دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

روش المان محدود

روش باقیمانده وزنی (WRM: Weighted Residual Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

روش باقیمانده وزنی یک روش کلی است که به منظور حل تقریبی معادلات دیفرانسیل، توسعه یافته است. روش باقیمانده وزنی یک روش تقریبی بسیار قوی بوده و در حل بسیاری از مسائل کاربرد دارد. فرم کلی معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\boxed{\mathcal{L}(\phi_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \qquad in \quad \Omega} \qquad (1)$$

$\phi_{(x)}$: متغیر وابسطه مجهول

$p_{(x)}$: تابع معلوم

$\mathcal{L}$: عملگر دیفرانسیلی که فرم واقعی معادله دیفرانسیل را مشخص می‌کند.

Ω: اُمگا دامنه معادله یا ناحیه مورد بررسی است.

شرایط مرزی معادله در حالت کلی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\boxed{\mathcal{M}(\phi_{(x)}) + r_{(x)} = 0 \qquad in \quad \Gamma} \qquad (2)$$

$\mathcal{M}$: عملگر دیفرانسیلی

Γ: گاما نقاط شرایط مرزی

$r_{(x)}$: تابع معلوم

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

مثال 1- با فرم کلی معادله دیفرانسیل زیر را در دامنه $[0\,,1]$ بنویسید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0$$

شرایط مرزی (BC): $u_{(x=1)} = 1 \quad , \quad u_{(x=0)} = 0$

پاسخ مثال 1-

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2} - 1\right) & \Omega = [0\,,1] \\ p_{(x)} = 0 & \end{array}} \quad (1.1)$$

با توجه به شرایط مرزی می‌توان گفت که $\Gamma = 0\,,1$ (یعنی Γ دو نقطه است بازه نیست).

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1\,,\ r_{(0)} = 0} \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1\,,\ r_{(1)} = -1} \quad (1.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال 1- فرم پاسخ تحلیلی (دقیق) این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$\boxed{u_{(x)} = G_1 e^{x} + G_2 e^{-x}} \qquad (1.4)$$

با جایگذاری شرایط مرزی در رابطه (1.4) خواهیم داشت:

$$\Big\} \Rightarrow \boxed{G_1 = -G_2 = \frac{e}{e^2 - 1} = 0.42546} \qquad (1.5)$$

با جایگذاری رابطه (1.5) در رابطه (1.4) پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسل مورد نظر به دست می‌آید:

$$(1.5) \rightarrow (1.4) \quad \Rightarrow \boxed{u_{(x)} = 0.42546 e^{x} - 0.42546 e^{-x}} \qquad (1.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

روش باقیمانده وزنی شامل دو مرحله اصلی است:

مرحله اول: یک راه حل تقریبی بر اساس رفتار کلی متغیر وابسته فرض می شود. راه حل فرضی اغلب به گونه‌ای انتخاب می شود که شرایط مرزی برای u برآورده شود. سپس این راه حل فرضی در معادله دیفرانسیل جایگزین می شود. از آنجایی که راه حل فرضی فقط تقریبی است، به طور کلی معادله دیفرانسیل را برآورده نمی کند و از این رو منجر به یک خطا یا چیزی که ما آن را باقیمانده می نامیم، می شود. سپس با صفر کردن باقیمانده با میانگین گیری در کل حوزه سیستمی از معادلات جبری تولید شود.

مرحله دوم: حل سیستم معادلات حاصل از مرحله اول با توجه به شرط مرزی تعیین شده برای به دست آوردن جواب تقریبی مورد نظر است.

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگذاری پاسخ تقریبی $\psi_{(x)}$ در رابطه (1) نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\mathcal{L}(\psi_{(x)}) + p_{(x)} \neq 0 \qquad in \quad \Omega} \qquad (3)$$

به عبارت دیگر:

$$\boxed{\mathcal{L}(\psi_{(x)}) + p_{(x)} = R_{(x)} \qquad in \quad \Omega} \qquad (4)$$

$R_{(x)}$: خطای اندازه‌گیری شده یا باقیمانده (Residual) می‌نماند.

با ضرب رابطه (1) در تابع وزنی دلخواه $w_{(x)}$ و انتگرال‌گیری بر روی دامنه Ω خواهیم داشت:

$$\boxed{\int_{\Omega} w_{(x)} \left(\mathcal{L}(\phi_{(x)}) + p_{(x)} \right) dx = 0} \qquad (5)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگزین کردن پاسخ تقریبی $\psi_{(x)}$ به جای پاسخ دقیق $\phi_{(x)}$ در رابطه (5) نتیجه می‌شود:

$$\int_{\Omega} w_{(x)} \left(\mathcal{L}(\psi_{(x)}) + p_{(x)} \right) dx \neq 0 \qquad (6)$$

به عبارت دیگر براساس رابطه (4):

$$\int_{\Omega} w_{(x)} R_{(x)} dx \neq 0 \qquad (7)$$

انتگرال رابطه (7) میانگین وزنی باقیمانده بر روی دامنه پاسخ را نتیجه می‌دهد. در روش باقیمانده وزنی سعی بر آن است که مقدار این انتگرال بر روی دامنه پاسخ تقریبی به مقدار ناچیز یا صفر میل نماید. با این کار پاسخ تقریبی به مقدار دقیق نزدیک می‌شود:

$$\int_{\Omega} w_{(x)} R_{(x)} dx = 0 \qquad (8)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

در اینجا فرض می‌شود که فرم پاسخ تقریبی به صورت زیر است:

$$\boxed{\psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i(x)} \qquad (9)$$

α_i : ضرایب مجهولی هستند که به آن‌ها ثابت‌های برازش (Fitting coefficients) نیز گفته می‌شود.

n : تعداد ثابت‌های برازش

$N_i(x)$: توابع خطی مستقل برحسب x که به آن‌ها تابع‌های حدسی (Trial Functions) یا توابع درون‌یابی (Interpolation Function) نیز گفته می‌شود. توابع حدسی می‌تواند شامل توابع چند جمله‌ای و مثلثاتی باشد.

$\bar{\psi}_{(x)}$: یک تابع حدسی برحسب x است که سعی در برآورده کردن شرایط مرزی دارد.

به طور معمول توابع آزمایشی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ شرایط مرزی کلی را برای $\phi_{(x)}$ برآورده می‌کند، اگرچه این موضوع کامل ضروری نبوده و به طور قطع همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد.

فرم برداری پاسخ تقریبی به صورت زیر است:

$$\boxed{\psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \mathbf{N}(x)\boldsymbol{\alpha}} \qquad (10)$$

که در آن:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots \quad \alpha_n\}^T \\ \mathbf{N}(x) &= \{N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad \cdots \quad N_n(x)\} \end{aligned}} \qquad (11)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ تقریبی $\psi_{(x)}$ باید شرایط مرزی معادله در حالت کلی بر روی بازه Γ را ارضا نماید:

$$(9) \rightarrow (2) \quad \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}\left(\bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i(x)\right) + r_{(x)} = 0} \qquad (12)$$

با بسط دادن رابطه (12):

$$(12) \quad \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}(\bar{\psi}_{(x)}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{M}\left(N_i(x)\right) + r_{(x)} = 0} \qquad (13)$$

رابطه (13) زمانی برقرار است که دو شرط زیر بر روی نقاط شرایط مرزی Γ ارضا شود:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{M}\left(N_i(x)\right) &= 0 \\ \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(x)}) + r_{(x)} &= 0 \end{aligned}} \qquad (14)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

فرم‌های متداول تابع حدسی $N_i(x)$:

الف- فرم چند جمله‌ای: یکی از ساده‌ترین انتخاب‌ها برای تابع‌های حدسی استفاده از تابع‌های چند جمله‌ای است. که می‌توان به صورت زیر آن را در نظر گرفت:

$$\boxed{\begin{array}{c} N_i(x) = g_i(x) \\ g_i(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_m) \qquad (c_1, c_2, \cdots, c_m) \in \Gamma \end{array}} \quad (15)$$

در نتیجه پاسخ تقریبی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$(15) \rightarrow (9) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)} \quad (16)$$

این یک پاسخ به شکل منحنی صاف تولید می‌کند. اما همچنان محدودیت‌های درون‌یابی لاگرانژی برقرار است.

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

فرم‌های متداول تابع حدسی $N_i(x)$:

ب- فرم مثلثاتی: فرم دیگر پرکاربر برای تابع‌های حدسی استفاده از تابع‌های مثلثاتی براساس سری‌های فوریه می‌باشد. به طور مثال یک تابع حدسی سینوسی را می‌توان به صورت در نظر گرفت:

$$\boxed{N_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)} \quad (17)$$

در نتیجه پاسخ تقریبی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$(17) \rightarrow (9) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)} \quad (18)$$

این پاسخ تقریبی مناسب حالتی است که در آن مقدار شرایط مرزی در $x=0$ و $x=\ell$ برابر با صفر باشد چرا که

$$\boxed{\sin(0) = \sin(i\pi) = 0}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

مثال 2- پاسخ تقریبی مثلثاتی برای معادله دیفرانسیل زیر بر روی دامنه $[0\,,1]$ بنویسید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0$$

شرایط مرزی (BC): $u_{(x=1)} = 1 \quad , \quad u_{(x=0)} = 0$

پاسخ مثال 2- یک تابع تقریبی مثلثاتی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\boxed{\psi_{(x)} = x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin(i\pi x)} \qquad (2.1)$$

براساس رابطه (9) خواهیم داشت:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال 2-

$$\left.\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(0)}=0} \quad (2.3)$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \quad \Rightarrow \quad u_{(1)}=1 \quad \Rightarrow \quad d^{0}u_{(1)}-1=0 \\ \qquad\quad (2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(u_{(1)})+r_{(1)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(1)}=-1} \quad (2.4)$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)})+r_{(1)}=0 \quad \overset{(2.2)\&(2.4)}{\Rightarrow} \quad 1(1)-1=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0 \qquad OK$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال 2-

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}\left(N_i(x)\right)=0 \quad \overset{(2.2)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathcal{M}\left(\sin(i\pi x)\right)=0} \quad (2.5)$$

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (2.5) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\sin(i\pi x)=0} \quad (2.6)$$

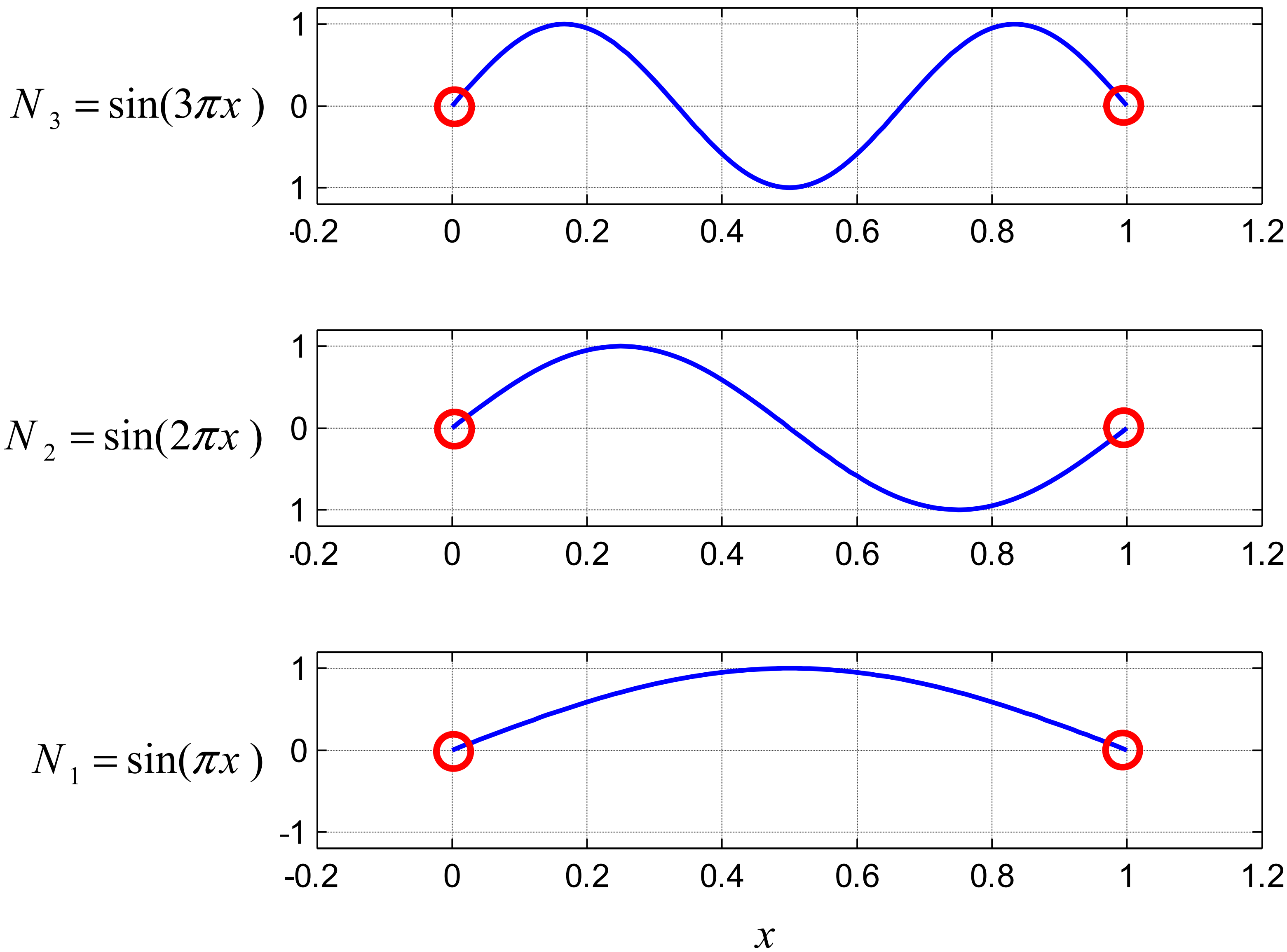
با در نظر گرفتن به طور مثال سه جمله یعنی $n=3$ خواهیم داشت:

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2=\sin(2\pi x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow & N_2=0 \\ x=1 & \Rightarrow & N_2=0 \end{cases}} \quad OK$$

$$i=3 \quad \Rightarrow \quad N_3=\sin(3\pi x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow & N_3=0 \\ x=1 & \Rightarrow & N_3=0 \end{cases}} \quad OK$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال 2-



روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

تابع‌های وزنی (Weight Functions):

در حالت کلی تابع وزنی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i(x) \qquad (19)$$

β_i : پارامترهای ثابت

$w_i(x)$: توابع معلوم از x

فرم برداری تابع وزنی به صورت زیر است:

$$w(x) = \boldsymbol{\beta}\mathbf{W}(x) \qquad (20)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= \{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_n\} \\ \mathbf{W}(x) &= \{w_1(x) \quad w_2(x) \quad w_3(x) \quad \cdots \quad w_n(x)\}^T \end{aligned} \qquad (21)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگذاری فرمت برداری تابع وزنی در رابطه (8) خواهیم داشت:

$$(20) \rightarrow (8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} \boldsymbol{\beta} \mathbf{W}(x) R_{(x)} dx = 0} \qquad (22)$$

از آنجایی که بردار $\boldsymbol{\beta}$ مقدار ثابت است از این رو باید:

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbf{W}(x) R_{(x)} dx = 0} \qquad (23)$$

به عبارت دیگر:

$$(23) \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ \vdots \\ w_n(x) \end{Bmatrix} R_{(x)} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \int_{\Omega} w_1(x) R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} w_2(x) R_{(x)} dx = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} w_n(x) R_{(x)} dx = 0 \end{array}} \qquad (24)$$

حال n معادله برای به دست آوردن $\alpha_1, \alpha_1, \cdots \alpha_n$ در اختیار داریم.

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگذاری فرمت برداری پاسخ تقریبی در رابطه (4) خواهیم داشت:

$$(1) \rightarrow (4) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)} + \mathbf{N}(x)\boldsymbol{\alpha}) + p_{(x)} = R_{(x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{(x)} = \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) + \mathcal{L}(\mathbf{N}(x))\boldsymbol{\alpha} + p_{(x)}} \quad (25)$$

با جایگذاری مقدار باقیمانده با فرمت برداری در رابطه (23) نتیجه می‌شود:

$$(25) \rightarrow (23) \quad \Rightarrow \boxed{\left(\int_{\Omega} \mathbf{W}(x)\mathcal{L}(\mathbf{N}(x))dx\right)\boldsymbol{\alpha} = -\int_{\Omega} \mathbf{W}(x)p_{(x)}dx - \int_{\Omega} \mathbf{W}(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx} \quad (26)$$

رابطه (26) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Z}} \quad (27)$$

که در آن:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \int_{\Omega} \mathbf{W}(x)\mathcal{L}(\mathbf{N}(x))dx \quad \Rightarrow \quad s_{ij} = \int_{\Omega} w_i(x)\mathcal{L}(N_j(x))dx \\ &\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n} = -\int_{\Omega} \mathbf{W}(x)p_{(x)}dx - \int_{\Omega} \mathbf{W}(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \quad \Rightarrow \quad z_i = -\int_{\Omega} w_i(x)p_{(x)}dx - \int_{\Omega} w_i(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{aligned}} \quad (28)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

بسط رابطه (65) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \int_\Omega w_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega w_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega w_1(x)\mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \int_\Omega w_2(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega w_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega w_2(x)\mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Omega w_n(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega w_n(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega w_n(x)\mathcal{L}(N_n(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega w_1(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega w_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_\Omega w_2(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega w_2(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ \vdots \\ -\int_\Omega w_n(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega w_n(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix} \quad (29)$$

سیستم دستگاه معادلات ارائه شده در رابطه (29) را می‌توان برای n ضریب مجهول α_i حل کرد، مشروط برآن که تابع وزنی $w(x)$ به طور مناسب انتخاب شود.

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

انواع روش‌های باقیمانده وزنی

با توجه به انتخاب تابع وزنی، چندین گزینه وجود دارد. از این رو، بسته به ماهیت تابع وزنی، انواع مختلفی از روش‌های باقیمانده وزنی پیشنهاد شده است. برخی از این روش‌های استاندارد عبارتند از:

1. روش تخصیص نقطه (Point Collocation Method)

2. روش زیر حوزه (Sub-Domain Method)

3. روش حداقل مربعات (Least Square Method)

4. روش گالرکین (Galerkin Method)

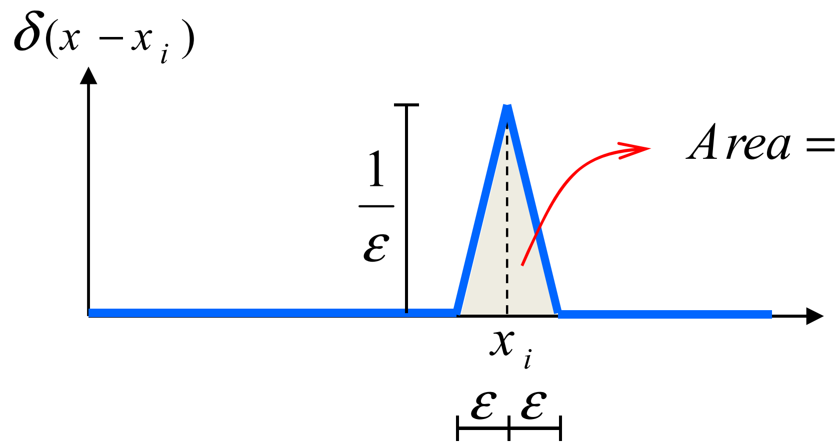
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

در این روش، تابع وزنی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که باقیمانده را می‌توان در n نقطه مجزا در دامنه برابر با صفر کرد. برای این منظور تابع وزنی براساس تابع دلتای دیراک (Dirac Delta function) انتقال یافته به صورت روبه رو انتخاب می‌گردد:

$$\boxed{w_i(x) = \delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}} \qquad (30)$$

تابع دلتای دیراک دارای مشخصات زیر است:



$$Area = \frac{1}{2} \times 2\varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\,dx = 1} \qquad (31)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,\delta(x - x_i)\,dx = G(x_i)} \qquad (32)$$

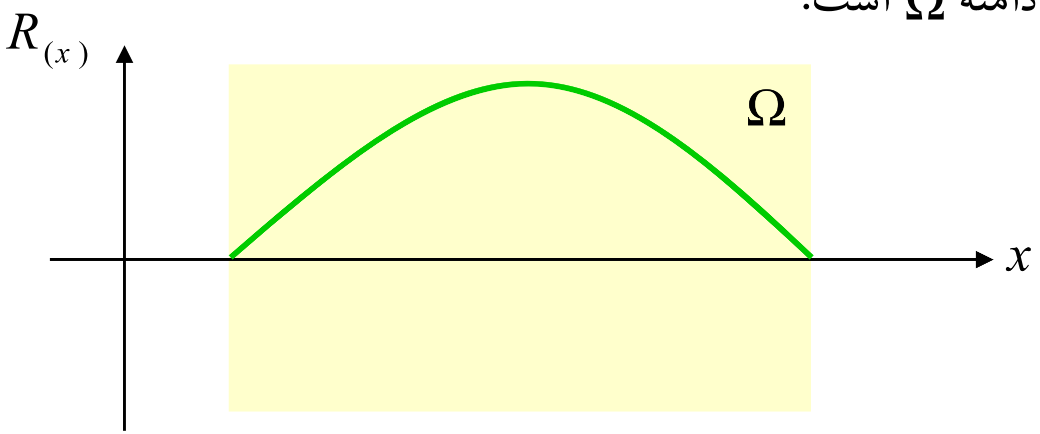
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

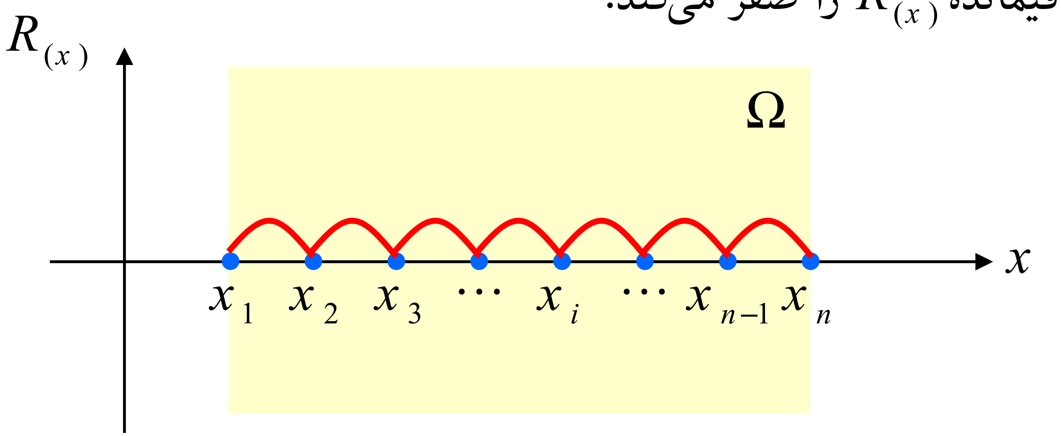
تعداد نقاط ثابت $x_i \in \Omega , (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ باید برابر با n ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ باشند.

روش PCM سعی دارد که مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ در نقاط x_i را برابر با صفر نماید.

بنابراین هدف اصلی صفر شدن باقیمانده $R_{(x)}$ بر روی کل دامنه Ω است.



روش PCM در تعداد نقاط مشخصی x_i در دامنه Ω مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ را صفر می‌کند.



روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

با جایگذاری تابع دلتای دیراک به جای تابع وزنی در رابطه (24) نتیجه می‌شود:

$$(30) \rightarrow (24) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \int_{\Omega} \delta(x - x_1) R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_2) R_{(x)} dx = 0 \\ \qquad \vdots \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_n) R_{(x)} dx = 0 \end{array}} \quad (33)$$

با توجه به ویژگی تابع دلتای دیراک در رابطه (32) خواهیم داشت:

$$(32) \,\&\, (33) \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \delta(x - x_i) R_{(x)} dx = R(x_i) = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{R(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)} \quad (34)$$

مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ مجبور می‌شود که در n نقطه صفر گردد.

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

همچنین با جایگذاری تابع دلتای دیراک به جای تابع وزنی در رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$(30) \rightarrow (28) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} s_{ij} &= \int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathcal{L}(N_j(x))dx \\ z_i &= -\int_{\Omega} \delta(x - x_i) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{aligned}} \quad (35)$$

با توجه به ویژگی تابع دلتای دیراک در رابطه (32) خواهیم داشت:

$$(32) \,\&\, (35) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} s_{ij} &= \mathcal{L}(N_j(x_i)) \\ z_i &= -p(x_i) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_i)) \end{aligned}} \quad (36)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

بر اساس رابطه (36)، رابطه (29) به صورت زیر در می‌آید:

$$(36) \rightarrow (29) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}(N_1(x_1)) & \mathcal{L}(N_2(x_1)) & \cdots & \mathcal{L}(N_n(x_1)) \\ \mathcal{L}(N_1(x_2)) & \mathcal{L}(N_2(x_2)) & \cdots & \mathcal{L}(N_n(x_2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}(N_1(x_n)) & \mathcal{L}(N_2(x_n)) & \cdots & \mathcal{L}(N_n(x_n)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p(x_1) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) \\ -p(x_2) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) \\ \vdots \\ -p(x_n) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_n)) \end{Bmatrix} \quad (37)$$

- روش PCM به طور خودکار ماتریس ضرایب متقارن را تولید نمی‌کند که در زمان جستجوی حل معادله، ویژگی مطلوبی است. همچنین تقارن ربطی به نوع جواب تقریبی انتخاب شده ندارد.
- تنظیم مقدار باقیمانده بر روی صفر در نقاط گسسته به این معنی نیست که خطاها در آن نقاط در واقع صفر هستند.
- عملیات محاسباتی مورد نیاز در روش PCM حداقل است.
- می توان نشان داد روش PCM معادل همان روش تفاضل محدود (Classical Finite Difference Method) است.

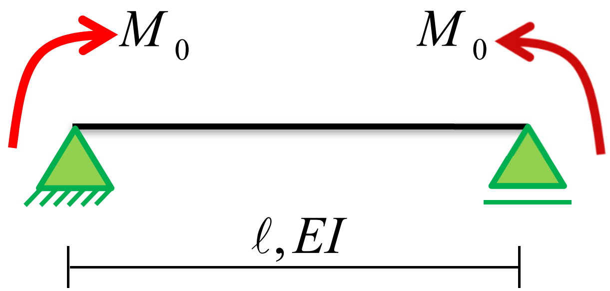
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

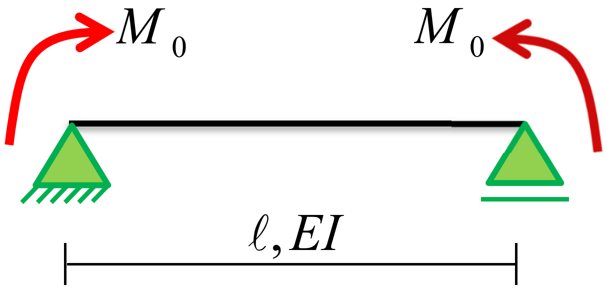
مثال 3- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش PCM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای



روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

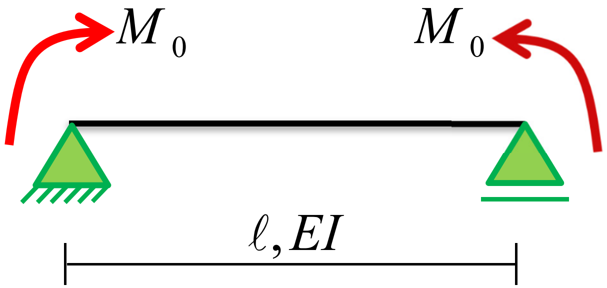
پاسخ مثال 3-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می‌آید:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \left(\frac{d^2}{dx^2}\right) \quad \Omega = (0\,,\ell) \\ p_{(x)} = -\frac{M_0}{EI}} \qquad (3.4)$$

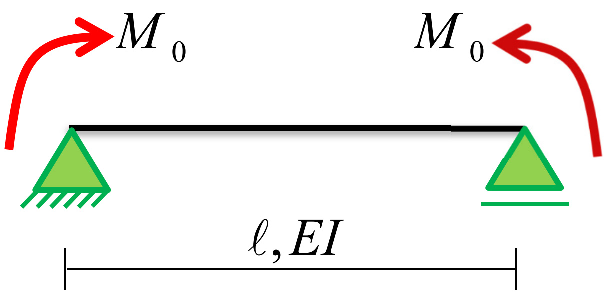
الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با در نظرگرفتن تنها دو جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظرگرفته می‌شود:

با توجه به رابطه (3.5):

$$(3.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad , \quad N_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \qquad (3.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3– الف– تابع حدسی فرم مثلثاتی:

$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^{0}y_{(0)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(0)}=0} \quad (3.7)$$

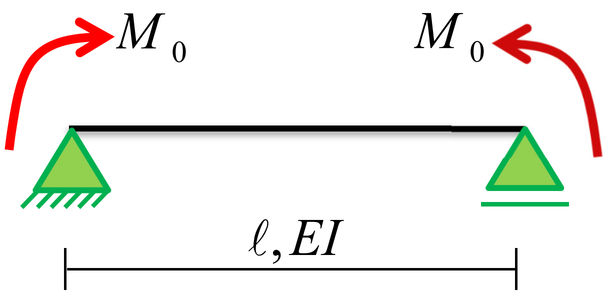
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \overset{(3.6)\&(3.7)}{\Rightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \qquad OK$$

$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(\ell)}=0 \;\Rightarrow\; d^{0}y_{(\ell)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(\ell)}=0} \quad (3.8)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \overset{(3.6)\&(3.8)}{\Rightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \qquad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}\left(N_i(x)\right)=0 \overset{(3.6)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)\right)=0} \quad (3.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (3.9) به صورت زیر در می‌آید:

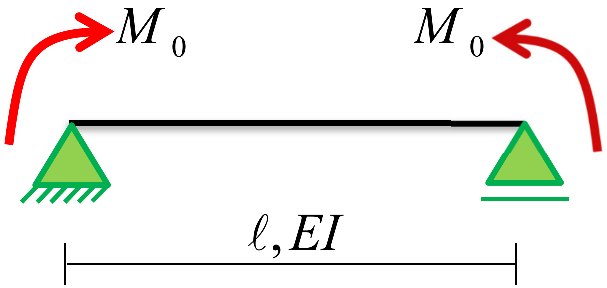
$$\boxed{N_i(x)=\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)=0} \quad (3.10)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=2 \quad\Rightarrow\quad N_2(x)=\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_2(\ell)=0 \end{cases}} \qquad OK$$

براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض 2 نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می‌شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

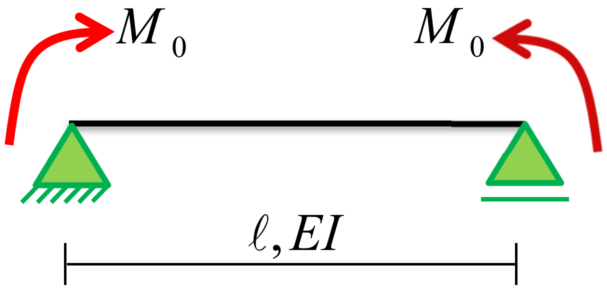
تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با 2 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. این 2 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 2 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

اکنون پارامترهای رابطه (3.11) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{p(x_1) = p(x_2) = -\frac{M_0}{EI}} \quad (3.13)$$

$$\boxed{(\bar{\psi}(x_1)) = \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) = 0} \quad (3.14)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3–الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

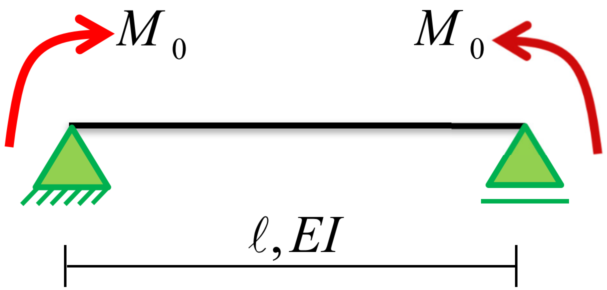
$$\boxed{\mathcal{L}(N_1(x_1)) = -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2}} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_1)) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right)\Bigg|_{x_1=\frac{\ell}{3}} = -\frac{4\pi^2}{\ell^2}\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{x_1=\frac{\ell}{3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(N_2(x_1)) = -\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2}} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}(N_1(x_2)) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right)\Bigg|_{x_2=\frac{2\ell}{3}} = -\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{x_2=\frac{2\ell}{3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(N_1(x_2)) = -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2}} \quad (3.17)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(N_2(x_2)) = \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2}} \quad (3.18)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3–الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (3.13) تا (3.18) در دستگاه معادلات (3.11) خواهیم داشت:

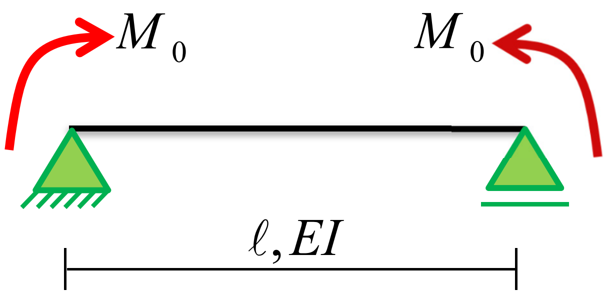
$$(3.13)\ to\ (3.18) \rightarrow (3.11) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & -\dfrac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & \dfrac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{M_0}{EI} \\ \dfrac{M_0}{EI} \end{Bmatrix}} \quad (3.19)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (3.19) نتیجه می‌شود:

$$(3.19) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & -\dfrac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & \dfrac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{M_0}{EI} \\ \dfrac{M_0}{EI} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{2M_0\ell^2}{\sqrt{3}EI\pi^2} \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad (3.20)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

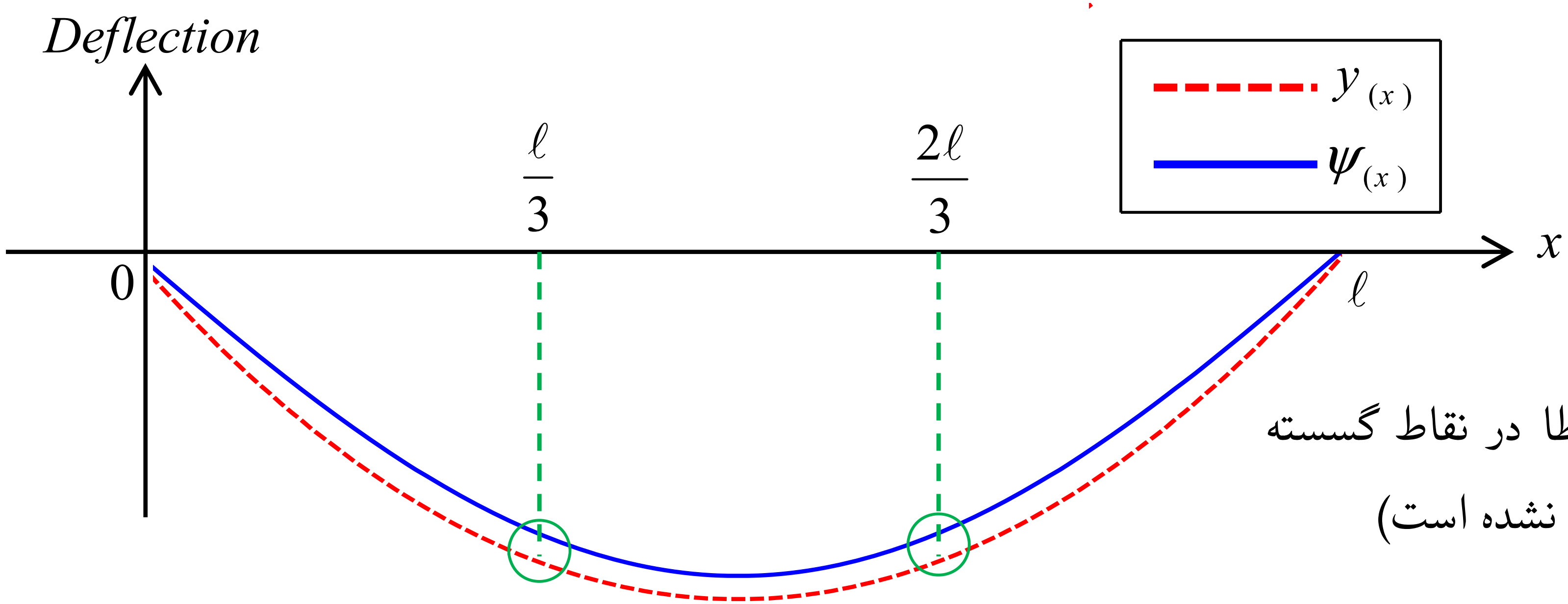


1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3–الف– تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (3.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

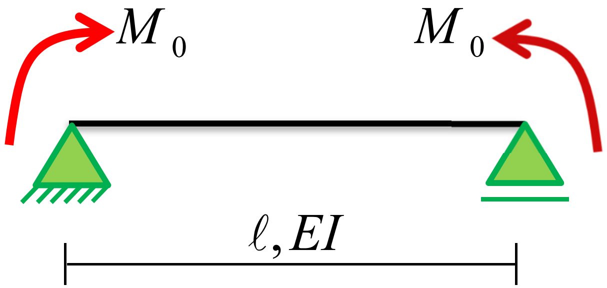
$$(3.20) \rightarrow (3.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{2M_0\ell^2}{\sqrt{3}EI\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (3.21)$$



(مقدار خطا در نقاط گسسته
لزوما صفر نشده است)

نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

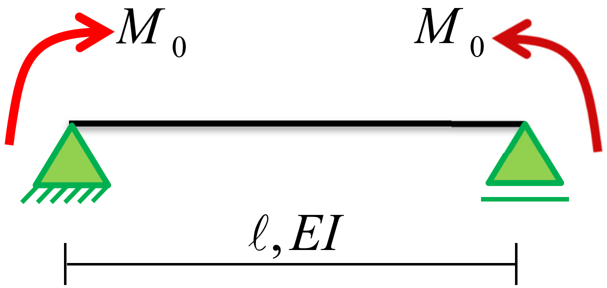
پاسخ مثال 3- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

با توجه به رابطه (3.22):

$$(3.22) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = x\,(x-\ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0} \qquad (3.23)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

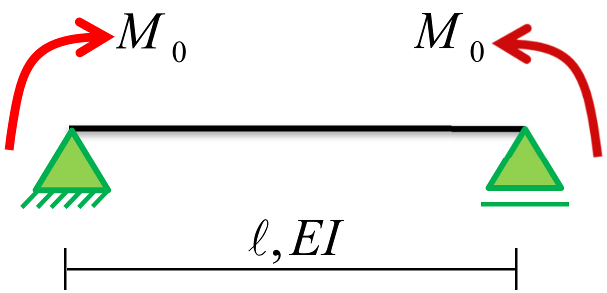
$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(0)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(0)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (3.7)$$ (تکراری)

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \overset{(3.7)\&(3.23)}{\Rightarrow} 1(\alpha_0)+0=0 \overset{Must\ be}{\Rightarrow} \underset{(3.24)}{\boxed{\alpha_0=0}} \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(\ell)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(\ell)}=0} \quad (3.8)$$ (تکراری)

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \overset{(3.8)\&(3.23)\&(3.24)}{\Rightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (3.25) به صورت زیر در می‌آید:

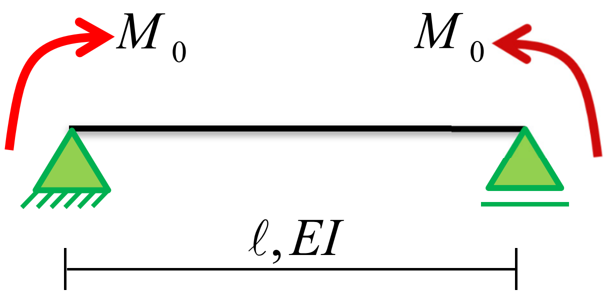
$$\boxed{N_1(x)=x(x-\ell)=0} \quad (3.26)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

OK ✓

براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض 1 نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می‌شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

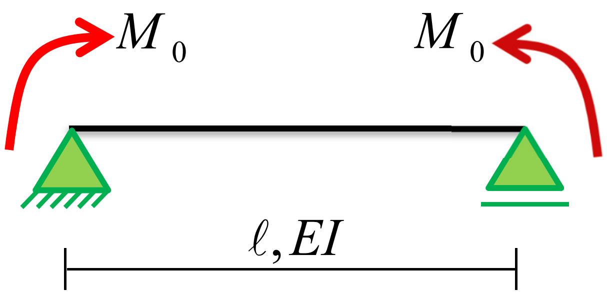
تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با 1 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. این 1 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شود که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 1 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرارگیرند):

اکنون پارامترهای رابطه (3.27) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$p_{(x)} = -\frac{M_0}{EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(x_1) = -\frac{M_0}{EI}} \qquad (3.29)$$

$$\bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) = 0} \qquad (3.30)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 3–ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\boxed{\mathcal{L}(N_1(x_1)) = 2} \qquad (3.31)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (3.29) تا (3.31) در معادله (3.27) خواهیم داشت:

$$(3.29)\ to\ (3.31) \rightarrow (3.27) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = \frac{M_0}{2EI}} \qquad (3.32)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (3.22) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(3.32) \rightarrow (3.22) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x (x - \ell)} \quad (3.33)$$

(همان پاسخ دقیق است)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

مثال 4- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش PCM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \qquad x \in (0\,,2) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2}+1\right) & \Omega = (0\,,2) \\ p_{(x)} = -x & \end{array}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (4.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

با توجه به رابطه (4.2):

$$(4.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = x(x-2) \quad , \quad N_2(x) = x^2(x-2) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x} \quad (4.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4-

$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(0)}=0 \Rightarrow d^{0}y_{(0)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(0)}=0} \quad (4.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \overset{(4.3)\&(4.4)}{\Longrightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \overset{(4.3)}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} for\ i=1 \\ for\ i=2 \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M}\big(x(x-2)\big)=0 \\ \mathcal{M}\big(x^{2}(x-2)\big)=0 \end{array}} \quad (4.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (4.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(4.4) or (4.5) \rightarrow (4.6) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} for\ i=1 & N_1(x)=x(x-2)=0 \\ for\ i=2 & N_2(x)=x^2(x-2)=0 \end{array}} \quad (4.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=x^2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_2(2)=0 \end{cases}} \quad OK$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4- براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض 2 نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(37) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} \mathcal{L}(N_1(x_1)) & \mathcal{L}(N_2(x_1)) \\ \mathcal{L}(N_1(x_2)) & \mathcal{L}(N_2(x_2)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p(x_1) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) \\ -p(x_2) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) \end{Bmatrix}} \quad (4.8)$$

تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با 2 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. این 2 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 2 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4– اکنون پارامترهای رابطه (4.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{p(x_1) = -\frac{2}{3}} \quad (4.10)$$

$$(4.1) \quad \Rightarrow \quad p_{(x)} = -x \quad \xRightarrow{x_2=\frac{4}{3}} \quad \boxed{p(x_2) = -\frac{4}{3}} \quad (4.11)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)}) = 2.5x} \quad (4.12)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\overline{\psi}(x_1)) = \frac{5}{3}} \quad (4.13)$$

$$(4.12) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\overline{\psi}(x_2)) = 2.5x\Big|_{x_2=\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}(\overline{\psi}(x_2)) = \frac{10}{3}} \quad (4.14)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4-

$$\mathcal{L}(N_1(x_1)) = \left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(x(x-2)\right)\Big|_{x_1=\frac{2}{3}} = (x^2-2x+2)\Big|_{x_1=\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(N_1(x_1)) = \frac{10}{9}} \quad (4.15)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(N_2(x_1)) = -\frac{16}{27}} \quad (4.16)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(N_1(x_2)) = \frac{10}{9}} \quad (4.17)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_2)) = \left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(x^2(x-2)\right)\Big|_{x_2=\frac{4}{3}} = (x^3-2x^2+6x-4)\Big|_{x_2=\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(N_2(x_2)) = \frac{76}{27}} \quad (4.18)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (4.10) تا (4.18) در دستگاه معادلات (4.8) خواهیم داشت:

$$(4.10)\ to\ (4.18) \rightarrow (4.8) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{16}{27} \\ \frac{10}{9} & \frac{76}{27} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix}} \quad (4.19)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (4.19) نتیجه می‌شود:

$$(4.19) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{16}{27} \\ \frac{10}{9} & \frac{76}{27} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{243}{230} \\ -\frac{135}{460} \end{Bmatrix}} \quad (4.20)$$

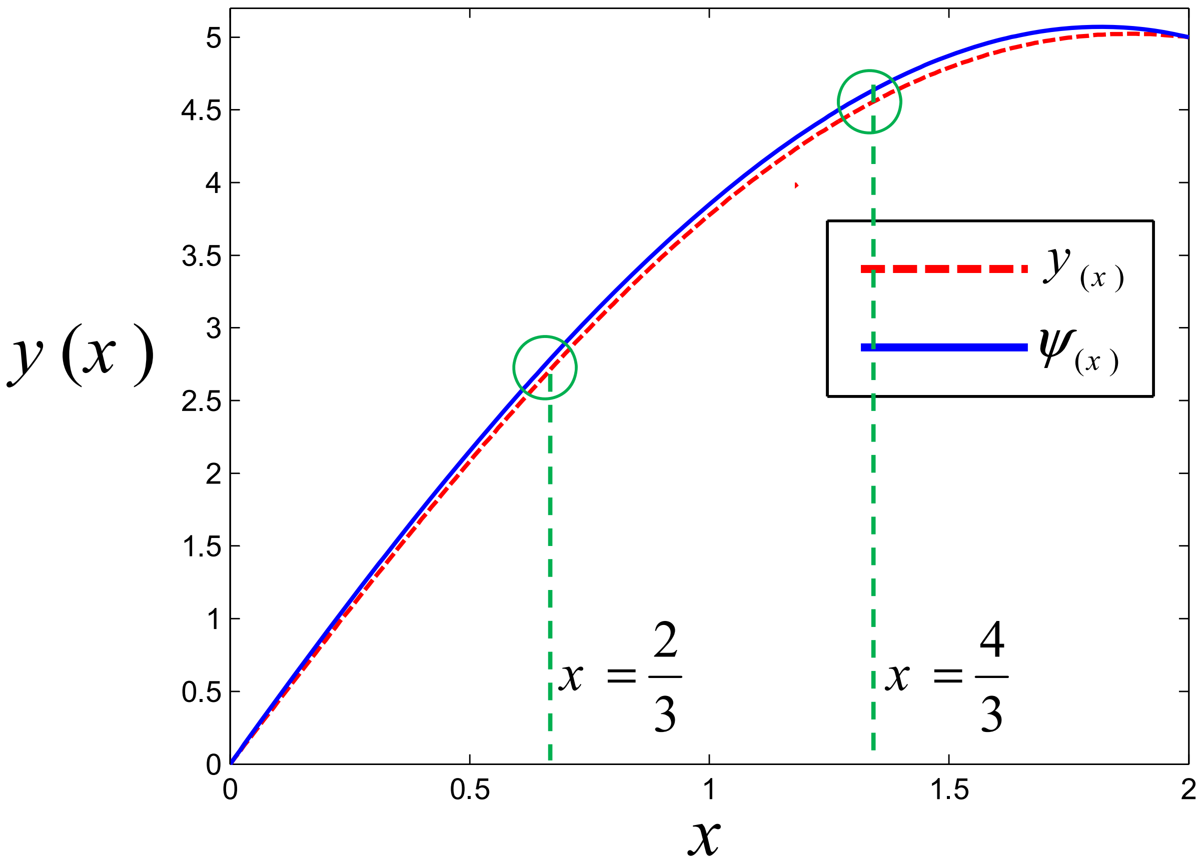
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (4.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقربی به دست می‌آید:

$$(4.20) \rightarrow (4.2) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{135}{460}x^3 - \frac{54}{115}x^2 + \frac{1061}{230}x} \quad (4.21)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 4-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

(مقدار خطا در نقاط گسسته لزوما صفر نشده است)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

مثال 5- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش PCM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \qquad x \in (0\,,1) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{(0)} = 0 \\ @x = 1 \quad \Rightarrow \quad u_{(1)} = 1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^{x} - 0.42546e^{-x}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{d^2}{dx^2} - 1\right) u_{(x)} + 0 = 0 \\ (1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(u_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2} - 1\right) & \Omega = [0\,,1] \\ p_{(x)} = 0 & \end{array}} \quad (5.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = x + \alpha_1 \sin(\pi x) + \alpha_2 \sin(2\pi x)} \quad (5.2)$$

با توجه به رابطه (5.2):

$$(5.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad N_2(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = x} \quad (5.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5-

$$\left.\begin{aligned} BC \;\Rightarrow\; u_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(0)}+0=0 \\ (2)\;\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (5.4)$$

$$(14)\;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\overset{(5.3)\&(5.4)}{\Rightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{aligned} BC \;\Rightarrow\; u_{(1)}=1 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(1)}-1=0 \\ (2)\;\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(1)})+r_{(1)}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(1)}=-1} \quad (5.5)$$

$$(14)\;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)})+r_{(1)}=0 \;\overset{(5.3)\&(5.5)}{\Rightarrow}\; 1(1)-1=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14)\;\Rightarrow\; \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \;\overset{(5.3)}{\Rightarrow}\; \boxed{\mathcal{M}\big(\sin(i\pi x)\big)=0} \quad (5.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (5.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(5.4) or (5.5) \rightarrow (5.6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_i(x)=\sin(i\pi x)=0} \, (5.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=\sin(\pi x)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=1 & \Rightarrow \quad N_1(1)=0 \end{cases}} \quad OK$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=\sin(2\pi x)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=1 & \Rightarrow \quad N_2(1)=0 \end{cases}} \quad OK$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5- براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض 2 نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(37) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} \mathcal{L}(N_1(x_1)) & \mathcal{L}(N_2(x_1)) \\ \mathcal{L}(N_1(x_2)) & \mathcal{L}(N_2(x_2)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p(x_1) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) \\ -p(x_2) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) \end{Bmatrix}} \quad (5.8)$$

تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با 2 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. این 2 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 2 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

$$x_i \in \Omega\,,\,(i=1\,,2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{2}{3}} \quad (5.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5– اکنون پارامترهای رابطه (5.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(5.1) \quad \Rightarrow \quad p_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(x_1) = p(x_2) = 0} \quad (5.10)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) = -x} \quad (5.11)$$

$$(5.11) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) = -x\Big|_{x_1=\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) = -\frac{1}{3}} \quad (5.12)$$

$$(5.11) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) = -x\Big|_{x_2=\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) = -\frac{2}{3}} \quad (5.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5-

$$\boxed{\mathcal{L}(N_1(x_1)) = -(1+\pi^2)\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (5.14)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_1)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\sin(2\pi x)\Big|_{x_1=\frac{1}{3}} = -(1+4\pi^2)\sin(2\pi x)\Big|_{x_1=\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(N_2(x_1)) = -(1+4\pi^2)\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{L}(N_1(x_2)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\sin(\pi x)\Big|_{x_2=\frac{2}{3}} = -(1+\pi^2)\sin(\pi x)\Big|_{x_2=\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(N_1(x_2)) = -(1+\pi^2)\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (5.16)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_2)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\sin(2\pi x)\Big|_{x_2=\frac{2}{3}} = -(1+4\pi^2)\sin(2\pi x)\Big|_{x_2=\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(N_2(x_2)) = (1+4\pi^2)\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (5.17)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (5.10) تا (5.17) در دستگاه معادلات (5.8) خواهیم داشت:

$$(5.10)\ to\ (5.17) \rightarrow (5.8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} -(1+\pi^2) & -(1+4\pi^2) \\ -(1+\pi^2) & (1+4\pi^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}} \quad (5.18)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (5.18) نتیجه می‌شود:

$$(5.18) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -(1+\pi^2) & -(1+4\pi^2) \\ -(1+\pi^2) & (1+4\pi^2) \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -53.1160 \\ 4.7544 \end{Bmatrix}\times 10^{-3}} \quad (5.19)$$

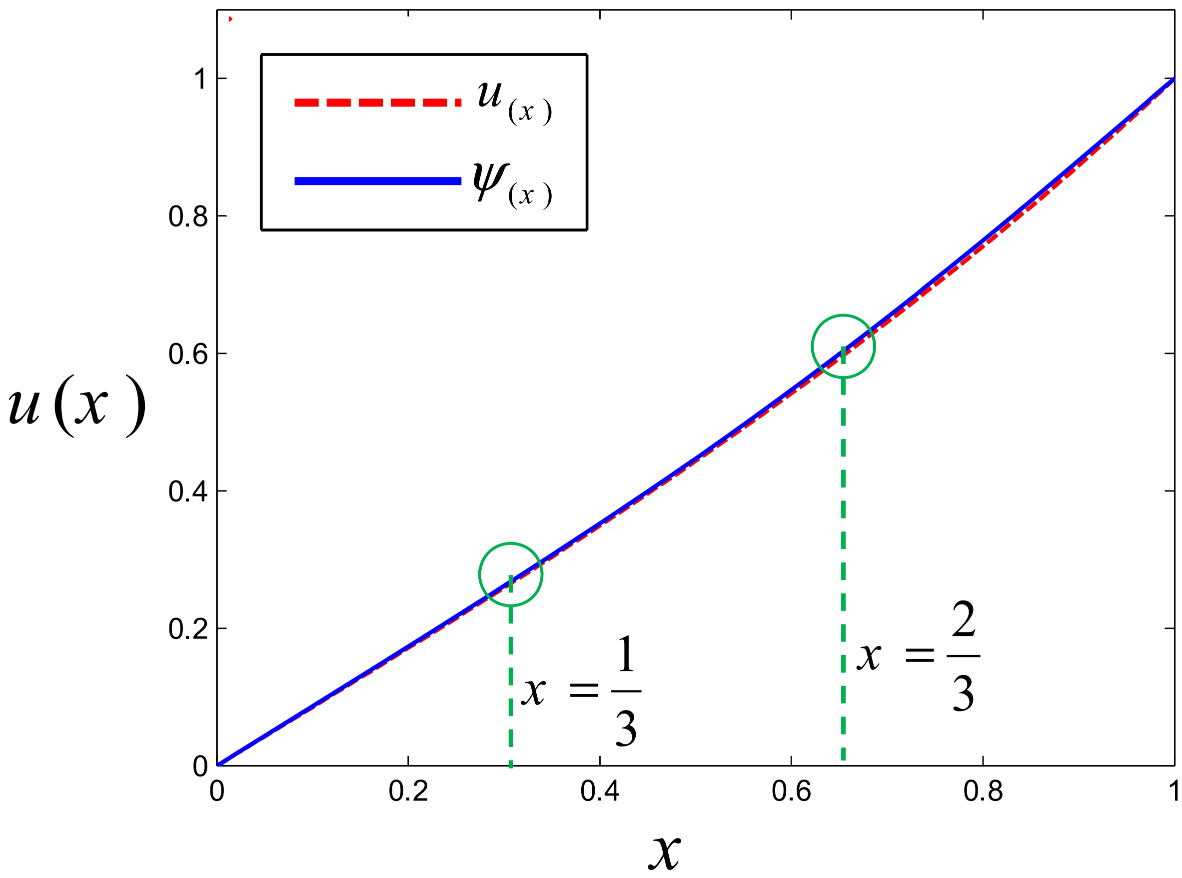
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (5.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقربی به دست می‌آید:

$$(5.19) \rightarrow (5.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = x - 53.1160\times 10^{-3}\sin(\pi x) + 4.7544\times 10^{-3}\sin(2\pi x)} \quad (5.20)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

1. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال 5-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

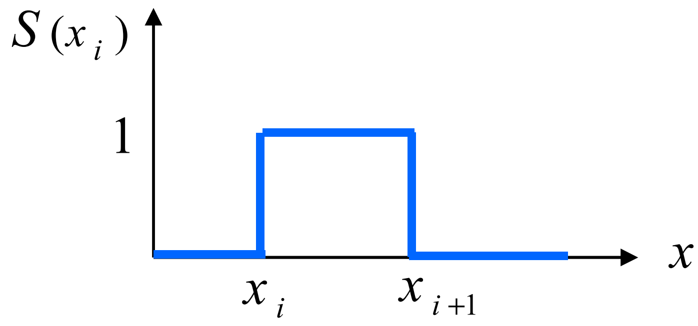
(مقدار خطا در نقاط گسسته تقریبا صفر شده است)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

در این روش، دامنه به تعدادی زیر بازه مختلف که همپوشانی نداشته باشد تبدیل می‌شود. تابع وزنی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که باقیمانده را می‌توان در n زیر بازه برابر با صفر کرد. برای این منظور تابع وزنی براساس تابع پله‌ای واحد (Step Function) به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\boxed{w_i(x) = U(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & else \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)} \quad (38)$$



تابع پله‌ای واحد دارای مشخصات زیر است:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} U(x_i) G(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x) dx} \qquad (39)$$

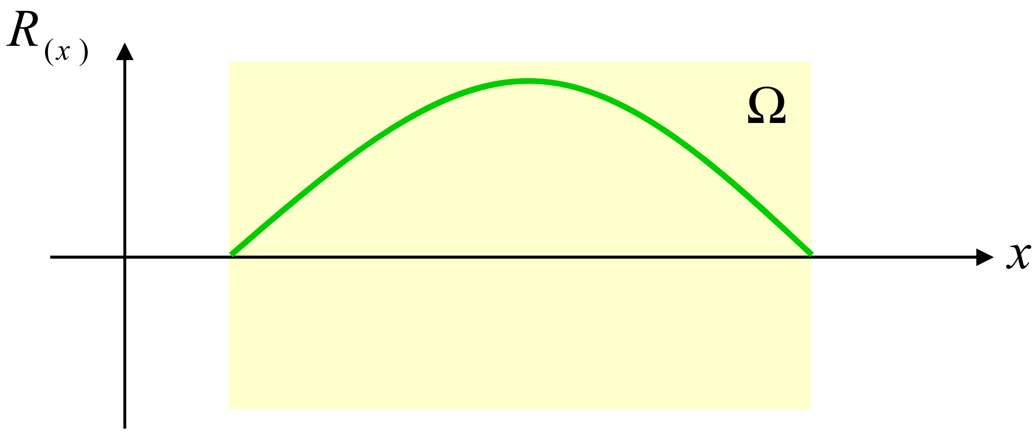
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

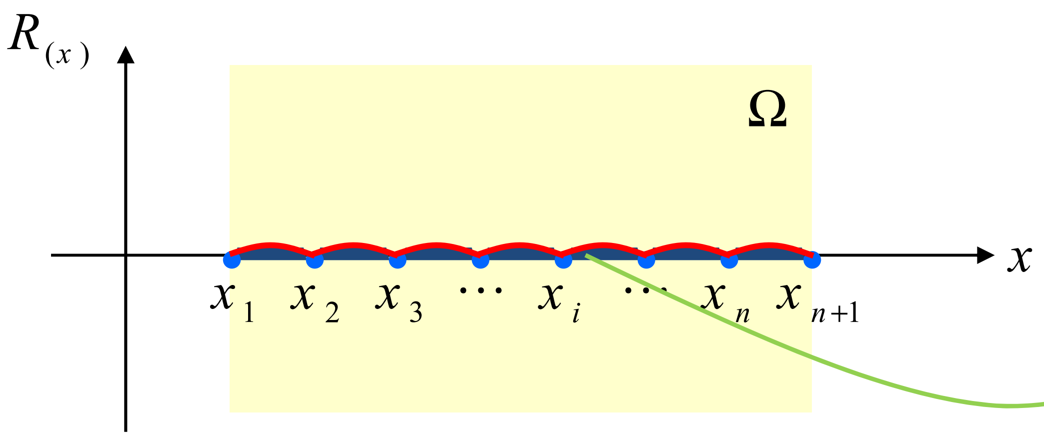
تعداد زیر بازه‌ها $(i=1,2,3,\cdots,n)$ ، $(x_i \; , x_{i+1}) \in \Omega$ باید برابر با n ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ باشند.

روش SDM سعی دارد که مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ در تمام زیر بازه‌ها را برابر با صفر نماید.

بنابراین هدف اصلی صفر شدن باقیمانده $R_{(x)}$ بر روی کل دامنه Ω است.



روش SDM در تعداد زیر بازه مشخصی $(x_i \; , x_{i+1})$ در دامنه Ω مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ را صفر می‌کند.



(مساحت زیر بازه‌ها به سمت صفر میل می کند)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

با جایگذاری تابع پله‌ای واحد به جای تابع وزنی در رابطه (24) نتیجه می‌شود:

$$(38) \rightarrow (24) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \int_{\Omega} U(x_1) R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} U(x_2) R_{(x)} dx = 0 \\ \quad \vdots \\ \int_{\Omega} U(x_n) R_{(x)} dx = 0 \end{array}} \qquad (40)$$

با توجه به ویژگی تابع پله‌ای واحد در رابطه (39) خواهیم داشت:

$$(39) \,\&\, (40) \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} U(x_i) R_{(x)} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_{(x)} dx = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} R_{(x)} dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)} \qquad (41)$$

این بدان معنی است که مقدار میانگین باقیمانده در طول هر زیر بازه به اجبار صفر گردد.

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

همچنین با جایگذاری تابع پله‌ای واحد به جای تابع وزنی در رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$(38) \rightarrow (28) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} s_{ij} &= \int_{\Omega} U(x_i)\mathcal{L}(N_j(x))dx \\ z_i &= -\int_{\Omega} U(x_i)p_{(x)}dx - \int_{\Omega} U(x_i)\mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx \end{aligned}} \quad (42)$$

با توجه به ویژگی تابع پله‌ای واحد در رابطه (39) خواهیم داشت:

$$(39)\,\&\,(42) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} s_{ij} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{L}(N_j(x))dx \\ z_i &= -\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{(x)}dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx \end{aligned}} \quad (43)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

بر اساس رابطه (43)، رابطه (29) به صورت زیر در می‌آید:

$$(43) \rightarrow (29) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(N_n(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{x_1}^{x_2} p_{(x)}dx - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_{x_2}^{x_3} p_{(x)}dx - \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx \\ \vdots \\ -\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_{(x)}dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix} \quad (44)$$

- می توان نشان داد روش SDM معادل همان روش پرکاربرد حجم محدود (Finite Volume Method) در دینامیک سیالات محاسباتی (CFD: Computational Fluid Dynamics) است.

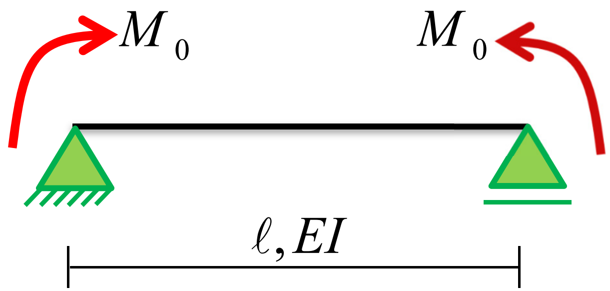
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

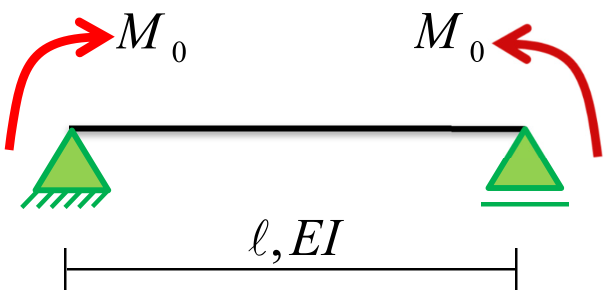
مثال 6- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش SDM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای



روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



.2 روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$\boxed{EI\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2} - M_0 = 0 \qquad x \in (0\,,\,\ell)} \quad (6.1)$$

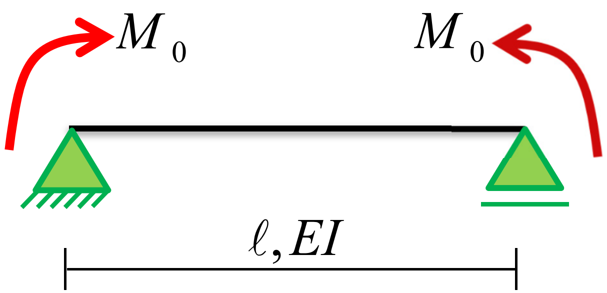
با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\boxed{BC: \begin{cases} @x = 0 & \Rightarrow & y_{(0)} = 0 \\ @x = \ell & \Rightarrow & y_{(\ell)} = 0 \end{cases}} \quad (6.2)$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می‌آید:

$$\boxed{y_{(x)} = \frac{M_0}{2EI}x\,(x-\ell)} \quad (6.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$(6.1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) y_{(x)} - \dfrac{M_0}{EI} = 0 \\ (1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) & \Omega = (0, \ell) \\ p_{(x)} = -\dfrac{M_0}{EI} & \end{array}} \quad (6.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

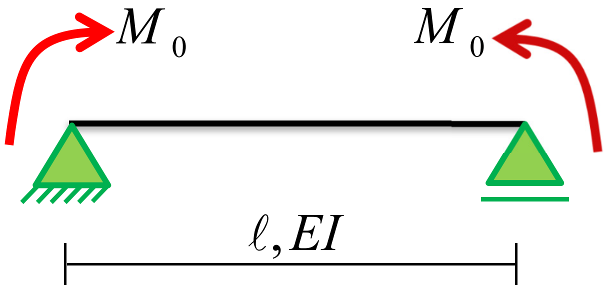
با در نظر گرفتن تنها دو جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)} \quad (6.5)$$

با توجه به رابطه (6.5):

$$(6.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad , \quad N_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (6.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1 \,,\, r_{(0)} = 0} \quad (6.7)$$

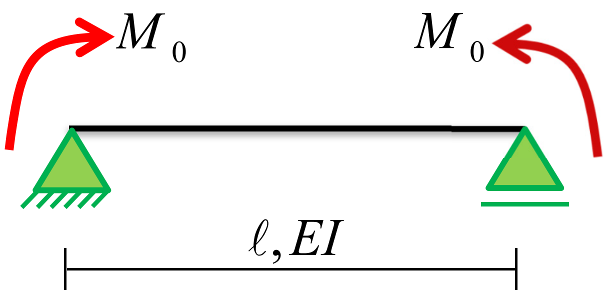
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\overline{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \overset{(6.6)\&(6.7)}{\Rightarrow} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad OK$$

$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(\ell)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1 \,,\, r_{(\ell)} = 0} \quad (6.8)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\overline{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \overset{(6.6)\&(6.8)}{\Rightarrow} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}\big(N_i(x)\big) = 0 \overset{(6.6)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)\right) = 0} \quad (6.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (6.9) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{N_i(x)=\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)=0} \quad (6.10)$$

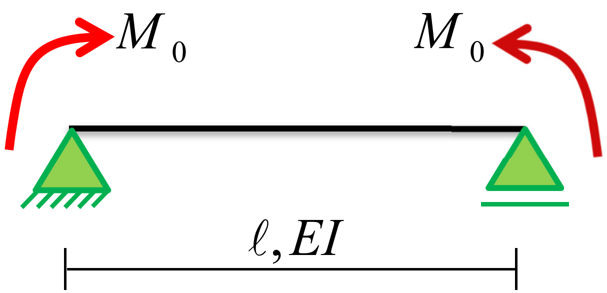
با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_1(\ell)=0 \end{cases}} \qquad OK ✓$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_2(\ell)=0 \end{cases}} \qquad OK ✓$$

براساس رابطه (44) دستگاه معادلات با فرض 2 زیر بازه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

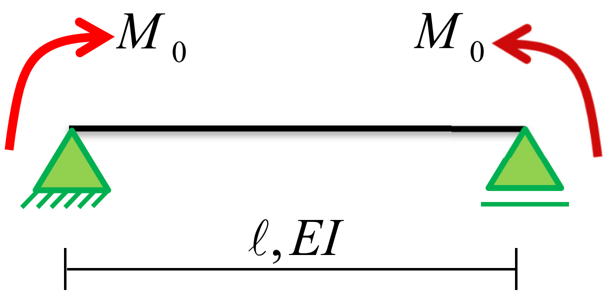
تعداد زیر بازه‌ها $(x_i \;, x_{i+1})$ را برابر با 2 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. برای ایجاد 2 زیر بازه به 3 نقطه نیاز داریم. این 3 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در 2 زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 3 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

$$x_i \in \Omega\,,(i=1\,,2\,,3) \;\Rightarrow\; \boxed{x_1=0 \quad , \quad x_2=\frac{\ell}{2} \quad , \quad x_3=\ell} \qquad (6.12)$$

اکنون پارامترهای رابطه (6.11) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$p_{(x)}=-\frac{M_0}{EI} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{cases} \\ \int_{x_2}^{x_3} p_{(x)}dx=\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}-\frac{M_0}{EI}dx=-\frac{M_0\ell}{2EI} \end{cases}} \qquad (6.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

$$\bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = 0} \quad (6.14)$$

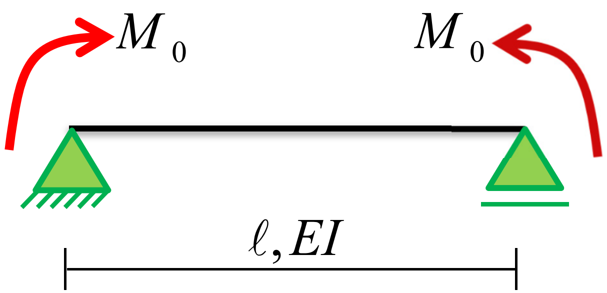
$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx = -\frac{\pi}{\ell}} \quad (6.15)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right)dx = \frac{2\pi}{\ell}\cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_0^{\frac{\ell}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx = -\frac{4\pi}{\ell}} \quad (6.16)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx = \int_{x_2}^{x_3} \frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right)dx = \frac{\pi}{\ell}\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx = -\frac{\pi}{\ell}} \quad (6.17)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_{x_2}^{x_3} \frac{d^2}{dx^2}\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right)dx = \frac{2\pi}{\ell}\cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx = \frac{4\pi}{\ell}} \quad (6.18)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (6.13) تا (6.18) در دستگاه معادلات (6.11) خواهیم داشت:

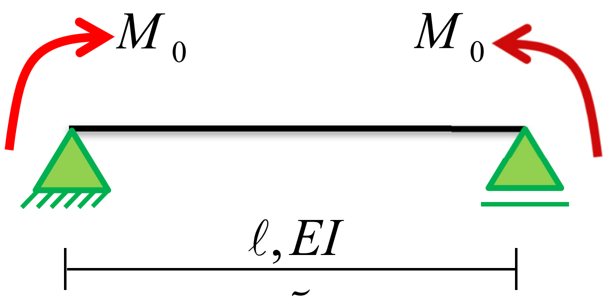
$$(6.13)\ to\ (6.18) \rightarrow (6.11) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} -\dfrac{\pi}{\ell} & -\dfrac{4\pi}{\ell} \\ -\dfrac{\pi}{\ell} & \dfrac{4\pi}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{M_0\ell}{2EI} \\ \dfrac{M_0\ell}{2EI} \end{Bmatrix}} \qquad (6.19)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (6.19) نتیجه می‌شود:

$$(6.19) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\pi}{\ell} & -\dfrac{4\pi}{\ell} \\ -\dfrac{\pi}{\ell} & \dfrac{4\pi}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{M_0\ell}{2EI} \\ \dfrac{M_0\ell}{2EI} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{M_0\ell^2}{2\pi EI} \\ 0 \end{Bmatrix}} \qquad (6.20)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

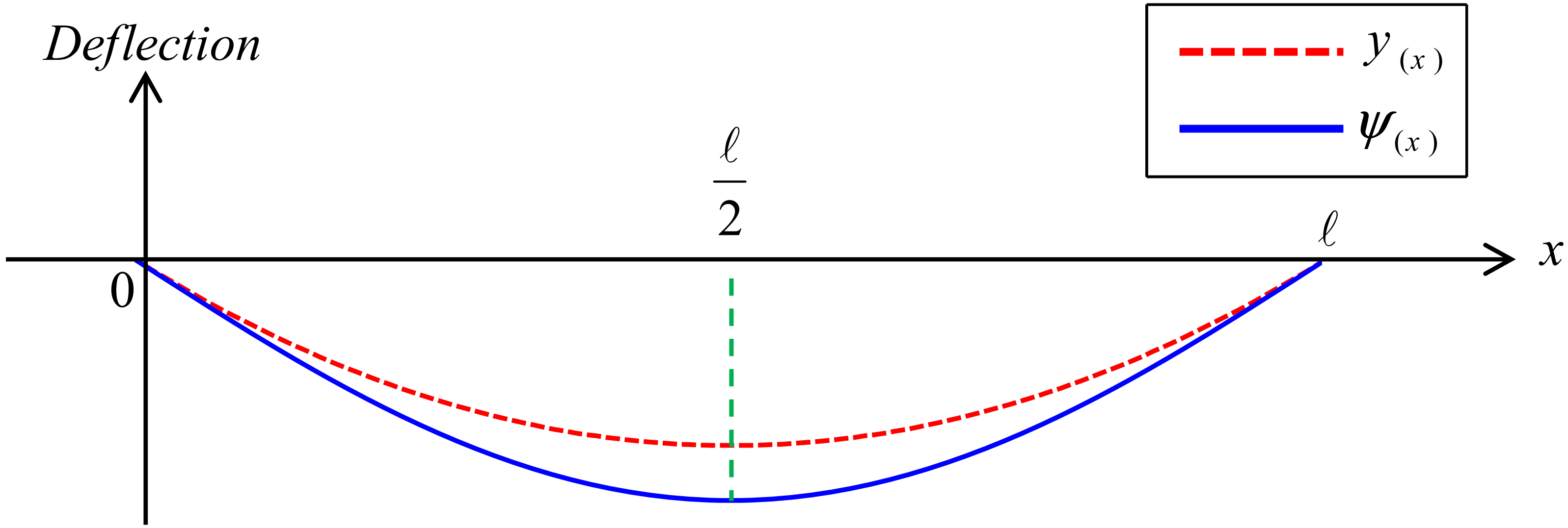


2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

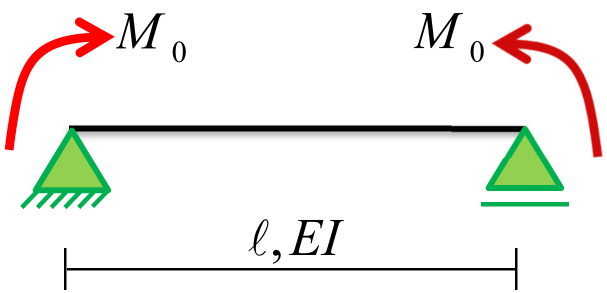
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (6.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(6.20) \rightarrow (6.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{M_0 \ell^2}{2\pi EI} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (6.21)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

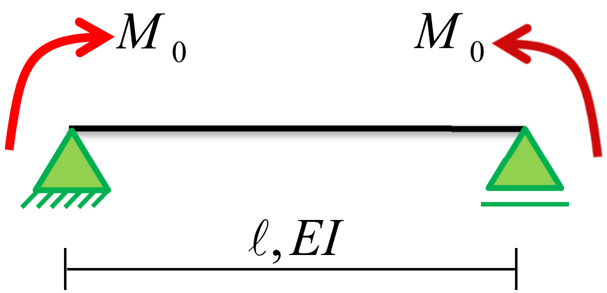
$$(16) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x-\ell)} \quad (6.22)$$

با توجه به رابطه (6.22):

$$(6.22) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = x(x-\ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0} \quad (6.23)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

.2 روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)



پاسخ مثال 6- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$BC \Rightarrow y_{(0)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(0)}+0=0 \quad (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \; \Bigg\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (6.7)$$ (تکراری)

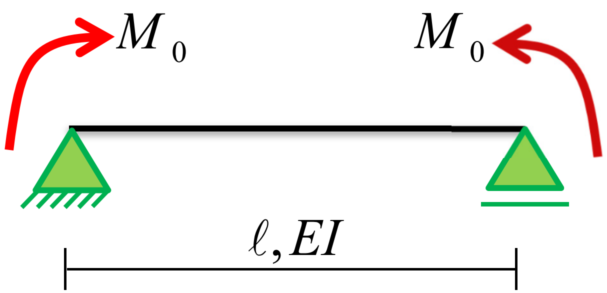
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \overset{(6.7)\&(6.23)}{\Rightarrow} 1(\alpha_0)+0=0 \overset{Must\ be}{\Rightarrow} \boxed{\alpha_0=0}\ (6.24) \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$BC \Rightarrow y_{(\ell)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)}+0=0 \quad (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \; \Bigg\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(\ell)}=0} \quad (6.8)$$ (تکراری)

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \overset{(6.8)\&(6.23)\&(6.24)}{\Rightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \overset{(6.23)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{M}\big(x(x-\ell)\big)=0} \quad (6.25)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (6.25) به صورت زیر در می‌آید:

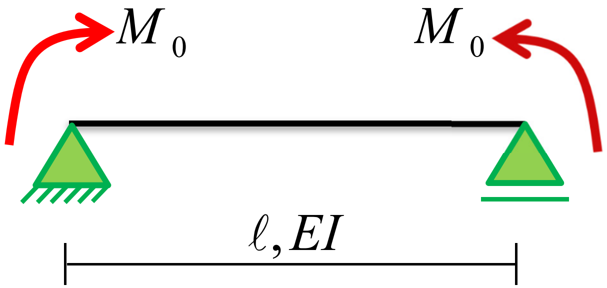
$$\boxed{N_1(x) = x(x-\ell) = 0} \quad (6.26)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = x(x-\ell) = 0 \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow & N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow & N_1(\ell)=0 \end{cases}} \; OK$$

براساس رابطه (44) دستگاه معادلات با فرض 1 زیر بازه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

تعداد زیر بازه‌ها $(x_i \, , x_{i+1})$ را برابر با 1 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. برای ایجاد 1 زیر بازه به 2 نقطه نیاز داریم. این 2 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در 1 زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 2 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

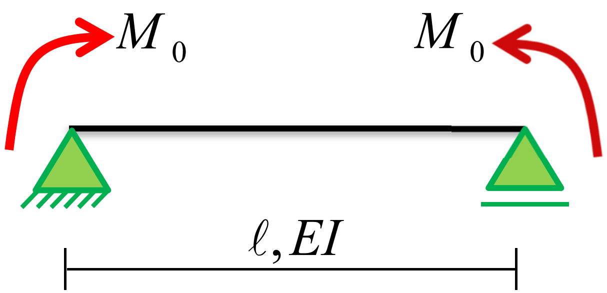
$$x_i \in \Omega \, , (i = 1, 2) \quad \Rightarrow \boxed{x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \ell} \qquad (6.28)$$

اکنون پارامترهای رابطه (6.27) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$p_{(x)} = -\frac{M_0}{EI} \quad \Rightarrow \boxed{\int_{x_1}^{x_2} p_{(x)} dx = \int_0^{\ell} -\frac{M_0}{EI} dx = -\frac{M_0 \ell}{EI}} \qquad (6.29)$$

$$\bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0} \qquad (6.30)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 6- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx = 2\ell} \qquad (6.31)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (6.29) تا (6.31) در معادله (6.27) خواهیم داشت:

$$(6.29)\ to\ (6.31) \rightarrow (6.27) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = \frac{M_0}{2EI}} \qquad (6.32)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (6.22) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(6.32) \rightarrow (6.22) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x-\ell)} \qquad (6.33)$$

(همان پاسخ دقیق است)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

مثال 7- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش SDM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \qquad x \in (0\,,2) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \Rightarrow y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)}\sin(x) + x$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

.2 روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 y_{(x)}}{dx^2}+y_{(x)}=x \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{d^2}{dx^2}+1\right)y_{(x)}-x=0 \\ (1) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}(y_{(x)})+p_{(x)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L}=\left(\dfrac{d^2}{dx^2}+1\right) & \Omega=(0\,,2) \\ p_{(x)}=-x & \end{array}} \qquad (7.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16) \;\Rightarrow\; \psi_{(x)}=\bar{\psi}_{(x)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_{(x)}=2.5x+\alpha_1 x(x-2)+\alpha_2 x^2(x-2)} \qquad (7.2)$$

با توجه به رابطه (7.2):

$$(7.2) \;\Rightarrow\; \boxed{N_1(x)=x(x-2) \quad , \quad N_2(x)=x^2(x-2) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)}=2.5x} \qquad (7.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7-

$$BC \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} y_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(0)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (7.4)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\overset{(7.3)\&(7.4)}{\Rightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$BC \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} y_{(2)}=5 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(2)}-5=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(2)})+r_{(2)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(2)}=-5} \quad (7.5)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)})+r_{(2)}=0 \;\overset{(7.3)\&(7.5)}{\Rightarrow}\; 1(2.5\times 2)-5=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \;\overset{(7.3)}{\Rightarrow}\; \begin{array}{l} for\ i=1 \\ for\ i=2 \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M}\big(x(x-2)\big)=0 \\ \mathcal{M}\big(x^2(x-2)\big)=0 \end{array}} \quad (7.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (7.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(7.4) or (7.5) \rightarrow (7.6) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} for\ i=1 & N_1(x)=x(x-2)=0 \\ for\ i=2 & N_2(x)=x^2(x-2)=0 \end{array}} \qquad (7.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_1(2)=0 \end{cases}} \quad OK \ \checkmark$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=x^2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_2(2)=0 \end{cases}} \quad OK \ \checkmark$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7– براساس رابطه (44) دستگاه معادلات با فرض 2 زیر بازه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(44)\quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{x_1}^{x_2} p_{(x)}dx - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_{x_2}^{x_3} p_{(x)}dx - \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix}} \quad (7.8)$$

تعداد زیر بازه‌ها $(x_i \,, x_{i+1})$ را برابر با 2 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. برای ایجاد 2 زیر بازه به 3 نقطه نیاز داریم. این 3 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در 2 زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 3 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7- اکنون پارامترهای رابطه (7.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(7.1) \Rightarrow p_{(x)} = -x \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p_{(x)} dx = \int_0^1 (-x)dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\int_{x_1}^{x_2} p_{(x)} dx = -\frac{1}{2}} \quad (7.10)$$

$$\boxed{\int_{x_2}^{x_3} p_{(x)} dx = -\frac{3}{2}} \quad (7.11)$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \frac{5}{4}} \quad (7.12)$$

$$(7.3) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x \Rightarrow \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_1^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right)(2.5x)dx = \frac{15}{4} \Rightarrow \boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \frac{15}{4}} \quad (7.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7-

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx = \int_0^1 \left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(x(x-2)\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx = \frac{4}{3}} \quad (7.14)$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx = \frac{9}{4}} \quad (7.15)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx = \int_1^2 \left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(x(x-2)\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)\Bigg|_1^2 \Rightarrow \boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx = \frac{4}{3}} \quad (7.16)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_1^2 \left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)\left(x^2(x-2)\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+2x^2\right)\Bigg|_1^2 \Rightarrow \boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx = \frac{39}{4}} \quad (7.17)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (7.10) تا (7.17) در دستگاه معادلات (7.8) خواهیم داشت:

$$(7.10)\ to\ (7.17) \rightarrow (7.8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{9}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{39}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{Bmatrix}} \quad (7.18)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (7.18) نتیجه می‌شود:

$$(7.18) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{9}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{39}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{9}{40} \\ -\frac{1}{5} \end{Bmatrix}} \quad (7.19)$$

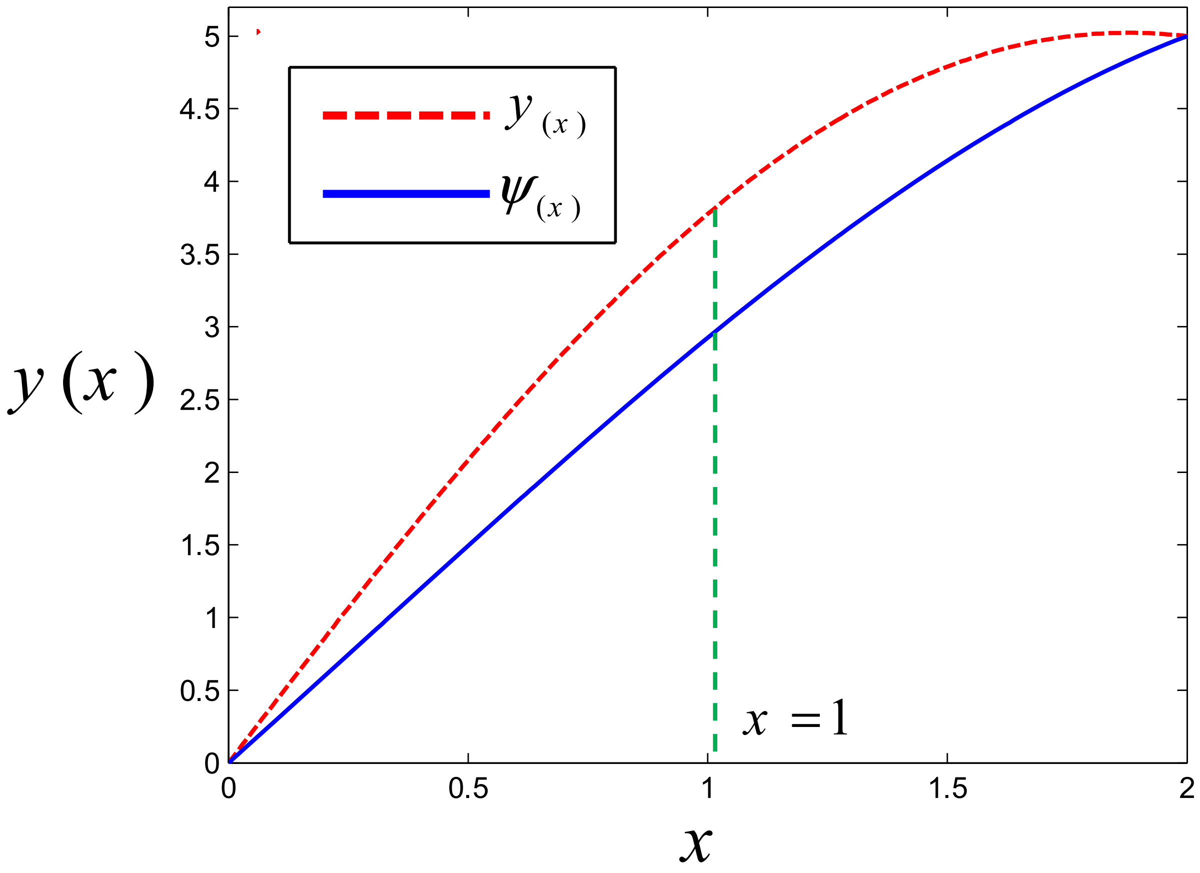
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (7.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(7.19) \rightarrow (7.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{7}{40}x^2 + \frac{59}{20}x} \quad (7.20)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 7-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

مثال 8- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش SDM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \qquad x \in (0\,,1) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x=0 \;\Rightarrow\; u_{(0)}=0 \\ @x=1 \;\Rightarrow\; u_{(1)}=1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^{x} - 0.42546e^{-x}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2u_{(x)}}{dx^2}-u_{(x)}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{d^2}{dx^2}-1\right)u_{(x)}+0=0 \\ (1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(u_{(x)})+p_{(x)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L}=\left(\dfrac{d^2}{dx^2}-1\right) & \Omega=[0,1] \\ p_{(x)}=0 & \end{array}} \quad (8.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)}=\bar{\psi}_{(x)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)}=x+\alpha_1\sin(\pi x)+\alpha_2\sin(2\pi x)} \quad (8.2)$$

با توجه به رابطه (8.2):

$$(8.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x)=\sin(\pi x) \quad , \quad N_2(x)=\sin(2\pi x) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)}=x} \quad (8.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8-

$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(0)} = 0 \Rightarrow d^{0}u_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1,\ r_{(0)} = 0} \quad (8.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \overset{(8.3)\&(8.4)}{\Rightarrow} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(1)} = 1 \Rightarrow d^{0}u_{(1)} - 1 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1,\ r_{(1)} = -1} \quad (8.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \overset{(8.3)\&(8.5)}{\Rightarrow} 1(1) - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}\left(N_i(x)\right) = 0 \overset{(8.3)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin(i\pi x)\right) = 0} \quad (8.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (8.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(8.4)\,or\,(8.5)\rightarrow(8.6)\quad\Rightarrow\quad\boxed{N_i(x)=\sin(i\pi x)=0}\;(8.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1\quad\Rightarrow\quad N_1(x)=\sin(\pi x)=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{@\begin{cases}x=0 & \Rightarrow\quad N_1(0)=0\\ x=1 & \Rightarrow\quad N_1(1)=0\end{cases}}\quad OK\ ✓$$

$$i=2\quad\Rightarrow\quad N_2(x)=\sin(2\pi x)=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{@\begin{cases}x=0 & \Rightarrow\quad N_2(0)=0\\ x=1 & \Rightarrow\quad N_2(1)=0\end{cases}}\quad OK\ ✓$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8- براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض 2 زیر بازه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(44)\quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{x_1}^{x_2} p_{(x)}dx - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_{x_2}^{x_3} p_{(x)}dx - \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix}} \quad (8.8)$$

تعداد زیر بازه‌ها $(x_i \; , x_{i+1})$ را برابر با 2 همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. برای ایجاد 2 زیر بازه به 3 نقطه نیاز داریم. این 3 نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در 2 زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل 3 نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

$$x_i \in \Omega \, , (i = 1 \, , 2 \, , 3) \quad \Rightarrow \boxed{x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_3 = 1} \qquad (8.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8- اکنون پارامترهای رابطه (8.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(8.1) \quad \Rightarrow \quad p_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} p_{(x)} dx = \int_{x_2}^{x_3} p_{(x)} dx = 0} \quad (8.10)$$

$$(8.3) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_{(x)} = x \quad \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) (x) dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{1}{8}} \quad (8.11)$$

$$\boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{3}{8}} \quad (8.12)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8-

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathcal{L}(N_1(x))dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)dx=\frac{1+\pi^2}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\boxed{\int_{x_1}^{x_2}\mathcal{L}(N_1(x))dx=-\frac{1+\pi^2}{\pi}}\quad(8.13)$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathcal{L}(N_2(x))dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)dx=\frac{1+4\pi^2}{2\pi}\cos(2\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\boxed{\int_{x_1}^{x_2}\mathcal{L}(N_2(x))dx=-\frac{1+4\pi^2}{\pi}}\quad(8.14)$$

$$\int_{x_2}^{x_3}\mathcal{L}(N_1(x))dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)dx=\frac{1+\pi^2}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\Rightarrow\boxed{\int_{x_2}^{x_3}\mathcal{L}(N_1(x))dx=-\frac{1+\pi^2}{\pi}}\quad(8.15)$$

$$\boxed{\int_{x_2}^{x_3}\mathcal{L}(N_2(x))dx=\frac{1+4\pi^2}{\pi}}\quad(8.16)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (8.10) تا (8.16) در دستگاه معادلات (8.8) خواهیم داشت:

$$(8.10)\ to\ (8.16) \rightarrow (8.8) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1+\pi^2 & 1+4\pi^2 \\ 1+\pi^2 & -(1+4\pi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = -\frac{\pi}{8} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}} \qquad (8.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (8.17) نتیجه می‌شود:

$$(8.17) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = -\frac{\pi}{8} \begin{bmatrix} 1+\pi^2 & 1+4\pi^2 \\ 1+\pi^2 & -(1+4\pi^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -72.256 \\ 9.7014 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}} \qquad (8.18)$$

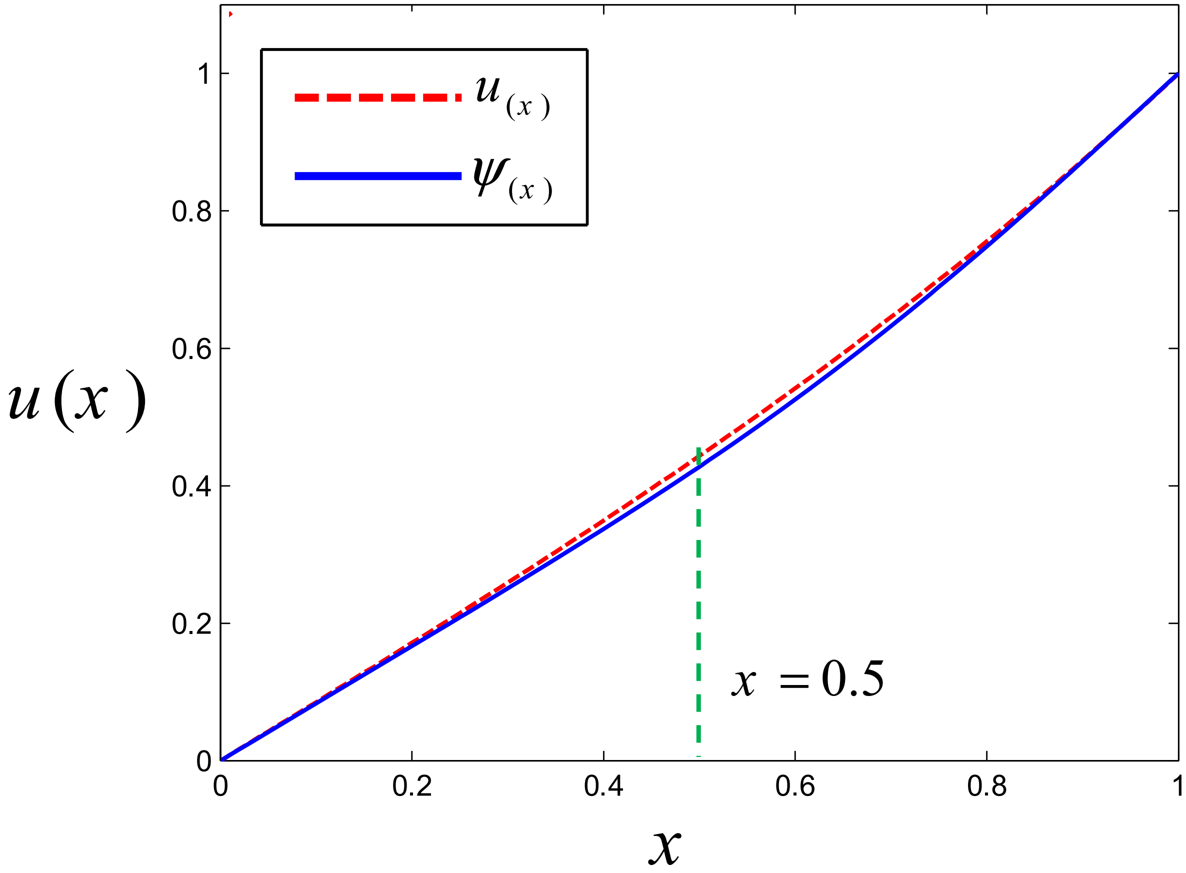
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (8.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(8.18) \rightarrow (8.2) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x - 72.256 \times 10^{-3} \sin(\pi x) + 9.7014 \times 10^{-3} \sin(2\pi x)} \qquad (8.19)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

2. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال 8-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

در این روش، تابع وزنی برابر با مشتق باقیمانده نسبت به ثابت‌های نامعین برازش در تابع حدسی α_i در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع وزنی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\boxed{w_i(x) = \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)} \quad (45)$$

با جایگذاری تابع وزنی پیشنهادی (45) در رابطه (24) نتیجه می‌شود:

$$(45) \to (24) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_1} R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_2} R_{(x)} dx = 0 \\ \qquad \vdots \\ \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_n} R_{(x)} dx = 0 \end{array}} \quad (46)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

از رابطه (46) می توان نتیجه گرفت:

$$(46)\quad \Rightarrow\quad \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} R_{(x)} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial R^2_{(x)}}{\partial \alpha_i} dx = 0} \quad (47)$$

رابطه (47) به این معنی است که میانگین مجذور باقیمانده در دامنه Ω با توجه به ثابت‌های برازش α_i باید به حداقل برسد. بنابراین با رساندن میانگین مجذور باقیمانده به صفر، عملا باقیمانده $R_{(x)}$ صفر می‌گردد.

با مشتق‌گیری از باقیمانده $R_{(x)}$ نسبت به ثابت برازش α_i در رابطه (25) خواهیم داشت:

$$(25) \quad \Rightarrow$$

$$R_{(x)} = \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{L}\left(N_i(x)\right)\right) + p_{(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})}{\partial \alpha_i}^{\,0} + \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{L}\left(N_i(x)\right)\right)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial p_{(x)}}{\partial \alpha_i}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\alpha_1 \mathcal{L}\left(N_1(x)\right)^{0} + \alpha_2 \mathcal{L}\left(N_2(x)\right)^{0} + \cdots + \alpha_i \mathcal{L}\left(N_i(x)\right) + \cdots + \alpha_n \mathcal{L}\left(N_n(x)\right)^{0}\right) = \mathcal{L}\left(N_i(x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} = \mathcal{L}(N_i(x))} \quad (48)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

با جایگذاری تابع وزنی (45) در رابطه (28) و استفاده رابطه (48) نتیجه می‌شود:

$$(45) \rightarrow (28) \quad \overset{(48)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\begin{aligned} s_{ij} &= \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_i(x))\mathcal{L}(N_j(x))dx \\ z_i &= -\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_i(x))p_{(x)}dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_i(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{aligned}} \quad (49)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

بر اساس رابطه (49)، رابطه (29) به صورت زیر در می‌آید:

$$(49)\rightarrow(29)\quad\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))\mathcal{L}(N_n(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))p_{(x)}dx - \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))p_{(x)}dx - \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ \vdots \\ -\int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))p_{(x)}dx - \int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix} \tag{50}$$

- روش LSM به طور خودکار ماتریس ضرایب را متقارن و مثبت معین (درایه‌های قطر اصلی مثبت) تولید می‌کند.
- عملیات محاسباتی مورد نیاز در روش LSM پر هزینه است.

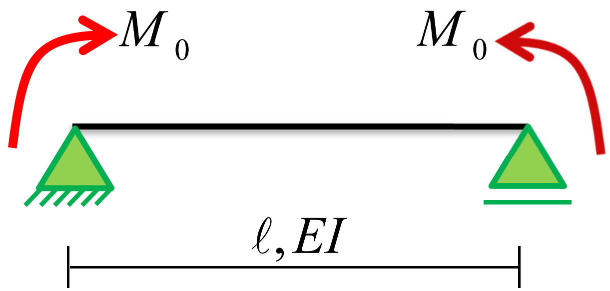
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

.3 روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

مثال 9- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش LSM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

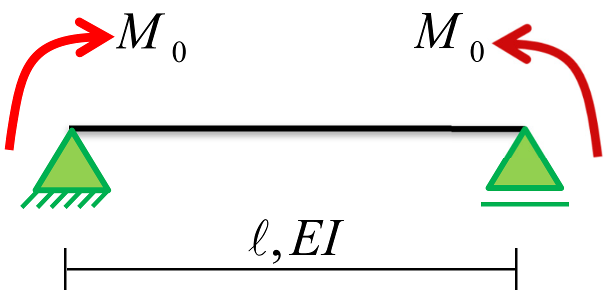
الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای



روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)



پاسخ مثال 9-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$\boxed{EI\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2}-M_0=0 \qquad x\in(0,\ell)} \quad (9.1)$$

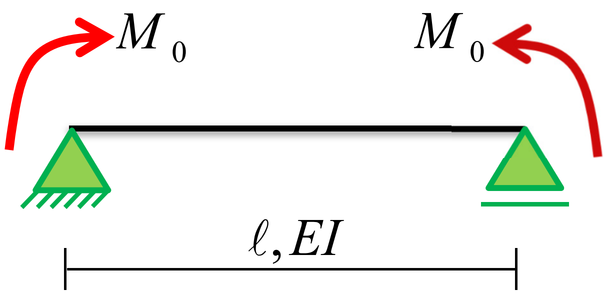
با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\boxed{BC:\ \begin{cases} @x=0 \ \Rightarrow \ y_{(0)}=0 \\ @x=\ell \ \Rightarrow \ y_{(\ell)}=0 \end{cases}} \quad (9.2)$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می‌آید:

$$\boxed{y_{(x)}=\frac{M_0}{2EI}x(x-\ell)} \quad (9.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$(9.1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) y_{(x)} - \dfrac{M_0}{EI} = 0 \\ (1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) & \Omega = (0, \ell) \\ p_{(x)} = -\dfrac{M_0}{EI} & \end{array}} \quad (9.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

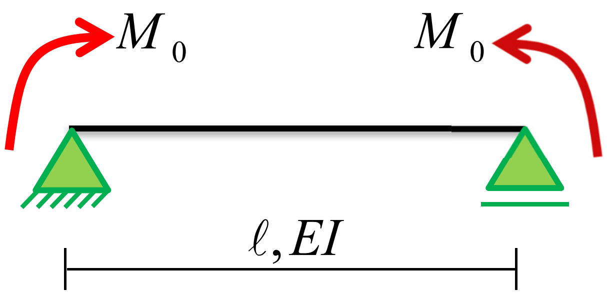
با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (9.5)$$

با توجه به رابطه (9.5):

$$(9.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (9.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

$$\left.\begin{aligned} BC \;\Rightarrow\; y_{(0)} = 0 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1\,,\, r_{(0)} = 0} \quad (9.7)$$

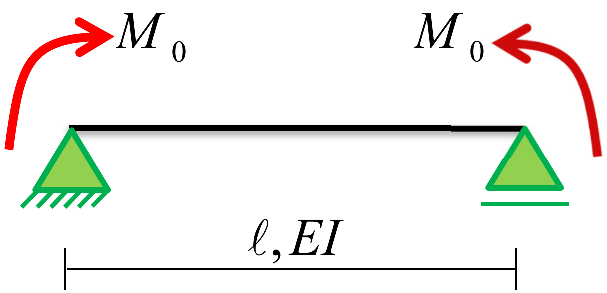
$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \;\overset{(9.6)\&(9.7)}{\Rightarrow}\; 1(0) + 0 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0 \qquad OK$$

$$\left.\begin{aligned} BC \;\Rightarrow\; y_{(\ell)} = 0 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1\,,\, r_{(\ell)} = 0} \quad (9.8)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \;\overset{(9.6)\&(9.8)}{\Rightarrow}\; 1(0) + 0 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0 \qquad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\left(N_1(x)\right) = 0 \;\overset{(9.6)}{\Rightarrow}\; \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right) = 0} \quad (9.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (9.9) به صورت زیر در می‌آید:

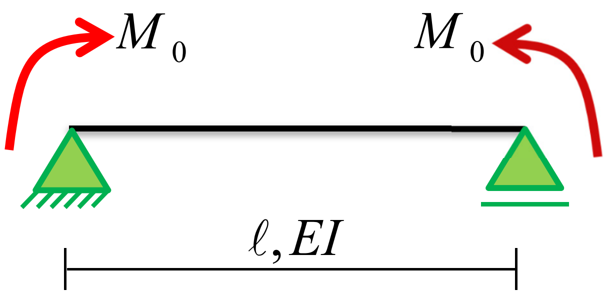
$$\boxed{N_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)=0} \quad (9.10)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_1(\ell)=0 \end{cases}} \quad OK \checkmark$$

براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض 1 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

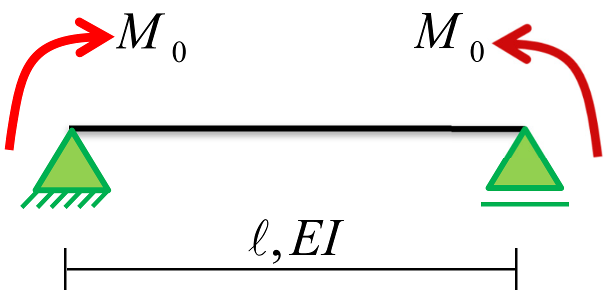
اکنون پارامترهای رابطه (9.11) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(9.4)\,\&\,(9.6) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\,p_{(x)}\,dx = \frac{2M_0\pi}{EI\,\ell}} \quad (9.12)$$

$$(9.6) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\,\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})\,dx = 0} \quad (9.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

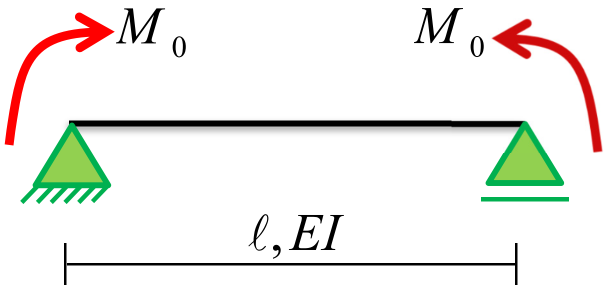
پاسخ مثال 9- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = \frac{\pi^4}{2\ell^3}} \quad (9.14)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (9.12) تا (9.14) در دستگاه معادلات (9.11) خواهیم داشت:

$$(9.12)\,to\,(9.14) \rightarrow (9.11) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3}} \quad (9.15)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

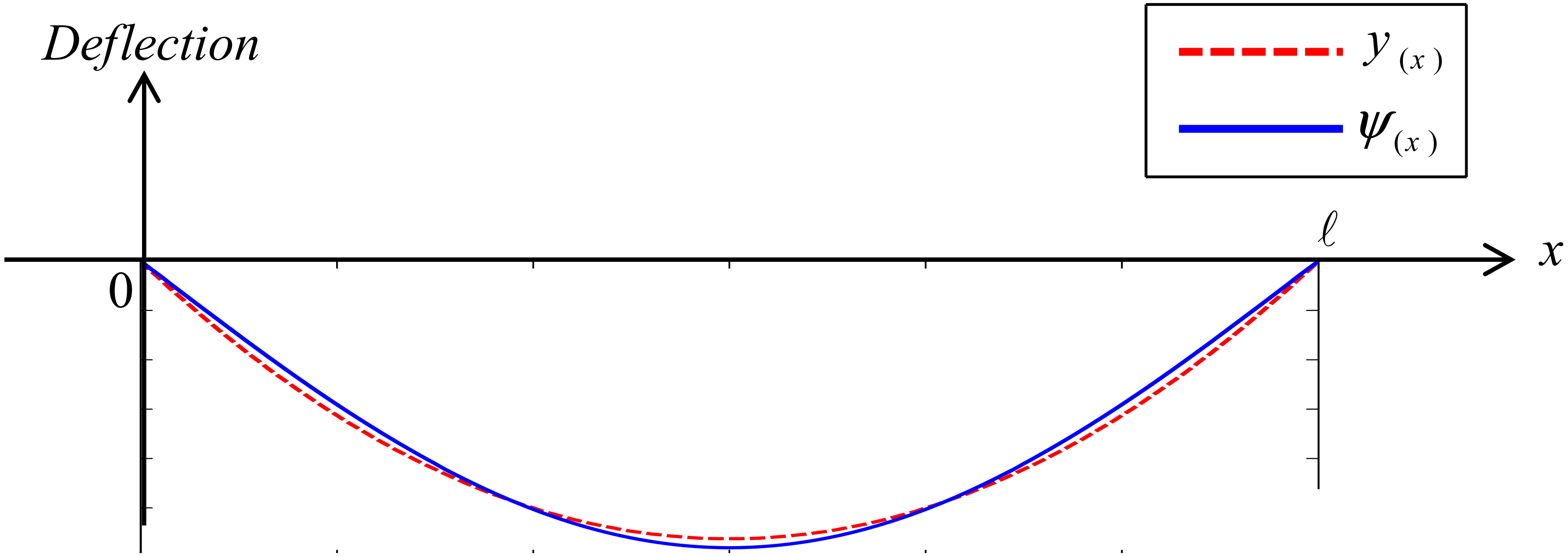


3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

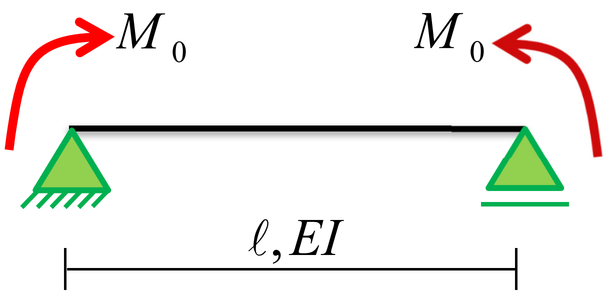
با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (9.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(9.15) \rightarrow (9.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (9.16)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

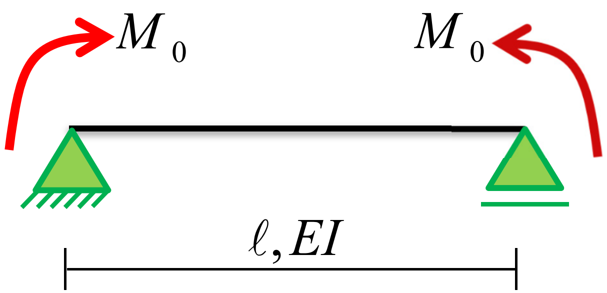
با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x-\ell)} \quad (9.17)$$

با توجه به رابطه (9.17):

$$(9.17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = x(x-\ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0} \quad (9.18)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(0)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(0)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (9.7)$$ (تکراری)

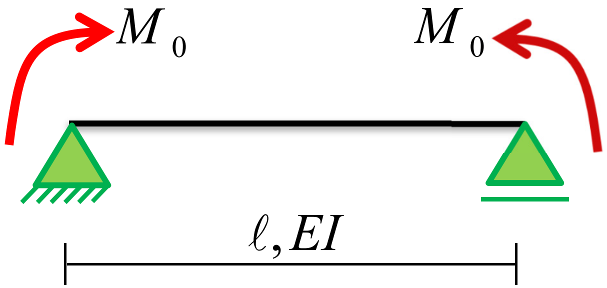
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \overset{(9.7)\&(9.18)}{\Rightarrow} 1(\alpha_0)+0=0 \overset{Must\ be}{\Rightarrow} \overset{(9.19)}{\boxed{\alpha_0=0}} \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(\ell)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(\ell)}=0} \quad (9.8)$$ (تکراری)

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \overset{(9.8)\&(9.18)\&(9.19)}{\Rightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \overset{(9.18)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{M}\big(x(x-\ell)\big)=0} \quad (9.20)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (9.20) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{N_1(x)=x(x-\ell)=0} \quad (9.21)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

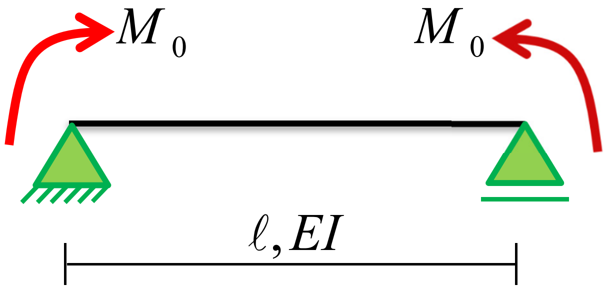
$$i=1 \;\Rightarrow\; N_1(x)=x(x-\ell)=0 \;\Rightarrow\; \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_1(\ell)=0 \end{cases}} \quad OK \checkmark$$

براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض 1 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

(تکراری)

$$(50) \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\alpha_1=-\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))p_{(x)}dx-\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx} \quad (9.11)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

اکنون پارامترهای رابطه (9.11) در حالتی که تابع حدسی فرم چندجمله‌ای دارد را تک تک محاسبه می‌کنیم:

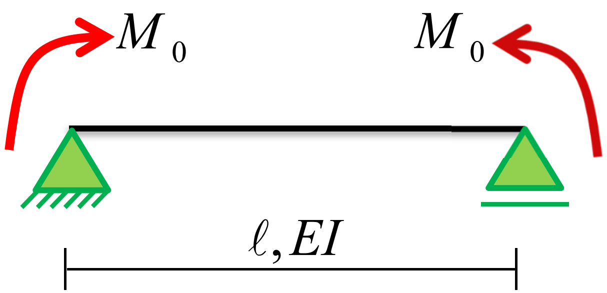
$$(9.4)\ \&\ (9.18) \quad \Rightarrow$$

$$= -\frac{2M_0 x}{EI}\Bigg|_0^{\ell} = -\frac{2M_0\ell}{EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\, p_{(x)}\, dx = -\frac{2M_0\ell}{EI}} \quad (9.22)$$

$$(9.18)\ \&\ (9.19) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\, \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})\, dx = 0} \quad (9.23)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 9- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$4x\Big|_0^{\ell} = 4\ell$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = 4\ell} \qquad (9.24)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (9.22) تا (9.24) در دستگاه معادلات (9.11) خواهیم داشت:

$$(9.22)\ to\ (9.24) \rightarrow (9.11) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{M_0}{2EI}} \quad (9.25)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (9.17) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(9.25) \rightarrow (9.17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x-\ell)} \qquad (9.26)$$ (همان پاسخ دقیق است)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

مثال 10- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش LSM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \qquad x \in (0\,,2) \qquad BC: \begin{cases} @x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10– معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \;\Rightarrow\; \left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right) y_{(x)} - x = 0 \\ &(1) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L} = \left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right) \qquad \Omega = (0\,,2) \\ &p_{(x)} = -x \end{aligned}} \quad (10.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16) \;\Rightarrow\; \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_{(x)} = 2.5x + \alpha_1 x(x-2) + \alpha_2 x^2 (x-2)} \quad (10.2)$$

با توجه به رابطه (10.2):

$$(10.2) \;\Rightarrow\; \boxed{N_1(x) = x(x-2) \quad , \quad N_2(x) = x^2(x-2) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x} \quad (10.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10-

$$\left.\begin{array}{l} BC \quad \Rightarrow \quad y_{(0)}=0 \quad \Rightarrow \quad d^{0}y_{(0)}+0=0 \\ \qquad (2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(0)}=0} \quad (10.4)$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \quad \overset{(10.3)\&(10.4)}{\Rightarrow} \quad 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \quad \Rightarrow \quad y_{(2)}=5 \quad \Rightarrow \quad d^{0}y_{(2)}-5=0 \\ \qquad (2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(y_{(2)})+r_{(2)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(2)}=-5} \quad (10.5)$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)})+r_{(2)}=0 \quad \overset{(10.3)\&(10.5)}{\Rightarrow} \quad 1(2.5\times 2)-5=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}\left(N_i(x)\right)=0 \quad \overset{(10.3)}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} for\ i=1 \\ for\ i=2 \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M}\left(x\,(x-2)\right)=0 \\ \mathcal{M}\left(x^{2}(x-2)\right)=0 \end{array}} \quad (10.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (10.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(10.4)or(10.5)\rightarrow(10.6) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} for\ i=1 & N_1(x)=x(x-2)=0 \\ for\ i=2 & N_2(x)=x^2(x-2)=0 \end{array}} \qquad (10.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_1(2)=0 \end{cases}} \quad OK \ \checkmark$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=x^2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_2(2)=0 \end{cases}} \quad OK \ \checkmark$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10- براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

اکنون پارامترهای رابطه (10.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(10.1)\,\&\,(10.3) \quad \Rightarrow$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))p_{(x)}dx = -\frac{8}{3}} \quad (10.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10-

$$\int_{\Omega}\mathcal{L}(N_2(x))p_{(x)}dx=\int_0^2\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x^2(x-2)\right)(-x)dx=-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+2x^3-2x^2\right)\Bigg|_0^2=-\frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\int_{\Omega}\mathcal{L}(N_2(x))p_{(x)}dx=-\frac{32}{5}}\quad(10.10)$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\int_{\Omega}\mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx=\frac{20}{3}}\quad(10.11)$$

$$\int_{\Omega}\mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx=\int_0^2\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x^2(x-2)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)2.5x\right)dx$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+2x^3-2x^2\right)\Bigg|_0^2=16\quad\Rightarrow\quad\boxed{\int_{\Omega}\mathcal{L}(N_2(x))p_{(x)}dx=16}\quad(10.12)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10-

$$\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x(x-2)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x(x-2)\right)dx = 4x\Big|_0^2 = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = 8} \quad (10.13)$$

$$\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x(x-2)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x^2(x-2)\right)dx = (6x^2-8x)\Big|_0^2 = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx = 8} \quad (10.14)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = 8} \quad (10.15)$$

$$\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x^2(x-2)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x^2(x-2)\right)dx$$

$$= (12x^3-24x^2+16x)\Big|_0^2 = 32 \quad \Rightarrow \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx = 32} \quad (10.16)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (10.9) تا (10.16) در دستگاه معادلات (10.8) خواهیم داشت:

$$(10.9)\ to\ (10.16) \rightarrow (10.8) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -\dfrac{48}{5} \end{Bmatrix}} \quad (10.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (10.17) نتیجه می‌شود:

$$(10.17) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 32 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -4 \\ -\dfrac{48}{5} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{4}{15} \\ -\dfrac{7}{30} \end{Bmatrix}} \quad (10.18)$$

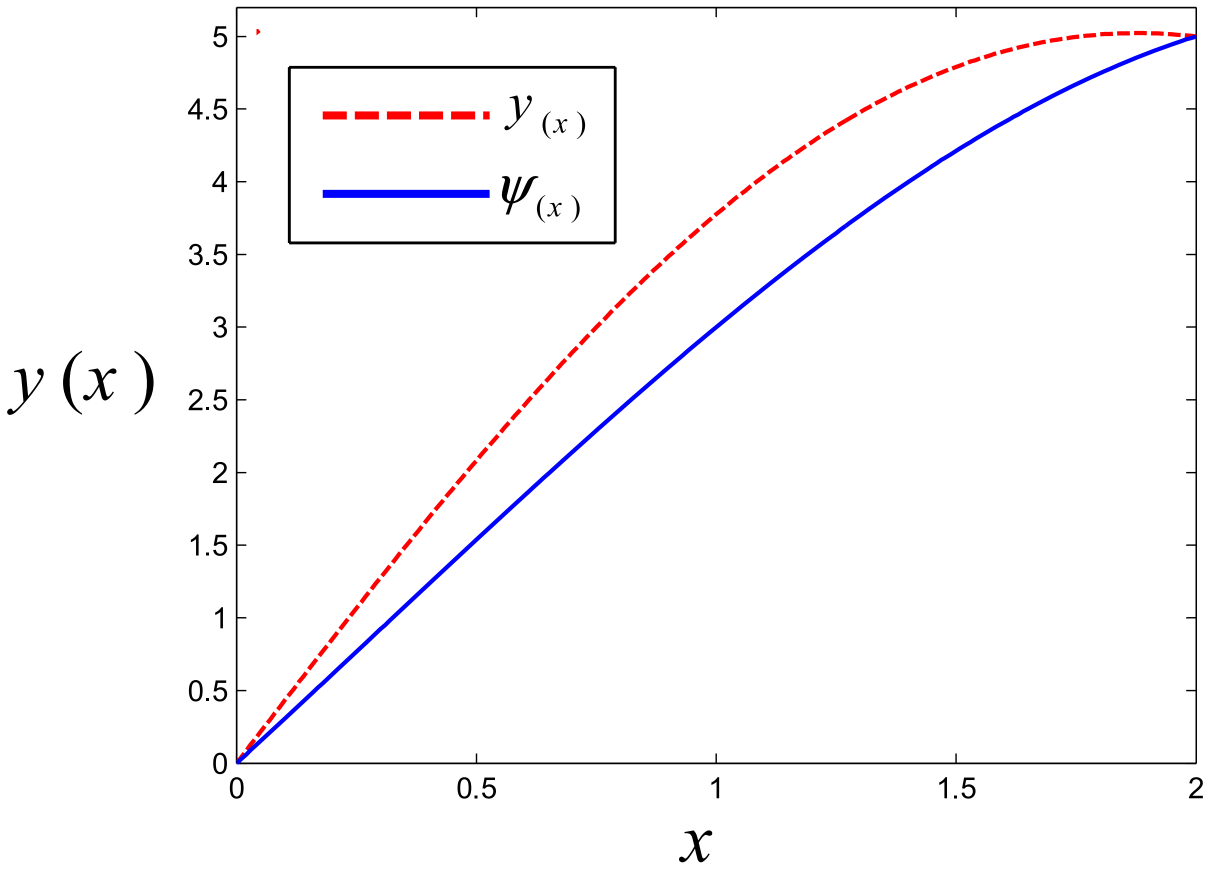
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (10.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(10.18) \rightarrow (10.2) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{7}{30}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{91}{30}x} \quad (10.19)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 10-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

مثال 11- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش LSM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \qquad x \in (0,1) \qquad BC: \begin{cases} @x=0 \Rightarrow u_{(0)}=0 \\ @x=1 \Rightarrow u_{(1)}=1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^{x} - 0.42546e^{-x}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11– معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2}-u_{(x)}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)u_{(x)}+0=0\\ &(1)\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}(u_{(x)})+p_{(x)}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\mathcal{L}=\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\qquad \Omega=[0\,,1]\\ &p_{(x)}=0\end{aligned}} \quad (11.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18)\quad\Rightarrow\quad \psi_{(x)}=\bar{\psi}_{(x)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sin\left(\frac{i\,\pi x}{\ell}\right)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\psi_{(x)}=x+\alpha_1\sin(\pi x)+\alpha_2\sin(2\pi x)}\,(11.2)$$

با توجه به رابطه (11.2):

$$(11.2)\quad\Rightarrow\quad \boxed{N_1(x)=\sin(\pi x)\quad,\quad N_2(x)=\sin(2\pi x)\quad,\quad \bar{\psi}_{(x)}=x}\quad (11.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11-

$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; u_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(0)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (11.4)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\overline{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\overset{(11.3)\&(11.4)}{\Longrightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; u_{(1)}=1 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(1)}-1=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(1)})+r_{(1)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(1)}=-1} \quad (11.5)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\overline{\psi}_{(1)})+r_{(1)}=0 \;\overset{(11.3)\&(11.5)}{\Longrightarrow}\; 1(1)-1=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \;\overset{(11.3)}{\Longrightarrow}\; \boxed{\mathcal{M}\big(\sin(i\pi x)\big)=0} \quad (11.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (11.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(11.4)or(11.5)\rightarrow(11.6) \quad \Rightarrow \boxed{N_i(x)=\sin(i\pi x)=0} \quad (11.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=\sin(\pi x)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=1 & \Rightarrow \quad N_1(1)=0 \end{cases}} \quad OK$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=\sin(2\pi x)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=1 & \Rightarrow \quad N_2(1)=0 \end{cases}} \quad OK$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11-براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(50)\quad \Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\begin{bmatrix} \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx \\ \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))p_{(x)}dx - \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))p_{(x)}dx - \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix}\end{gathered}} \quad (11.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (11.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(11.1)\,\&\,(11.3) \quad \Rightarrow \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))p_{(x)}dx = 0} \quad (11.9)$$

$$(11.1)\,\&\,(11.3) \quad \Rightarrow \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))p_{(x)}dx = 0} \quad (11.10)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11-

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \frac{1+\pi^2}{\pi}} \quad (11.11)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)x\right)dx =$$

$$\int_0^1 (1+4\pi^2)x\sin(2\pi x)dx = -\frac{1+4\pi^2}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x))p_{(x)}dx = -\frac{1+4\pi^2}{2\pi}} \quad (11.12)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)\right)dx =$$

$$\int_0^1 \left(-(1+\pi^2)\sin(\pi x)\right)^2 dx = \frac{(1+\pi^2)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = \frac{(1+\pi^2)^2}{2}} \quad (11.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

.3 روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11-

$$\int_0^1 (1+\pi^2)(1+4\pi^2)\sin(\pi x)\sin(2\pi x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx = 0} \quad (11.14)$$

$$\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)\right)dx = (6x^2-8x)\Big|_0^2 = 8$$

$$\int_0^1 (1+\pi^2)(1+4\pi^2)\sin(\pi x)\sin(2\pi x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_1(x))dx = 0} \quad (11.15)$$

$$\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)\right)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(-(1+4\pi^2)\sin(2\pi x)\right)^2 dx = \frac{(1+4\pi^2)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))\mathcal{L}(N_2(x))dx = \frac{(1+4\pi^2)^2}{2}} \quad (11.16)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11–با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (11.9) تا (11.16) در دستگاه معادلات (11.8) خواهیم داشت:

$$(11.9)\ to\ (11.16) \rightarrow (11.8) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \dfrac{(1+\pi^2)^2}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(1+4\pi^2)^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{1+\pi^2}{\pi} \\ \dfrac{1+4\pi^2}{2\pi} \end{Bmatrix}} \quad (11.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (11.17) نتیجه می‌شود:

$$(11.17) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -58.5688 \\ 7.8637 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}} \quad (11.18)$$

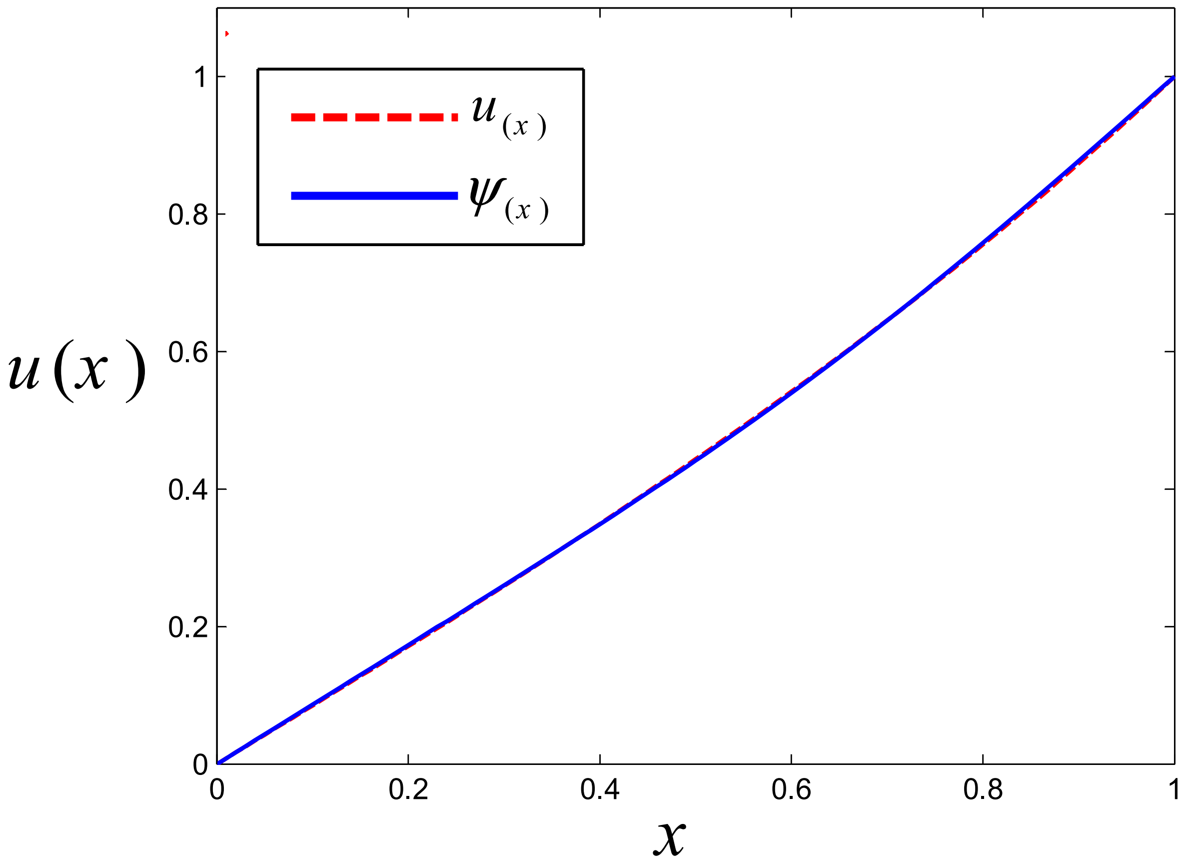
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (11.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(11.18) \rightarrow (11.2) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x - 58.5688 \times 10^{-3} \sin(\pi x) + 7.8637 \times 10^{-3} \sin(2\pi x)} \quad (11.19)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

3. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال 11-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

در این روش، تابع وزنی به صورت یک سری توابع (حدسی) آزمایشی در نظر گرفته می‌شود. از این روش برای توسعه روش المان محدود استفاده می‌گردد.

$$\boxed{w_i(x) = N_i(x) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)} \quad (51)$$

با جایگذاری تابع وزنی پیشنهادی (51) در رابطه (24) نتیجه می‌شود:

$$(51) \rightarrow (24) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \int_{\Omega} N_1(x) R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} N_2(x) R_{(x)} dx = 0 \\ \qquad \vdots \\ \int_{\Omega} N_n(x) R_{(x)} dx = 0 \end{array}} \quad (52)$$

همچنین با جایگذاری تابع حدسی $N_i(x)$ به جای تابع وزنی در رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$(51) \rightarrow (28) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} s_{ij} = \int_{\Omega} N_i(x) \mathcal{L}(N_j(x)) dx \\ z_i = -\int_{\Omega} N_i(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_i(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{array}} \quad (53)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

بر اساس رابطه (53)، رابطه (29) به صورت زیر در می‌آید:

$$(53) \rightarrow (29) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_n(x))dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Omega N_n(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega N_n(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx & \cdots & \int_\Omega N_n(x)\mathcal{L}(N_n(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_\Omega N_2(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ \vdots \\ -\int_\Omega N_n(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_n(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix} \tag{54}$$

- اگر عملگر دیفرانسیلی خود الحاقی باشد روش LSM به طور خودکار ماتریس ضرایب را متقارن و مثبت معین تولید می‌کند.
- عملیات محاسباتی مورد نیاز در روش GM کم هزینه است.

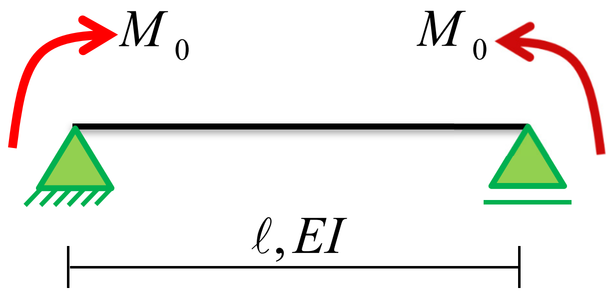
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

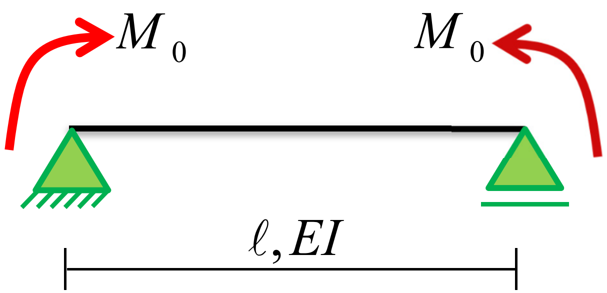
مثال 12- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش LSM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای



روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$\boxed{EI\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2}-M_0=0 \qquad x\in(0,\ell)} \quad (12.1)$$

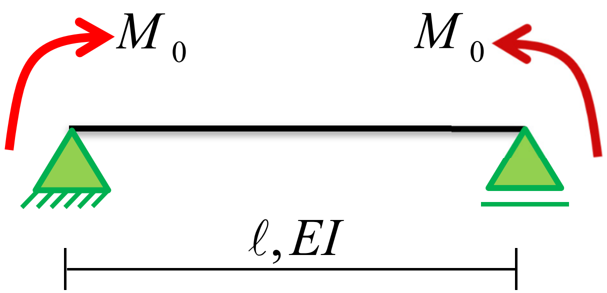
با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\boxed{BC:\begin{cases}@x=0 \Rightarrow y_{(0)}=0\\ @x=\ell \Rightarrow y_{(\ell)}=0\end{cases}} \quad (12.2)$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می‌آید:

$$\boxed{y_{(x)}=\frac{M_0}{2EI}x(x-\ell)} \quad (12.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12– معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$(12.1)\quad \Rightarrow\quad \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) y_{(x)} - \dfrac{M_0}{EI} = 0 \\ (1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) & \Omega = (0\,,\,\ell) \\ p_{(x)} = -\dfrac{M_0}{EI} & \end{array}} \quad (12.4)$$

الف– تابع حدسی فرم مثلثاتی

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18)\quad \Rightarrow\quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (12.5)$$

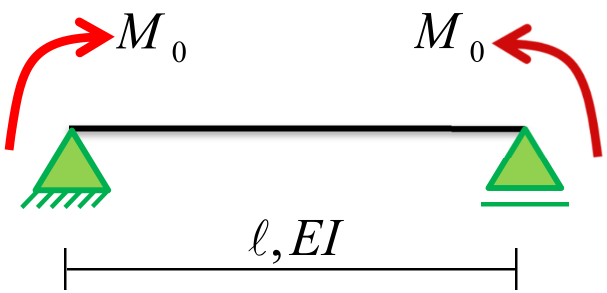
با توجه به رابطه (12.5):

$$(12.5)\quad \Rightarrow\quad \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (12.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی



$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; y_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(0)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (12.7)$$

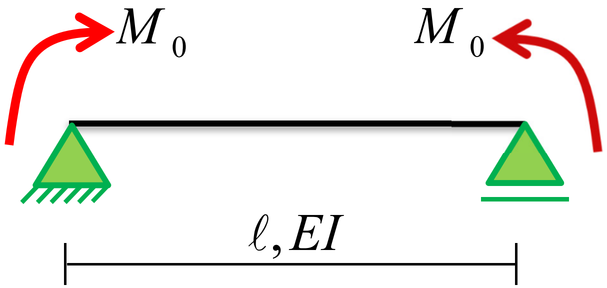
$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\overset{(12.6)\&(12.7)}{\Longrightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; y_{(\ell)}=0 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(\ell)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(\ell)}=0} \quad (12.8)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \;\overset{(12.6)\&(12.8)}{\Longrightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\left(N_1(x)\right)=0 \;\overset{(12.6)}{\Longrightarrow}\; \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right)=0} \quad (12.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (12.9) به صورت زیر در می‌آید:

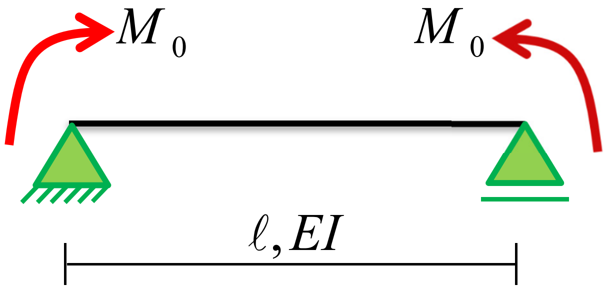
$$\boxed{N_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)=0} \quad (12.10)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_1(\ell)=0 \end{cases}} \quad OK \checkmark$$

براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض 1 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

اکنون پارامترهای رابطه (12.11) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

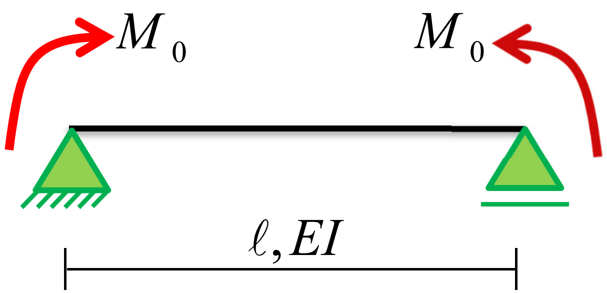
$$(12.4)\ \&\ (12.6) \quad \Rightarrow$$

$$= \frac{M_0}{EI}\frac{\ell}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_0^{\ell} = -\frac{2M_0\ell}{\pi EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x)\, p_{(x)}\, dx = -\frac{2M_0\ell}{\pi EI}} \quad (12.12)$$

$$(12.6) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x)\, \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})\, dx = 0} \quad (12.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

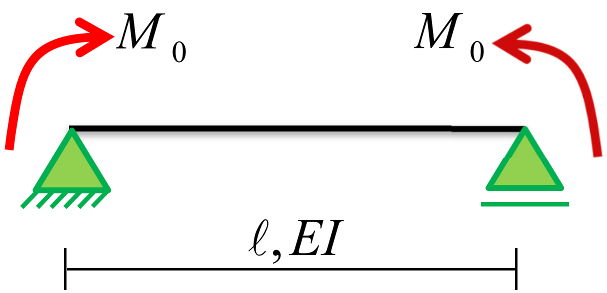
$$= -\frac{\pi^2}{\ell^2}\int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)dx \quad = -\frac{\pi^2}{2\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx = -\frac{\pi^2}{2\ell}} \quad (12.14)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (12.12) تا (12.14) در دستگاه معادلات (12.11) خواهیم داشت:

$$(12.12)\ to\ (12.14) \rightarrow (12.11) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3}} \quad (12.15)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

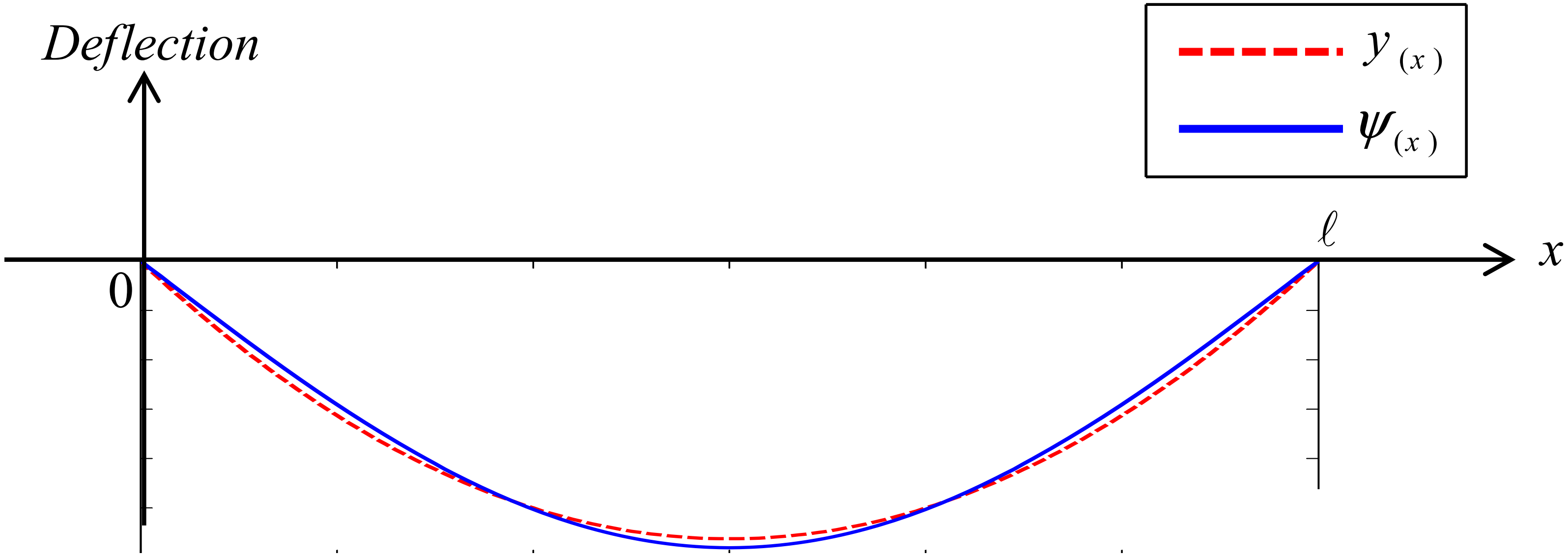


4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

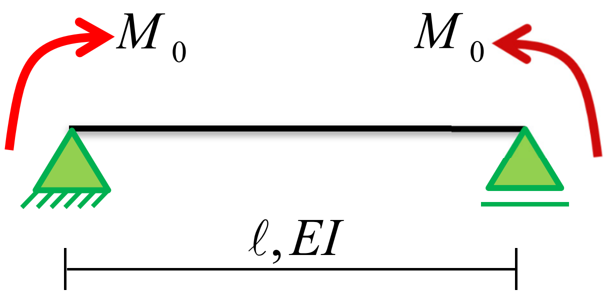
با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (12.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(12.15) \rightarrow (12.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (12.16)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

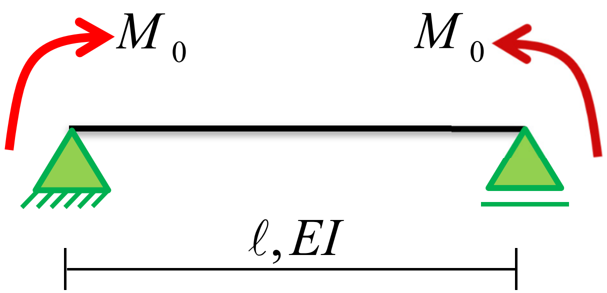
با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x-\ell)} \quad (12.17)$$

با توجه به رابطه (12.17):

$$(12.17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = x(x-\ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0} \quad (12.18)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

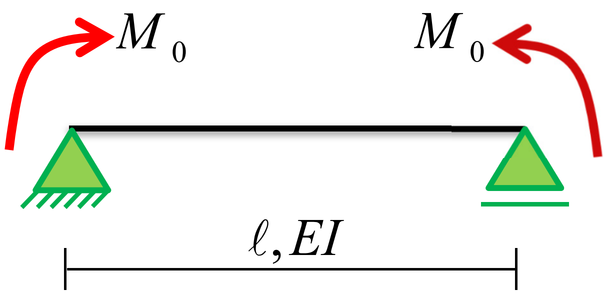
$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(0)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(0)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (12.7)$$ (تکراری)

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \overset{(12.7)\&(12.18)}{\Rightarrow} 1(\alpha_0)+0=0 \overset{Must\ be}{\Rightarrow} \overset{(12.19)}{\boxed{\alpha_0=0}} \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(\ell)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(\ell)}=0} \quad (12.8)$$ (تکراری)

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \overset{(12.8)\&(12.18)\&(12.19)}{\Rightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \overset{(12.18)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{M}\big(x(x-\ell)\big)=0} \quad (12.20)$$



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (12.20) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{N_1(x)=x(x-\ell)=0} \quad (12.21)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

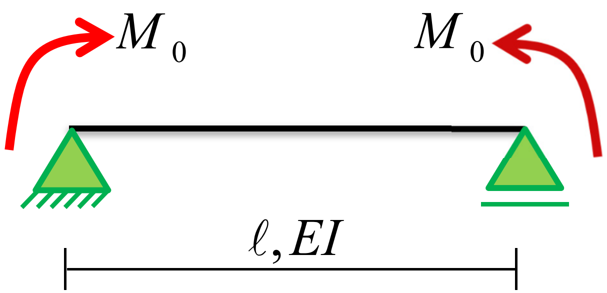
$$i=1 \;\Rightarrow\; N_1(x)=x(x-\ell)=0 \;\Rightarrow\; \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_1(\ell)=0 \end{cases}} \quad OK ✓$$

براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض 1 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

(تکراری)

$$(54) \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\alpha_1=-\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx-\int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx} \quad (12.11)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

اکنون پارامترهای رابطه (12.11) در حالتی که تابع حدسی فرم چندجمله‌ای دارد را تک تک محاسبه می‌کنیم:

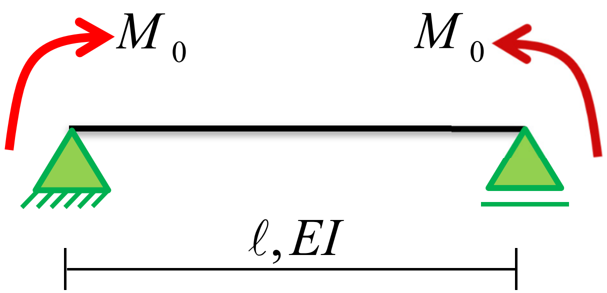
$$(12.4)\,\&\,(12.18) \quad \Rightarrow$$

$$= -\frac{M_0}{EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2}\right)\Bigg|_0^\ell = \frac{M_0\ell^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)\, p_{(x)}\, dx = \frac{M_0\ell^3}{6EI}} \quad (12.22)$$

$$(12.18)\,\&\,(12.19) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_\Omega N_1(x)\,\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})\,dx = 0} \quad (12.23)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 12–ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\left.\frac{2x^3}{3} - x^2\ell\right|_0^\ell = -\frac{\ell^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx = -\frac{\ell^3}{3}} \quad (12.24)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (12.22) تا (12.24) در دستگاه معادلات (12.11) خواهیم داشت:

$$(12.22)\ to\ (12.24) \rightarrow (12.11) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{M_0}{2EI}} \quad (12.25)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (12.17) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(12.25) \rightarrow (12.17) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI}x(x-\ell)} \quad (12.26)$$

(همان پاسخ دقیق است)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

مثال 13- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش SDM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \qquad x \in (0\,,2) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x=0 \;\Rightarrow\; y_{(0)}=0 \\ @x=2 \;\Rightarrow\; y_{(2)}=5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)}\sin(x) + x$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13– معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{d^2}{dx^2}+1\right) y_{(x)} - x = 0 \\ (1) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2}+1\right) & \Omega = (0\,,2) \\ p_{(x)} = -x & \end{array}} \quad (13.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16) \;\Rightarrow\; \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_{(x)} = 2.5x + \alpha_1 x(x-2) + \alpha_2 x^2 (x-2)} \quad (13.2)$$

با توجه به رابطه (13.2):

$$(13.2) \;\Rightarrow\; \boxed{N_1(x) = x(x-2) \;,\; N_2(x) = x^2(x-2) \;,\; \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x} \quad (13.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13-

$$\left.\begin{aligned} BC \quad &\Rightarrow \quad y_{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1\,,\, r_{(0)} = 0} \quad (13.4)$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \quad \overset{(13.3)\&(13.4)}{\Rightarrow} \quad 1(0) + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad OK$$

$$\left.\begin{aligned} BC \quad &\Rightarrow \quad y_{(2)} = 5 \quad \Rightarrow \quad d^0 y_{(2)} - 5 = 0 \\ (2) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{M}(y_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1\,,\, r_{(2)} = -5} \quad (13.5)$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \quad \overset{(13.3)\&(13.5)}{\Rightarrow} \quad 1(2.5 \times 2) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad OK$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}\big(N_i(x)\big) = 0 \quad \overset{(13.3)}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} for\ i = 1 \\ for\ i = 2 \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M}\big(x(x-2)\big) = 0 \\ \mathcal{M}\big(x^2(x-2)\big) = 0 \end{array}} \quad (13.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (13.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(13.4) or (13.5) \rightarrow (13.6) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} for\ i=1 & N_1(x)=x(x-2)=0 \\ for\ i=2 & N_2(x)=x^2(x-2)=0 \end{array}} \qquad (13.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_1(2)=0 \end{cases}} \quad OK \ \checkmark$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=x^2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_2(2)=0 \end{cases}} \quad OK \ \checkmark$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13- براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(54) \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx \\ \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_\Omega N_2(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix} \qquad (13.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (13.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(13.1)\ \&\ (13.3) \quad \Rightarrow$$

$$\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx = \int_0^2 x(x-2)(-x)dx = \left.\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx = \frac{4}{3}} \qquad (13.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13-

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx = \frac{8}{5}} \qquad (13.10)$$

$$\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_0^2 x(x-2)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)2.5x\right)dx = \frac{5}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{10}{3}} \qquad (13.11)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -4 \quad \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -4} \; (13.12)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13-

$$=\left(\frac{x^5}{5}-x^4+2x^3-2x^2\right)\Bigg|_0^2=-\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx=-\frac{8}{5}} \quad (13.13)$$

$$\int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx=\int_0^2 x(x-2)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x^2(x-2)\right)dx=\left(\frac{x^6}{6}-\frac{4}{5}x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{16}{3}x^3+4x^2\right)\Bigg|_0^2=-\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx=-\frac{8}{5}} \quad (13.14)$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}-\frac{4}{5}x^5+\frac{3}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2=-\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx=-\frac{8}{5}} \quad (13.15)$$

$$\int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx=\int_0^2 x^2(x-2)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)x^2(x-2)\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^7}{7}-\frac{2}{3}x^6+2x^5-4x^4+\frac{8}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2=-\frac{64}{21} \quad \Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx=-\frac{64}{21}} \quad (13.16)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (13.9) تا (13.16) در دستگاه معادلات (13.8) خواهیم داشت:

$$(13.9)\ to\ (13.16) \rightarrow (13.8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix}} \quad (13.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (13.17) نتیجه می‌شود:

$$(10.17) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9737 \\ -0.2763 \end{Bmatrix}} \quad (13.18)$$

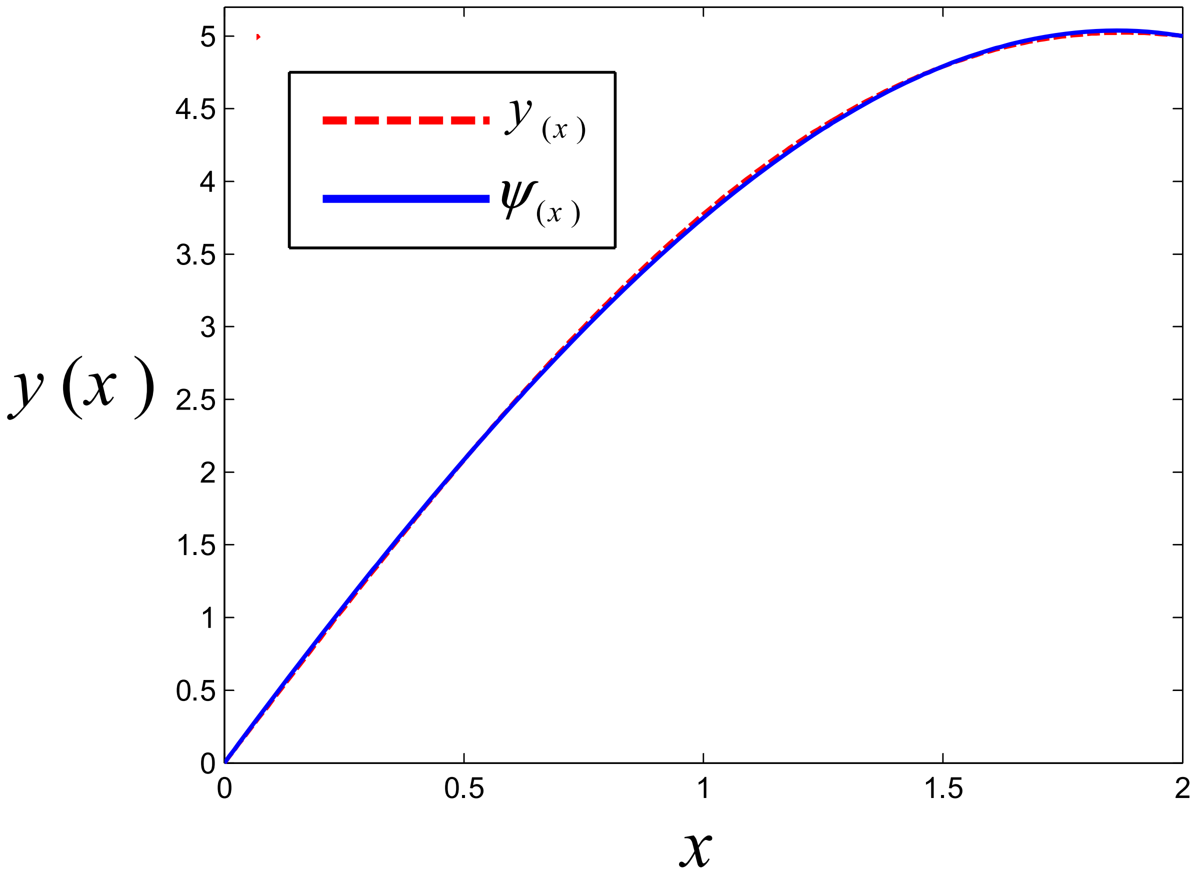
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (13.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(13.18) \rightarrow (13.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -0.2763x^3 - 0.4211x^2 + 4.4474x} \quad (13.19)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 13-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

مثال 14- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش GM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \qquad x \in (0\,,1) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x=0 \;\Rightarrow\; u_{(0)}=0 \\ @x=1 \;\Rightarrow\; u_{(1)}=1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^{x} - 0.42546e^{-x}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

.4 روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14– معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2}-u_{(x)}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)u_{(x)}+0=0\\ &(1)\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}(u_{(x)})+p_{(x)}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\mathcal{L}=\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right) \qquad \Omega=[0\,,1]\\ &p_{(x)}=0\end{aligned}} \quad (14.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18)\quad\Rightarrow\quad \psi_{(x)}=\bar{\psi}_{(x)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\psi_{(x)}=x+\alpha_1\sin(\pi x)+\alpha_2\sin(2\pi x)}\,(14.2)$$

با توجه به رابطه (14.2):

$$(14.2)\quad\Rightarrow\quad \boxed{N_1(x)=\sin(\pi x)\quad,\quad N_2(x)=\sin(2\pi x)\quad,\quad \bar{\psi}_{(x)}=x} \quad (14.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14-

$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; u_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(0)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(0)}=0} \quad (14.4)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\xrightarrow{(14.3)\&(14.4)}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; u_{(1)}=1 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(1)}-1=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(1)})+r_{(1)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(1)}=-1} \quad (14.5)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)})+r_{(1)}=0 \;\xrightarrow{(14.3)\&(14.5)}\; 1(1)-1=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \;\xrightarrow{(14.3)}\; \boxed{\mathcal{M}\big(\sin(i\pi x)\big)=0} \quad (14.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14-

در همه شرایط مرزی‌ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (14.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(14.4) or (14.5) \rightarrow (14.6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_i(x)=\sin(i\pi x)=0} \quad (14.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=\sin(\pi x)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow & N_1(0)=0 \\ x=1 & \Rightarrow & N_1(1)=0 \end{cases}} \quad OK$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=\sin(2\pi x)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow & N_2(0)=0 \\ x=1 & \Rightarrow & N_2(1)=0 \end{cases}} \quad OK$$

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14-براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(54)\quad \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx \\ \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_\Omega N_2(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix}} \quad (14.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (14.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(14.1)\,\&\,(14.3) \quad \Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx = 0} \qquad (14.9)$$

$$(14.1)\,\&\,(14.3) \quad \Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_2(x)p_{(x)}dx = 0} \qquad (14.10)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14-

$$\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)x\right)dx = -\int_0^1 x\sin(\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = -\frac{1}{\pi}} \quad (14.11)$$

$$-\int_0^1 x\sin(2\pi x)dx = \frac{1}{2\pi} \quad \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \frac{1}{2\pi}} \quad (14.12)$$

$$\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)\right)dx =$$

$$-\int_0^1 (1+\pi^2)\sin^2(\pi x)dx = -\frac{1+\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx = -\frac{1+\pi^2}{2}} \quad (14.13)$$

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14-

$$\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)\right)dx =$$

$$-\int_0^1 (1+4\pi^2)\sin(\pi x)\sin(2\pi x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx = 0} \qquad (14.14)$$

$$-\int_0^1 (1+\pi^2)\sin(\pi x)\sin(2\pi x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} N_2(x)\mathcal{L}(N_1(x))dx = 0} \qquad (14.15)$$

$$\int_{\Omega} N_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx = \int_0^1 \sin(2\pi x)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)\right)dx$$

$$-\int_0^1 (1+4\pi^2)\sin^2(2\pi x)dx = -\frac{1+4\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} N_2(x)\mathcal{L}(N_2(x))dx = -\frac{1+4\pi^2}{2}} \qquad (14.16)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14–با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (14.9) تا (14.16) در دستگاه معادلات (14.8) خواهیم داشت:

$$(14.9)\ to\ (14.16) \rightarrow (14.8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} -\dfrac{1+\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1+4\pi^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\pi} \\ -\dfrac{1}{2\pi} \end{Bmatrix}} \qquad (14.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (14.17) نتیجه می‌شود:

$$(14.17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -58.5688 \\ 7.8637 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}} \qquad (14.18)$$

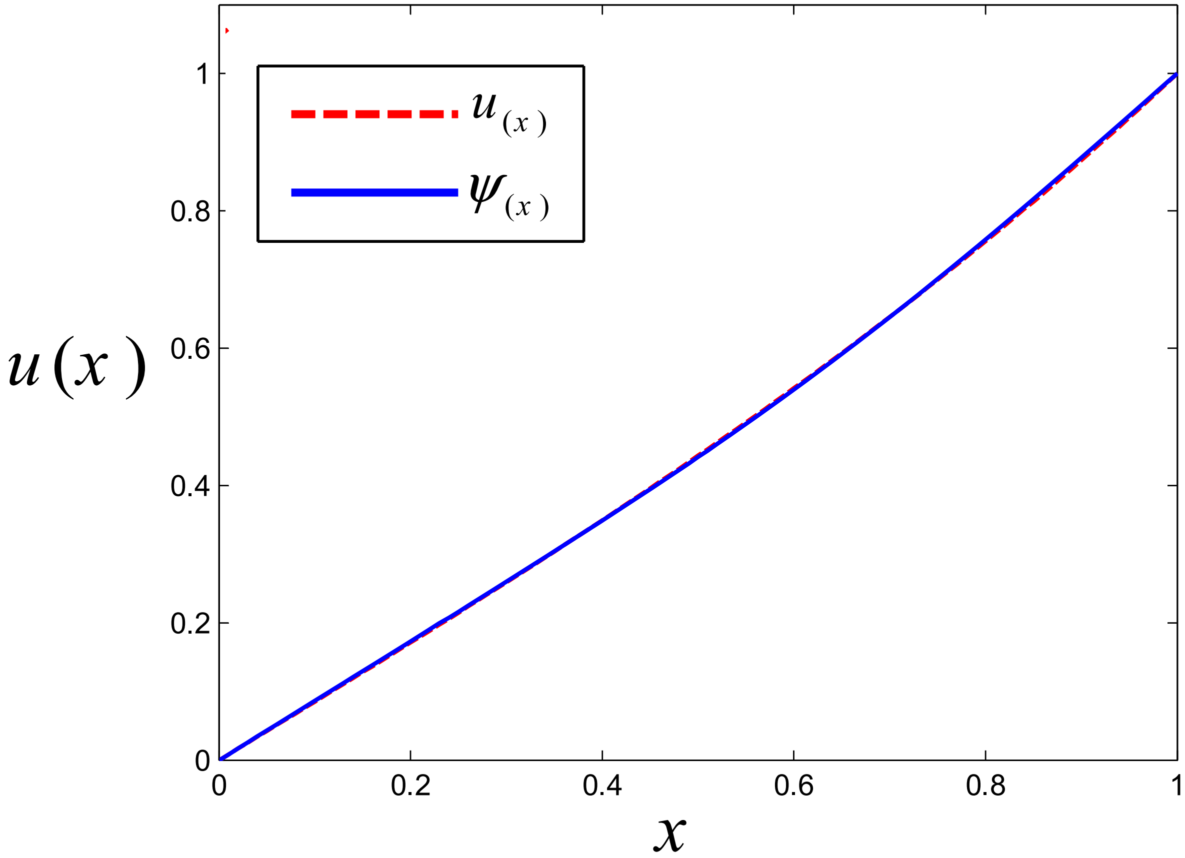
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (14.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقربی به دست می‌آید:

$$(14.18) \rightarrow (14.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = x - 58.5688\times 10^{-3} \sin(\pi x) + 7.8637\times 10^{-3} \sin(2\pi x)} \qquad (14.19)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال 14-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

این روش کاملا شبیه به روش گالرکین است با این تفاوت که از انتگرال‌گیری جزء به جزء برای محاسبه s_{ij} استفاده می‌گردد.

$$\boxed{\int_{\Omega} uv'dx = uv - \int_{\Omega} u'vdx} \quad (55)$$

انتگرال گیری جزء به جزء (Integration by parts)

از رابطه (53) مقدار s_{ij} با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(53) \quad \Rightarrow \quad s_{ij} = \int_{\Omega} N_i(x)\mathcal{L}(N_j(x))dx \quad \Rightarrow \quad if \quad \begin{matrix} U(x) = N_i(x) \\ dV = \mathcal{L}(N_j(x))dx \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{ij} = N_i(x)\Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x))dx - \int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x))dx\right)\frac{dN_i(x)}{dx}dx} \quad (56)$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (56) در رابطه (53) خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{aligned} s_{ij} &= N_i(x)\Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x))dx - \int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x))dx\right)\frac{dN_i(x)}{dx}dx \\ z_i &= -\int_{\Omega} N_i(x)p_{(x)}dx - \int_{\Omega} N_i(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{aligned}} \quad (56)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

بر اساس رابطه (56)، رابطه (29) به صورت زیر در می‌آید:

$$(56) \rightarrow (29) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} N_1(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx & \cdots & N_1(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_n(x))dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx \\ N_2(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx & \cdots & N_2(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_n(x))dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_n(x)}{dx} dx & \cdots & N_n(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_n(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_n(x))dx \right) \frac{dN_n(x)}{dx} dx \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega N_1(x) p_{(x)} dx - \int_\Omega N_1(x) \mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_\Omega N_2(x) p_{(x)} dx - \int_\Omega N_2(x) \mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)}) dx \\ \vdots \\ -\int_\Omega N_n(x) p_{(x)} dx - \int_\Omega N_n(x) \mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (57)$$

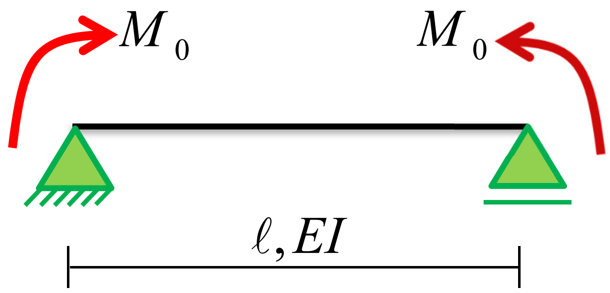
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

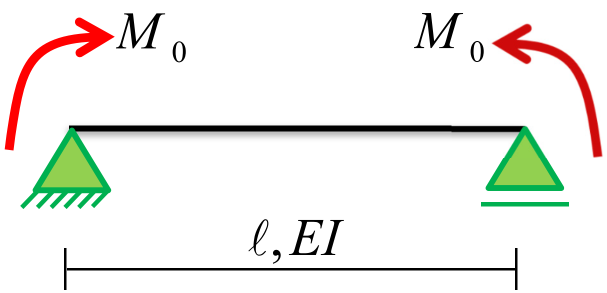
مثال 15- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش LSM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای



روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$\boxed{EI\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2}-M_0=0 \qquad x\in(0,\ell)} \quad (15.1)$$

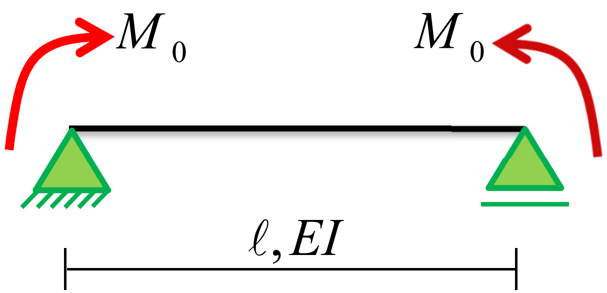
با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\boxed{BC:\begin{cases}@x=0 \Rightarrow y_{(0)}=0\\ @x=\ell \Rightarrow y_{(\ell)}=0\end{cases}} \quad (15.2)$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می‌آید:

$$\boxed{y_{(x)}=\frac{M_0}{2EI}x(x-\ell)} \quad (15.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$(15.1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) y_{(x)} - \dfrac{M_0}{EI} = 0 \\ (1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} = \left(\dfrac{d^2}{dx^2}\right) & \Omega = (0, \ell) \\ p_{(x)} = -\dfrac{M_0}{EI} & \end{array}} \quad (15.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (15.5)$$

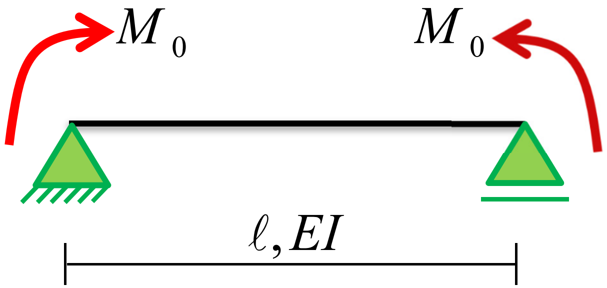
با توجه به رابطه (15.5):

$$(15.5) \quad \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (15.6)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی



$$BC \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} y_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(0)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (15.7)$$

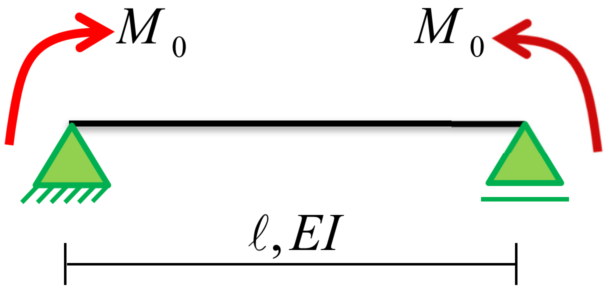
$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\overset{(15.6)\&(15.7)}{\Rightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \qquad OK$$

$$BC \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} y_{(\ell)}=0 \;\Rightarrow\; d^0 y_{(\ell)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(\ell)}=0} \quad (15.8)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \;\overset{(15.6)\&(15.8)}{\Rightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \qquad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\big(N_1(x)\big)=0 \;\overset{(15.6)}{\Rightarrow}\; \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right)=0} \quad (15.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (15.9) به صورت زیر در می‌آید:

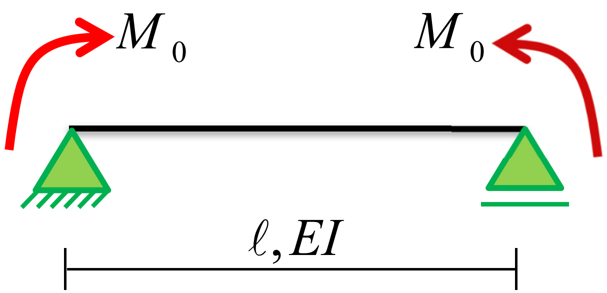
$$\boxed{N_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)=0} \quad (15.10)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_1(\ell)=0 \end{cases}} \quad OK$$

براساس رابطه (57) دستگاه معادلات با فرض 1 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

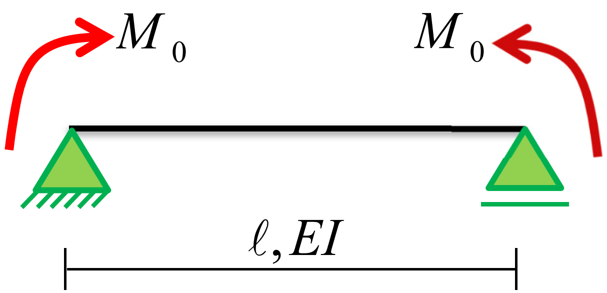
اکنون پارامترهای رابطه (15.11) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(15.4)\ \&\ (15.6) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = -\frac{2M_0 \ell}{\pi EI}} \quad (15.12)$$

$$(15.6) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0} \quad (15.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

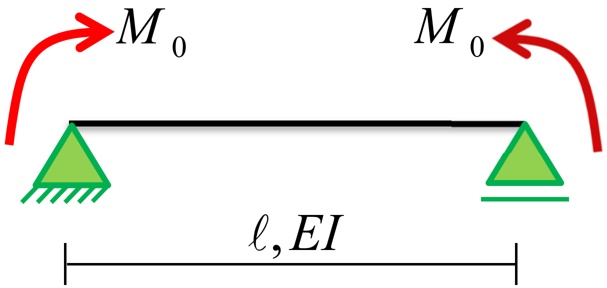
$$= -\frac{\pi^2}{\ell^2}\int_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)dx = -\frac{\pi^2}{2\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1(x)\Big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega\left(\int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx = -\frac{\pi^2}{2\ell}} \quad (15.14)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (15.12) تا (15.14) در دستگاه معادلات (15.11) خواهیم داشت:

$$(15.12)\ to\ (15.14) \rightarrow (15.11) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3}} \quad (15.15)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

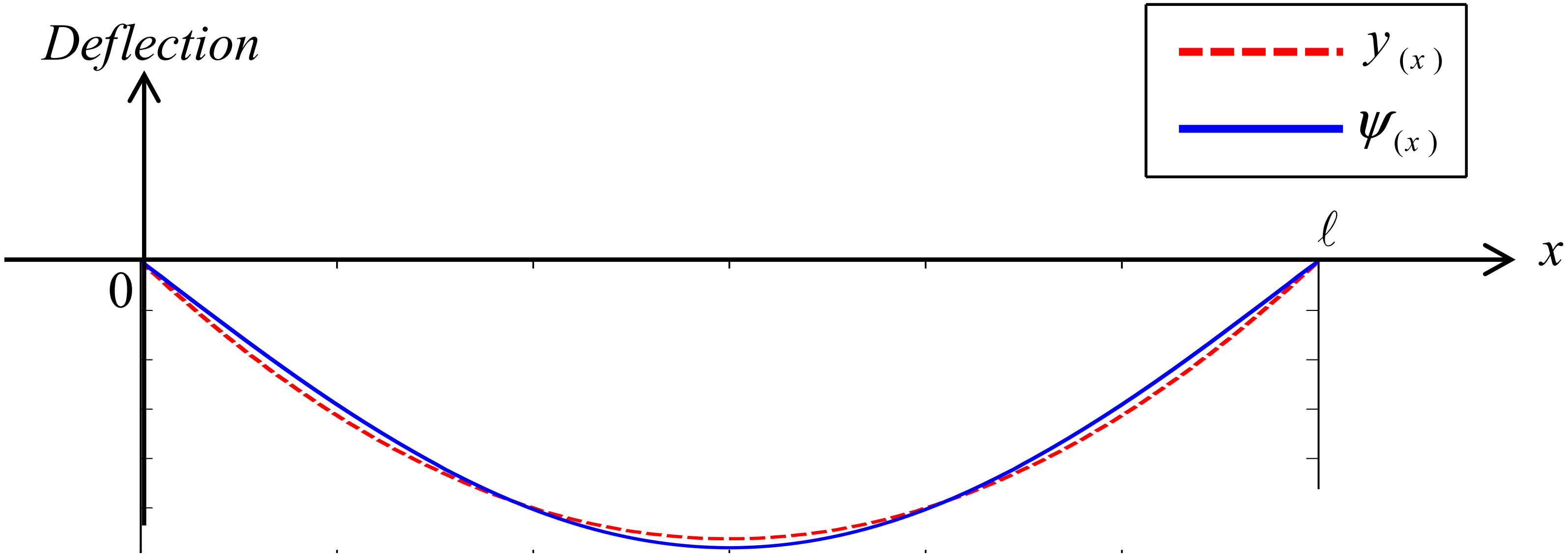


4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

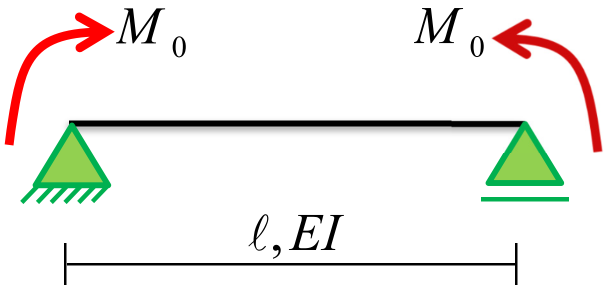
با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (15.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(15.15) \rightarrow (15.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\,\pi^3}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (15.16)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

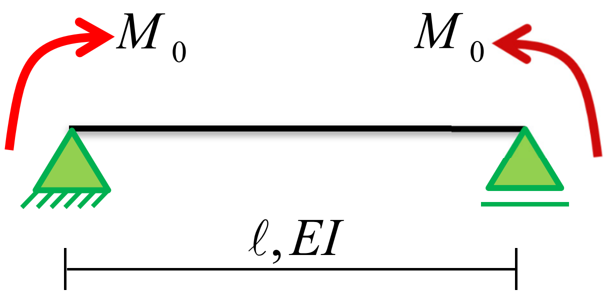
با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16) \quad \Rightarrow \quad \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x-\ell)} \quad (15.17)$$

با توجه به رابطه (15.17):

$$(15.17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x) = x(x-\ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0} \quad (15.18)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(0)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(0)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (15.7)$$ (تکراری)

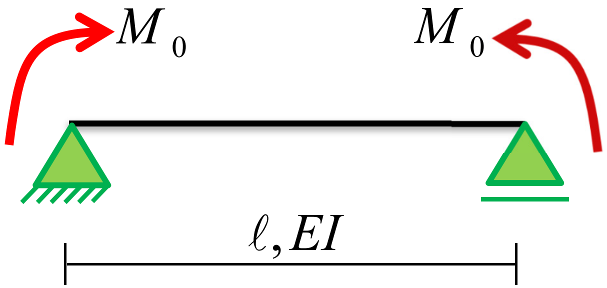
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \overset{(15.7)\&(15.18)}{\Rightarrow} 1(\alpha_0)+0=0 \overset{Must\ be}{\Rightarrow} \underset{(15.19)}{\boxed{\alpha_0=0}} \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$BC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{(\ell)}=0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)}+0=0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(\ell)}=0} \quad (12.8)$$ (تکراری)

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)})+r_{(\ell)}=0 \overset{(15.8)\&(15.18)\&(15.19)}{\Rightarrow} 1(0)+0=0 \Rightarrow 0=0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x))=0 \overset{(15.18)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{M}(x(x-\ell))=0} \quad (15.20)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (15.20) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{N_1(x)=x(x-\ell)=0} \quad (15.21)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=x(x-\ell)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=\ell & \Rightarrow \quad N_1(\ell)=0 \end{cases}} \quad OK$$

براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض 1 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

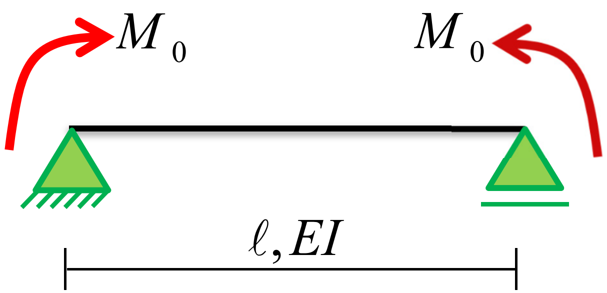
$(57) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\left(N_1(x)\Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_{\Omega}\left(\left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx\right)\right)\alpha_1 = -\int_{\Omega} N_1(x)p_{(x)}dx - \int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx}$$

(تکراری)

(15.11)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

اکنون پارامترهای رابطه (15.11) در حالتی که تابع حدسی فرم چندجمله‌ای دارد را تک تک محاسبه می‌کنیم:

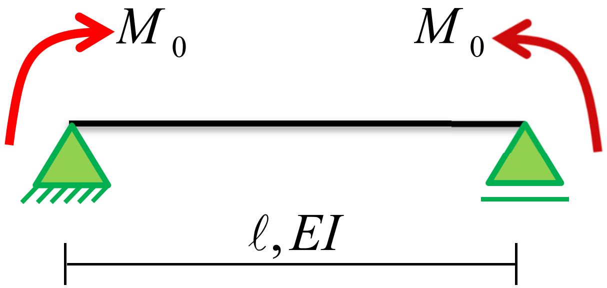
$$(15.4) \,\&\, (15.18) \quad \Rightarrow$$

$$= -\frac{M_0}{EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2}\right)\Bigg|_0^\ell = \frac{M_0\ell^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega N_1(x)\, p_{(x)}\, dx = \frac{M_0\ell^3}{6EI}} \qquad (15.22)$$

$$(15.18) \,\&\, (15.19) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_\Omega N_1(x)\, \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})\, dx = 0} \quad (15.23)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 15-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\Rightarrow \boxed{N_1(x)\Big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx = -\frac{\ell^3}{3}} \quad (15.24)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (15.22) تا (15.24) در دستگاه معادلات (15.11) خواهیم داشت:

$$(15.22)\ to\ (15.24) \rightarrow (15.11) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{M_0}{2EI}} \quad (15.25)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (15.17) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(15.25) \rightarrow (15.17) \quad \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x-\ell)} \quad (15.26)$$

(همان پاسخ دقیق است)

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

مثال 16- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش RGM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \qquad x \in (0\,,2) \qquad BC: \begin{cases} @x = 0 & \Rightarrow \quad y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 & \Rightarrow \quad y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2 y_{(x)}}{dx^2}+y_{(x)}=x \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{d^2}{dx^2}+1\right)y_{(x)}-x=0 \\ (1)\;\Rightarrow\; \mathcal{L}(y_{(x)})+p_{(x)}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll}\mathcal{L}=\left(\dfrac{d^2}{dx^2}+1\right) & \Omega=(0\,,\,2) \\ p_{(x)}=-x & \end{array}} \quad (16.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16)\;\Rightarrow\; \psi_{(x)}=\bar{\psi}_{(x)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_{(x)}=2.5x+\alpha_1 x(x-2)+\alpha_2 x^2(x-2)} \quad (16.2)$$

با توجه به رابطه (16.2):

$$(16.2)\;\Rightarrow\; \boxed{N_1(x)=x(x-2)\;\;,\;\; N_2(x)=x^2(x-2)\;\;,\;\; \bar{\psi}_{(x)}=2.5x} \quad (16.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16-

$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; y_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^{0}y_{(0)}+0=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(0)}=0} \quad (16.4)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\overset{(16.3)\&(16.4)}{\Rightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \;\Rightarrow\; y_{(2)}=5 \;\Rightarrow\; d^{0}y_{(2)}-5=0 \\ (2) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(y_{(2)})+r_{(2)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\, r_{(2)}=-5} \quad (16.5)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)})+r_{(2)}=0 \;\overset{(16.3)\&(16.5)}{\Rightarrow}\; 1(2.5\times 2)-5=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \;\overset{(16.3)}{\Rightarrow}\; \begin{array}{l} for\ i=1 \\ for\ i=2 \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M}\big(x(x-2)\big)=0 \\ \mathcal{M}\big(x^{2}(x-2)\big)=0 \end{array}} \quad (16.6)$$

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (16.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(16.4)or(16.5) \to (16.6) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} for\ i=1 & N_1(x)=x(x-2)=0 \\ for\ i=2 & N_2(x)=x^2(x-2)=0 \end{array}} \qquad (16.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad N_1(x)=x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_1(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_1(2)=0 \end{cases}} \quad OK \checkmark$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad N_2(x)=x^2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \boxed{@\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad N_2(0)=0 \\ x=2 & \Rightarrow \quad N_2(2)=0 \end{cases}} \quad OK \checkmark$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16- براساس رابطه (57) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(57) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{bmatrix} N_1(x)\big|_\Omega \int\limits_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int\limits_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\dfrac{dN_1(x)}{dx}dx & N_1(x)\big|_\Omega \int\limits_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int\limits_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\dfrac{dN_1(x)}{dx}dx \\ N_2(x)\big|_\Omega \int\limits_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int\limits_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\dfrac{dN_2(x)}{dx}dx & N_2(x)\big|_\Omega \int\limits_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int\limits_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\dfrac{dN_2(x)}{dx}dx \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\int\limits_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx - \int\limits_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int\limits_\Omega N_2(x)p_{(x)}dx - \int\limits_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix}\end{aligned}} \quad (16.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (16.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(16.1)\,\&\,(16.3) \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx = \int_0^2 x(x-2)(-x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int\limits_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx = \frac{4}{3}} \quad (16.9)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16-

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx = \frac{8}{5}} \qquad (16.10)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{10}{3}} \qquad (16.11)$$

$$\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_0^2 x^2 (x-2) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) 2.5x \right) dx$$

$$= \frac{5}{2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right) \Bigg|_0^2 = -4 \quad \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -4} \quad (16.12)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16-

$$\cancelto{0}{N_1(x)\Big|_\Omega} \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx = -\int_0^2\left(\int\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)(x(x-2))dx\right)\frac{d\,(x(x-2))}{dx}dx =$$

$$= -\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)(2x-2)dx = -\frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x)\Big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega\left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx = -\frac{8}{5}} \qquad (16.13)$$

$$\boxed{N_1(x)\Big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega\left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx = -\frac{8}{5}} \qquad (16.14)$$

$$\cancelto{0}{N_2(x)\Big|_\Omega} \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = -\int_0^2\left(\int\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)(x(x-2))dx\right)\frac{d\,(x^2(x-2))}{dx}dx$$

$$= -\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)(3x^2-4x)dx = -\frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2(x)\Big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega\left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = -\frac{8}{5}} \qquad (16.15)$$

$$\cancelto{0}{N_2(x)\Big|_\Omega} \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = -\int_0^2\left(\int\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)(x^2(x-2))dx\right)\frac{d\,(x^2(x-2))}{dx}dx \qquad (16.16)$$

$$= \int_0^2\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+3x^2-4x\right)(3x^2-4x)dx = -\frac{64}{21} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2(x)\Big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega\left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = -\frac{64}{21}}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (16.9) تا (16.16) در دستگاه معادلات (16.8) خواهیم داشت:

$$(16.9)\ to\ (16.16) \rightarrow (16.8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix}} \quad (16.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (16.17) نتیجه می‌شود:

$$(16.17) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9737 \\ -0.2763 \end{Bmatrix}} \quad (16.18)$$

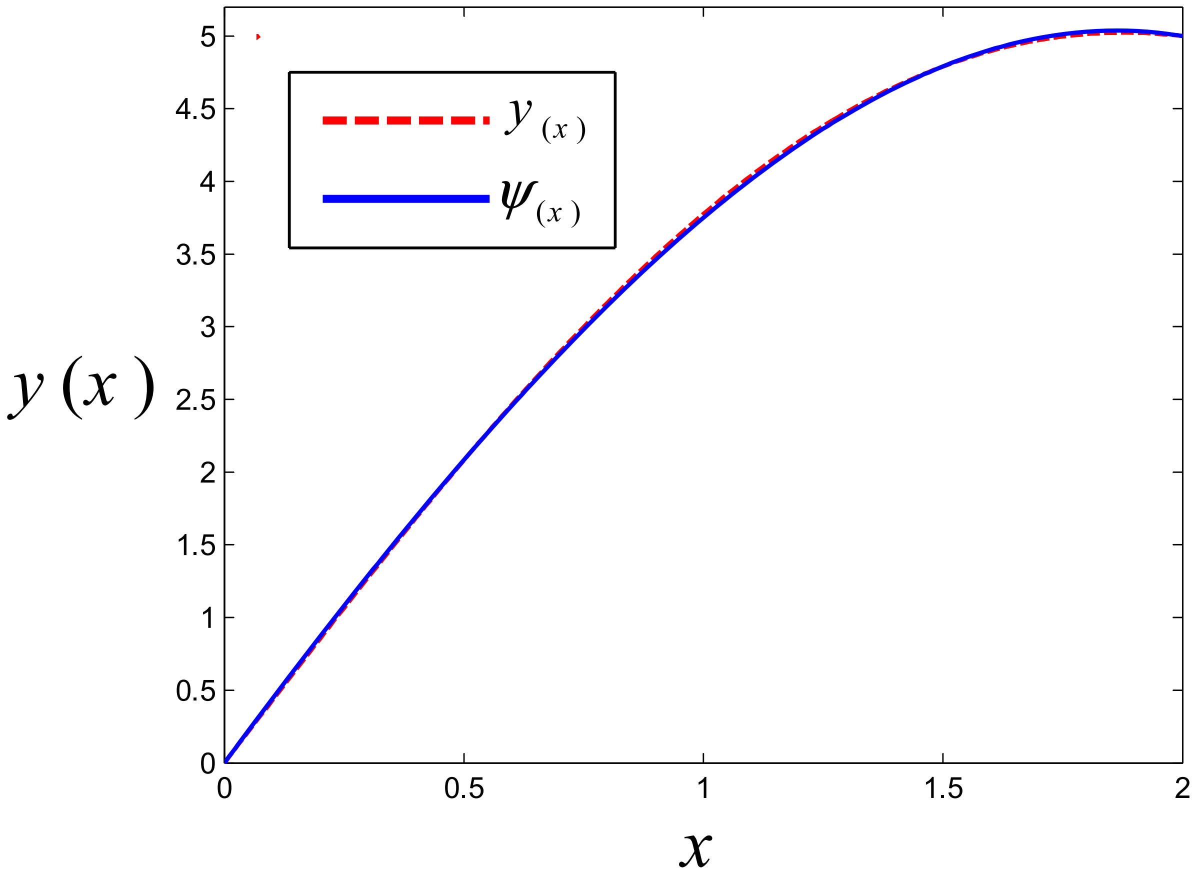
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (16.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(16.18) \rightarrow (16.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = -0.2763x^3 - 0.4211x^2 + 4.4474x} \qquad (16.19)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 16-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

مثال 17- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش RGM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \qquad x \in (0\,,1) \qquad\qquad BC: \begin{cases} @x=0 \Rightarrow u_{(0)}=0 \\ @x=1 \Rightarrow u_{(1)}=1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^{x} - 0.42546e^{-x}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u_{(x)}}{dx^2}-u_{(x)}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)u_{(x)}+0=0 \\ &(1)\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}(u_{(x)})+p_{(x)}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}=\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right) \qquad \Omega=[0\,,1] \\ &p_{(x)}=0 \end{aligned}} \quad (17.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(18)\quad\Rightarrow\quad \psi_{(x)}=\bar{\psi}_{(x)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\psi_{(x)}=x+\alpha_1\sin(\pi x)+\alpha_2\sin(2\pi x)}\,(17.2)$$

با توجه به رابطه (17.2):

$$(17.2)\quad\Rightarrow\quad \boxed{N_1(x)=\sin(\pi x)\quad,\quad N_2(x)=\sin(2\pi x)\quad,\quad \bar{\psi}_{(x)}=x} \quad (17.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17-

$$\left.\begin{aligned} BC \;&\Rightarrow\; u_{(0)}=0 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(0)}+0=0 \\ (2) \;&\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(0)})+r_{(0)}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(0)}=0} \quad (17.4)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)})+r_{(0)}=0 \;\overset{(17.3)\&(17.4)}{\Rightarrow}\; 1(0)+0=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$\left.\begin{aligned} BC \;&\Rightarrow\; u_{(1)}=1 \;\Rightarrow\; d^{0}u_{(1)}-1=0 \\ (2) \;&\Rightarrow\; \mathcal{M}(u_{(1)})+r_{(1)}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=1\,,\; r_{(1)}=-1} \quad (17.5)$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)})+r_{(1)}=0 \;\overset{(17.3)\&(17.5)}{\Rightarrow}\; 1(1)-1=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \quad OK$$

$$(14) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\big(N_i(x)\big)=0 \;\overset{(17.3)}{\Rightarrow}\; \boxed{\mathcal{M}\big(\sin(i\pi x)\big)=0} \quad (17.6)$$

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17-

در همه شرایط مرزی‌ها $\mathcal{M}=1$ بود در نتیجه رابطه (17.6) به صورت زیر در می‌آید:

$$(17.4)or(17.5)\rightarrow(17.6)\quad\Rightarrow\quad\boxed{N_i(x)=\sin(i\pi x)=0}\quad(17.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1\quad\Rightarrow\quad N_1(x)=\sin(\pi x)=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{@\begin{cases}x=0 & \Rightarrow\quad N_1(0)=0\\ x=1 & \Rightarrow\quad N_1(1)=0\end{cases}}\quad OK$$

$$i=2\quad\Rightarrow\quad N_2(x)=\sin(2\pi x)=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{@\begin{cases}x=0 & \Rightarrow\quad N_2(0)=0\\ x=1 & \Rightarrow\quad N_2(1)=0\end{cases}}\quad OK$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17-براساس رابطه (57) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(57)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered}\begin{bmatrix} N_1(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\dfrac{dN_1(x)}{dx}dx & N_1(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\dfrac{dN_1(x)}{dx}dx \\ N_2(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\dfrac{dN_2(x)}{dx}dx & N_2(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\dfrac{dN_2(x)}{dx}dx \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_1(x)\mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_\Omega N_2(x)p_{(x)}dx - \int_\Omega N_2(x)\mathcal{L}(\overline{\psi}_{(x)})dx \end{Bmatrix}\end{gathered}} \quad (17.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (17.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(17.1)\,\&\,(17.3)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_\Omega N_1(x)p_{(x)}dx = 0}\quad (17.9)$$

$$(17.1)\,\&\,(17.3)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_\Omega N_2(x)p_{(x)}dx = 0}\quad (17.10)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17-

$$\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)x\right)dx = -\int_0^1 x\sin(\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = -\frac{1}{\pi}} \quad (17.11)$$

$$\boxed{\int_{\Omega} N_2(x)\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \frac{1}{2\pi}} \quad (17.12)$$

$$\cancelto{0}{N_1(x)}\Big|_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_{\Omega}\left(\int\mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx = -\int_0^1\left(\int\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)dx\right)\frac{d(\sin(\pi x))}{dx}dx =$$

$$-\int_0^1(1+\pi^2)\cos^2(\pi x)dx = -\frac{1+\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1(x)\Big|_{\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_{\Omega}\left(\int\mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx = -\frac{1+\pi^2}{2}} \, (17.13)$$

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17-

$$\boxed{N_1(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\frac{dN_1(x)}{dx}dx = 0} \quad (17.14)$$

$$\cancelto{0}{N_2(x)}\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = -\int_0^1 \left(\int \left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(\pi x)dx\right)\frac{d\left(\sin(2\pi x)\right)}{dx}dx$$

$$-2\int_0^1 (1+\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_1(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = 0} \quad (17.15)$$

$$\cancelto{0}{N_2(x)}\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = -\int_0^1 \left(\int \left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)\sin(2\pi x)dx\right)\frac{d\left(\sin(2\pi x)\right)}{dx}dx \quad (17.16)$$

$$-\int_0^1 (1+4\pi^2)\cos^2(2\pi x)dx = -\frac{1+4\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2(x)\big|_\Omega \int_\Omega \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_\Omega \left(\int \mathcal{L}(N_2(x))dx\right)\frac{dN_2(x)}{dx}dx = -\frac{1+4\pi^2}{2}}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17–با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (17.9) تا (17.16) در دستگاه معادلات (17.8) خواهیم داشت:

$$(17.9)\ to\ (17.16) \rightarrow (17.8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} -\dfrac{1+\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1+4\pi^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\pi} \\ -\dfrac{1}{2\pi} \end{Bmatrix}} \qquad (17.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (17.17) نتیجه می‌شود:

$$(17.17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -58.5688 \\ 7.8637 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}} \qquad (17.18)$$

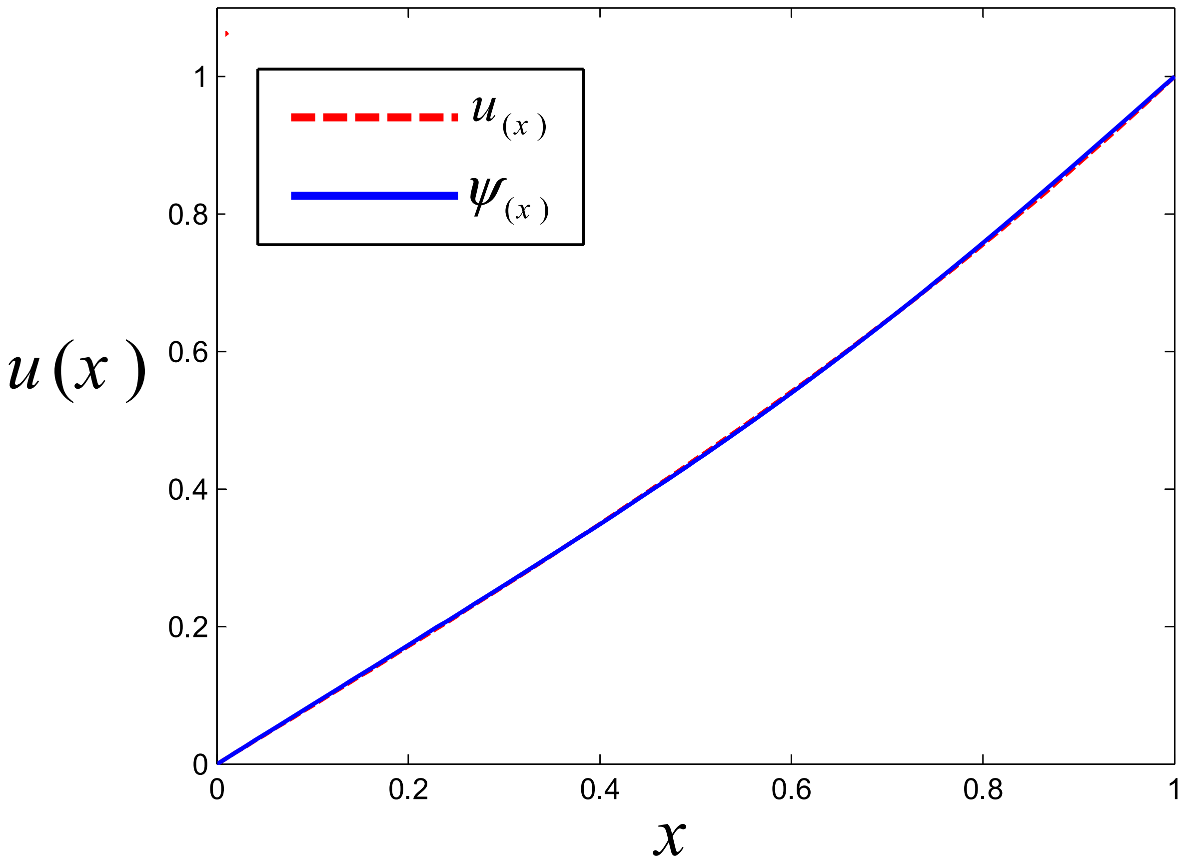
با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (17.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(17.18) \rightarrow (17.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{(x)} = x - 58.5688\times 10^{-3} \sin(\pi x) + 7.8637\times 10^{-3} \sin(2\pi x)} \qquad (17.19)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

4. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال 17-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

تا اینجا ما از چندین نوع روش باقیمانده وزنی برای حل مسائل مقدار مرزی استفاده شد. مشاهده گردید که برای مسئله تغییرشکل تیر، اگر چند جمله‌ای درجه دوم یا بالاتر به عنوان تابع تقریبی انتخاب شود، استفاده از تمام روش‌ها جواب دقیق را به دست می‌دهد. این به این دلیل است که رفتار واقعی منحنی خیز تیر به صورت سهمی است (یک چند جمله‌ای درجه دوم). با این حال، انتخاب یک تابع سینوسی نیز به عنوان یک تابع تقریبی، راه‌حل‌های متفاوتی را برای روش‌های مختلف (به‌جز روش حداقل مربعات و گالرکین که نتایج یکسانی داشتند) به دست می‌دهد. حال این سوال به طور طبیعی مطرح می‌شود که کدام روش دقیق‌ترین نتایج را می دهد. متاسفانه پاسخ قطعی برای این موضوع وجود ندارد. مقدار خطا به مقدار تابع تقریبی و معادله دیفرانسیل که باید حل شود بستگی دارد. با این حال، برای اکثر مسائل، روش گالرکین بهترین نتایج را می‌دهد.

توجه شود که روش گالرکین همان روش المان محدود نیست. در واقع، روش گالرکین خیلی قبل‌تر از پیدایش المان محدود در دسترس بود. تفاوت اساسی بین روش گالرکین و روش المان محدود آن است که بر خلاف روش گالرکین، تابع تقریبی در روش المان محدود در کل بازه فیزیکی تعریف نشده است. فقط بر روی المان‌های منفرد که حوزه فیزیکی را تشکیل می دهند، تعریف می شود. در روش المان محدود استاندارد از روش گالرکین اغلب برای استخراج معادلات المان استفاده می شود.