دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Dynamic of Structures

Generalized Coordinate:

Convert MDOF to Equivalent SDOF

By: Kaveh Karami

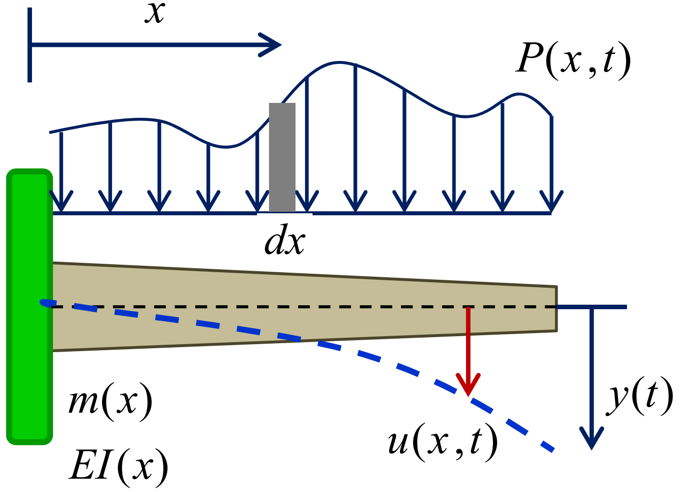
Associate Prof. of Structural Engineering

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

I. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته

در این روش برخلاف جرم متمرکز، جرم‌ها شکل گسترده خود را دارند؛ اما شکل ارتعاش به دلخواه انتخاب می‌شود. در این روش سازه اصلی که می‌تواند MDOF نیز باشد به یک سیستم SDOF تبدیل می‌گردد. با انجام این کار حجم عملیات کم‌تر و ساده‌تر می‌شود. نتایج به دست آمده از این روش تقریبی بوده اما روش مناسبی برای کنترل روش‌های دقیق‌تر است.



در تیر نشان داده شده در شکل مشخصات مقطع در طول تیر متغیر است. جرم تیر نیز گسترده بوده و تابعی از x می‌باشد. همچنین بارگذاری در هر لحظه و مکان متغیر است. هدف بررسی رفتار این تیر توسط یک سیستم ساده شده‌ی SDOF است.

بر اساس روش ریلی تابع تغییر مکان به صورتی است که جابجایی هر نقطه از تیر تابعی از محل نقطه و زمان است.

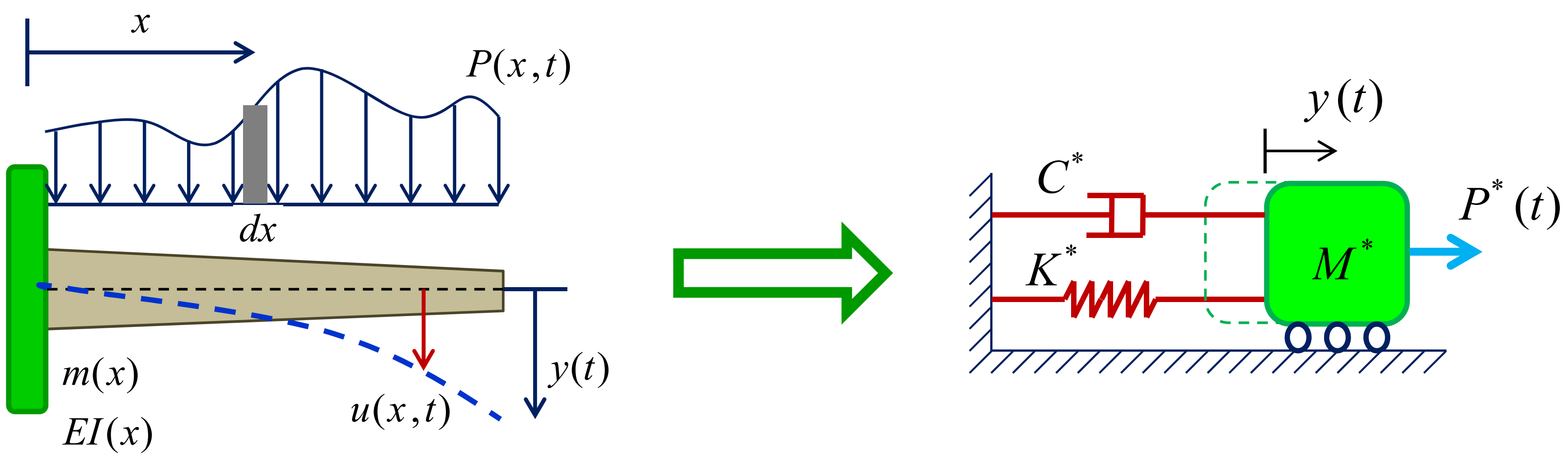
$$\boxed{u(x,t) = \phi(x) \cdot y(t)} \quad (1)$$

$\phi(x)$: تابع شکل (Shape Function) نام دارد که شکل تغییر مکان را مشخص می‌کند و تابعی از مکان است.

$y(t)$: مختصات تعمیم یافته است که تابعی از زمان می‌باشد.

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

I. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته



$$\boxed{M^*\ddot{y}(t)+C^*\dot{y}(t)+K^*y(t)=P^*(t)} \quad (2)$$

M^* : جرم موثر در مختصات تعمیم‌یافته

C^* : میرایی موثر در مختصات تعمیم‌یافته

K^* : سختی موثر در مختصات تعمیم‌یافته

P^* : نیروی خارجی موثر در مختصات تعمیم‌یافته

می‌خواهیم مشخصات این SDOF را طوری تعیین کنیم که با اعمال بار $P^*(t)$ جابجایی سیستم $y(t)$ با جابجایی ماکزیمم تیر یکسان شود.

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

I. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته

برای معادل بودن سیستم SDOF با تیر مورد نظر باید انرژی‌های پتانسیل و جنبشی دو سیستم هر یک با هم برابر باشند. همچنین برای معادل سازی نیروی خارجی می‌توان از اصل کار مجازی استفاده نمود.

انرژی جنبشی در سیستم $\Rightarrow$ M^*

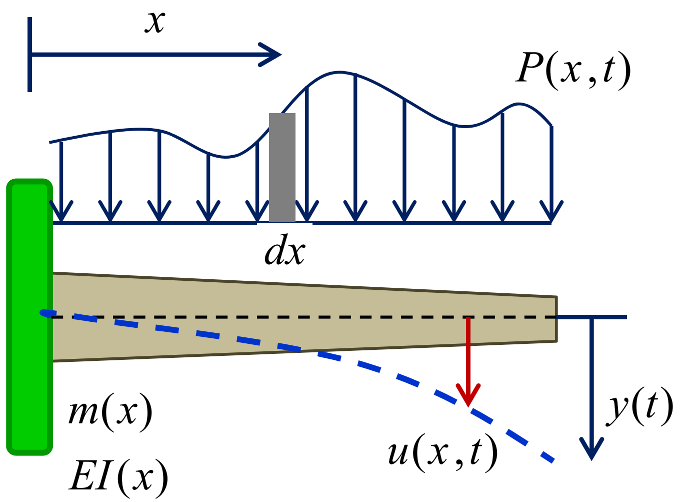
انرژی پتانسیل در سیستم $\Rightarrow$ K^*

اصل کار مجازی $\Rightarrow$ P^*

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

I. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته

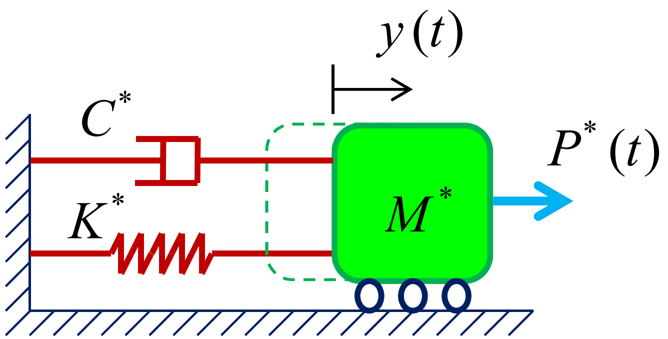
انرژی جنبشی تیر مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$T=\int_0^{\ell}\frac{1}{2}m\dot{u}^2dx \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad T=\int_0^{\ell}\frac{1}{2}m[\phi(x)\cdot\dot{y}(t)]^2dx \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\ell}m[\phi(x)]^2dx\right)[\dot{y}(t)]^2} \qquad (3)$$

همچنین انرژی جنبشی در سیستم SDOF معادل برابر است با



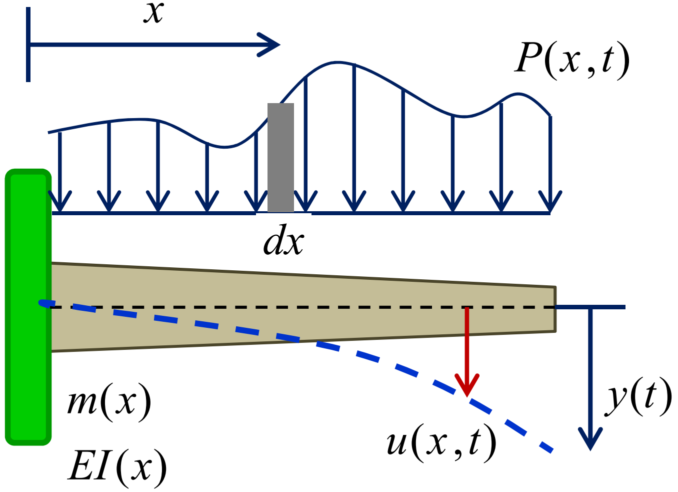
$$\boxed{T=\frac{1}{2}M^*[\dot{y}(t)]^2} \qquad (4)$$

از مساوی قرار دادن انرژی جنبشی دو سیستم خواهیم داشت:

$$(3),(4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M^*=\int_0^{\ell}m(x)[\phi(x)]^2dx} \qquad (5)$$

جرم سیستم SDOF معادل

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

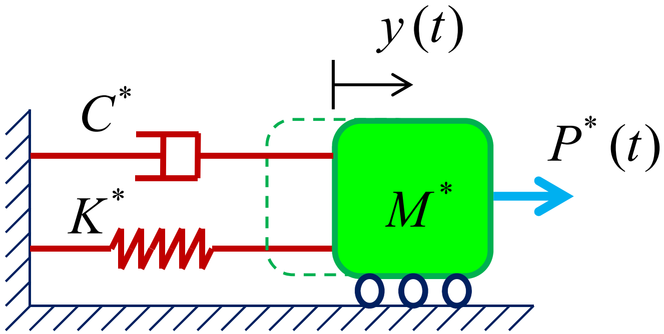


I. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته

انرژی پتانسیل تیر مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\ell}\dfrac{[M(x)]^2}{EI(x)}dx \\ M(x)=EI(x)\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=EI(x)\phi''(x)\cdot y(t) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{[EI(x)\phi''(x)\cdot y(t)]^2}{EI(x)}dx \quad\Rightarrow\quad \boxed{P=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\ell}EI(x)[\phi''(x)]^2dx\right)[y(t)]^2} \quad (6)$$



همچنین انرژی پتانسیل در سیستم SDOF معادل برابر است با

$$\boxed{P=\frac{1}{2}K^*[y(t)]^2} \quad (7)$$

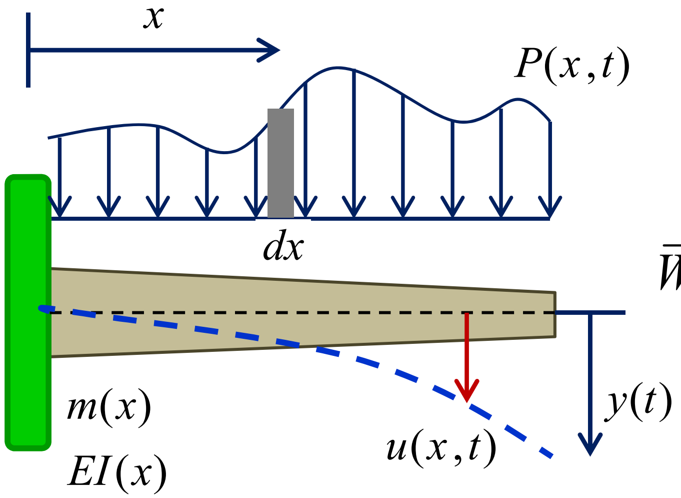
از مساوی قرار دادن انرژی پتانسیل دو سیستم خواهیم داشت:

$$(6),(7) \quad\Rightarrow\quad \boxed{K^*=\int_0^{\ell}EI(x)[\phi''(x)]^2dx} \quad (8)$$

سختی سیستم SDOF معادل

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

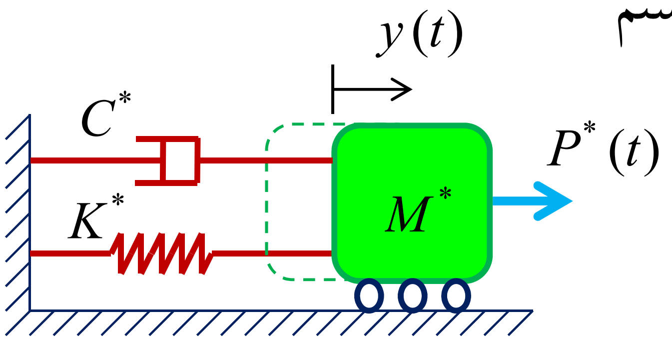
I. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته



کار مجازی انجام شده توسط نیروهای مجازی خارجی در تیر مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left([P(x,t)dx]\,u(x,t)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left([P(x,t)dx][\phi(x)\cdot y(t)]\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{W} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\ell} P(x,t)\,\phi(x)dx\right)y(t)} \quad (9)$$



همچنین کار مجازی انجام شده توسط نیروهای مجازی خارجی در سیستم SDOF معادل برابر است با

$$\boxed{\overline{W} = \frac{1}{2}P^*(t)\,y(t)} \quad (10)$$

از مساوی قرار دادن کار مجازی دو سیستم خواهیم داشت:

$$(9),(10) \Rightarrow \boxed{P^*(t) = \int_0^{\ell} P(x,t)\,\phi(x)dx} \quad (11)$$

نیروی خارجی در سیستم SDOF معادل

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

I. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته

برای محاسبه میرایی در سیستم SDOF معادل، می‌توان از تعریف میرایی بحرانی استفاده کرد:

میرایی سیستم SDOF معادل

$$c = 2\xi m\omega \quad \Rightarrow \quad C^* = 2\xi M^*\omega^* \quad \Rightarrow \quad \boxed{C^* = 2\xi M^* \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}} \quad (12)$$

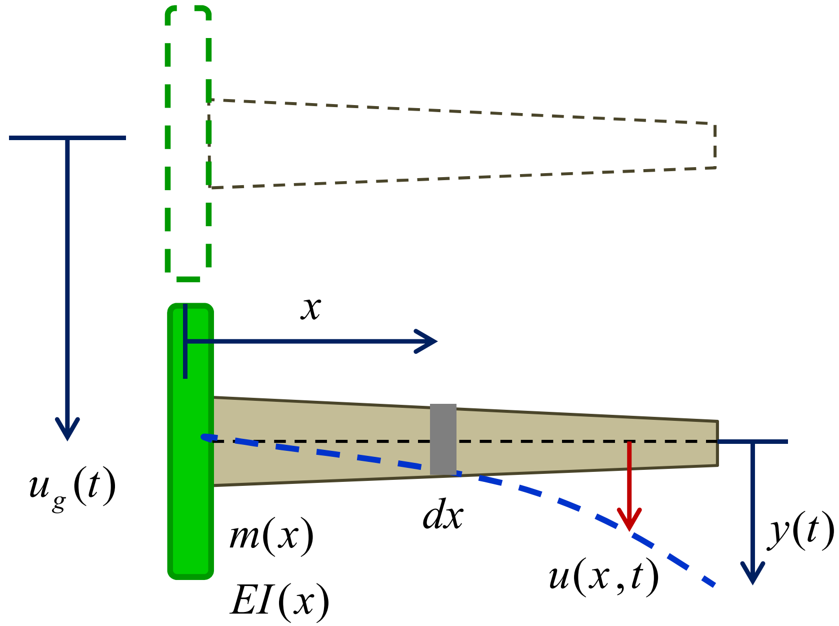
با معلوم بودن بارگذاری و مشخصات سیستم و همچنین انتخاب یک تابع شکل اختیاری $\phi(x)$ مناسب که بیان‌گر شکل سازه باشد، می‌توان C^*, K^*, M^*, P^* را به دست آورد. با حل معادله حرکت سیستم SDOF معادل در رابطه (2)، $y(t)$ تعیین می‌گردد که با استفاده از آن و معلوم بودن $\phi(x)$، تابع شکل $u(x,t)$ به دست می‌آید.

با استفاده از روش مختصات تعمیم یافته، در حقیقت ما می‌توانیم یک سازه، با جرم گسترده را به یک سیستم SDOF معادل تبدیل کرده و آن را حل کنیم. تنها مشکل این روش حدس اولیه تابع شکل ارتعاش است که انتخاب نادرست آن منجر به نتایج اشتباه می‌شود.

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

اگر نیروی خارجی ناشی از شتاب زمین باشد در این صورت نیروی خارجی در سیستم SDOF معادل به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\boxed{P(x,t)\,dx = [m(x)\,dx]\ddot{u}_g(t)} \qquad (13)$$

$$(11),(13) \;\Rightarrow\; P_e^*(t) = \int_0^{\ell} [m(x)\,dx]\ddot{u}_g(t)\phi(x) \;\Rightarrow$$

$$\boxed{P_e^*(t) = \left(\int_0^{\ell} m(x)\,\phi(x)\,dx\right)\ddot{u}_g(t)} \qquad (14)$$

با تعریف ضریب مشارکت خواهیم داشت:

$$if \quad \boxed{\Gamma = \left(\int_0^{\ell} m(x)\,\phi(x)\,dx\right) \overset{(14)}{\Rightarrow} P_e^*(t) = \Gamma\,\ddot{u}_g(t)} \qquad (15)$$

$P_e^*(t)$: نیروی خارجی در سیستم SDOF معادل

Γ : ضریب مشارکت

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

با استفاده از رابطه (15) معادله حرکت سیستم SDOF معادل (2) در اثر نیروی زلزله به صورت زیر در می‌آید:

$$(2),(15) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M^*\ddot{y}(t)+C^*\dot{y}(t)+K^*y(t)=-P_e^*(t)} \quad (16)$$

به کمک انتگرال دوهامل پاسخ معادله حرکت سیستم SDOF معادل در رابطه (16) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$(16) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t)=\frac{\Gamma}{M^*\omega^*\sqrt{1-\xi^2}}\int_0^t -\ddot{u}_g(t)e^{-\xi\omega^*(t-\tau)}Sin[\omega_D^*(t-\tau)]\cdot d\tau} \quad (17)$$

رابطه (17) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t)=\frac{\Gamma}{M^*\omega^*}Q(t)} \quad (18)$$

پاسخ سیستم SDOF معادل در هر لحظه از زمان

که در آن:

$$\boxed{Q(t)=\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}}\int_0^t \ddot{u}_g(t)e^{-\xi\omega^*(t-\tau)}Sin[\omega_D^*(t-\tau)]\cdot d\tau} \quad (19)$$

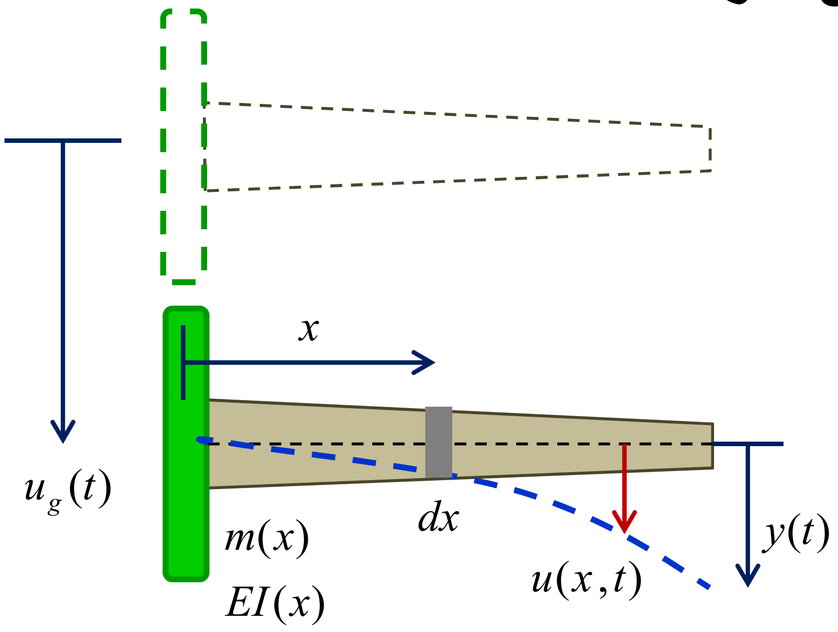
با محاسبه $y(t)$ تابع شکل نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(1),(18) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(x,t)=\frac{\Gamma}{M^*\omega^*}\phi(x)Q(t)} \quad (20)$$

پاسخ هر نقطه از تیر در هر لحظه از زمان

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II.   آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله



معادله تعادل برای یک جز دیفرانسیلی از جرم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[m(x)dx]\ddot{\bar{u}}(x,t) \uparrow \quad \uparrow k(x)[\bar{u}(x,t)-u_g(t)]$$

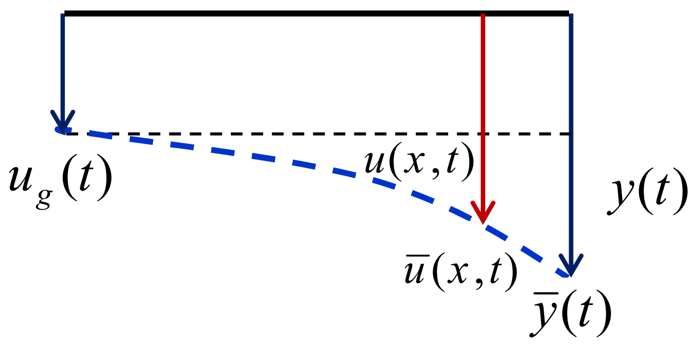
dx

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad [m(x)dx]\ddot{\bar{u}}(x,t) + k(x)[\bar{u}(x,t)-u_g(t)] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\bar{u}}(x,t) = -\omega^2(x)u(x,t)} \quad (21)$$

می‌توان رابطه (21) را برای مختصات تعمیم یافته یا سیستم SDOF معادل نیز نوشت بنابراین:

$$\boxed{\ddot{\bar{y}}(t) = -\omega^{*2} y(t)} \quad (22)$$



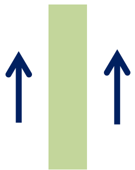
$\bar{y}(t)$: جابجایی مطلق در مختصات تعمیم یافته

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

$$(1) \;\Rightarrow\; \bar{u}(x,t)=\phi(x)\cdot\bar{y}(t) \;\Rightarrow\; \ddot{\bar{u}}(x,t)=\phi(x)\cdot\ddot{\bar{y}}(t) \;\overset{(22)}{\Rightarrow}\; \boxed{\ddot{\bar{u}}(x,t)=-\omega^{*2}\phi(x)y(t)} \quad (23)$$

با توجه به دیاگرام جسم آزاد جز برش ایجاد شده برابر است با:

$$[m(x)dx]\ddot{\bar{u}}(x,t)$$



$$dV(x,t)=k(x)[\bar{u}(x,t)-u_g(t)]$$

dx

$$dV(x,t)=-[m(x)dx]\ddot{\bar{u}}(x,t) \;\overset{(23)}{\Rightarrow}\; \boxed{dV(x,t)=[m(x)dx]\omega^{*2}\phi(x)y(t)} \quad (24)$$

$$(18),(24) \;\Rightarrow\; dV(x,t)=[m(x)dx]\omega^{*2}\phi(x)\frac{\Gamma}{M^{*}\omega^{*}}Q(t) \;\Rightarrow\; \boxed{dV(x,t)=\frac{\omega^{*}\Gamma Q(t)}{M^{*}}m(x)\phi(x)dx} \quad (25)$$

برش پایه کل در هر لحظه از جمع نیروهای اینرسی مطلق گسترده در طول تیر به دست می‌آید:

$$(25) \;\Rightarrow\; V(t)=\int_0^{\ell} dV(x,t)=\frac{\omega^{*}\Gamma Q(t)}{M^{*}}\int_0^{\ell} m(x)\phi(x)dx \;\overset{(15)}{\Rightarrow}\; \boxed{V(t)=\Gamma^{2}\frac{\omega^{*}}{M^{*}}Q(t)} \quad (26)$$

$$(26)\;\&\;(18) \;\Rightarrow\; \boxed{V(t)=\Gamma\omega^{*2}y(t)} \quad (27)$$

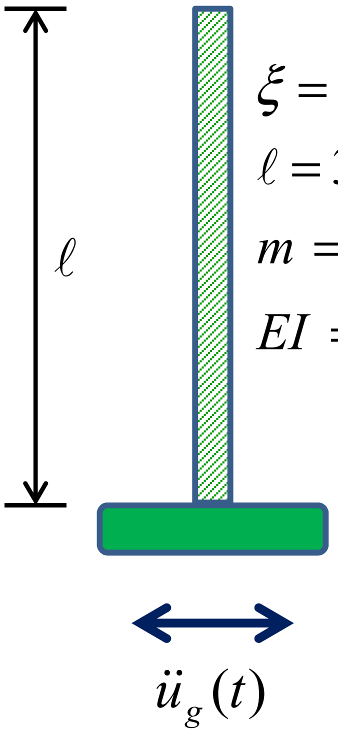
نیروی برش پایه کل تیر در هر لحظه از زمان

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

مثال 1- تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر دو تحریک متفاوت قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین الف- پاسخ جابجایی تیر در قسمت‌های وسط و انتهای آن و همچنین برش پایه کل تیر تحت اثر تحریک اول در لحظه $t = 1.2\,\text{sec}$ (تنها پاسخ دائم را در نظر بگیرید). ب- پاسخ تاریخچه زمانی جابجایی تیر در قسمت‌های وسط و انتهای آن و همچنین تاریخچه زمانی برش پایه کل تیر تحت اثر تحریک دوم. تابع شکل را به صورت زیر فرض نمایید:

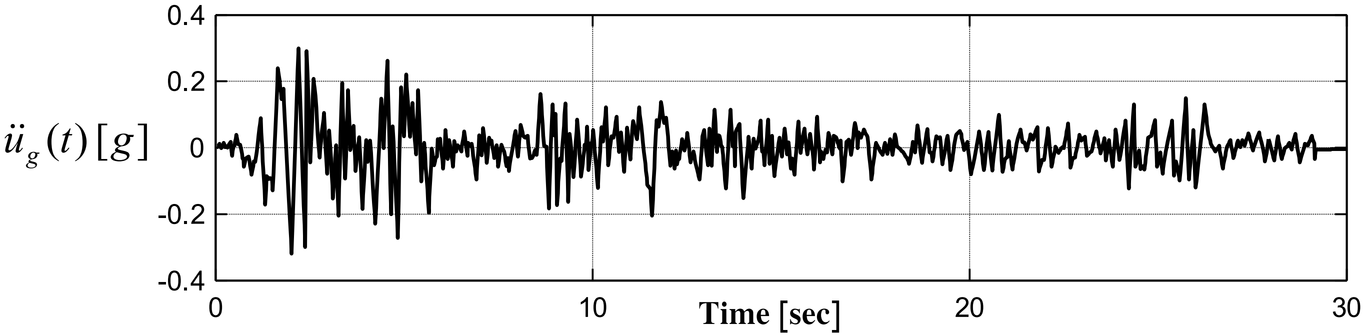
$$\varphi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2\ell}\right)$$



$$\xi = 15\%$$
$$\ell = 3\,(m)$$
$$m = 200\,(kg/m)$$
$$EI = 3\times 10^4\,(N.m^2)$$

(1)- تحریک سینوسی $\ddot{u}_g = 0.5g\sin(20t)$

(2)- شتاب نگاشت زلزله **El-Centro**



II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 1-

$$\boxed{M^{*} = 0.226 m\ell}$$

$$\boxed{K^{*} = 3.04 \frac{EI}{\ell^{3}}}$$

$$\boxed{C^{*} = 1.654 \xi m\ell \sqrt{\frac{EI}{m\ell^{4}}}}$$

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 1-

$$\boxed{\Gamma = 0.364\, m\ell}$$

$$\boxed{P_e^*(t) = 0.364\, m\ell\, \ddot{u}_g(t)}$$

$$\boxed{(0.226 m\ell)\ddot{y}(t) + \left(1.654\,\xi\, m\ell\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}\right)\dot{y}(t) + \left(3.04\frac{EI}{\ell^3}\right)y(t) = -(0.364\, m\ell)\ddot{u}_g(t)}$$

$\ell = 3\ (m)$

$m = 200\ (kg/m)$

$EI = 3\times10^4\ (N.m^2)$

$$\Rightarrow \boxed{(135.6)\ddot{y}(t) + (203.03)\dot{y}(t) + (3377.8)y(t) = -218.4\ddot{u}_g(t)}$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 1- تحریک سینوسی

$$\boxed{P_e^*(t) = -1092\sin(20t)}$$

$$\boxed{\beta = 4.007}$$

$$\boxed{\omega_D = 4.934\ (rad/\sec)}$$

$$\boxed{\theta = -0.07967^{rad}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = -21.402\times 10^{-3}\ (m)}$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 1- تحریک سینوسی

$$\boxed{y(t) = -21.402\times10^{-3}\sin\left(20t + 0.07967\right)}$$

$$\boxed{y_{(1.2_{\mathrm{sec}})} = 3.05\times10^{-2}\ m}$$

$$\boxed{u(x,1.2) = \begin{cases} 0.8918\times10^{-2}\ m & x = \ell/2 \\ 3.05\times10^{-2}\ m & x = \ell \end{cases}}$$

$$\boxed{V_{(1.2_{\mathrm{sec}})} = 165.65\ N}$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

Matlab Code

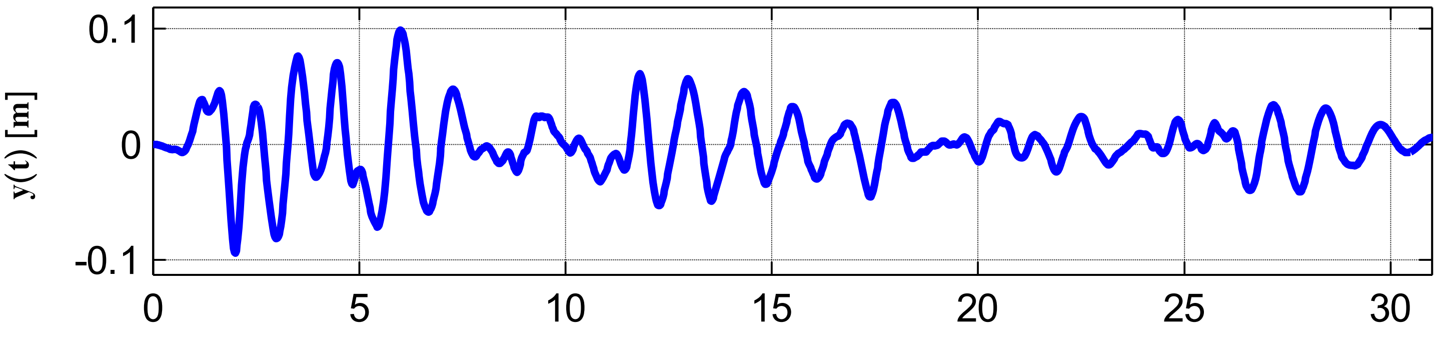
حل مثال 1- تحریک سینوسی

```
clc
clear
format short g
L=3;
m=200;
EI=3e4;
xi=0.15;
omegab=20;
g=10;
p0=0.5*g;
x0=0;
v0=0;
t=1.2;
M=0.226*m*L
K=3.04*EI/(L^3)
omega=sqrt(K/M)
C=2*xi*M*omega
Eta=0.364*m*L
Period=2*pi/omega
P0=-Eta*p0
.
.
.
```

```
.
.
.
Beta=omegab/omega
omegaD=omega*sqrt(1-xi^2)
A=x0+(2*xi*Beta)*(P0/K)/(((2*xi*Beta)^2)+((1-Beta^2)^2))
B=((v0-xi*omega*x0)/(omegaD))+(P0/K/omegaD)*((2*Beta*omega*xi^2)-(1-
Beta^2)*omegab)/(((2*xi*Beta)^2)+((1-Beta^2)^2))
teta=atan(2*xi*Beta/(1-Beta^2))
Ro=(P0/K)*1/sqrt(((1-Beta^2)^2)+(2*xi*Beta)^2)
y1=(exp(-xi*omega*t))*(A*cos(omegaD*t)+B*sin(omegaD*t))+Ro*sin(omegab*t-teta)
u1=(1-cos(pi*0.5*L/2/L))*y1
u2=(1-cos(pi*1*L/2/L))*y1
V=Eta*(omega^2)*y1
```

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 1- تحریک زلزله



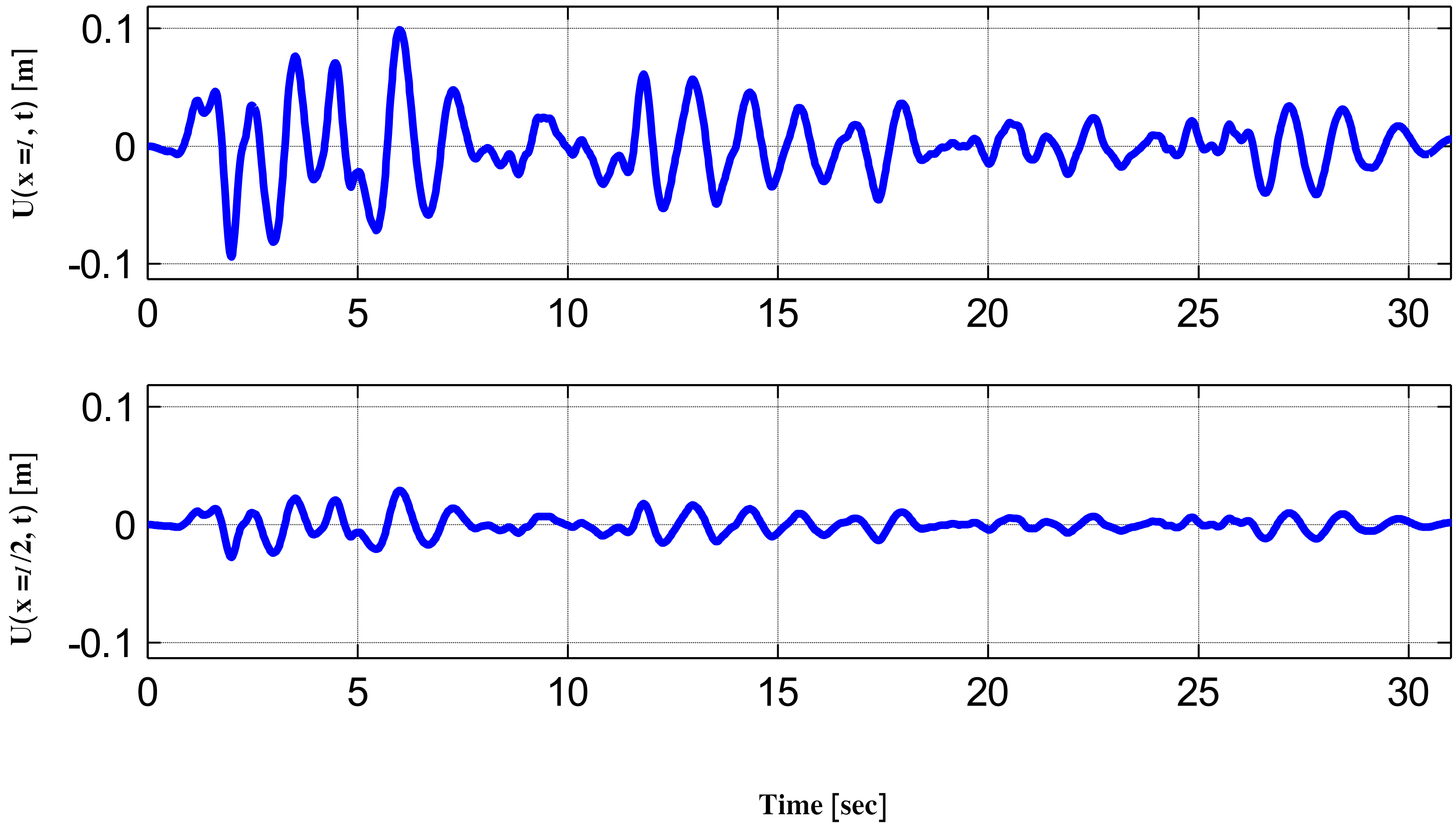
نمودار تاریخچه زمانی جابجایی سیستم SDOF معادل با میرایی $\xi = 15\%$ در اثر زلزله El-Centro

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(x,t) = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2\ell}\right)\right] \cdot y(t) = \begin{cases} 0.293\, y(t) & x = \ell/2 \\ y(t) & x = \ell \end{cases}}$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 1- تحریک زلزله

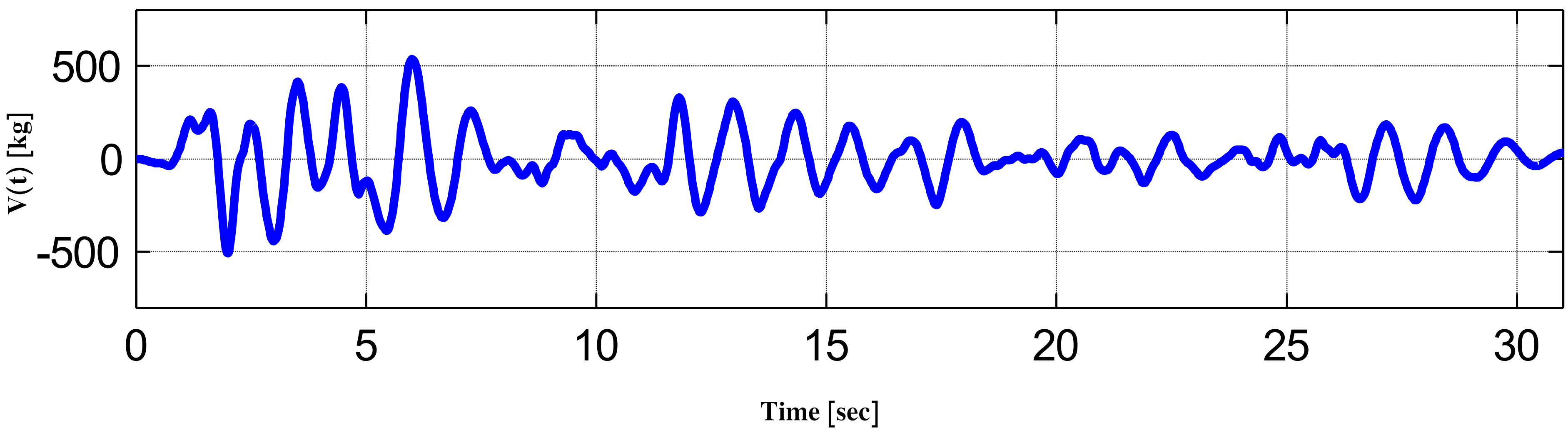


نمودار تاریخچه زمانی جابجایی نقاط انتها و وسط تیر با میرایی $\xi = 15\%$ در اثر زلزله **El-Centro**

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 1- تحریک زلزله

$$(27) \qquad \Rightarrow \; V(t) = \Gamma \omega^{*2} y(t) = 218.4(4.991)^2 y(t) \;\; \Rightarrow \boxed{V(t) = 5440.3 y(t)}$$



نمودار تاریخچه زمانی برش پایه کل تیر با میرایی $\xi = 15\%$ در اثر زلزله El-Centro

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

Matlab Code

حل مثال 1- تحریک زلزله

```
clc
clear
clf
format short g
Xg=xlsread('ElCentro.xls', 'Accelerograph', 'B3:B1562');
T=31.18;
n=1;
EI=3e4;
L=3;
m1=200;
xi=0.15;
m=0.226*m1*L
k0=3.04*EI/(L^3)
c=1.1*xi*m1*L*sqrt(EI/m/(L^4))
omega=3.66*sqrt(EI/m1/(L^4))
Eta=0.364*m1*L
st=0.02;
k=zeros(n,n);
for i=1:n
  if i<n
    k(i,i)=k0(i)+k0(i+1);
    k(i,i+1)=-k0(i+1);
    k(i+1,i)=-k0(i+1);
  else
    k(i,i)=k0(i);
  end
End
.
.
.
```

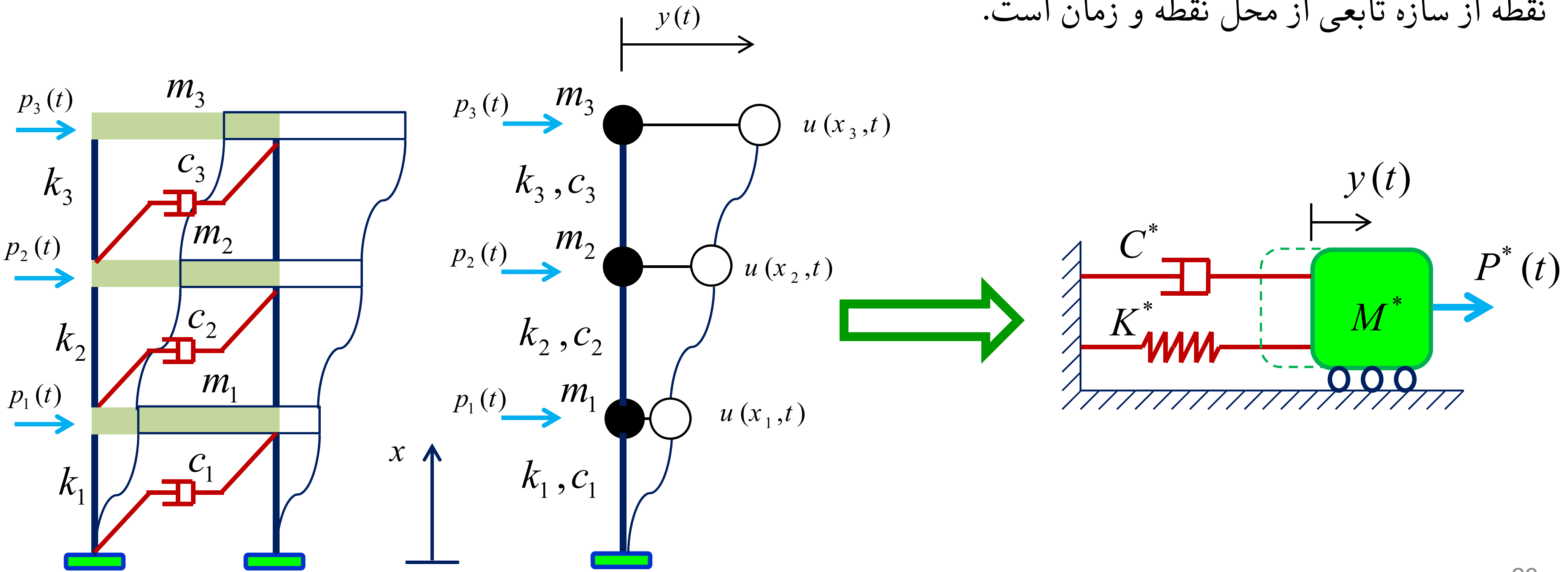
```
.
.
.
A(1:n,1:n)=zeros(n,n);
A(1:n,n+1:2*n)=eye(n);
A(n+1:2*n,1:n)=-inv(m)*k;
A(n+1:2*n,n+1:2*n)=-inv(m)*c;
B(1:n,1)=0;
B(n+1:2*n,1)=-(0.364)/0.226;
C(1:n,1:n)=eye(n);
C(1:n,n+1:2*n)=zeros(n,n);
D(1:n,1)=0;
sys=ss(A,B,C,D);
t=0:st:T;
xg=Xg*9.806;
q0(1:2*n)=0;
q0=q0';
[y]=lsim(sys,xg,t,q0);
LB=min(min(y));
UB=max(max(y));
subplot(3,1,1),plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
axis([0 31 1.2*LB 1.2*UB])
grid
subplot(3,1,2),plot(t,0.293*y(:,1),'LineWidth',2)
axis([0 31 1.2*LB 1.2*UB])
grid
subplot(3,1,3),plot(t,Eta*omega^2*y(:,1),'LineWidth',2)
axis([0 31 -800 800])
grid
```

III. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز

می‌خواهیم ابتدا سازه سه طبقه نشان داده شده را با یک مدل جرم متمرکز مدل‌سازی کنیم و سپس از روش مختصات تعمیم یافته استفاده نماییم. یعنی از یک سیستم SDOF معادل استفاده کنیم. این روش برای کنترل جواب دقیق مناسب است. چون جرم متمرکز داریم، به جای انتگرال، $\sum$ خواهیم داشت. همچنین از تفاضل جابجایی‌های دو نقطه در انرژی پتانسیل استفاده می‌شود.

بر اساس روش ریلی تابع تغییر مکان به صورتی است که جابجایی هر نقطه از سازه تابعی از محل نقطه و زمان است.

$$\boxed{u(x_i, t) = \phi_i \cdot y(t)} \qquad (28)$$



III. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز

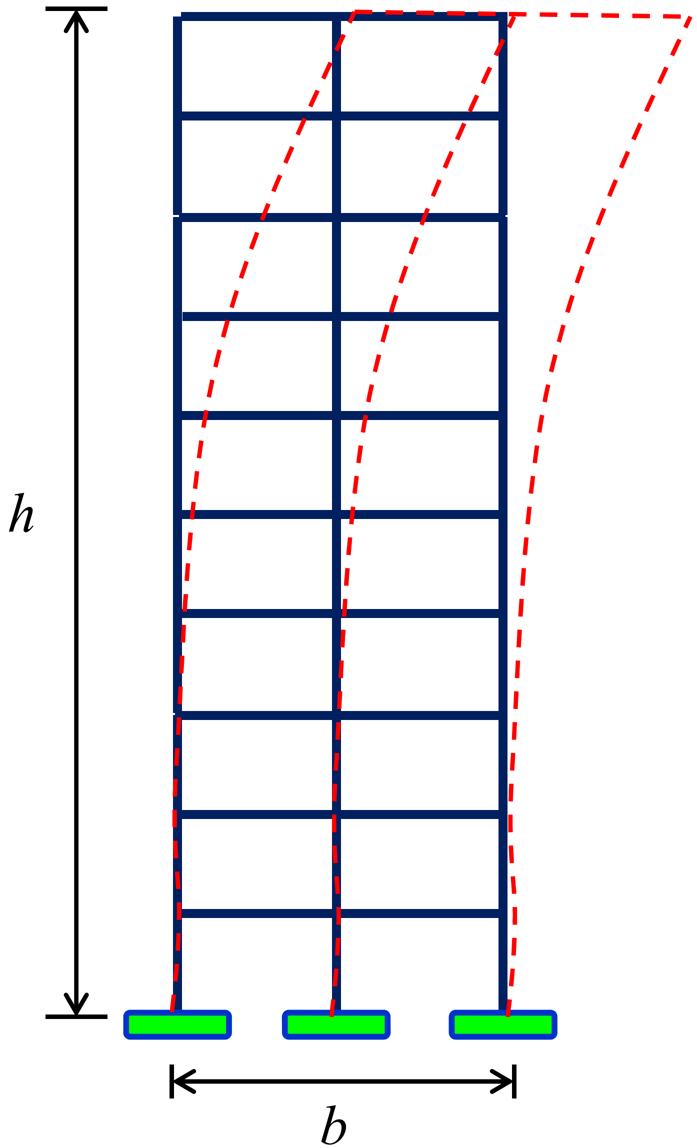
برای ساختمان‌های چند طبقه، تابع شکلی را به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

نوع	ارتفاع	نسبت ارتفاع به دهانه	رفتار	تابع شکل
۱	کوتاه	$(h/b)<1.5$	برشی	$\phi(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right)$
۲	متوسط	$1.5<(h/b)<3$	برشی-خمشی	خطی $\phi(x)=\frac{x}{h}$
۳	بلند	$3<(h/b)$	خمشی	$\phi(x)=1-\cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right)$

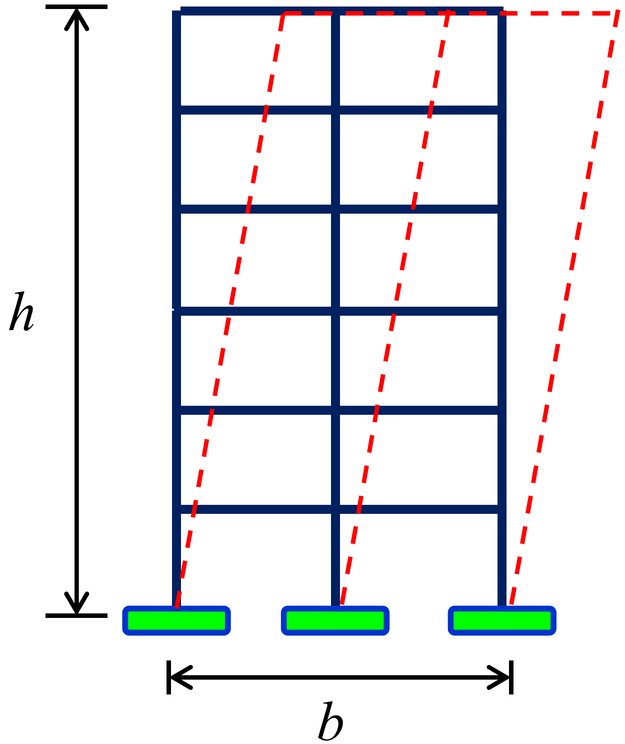
همانند روش ریلی، در این روش نیز تابع شکلی که کوچکترین ω^* را نتیجه دهد به واقعیت نزدیک‌تر است.

مقدار خطا در حدود 5 تا 10 درصد است که برای کنترل روش دقیق معیار خوبی خواهد بود

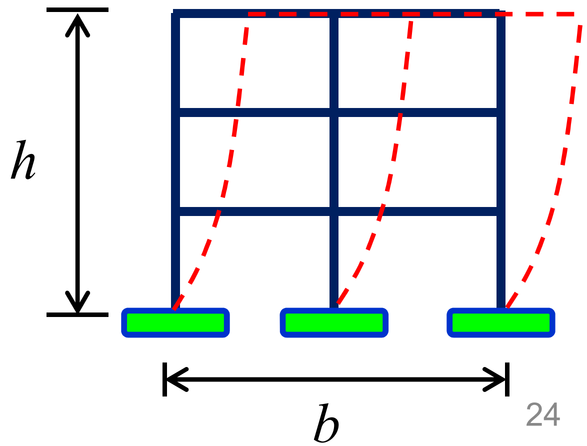
ساختمان بلند



ساختمان متوسط



ساختمان کوتاه



Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

III. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز

انرژی جنبشی مدل جرم متمرکز سازه مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{u}_i^{\,2} \overset{(1)}{\Rightarrow} T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i [\varphi_i \cdot \dot{y}(t)]^2 \Rightarrow \boxed{T=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_i^{\,2}\right)[\dot{y}(t)]^2} \quad (29)$$

همچنین انرژی جنبشی در سیستم SDOF معادل برابر است با

$$\boxed{T=\frac{1}{2}M^*[\dot{y}(t)]^2} \quad (4)$$

تکرار

از مساوی قرار دادن انرژی جنبشی دو سیستم خواهیم داشت:

$$(29),(4) \Rightarrow \boxed{M^*=\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_i^{\,2}} \quad (30)$$

جرم سیستم SDOF معادل

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

III. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز

انرژی پتانسیل مدل جرم متمرکز سازه مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i(u_i-u_{i-1})^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i[\Delta\varphi_i y(t)]^2 \Rightarrow \boxed{P=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i[\Delta\varphi_i]^2\right)[y(t)]^2} \quad (31)$$

همچنین انرژی پتانسیل در سیستم SDOF معادل برابر است با

$$\boxed{T=\frac{1}{2}K^*[y(t)]^2} \quad (7)$$

تکرار

از مساوی قرار دادن انرژی جنبشی دو سیستم خواهیم داشت:

$$(31),(7) \Rightarrow \boxed{K^*=\sum_{i=1}^{n}k_i[\Delta\varphi_i]^2} \quad (32)$$

سختی سیستم SDOF معادل

برای محاسبه میرایی در سیستم SDOF معادل، می‌توان از تعریف میرایی بحرانی مشابه حالت قبل استفاده کرد:

تکرار

$$c=2\xi m\omega \Rightarrow C^*=2\xi M^*\omega^* \Rightarrow \boxed{C^*=2\xi M^*\sqrt{\frac{K^*}{M^*}}} \quad (12)$$

میرایی سیستم SDOF معادل

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

III. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز

کار مجازی انجام شده توسط نیروهای مجازی خارجی در مدل جرم متمرکز سازه مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i(t)u_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i(t)\varphi_i y(t) \Rightarrow \boxed{\bar{W} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i(t)\varphi_i\right) y(t)} \quad (33)$$

همچنین کار مجازی انجام شده توسط نیروهای مجازی خارجی در سیستم SDOF معادل برابر است با

$$\boxed{\bar{W} = \frac{1}{2}P^*(t)y(t)} \quad (10)$$

تکرار

از مساوی قرار دادن کار مجازی دو سیستم خواهیم داشت:

$$(33),(10) \Rightarrow \boxed{P^*(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t)\varphi_i} \quad (34)$$

نیروی خارجی در سیستم SDOF معادل

با معلوم بودن بارگذاری و مشخصات سیستم و همچنین انتخاب یک تابع شکل اختیاری $\phi(x)$ مناسب که بیانگر شکل سازه باشد، می‌توان C^*, K^*, M^*, P^* را به دست آورد. با حل معادله حرکت سیستم SDOF معادل در رابطه (2)، $y(t)$ تعیین می‌گردد که با استفاده از آن و معلوم بودن $\phi(x)$ ، تابع شکل $u(x,t)$ به دست می‌آید.

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

می‌توان مشابه حالت جرم پیوسته رابطه‌ای برای نیروی خارجی در سیستم SDOF معادل به دست آورد:

$$\boxed{if \quad \Gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_i \quad \Rightarrow \quad P_e^*(t) = \Gamma \ddot{u}_g(t)} \qquad (35)$$

$P_e^*(t)$: نیروی خارجی در سیستم SDOF معادل

Γ : ضریب مشارکت

روابط تکراری

$$\boxed{M^* \ddot{y}(t) + C^* \dot{y}(t) + K^* y(t) = -P_e^*(t)} \qquad (16)$$

$$\boxed{Q(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{u}_g(t) e^{-\xi \omega^* (t-\tau)} Sin[\omega_D^* (t-\tau)] \cdot d\tau} \qquad (19)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\Gamma}{M^* \omega^*} Q(t)} \qquad (18)$$

$$\boxed{u(x_i, t) = \phi_i \cdot y(t)} \qquad (28)$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

نیروی وارد بر طبقات

$$\boxed{\mathbf{f}(t) = \mathbf{k}\boldsymbol{\varphi} \cdot y(t)} \quad (36)$$

$\mathbf{f}$: بردار نیروی وارد برطبقات

$\mathbf{k}$: ماتریس سختی

$\boldsymbol{\varphi}$: بردار تابع شکل

برش طبقات

$$\boxed{v_i(t) = \sum_{j=i}^{n} f_j(t)} \quad (37)$$

v_i: برش طبقه i اُم

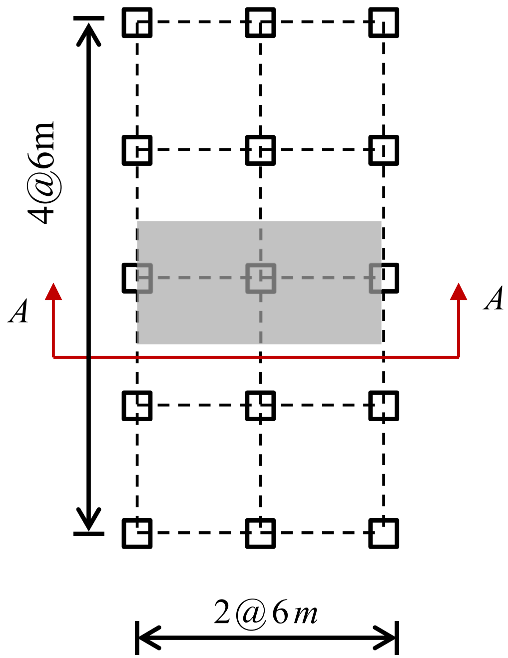
f_j: نیروی وارد بر طبقه j اُم

n : تعداد کل طبقات

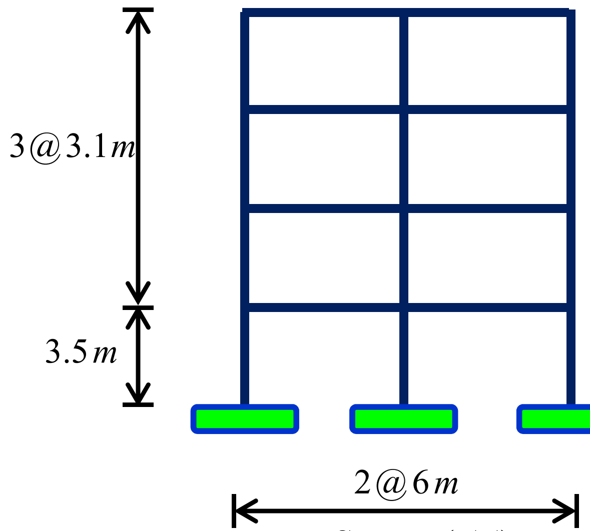
Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

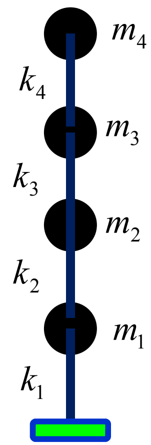
مثال 2- پلان یک ساختمان چهار طبقه در شکل زیر نشان داده شده است. زمان تناوب قاب‌های میانی با فرض تابع شکل در دو حالت زیر محاسبه نمایید:



Plan

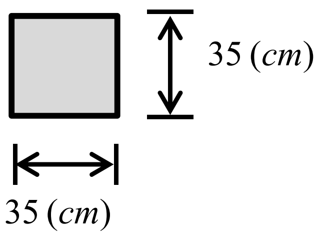


Section (AA)



$$I)\quad \phi(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right)$$

$$II)\quad \phi(x)=\frac{x}{h}$$



وزن طبقه چهارم $=1735\,(kN)$

وزن طبقه دوم و سوم $=1980\,(kN)$

وزن طبقه اول $=1990\,(kN)$

$E=24.8\times10^{6}\ (kN/m^{2})$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

حل مثال 2-

محاسبه سختی طبقات:

$$\boxed{k_1 = 26040\ (kN/m)}$$

$$\boxed{k_2 = k_3 = k_4 = 37476.6\ (kN/m)}$$

محاسبه جرم طبقات:

مساحت سهم بارگیر هر یک از قاب‌های داخلی یک چهارم مساحت کل پلان است در نتیجه:

$$\boxed{m_1 = 50.71\ (ton)}$$

$$\boxed{m_2 = m_3 = 50.46\ (ton)}$$

$$\boxed{m_4 = 44.22\ (ton)}$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

حل مثال 2-

$$I)\quad \phi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right)$$

شماره طبقه	ارتفاع طبقه	x_i	k_i	m_i	ϕ_i	$\Delta\phi_i$	$m_i\phi_i^2$	$k_i\,\Delta\phi_i^2$
4	3.1	12.8	37476.6	44.22	1	0.072	44.22	192.76
3	3.1	9.7	37476.6	50.46	0.928	0.204	43.48	1564.49
2	3.1	6.6	37476.6	50.46	0.724	0.308	26.45	3549.00
1	3.5	3.5	26040	50.71	0.416	0.416	8.79	4511.40
$\sum$							122.93	9817.65

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

حل مثال 2-

$$II) \quad \phi(x) = \frac{x}{h}$$

شماره طبقه	ارتفاع طبقه	x_i	k_i	m_i	ϕ_i	$\Delta\phi_i$	$m_i\phi_i^2$	$k_i\,\Delta\phi_i^2$
4	3.1	12.8	37476.6	44.22	1	0.242	44.22	2198.18
3	3.1	9.7	37476.6	50.46	0.758	0.242	28.98	2198.18
2	3.1	6.6	37476.6	50.46	0.516	0.242	13.42	2198.18
1	3.5	3.5	26040	50.71	0.273	0.273	3.79	1946.96
$\sum$							90.41	8541.51

$$(30) \quad \Rightarrow \quad M^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_i^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M^* = 90.41\,(ton)}$$

$$(32) \quad \Rightarrow \quad K^* = \sum_{i=1}^{n} k_i [\Delta\varphi_i]^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K^* = 8541.51\,(kN/m)}$$

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

حل مثال 2-

$$T_1 = 0.70 > T_2 = 0.65$$
$$\omega^*{}_1 = 8.94 < \omega^*{}_2 = 9.72$$
$$\Rightarrow \quad \phi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right)$$

به واقعیت نزدیک‌تر است.

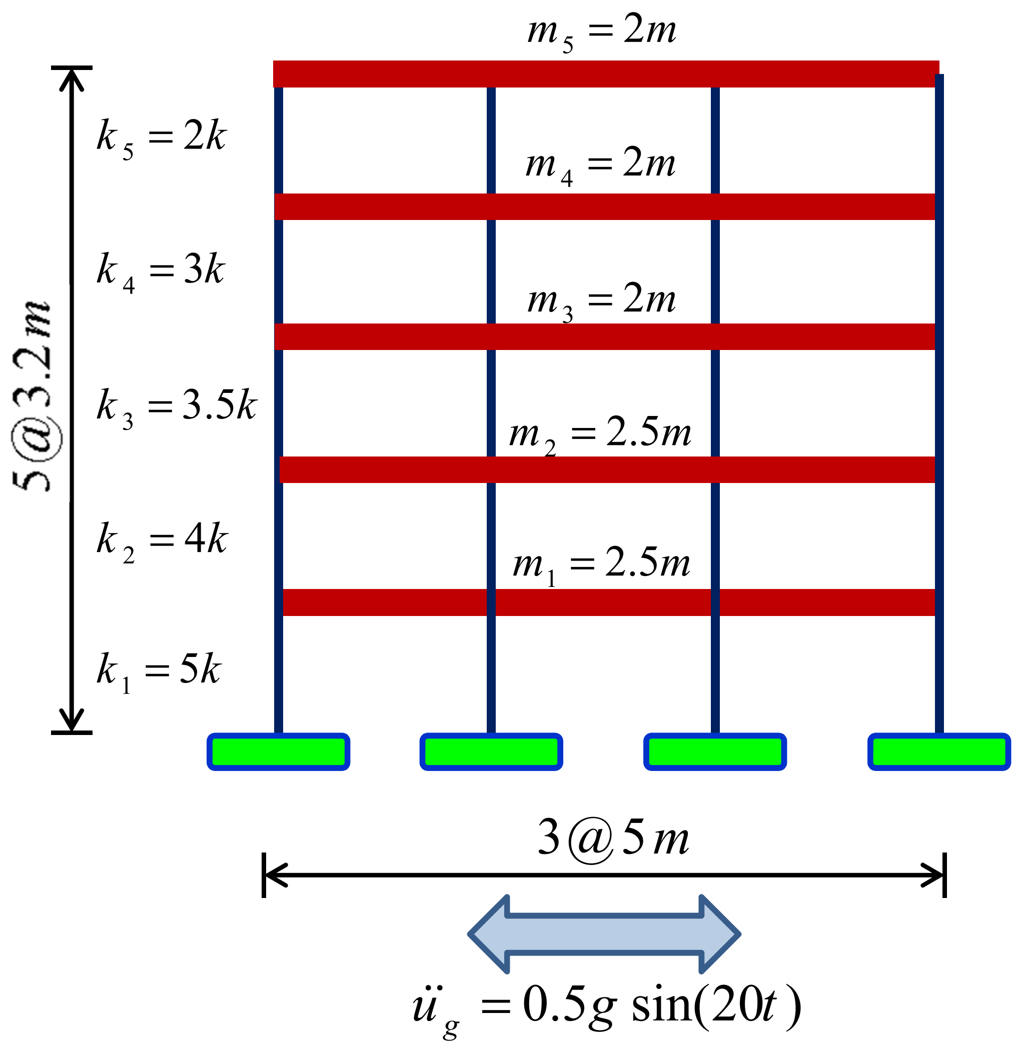
$$\frac{h}{b} = \frac{12.8}{12} = 1.067 < 1.5 \quad \Rightarrow$$

ساختمان کوتاه است و عملکرد برشی دارد.

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right)$$

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

مثال 3- مدل جرم متمرکز یک ساختمان 5 طبقه با ضریب میرایی $\xi = 0.05$ تحت اثر شتاب افقی زمین قرار می‌گیرد. مقدار جابجایی و نیروی برشی طبقات را در لحظه $t = 1\sec$ محاسبه نمایید.



$m = 5\times10^4\ kg$

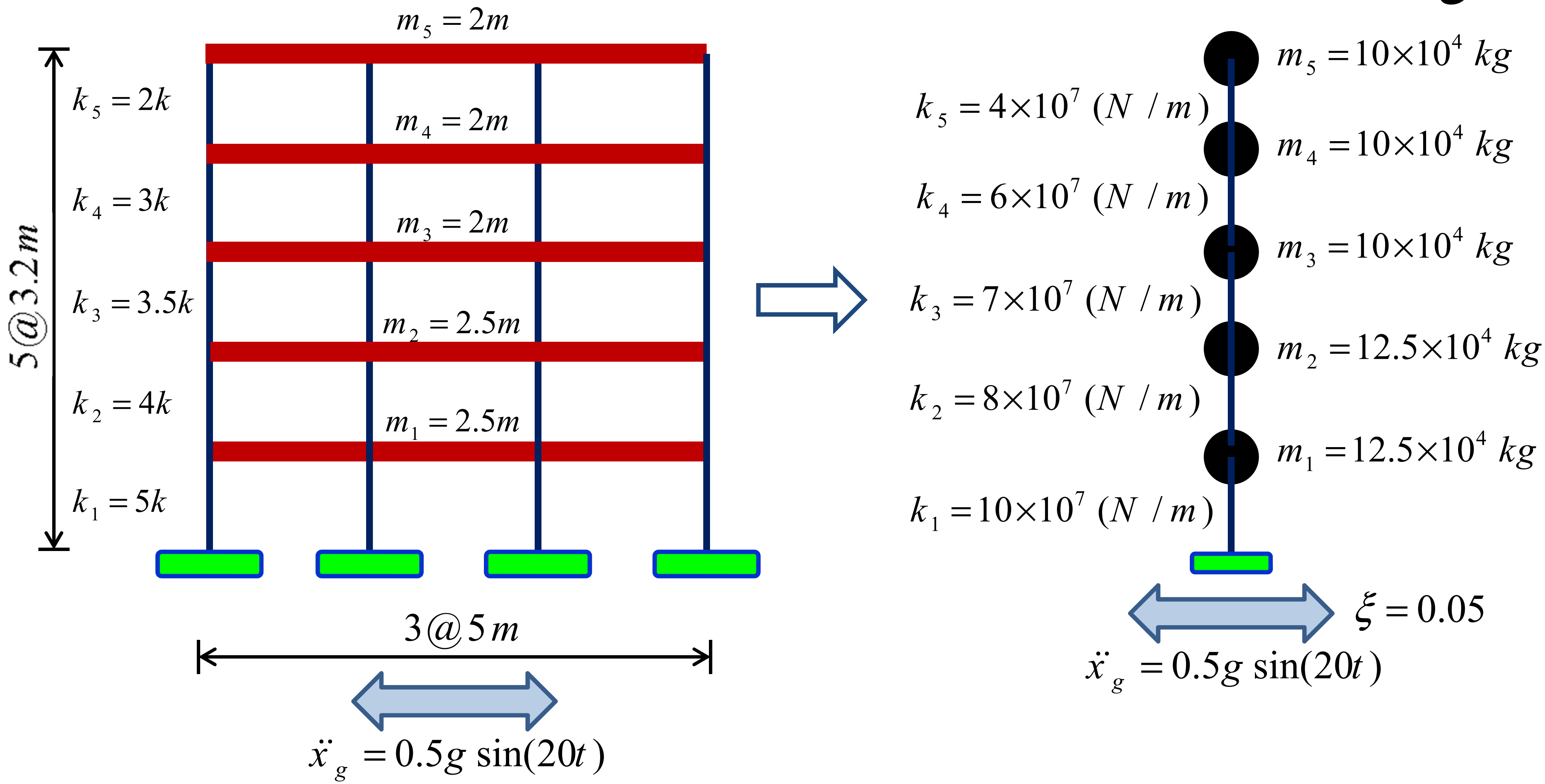
$k = 2\times10^7\ (N/m)$

$g = 10\ (m/s^2)$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

پاسخ مثال 3-



Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

پاسخ مثال 3-

شماره طبقه	ارتفاع طبقه	x_i	k_i	m_i	$\varphi(x_i)=\sin\left(\frac{\pi x_i}{2h}\right)$	$\Delta\phi_i$	$m_i\varphi_i$	$m_i\phi_i^2$	$k_i\Delta\phi_i^2$
5	3.2	16	4×10^7	10×10^4	1	0.048943	100000	100000	95818.58
4	3.2	12.8	6×10^7	10×10^4	0.95106	0.14204	95105.65	90450.85	1210513.55
3	3.2	9.6	7×10^7	10×10^4	0.80902	0.22123	80901.67	65450.85	3426043.86
2	3.2	6.4	8×10^7	12.5×10^4	0.58779	0.27877	73473.16	43186.44	6216939.33
1	3.2	3.2	10×10^7	12.5×10^4	0.30902	0.30902	38627.12	11936.44	9549150.28
						$\sum$	388107.63	311024.57	20498465.6

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

پاسخ مثال 3-

$$\boxed{\omega^* = 8.118\ (rad\ /\sec)}$$

$$\boxed{T = 0.774\ (\sec)}$$

$$\boxed{P_e^*(t) = 1940538.16 \times \sin(20t)}$$

$$\boxed{311024.57\ddot{y}(t) + 252498.05\dot{y}(t) + 20498465.6y(t) = -1940538.16 \times \sin(20t)}$$

$$\boxed{P_0^* = -1940538.16}$$

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

پاسخ مثال 3-

$$(L3-39) \Rightarrow \quad A = y_0 + \frac{2\xi\beta}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}\frac{P_0^*}{K^*} = (0) + \frac{2(0.05)(2.46)}{\left(2(0.05)(2.46)\right)^2 + \left(1-(2.46)^2\right)^2}\frac{-1940538.16}{20498465.6}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = -0.90543983\times 10^{-3}}$$

$$(L3-39) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\dot{y}_0 - \xi\omega^* y_0}{\omega_D} + \frac{P_0^*}{K^*\omega_D}\frac{2\xi^2\beta\omega^* - (1-\beta^2)\bar{\omega}}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} = \frac{(0)-(0.05)(8.118)(0)}{8.108}$$

$$+ \frac{-1940538.16}{20498465.6\,(8.108)}\frac{2(0.05)^2(2.46)(20) - \left(1-(2.46)^2\right)(20)}{\left(2(0.05)(2.46)\right)^2 + \left(1-(2.46)^2\right)^2} \Rightarrow \boxed{B = -46.001605\times 10^{-3}}$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

پاسخ مثال 3-

$$\boxed{\theta = -0.04856^{rad}}$$

$$\boxed{\rho = -18.653\times10^{-3}\ (m)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & e^{-(0.05)(8.118)t}[-0.90543983\times10^{-3}\cos(8.108t) - 46.001605\times10^{-3}\sin(8.108t)] \\ & -18.653\times10^{-3}\sin(20t + 0.04856) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} y_{(1_{sec})} = {} & e^{-(0.05)(8.118)(1)}[-0.90543983\times10^{-3}\cos(8.108(1)) - 46.001605\times10^{-3}\sin(8.108(1))] \\ & -18.653\times10^{-3}\sin(20(1) + 0.04856) \quad \Rightarrow \boxed{y_{(1_{sec})} = -4.69\times10^{-2}\ m} \end{aligned}$$

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

پاسخ مثال 3-

$$\begin{cases} u(x_2,1)=\phi_2\cdot y_{(1_{sec})}=0.588\times(-0.0469\times10^2) & \Rightarrow \quad u(x_2,1)=-2.76\,cm \\ u(x_3,1)=\phi_3\cdot y_{(1_{sec})}=0.809\times(-0.0469\times10^2) & \Rightarrow \quad u(x_3,1)=-3.79\,cm \\ u(x_4,1)=\phi_4\cdot y_{(1_{sec})}=0.951\times(-0.0469\times10^2) & \Rightarrow \quad u(x_4,1)=-4.46\,cm \\ u(x_5,1)=\phi_5\cdot y_{(1_{sec})}=1.000\times(-0.0469\times10^2) & \Rightarrow \quad u(x_5,1)=-4.69\,cm \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{u}(x,1)=\begin{Bmatrix} -1.45 \\ -2.76 \\ -3.79 \\ -4.46 \\ -4.69 \end{Bmatrix} cm}$$

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}=\begin{bmatrix} 18 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 15 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}\times10^7}$$

IV. آنالیز تاریخچه زمانی جرم‌های متمرکز در اثر نیروی زلزله

پاسخ مثال 3-

$$=10^7\times\begin{bmatrix}18 & -8 & 0 & 0 & 0\\ -8 & 15 & -7 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 13 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 10 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1.45\\ -2.76\\ -3.79\\ -4.46\\ -4.69\end{Bmatrix}\times10^{-2}\times10^{-4}\Rightarrow \boxed{\mathbf{f}_{(1_{\sec})}=\begin{Bmatrix}-40.332\\ -31.961\\ -32.658\\ -30.786\\ -9.1811\end{Bmatrix}(ton)}$$

$$\mathbf{v}_{(1_{\sec})}=\begin{Bmatrix} \\ -31.961-32.658-30.786-9.1811\\ -32.658-30.786-9.1811\\ -30.786-9.1811\\ -9.1811\end{Bmatrix}\Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_{(1_{\sec})}=\begin{Bmatrix}-144.92\\ -104.59\\ -72.625\\ -39.967\\ -9.1811\end{Bmatrix}(ton)}$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

Matlab Code

II. آنالیز تاریخچه زمانی جرم پیوسته در اثر نیروی زلزله

حل مثال 3-

```
clc
clear
clf
format short g
n=5;
m=5e4;
k=2e7;
m0=[2.5 2.5 2 2 2]*m;
k0=[5 4 3.5 3 2]*k;
hs=[3.2 3.2 3.2 3.2 3.2];
xi=0.05;
omegab=20;
g=10;
p0=0.5*g;
x0=0;
v0=0;
t=1;
[ modeshape, Period, MP ] = ModalParameters( m0, k0 );
omega=2*pi./Period;
H=sum(hs);
for i=1:n
  if i>1
  h(i)=hs(i)+h(i-1);
  else
    h(i)=hs(i);
  end
  phi(i)=sin(pi*h(i)/2/H);

  if i>1
     deltaphi(i)=phi(i)-phi(i-1);
  else
     deltaphi(i)=phi(i);
  end

  mphi(i)=m0(i)*phi(i);
   mphi2(i)=m0(i)*phi(i)^2;
    kdeltaphi2(i)=k0(i)*deltaphi(i)^2;
end
mphi'
mphi2'
kdeltaphi2'
.
.
```

```
.
.
.
M=sum(mphi2)
K=sum(kdeltaphi2)
Eta=sum(mphi)
omega=sqrt(K/M)
Period=2*pi/omega
C=2*xi*M*sqrt(K/M)
P0=Eta*p0
Beta=omegab/omega
omegaD=omega*sqrt(1-xi^2)
A=x0+(2*xi*Beta)*(P0/K)/(((2*xi*Beta)^2)+((1-Beta^2)^2))
B=((v0-xi*omega*x0)/(omegaD))+(P0/K/omegaD)*((2*Beta*omega*xi^2)-(1-
Beta^2)*omegab)/(((2*xi*Beta)^2)+((1-Beta^2)^2))
teta=atan(2*xi*Beta/(1-Beta^2))
Ro=(P0/K)*1/sqrt(((1-Beta^2)^2)+(2*xi*Beta)^2)
y1=(exp(-xi*omega*t))*(A*cos(omegaD*t)+B*sin(omegaD*t))+Ro*sin(omegab*t-teta)
u1=phi'*y1
k=zeros(n,n);
for i=1:n

  if i<n
     k(i,i)=k0(i)+k0(i+1);
     k(i,i+1)=-k0(i+1);
     k(i+1,i)=-k0(i+1);
  else
     k(i,i)=k0(i);
  end
end
f1=k*u1
for i=1:n
  v1(i,1)=sum(f1(i:n));
end
v1
```

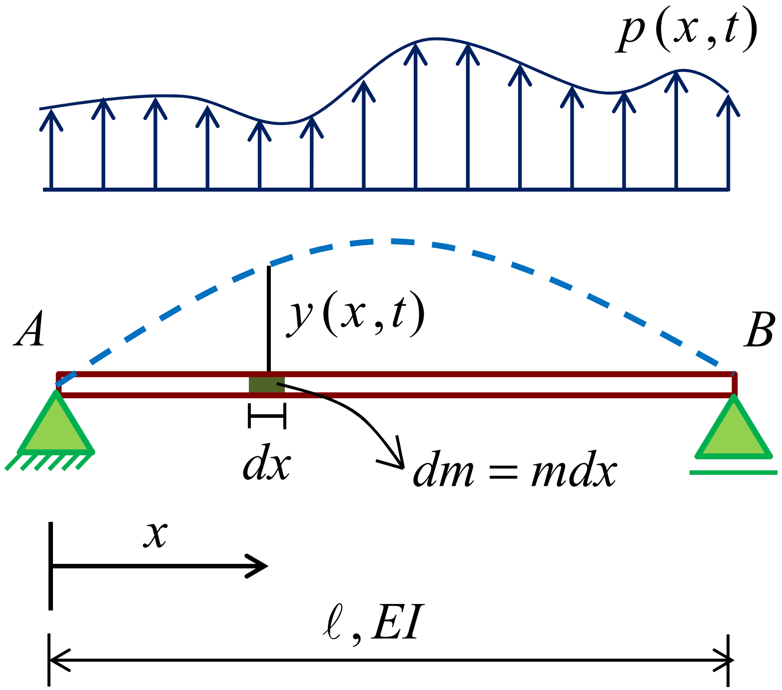
Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

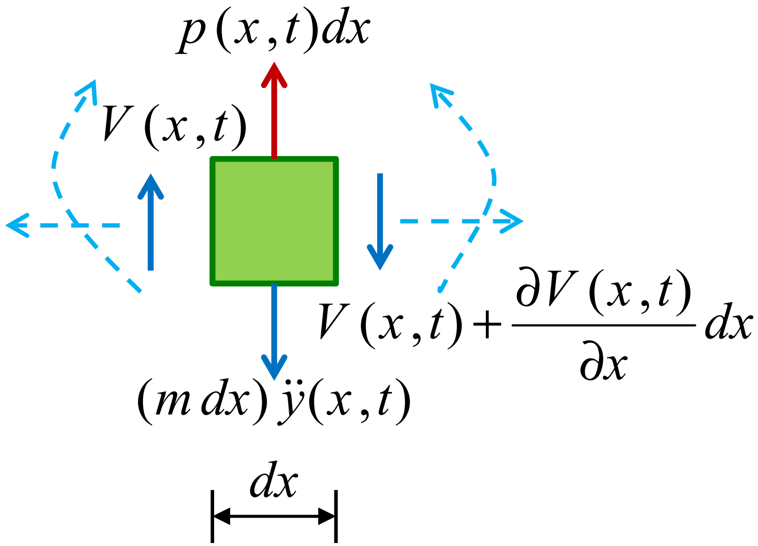
V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

1- ارتعاش تیر با جرم گسترده یکنواخت

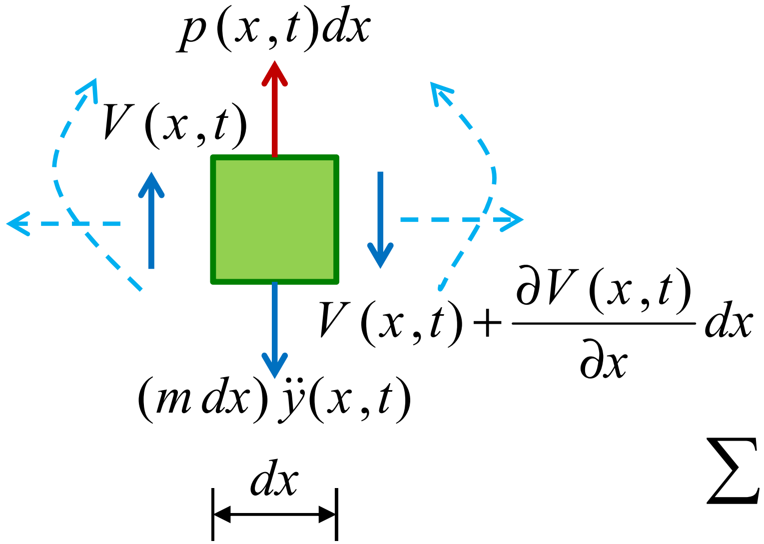
این روش کاربرد زیادی ندارد و فقط در کارهای پژوهشی و تحقیقاتی استفاده می‌شود. تا زمانی که بتوان از روش جرم متمرکز استفاده کرد این روش کارآیی ندارد.

فرض کنید تیر با جرم گسترده‌ای تحت اثر یک بار گسترده قرار دارد. با فرض آن که جرم واحد طول تیر m باشد تعادل جزیی از تیر به طول dx را بررسی می‌کنیم.





Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF



V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

1- ارتعاش تیر با جرم گسترده یکنواخت

با نوشتن معادله تعادل در جهت y خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V(x,t) - \left(V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - (m\,dx)\,\ddot{y}(x,t) + p(x,t)dx = 0$$

معادله دیفرانسل حرکت یک قطعه خمشی

$$\Rightarrow \boxed{(m)\,\ddot{y}(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = p(x,t)} \qquad (38)$$

رابطه لنگر با تغییر شکل تیر به صورت زیر است:

$$\boxed{M(x,t) = EI\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}} \qquad (39)$$

V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

1- ارتعاش تیر با جرم گسترده یکنواخت

با استفاده از رابطه (39) برش به دست می‌آید:

$$(39) \quad \Rightarrow \quad V(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(x,t) = EI\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3}} \quad (40)$$

$$(40) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}} \quad (41)$$

با جایگزاری رابطه (41) در معادله حرکت (38) خواهیم داشت:

$$(38),(41) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(m)\ddot{y}(x,t) + EI\,y^{IV}(x,t) = p(x,t)} \quad (42)$$

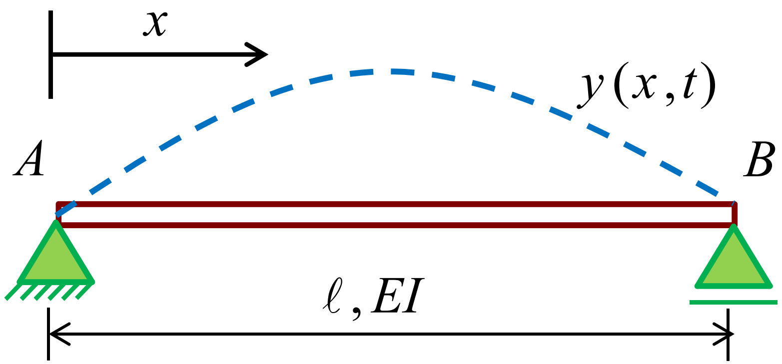
$: y^{IV}(x,t)$ مشتق چهارم نسبت به x

$: \ddot{y}(x,t)$ مشتق دوم نسبت به t

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

2- ارتعاش آزاد تیر با جرم گسترده یکنواخت



در حالت ارتعاش آزاد معادله حرکت در رابطه (42) به صورت مقابل می‌شود:

$$\boxed{(m)\ddot{y}(x,t)+EI\,y^{IV}(x,t)=0} \qquad (43)$$

فرض می‌کنیم که پاسخ معادله دیفرانسیل بالا به صورت زیر است:

$$\boxed{y(x,t)=\varphi(x)f(t)} \qquad (44)$$

که در آن

$$\boxed{\begin{gathered}\phi(x)=A\sin(ax)+B\cos(ax)+C\sinh(ax)+D\cosh(ax)\\ f(t)=A_0\sin(\omega t)+B_0\cos(\omega t)\\ a=\sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}} \qquad or \qquad \omega=(a\ell)^2\cdot\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}\end{gathered}} \qquad (45)$$

یادآوری

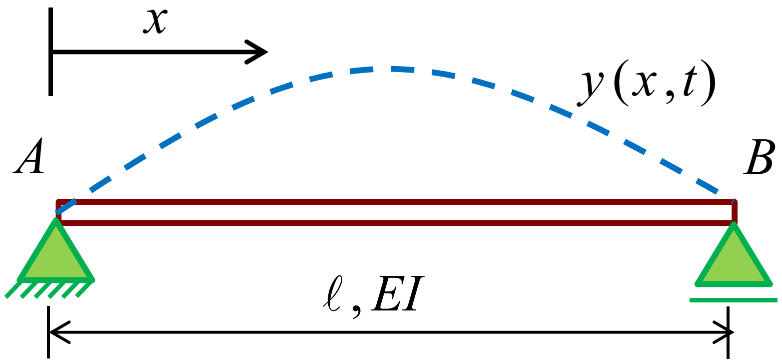
$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \frac{d[\sinh(x)]}{dx}=\cosh(x)$$
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \frac{d[\cosh(x)]}{dx}=\sinh(x)$$

$\phi(x)$: تابع شکل (Shape Function) نام دارد که شکل تغییر مکان را مشخص می‌کند و تابعی از مکان است.

$f(t)$: مختصات تعمیم یافته است که تابعی از زمان می‌باشد.

V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

2- ارتعاش آزاد تیر با جرم گسترده یکنواخت



در رابطه (45) ثابت‌های A، B، C و D براساس شرایط مرزی (تکیه‌گاهی) و ثابت‌های A_0 و B_0 با توجه به شرایط اولیه (سرعت و جابجایی اولیه) به دست می‌آید.

$$(39),(44) \Rightarrow M(x,t) = EI\frac{\partial^2[\varphi(x)f(t)]}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{M(x,t) = EI\,\varphi''(x)f(t)} \quad (46)$$

$$(45),(46) \Rightarrow$$

$$\boxed{M(x,t) = EIf(t)\left[-Aa^2\sin(ax) - Ba^2\cos(ax) + Ca^2\sinh(ax) + Da^2\cosh(ax)\right]} \quad (47)$$

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

2- ارتعاش آزاد تیر با جرم گسترده یکنواخت

$$@\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ M(0,t) = 0 \end{cases}$$

$$(44) \Rightarrow y(0,t) = \varphi(0) f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = 0 \quad \overset{(45)}{\Rightarrow} \quad A \overset{0}{\cancel{\sin(0)}} + B\cos(0) + C \overset{0}{\cancel{\sinh(0)}} + D\cosh(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B + D = 0} \quad (48)$$

$$(47) \Rightarrow M(0,t) = EIf(t)\left[-Aa^2 \overset{0}{\cancel{\sin(0)}} - Ba^2\cos(0) + Ca^2 \overset{0}{\cancel{\sinh(0)}} + Da^2\cosh(0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D - B = 0} \quad (49)$$

$$(48),(49) \quad \boxed{B = D = 0} \quad (50)$$

V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

2- ارتعاش آزاد تیر با جرم گسترده یکنواخت

$$@\, x=\ell \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(\ell,t)=0 \\ M(\ell,t)=0 \end{cases}$$

$$(44) \quad \Rightarrow \quad y(\ell,t)=\varphi(\ell)f(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(\ell)=0 \quad \overset{(45),(50)}{\Rightarrow} \quad \boxed{A\sin(a\ell)+C\sinh(al)=0} \quad (51)$$

$$(47),(50) \quad \Rightarrow \quad M(\ell,t)=EIf(t)\left[-Aa^2\sin(a\ell)+Ca^2\sinh(a\ell)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-A\sin(a\ell)+C\sinh(a\ell)=0} \quad (52)$$

$$(51)+(52) \quad \Rightarrow \quad 2C\sinh(a\ell)=0 \quad \Rightarrow \quad \sinh(a\ell)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=0} \quad (53)$$

$(51),(53) \quad \Rightarrow \quad A\sin(a\ell)=0 \quad \Rightarrow$ (54)

$A=0$ غ.ق.ق. معادله پاسخی نخواهد داشت.

$\sin(a\ell)=0$ ق.ق.

$(54) \quad \Rightarrow \quad \sin(a\ell)=0 \quad \Rightarrow \quad a\ell=n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n=\dfrac{n\pi}{\ell}}$ (55) یعنی به ازای n های مختلف a های متعدد داریم.

V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

2- ارتعاش آزاد تیر با جرم گسترده یکنواخت

$$(45),(55) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \omega_n &= (n\pi)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^4}} \\ \varphi(x) &= A\sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \\ f(t) &= A_0\sin(\omega_n t) + B_0\cos(\omega_n t) \end{aligned}} \quad (56)$$

چون به ازای n های مختلف فرکانس‌های متعددی داریم در نتیجه پاسخ در حالت کلی به صورت زیر است:

$$(56) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A\sin(a_n x)\left[A_0\sin(\omega_n t) + B_0\cos(\omega_n t)\right]} \quad (57)$$

با بردن ضریب A به داخل کروشه خواهیم داشت:

$$(57) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n x)\left[A_n\sin(\omega_n t) + B_n\cos(\omega_n t)\right]} \quad (58)$$

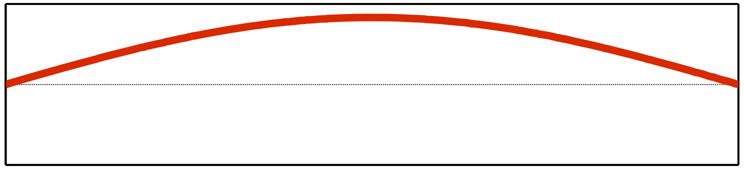
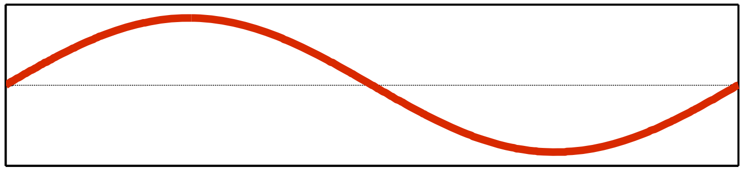
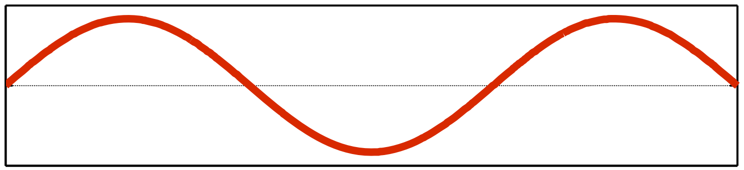
A_n , B_n : با توجه به شرایط اولیه (سرعت و جابجایی اولیه) به دست می‌آید.

Generalized Coordinate: Convert MDOF to Equivalent SDOF

V. ارتعاش قطعات با جرم پیوسته

2- ارتعاش آزاد تیر با جرم گسترده یکنواخت

حال می‌خواهیم شکل ارتعاش (مود) را در فرکانس‌های مختلف رسم نماییم:

n	$\omega_n = (n\pi)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}$	$\phi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$	شکل ارتعاش (مود)
1	$\omega_1 = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}$	$\phi_1(x) = \sin(\frac{\pi}{\ell}x)$	
2	$\omega_2 = 4\pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}$	$\phi_2(x) = \sin(\frac{2\pi}{\ell}x)$	
3	$\omega_3 = 9\pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}$	$\phi_3(x) = \sin(\frac{3\pi}{\ell}x)$	
4	$\omega_4 = 16\pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}$	$\phi_4(x) = \sin(\frac{4\pi}{\ell}x)$