رابطه (2.8) نتیجه می‌شود:

$(2.8) \quad \Rightarrow$

(2.9)

$$\mathbf{s}^{(e)}=\begin{bmatrix} \int_e \frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}dx-\int_e N_i^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x)dx & \int_e \frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}dx-\int_e N_i^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)dx \\ \int_e \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}dx-\int_e N_j^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x)dx & \int_e \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}dx-\int_e N_j^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)dx \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(e)}=\begin{Bmatrix} \left.\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e-\int_e xN_i^{(e)}(x)dx \\ \left.\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e-\int_e xN_j^{(e)}(x)dx \end{Bmatrix}$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- مشتق توابع شکل به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$
(13)\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x_j - x}{\ell_e}\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} = -\frac{1}{\ell_e}} \\
\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} = \frac{1}{\ell_e}}
\end{aligned}
\qquad (2.10)
$$

همچنین درایه‌های بردار $\mathbf{f}^{(e)}$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(2.11)$$

$$
\Rightarrow \boxed{\left.\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e = -\left.\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i}}
$$

$$
\left.\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e = \left.\left(\cancelto{1}{N}{}_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_{x_j} - \left.\left(\cancelto{0}{N}{}_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_{x_i} \Rightarrow \boxed{\left.\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e = \left.\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j}}
$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

با جایگذاری روابط (2.10) و (2.11) در رابطه (2.9) خواهیم داشت:

$$(2.10)\ \&\ (2.11) \rightarrow (2.9) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{s}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\ell_e^2}\int_e dx - \int_e N_i^{(e)}(x) N_i^{(e)}(x)dx & -\dfrac{1}{\ell_e^2}\int_e dx - \int_e N_i^{(e)}(x) N_j^{(e)}(x)dx \\ -\dfrac{1}{\ell_e^2}\int_e dx - \int_e N_j^{(e)}(x) N_i^{(e)}(x)dx & \dfrac{1}{\ell_e^2}\int_e dx - \int_e N_j^{(e)}(x) N_j^{(e)}(x)dx \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i} - \int_e x N_i^{(e)}(x)dx \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j} - \int_e x N_j^{(e)}(x)dx \end{Bmatrix} \qquad (2.12)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- درایه‌های ماتریس $\mathbf{s}^{(e)}$ و بردار $\mathbf{f}^{(e)}$ در رابطه (2.12) را محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{\int_e N_i^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x)dx \overset{(5)}{=} \frac{\ell_e}{3}} \quad (2.14)$$

$$\int_e N_j^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)dx \overset{(13)}{=} \int_e \left(\frac{x-x_i}{\ell_e}\right)^2 dx = \frac{1}{\ell_e^2}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 x_i + x_i^2 x\right)\Bigg|_{x_i}^{x_j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_e N_j^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)dx \overset{(5)}{=} \frac{\ell_e}{3}} \quad (2.15)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- درایه‌های ماتریس $\mathbf{s}^{(e)}$ و بردار $\mathbf{f}^{(e)}$ در رابطه (2.12) را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_e N_i^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)dx \overset{(13)}{=} \int_e \left(\frac{x_j - x}{\ell_e}\right)\left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right)dx = \frac{1}{\ell_e^2}\left(\frac{x_j x^2}{2} - x_j x_i x - \frac{x^3}{3} + \frac{x_i x^2}{2}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_e N_i^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)dx \overset{(5)}{=} \frac{\ell_e}{6}} \quad (2.16)$$

$$\boxed{\int_e xN_i^{(e)}(x)dx \overset{(5)}{=} \frac{1}{\ell_e}\left(\frac{x_j^3}{6} - \frac{x_j x_i^2}{2} + \frac{x_i^3}{3}\right)} \quad (2.17)$$

$$\int_e xN_j^{(e)}(x)dx \overset{(13)}{=} \int_e x\left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right)dx = \frac{1}{\ell_e}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_i x^2}{2}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_e xN_j^{(e)}(x)dx \overset{(5)}{=} \frac{1}{\ell_e}\left(\frac{x_j^3}{3} - \frac{x_i x_j^2}{2} + \frac{x_i^3}{6}\right)} \quad (2.18)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

با جایگذاری روابط (2.13) تا (2.18) در رابطه (2.12) خواهیم داشت:

$$\mathbf{s}^{(e)}=\begin{bmatrix} s_{11}^{(e)} & s_{12}^{(e)} \\ s_{21}^{(e)} & s_{22}^{(e)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\ell_e}-\dfrac{\ell_e}{3} & -\dfrac{1}{\ell_e}-\dfrac{\ell_e}{6} \\ -\dfrac{1}{\ell_e}-\dfrac{\ell_e}{6} & \dfrac{1}{\ell_e}-\dfrac{\ell_e}{3} \end{bmatrix} \overset{\ell_e=0.5}{\Rightarrow} \boxed{\mathbf{s}^{(e)}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{11}{6} & -\dfrac{25}{12} \\ -\dfrac{25}{12} & \dfrac{11}{6} \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} i \\ j \end{array}} \qquad (2.19)$$

$$\mathbf{f}^{(e)}=\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i}-\dfrac{1}{\ell_e}\left(\dfrac{x_j^{\;3}}{6}-\dfrac{x_j x_i^{\;2}}{2}+\dfrac{x_i^{\;3}}{3}\right) \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j}-\dfrac{1}{\ell_e}\left(\dfrac{x_j^{\;3}}{3}-\dfrac{x_i x_j^{\;2}}{2}+\dfrac{x_i^{\;3}}{6}\right) \end{Bmatrix} \overset{\ell_e=0.5}{\Rightarrow} \boxed{\mathbf{f}^{(e)}=\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i}-\dfrac{x_j^{\;3}}{3}+x_j x_i^{\;2}-\dfrac{2x_i^{\;3}}{3} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j}-\dfrac{2x_j^{\;3}}{3}+x_i x_j^{\;2}-\dfrac{x_i^{\;3}}{3} \end{Bmatrix}\begin{array}{c} i \\ j \end{array}} \qquad (2.20)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- روابط (2.19) و (2.20) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{25}{12} \\ -\frac{25}{12} & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \qquad (2.21)$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} \\ s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{25}{12} \\ -\frac{25}{12} & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad (2.22)$$

$$\mathbf{s}^{(3)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(3)} & s_{12}^{(3)} \\ s_{21}^{(3)} & s_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{25}{12} \\ -\frac{25}{12} & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array} \qquad (2.23)$$

$$\mathbf{s}^{(4)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(4)} & s_{12}^{(4)} \\ s_{21}^{(4)} & s_{22}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{25}{12} \\ -\frac{25}{12} & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (2.24)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- روابط (2.19) و (2.20) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{f}^{(1)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{array}{c} \left\{\begin{matrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0}-\dfrac{1}{24} \\[2ex] \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0.5}-\dfrac{2}{24} \end{matrix}\right\} \end{array}\begin{matrix} 1 \\[4ex] 2 \end{matrix} \qquad (2.25)$$

$$\mathbf{f}^{(2)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{array}{c} \left\{\begin{matrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0.5}-\dfrac{4}{24} \\[2ex] \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1}-\dfrac{5}{24} \end{matrix}\right\} \end{array}\begin{matrix} 2 \\[4ex] 3 \end{matrix} \qquad (2.26)$$

$$\mathbf{f}^{(3)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix}=\begin{array}{c} \left\{\begin{matrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1}-\dfrac{7}{24} \\[2ex] \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1.5}-\dfrac{8}{24} \end{matrix}\right\} \end{array}\begin{matrix} 3 \\[4ex] 4 \end{matrix} \qquad (2.27)$$

$$\mathbf{f}^{(4)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix}=\begin{array}{c} \left\{\begin{matrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1.5}-\dfrac{10}{24} \\[2ex] \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{2}-\dfrac{11}{24} \end{matrix}\right\} \end{array}\begin{matrix} 4 \\[4ex] 5 \end{matrix} \qquad (2.28)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{s}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{S}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$(56) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{5\times5} = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{s}^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} + s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} + s_{11}^{(3)} & s_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & s_{21}^{(3)} & s_{22}^{(3)} + s_{11}^{(4)} & s_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & s_{21}^{(4)} & s_{22}^{(4)} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{1}{12} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 22 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 44 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 44 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 44 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 22 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad (2.29)}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{f}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{F}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$(56) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^5 = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{f}^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} + f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{c} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} + f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = -\frac{1}{24} \left\{ \begin{array}{c} 24 \left. \dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right|_0 + 1 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ -24 \left. \dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right|_2 + 11 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}} \quad (2.30)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- با جایگذاری روابط (2.29) و (2.30) در دستگاه معادلات (55) خواهیم داشت:

$$(2.29)\ \&\ (2.30) \rightarrow (55) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 22 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 44 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 44 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 44 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 - \dfrac{1}{2} \\ -3 \\ -6 \\ -9 \\ 12 \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_2 - \dfrac{11}{2} \end{Bmatrix}} \quad (2.31)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

اعمال شرایط مرزی:

سطر و ستون‌های 1 و 5 از ماتریس **S** و بردار **F** حذف می‌گردد.

$$
\begin{bmatrix}
22 & -25 & 0 & 0 & 0 \\
-25 & 44 & -25 & 0 & 0 \\
0 & -25 & 44 & -25 & 0 \\
0 & 0 & -25 & 44 & -25 \\
0 & 0 & 0 & -25 & 22
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
-12 \left.\dfrac{d\psi^{(e)}_{(x)}}{dx}\right|_0 - \dfrac{1}{2} \\
-3 \\
-6 \\
-9 \\
12 \left.\dfrac{d\psi^{(e)}_{(x)}}{dx}\right|_2 - \dfrac{11}{2}
\end{Bmatrix}
$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2- اعمال شرایط مرزی:

بر اساس رابطه (59) هریک از درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{F}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F}_2 = F_2 - (S_{2,1}\alpha_1 + S_{2,5}\alpha_5) = -3 - \left((-25)(0) + (0)(5)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_2 = -3} \qquad (2.33)$$

$$\bar{F}_3 = F_3 - (S_{3,1}\alpha_1 + S_{3,5}\alpha_5) = -6 - \left((0)(0) + (0)(5)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_3 = -6} \qquad (2.34)$$

$$\boxed{\bar{F}_4 = 116} \qquad (2.35)$$

در نتیجه رابطه (58) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 44 & -25 & 0 \\ -25 & 44 & -25 \\ 0 & -25 & 44 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ -6 \\ 116 \end{Bmatrix}} \qquad (2.36)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-

از حل رابطه (2.36) خواهیم داشت:

$$(2.36)\quad \Rightarrow \begin{Bmatrix}\psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}44 & -25 & 0\\ -25 & 44 & -25\\ 0 & -25 & 44\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}-3\\ -6\\ 116\end{Bmatrix}\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix}\psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2.053\\ 3.7332\\ 4.7575\end{Bmatrix}}\quad (2.37)$$

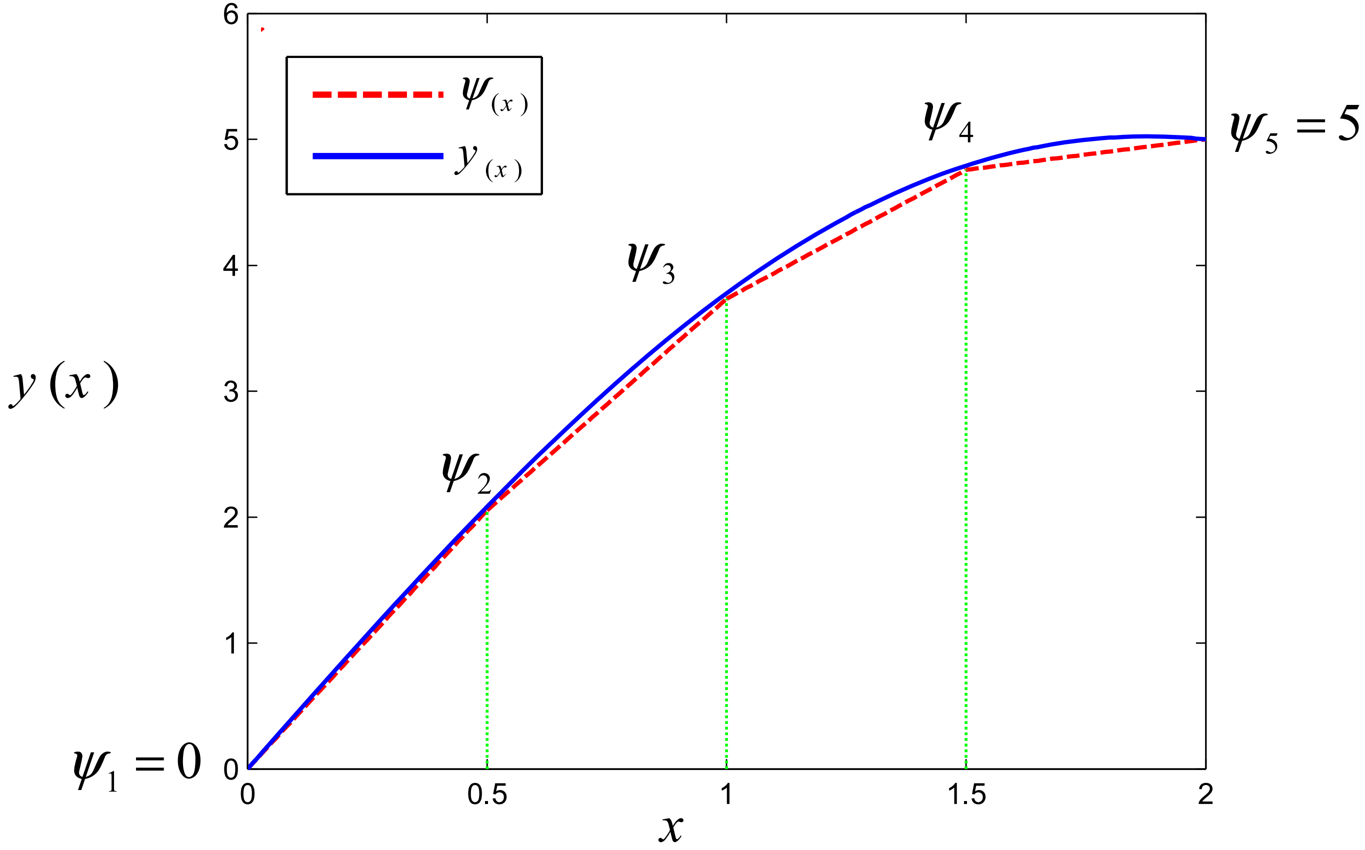
براساس رابطه (2.37) بردار کلی $\boldsymbol{\psi}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi}=\begin{Bmatrix}0\\ 2.053\\ 3.7332\\ 4.7575\\ 5\end{Bmatrix}}\quad (2.38)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 2-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر در حالت 3 زیر حوزه

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

مثال 3- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش FEM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \qquad x \in (0\,,1) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x = 0 \;\Rightarrow\; u_{(0)} = 0 \\ @x = 1 \;\Rightarrow\; u_{(1)} = 1 \end{cases}$$

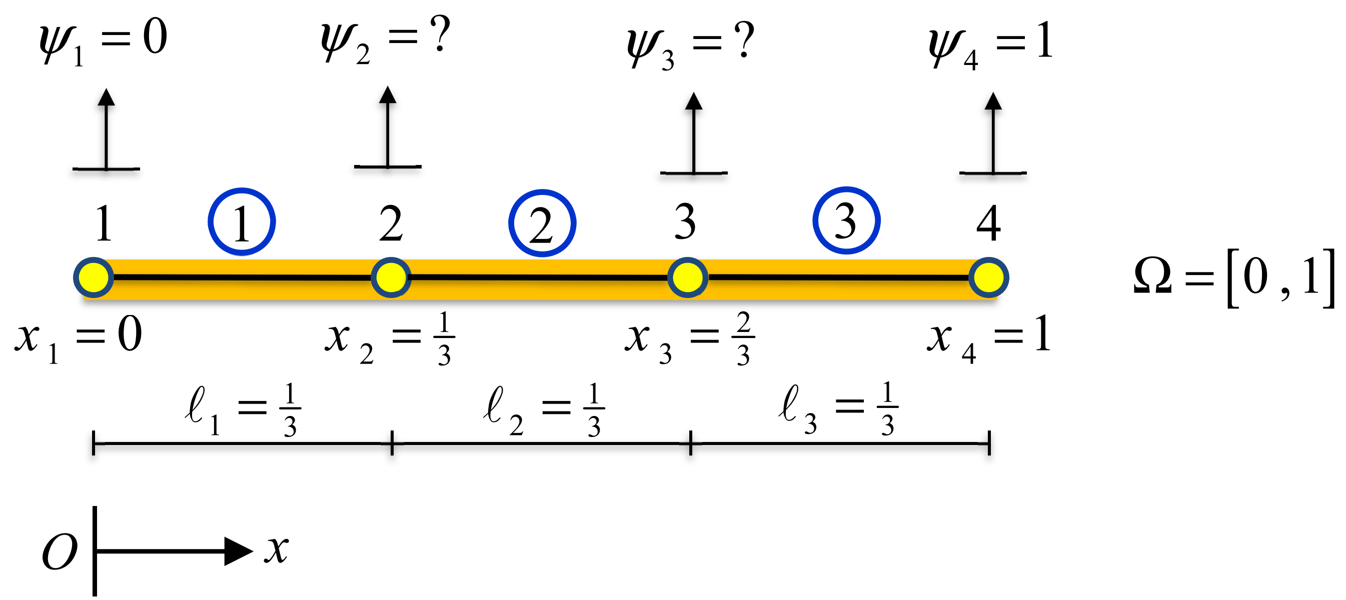
پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^{x} - 0.42546e^{-x}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

در این جا کل حوزه به سه زیر حوزه تقسیم می‌شود.



حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- مقدار باقیمانده براساس رابطه (49) محاسبه می‌گردد:

با جایگذاری مقدار باقیمانده در رابطه (52) نتیجه می‌شود:

$$(3.1) \rightarrow (52) \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\left(\frac{d^{2}}{dx^{2}}-1\right)\psi_{(x)}^{(e)}dx\right)=0} \quad (3.2)$$

با بسط رابطه (3.2) خواهیم داشت:

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء عبارت اول در رابطه (3.3) ساده می‌گردد:

$$\int_e \underbrace{\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T}_{u} \underbrace{\frac{d^2\psi_{(x)}^{(e)}}{dx^2}}_{v'} dx$$

$$v' \Rightarrow \int uv'dx = uv - \int u'v dx$$

با جایگذاری رابطه (3.4) در رابطه (3.3) نتیجه می‌شود:

$$(3.4) \rightarrow (3.3) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \psi_{(x)}^{(e)} dx\right) + \sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} dx\right) = \sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e\right)} \quad (3.5)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء منجر به دو نتیجه مهم شده است:

$$\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\psi_{(x)}^{(e)}dx\right)+\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}dx\right)=\sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\bigg|_{e}\right)$$

1- به صورت طبیعی اعمال تعدادی شرایط مرزی در گره‌ها به طور مستقیم در حل دستگاه معادلات وارد می‌شود.

2- درجه مشتق یک مرتبه کاهش یافته است (درجه دو به درجه یک) این امر باعث می‌شود که حفظ پیوستگی فقط در تابع تقریبی نیاز باشد و نیازی به رعایت پیوستگی در $\frac{d}{dx}\psi_{(x)}^{(e)}$ نیست.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

با جایگذاری تابع تقریبی از رابطه (50) در عبارات سمت چپ رابطه (3.5) خواهیم داشت:

$$(50) \rightarrow (3.5) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}+\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^{T}\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)dx\;\boldsymbol{\psi}^{(e)}\right)=\sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\bigg|_{e}\right)} \qquad (3.6)$$

با توجه به رابطه (3.6) پارامترهای رابطه (53) به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{s}^{(e)}&=\int_{e}\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}+\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^{T}\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)dx\\ \mathbf{f}^{(e)}&=\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\frac{d\,\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\bigg|_{e}\end{aligned}} \qquad (3.7)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (50) در رابطه (3.7) خواهیم داشت:

$$(50) \rightarrow (3.7) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{s}^{(e)} = \int_e \left(\begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) & N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \\ \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} & \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} \right) dx \qquad (3.8)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \left(\begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right) \Bigg|_e$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

با بسط دادن رابطه (3.8) نتیجه می‌شود:

$$(3.8) \quad \Rightarrow$$

(3.9)

$$\mathbf{s}^{(e)} = \begin{bmatrix} \int_e \left(N_i^{(e)}(x) N_i^{(e)}(x) + \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \right) dx & \int_e \left(N_i^{(e)}(x) N_j^{(e)}(x) + \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \right) dx \\ \int_e \left(N_j^{(e)}(x) N_i^{(e)}(x) + \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \right) dx & \int_e \left(N_j^{(e)}(x) N_j^{(e)}(x) + \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \right) dx \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \left(N_i^{(e)}(x) \dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right) \Bigg|_e \\ \left(N_j^{(e)}(x) \dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right) \Bigg|_e \end{Bmatrix}$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- مشتق توابع شکل به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(13)\quad \Rightarrow\quad \begin{aligned} \frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x_j - x}{\ell_e}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} = -\frac{1}{\ell_e}} \\ \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x - x_i}{\ell_e}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} = \frac{1}{\ell_e}} \end{aligned} \qquad (3.10)$$

همچنین درایه‌های بردار $\mathbf{f}^{(e)}$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(3.11)$$

$$\left.\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e = \left.\left(\cancelto{0}{N_i^{(e)}}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_{x_j} - \left.\left(\cancelto{1}{N_i^{(e)}}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_{x_i} \Rightarrow \boxed{\left.\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e = -\left.\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i}}$$

$$\left.\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e = \left.\left(\cancelto{1}{N_j^{(e)}}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_{x_j} - \left.\left(\cancelto{0}{N_j^{(e)}}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_{x_i} \Rightarrow \boxed{\left.\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e = \left.\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j}}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

با جایگذاری روابط (3.10) و (3.11) در رابطه (3.9) خواهیم داشت:

$$(3.10)\,\&\,(3.11)\rightarrow(3.9)\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{s}^{(e)}=\begin{bmatrix}\int_e\left(N_i^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x)+\frac{1}{\ell_e^{\,2}}\right)dx & \int_e\left(N_i^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)-\frac{1}{\ell_e^{\,2}}\right)dx\\ \int_e\left(N_j^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x)-\frac{1}{\ell_e^{\,2}}\right)dx & \int_e\left(N_j^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x)+\frac{1}{\ell_e^{\,2}}\right)dx\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(e)}=\begin{Bmatrix}-\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i}\\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j}\end{Bmatrix}\qquad(3.12)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- درایه‌های ماتریس $\mathbf{s}^{(e)}$ در رابطه (3.12) را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_e \left(N_i^{(e)}(x) N_i^{(e)}(x) + \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \right) dx \overset{(13)}{=} \int_e \left(\left(\frac{x_j - x}{\ell_e} \right)^2 + \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \right) dx = \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \left(x_j^{\,2} x - x_j x^2 + \frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_{x_i}^{x_j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_e \left(N_i^{(e)}(x) N_i^{(e)}(x) + \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \right) dx \overset{(5)}{=} \frac{1}{\ell_e} + \frac{\ell_e}{3}} \quad (3.13)$$

$$\int_e \left(N_j^{(e)}(x) N_j^{(e)}(x) + \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \right) dx \overset{(13)}{=} \int_e \left(\left(\frac{x - x_i}{\ell_e} \right)^2 + \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \right) dx = \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 x_i + x_i^{\,2} x + x \right) \Bigg|_{x_i}^{x_j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_e \left(N_j^{(e)}(x) N_j^{(e)}(x) + \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \right) dx \overset{(5)}{=} \frac{1}{\ell_e} + \frac{\ell_e}{3}} \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \left(\frac{x_j x^2}{2} - x_j x_i x - \frac{x^3}{3} + \frac{x_i x^2}{2} - x \right) \Bigg|_{x_i}^{x_j} \Rightarrow \boxed{\int_e \left(N_i^{(e)}(x) N_j^{(e)}(x) - \frac{1}{\ell_e^{\,2}} \right) dx \overset{(5)}{=} -\frac{1}{\ell_e} + \frac{\ell_e}{6}} \quad (3.15)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

با جایگذاری روابط (3.13) تا (3.15) در رابطه (3.12) خواهیم داشت:

$$\mathbf{s}^{(e)}=\begin{bmatrix} s_{11}^{(e)} & s_{12}^{(e)} \\ s_{21}^{(e)} & s_{22}^{(e)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_e}+\frac{\ell_e}{3} & -\frac{1}{\ell_e}+\frac{\ell_e}{6} \\ -\frac{1}{\ell_e}+\frac{\ell_e}{6} & \frac{1}{\ell_e}+\frac{\ell_e}{3} \end{bmatrix} \xRightarrow{\ell_e=\frac{1}{3}} \boxed{\mathbf{s}^{(e)}=\frac{1}{18}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 56 & -53 \\ -53 & 56 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} i \\ j \end{array}} \qquad (3.16)$$

$$\boxed{\mathbf{f}^{(e)}=\left\{ \begin{array}{c} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_i} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{x_j} \end{array} \right\}\begin{array}{c} i \\ j \end{array}} \qquad (3.17)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- روابط (3.16) و (3.17) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 56 & -53 \\ -53 & 56 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} \\ s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 56 & -53 \\ -53 & 56 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \qquad (3.19)$$

$$\mathbf{s}^{(3)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(3)} & s_{12}^{(3)} \\ s_{21}^{(3)} & s_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 56 & -53 \\ -53 & 56 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \qquad (3.20)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- روابط (3.16) و (3.17) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \qquad (3.21)$$

$$\mathbf{f}^{(2)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{1}{3}} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad (3.22)$$

$$\mathbf{f}^{(3)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2}{3}} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \qquad (3.23)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{s}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{S}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$(56)\quad \Rightarrow\quad \mathbf{S}\in \mathbb{R}^{4\times 4}=\sum_{e=1}^{3}\mathbf{s}^{(e)}\Rightarrow\quad \mathbf{S}=\begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)}+s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)}+s_{11}^{(3)} & s_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & s_{21}^{(3)} & s_{22}^{(3)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{S}=\frac{1}{18}\begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 56 & -53 & 0 & 0 \\ -53 & 112 & -53 & 0 \\ 0 & -53 & 112 & -53 \\ 0 & 0 & -53 & 56 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}}\quad (3.24)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{f}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{F}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$(56)\quad \Rightarrow\quad \mathbf{F}\in\mathbb{R}^4=\sum_{e=1}^{3}\mathbf{f}^{(e)}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}=\begin{array}{l}\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)}+f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)}+f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)}\end{Bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{F}=\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{1}{3}}-\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{1}{3}} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2}{3}}-\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{\frac{2}{3}} \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_1 \end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{F}=\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 \\ 0 \\ 0 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_1 \end{Bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}}\qquad(3.25)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- با جایگذاری روابط (3.24) و (3.25) در دستگاه معادلات (55) خواهیم داشت:

$$(3.24)\ \&\ (3.25) \rightarrow (55) \quad \Rightarrow \boxed{\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 56 & -53 & 0 & 0 \\ -53 & 112 & -53 & 0 \\ 0 & -53 & 112 & -53 \\ 0 & 0 & -53 & 56 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 \\ 0 \\ 0 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_1 \end{Bmatrix}} \qquad (3.26)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

اعمال شرایط مرزی:

سطر و ستون‌های 1 و 4 از ماتریس **S** و بردار **F** حذف می‌گردد.

$$\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 56 & -53 & 0 & 0 \\ -53 & 112 & -53 & 0 \\ 0 & -53 & 112 & -53 \\ 0 & 0 & -53 & 56 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 \\ 0 \\ 0 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_1 \end{Bmatrix}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3- اعمال شرایط مرزی:

بر اساس رابطه (59) هریک از درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{F}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F}_2 = F_2 - (S_{21}\alpha_1 + S_{24}\alpha_4) = 0 - \left(\left(-\frac{53}{18}\right)(0) + (0)(1)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_2 = 0} \qquad (3.28)$$

$$\boxed{\bar{F}_3 = \frac{53}{18}} \qquad (3.29)$$

در نتیجه رابطه (58) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 112 & -53 \\ -53 & 112 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{53}{18} \end{Bmatrix}} \qquad (3.30)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-

از حل رابطه (3.30) خواهیم داشت:

$$(3.30)\quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 112 & -53 \\ -53 & 112 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{53}{18} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2885 \\ 0.6098 \end{Bmatrix}} \quad (3.31)$$

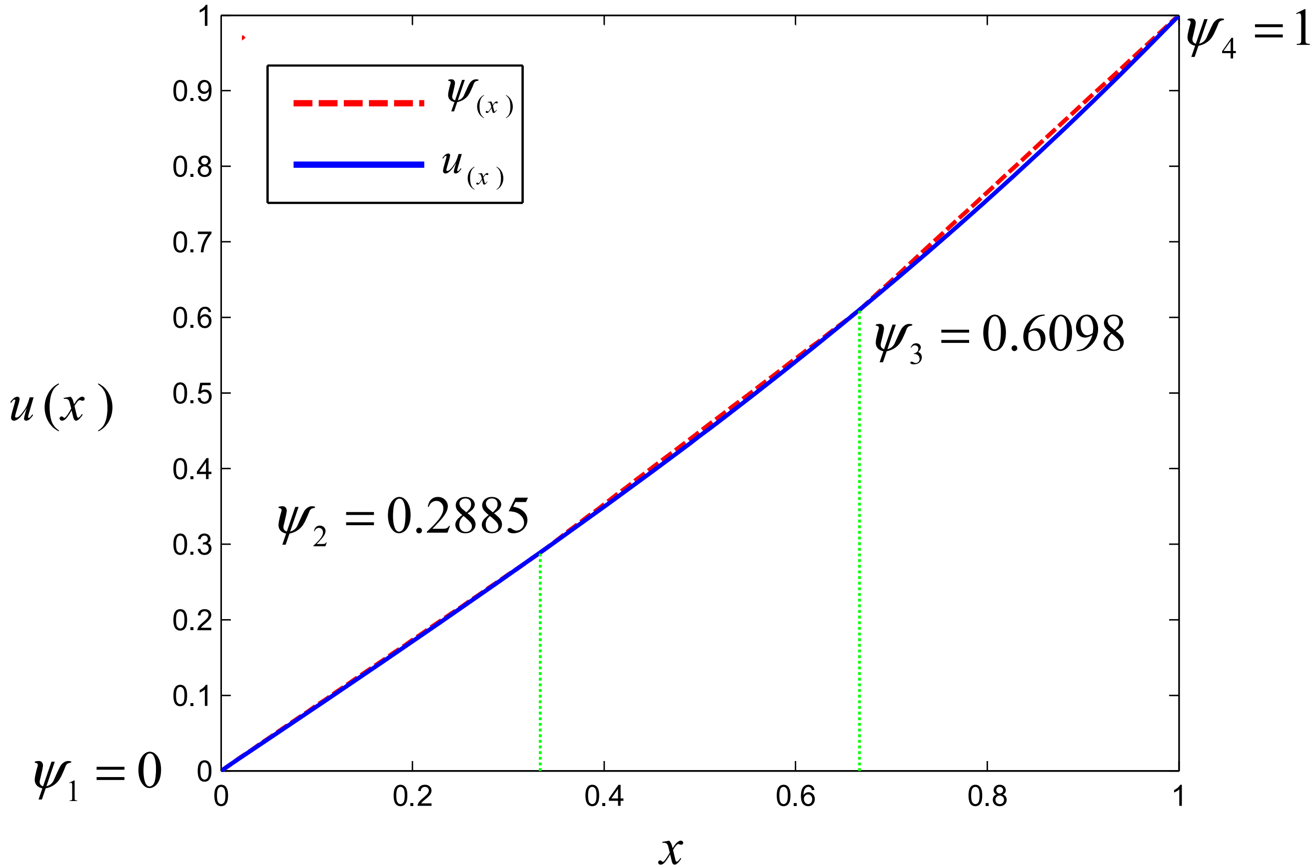
براساس رابطه (3.31) بردار کلی $\boldsymbol{\psi}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2885 \\ 0.6098 \\ 1 \end{Bmatrix}} \quad (3.32)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان خطی یک بعدی

پاسخ مثال 3-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر در حایت 3 زیر حوزه

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

مثال 4- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش FEM و با استفاده از المان سه گرهی محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \qquad x \in (0\,,2) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x=0 \;\; \Rightarrow \;\; y_{(0)}=0 \\ @x=2 \;\; \Rightarrow \;\; y_{(2)}=5 \end{cases}$$

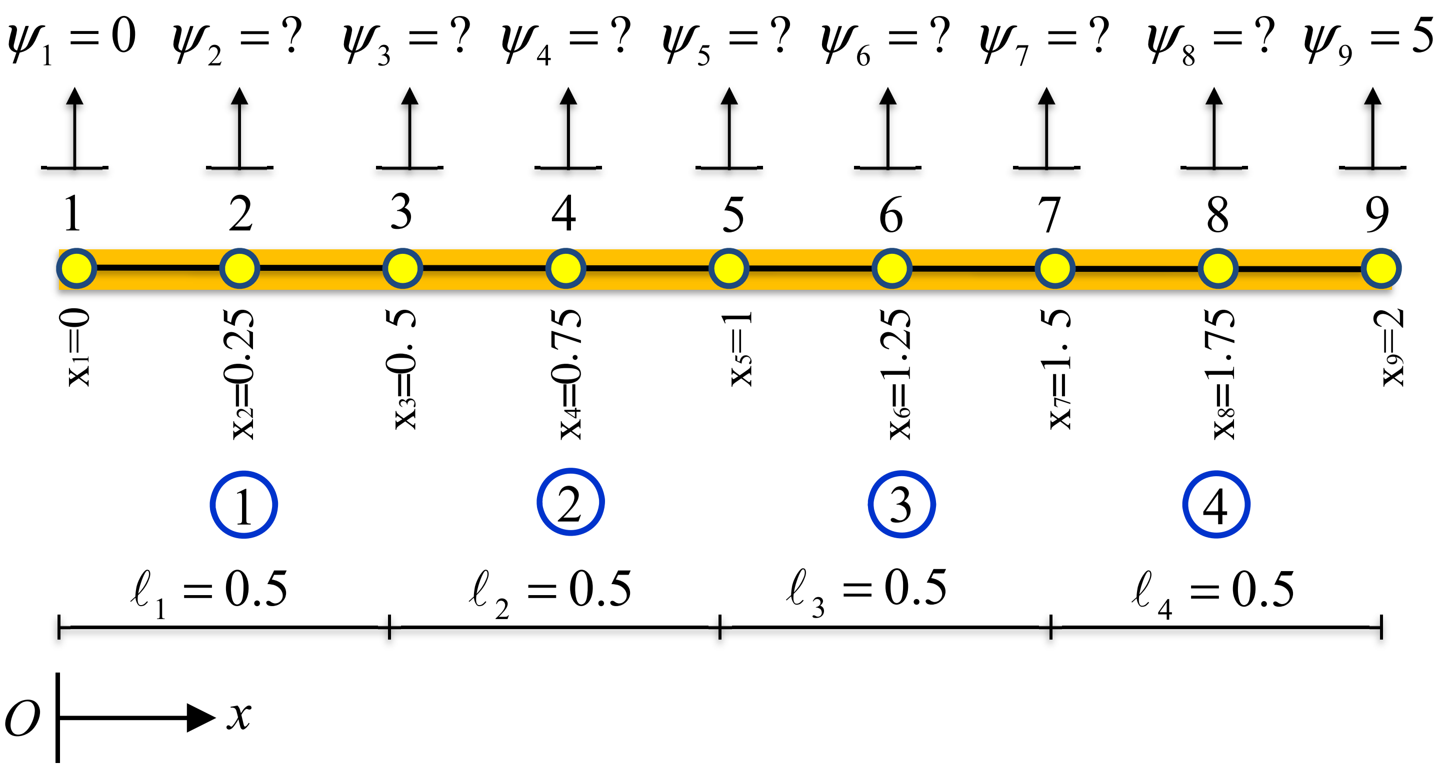
پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)}\sin(x) + x$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

در این جا کل حوزه به چهار زیر حوزه تقسیم می‌شود.



$\Omega = [0\,,2]$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- مقدار باقیمانده براساس رابطه (49) محاسبه می‌گردد:

با جایگذاری مقدار باقیمانده در رابطه (52) نتیجه می‌شود:

$$(4.1) \rightarrow (52) \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\left(\frac{d^{2}\psi_{(x)}^{(e)}}{dx^{2}}+\psi_{(x)}^{(e)}-x\right)dx\right)=0} \qquad (4.2)$$

با بسط رابطه (4.2) خواهیم داشت:

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء عبارت اول در رابطه (4.3) ساده می‌گردد:

$$\int_e \underbrace{\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T}_{u} \underbrace{\frac{d^2\psi_{(x)}^{(e)}}{dx^2}}_{v'} dx$$

$$u \qquad v' \Rightarrow \quad \int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

با جایگذاری رابطه (4.4) در رابطه (4.3) نتیجه می‌شود:

$$(4.4) \rightarrow (4.3) \quad \Rightarrow \qquad (4.5)$$

$$\boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}dx\right) - \sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \psi_{(x)}^{(e)}dx\right) = \sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e\right) - \sum_{e=1}^{m}\left(\int_e \left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T x\,dx\right)}$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء منجر به دو نتیجه مهم شده است:

$$\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^{T}\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}dx\right)-\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\psi_{(x)}^{(e)}dx\right)=\sum_{e=1}^{m}\left(\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{e}\right)-\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{e}\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^{T}x\,dx\right)$$

1- به صورت طبیعی اعمال تعدادی شرایط مرزی در گره‌ها به طور مستقیم در حل دستگاه معادلات وارد می‌شود.

2- درجه مشتق یک مرتبه کاهش یافته است (درجه دو به درجه یک) این امر باعث می‌شود که حفظ پیوستگی فقط در تابع تقریبی نیاز باشد و نیازی به رعایت پیوستگی در $\frac{d}{dx}\psi_{(x)}^{(e)}$ نیست.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

با جایگذاری تابع تقریبی از رابطه (50) در عبارات سمت چپ رابطه (4.5) خواهیم داشت:

$$(50) \rightarrow (4.5) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{e=1}^{m}\left(\int_e\left(\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^T\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}-\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)dx\;\boldsymbol{\psi}^{(e)}\right)=\sum_{e=1}^{m}\left(\left.\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e-\int_e\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T x\,dx\right)} \quad (4.6)$$

با توجه به رابطه (4.6) پارامترهای رابطه (53) به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{s}^{(e)}&=\int_e\left(\left(\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)^T\frac{d\,\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}}{dx}-\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)dx\\ \mathbf{f}^{(e)}&=\left.\left(\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\right|_e-\int_e\left(\mathbf{N}_{(x)}^{(e)}\right)^T x\,dx\end{aligned}} \quad (4.7)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (29) در رابطه (4.7) خواهیم داشت:

$$(29) \rightarrow (4.7) \quad \Rightarrow \qquad\qquad (4.8)$$

$$\mathbf{s}^{(e)} = \int_e \left(\begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} \\ \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} \\ \dfrac{dN_k^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} & \dfrac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} & \dfrac{dN_k^{(e)}(x)}{dx} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \\ N_k^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) & N_j^{(e)}(x) & N_k^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \right) dx$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \left. \left(\begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \\ N_k^{(e)}(x) \end{Bmatrix} \frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right) \right|_e - \int_e \begin{Bmatrix} N_i^{(e)}(x) \\ N_j^{(e)}(x) \\ N_k^{(e)}(x) \end{Bmatrix} x\,dx$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- با بسط دادن رابطه (4.8) نتیجه می‌شود:

(4.8) $\Rightarrow$ (4.9)

$$\mathbf{s}^{(e)} = \begin{bmatrix} \int_e \left(\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} - N_i^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x) \right) dx & \int_e \left(\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} - N_i^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x) \right) dx & \int_e \left(\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx} - N_i^{(e)}(x)N_k^{(e)}(x) \right) dx \\ \int_e \left(\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} - N_j^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x) \right) dx & \int_e \left(\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} - N_j^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x) \right) dx & \int_e \left(\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx} - N_j^{(e)}(x)N_k^{(e)}(x) \right) dx \\ \int_e \left(\frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} - N_k^{(e)}(x)N_i^{(e)}(x) \right) dx & \int_e \left(\frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} - N_k^{(e)}(x)N_j^{(e)}(x) \right) dx & \int_e \left(\frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx}\frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx} - N_k^{(e)}(x)N_k^{(e)}(x) \right) dx \end{bmatrix}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- با بسط دادن رابطه (4.8) نتیجه می‌شود:

$$(4.8) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}^{(e)} = \left\{ \begin{array}{l} \left.\left(N_i^{(e)}(x)\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right)\right|_e - \displaystyle\int_e x N_i^{(e)}(x)dx \\ \left.\left(N_j^{(e)}(x)\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right)\right|_e - \displaystyle\int_e x N_j^{(e)}(x)dx \\ \left.\left(N_k^{(e)}(x)\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx} \right)\right|_e - \displaystyle\int_e x N_k^{(e)}(x)dx \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- مشتق توابع شکل به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(26) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{\ell_e^2}(x-x_i)(x-x_k)\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} = -\frac{4}{\ell_e^2}(2x-x_k-x_i) \tag{4.11}$$

$$\frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\ell_e^2}(x-x_i)(x-x_j)\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN_k^{(e)}(x)}{dx} = \frac{2}{\ell_e^2}(2x-x_j-x_i)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

همچنین درایه‌های بردار $\mathbf{f}^{(e)}$ به صورت زیر ساده می‌شود:

(4.12)

$$\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e=\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_j}+\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{x_j}^{x_k}\Rightarrow \boxed{\left(N_i^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e=-\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\Bigg|_{x_i}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(N_j^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e=0}$$

$$\left(N_k^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e=\left(N_k^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_j}+\left(N_k^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_{x_j}^{x_k}\Rightarrow \boxed{\left(N_k^{(e)}(x)\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right)\Bigg|_e=\frac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\Bigg|_{x_k}}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- روابط (4.9) و (4.10) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{s}^{(1)}=\begin{bmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} \end{bmatrix}=\frac{1}{60}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 276 & -322 & 41 \\ -322 & 624 & -322 \\ 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad (4.13)$$

$$\mathbf{s}^{(2)}=\begin{bmatrix} s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(2)} \\ s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(2)} \\ s_{31}^{(2)} & s_{32}^{(2)} & s_{33}^{(2)} \end{bmatrix}=\frac{1}{60}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 276 & -322 & 41 \\ -322 & 624 & -322 \\ 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (4.14)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- روابط (4.9) و (4.10) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{s}^{(3)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(3)} & s_{12}^{(3)} & s_{13}^{(3)} \\ s_{21}^{(3)} & s_{22}^{(3)} & s_{23}^{(3)} \\ s_{31}^{(3)} & s_{32}^{(3)} & s_{33}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 276 & -322 & 41 \\ -322 & 624 & -322 \\ 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{s}^{(4)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(4)} & s_{12}^{(4)} & s_{13}^{(4)} \\ s_{21}^{(4)} & s_{22}^{(4)} & s_{23}^{(4)} \\ s_{31}^{(4)} & s_{32}^{(4)} & s_{33}^{(4)} \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 276 & -322 & 41 \\ -322 & 624 & -322 \\ 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \tag{4.16}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- روابط (2.19) و (2.20) را برای هر زیر حوزه یا المان تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{f}^{(1)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \end{Bmatrix}=\frac{1}{48}\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0}-0 \\ -4 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0.5}-2 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad (4.17)$$

$$\mathbf{f}^{(2)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}=\frac{1}{48}\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{0.5}-2 \\ -12 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1}-4 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \qquad (4.18)$$

$$\mathbf{f}^{(3)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ f_3^{(3)} \end{Bmatrix}=\frac{1}{48}\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1}-4 \\ -20 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1.5}-6 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \qquad (4.19)$$

$$\mathbf{f}^{(4)}=\begin{Bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \\ f_3^{(4)} \end{Bmatrix}=\frac{1}{48}\begin{Bmatrix} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{1.5}-6 \\ -28 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_{2}-8 \end{Bmatrix}\begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \qquad (4.20)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{s}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{S}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$(56) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{9\times 9} = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{s}^{(e)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{1}{60} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 276 & -322 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -322 & 624 & -322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -322 & 552 & -322 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -322 & 624 & -322 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & -322 & 552 & -322 & 41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -322 & 624 & -322 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & -322 & 552 & -322 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -322 & 624 & -322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \qquad (4.21)$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- با سرهم بندی کردن ماتریس‌های $\mathbf{f}^{(e)}$ براساس رابطه (56) ماتری کلی $\mathbf{F}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$(56) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^9 = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{f}^{(e)}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{1}{48} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} -\left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_0 \\ -4 \\ -4 \\ -12 \\ -8 \\ -20 \\ -12 \\ -28 \\ \left.\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\right|_2 - 8 \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}} \qquad (4.22)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- با جایگذاری روابط (4.21) و (4.22) در دستگاه معادلات (55) خواهیم داشت:

$$(4.21)\ \&\ (4.22) \rightarrow (55) \quad \Rightarrow \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} 276 & -322 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -322 & 624 & -322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & -322 & 552 & -322 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -322 & 624 & -322 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & -322 & 552 & -322 & 41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -322 & 624 & -322 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & -322 & 552 & -322 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -322 & 624 & -322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{4}\left.\frac{d\psi^{(e)}_{(x)}}{dx}\right|_0 \\ -5 \\ -5 \\ -15 \\ -10 \\ -25 \\ -15 \\ -35 \\ \frac{5}{4}\left.\frac{d\psi^{(e)}_{(x)}}{dx}\right|_2 - 10 \end{Bmatrix}$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- اعمال شرایط مرزی:

سطر و ستون‌های 1 و 9 از ماتریس **S** و بردار **F** حذف می‌گردد.

$$
\begin{bmatrix}
276 & -322 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-322 & 624 & -322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
41 & -322 & 552 & -322 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -322 & 624 & -322 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 41 & -322 & 552 & -322 & 41 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -322 & 624 & -322 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 41 & -322 & 552 & -322 & 41 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -322 & 624 & -322 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 & -322 & 276
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
-\dfrac{5}{4}\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\Bigg|_0 \\ -5 \\ -5 \\ -15 \\ -10 \\ -25 \\ -15 \\ -35 \\ \dfrac{5}{4}\dfrac{d\psi_{(x)}^{(e)}}{dx}\Bigg|_2 -10
\end{Bmatrix}
$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4- اعمال شرایط مرزی:

بر اساس رابطه (59) هریک از درایه‌های بردار $\overline{\mathbf{F}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F}_2 = F_2 - (S_{2,1}\alpha_1 + S_{2,9}\alpha_9) = -5 - \big((-322)(0) + (0)(5)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_2 = -5} \qquad (4.25)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\bar{F}_7 = -220} \qquad (4.26)$$

$$\bar{F}_8 = F_8 - (S_{8,1}\alpha_1 + S_{8,9}\alpha_9) = -35 - \big((0)(0) + (-322)(5)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_8 = 1575} \qquad (4.27)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

در نتیجه رابطه (58) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 624 & -322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -322 & 552 & -322 & 41 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -322 & 624 & -322 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & -322 & 552 & -322 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -322 & 624 & -322 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & -322 & 552 & -322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -322 & 624 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \\ -10 \\ -25 \\ -220 \\ 1575 \end{Bmatrix} \qquad (4.28)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-

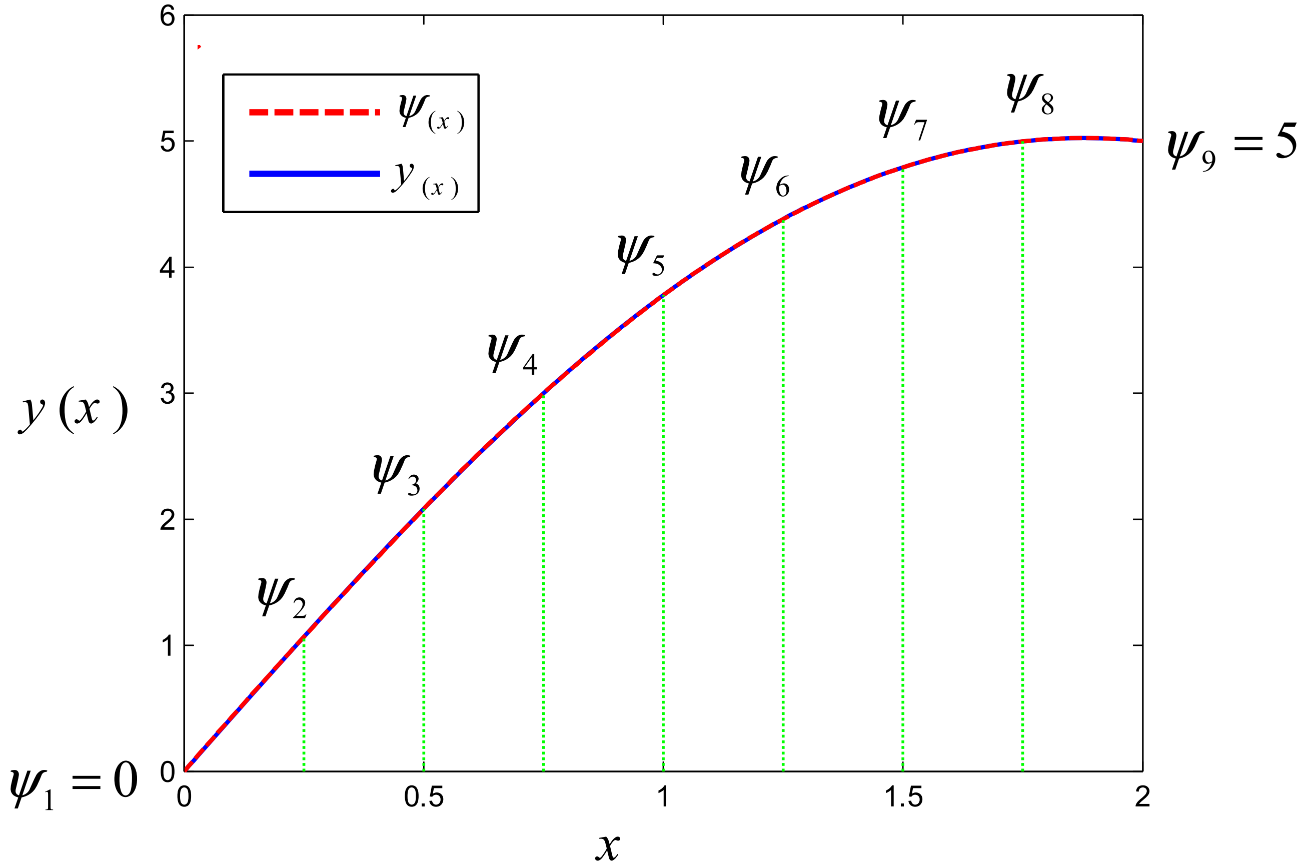
از حل رابطه (4.28) خواهیم داشت:

$$\psi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0662 \\ 2.0816 \\ 2.9987 \\ 3.7760 \\ 4.3807 \\ 4.7908 \\ 4.9962 \\ 5 \end{Bmatrix} \qquad (4.29)$$

روش المان محدود (FEM: Finite Element Method)

حل معادلات دیفرانسیل به کمک المان درجه دوم یک بعدی

پاسخ مثال 4-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر در حالت 4 زیر حوزه