# Dynamic of Structures

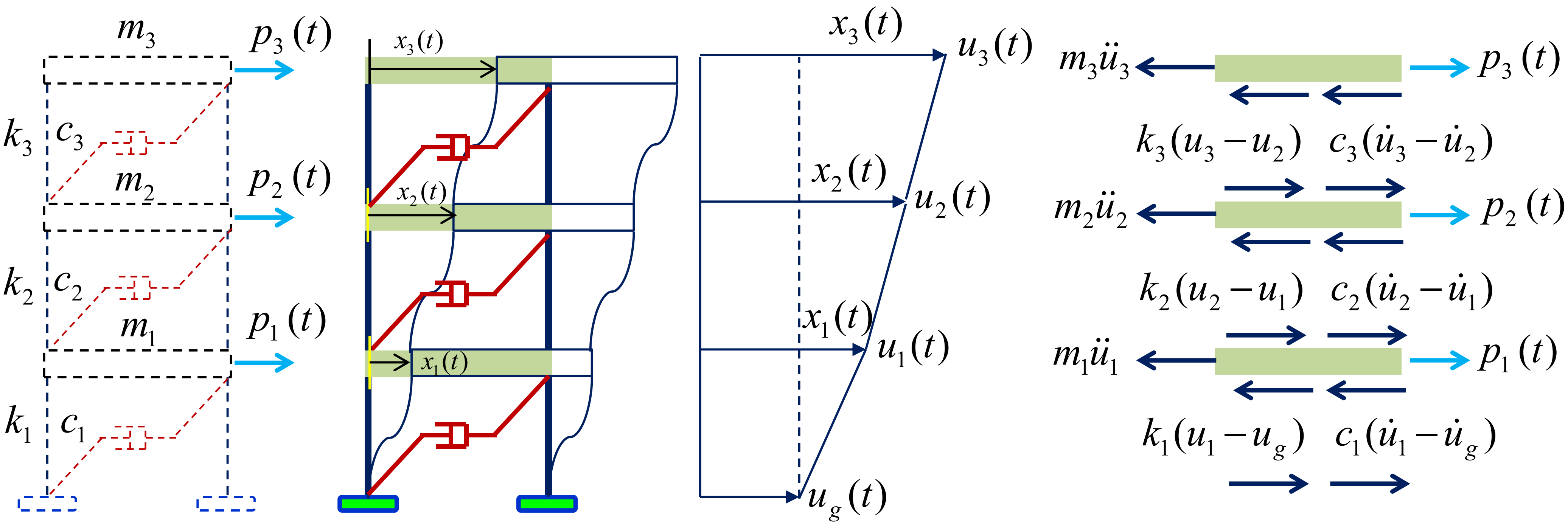
## Multi Degree of Freedom Systems: Solution of Motion Equations

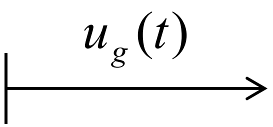
By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## I. معادله‌های حرکت سیستم MDOF

دیاگرام جسم آزاد سازه را پس از اعمال تغییرشکل در آن رسم می‌کنیم.




$$
\boxed{\begin{aligned}
u_i(t) &= x_i(t)+u_g(t) \quad (i=1,2,3)\\
\dot{u}_i(t) &= \dot{x}_i(t)+\dot{u}_g(t) \quad (i=1,2,3)\\
\ddot{u}_i(t) &= \ddot{x}_i(t)+\ddot{u}_g(t) \quad (i=1,2,3)
\end{aligned}} \qquad (1)
$$

$x_i$ : جابجایی نسبی

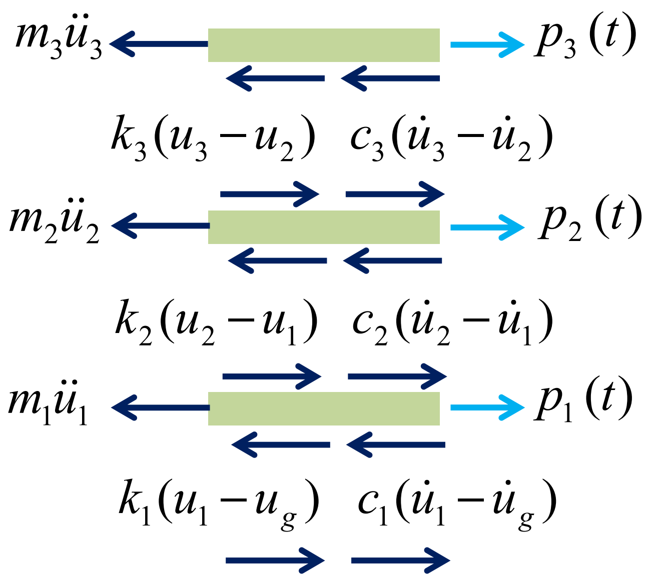
$u_i$ : جابجایی مطلق

$u_g$ : جابجایی زمین

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## .I معادله‌های حرکت سیستم MDOF

اکنون برای دستیابی به معادله دیفرانسیل حرکت، اقدام به نوشتن معادله‌های تعادل می‌نماییم.




$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&m_1\ddot{u}_1 + k_1(u_1-u_g) + c_1(\dot{u}_1-\dot{u}_g) - k_2(u_2-u_1) - c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1) = p_1(t)\\
&m_2\ddot{u}_2 + k_2(u_2-u_1) + c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1) - k_3(u_3-u_2) - c_3(\dot{u}_3-\dot{u}_2) = p_2(t)\\
&m_3\ddot{u}_3 + k_3(u_3-u_2) + c_3(\dot{u}_3-\dot{u}_2) = p_3(t)
\end{aligned}} \quad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&m_1(\ddot{x}_1+\ddot{u}_g) + k_1(x_1+u_g-u_g) + c_1(\dot{x}_1+\dot{u}_g-\dot{u}_g) - k_2(x_2+u_g-x_1-u_g) - c_2(\dot{x}_2+\dot{u}_g-\dot{x}_1-\dot{u}_g) = p_1(t)\\
&m_2(\ddot{x}_2+\ddot{u}_g) + k_2(x_2+u_g-x_1-u_g) + c_2(\dot{x}_2+\dot{u}_g-\dot{x}_1-\dot{u}_g) - k_3(x_3+u_g-x_2-u_g) - c_3(\dot{x}_3+\dot{u}_g-\dot{x}_2-\dot{u}_g) = p_2(t)\\
&m_3(\ddot{x}_3+\ddot{u}_g) + k_3(x_3+u_g-x_2-u_g) + c_3(\dot{x}_3+\dot{u}_g-\dot{x}_2-\dot{u}_g) = p_3(t)
\end{aligned}} \quad (3)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## I. معادله‌های حرکت سیستم MDOF

(3) $\Rightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=-m_1\ddot{u}_g+p_1(t)\\ &m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-c_3\dot{x}_3-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-k_3x_3=-m_2\ddot{u}_g+p_2(t)\\ &m_3\ddot{x}_3-c_3\dot{x}_2+c_3\dot{x}_3-k_3x_2+k_3x_3=-m_3\ddot{u}_g+p_3(t)\end{aligned}} \quad (4)$$

فرم ماتریسی معادلات تعادل به صورت زیر خواهد شد:

(4) $\Rightarrow$

(5)
$$\boxed{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0\\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3\\ 0 & -c_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3\\ 0 & -k_3 & k_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}\ddot{u}_g+\begin{Bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ p_3(t)\end{Bmatrix}}$$

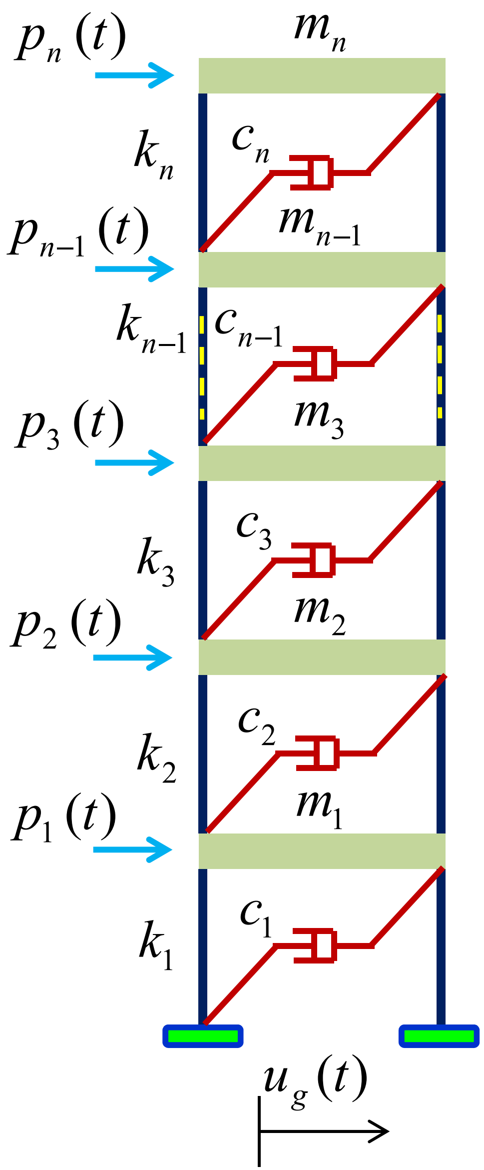
معادله حرکت سیستم MDOF دارای سه درجه آزادی به صورت زیر است:

(6) $\Rightarrow$
$$\boxed{[m]_{3\times3}\{\ddot{x}(t)\}_{3\times1}+[c]_{3\times3}\{\dot{x}(t)\}_{3\times1}+[k]_{3\times3}\{x(t)\}_{3\times1}=-[m]_{3\times3}\{L\}_{3\times1}\ddot{u}_g(t)+\{p(t)\}_{3\times1}} \quad (6)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## I. معادله‌های حرکت سیستم MDOF

در حالت کلی معادله حرکت سیستم MDOF دارای n درجه آزادی (n = تعداد طبقات) در فضای دو بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:




$$\boxed{[m]_{n\times n}\{\ddot{x}(t)\}_{n\times 1}+[c]_{n\times n}\{\dot{x}(t)\}_{n\times 1}+[k]_{n\times n}\{x(t)\}_{n\times 1}=-[m]_{n\times n}\{L\}_{n\times 1}\ddot{u}_g(t)+\{p(t)\}_{n\times 1}} \quad (7)$$

که در آن

$[m]$ : ماتریس جرم

$[c]$ : ماتریس میرایی

$[k]$ : ماتریس سختی

$\{x(t)\}$ : بردار جابجایی

$\{\dot{x}(t)\}$ : بردار سرعت

$\{\ddot{x}(t)\}$ : بردار شتاب

$\{p(t)\}$ : بردار نیروی خارجی

$\ddot{u}_g(t)$ : شتاب زمین

$\{L\}$ : بردار واحد

$$[m]_{n\times n}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

$$\{x(t)\}_{n\times 1}=\{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_n\}^T \quad (8)$$

$$\{\dot{x}(t)\}_{n\times 1}=\{\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \cdots \quad \dot{x}_n\}^T$$

$$\{\ddot{x}(t)\}_{n\times 1}=\{\ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2 \quad \ddot{x}_3 \quad \cdots \quad \ddot{x}_n\}^T$$

$$\{p(t)\}_{n\times 1}=\{p(t)_1 \quad p(t)_2 \quad p(t)_3 \quad \cdots \quad p(t)_n\}^T$$

$$\{L\}_{n\times 1}=\{1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\}^T$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## I. معادله‌های حرکت سیستم MDOF

همچنین ماتریس‌های سختی و میرایی کل سازه به صورت زیر تشکیل می‌گردند:

$$
[k]_{n\times n}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}
\quad
[c]_{n\times n}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \qquad (9)
$$

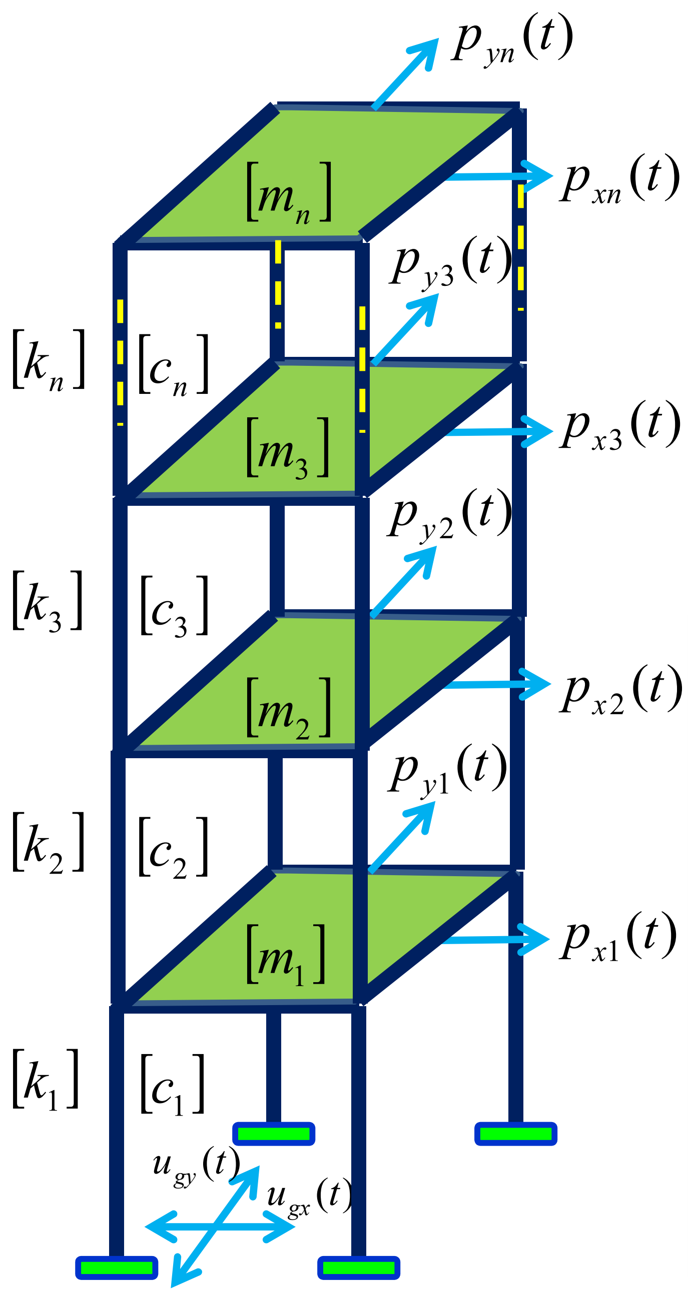
$$
k(i,i)=\begin{cases} k_i+k_{i+1} & (i=1,2,3,\cdots,n-1) \\ k_i & (i=n) \end{cases}
\qquad
c(i,i)=\begin{cases} c_i+c_{i+1} & (i=1,2,3,\cdots,n-1) \\ c_i & (i=n) \end{cases}
$$

$$
k(i,i+1)=k(i+1,i)=-k_{i+1} \qquad c(i,i+1)=c(i+1,i)=-c_{i+1}
$$

$$
k(i,j)=0 \quad : \quad if \;\; j\neq i\,,i+1 \qquad c(i,j)=0 \quad : \quad if \;\; j\neq i\,,i+1
$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## .I معادله‌های حرکت سیستم MDOF




در حالت کلی معادله حرکت سیستم MDOF دارای 3n درجه آزادی (n = تعداد طبقات) در فضای سه بعدی به صورت نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}[m]_{3n\times3n}\{\ddot{x}(t)\}_{3n\times1}+[c]_{3n\times3n}\{\dot{x}(t)\}_{3n\times1}+[k]_{3n\times3n}\{x(t)\}_{3n\times1}\\=-[m]_{3n\times3n}\{L\}_{3n\times3}\{\ddot{u}_g(t)\}_{3\times1}+\{p(t)\}_{3n\times1}\end{aligned} \tag{10}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\{x(t)\}_{3n\times1}&=\{x_1\quad y_1\quad R_{z1}\quad x_2\quad y_2\quad R_{z2}\quad \cdots\quad x_n\quad y_n\quad R_{zn}\}^T\\
\{\dot{x}(t)\}_{3n\times1}&=\{\dot{x}_1\quad \dot{y}_1\quad \dot{R}_{z1}\quad \dot{x}_2\quad \dot{y}_2\quad \dot{R}_{z2}\quad \cdots\quad \dot{x}_n\quad \dot{y}_n\quad \dot{R}_{zn}\}^T\\
\{\ddot{x}(t)\}_{3n\times1}&=\{\ddot{x}_1\quad \ddot{y}_1\quad \ddot{R}_{z1}\quad \ddot{x}_2\quad \ddot{y}_2\quad \ddot{R}_{z2}\quad \cdots\quad \ddot{x}_n\quad \ddot{y}_n\quad \ddot{R}_{zn}\}^T\\
\{p(t)\}_{3n\times1}&=\{p_{x1}(t)\quad p_{y1}(t)\quad 0\quad p_{x2}(t)\quad p_{y2}(t)\quad 0\quad \cdots\quad p_{xn}(t)\quad p_{yn}(t)\quad 0\}^T\\
\{\ddot{u}_g(t)\}_{3\times1}&=\{\ddot{u}_{gx}(t)\quad \ddot{u}_{gy}(t)\quad 0\}^T\\
\{L\}_{3n\times3}&=\begin{Bmatrix}1&0&0&1&0&0&\cdots&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0\end{Bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{11}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## I. معادله‌های حرکت سیستم MDOF

ماتریس جرم کل سازه به صورت زیر است:

$$[m]_{3n\times 3n} = \begin{array}{c} \\ 1\ \ 2\ \ 3 \\ 4\ \ 5\ \ 6 \\ 7\ \ 8\ \ 9 \\ \vdots \\ 3(n-1)-2\ \ 3(n-1)-1\ \ 3(n-1) \\ 3(n)-2\ \ 3(n)-1\ \ 3(n) \end{array} \begin{array}{cccccc} 1\ 2\ 3 & 4\ 5\ 6 & 7\ 8\ 9 & \cdots & 3(n-1)-2\ \ 3(n-1)-1\ \ 3(n-1) & 3(n)-2\ \ 3(n)-1\ \ 3(n) \\ [m_1] & [O] & [O] & \cdots & [O] & [O] \\ [O] & [m_2] & [O] & \cdots & [O] & [O] \\ [O] & [O] & [m_3] & \cdots & [O] & [O] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [O] & [O] & [O] & \cdots & [m_{n-1}] & [O] \\ [O] & [O] & [O] & \cdots & [O] & [m_n] \end{array} \qquad (12)$$

که در آن

$$[m_i] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & R_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & I_{moi} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ R_z \end{array}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## I. معادله‌های حرکت سیستم MDOF

ماتریس سختی کل سازه به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$[k]_{3n\times 3n}=\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1\ 2\ 3 & 4\ 5\ 6 & 7\ 8\ 9 & \cdots & 3(n-1)-2\ \ 3(n-1)-1\ \ 3(n-1) & 3(n)-2\ \ 3(n)-1\ \ 3(n) \\
1\ 2\ 3 & [k_1]+[k_2] & -[k_2] & [O] & \cdots & [O] & [O] \\
4\ 5\ 6 & -[k_2] & [k_2]+[k_3] & -[k_3] & \cdots & [O] & [O] \\
7\ 8\ 9 & [O] & -[k_3] & [k_3]+[k_4] & \cdots & [O] & [O] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
3(n-1)-2\ \ 3(n-1)-1\ \ 3(n-1) & [O] & [O] & [O] & \cdots & [k_{n-1}]+[k_n] & -[k_n] \\
3(n)-2\ \ 3(n)-1\ \ 3(n) & [O] & [O] & [O] & \cdots & -[k_n] & [k_n]
\end{array} \qquad (13)$$

که در آن

$$k\begin{pmatrix} & 3i-2 & 3i-1 & 3i \\ 3i-2 & & & \\ 3i-1 & & & \\ 3i & & & \end{pmatrix}=\begin{cases}[k_i]+[k_{i+1}] & (i=1,2,3,\cdots,n-1)\\ [k_i] & (i=n)\end{cases}$$

$$k\begin{pmatrix} & 3(i+1)-2 & 3(i+1)-1 & 3(i+1) \\ 3i-2 & & & \\ 3i-1 & & & \\ 3i & & & \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} & 3i-2 & 3i-1 & 3i \\ 3(i+1)-2 & & & \\ 3(i+1)-1 & & & \\ 3(i+1) & & & \end{pmatrix}=-[k_{i+1}]$$

$$k\begin{pmatrix} & 3(j)-2 & 3(j)-1 & 3(j) \\ 3i-2 & & & \\ 3i-1 & & & \\ 3i & & & \end{pmatrix}=[O] \quad : \quad if\ \ j\neq i\,,i+1$$

$$[k_i]=\begin{array}{c|ccc|}
 & x & y & R_Z \\
x & \sum k_{xi} & 0 & -\sum k_{xi}\cdot e_{xi} \\
y & 0 & \sum k_{y_i} & \sum k_{y_i}\cdot e_{y_i} \\
R_Z & -\sum k_{xi}\cdot e_{xi} & \sum k_{y_i}\cdot e_{y_i} & \sum k_{xi}\cdot {e_{xi}}^2+\sum k_{y_i}\cdot {e_{y_i}}^2
\end{array}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## I. معادله‌های حرکت سیستم MDOF

ماتریس میرایی کل سازه مشابه با ماتریس سختی به دست می‌آید:

$$
[c]_{3n\times 3n}=\begin{array}{c}
 \\ 1\ 2\ 3 \\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9 \\ \vdots \\ 3(n-1)-2\ \ 3(n-1)-1\ \ 3(n-1) \\ 3(n)-2\ \ 3(n)-1\ \ 3(n)
\end{array}
\begin{array}{cccccc}
1\ 2\ 3 & 4\ 5\ 6 & 7\ 8\ 9 & \cdots & 3(n-1)-2\ \ 3(n-1)-1\ \ 3(n-1) & 3(n)-2\ \ 3(n)-1\ \ 3(n) \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
[c_1]+[c_2] & -[c_2] & [O] & \cdots & [O] & [O] \\
-[c_2] & [c_2]+[c_3] & -[c_3] & \cdots & [O] & [O] \\
[O] & -[c_3] & [c_3]+[c_4] & \cdots & [O] & [O] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
[O] & [O] & [O] & \cdots & [c_{n-1}]+[c_n] & -[c_n] \\
[O] & [O] & [O] & \cdots & -[c_n] & [c_n]
\end{array}\right] \qquad (14)
$$

که در آن

$$
c\begin{pmatrix} & 3i-2 & 3i-1 & 3i \\ 3i-2 & & & \\ 3i-1 & & & \\ 3i & & & \end{pmatrix}=\begin{cases} [c_i]+[c_{i+1}] & (i=1,2,3,\cdots,n-1) \\ [c_i] & (i=n) \end{cases}
$$

$$
c\begin{pmatrix} & 3(i+1)-2 & 3(i+1)-1 & 3(i+1) \\ 3i-2 & & & \\ 3i-1 & & & \\ 3i & & & \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} & 3i-2 & 3i-1 & 3i \\ 3(i+1)-2 & & & \\ 3(i+1)-1 & & & \\ 3(i+1) & & & \end{pmatrix}=-[c_{i+1}]
$$

$$
c\begin{pmatrix} & 3(j)-2 & 3(j)-1 & 3(j) \\ 3i-2 & & & \\ 3i-1 & & & \\ 3i & & & \end{pmatrix}=[O] \ :\ \ if\ \ j\neq i\,,i+1
$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

معادله ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی با استفاده از رابطه (7) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{[m]\{\ddot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{O\}} \quad (15)$$

به کمک روابط ریاضی پاسخ معادله فوق به صورت زیر است:

$\{a\}$ : بیانگر شکل ارتعاش سیستم است که شکل آن با زمان تغییر نمی‌کند و فقط دامنه آن متغیر است

$\omega$ : فرکانس ارتعاش سیستم.

$\theta$ : زاویه فاز.

$$\boxed{\{x(t)\}=\{a\}\sin(\omega t+\theta)} \quad (16)$$

اگر به این نتیجه رسیدیم که بردار$\{a\}$ها، $\omega$ ها و $\theta$های متعددی در معادله صدق می‌کند یعنی $\{a\}_i \sin(\omega_i t+\theta_i)$های متعددی جواب باشند، ریاضی می‌گوید که پاسخ کلی جمع همه آن‌ها می‌باشد.

با گرفتن مشتق دوم از رابطه (16) بردار شتاب به دست می‌آید:

$$(16) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{\ddot{x}(t)\}=-\omega^2\{a\}\sin(\omega t+\theta)} \quad (17)$$

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

با جایگذاری رابطه‌های (16) و (17) در رابطه (15) خواهیم داشت:

$$-\omega^2[m]\{a\}\cancel{\sin}(\omega t+\theta)+[k]\{a\}\cancel{\sin}(\omega t+\theta)=\{O\} \;\Rightarrow\; \boxed{\left([k]-\omega^2[m]\right)\{a\}=\{O\}} \quad (18)$$

حل این نوع معادله‌ها یکی از مسئله‌های مهم ریاضی به نام **مسئله مقدار ویژه** ( **Eigen Value Problem** ) است.

برای غیرصفر بودن بردار $\{a\}$ باید دترمینان $\left|[k]-\omega^2[m]\right|$ صفر باشد. به عبارت دیگر ارتعاش آزاد با دامنه محدود فقط زمانی امکان‌پذیر است که

$$\boxed{\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0} \quad (19)$$

رابطه (19) معادله فرکانس نامیده می‌شود.

البته صفر بودن دترمینان باعث وابسته شدن $a_i$ ها (درایه‌های بردار $\{a\}$ ) می‌گردد. در این حالت با انتخاب دلخواه یکی از $a_i$ها درایه‌های دیگر آن را به دست می‌آوریم.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

اگر رابطه (19) در یک سیستمی که دارای n درجه آزادی است بسط داده شود، یک معادله جبری از مرتبه n با پارامتر مجهول $\omega^2$ به دست خواهد آمد.

$$(19) \quad \Rightarrow \quad \left|[k]-\omega^2[m]\right|=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \omega_1{}^2 \\ \omega_2{}^2 \\ \omega_3{}^2 \\ \vdots \\ \omega_n{}^2 \end{Bmatrix}_{n\times 1}$$

n ریشه معادله (19) یعنی $\omega_1{}^2, \omega_2{}^2, \omega_3{}^2, \cdots, \omega_n{}^2$ نشان دهنده فرکانس‌های n مود ارتعاشی ( شکل ارتعاش سیستم) هستند که می‌توانند در سیستم به وجود آیند. تعداد فرکانس‌ها برابر با تعداد درجه‌های آزادی سیستم می‌باشد.

اگر جذر ریشه‌های رابطه (19) را در نظر بگیریم بردار فرکانس $\{\omega\}$ به دست می‌آید:

$$\boxed{\{\omega\}_{n\times 1}=\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \end{Bmatrix}} \quad (20)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

$$\boxed{\begin{gathered}\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_n \\ or \\ T_1 > T_2 > T_3 > \cdots > T_n\end{gathered}}$$

مودی از ارتعاش که دارای کوچکترین فرکانس (بزرگترین پریود) است مود اول نامیده می‌شود به همین ترتیب فرکانس بزرگتر (پریود کوچکتر) از آن را مود دوم می‌گویند و الی آخر:

برای ماتریس‌های جرم و سختی مثبت- معین، متقارن و حقیقی در سازه‌های پایدار، می‌توان ثابت کرد که کلیه ریشه‌های معادله فرکانس، حقیقی و مثبت می‌باشند.

پس از محاسبه فرکانس‌ها (مقادیر ویژه)، با قرار دادن تک تک آن‌ها در معادله (18)، می‌توان شکل ارتعاش سیستم (بردار ویژه متناظر) را در آن مود خاص پیدا کرد. از آن جا که ماتریس ضرایب معادله (18) یعنی $\left([k]-\omega^2[m]\right)$ به فرکانس بستگی دارد بنابراین برای هر مود متفاوت است.

$$(18) \quad \Rightarrow \quad \left([k]-\omega_i^{\,2}[m]\right)\{a\}_i = \{O\} \quad \Rightarrow \quad \{a\}_i$$

برای $\omega$ های مختلف، $\{a\}$ های مختلف به دست می‌آید.

$$\boxed{\begin{array}{cccc}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{a\}_1, & \{a\}_2, & \{a\}_3, \cdots, & \{a\}_n\end{array}}$$

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

چون مقدار مطلق دامنه ارتعاش‌ها نامعین است، n-1 مولفه تغییر مکان بر حسب یک مولفه اختیاری محاسبه خواهند شد؛ یعنی شکل ارتعاش سیستم را می‌توان از طریق حل کردن کلیه تغییرمکان‌ها بر حسب یکی از مولفه‌های آن به دست آورد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که فقط نسبت‌های تغییرمکان را می‌توان تعیین کرد.

به خاطر راحتی کار، معمولا با تقسیم کردن کلیه مولفه‌ها به یکی از مولفه‌های مبنا ( مولفه مربوط به طبقه بام) بردار تغییرمکان را به صورت بدون بُعد بیان می‌کنند. بردار حاصل را بردار شکل مود i اُم می‌نامند.

$$\boxed{\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{ni}} \begin{Bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{Bmatrix}} \quad (21)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

هر یک از بردارهای $\{\phi\}_i$را بردار مودال می‌نامند. بردار مودال شکل ارتعاش سازه در یک فرکانس خاص را نشان می‌دهد. به طور مثال $\{\phi\}_1$ شکل ارتعاش سازه نظیر فرکانس $\omega_1$ است. ماتریس مودال سازه که شامل تمام مودهای سازه می‌باشد به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$[\Phi]_{n\times n} = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \{\phi\}_3 \quad \cdots \quad \{\phi\}_n] \Rightarrow$$

$$\boxed{[\Phi]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (22)}$$

$[\Phi]$: ماتریس مودال

$\phi_{ij}$ : شکل ارتعاش طبقه i اُم در مود j اُم

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

- پاسخ سازه ترکیبی از تمام مودها است.
- مودی که بیشترین تاثیر را بر روی پاسخ، در نتیجه بر روی تنش‌ها دارد، فرکانس مربوط به آن مود فرکانس غالب است.
- در سازه‌های نامتقارن ممکن است هر یک از مودها غالب باشند.
- معمولا مود اول را مود وابسطه به کوچکترین فرکانس می‌نامند. می‌توان نشان داد که انرژی ذخیره شده در مود حاکم، بیشترین مقدار را دارد؛ زیرا در مودهای پایین‌تر چون فرکانس کمتر است امکان جذب انرژی بیشتر می‌باشد.
- در حل معادله‌های دیفرانسیل در مورد خطی یا غیرخطی بودن مصالح حرفی زده نشد. اما از آن جا که ماتریس سختی مورد استفاده ما ثابت است یعنی در محدوده خطی هستیم.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**( Eigen Value Problem ) مسئله مقدار ویژه**

$$(18)\ \overset{\times[m]^{-1}}{\Rightarrow}\ \boxed{\left([m]^{-1}[k]-\omega^2[I]\right)\{a\}=\{O\}}\ (23)$$

$[I]$: ماتریس واحد

Eigen Value of [B] :

Eigen Vector of [B] :

$$if\ \begin{cases}[B]=[m]^{-1}[k]\\ \lambda=\omega^2\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$[\lambda]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$$

(مقدار ویژه)

$$[a]=[\{a\}_1\quad \{a\}_2\quad \{a\}_3\quad \cdots\quad \{a\}_n]$$

(بردار ویژه)

**eig()** function in Matlab

$$\boxed{[a\quad \lambda]=eig(B)}$$

```
[a Landa]=eig(inv(m)*k);
omega=sqrt(Landa);
for i=1:n
   a(:,i)= a(:,i)/a(n,i);
end
  phi=a
```

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

تغییر شکل سازه ترکیبی از ارتعاش‌های سازه در فرکانس‌های مختلف خواهد بود.

$$(16)\quad \{x(t)\}=\{a\}_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)+\{a\}_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)+\cdots+\{a\}_n\sin(\omega_n t+\theta_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\{x(t)\}=\sum_{i=1}^{n}\{a\}_i\sin(\omega_i t+\theta_i)} \quad (24)$$

$$(21)\ \&\ (24) \quad \Rightarrow \quad \{x(t)\}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\{\phi\}_i\sin(\omega_i t+\theta_i) \quad \Rightarrow \boxed{\{x(t)\}=\sum_{i=1}^{n}A_i\{\phi\}_i\sin(\omega_i t+\theta_i)} \quad (25)$$

$A_i$ : ضریب اصلاح

پارامترهای $\theta_i$ و $A_i$ با استفاده از شرایط اولیه به دست می‌آید.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## .II ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت:

$$\boxed{@\quad t=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \{x(0)\} = \{x_{01} \quad x_{02} \quad x_{03} \quad \cdots \quad x_{0n}\}^T \\ \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_{01} \quad \dot{x}_{02} \quad \dot{x}_{03} \quad \cdots \quad \dot{x}_{0n}\}^T \end{array}} \quad (26)$$

$$(25)\ \&\ (26) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{Bmatrix} = A_1 \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{Bmatrix} \sin(\theta_1) + A_2 \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{Bmatrix} \sin(\theta_2) + A_3 \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \\ \vdots \\ \phi_{n3} \end{Bmatrix} \sin(\theta_3) + \cdots + A_n \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{Bmatrix} \sin(\theta_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_{01} = \phi_{11} A_1 \sin(\theta_1) + \phi_{12} A_2 \sin(\theta_2) + \phi_{13} A_3 \sin(\theta_3) + \cdots \phi_{1n} A_n \sin(\theta_n) \\ x_{02} = \phi_{21} A_1 \sin(\theta_1) + \phi_{22} A_2 \sin(\theta_2) + \phi_{23} A_3 \sin(\theta_3) + \cdots \phi_{2n} A_n \sin(\theta_n) \\ x_{03} = \phi_{31} A_1 \sin(\theta_1) + \phi_{32} A_2 \sin(\theta_2) + \phi_{33} A_3 \sin(\theta_3) + \cdots \phi_{3n} A_n \sin(\theta_n) \\ \qquad\vdots \\ x_{0n} = \phi_{n1} A_1 \sin(\theta_1) + \phi_{n2} A_2 \sin(\theta_2) + \phi_{n3} A_3 \sin(\theta_3) + \cdots \phi_{nn} A_n \sin(\theta_n) \end{array}} \quad (27)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

$$(27) \Rightarrow \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \sin(\theta_1) \\ A_2 \sin(\theta_2) \\ A_3 \sin(\theta_3) \\ \vdots \\ A_n \sin(\theta_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{[\Phi]\{A \sin(\theta)\} = \{x(0)\}} \quad (28)$$

$$(28) \Rightarrow \boxed{\{A \sin(\theta)\} = [\Phi]^{-1}\{x(0)\}} \quad (29)$$

$$if \quad \boxed{\{\alpha\} = [\Phi]^{-1}\{x(0)\} \overset{(29)}{\Rightarrow} A_i \sin(\theta_i) = \alpha_i} \quad (30)$$

---

$$(25) \Rightarrow \boxed{\{\dot{x}(t)\} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i \{\phi\}_i \cos(\omega_i t + \theta_i)} \quad (31)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

(26) & (31) $\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{01} \\ \dot{x}_{02} \\ \dot{x}_{03} \\ \vdots \\ \dot{x}_{0n} \end{Bmatrix} = \omega_1 A_1 \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{Bmatrix} \cos(\theta_1) + \omega_2 A_2 \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{Bmatrix} \cos(\theta_2) + \omega_3 A_3 \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \\ \vdots \\ \phi_{n3} \end{Bmatrix} \cos(\theta_3) + \cdots + \omega_n A_n \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{Bmatrix} \cos(\theta_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_{01} &= \phi_{11}\omega_1 A_1 \cos(\theta_1) + \phi_{12}\omega_2 A_2 \cos(\theta_2) + \phi_{13}\omega_3 A_3 \cos(\theta_3) + \cdots \phi_{1n}\omega_n A_n \cos(\theta_n) \\ \dot{x}_{02} &= \phi_{21}\omega_1 A_1 \cos(\theta_1) + \phi_{22}\omega_2 A_2 \cos(\theta_2) + \phi_{23}\omega_3 A_3 \cos(\theta_3) + \cdots \phi_{2n}\omega_n A_n \cos(\theta_n) \\ \dot{x}_{03} &= \phi_{31}\omega_1 A_1 \cos(\theta_1) + \phi_{32}\omega_2 A_2 \cos(\theta_2) + \phi_{33}\omega_3 A_3 \cos(\theta_3) + \cdots \phi_{3n}\omega_n A_n \cos(\theta_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{0n} &= \phi_{n1}\omega_1 A_1 \cos(\theta_1) + \phi_{n2}\omega_2 A_2 \cos(\theta_2) + \phi_{n3}\omega_3 A_3 \cos(\theta_3) + \cdots \phi_{nn}\omega_n A_n \cos(\theta_n) \end{aligned}} \quad (32)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

**II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی**

$$(32)\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1n}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2n}\\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \cdots & \phi_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \cdots & \phi_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \omega_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \omega_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\cos(\theta_1)\\ A_2\cos(\theta_2)\\ A_3\cos(\theta_3)\\ \vdots\\ A_n\cos(\theta_n)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{x}_{01}\\ \dot{x}_{02}\\ \dot{x}_{03}\\ \vdots\\ \dot{x}_{0n}\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{[\Phi][\omega]\{A\cos(\theta)\}=\{\dot{x}(0)\}}\quad(33)$$

$$(33)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\{A\cos(\theta)\}=[\omega]^{-1}[\Phi]^{-1}\{\dot{x}(0)\}}\quad(34)$$

$$if\quad\boxed{\{\beta\}=[\omega]^{-1}[\Phi]^{-1}\{\dot{x}(0)\}\quad\overset{(34)}{\Rightarrow}\quad A_i\cos(\theta_i)=\beta_i}\quad(35)$$

$$(30)\ \&\ (35)\quad\Rightarrow\quad\tan(\theta_i)=\frac{\alpha_i}{\beta_i}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\theta_i=\tan^{-1}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)\quad\&\quad A_i=\frac{\alpha_i}{\sin(\theta_i)}}\quad(36)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**مثال 1-** پاسخ ارتعاش آزاد سازه بدون میرایی نشان داده شده در شکل زیر را با توجه به شرایط اولیه آن به دست آورید.

$m_3 = 1\ (ton)$

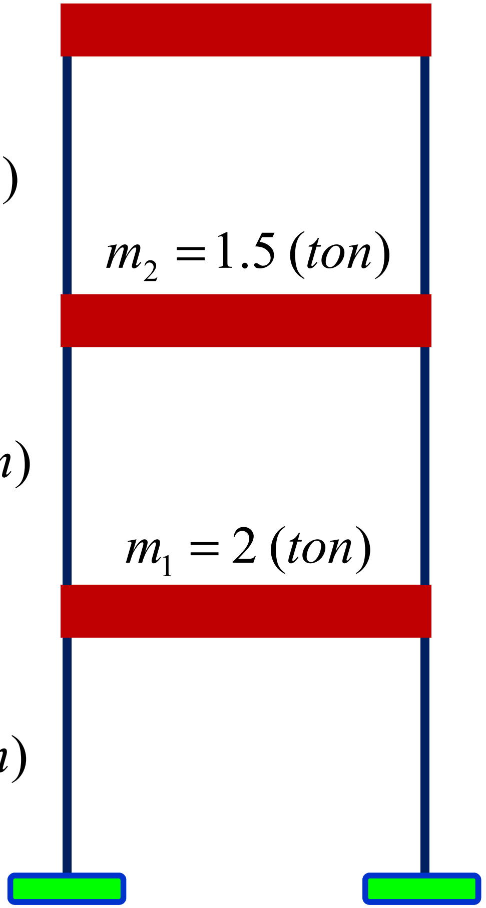
$k_3 = 600\ (kN/m)$

$m_2 = 1.5\ (ton)$

$k_2 = 1200\ (kN/m)$

$m_1 = 2\ (ton)$

$k_1 = 1800\ (kN/m)$



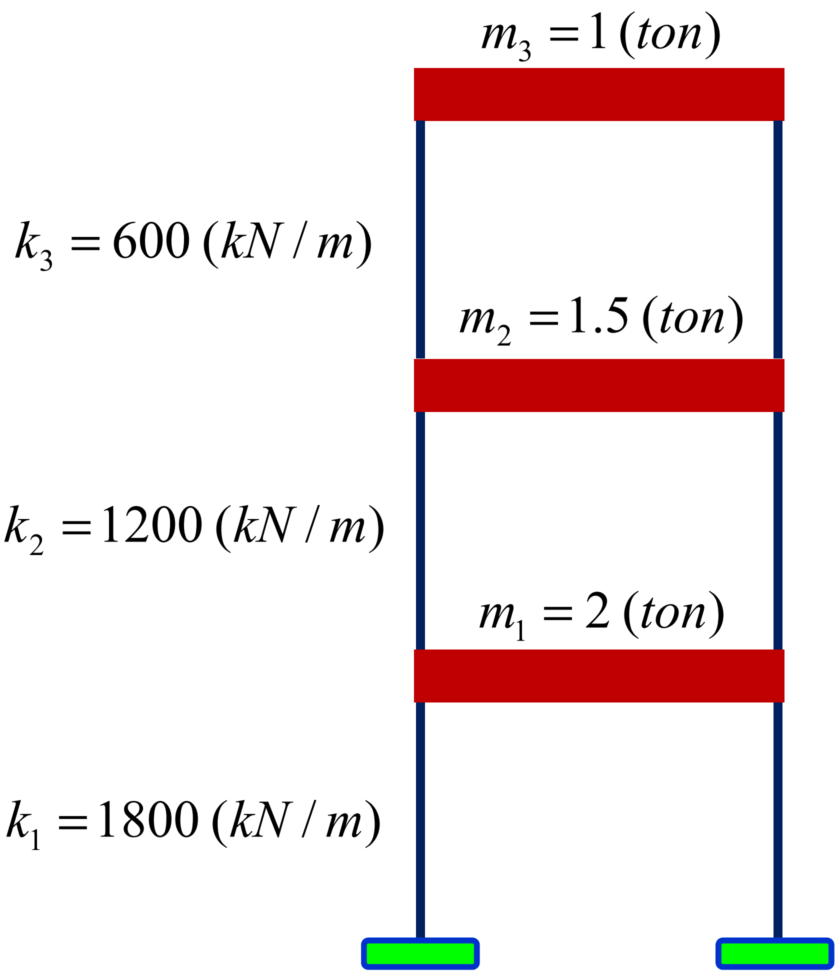
$$\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.015 \\ 0.02 \end{Bmatrix} \quad (m)$$

$$\{\dot{x}_0\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \\ 0.06 \end{Bmatrix} \quad (m/s)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**حل مثال 1-**



# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**حل مثال 1-**

$$\begin{vmatrix} 5-\dfrac{\omega^2}{600}(2) & -2 & 0 \\ -2 & 3-\dfrac{\omega^2}{600}(1.5) & -1 \\ 0 & -1 & 1-\dfrac{\omega^2}{600} \end{vmatrix} \cdot (600\times 10^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 5-\dfrac{\omega^2}{600}(2) & -2 & 0 \\ -2 & 3-\dfrac{\omega^2}{600}(1.5) & -1 \\ 0 & -1 & 1-\dfrac{\omega^2}{600} \end{vmatrix} = 0$$

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**حل مثال 1-**

$$\lambda^3 - 5.5\lambda^2 + 7.5\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0.351 & \overset{\omega=\sqrt{600\lambda}}{\Rightarrow} & \omega_1 = 14.52\ (rad/\sec) \\ \lambda_2 = 1.61 & \Rightarrow & \omega_2 = 31.05\ (rad/\sec) \\ \lambda_3 = 3.54 & \Rightarrow & \omega_3 = 46.10\ (rad/\sec) \end{cases}$$

صعودی

بردار فرکانس

ماتریس فرکانس

$$\Rightarrow \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.52 \\ 31.05 \\ 46.10 \end{Bmatrix} \quad or \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 14.52 & 0 & 0 \\ 0 & 31.05 & 0 \\ 0 & 0 & 46.10 \end{bmatrix}$$

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## .II    ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**حل مثال 1-**

$$(18)\quad \Rightarrow \quad \left([k]-\omega^2[m]\right)\{a\}=\{O\} \quad \Rightarrow \quad (600\times10^3)\begin{bmatrix} 5-2\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-1.5\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\{a\}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 5-2\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-1.5\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\{a\}=0}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## .II ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**حل مثال 1-**

$$if \quad \lambda = \lambda_2 = 1.61 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5-2(1.61) & -2 & 0 \\ -2 & 3-1.5(1.61) & -1 \\ 0 & -1 & 1-(1.61) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1.787a_{12} - 2a_{22} = 0 \\ -2a_{12} + 0.59a_{22} - a_{32} = 0 \\ -a_{22} - 0.61a_{32} = 0 \end{cases}$$

$$if \quad a_{32} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -a_{22} - 0.61(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{22} = -0.61 \\ 1.787a_{12} - 2(-0.61) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = -0.679 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{a\}_2 = \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -0.679 \\ -0.61 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

---

$$if \quad \lambda = \lambda_3 = 3.54 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5-2(3.54) & -2 & 0 \\ -2 & 3-1.5(3.54) & -1 \\ 0 & -1 & 1-(3.54) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2.084a_{13} - 2a_{23} = 0 \\ -2a_{13} - 2.313a_{23} - a_{33} = 0 \\ -a_{23} - 2.542a_{33} = 0 \end{cases}$$

$$if \quad a_{33} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -a_{23} - 2.542(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{23} = -2.542 \\ -2.084a_{13} - 2(-2.542) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{13} = 2.4396 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{a\}_3 = \{\phi\}_3 = \begin{Bmatrix} 2.4396 \\ -2.542 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

### حل مثال 1-

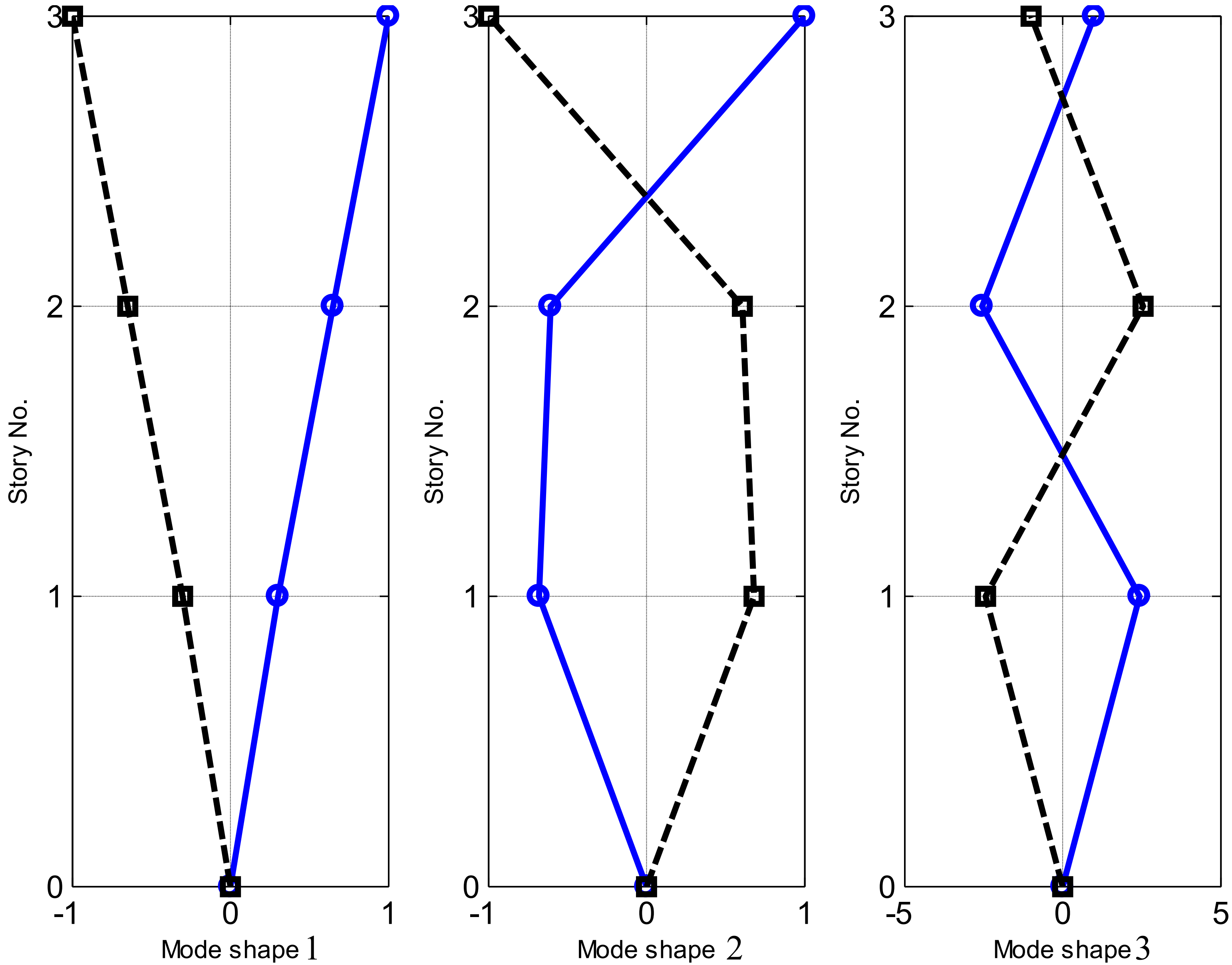
$$[\Phi]=[\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \{\phi\}_3] \Rightarrow \boxed{[\Phi]=\begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

| | مود اول | مود دوم | مود سوم |
|---|---|---|---|
| فرکانس زاویه‌ای $\omega$ $(rad/s)$ | 14.52 | 31.05 | 46.10 |
| دوره تناوب $T=2\pi/\omega$ $(s)$ | 0.43 | 0.20 | 0.14 |
| فرکانس $f=1/T$ $(1/s)$ | 2.31 | 4.94 | 7.33 |

# MDOF: Solution of Motion Equations

## .II ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

حل مثال 1-




نمودار شکل مودهای سازه سه طبقه

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

### حل مثال 1-

## Matlab Code

```
clc
clear
format short g
m=diag([2 1.5 1])
k0=[1800 1200 600];
n=length(m);
k=zeros(n,n);
for i=1:n
   if i<n
      k(i,i)=k0(i)+k0(i+1);
      k(i,i+1)=-k0(i+1);
      k(i+1,i)=-k0(i+1);
   else
      k(i,i)=k0(i)
   end
end
[phi bb]=eig(inv(m)*k)
omega=sqrt(bb)
for i=1:n
   phi(:,i)= phi(:,i)/phi(n,i);
end
ModeShape=zeros(n,n);
frequency=zeros(n,n);
omegav=diag(omega);
.
.
.
```

```
.
.
.
for i=1:n
   [frequency(i,i), z]=min(omegav);
   ModeShape(:,i)=phi(:,z);
   sum=0;
   for j=1:length(omegav)
      if j==z
      else
         sum=sum+1;
         omegad(sum)=omegav(j);
         phid(:,sum)=phi(:,j);
      end
   end
   clear omegav phi
   omegav=omegad;
   phi=phid;

   if length(omegav)>1
      clear omegad phid
   end
end
Frequency=sort(diag(sqrt(bb))/(2*pi))
Period=1./Frequency
MS(1,1:n)=0;
MS(2:n+1,:)=ModeShape;
for i=1:n
   subplot(1,n,i),plot(MS(:,i),(0:n),'marker','o','LineWidth',2)
   hold on
   subplot(1,n,i),plot(-MS(:,i),(0:n),'--K','marker','s','LineWidth',2)
   xlabel('Mode shape','FontSize',8)
   ylabel('Story No.','FontSize',8)
   grid
   hold off
end
```

# MDOF: Solution of Motion Equations

**II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی**

**حل مثال 1-**

$$= \begin{bmatrix} 0.332 & 0.536 & 0.551 \\ -0.548 & -0.367 & 0.404 \\ 0.215 & -0.168 & 0.044 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.015 \\ 0.02 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \sin(\theta_1) \\ A_2 \sin(\theta_2) \\ A_3 \sin(\theta_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.022408 \\ -0.002916 \\ 0.00051335 \end{Bmatrix}}$$

---

$$\Rightarrow \boxed{\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \cos(\theta_1) \\ A_2 \cos(\theta_2) \\ A_3 \cos(\theta_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0042153 \\ -4.628\times10^{-5} \\ 4.8673\times10^{-6} \end{Bmatrix}}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**حل مثال 1-**

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0.002916}{-4.628\times10^{-5}}\right) \Rightarrow \boxed{\theta_2 = 1.555\,(rad)}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_3}{\beta_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.00051335}{4.8673\times10^{-6}}\right) \Rightarrow \boxed{\theta_3 = 1.561\,(rad)}$$

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{\sin(\theta_2)} = \frac{-0.002916}{\sin(1.555^{rad})} \Rightarrow \boxed{A_2 = -29.22\times10^{-4}}$$

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{\sin(\theta_3)} = \frac{0.00051335}{\sin(1.561^{rad})} \Rightarrow \boxed{A_3 = 5.1337\times10^{-4}}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

**حل مثال 1-**

$$(25) \quad \Rightarrow \quad \{x(t)\} = \sum_{i=1}^{n} A_i \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = 228\times10^{-4} \begin{Bmatrix} 0.302 \\ 0.649 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(14.52t + 1.385)$$

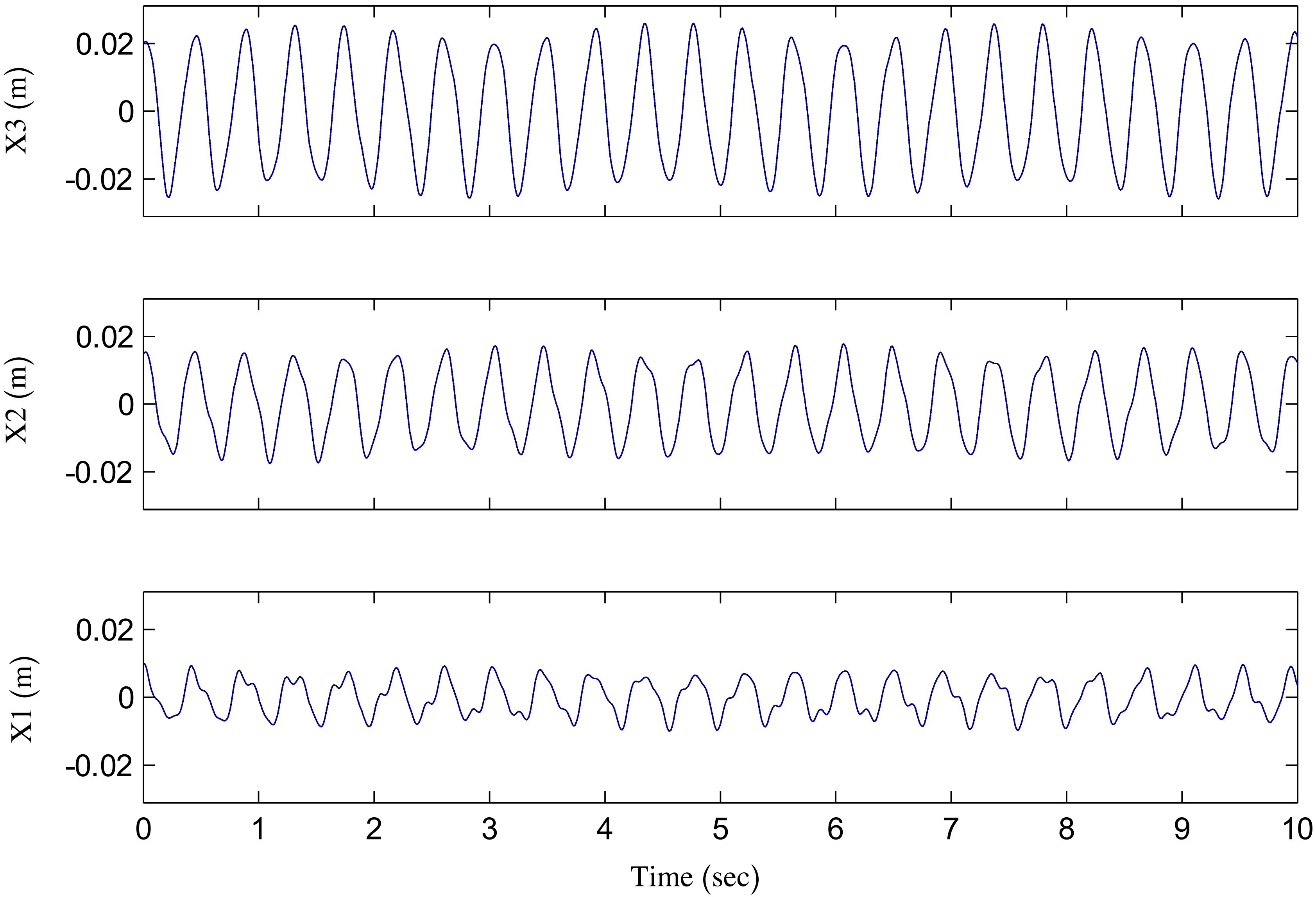
$$-29.22\times10^{-4} \begin{Bmatrix} -0.679 \\ -0.61 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(31.05t + 1.555)$$

$$+5.1337\times10^{-4} \begin{Bmatrix} 2.4396 \\ -2.542 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(46.10t + 1.561)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## II. ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

حل مثال 1-




پاسخ ارتعاش آزاد سازه سه طبقه

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## .II    ارتعاش آزاد سیستم MDOF بدون میرایی

### حل مثال 1-

## Matlab Code

```
clc
clear
format short g
n=3;
m=diag([2 1.5 1])
k0=[1800 1200 600];
x0=[0.01;0.015;0.02];
v0=[0.02;0.04;0.06];
k=zeros(n,n);
for i=1:n
   if i<n
      k(i,i)=k0(i)+k0(i+1);
      k(i,i+1)=-k0(i+1);
      k(i+1,i)=-k0(i+1);
   else
      k(i,i)=k0(i)
   end
end
[phi bb]=eig(inv(m)*k)
omega=sqrt(bb)
for i=1:n
   phi(:,i)= phi(:,i)/phi(n,i);
end
.
.
.
```

```
.
.
.
phi=[0.30185 -0.67898 2.4396;0.64854 -0.6066 -2.5419;1 1 1]
alpha=inv(phi)*x0
omega=[omega(3,3) 0 0;0 omega(2,2) 0; 0 0 omega(1,1)]
beta=inv(omega)*inv(phi)*v0
for i=1:3
   teta(i)=atan(alpha(i)/beta(i));
   A(i)=alpha(i)/sin(teta(i));
end
t=0:0.01:10;
for i=1:length(t)

x(1:3,i)=A(1)*phi(:,1)*sin(omega(1,1)*t(i)+teta(1))+A(2)*phi(:,2)*sin(......omega(2,2)*t(i)+teta(2))+A(3)*phi(:,3)*sin
(omega(3,3)*t(i)+teta(3));
end
LB=min(min(x));
UB=max(max(x));
for i=1:3
   subplot(3,1,i),plot(t,x(4-i,:));
   xlabel('time [sec]', 'FontSize',8)
   ylabel('Displacement','FontSize',8)
   axis([0 10 1.2*LB 1.2*UB])
end
```

# MDOF: Solution of Motion Equations

## III. شرایط تعامد (Orthogonality Conditions)

### قطری کردن ماتریس‌های جرم و سختی

اگر رفتار سازه خطی باشد، می‌توانیم معادله‌های نهایی را به معادله‌هایی با یک مجهول در هر معادله، تبدیل کنیم. غیر قطری بودن ماتریس سختی منجر به همبسته شدن (Coupled) معادله‌ها می‌گردد. بنابراین با قطری کردن ماتریس‌های سختی و جرم، معادله‌ها غیر همبسته (Uncoupled) می‌شوند.

در شرایط تعامد روابط زیر برقرار است:

$$\boxed{\begin{aligned} \{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_m &= 0 \quad , \quad if \quad n \neq m \\ \{\phi\}_n^T[k]\{\phi\}_m &= 0 \quad , \quad if \quad n \neq m \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(37a) \\ &(37b) \end{aligned}$$

اثبات:

$$(18) \quad \Rightarrow \quad \left([k]-\omega_i^2[m]\right)\{\phi\}_i = \{O\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[k]\{\phi\}_i = \omega_i^2[m]\{\phi\}_i} \quad (38)$$

# MDOF: Solution of  Motion Equations

### III. شرایط تعامد (Orthogonality Conditions)

### قطری کردن ماتریس‌های جرم و سختی

رابطه (38) را یک بار برای مود n اُم و یک بار برای مود m اُم می‌نویسیم:

$$(38) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} [k]\{\phi\}_n = \omega_n^{\,2}[m]\{\phi\}_n \\ [k]\{\phi\}_m = \omega_m^{\,2}[m]\{\phi\}_m \end{array}} \quad \begin{array}{l}(39a)\\(39b)\end{array}$$

طرفین رابطه‌ی (39a) را در $\{\phi\}_m^{\,T}$ ضرب می‌کنیم

$$(39a) \quad \Rightarrow \quad \{\phi\}_m^{\,T}[k]\{\phi\}_n = \omega_n^{\,2}\{\phi\}_m^{\,T}[m]\{\phi\}_n \quad \underset{(A.B)^T = B^T.A^T}{\overset{Transpose}{\Longrightarrow}} \quad \boxed{\{\phi\}_n^{\,T}[k]\{\phi\}_m = \omega_n^{\,2}\{\phi\}_n^{\,T}[m]\{\phi\}_m} \quad (40)$$

همچنین طرفین رابطه‌ی (39b) را در $\{\phi\}_n^{\,T}$ ضرب می‌کنیم

$$(39b) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{\phi\}_n^{\,T}[k]\{\phi\}_m = \omega_m^{\,2}\{\phi\}_n^{\,T}[m]\{\phi\}_m} \quad (41)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## III. شرایط تعامد (Orthogonality Conditions)

**قطری کردن ماتریس‌های جرم و سختی**

$$(40),(41) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\omega_n^2 - \omega_m^2)\{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_m = \{O\}} \quad (42)$$

در رابطه‌ی (42) اگر $n \neq m$ در نتیجه $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$ پس تنها باید:

$$\boxed{\{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_m = \{O\} \qquad for \quad n \neq m}$$

رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس جرم

با جایگذاری رابطه‌ی فوق یا همان رابطه (37a) در رابطه (40) نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\{\phi\}_n^T[k]\{\phi\}_m = \{O\} \qquad for \quad n \neq m}$$

رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی

# MDOF: Solution of  Motion Equations

### III. شرایط تعامد (Orthogonality Conditions)

**قطری کردن ماتریس‌های جرم و سختی**

می‌خواهیم رابطه زیر را محاسبه نماییم

$$[M]=[\Phi]^T[m][\Phi]=\begin{bmatrix}\{\phi\}_1^T\\ \{\phi\}_2^T\\ \{\phi\}_3^T\\ \vdots\\ \{\phi\}_n^T\end{bmatrix}[m][\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \{\phi\}_3 \quad \cdots \quad \{\phi\}_n]$$

$$\Rightarrow \boxed{[M]=\begin{bmatrix}\{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_n\\ \{\phi\}_2^T[m]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_2^T[m]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_2^T[m]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_2^T[m]\{\phi\}_n\\ \{\phi\}_3^T[m]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_3^T[m]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_3^T[m]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_3^T[m]\{\phi\}_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_n\end{bmatrix}} \quad (43)$$

با توجه رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس جرم، درایه‌های غیرقطری ماتریس $[M]$ باید صفر باشد.

# MDOF: Solution of  Motion Equations

**III. شرایط تعامد (Orthogonality Conditions)**

**قطری کردن ماتریس‌های جرم و سختی**

$$(37a)\,,(43) \quad \Rightarrow \quad [M]=\begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \{\phi\}_2^T[m]\{\phi\}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \{\phi\}_3^T[m]\{\phi\}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{[M]=[\Phi]^T[m][\Phi]=\left[\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i\right]=[M_i]} \quad (44)$$

بنابراین مشاهده می‌شود که ماتریس $[M]$ با تعریف فوق قطری است.

$[M]$ **را ماتریس جرم قطری شده یا ماتریس قطری جرم می‌نامند.**

# MDOF: Solution of Motion Equations

## III. شرایط تعامد (Orthogonality Conditions)

### قطری کردن ماتریس‌های جرم و سختی

به طور مشابه می‌توان برای ماتریس سختی نیز رابطه زیر را نوشت

$$[K]=[\Phi]^T[k][\Phi]=\begin{bmatrix}\{\phi\}_1^T\\ \{\phi\}_2^T\\ \{\phi\}_3^T\\ \vdots\\ \{\phi\}_n^T\end{bmatrix}[k]\left[\{\phi\}_1\quad\{\phi\}_2\quad\{\phi\}_3\quad\cdots\quad\{\phi\}_n\right]$$

$$\Rightarrow\ \boxed{[K]=\begin{bmatrix}\{\phi\}_1^T[k]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_1^T[k]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_1^T[k]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_1^T[k]\{\phi\}_n\\ \{\phi\}_2^T[k]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_2^T[k]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_2^T[k]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_2^T[k]\{\phi\}_n\\ \{\phi\}_3^T[k]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_3^T[k]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_3^T[k]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_3^T[k]\{\phi\}_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \{\phi\}_n^T[k]\{\phi\}_1 & \{\phi\}_n^T[k]\{\phi\}_2 & \{\phi\}_n^T[k]\{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_n^T[k]\{\phi\}_n\end{bmatrix}} \quad (45)$$

با توجه رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی، درایه‌های غیرقطری ماتریس $[K]$ باید صفر باشد.

# MDOF: Solution of  Motion Equations

**III. شرایط تعامد (Orthogonality Conditions)**

**قطری کردن ماتریس‌های جرم و سختی**

$$(40)\,,(45)\quad\Rightarrow$$

$$[K]=\begin{bmatrix} \omega_1^{\,2}\{\phi\}_1^{\,T}[m]\{\phi\}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^{\,2}\{\phi\}_2^{\,T}[m]\{\phi\}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^{\,2}\{\phi\}_3^{\,T}[m]\{\phi\}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_n^{\,2}\{\phi\}_n^{\,T}[m]\{\phi\}_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{[K]=[\Phi]^T[k][\Phi]=\left[\omega_i^{\,2}\{\phi\}_i^{\,T}[m]\{\phi\}_i\right]=[K_i]}\qquad(46)$$

بنابراین مشاهده می‌شود که ماتریس $[K]$ با تعریف فوق قطری است.

**$[K]$ را ماتریس سختی قطری شده یا ماتریس قطری سختی می‌نامند.**

$$(44)\,,(46)\quad\Rightarrow\quad\boxed{K_i=\omega_i^{\,2}M_i\quad\Rightarrow\quad[K]=[\omega]^2[M]}\qquad(47)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## IV. نرمال کردن ماتریس مودال

درایه‌های بردار مودال را به جذر المان ماتریس قطری جرم متناظر تقسیم می‌کنیم تا بردار مودال نرمال به دست آید (چون مقادیر بردار نرمال وابسطه به مقداری هستند که ما انتخاب می‌کنیم عمل تقسیم مجاز است):

$$\{\bar{\phi}\}_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}}\{\phi\}_i \Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{1i} \\ \bar{\phi}_{2i} \\ \bar{\phi}_{3i} \\ \vdots \\ \bar{\phi}_{ni} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\{\bar{\phi}\}_i = \begin{Bmatrix} \dfrac{\phi_{1i}}{\sqrt{M_i}} \\ \dfrac{\phi_{2i}}{\sqrt{M_i}} \\ \dfrac{\phi_{3i}}{\sqrt{M_i}} \\ \vdots \\ \dfrac{\phi_{ni}}{\sqrt{M_i}} \end{Bmatrix}} \quad (48)$$

$\{\bar{\phi}\}_i$: بردار مودال نرمال

# MDOF: Solution of Motion Equations

## IV. نرمال کردن ماتریس مودال

با استفاده از تعریف بردار مودال می‌توان ماتریس مودال نرمال را نیز تشکیل داد

$$[\overline{\Phi}] = \left[\{\overline{\phi}\}_1 \quad \{\overline{\phi}\}_2 \quad \{\overline{\phi}\}_3 \quad \cdots \quad \{\overline{\phi}\}_n\right] \Rightarrow \boxed{[\overline{\Phi}] = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\sqrt{M_1}} & \frac{\phi_{12}}{\sqrt{M_2}} & \frac{\phi_{13}}{\sqrt{M_3}} & \cdots & \frac{\phi_{1n}}{\sqrt{M_n}} \\ \frac{\phi_{21}}{\sqrt{M_1}} & \frac{\phi_{22}}{\sqrt{M_2}} & \frac{\phi_{23}}{\sqrt{M_3}} & \cdots & \frac{\phi_{2n}}{\sqrt{M_n}} \\ \frac{\phi_{31}}{\sqrt{M_1}} & \frac{\phi_{32}}{\sqrt{M_2}} & \frac{\phi_{33}}{\sqrt{M_3}} & \cdots & \frac{\phi_{3n}}{\sqrt{M_n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\phi_{n1}}{\sqrt{M_1}} & \frac{\phi_{n2}}{\sqrt{M_2}} & \frac{\phi_{n3}}{\sqrt{M_3}} & \cdots & \frac{\phi_{nn}}{\sqrt{M_n}} \end{bmatrix}} \quad (49)$$

$[\overline{\Phi}]$: ماتریس مودال نرمال

# MDOF: Solution of Motion Equations

## IV. نرمال کردن ماتریس مودال

با استفاده از تعریف ماتریس مودال نرمال می‌توان ماتریس جرم قطری شده نرمال $\left[\overline{M}\right]$ را تشکیل داد

$$\left[\overline{M}\right]=\left[\overline{\Phi}\right]^T[m]\left[\overline{\Phi}\right]=\begin{bmatrix} \frac{\{\phi\}_1^T}{\sqrt{M_1}}[m]\frac{\{\phi\}_1}{\sqrt{M_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\{\phi\}_2^T}{\sqrt{M_2}}[m]\frac{\{\phi\}_2}{\sqrt{M_2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\{\phi\}_3^T}{\sqrt{M_3}}[m]\frac{\{\phi\}_3}{\sqrt{M_3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\{\phi\}_n^T}{\sqrt{M_n}}[m]\frac{\{\phi\}_n}{\sqrt{M_n}} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم

$$\frac{\{\phi\}_i^T}{\sqrt{M_i}}[m]\frac{\{\phi\}_i}{\sqrt{M_i}}=\frac{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i}{\sqrt{M_i}\cdot\sqrt{M_i}}=\frac{M_i}{M_i}=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left[\overline{M}\right]=\left[\overline{\Phi}\right]^T[m]\left[\overline{\Phi}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=[I]} \quad (50)$$

**در نتیجه ماتریس جرم قطری شده نرمال همان ماتریس واحد است.**

# MDOF: Solution of Motion Equations

## IV. نرمال کردن ماتریس مودال

همچنین با استفاده از تعریف ماتریس مودال نرمال می‌توان ماتریس سختی قطری شده نرمال $[\overline{K}]$ را تشکیل داد

$$[\overline{K}]=[\overline{\Phi}]^T[k][\overline{\Phi}]=\begin{bmatrix} \omega_1^2\frac{\{\phi\}_1^T}{\sqrt{M_1}}[m]\frac{\{\phi\}_1}{\sqrt{M_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2\frac{\{\phi\}_2^T}{\sqrt{M_2}}[m]\frac{\{\phi\}_2}{\sqrt{M_2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2\frac{\{\phi\}_3^T}{\sqrt{M_3}}[m]\frac{\{\phi\}_3}{\sqrt{M_3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2\frac{\{\phi\}_n^T}{\sqrt{M_n}}[m]\frac{\{\phi\}_n}{\sqrt{M_n}} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم

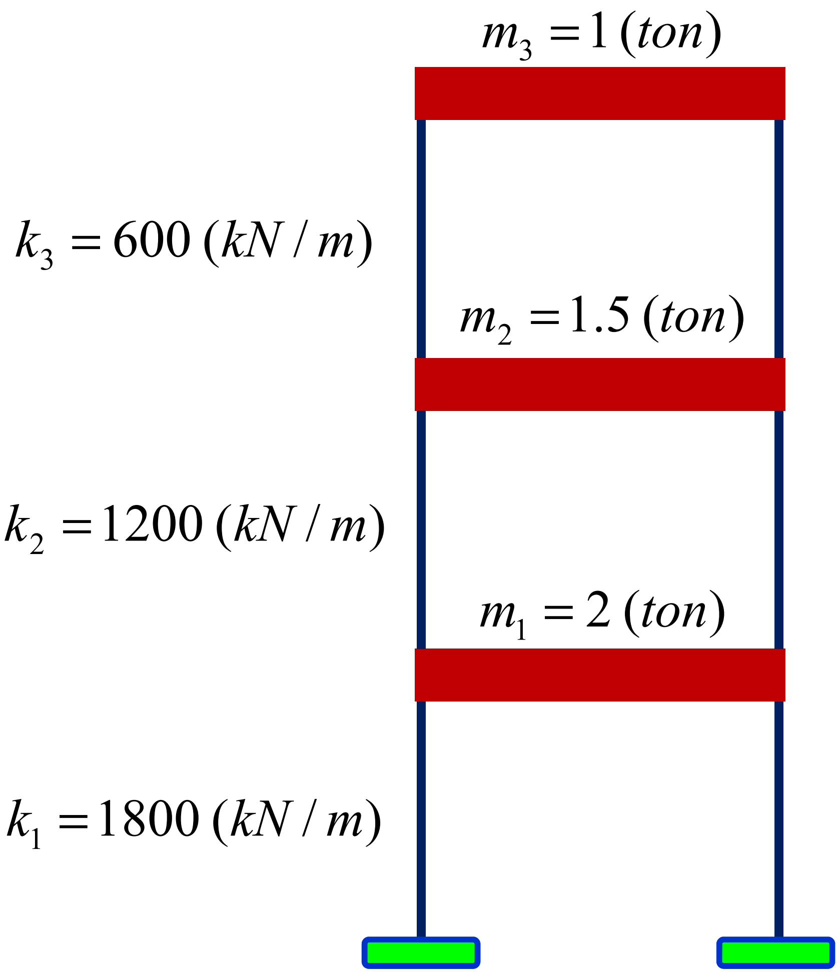
$$\omega_i^2\frac{\{\phi\}_i^T}{\sqrt{M_i}}[m]\frac{\{\phi\}_i}{\sqrt{M_i}}=\omega_i^2\frac{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i}{\sqrt{M_i}\cdot\sqrt{M_i}}=\omega_i^2\frac{M_i}{M_i}=\omega_i^2 \Rightarrow \boxed{[\overline{K}]=[\overline{\Phi}]^T[k][\overline{\Phi}]=\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}=[\omega^2]} \quad (51)$$

**در نتیجه ماتریس سختی قطری شده نرمال همان مجذور ماتریس فرکانس است.**

# MDOF: Solution of Motion Equations

## IV. نرمال کردن ماتریس مودال

**مثال 2–** ماتریس‌های جرم قطری شده، سختی قطری شده، مودال نرمال، جرم قطری شده نرمال و سختی قطری شده نرمال را محاسبه نمایید.




$$[m] = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 3000 & -1200 & 0 \\ -1200 & 1800 & -600 \\ 0 & -600 & 600 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.52 \\ 31.05 \\ 46.10 \end{Bmatrix}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## IV. نرمال کردن ماتریس مودال

**حل مثال 2-**

$$[M]=\begin{bmatrix}1813.1 & 0 & 0\\ 0 & 2474 & 0\\ 0 & 0 & 22596\end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix}382.35 & 0 & 0\\ 0 & 2384.8 & 0\\ 0 & 0 & 48020\end{bmatrix}\times 10^{3}$$

$$[\overline{\Phi}]=\begin{bmatrix}708.89 & -1365.1 & 1623\\ 1523.1 & -1219.6 & -1691\\ 2348.5 & 2010.5 & 665.26\end{bmatrix}\times 10^{-5}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## IV. نرمال کردن ماتریس مودال

حل مثال 2-

$$[\overline{M}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[I]$$

$$[\overline{K}]=\begin{bmatrix}210.88&0&0\\0&963.96&0\\0&0&2125.2\end{bmatrix}=[\omega^2]$$

**Matlab Code**

```
clc
clear
format short g
n=3;
m=diag([2 1.5 1])*1000;
k0=[1800 1200 600]*1000;
xi=0;
k=zeros(n,n);
for i=1:n
  if i<n
    k(i,i)=k0(i)+k0(i+1);
    k(i,i+1)=-k0(i+1);
    k(i+1,i)=-k0(i+1);
  else
    k(i,i)=k0(i);
  end
End
.
.
.
```

```
.
.
.
[phi bb]=eig(inv(m)*k);
omega=sqrt(bb);
for i=1:n
  phi(:,i)= phi(:,i)/phi(n,i);
End
phi=[0.30185 -0.67898 2.4396;0.64854 -0.606…
…-2.5419;1 1 1];
M=phi'*m*phi
K=phi'*k*phi
for i=1:n
  phib(:,i)= phi(:,i)/sqrt(M(i,i));
end
phib
Mb=phib'*m*phib
Kb=phib'*k*phib
```

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

### منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )

معادله حرکت سیستم MDOF بدون میرایی تحت اثر نیروی خارجی به صورت زیر است:

$$(7) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m]\{\ddot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{p(t)\}} \quad (52)$$

اگر رابطه (52) را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{Bmatrix}$$

در هر یک از معادله‌های حرکت بیش از یک متغیر موجود می‌باشد. برای جدا کردن آن‌ها و این که در هر معادله یک متغیر باشد از مختصات تعمیم‌یافته استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = p_1(t) \\ & m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_3x_3 = p_2(t) \\ \Rightarrow \quad & m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + (k_3+k_4)x_3 - k_4x_4 = p_3(t) \\ & \vdots \\ & m_n\ddot{x}_n - k_nx_{n-1} + k_nx_n = p_n(t) \end{aligned}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

**منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )**

مختصات تعمیم‌یافته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\boxed{\{x(t)\}=[\Phi]\{y(t)\}} \quad (53)$$

با جایگذاری رابطه (53) در معادله حرکت (52) خواهیم داشت:

$$(52),(53) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m][\Phi]\{\ddot{y}(t)\}+[k][\Phi]\{y(t)\}=\{p(t)\}} \quad (54)$$

طرفین رابطه (54) در $[\Phi]^T$ ضرب می‌کنیم:

$$(54) \quad \overset{\times[\Phi]^T}{\Rightarrow} \quad \boxed{[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{y}(t)\}+[\Phi]^T[k][\Phi]\{y(t)\}=[\Phi]^T\{p(t)\}} \quad (55)$$

$$(44),(46) \quad \& \quad (55) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[M]\{\ddot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=\{P(t)\}} \quad (56)$$

رابطه (56) **معادله حرکت در مختصات تعمیم** یافته نام دارد.

که در آن $\{P(t)\}$ بردار نیروی خارجی در مختصات تعمیم یافته است.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

### منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )

اگر رابطه (56) را بسط دهیم خواهیم داشت:
یعنی با استفاده از خاصیت تعامد مودها، معادله‌های همبسته MDOF را به چند معادله مستقل تبدیل کردیم که در هر یک از آن‌ها تنها یک متغیر وجود دارد.

$$(56) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M_1\ddot{y}_1 + K_1 y_1 &= P_1(t) \\ M_2\ddot{y}_2 + K_2 y_2 &= P_2(t) \\ M_3\ddot{y}_3 + K_3 y_3 &= P_3(t) \\ &\vdots \\ M_n\ddot{y}_n + K_n y_n &= P_n(t) \end{aligned}$$

بنابراین هر معادله مانند یک SDOF عمل می‌کند که با استفاده از انتگرال دوهامل می‌توان آن را حل کرد و $y_i$ را به دست آورد:

$$(56) \xrightarrow{\text{Duhamel Integral}} \boxed{\{y(t)\}_{n\times 1} = \begin{Bmatrix} y_1(t) = \dfrac{1}{M_1\omega_1}\int_0^t P_1(\tau)Sin[\omega_1(t-\tau)]\cdot d\tau \\ y_2(t) = \dfrac{1}{M_2\omega_2}\int_0^t P_2(\tau)Sin[\omega_2(t-\tau)]\cdot d\tau \\ y_3(t) = \dfrac{1}{M_3\omega_3}\int_0^t P_3(\tau)Sin[\omega_3(t-\tau)]\cdot d\tau \\ \vdots \\ y_n(t) = \dfrac{1}{M_n\omega_n}\int_0^t P_n(\tau)Sin[\omega_n(t-\tau)]\cdot d\tau \end{Bmatrix}} \quad (57)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

### منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )

با توجه به رابطه تعریف مختصات تعمیم‌یافته (53) می‌توان پاسخ سازه را به دست آورد:

$$(53),(57)\quad\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{11}y_1(t)+\phi_{12}y_2(t)+\phi_{13}y_3(t)+\cdots+\phi_{1n}y_n(t) \\ \phi_{21}y_1(t)+\phi_{22}y_2(t)+\phi_{23}y_3(t)+\cdots+\phi_{2n}y_n(t) \\ \phi_{31}y_1(t)+\phi_{32}y_2(t)+\phi_{33}y_3(t)+\cdots+\phi_{3n}y_n(t) \\ \vdots \\ \phi_{n1}y_1(t)+\phi_{n2}y_2(t)+\phi_{n3}y_3(t)+\cdots+\phi_{nn}y_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{x(t)\}=[\Phi]\{y(t)\} \quad or \quad x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}y_j(t)} \qquad (58)$$

روش فوق را روش **آنالیز مودال** ( **Modal Analysis** ) می‌نامند. روش آنالیز مودال مناسب حالتی است که نیروی خارجی داشته باشیم. اما در حالتی زلزله به میان می‌آید اگر پاسخ را برای هر لحظه محاسبه نماییم در واقع **آنالیز تاریخچه زمانی** ( **Time History Analysis** ) را انجام داده‌ایم. که آن را **روش تاریخچه زمانی مودال** می‌نامند.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

**منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )**

اگر مختصات تعمیم‌یافته به صورت زیر تعریف می‌شد:

$$\boxed{\{x(t)\}=[\overline{\Phi}]\{y(t)\}} \quad (59)$$

با جایگذاری رابطه (59) در معادله حرکت (52) خواهیم داشت:

$$(52)\,,(59) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m][\overline{\Phi}]\{\ddot{y}(t)\}+[k][\overline{\Phi}]\{y(t)\}=\{p(t)\}} \quad (60)$$

اگر به جای $[\Phi]^T$ طرفین رابطه (60) در $[\overline{\Phi}]^T$ ضرب کنیم:

$$(60) \quad \overset{\times[\overline{\Phi}]^T}{\Rightarrow} \quad \boxed{[\overline{\Phi}]^T[m][\overline{\Phi}]\{\ddot{y}(t)\}+[\overline{\Phi}]^T[k][\overline{\Phi}]\{y(t)\}=[\overline{\Phi}]^T\{p(t)\}} \quad (61)$$

$$(50)\,,(51) \quad \& \quad (61) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{\ddot{y}(t)\}+[\omega]^2\{y(t)\}=\{\overline{P}(t)\} \quad , \quad \overline{P}_i(t)=\frac{P_i(t)}{M_i}} \quad (62)$$

رابطه (62) نیز **معادله حرکت در مختصات تعمیم** یافته است که تفاوتی با رابطه (56) ندارد.

که در آن $\{\overline{P}(t)\}$ بردار نیروی خارجی در مختصات تعمیم یافته است.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

**منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )**

اگر رابطه (62) را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$
(62) \quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\ddot{y}_1 + \omega_1^{\,2} y_1 &= \frac{P_1(t)}{M_1} \\
\ddot{y}_2 + \omega_2^{\,2} y_2 &= \frac{P_2(t)}{M_2} \\
\ddot{y}_3 + \omega_3^{\,2} y_3 &= \frac{P_3(t)}{M_3} \\
&\vdots \\
\ddot{y}_n + \omega_n^{\,2} y_n &= \frac{P_n(t)}{M_n}
\end{aligned}
$$

مشاهده می‌شود که در معادله i اُم مود i اُم اثر دارد.

می توان نتیجه گرفت که نتایج آنالیز در حالتی که در مختصات تعمیم یافته از ماتریس مودال (53) استفاده شده باشد با حالتی که در مختصات تعمیم یافته از ماتریس مودال نرمال شده (59) استفاده شده باشد یکسان است.

مختصات تعمیم یافته با استفاده از تعامد مودها، باعث جدا شدن معادلات همبسته می‌شود؛ که جواب هر معادله، جواب مسئله بدون در نظر گرفتن مودهای دیگر است.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

### حالت خاص- ارتعاش آزاد

در ارتعاش آزاد معادله حرکت در مختصات تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$(56) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[M]\{\ddot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=\{O\}} \quad (63)$$

رابطه (63) را بسط داده و پاسخ هر معادله را با استفاده از رابطه پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF محاسبه می‌کنیم.

$$(63) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} M_1\ddot{y}_1 + K_1 y_1 = 0 \\ M_2\ddot{y}_2 + K_2 y_2 = 0 \\ M_3\ddot{y}_3 + K_3 y_3 = 0 \\ \vdots \\ M_n\ddot{y}_n + K_n y_n = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{y(t)\}_{n\times 1} = \begin{Bmatrix} y_1(t) = y_{01}\cos(\omega_1 t) + \dfrac{\dot{y}_{01}}{\omega_1}\sin(\omega_1 t) \\ y_2(t) = y_{02}\cos(\omega_2 t) + \dfrac{\dot{y}_{02}}{\omega_2}\sin(\omega_2 t) \\ y_3(t) = y_{03}\cos(\omega_3 t) + \dfrac{\dot{y}_{03}}{\omega_3}\sin(\omega_3 t) \\ \vdots \\ y_n(t) = y_{0n}\cos(\omega_n t) + \dfrac{\dot{y}_{0n}}{\omega_n}\sin(\omega_n t) \end{Bmatrix}} \quad (64)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

### حالت خاص- ارتعاش آزاد

در رابطه (64) $y_{0i}$ ، $\dot{y}_{0i}$ شرایط اولیه در مختصات تعمیم یافته می‌باشند که به یکی از روش‌های زیر محاسبه می‌شوند:

**روش اول:**

$$\{x(0)\}=[\Phi]\{y(0)\} \overset{\times[\Phi]^{-1}}{\Rightarrow} \boxed{\{y(0)\}=[\Phi]^{-1}\{x(0)\}} \Rightarrow \boxed{\{\dot{y}(0)\}=[\Phi]^{-1}\{\dot{x}(0)\}} \qquad (65)$$

**روش دوم:**

$$\{x(0)\}=[\Phi]\{y(0)\} \overset{\times[\Phi]^{T}[m]}{\Rightarrow} [\Phi]^{T}[m]\{x(0)\}=[\Phi]^{T}[m][\Phi]\{y(0)\} \Rightarrow [\Phi]^{T}[m]\{x(0)\}=[M]\{y(0)\}$$

$$\overset{\times[M]^{-1}}{\Rightarrow} \boxed{\{y(0)\}=[M]^{-1}[\Phi]^{T}[m]\{x(0)\}} \Rightarrow \boxed{\{\dot{y}(0)\}=[M]^{-1}[\Phi]^{T}[m]\{\dot{x}(0)\}} \qquad (66)$$

وارون ماتریس جرم قطری شده با وارون نمودن هر یک از درایه‌های قطری به دست می‌آید (عملیات وارون کردن ساده است )

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

### حالت خاص- ارتعاش آزاد

روش سوم:

$$if \quad \{x(0)\}=[\overline{\Phi}]\{y(0)\} \quad \overset{\times[\overline{\Phi}]^T[m]}{\Rightarrow} \quad [\overline{\Phi}]^T[m]\{x(0)\}=[\overline{\Phi}]^T[m][\overline{\Phi}]\{y(0)\}$$

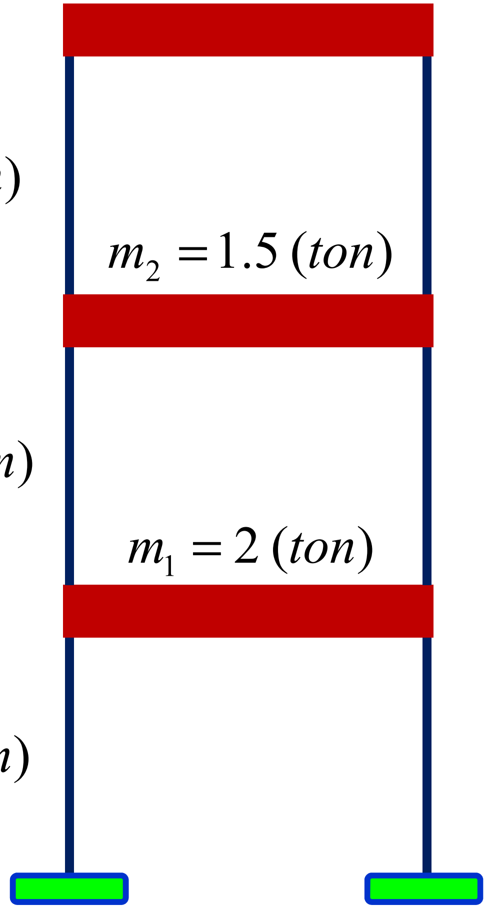
$$\Rightarrow \boxed{\{y(0)\}=[\overline{\Phi}]^T[m]\{x(0)\}} \Rightarrow \boxed{\{\dot{y}(0)\}=[\overline{\Phi}]^T[m]\{\dot{x}(0)\}} \qquad (67)$$

با تعیین شرایط اولیه در مختصات تعمیم یافته با استفاده از رابطه (64) هر یک از $y_i$ ها محاسبه می‌شود. سپس به کمک رابطه (58) پاسخ سیستم MDOF به دست می‌آید.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

**مثال 3-** پاسخ ارتعاش آزاد سازه بدون میرایی نشان داده شده در شکل زیر را با توجه به شرایط اولیه آن به دست آورید. (از روش آنالیز مودال استفاده کنید)




$$\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.015 \\ 0.02 \end{Bmatrix} \quad (m) \qquad \{\dot{x}_0\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \\ 0.06 \end{Bmatrix} \quad (m/s)$$

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.52 \\ 31.05 \\ 46.10 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.679 & 2.4396 \\ 0.649 & -0.61 & -2.542 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## .V حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

حل مثال 3-

$$\left\{ y(0) \right\} = \begin{Bmatrix} 0.022408 \\ -0.0029216 \\ 0.00051333 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \dot{y}(0) \right\} = \begin{Bmatrix} 0.061213 \\ -0.001437 \\ 0.00022433 \end{Bmatrix}$$

$$(64) \quad \Rightarrow \quad \left\{ y(t) \right\}_{3\times1} = \begin{Bmatrix} \\ -0.0029216\cos(31.05t) - \dfrac{0.001437}{31.05}\sin(31.05t) \\ 0.00051333\cos(46.10t) + \dfrac{0.00022433}{46.10}\sin(46.10t) \end{Bmatrix}$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

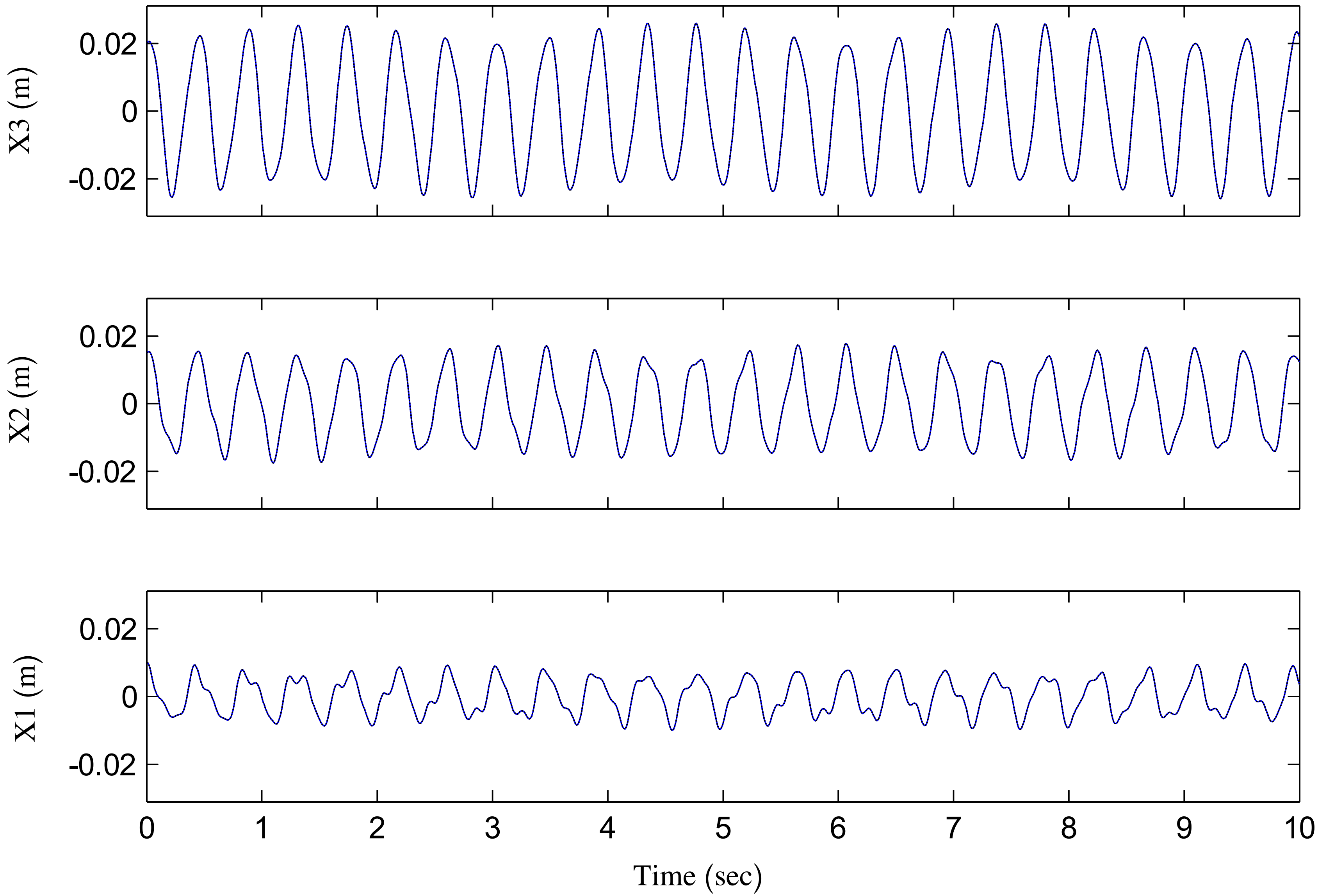
**حل مثال 3-**

$$\{x(t)\}=\begin{bmatrix}0.302 & -0.679 & 2.4396\\ 0.649 & -0.61 & -2.542\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.022408\cos(14.52t)+\dfrac{0.061213}{14.52}\sin(14.52t)\\ -0.0029216\cos(31.05t)-\dfrac{0.001437}{31.05}\sin(31.05t)\\ 0.00051333\cos(46.10t)+\dfrac{0.00022433}{46.10}\sin(46.10t)\end{Bmatrix}$$

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

حل مثال 3-




پاسخ ارتعاش آزاد سازه سه طبقه ناشی از آنالیز مودال

# MDOF: Solution of Motion Equations

## V. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( بدون میرایی)- آنالیز مودال

حل مثال 3-

### Matlab Code

```
clc
clear
format short g
n=3;
m=diag([2 1.5 1]);
k0=[1800 1200 600];
xi=0;
x0=[0.01;0.015;0.02];
v0=[0.02;0.04;0.06];
k=zeros(n,n);
for i=1:n
   if i<n
      k(i,i)=k0(i)+k0(i+1);
      k(i,i+1)=-k0(i+1);
      k(i+1,i)=-k0(i+1);
   else
      k(i,i)=k0(i);
   end
end
[phi bb]=eig(inv(m)*k);
omega=sqrt(bb);
for i=1:n
   phi(:,i)= phi(:,i)/phi(n,i);
End
.
.
.
```

```
.
.
.
M=phi'*m*phi;
for i=1:n
   phib(:,i)= phi(:,i)/sqrt(M(i,i));
end
y0=inv(phi)*x0
vy0=inv(phi)*v0
t=0:0.01:10;
for i=1:length(t)
   for j=1:n
     y(j,1)=y0(j)*cos(omega(j,j)*t(i))+(vy0(j)/omega(j,j))*sin(omega(j,j)*t(i));
   end
   x(:,i)=phi*y ;
end
LB=min(min(x));
UB=max(max(x));
for i=1:3
   subplot(3,1,i),plot(t,x(4-i,:));
   xlabel('time [sec]', 'FontSize',8)
   ylabel('Displacement','FontSize',8)
   axis([0 10 1.2*LB 1.2*UB])
end
```

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VI. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( با میرایی)- آنالیز مودال

### منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )

معادله حرکت سیستم MDOF با میرایی تحت اثر نیروی خارجی به صورت زیر است:

$$(7) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{p(t)\}} \quad (68)$$

اگر رابطه (68) را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=p_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-c_3\dot{x}_3-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-k_3x_3=p_2(t) \\ m_3\ddot{x}_3-c_3\dot{x}_2+(c_3+c_4)\dot{x}_3-c_4\dot{x}_4-k_3x_2+(k_3+k_4)x_3-k_4x_4=p_3(t) \\ \vdots \\ m_n\ddot{x}_n-c_n\dot{x}_{n-1}+c_n\dot{x}_n-k_nx_{n-1}+k_nx_n=p_n(t) \end{array}$$

در هر یک از معادله‌های حرکت بیش از یک متغیر موجود می‌باشد. برای جدا کردن آن‌ها و این که در هر معادله یک متغیر باشد از مختصات تعمیم‌یافته استفاده می‌کنیم.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VI. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( با میرایی)- آنالیز مودال

**منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )**

با جایگذاری مختصات تعمیم‌یافته رابطه (53) در معادله حرکت (68) خواهیم داشت:

$$(53)\,,(68) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m][\Phi]\{\ddot{y}(t)\}+[c][\Phi]\{\dot{y}(t)\}+[k][\Phi]\{y(t)\}=\{p(t)\}} \quad (69)$$

طرفین رابطه (69) در $[\Phi]^T$ ضرب می‌کنیم:

$$(69) \quad \overset{\times[\Phi]^T}{\Rightarrow} \quad \boxed{[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{y}(t)\}+[\Phi]^T[c][\Phi]\{\dot{y}(t)\}+[\Phi]^T[k][\Phi]\{y(t)\}=[\Phi]^T\{p(t)\}} \quad (70)$$

$$(44)\,,(46) \quad \& \quad (70) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[M]\{\ddot{y}(t)\}+[C]\{\dot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=\{P(t)\}} \quad (71)$$

رابطه (71) **معادله حرکت در مختصات تعمیم** یافته نام دارد.

که در آن $\{P(t)\}$ بردار نیروی خارجی در مختصات تعمیم یافته است.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VI. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( با میرایی)- آنالیز مودال

**منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )**

در رابطه (71)

$$[C]=[\Phi]^T[c][\Phi] \quad (72)$$

$[C]$ را ماتریس میرایی قطری شده یا ماتریس قطری میرایی می‌نامند.

می‌توان برای حل مسائل فرض کرد که بین میرایی، جرم و سختی یک رابطه خطی برقرار است. این فرض چندان دور از واقعیت نیست و از آزمایشات نیز حاصل می‌شود. (شرط برقراری رابطه (71) همین است.)
در نظر گرفتن میرایی به صورت ترکیب خطی از جرم وسختی را میرایی کلاسیک می‌نامند. فرض میرایی کلاسیک را برای حل مسئله مودال در نظر می‌گیریم. با این فرض می‌توان گفت که ماتریس $[C]$ نیز قطری است:

$$\textit{Classic Damping}: \quad [C]=\alpha[M]+\beta[K]=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} C_i=\alpha M_i+\beta K_i=2\xi_i\omega_i M_i \\ [C]=2\xi[\omega][M] \end{matrix} \quad (73)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VI. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( با میرایی)- آنالیز مودال

### منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )

اگر رابطه (71) را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$(73)\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M_1\ddot{y}_1 + C_1\dot{y}_1 + K_1 y_1 &= P_1(t) \\ M_2\ddot{y}_2 + C_2\dot{y}_2 + K_2 y_2 &= P_2(t) \\ M_3\ddot{y}_3 + C_3\dot{y}_3 + K_3 y_3 &= P_3(t) \\ &\vdots \\ M_n\ddot{y}_n + C_n\dot{y}_n + K_n y_n &= P_n(t) \end{aligned}$$

یعنی با استفاده از خاصیت تعامد مودها، معادله‌های همبسته MDOF را به چند معادله مستقل تبدیل کردیم که در هر یک از آن‌ها تنها یک متغیر وجود دارد.

بنابراین هر معادله مانند یک SDOF عمل می‌کند که با استفاده از انتگرال دوهامل می‌توان آن را حل کرد و $y_i$ را به دست آورد:

$$(73)\quad \xRightarrow{\text{Duhamel Integral}} \quad \boxed{\{y(t)\}_{n\times 1} = \begin{Bmatrix} y_1(t) = \dfrac{1}{M_1\omega_{D1}}\displaystyle\int_0^t P_1(\tau) e^{-\xi_1\omega_1(t-\tau)} Sin[\omega_{D1}(t-\tau)]\cdot d\tau \\ y_2(t) = \dfrac{1}{M_2\omega_{D2}}\displaystyle\int_0^t P_2(\tau) e^{-\xi_2\omega_2(t-\tau)} Sin[\omega_{D2}(t-\tau)]\cdot d\tau \\ y_3(t) = \dfrac{1}{M_3\omega_{D3}}\displaystyle\int_0^t P_3(\tau) e^{-\xi_3\omega_3(t-\tau)} Sin[\omega_{D3}(t-\tau)]\cdot d\tau \\ \vdots \\ y_n(t) = \dfrac{1}{M_n\omega_{Dn}}\displaystyle\int_0^t P_n(\tau) e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)} Sin[\omega_{Dn}(t-\tau)]\cdot d\tau \end{Bmatrix}} \quad (74)$$

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VI. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( با میرایی)- آنالیز مودال

### منفرد کردن معادله‌های دیفرانسیل حرکت ( Uncoupling differentiate equations of motion )

اگر نیروهای خارجی به صورت سینوسی یا کسینوسی باشد جواب مستقیم آن‌ها را داریم و نیازی به استفاده از انتگرال دوهامل نیست. در نهایت با استفاده از رابطه (58) می‌توان پاسخ کلی سیستم را محاسبه کرد:

$$\boxed{\{x(t)\}=[\Phi]\{y(t)\} \quad or \quad x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}y_j(t)} \quad (58)$$

تکرار

در رابطه (74) $\xi_i$ نسبت میرایی برای مود i اُم است. در محاسبات معمول نیست که برای مودهای مختلف، $\xi$ های متفاوت در نظر گرفت و یک میرایی برای سازه در نظر می‌گیرند. مفاهیم $\xi_i$ تنها مفهوم‌های ریاضی هستند و معادل فیزیکی ندارند. یعنی نمی‌توان گفت که مود i اُم با $\xi$ بزرگتر، زودتر میرا می‌شود.

---

$$(72),(73) \quad \Rightarrow \quad [\Phi]^T[c][\Phi]=2\xi[\omega][M] \quad \Rightarrow \boxed{[c]=2\xi\left([\Phi]^T\right)^{-1}[\omega][M][\Phi]^{-1}} \quad (75)$$

**رابطه ماتریس میرایی بر حسب ماتریس جرم قطری شده، ماتریس فرکانس، ماتریس مودال و ضریب میرایی**

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VI. حرکت اجباری قاب‌های برشی MDOF ( با میرایی)- آنالیز مودال

روش گام به گام آنالیز مودال:

1) تشکیل $\{\omega\}, [\Phi], [P(t)]$ .

2) ماتریس‌های $[M]$ و $[K]$ محاسبه می‌شود.

3) با معرفی مختصات تعمیم یافته $\{x(t)\} = [\Phi]\{y(t)\}$ معادله‌های همبسته را منفرد می‌کنیم.

4) با حل معادله‌های گام (3) بردار $\{y(t)\}$ به دست می‌آید.

5) از رابطه $\{x(t)\} = [\Phi]\{y(t)\}$ پاسخ‌ها را محاسبه می‌نماییم.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VII. تحلیل تاریخچه زمانی ( Time History Analysis ) – نیروی خارجی زلزله

معادله حرکت سیستم MDOF با میرایی تحت اثر زلزله به صورت زیر است:

$$(7) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=-[m]\{L\}\ddot{u}_g(t)} \quad (76)$$

اگر رابطه (76) را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1\ddot{u}_g(t) \\ -m_2\ddot{u}_g(t) \\ -m_3\ddot{u}_g(t) \\ \vdots \\ -m_n\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix}$$

در هر یک از معادله‌های حرکت بیش از یک متغیر موجود می‌باشد. برای جدا کردن آن‌ها و این که در هر معادله یک متغیر باشد از مختصات تعمیم‌یافته استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{array}{c} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=-m_1\ddot{u}_g(t) \\ m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-c_3\dot{x}_3-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-k_3x_3=-m_2\ddot{u}_g(t) \\ m_3\ddot{x}_3-c_3\dot{x}_2+(c_3+c_4)\dot{x}_3-c_4\dot{x}_4-k_3x_2+(k_3+k_4)x_3-k_4x_4=-m_3\ddot{u}_g(t) \\ \vdots \\ m_n\ddot{x}_n-c_n\dot{x}_{n-1}+c_n\dot{x}_n-k_nx_{n-1}+k_nx_n=-m_n\ddot{u}_g(t) \end{array}$$

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## VII. تحلیل تاریخچه زمانی ( Time History Analysis ) – نیروی خارجی زلزله

با جایگذاری مختصات تعمیم‌یافته رابطه (53) در معادله حرکت (76) خواهیم داشت:

$$(53),(76) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m][\Phi]\{\ddot{y}(t)\}+[c][\Phi]\{\dot{y}(t)\}+[k][\Phi]\{y(t)\}=-[m]\{L\}\ddot{u}_g(t)} \quad (77)$$

طرفین رابطه (77) در $[\Phi]^T$ ضرب می‌کنیم:

$$(77) \quad \overset{\times[\Phi]^T}{\Rightarrow} \quad \boxed{[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{y}(t)\}+[\Phi]^T[c][\Phi]\{\dot{y}(t)\}+[\Phi]^T[k][\Phi]\{y(t)\}=-[\Phi]^T[m]\{L\}\ddot{u}_g(t)} \quad (78)$$

$$(44),(46),(72) \quad \& \quad (78) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[M]\{\ddot{y}(t)\}+[C]\{\dot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=-P_e(t)} \quad (79)$$

رابطه (79) **معادله حرکت در مختصات تعمیم** یافته نام دارد.

که در آن $\{P_e(t)\}$ بردار نیروی زلزله در مختصات تعمیم یافته است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\begin{gathered}\{P_e(t)\}=\{\Gamma\}\ddot{u}_g(t)\\ \{\Gamma\}=[\Phi]^T[m]\{L\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_i=\{\phi\}_i^T[m]\{L\}\end{gathered}} \quad (80)$$

$\{\Gamma\}$: **بردار مشارکت ( Participation Vector )**

$\Gamma_i$: **ضریب مشارکت ( Participation Factor )**

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VII. تحلیل تاریخچه زمانی ( Time History Analysis ) – نیروی خارجی زلزله

با استفاده از روابط (79) و (80) خواهیم داشت:

$$(79),(80) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[M]\{\ddot{y}(t)\}+[C]\{\dot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=-\{\Gamma\}\ddot{u}_g(t)} \quad (81)$$

اگر رابطه (81) را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$(81) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M_1\ddot{y}_1+C_1\dot{y}_1+K_1y_1&=-\Gamma_1\,\ddot{u}_g(t)\\ M_2\ddot{y}_2+C_2\dot{y}_2+K_2y_2&=-\Gamma_2\,\ddot{u}_g(t)\\ M_3\ddot{y}_3+C_3\dot{y}_3+K_3y_3&=-\Gamma_3\,\ddot{u}_g(t)\\ &\vdots\\ M_n\ddot{y}_n+C_n\dot{y}_n+K_ny_n&=-\Gamma_n\,\ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{y}_1+2\xi_1\omega_1\dot{y}_1+\omega_1^{\,2}y_1&=-\frac{1}{M_1}\Gamma_1\,\ddot{u}_g(t)\\ \ddot{y}_2+2\xi_2\omega_2\dot{y}_2+\omega_2^{\,2}y_2&=-\frac{1}{M_2}\Gamma_2\,\ddot{u}_g(t)\\ \ddot{y}_3+2\xi_3\omega_3\dot{y}_3+\omega_3^{\,2}y_3&=-\frac{1}{M_3}\Gamma_3\,\ddot{u}_g(t)\\ &\vdots\\ \ddot{y}_n+2\xi_n\omega_n\dot{y}_n+\omega_n^{\,2}y_n&=-\frac{1}{M_n}\Gamma_n\,\ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad (82)$$

که در آن

$\Gamma_i$ ضریب مشارکت i اُم ضریبی از مشارکت شتاب زمین است که در مود i اُم تاثیر دارد.

$M_i$ جرم مودی نام دارد و نشان دهنده جرم موثر در مود i اُم است.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VII. تحلیل تاریخچه زمانی ( Time History Analysis ) – نیروی خارجی زلزله

بنابراین هر یک از معادله‌های رابطه (82) مانند یک SDOF عمل می‌کند که با استفاده از انتگرال دوهامل می‌توان آن را حل کرد و $y_i$ را به دست آورد:

$$(82) \quad \xrightarrow{\text{Duhamel Integral}} \quad \{y(t)\}_{n\times 1}=\begin{Bmatrix} y_1(t)=\dfrac{-\Gamma_1}{M_1\omega_{D1}}\int_0^t \ddot{u}_g(t)e^{-\xi_1\omega_1(t-\tau)}Sin[\omega_{D1}(t-\tau)]\cdot d\tau \\ y_2(t)=\dfrac{-\Gamma_2}{M_2\omega_{D2}}\int_0^t \ddot{u}_g(t)e^{-\xi_2\omega_2(t-\tau)}Sin[\omega_{D2}(t-\tau)]\cdot d\tau \\ y_3(t)=\dfrac{-\Gamma_3}{M_3\omega_{D3}}\int_0^t \ddot{u}_g(t)e^{-\xi_3\omega_3(t-\tau)}Sin[\omega_{D3}(t-\tau)]\cdot d\tau \\ \vdots \\ y_n(t)=\dfrac{-\Gamma_n}{M_n\omega_{Dn}}\int_0^t \ddot{u}_g(t)e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)}Sin[\omega_{Dn}(t-\tau)]\cdot d\tau \end{Bmatrix} \quad (83)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (58) می‌توان پاسخ کلی سیستم را محاسبه کرد:

$$\{x(t)\}=[\Phi]\{y(t)\} \quad or \quad x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}y_j(t) \quad (58)$$

تکرار

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## VIII. محاسبه تاریخچه زمانی نیروی طبقات و برش پایه  ناشی از زلزله

در رابطه (83) پاسخ i اُمین مختصات تعمیم یافته را در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{y_i(t) = \frac{-\Gamma_i}{M_i} Q_i(t)} \quad (84)$$

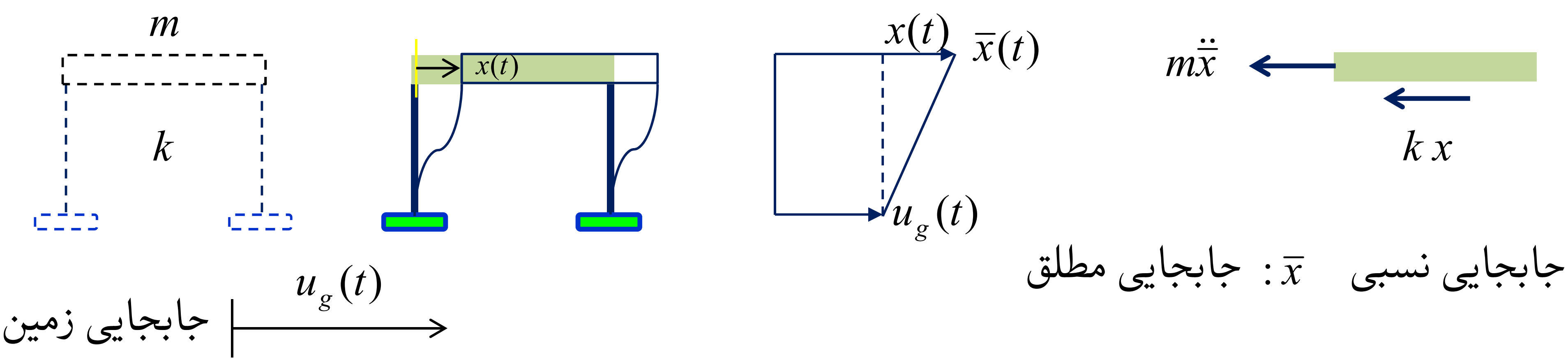
که در آن

$$\boxed{Q_i(t) = \frac{1}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{u}_g(t) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} Sin[\omega_{Di}(t-\tau)] \cdot d\tau} \quad (85)$$

$Q_i(t)$ : از جنس جابجایی است و دیمانسیون جابجایی را دارد.

---

دیاگرام جسم آزاد یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی زلزله به صورت زیر است.




$x$ : جابجایی نسبی    $\bar{x}$ : جابجایی مطلق

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## VIII. محاسبه تاریخچه زمانی نیروی طبقات و برش پایه  ناشی از زلزله

معادله دیفرانسیل حرکت با نوشتن معادله تعادل به دست می‌آید:


$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)} \qquad (86)$$

می‌توان رابطه (86) را برای مختصات تعمیم یافته نیز نوشت بنابراین:

$$\boxed{\ddot{y}_i(t) = -\omega_i^{\,2}\, y_i(t)} \qquad (87)$$

بردار جابجایی طبقات در مود i اُم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\{x(t)\}_i = \{\phi\}_i\, y_i(t)} \qquad (88)$$

**بردار جابجایی طبقات در مود i اُم در هر لحظه از زمان**

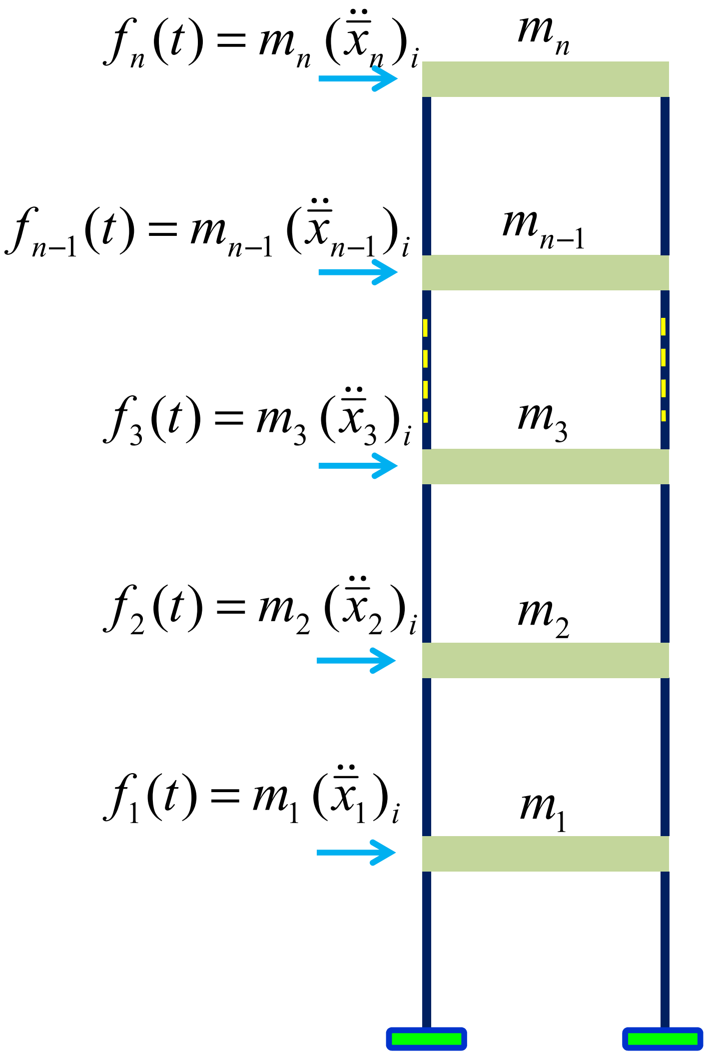
$$(88) \quad \Rightarrow \quad \{\bar{x}(t)\}_i = \{\phi\}_i\, \bar{y}_i(t) \quad \Rightarrow \quad \{\ddot{x}(t)\}_i = \{\phi\}_i\, \ddot{y}_i(t) \quad \overset{(87)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\{\ddot{x}(t)\}_i = -\{\phi\}_i\, \omega_i^{\,2}\, y_i(t)} \qquad (89)$$

$\{\ddot{x}(t)\}_i$  شتاب مطلق طبقات در مود i اُم می‌باشد

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VIII. محاسبه تاریخچه زمانی نیروی طبقات و برش پایه ناشی از زلزله

با استفاده از شتاب مطلق طبقات رابطه (89) بردار نیروی موثر طبقات در مود i اُم به صورت زیر به دست می‌آید:




$$\{f(t)\}_i = [m]\{\ddot{\bar{x}}(t)\}_i \overset{(89)}{\Rightarrow} \boxed{\{f(t)\}_i = -[m]\{\phi\}_i\,\omega_i^{\,2}\,y_i(t)} \quad (90)$$

با جایگذاری رابطه (84) در رابطه بالا

$$(84),(90) \Rightarrow \boxed{\{f(t)\}_i = [m]\{\phi\}_i\,\frac{\Gamma_i}{M_i}\,\omega_i^{\,2}\,Q_i(t)} \quad (90)$$

**بردار نیروی موثر طبقات در مود i اُم در هر لحظه از زمان**

برای محاسبه برش پایه در مود i اُم باید تمام درایه‌های بردار موثر نیروی طبقات در مود i اُم را با هم جمع نمود. برای انجام این کار کافی است رابطه (90) را در بردار $\{L\}^T = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\}$ ضرب کنیم.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VIII. محاسبه تاریخچه زمانی نیروی طبقات و برش پایه ناشی از زلزله

$$(90) \quad \Rightarrow \quad v_i(t) = \{L\}^T \{f(t)\}_i = \{L\}^T [m]\{\phi\}_i \frac{\Gamma_i}{M_i} \omega_i^2 Q_i(t) \quad \overset{(80)}{\Rightarrow} \quad \boxed{v_i(t) = \Gamma_i^T \frac{\Gamma_i}{M_i} \omega_i^2 Q_i(t)} \quad (91)$$

مقدار برش پایه در مود i اُم در هر لحظه از زمان

$$\Gamma_i^T = \Gamma_i \quad (scalar) \quad \overset{(91)}{\Rightarrow} \quad \boxed{v_i(t) = \frac{\Gamma_i^2}{M_i} \omega_i^2 Q_i(t)} \quad (92)$$

---

$$(44) \quad \Rightarrow \quad M_i = \{\phi\}_i^T [m]\{\phi\}_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_i = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{n} W_j \phi_{ji}^2} \quad (93)$$

$$(80) \quad \Rightarrow \quad \Gamma_i = \{\phi\}_i^T [m]\{L\} = \sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_i = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{n} W_j \phi_{ji}} \quad (94)$$

$W_{ei}$: وزن موثر در مود i اُم

$$(92),(93),(94) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_i(t) = \frac{1}{g} W_{ei} \omega_i^2 Q_i(t) \quad , \quad W_{ei} = \frac{\Gamma_i^2}{M_i} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} W_j \phi_{ji}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} W_j \phi_{ji}^2}} \quad (95)$$

# MDOF: Solution of  Motion Equations

## VIII. محاسبه تاریخچه زمانی نیروی طبقات و برش پایه  ناشی از زلزله

برای محاسبه برش پایه کل باید برش پایه در تمام مودها را با جمع کرد:

$$(95) \quad \Rightarrow \quad V(t)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(t)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n} W_{ei}\omega_i^2 Q_i(t)} \quad (96)$$

**برش پایه کل در هر لحظه از زمان**

**مقایسه با روش طیفی در آیین‌نامه 2800 ایران**

$\omega_i^2 Q_i(t)$ از جنس شتاب است اگر مقدار ماکزیمم آن در نظر گرفته شود معادل همان شتاب طیفی می‌باشد.

# MDOF: Solution of Motion Equations

## VIII. محاسبه تاریخچه زمانی نیروی طبقات و برش پایه ناشی از زلزله

**روش گام به گام آنالیز تاریخچه زمانی:**

1) تشکیل $[P_e(t)], [\Phi], \{\omega\}$ .

2) ماتریس‌های $[M]$ و $[K]$ محاسبه می‌شود.

3) با معرفی مختصات تعمیم یافته $\{x(t)\}=[\Phi]\{y(t)\}$ معادله‌های همبسته را منفرد می‌کنیم.

4) با حل معادله‌های گام (3) بردار $\{y(t)\}$ به دست می‌آید.

5) برای محاسبه بردار جابجایی در مود i اُم در هر لحظه از زمان از رابطه $\{x(t)\}_i=\{\phi\}_i y_i(t)$ استفاده می‌شود.

6) از رابطه $\{x(t)\}=[\Phi]\{y(t)\}$ پاسخ‌های کلی را در هر لحظه از زمان محاسبه می‌نماییم.

7) از رابطه $\{f(t)\}_i=[m]\{\phi\}_i \dfrac{\Gamma_i}{M_i}\omega_i^2 Q_i(t)$ برای محاسبه بردار نیروی موثر طبقات در مود i اُم در هر لحظه از زمان استفاده می‌کنیم.

8) برای محاسبه مقدار برش پایه در مود i اُم در هر لحظه از زمان از رابطه $v_i(t)=\dfrac{\Gamma_i^2}{M_i}\omega_i^2 Q_i(t)$ استفاده می‌کنیم.

9) از رابطه $V(t)=\dfrac{1}{g}\sum_{i=1}^{n} W_{ei}\omega_i^2 Q_i(t)$ مقدار برش پایه کل در هر لحظه از زمان به دست می‌آید.