Dynamic of Structures

Multi Degree of Freedom Systems: Equations of Motion

By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

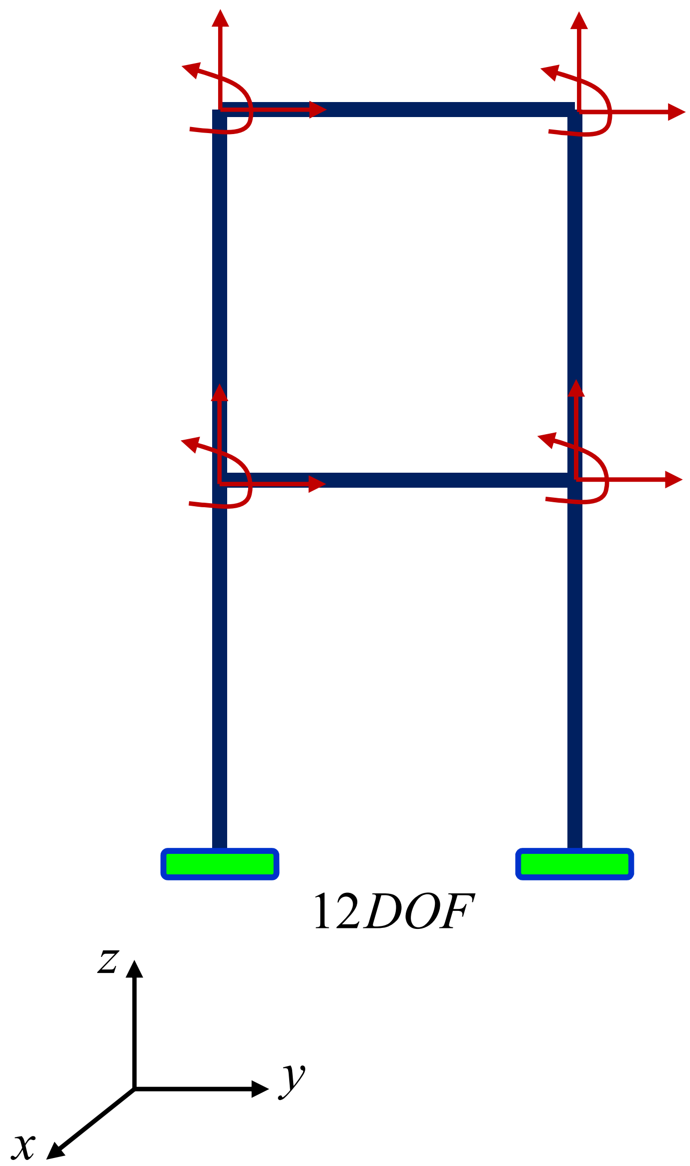
MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

اگر برای سیستمی بیش از یک درجه تغییر مکان قائل شویم، سازه ما چند درجه آزاد خواهد بود. (در حالت کلی تشخیص MDOF و SDOF بر عهده ما می‌باشد.)

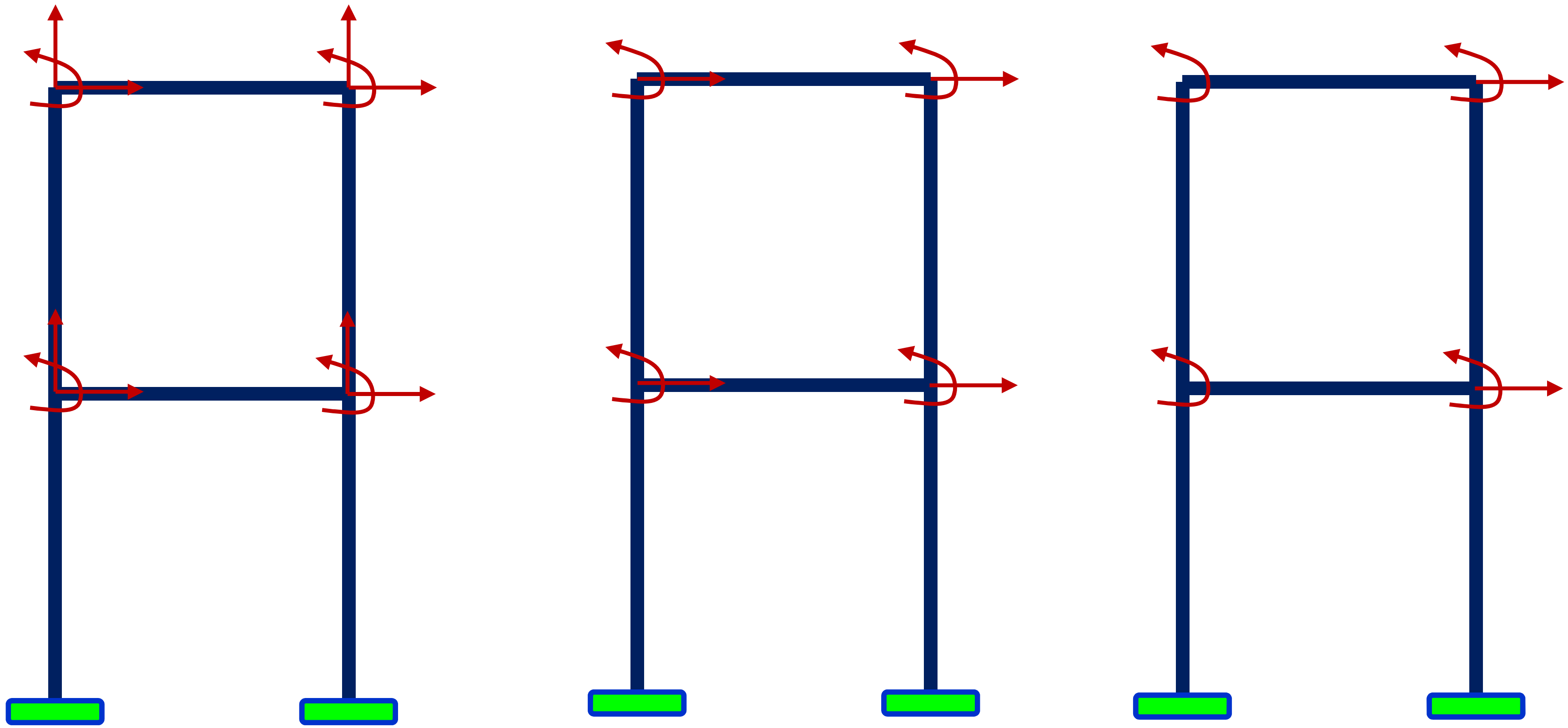
در حالت واقعی در سازه تغییرمکان‌های بسیاری، اعم از دورانی و انتقالی، وجود دارند. تعداد درجات آزادی (مولفه‌های مستقل تغییرمکان) به نظر تحلیل‌گر بستگی دارد. در نظر گرفتن درجات آزادی بیشتر، تقریب بهتری از رفتار دینامیکی را به دست می‌دهد.

سوالی که اینجا مطرح است، اول این که در مدل سازی، چند درجه‌ی آزادی در نظر بگیریم و دوم آن که جرم را چگونه در نظر بگیریم.

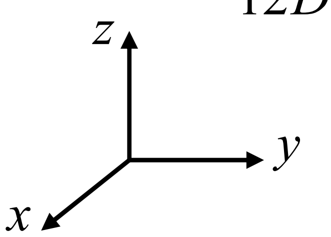


MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

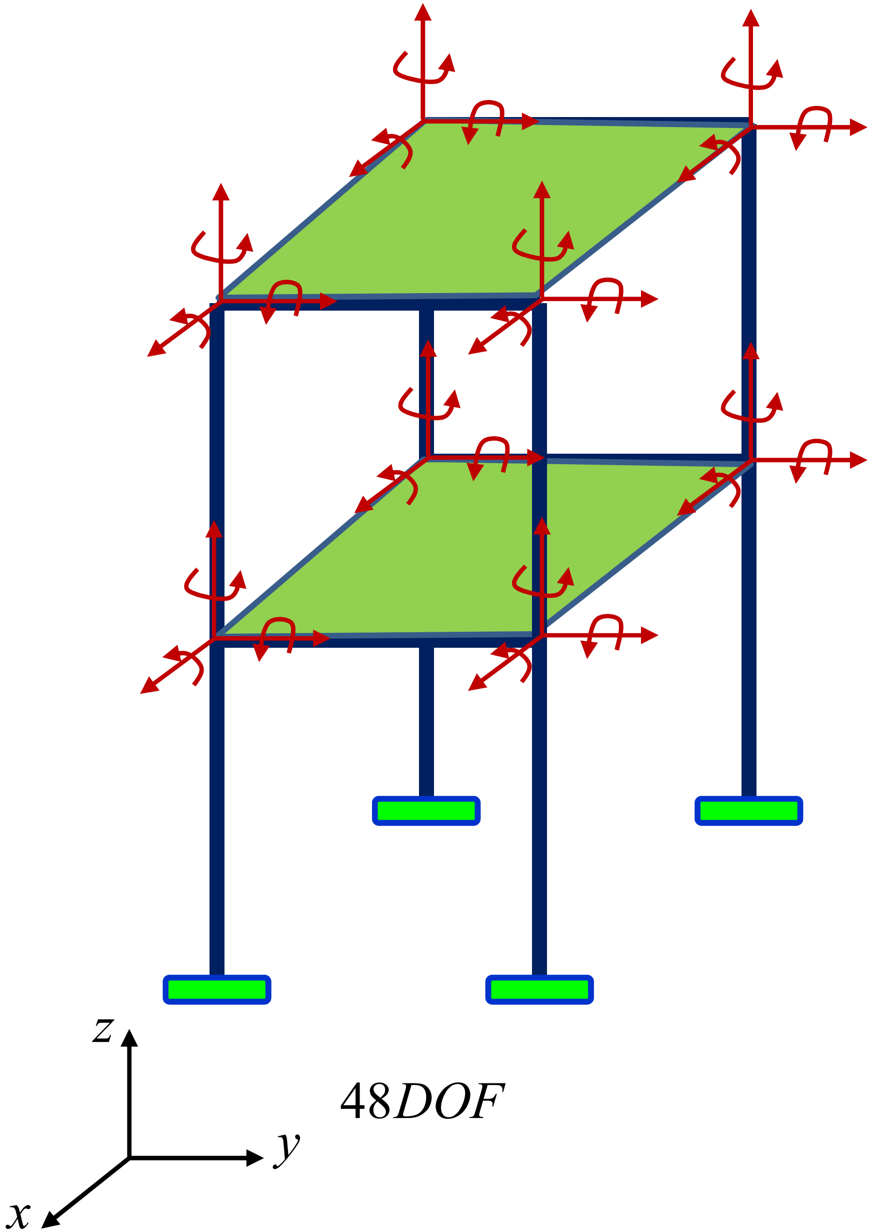


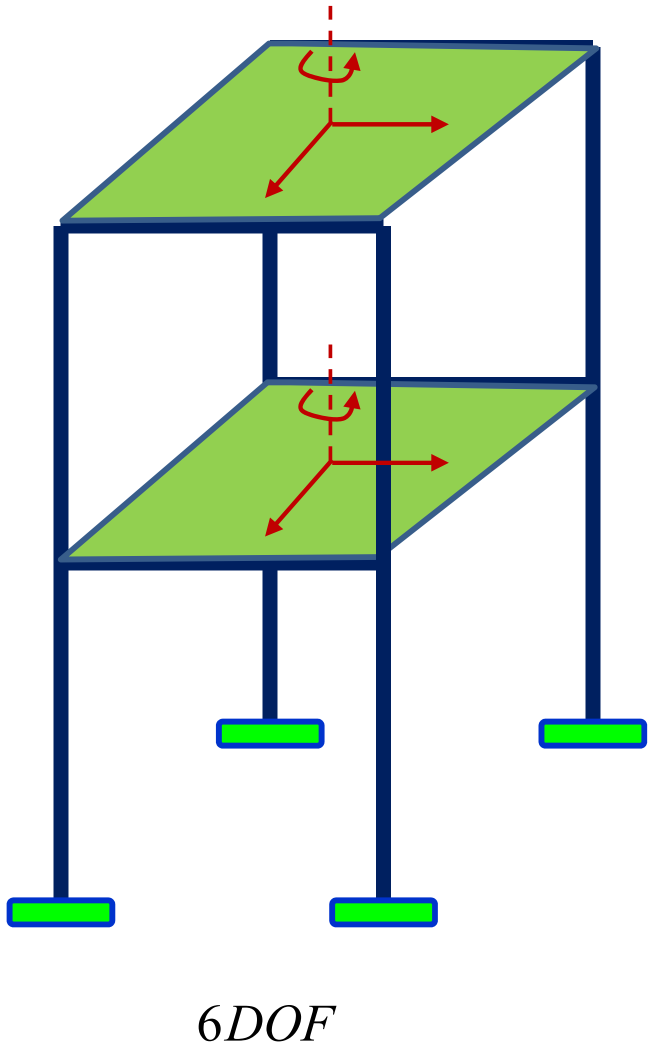
$12DOF$ $8DOF$ $6DOF$



MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)



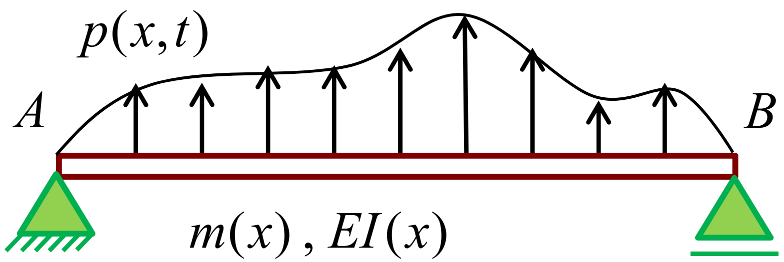


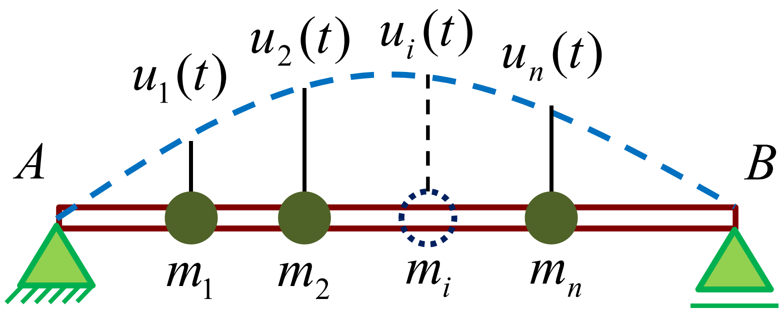
MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

در سیستم‌های پیوسته فرض می‌شود که حرکت سازه توسط تغییرمکان‌های مجموعه‌ای از نقاط مجزا بر روی سازه تعیین شده باشد. در عمل، انتخاب این نقاط بایستی متناظر با مشخصه‌های خاصی از عوامل فیزیکی که دارای تاثیر عمده هستند (نظیر نحوه توزیع بار، جرم و سختی) صورت گیرد؛ و طوری توزیع شده باشند که شکل تغییر مکان را به طور مناسبی توصیف نمایند.

برای یک سیستم n درجه آزادی، معادله حرکت سیستم را می‌توان از رابطه تعادل نیروهای موثر در هر کدام از درجات آزادی آن به دست آورد. به طور کلی در هر نقطه مانند i چهار نوع نیرو می‌تواند وجود داشته باشد:





الف- بار خارجی $p_i(t)$

و نیروهای ناشی از حرکت:

ب- نیروهای اینرسی $f_{Ii}(t)$

ج- نیروهای میرایی $f_{Di}(t)$

د- نیروهای الاستیک $f_{Si}(t)$

MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

برای هر کدام از درجات آزادی، تعادل دینامیکی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} f_{I1}(t)+f_{D1}(t)+f_{S1}(t)=p_1(t) \\ f_{I2}(t)+f_{D2}(t)+f_{S2}(t)=p_2(t) \\ \vdots \\ f_{In}(t)+f_{Dn}(t)+f_{Sn}(t)=p_n(t) \end{cases} \qquad (1)$$

فرم ماتریسی (برداری) رابطه (1) به صورت زیر است

$$\{f_I(t)\}+\{f_D(t)\}+\{f_S(t)\}=\{p(t)\} \qquad (2)$$

که برای سیستم‌های SDOF متناظر با معادله $f_I(t)+f_D(t)+f_S(t)=p(t)$ می‌باشد.

MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

نیروی‌های الاستیک متناسب با تغییرمکان می‌باشند و به صورت زیر به دست می‌آیند

که می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} f_{S1}(t) \\ f_{S2}(t) \\ \vdots \\ f_{Sn}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{Bmatrix}} \qquad (3)$$

$$\boxed{\{f_S(t)\} = [k]\{u(t)\}} \qquad (4)$$

$[k]$: ماتریس سختی سازه نامیده می‌شود. که در آن درایه k_{ij} ، i و j اُمین المان ماتریس سختی می‌باشد که برابر است با مقدار نیروی لازم در راستای درجه آزادی i جهت ایجاد تغییر مکان واحد در راستای درجه آزادی j زمانی که از تغییر مکان در راستای سایر درجات آزادی جلوگیری شود. به جای نیرو و جابجایی به ترتیب می‌توان از لنگر و دوران استفاده کرد.

$\{u(t)\}$: بردار تغییر مکان است که بیانگر شکل تغییر مکان سازه می‌باشد.

MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

با فرض آن که میرایی از نوع ویسکوز است؛ نیروهای میرایی متناسب با سرعت می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1}(t) \\ f_{D2}(t) \\ \vdots \\ f_{Dn}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$\boxed{\{f_D(t)\} = [c]\{\dot{u}(t)\}} \quad (6)$$

$[c]$: ماتریس میرایی سازه نامیده می‌شود. که در آن درایه c_{ij} ، i و j اُمین المان ماتریس میرایی می‌باشد که برابر است با مقدار نیروی لازم در درجه آزادی i جهت ایجاد سرعت واحد در راستای درجه آزادی j زمانی که سرعت در راستای سایر درجات آزادی صفر باشد. به جای نیرو و سرعت به ترتیب می‌توان از لنگر و سرعت زاویه‌ای استفاده کرد.

$\{\dot{u}(t)\}$: بردار سرعت است.

MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

نیروهای اینرسی متناسب با شتاب می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} f_{I1}(t) \\ f_{I2}(t) \\ \vdots \\ f_{In}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$\{f_I(t)\} = [m]\{\ddot{u}(t)\} \qquad (8)$$

$\{\ddot{u}(t)\}$: بردار شتاب است.

$[m]$: ماتریس جرم سازه نامیده می‌شود. که در آن درایه m_{ij} ، i و j اُمین المان ماتریس جرم می‌باشد که برابر است با مقدار نیروی لازم در درجه آزادی i جهت ایجاد شتاب واحد در راستای درجه آزادی j زمانی که شتاب در راستای سایر درجات آزادی صفر باشد. به جای نیرو و شتاب به ترتیب می‌توان از لنگر و شتاب زاویه‌ای استفاده کرد.

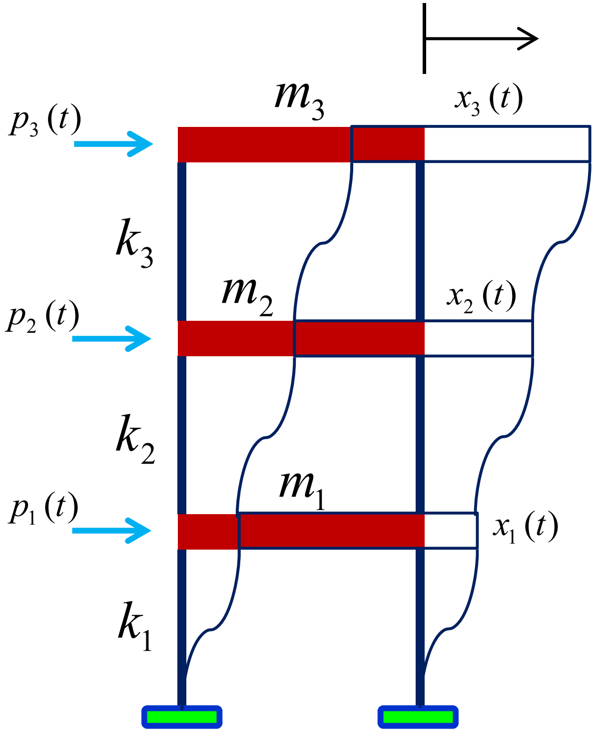
با جایگذاری روابط (4)، (6) و (8) در رابطه (2) معادله حرکت سازه در حالت MDOF به دست می‌آید:

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [c]\{\dot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{p(t)\} \qquad (9)$$

MDOF: Equations of Motion

.I مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

در ساده‌ترین مدل از ساختمان‌های چند طبقه که به نام سازه برشی مرسوم است فرض می‌شود که:



مدل قاب برشی

۱) جرم کل سازه در سقف‌ها متمرکز شده باشد.

2) ستون‌ها بدون جرم باشند.

3) سیستم سقف‌ها و تیرها صلب (دیافراگم) باشند.

4) ستون‌ها بدون تغییر شکل محوری در نظر گرفته می‌شوند.

5) ستون‌ها در مقابل تغییر شکل جانبی انعطاف‌پذیر در نظر گرفته می‌شوند.

6) تنها درجه‌های آزادی انتقالی در نظر گرفته می‌شود از اثر دوران گره‌ها طرف نظر می‌شود.

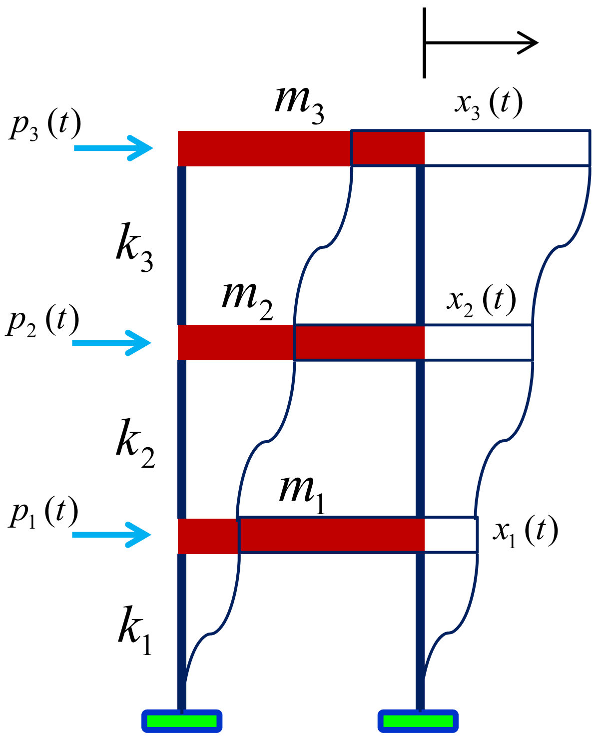
جرم‌های متمرکز در نقاط هم‌تراز با سقف‌ها m_1, m_2, m_3 نشان داده شده‌اند که در آن m_j جرم سقف j اُم است.

خواص الاستیک سازه با سختی‌های جانبی k_1, k_2, k_3 مشخص گردیده به طوری که k_j سختی جانبی طبقه j اُم، یعنی نیروی برشی لازم برای ایجاد جابجایی نسبی واحد در آن طبقه، است.

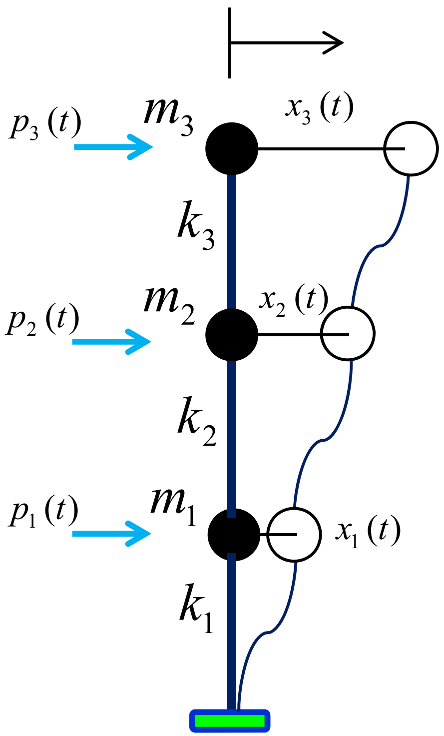
MDOF: Equations of Motion

I. مبانی حرکت مدل‌های (MDOF)

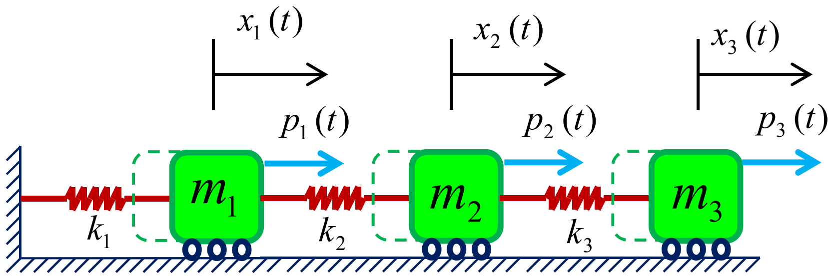
سایر مدل‌های ساده شده سیستم‌های MDOF



مدل قاب برشی



مدل جرم متمرکز



مدل جرم فنر

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

برخی خواص مهم ماتریس سختی

- ماتریس سختی متقارن است. (به کمک قانون بتی قابل اثبات است. قانون بتی: کار انجام شده توسط مجموعه‌ای از نیروها بر روی تغییر مکانی ناشی از یک مجموعه نیروهای دیگر برابر است با کار انجام شده توسط مجموعه نیروهای دوم بر روی تغییر مکان‌های ناشی از مجموعه نیروهای اول $p_a^T u_b = p_b^T u_a$)

- ماتریس سختی ماتریس مثبت – معین است. ماتریس‌های مثبت- معین غیرتکین (غیر منفرد یا دترمینان آن مخالف صفر) بوده و معکوس‌پذیر می‌باشند. (با توجه به اینکه انرژی ذخیره شده در سازه ناشی از تغییر شکل به صورت $U = \frac{1}{2} u^T k u$ می‌باشد و چون این انرژی در یک سازه پایدار همیشه مثبت است بنابرین شرط مثبت معین بودن ماتریس سختی k محقق می‌گردد.)

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

روش‌های تعیین ماتریس سختی عبارت است از:

1) روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب سختی
2) روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب نرمی
3) روش المان محدود.

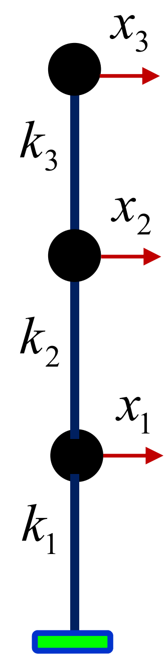
1) روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب سختی

در این روش به ترتیب در راستای هر کدام از درجات آزادی سازه (درجه آزادی i اُم) تغییر مکان واحد ایجاد کرده و همزمان تغییر مکان در راستای سایر درجات آزادی سازه مقید می‌گردد. نیروهای پدید آمده در راستای درجات آزادی مختلف سازه نشان دهنده عناصر ستونی خاص از ماتریس سختی (ستون i اُم) خواهند بود. با تکرار این عمل برای سایر درجات آزادی سازه، ماتریس سختی کل سازه به دست می‌آید.

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

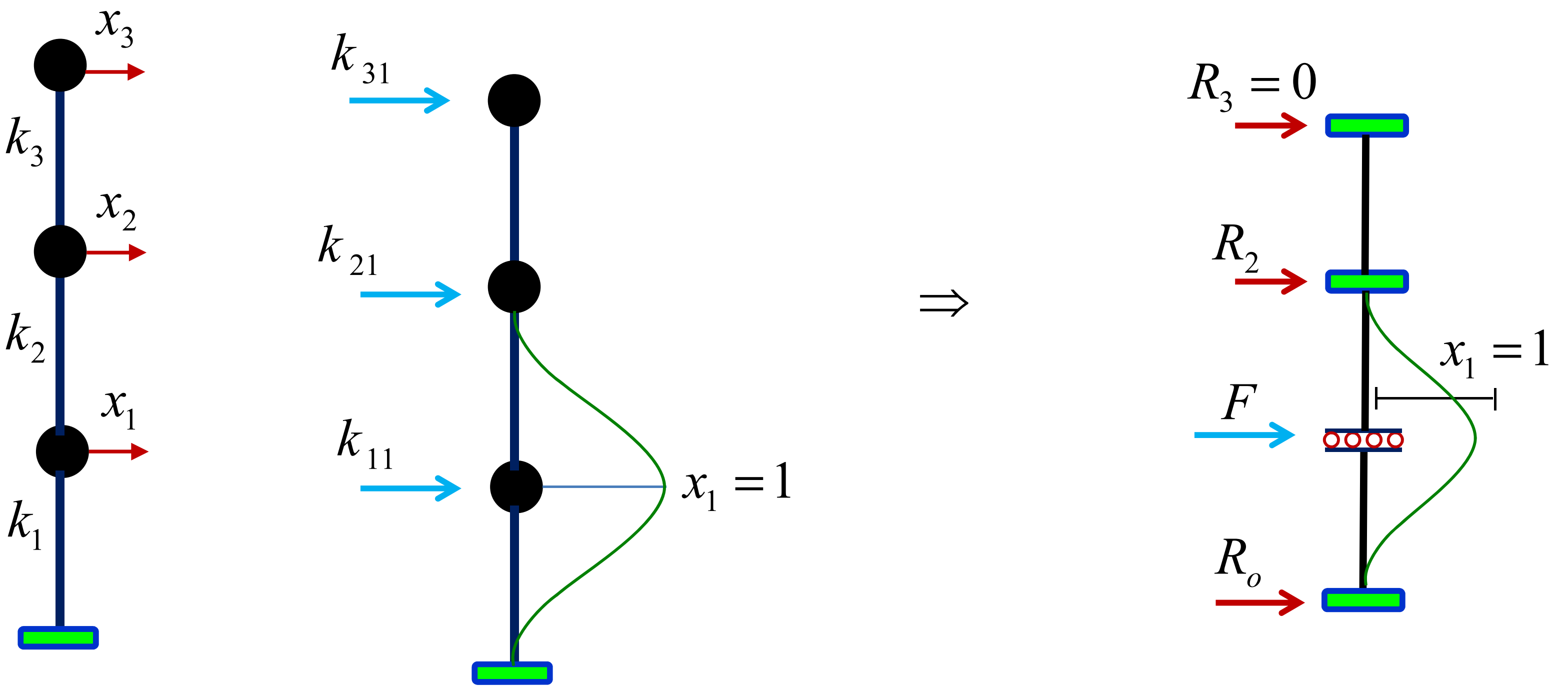
مثال 1- با استفاده از روش مستقیم ماتریس سختی سیستم 3 درجه آزاد نشان داده شده را محاسبه نمایید.



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

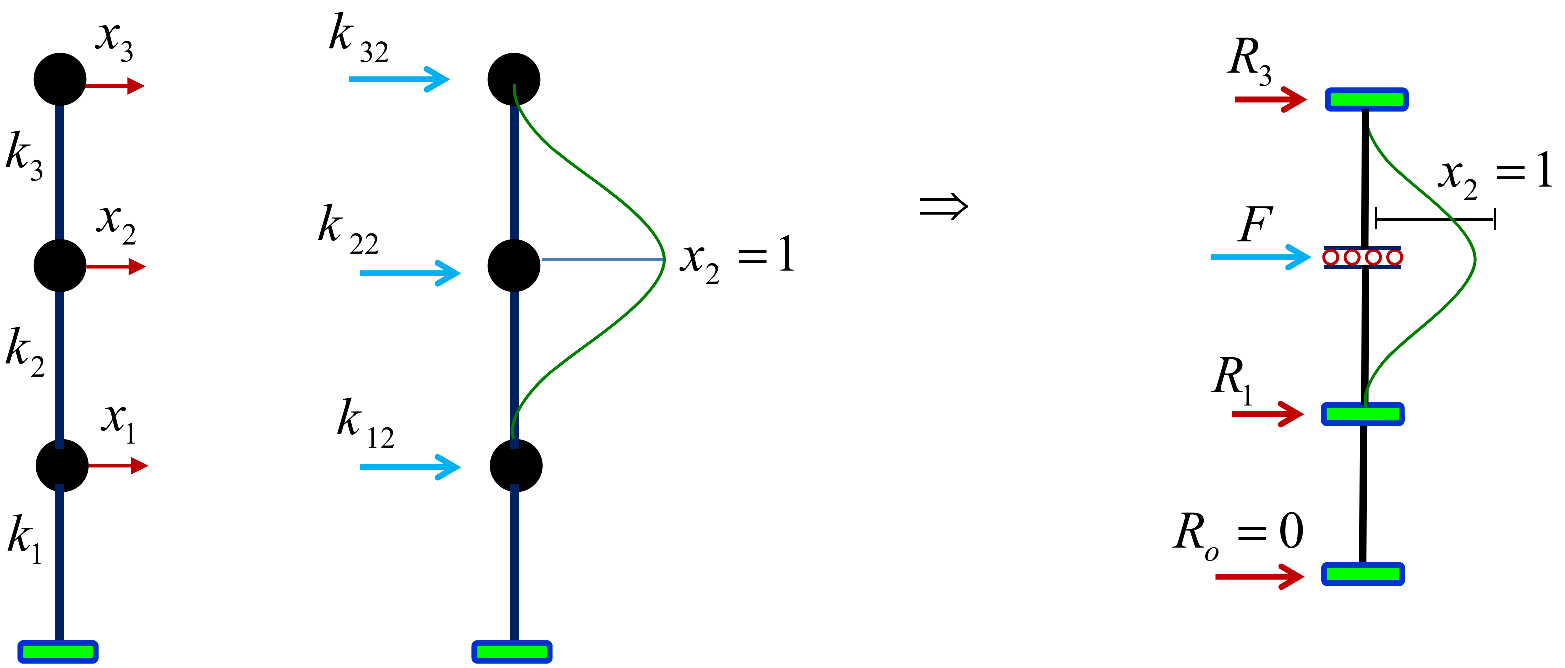
حل مثال 1-



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

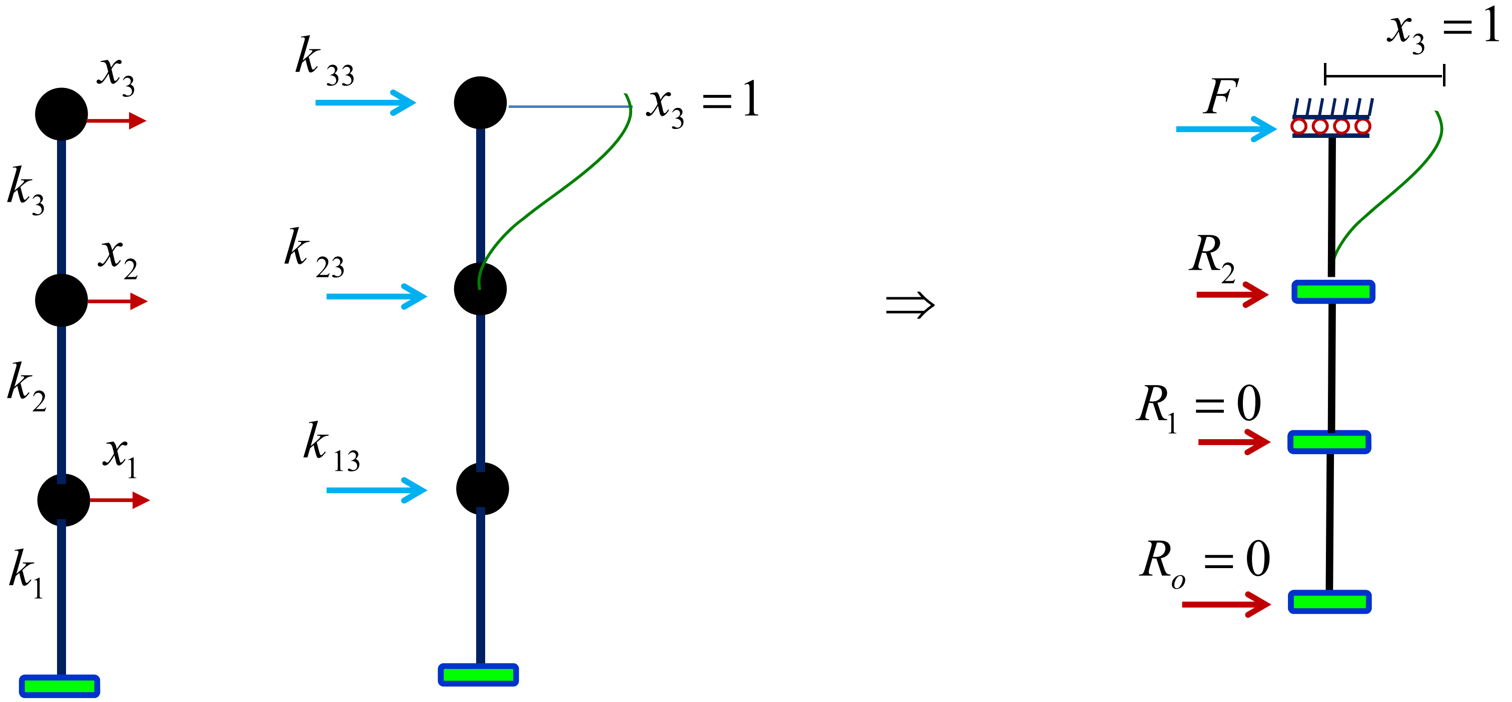
حل مثال 1-



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

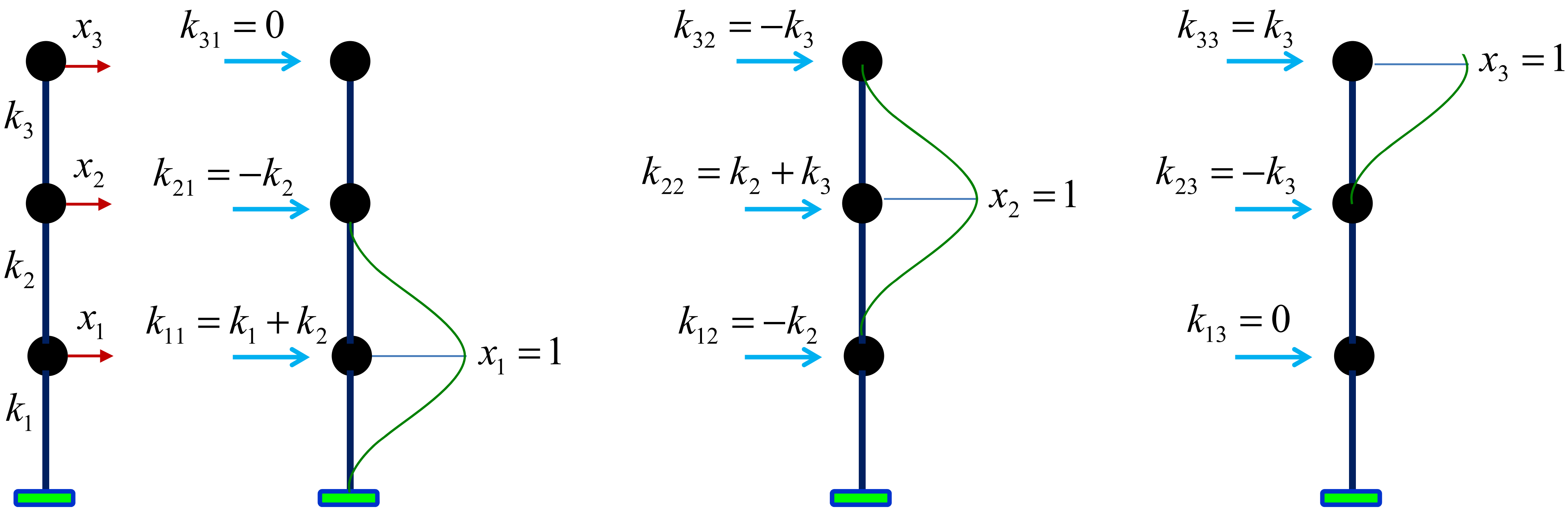
حل مثال 1-



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

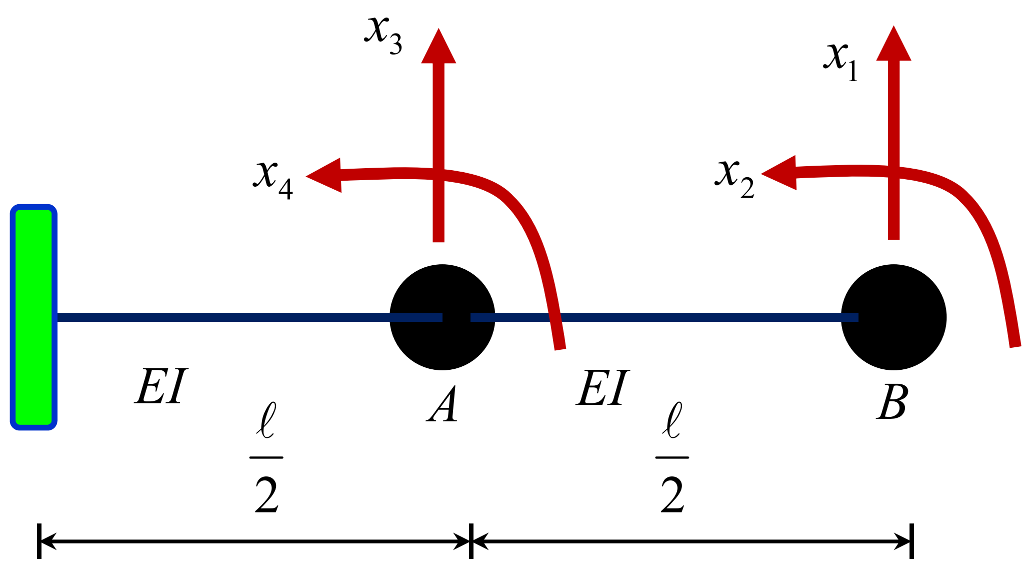
حل مثال 1-



$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}$$

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

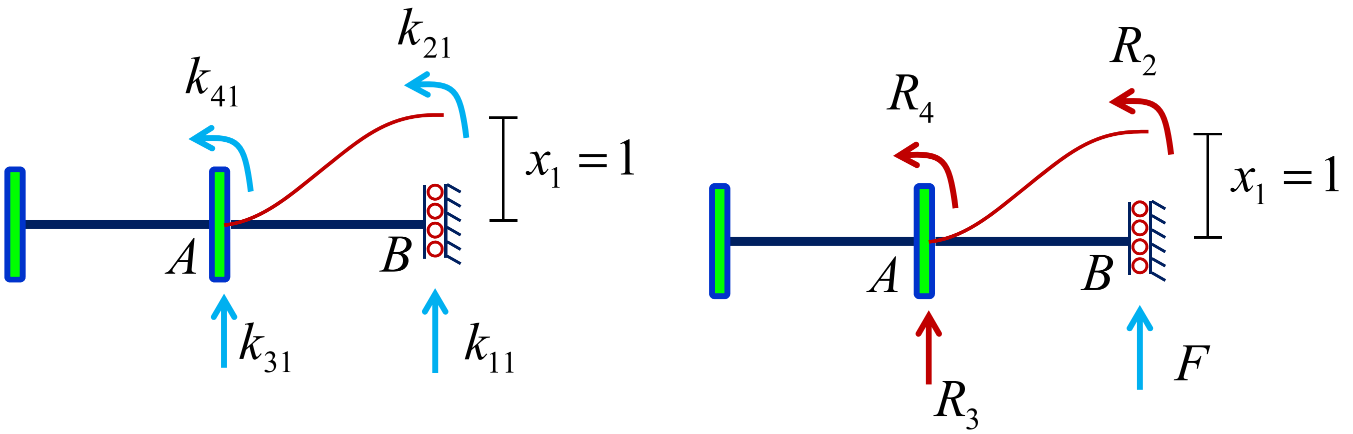
مثال 2- با استفاده از روش مستقیم ماتریسی سختی سیستم 4 درجه آزاد نشان داده شده را محاسبه نمایید.



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

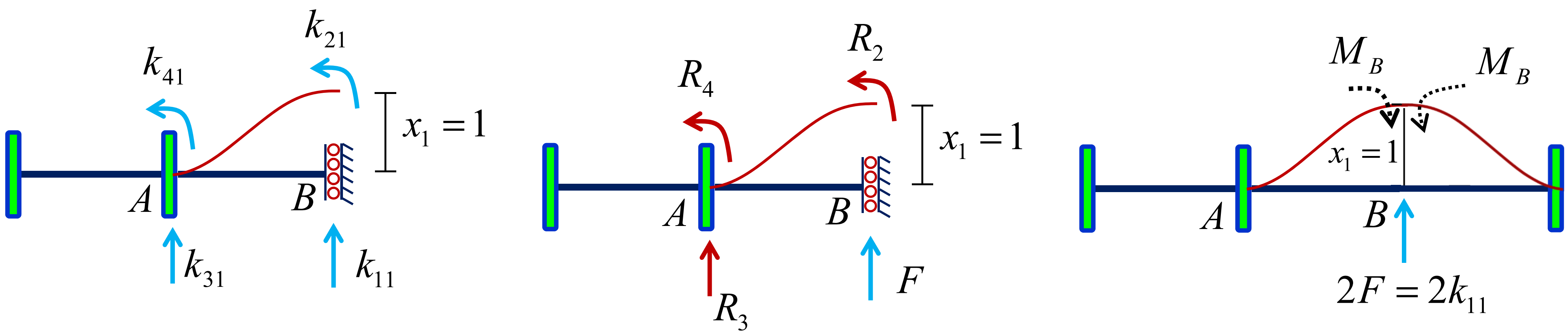
حل مثال 2-



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

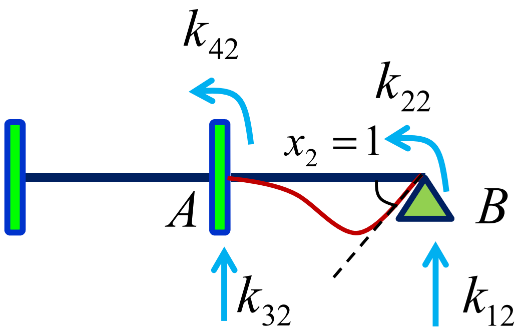
حل مثال 2-

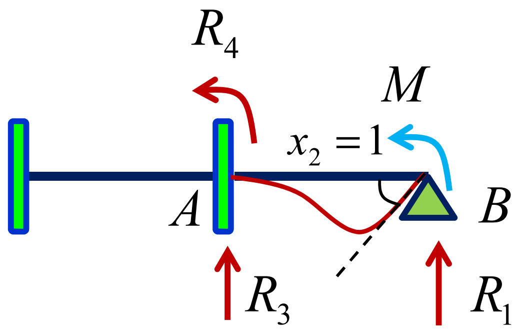


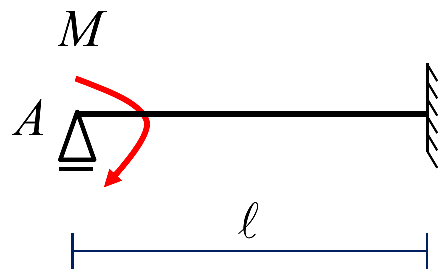
MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 2-







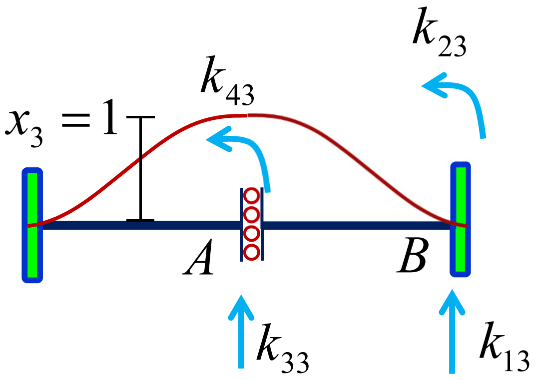
$$M_B = \frac{M}{2} \qquad \text{(M هم جهت با)}$$

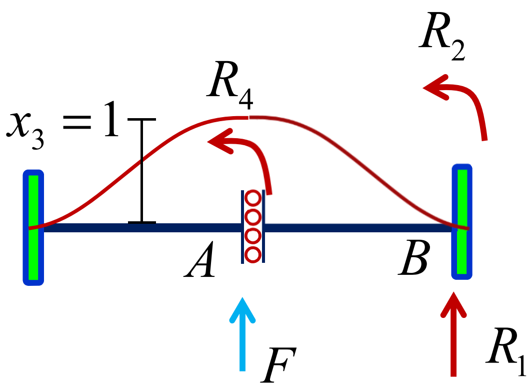
$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 2-

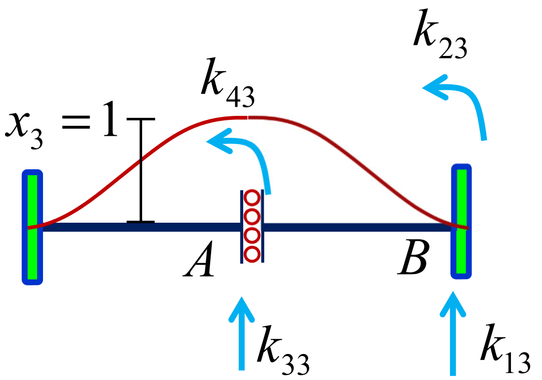


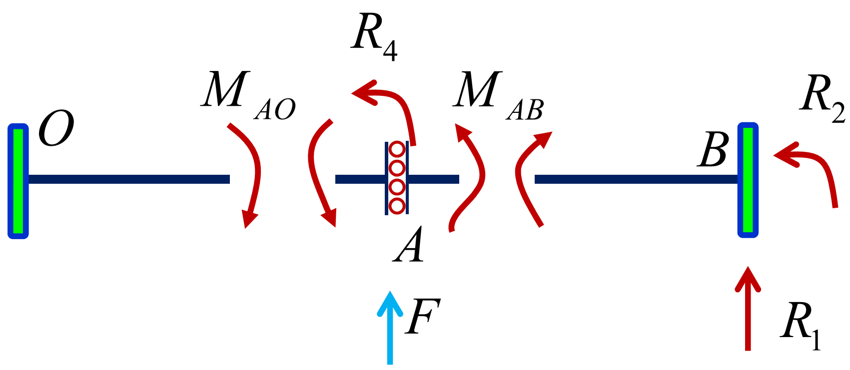


MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

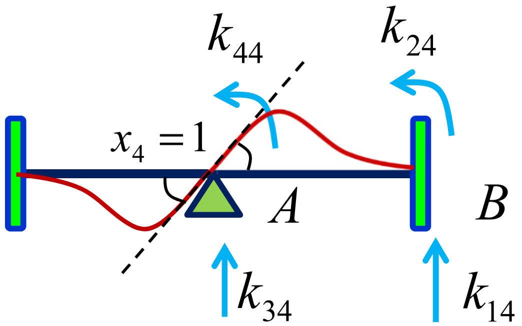
حل مثال 2-

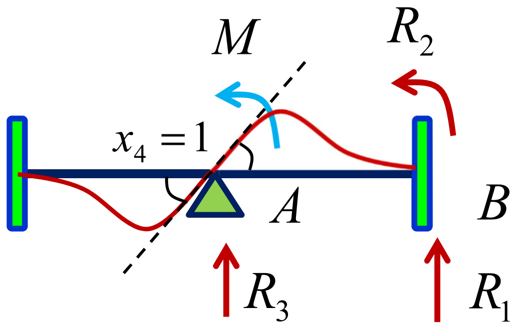


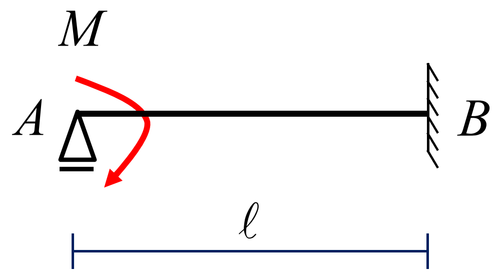


II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 2-







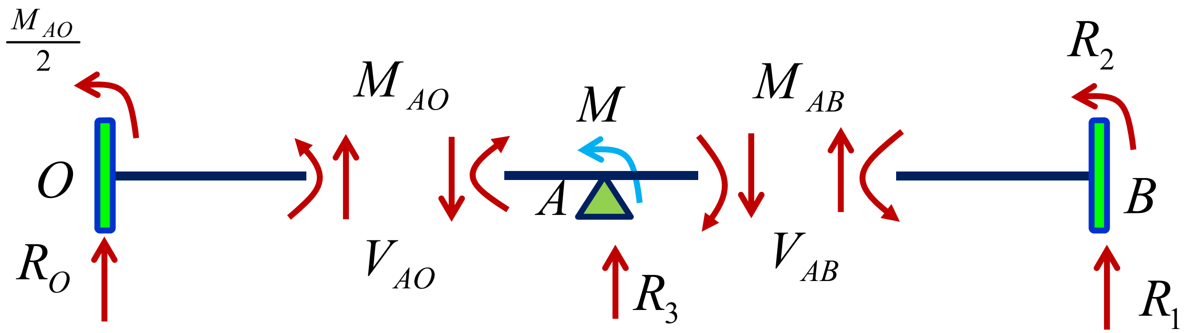
$$M_B = \frac{M}{2}$$ (هم جهت با M)

$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

MDOF: Equations of Motion

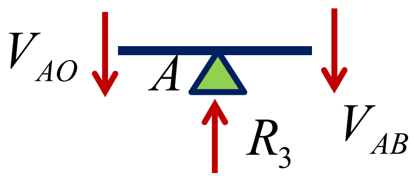
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 2-



برش سمت راست

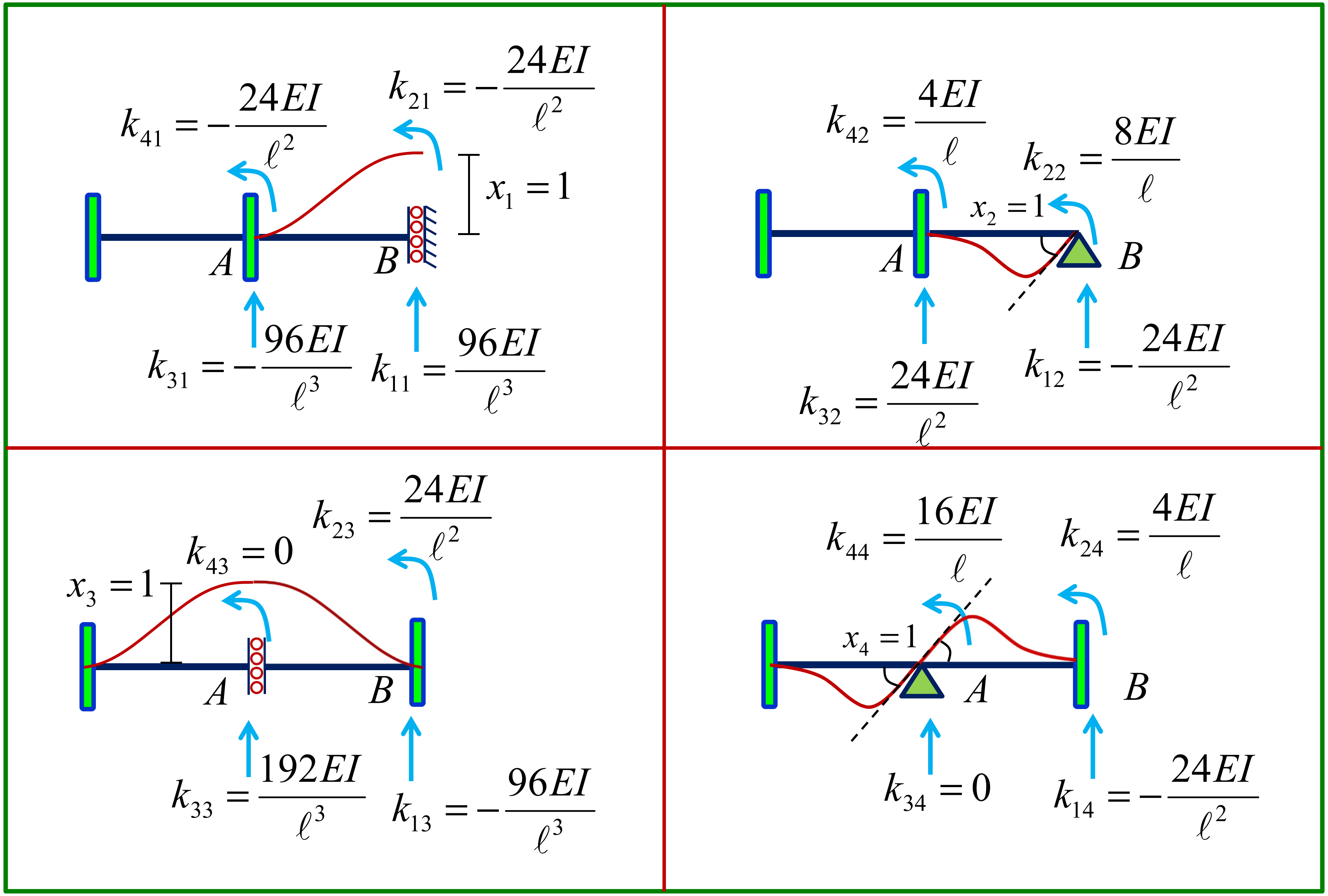
برش سمت چپ



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 2-



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 2-

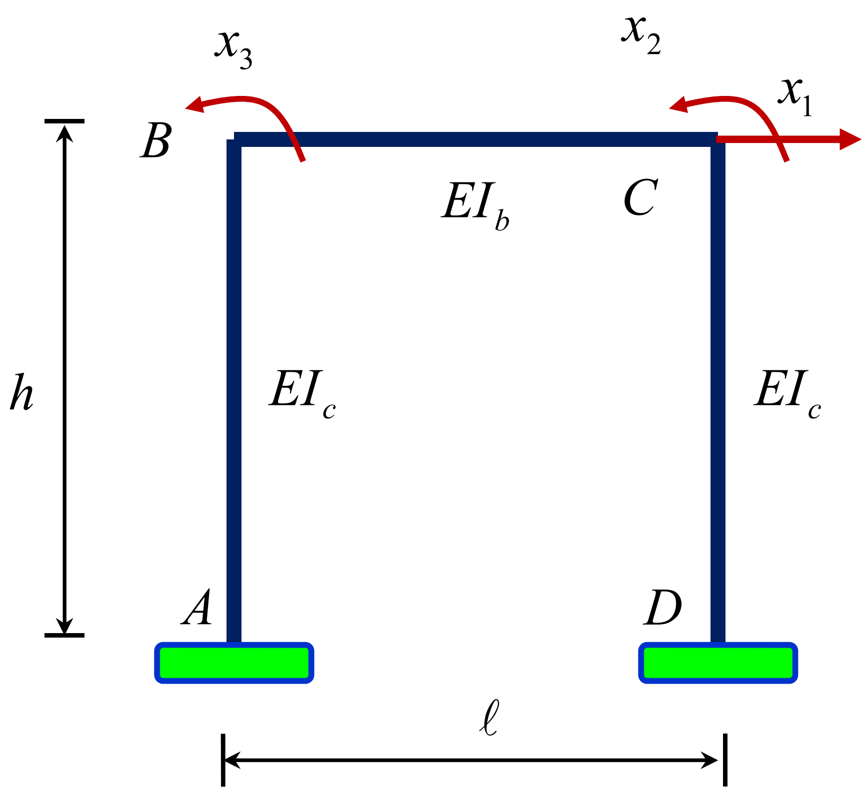
$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{96EI}{\ell^3} & -\frac{24EI}{\ell^2} & -\frac{96EI}{\ell^3} & -\frac{24EI}{\ell^2} \\ -\frac{24EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{\ell} & \frac{24EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \\ -\frac{96EI}{\ell^3} & \frac{24EI}{\ell^2} & \frac{192EI}{\ell^3} & 0 \\ -\frac{24EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & \frac{16EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{[k]=\frac{8EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -3\ell & -12 & -3\ell \\ -3\ell & \ell^2 & 3\ell & \frac{1}{2}\ell^2 \\ -12 & 3\ell & 24 & 0 \\ -3\ell & \frac{1}{2}\ell^2 & 0 & 2\ell^2 \end{bmatrix}}$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

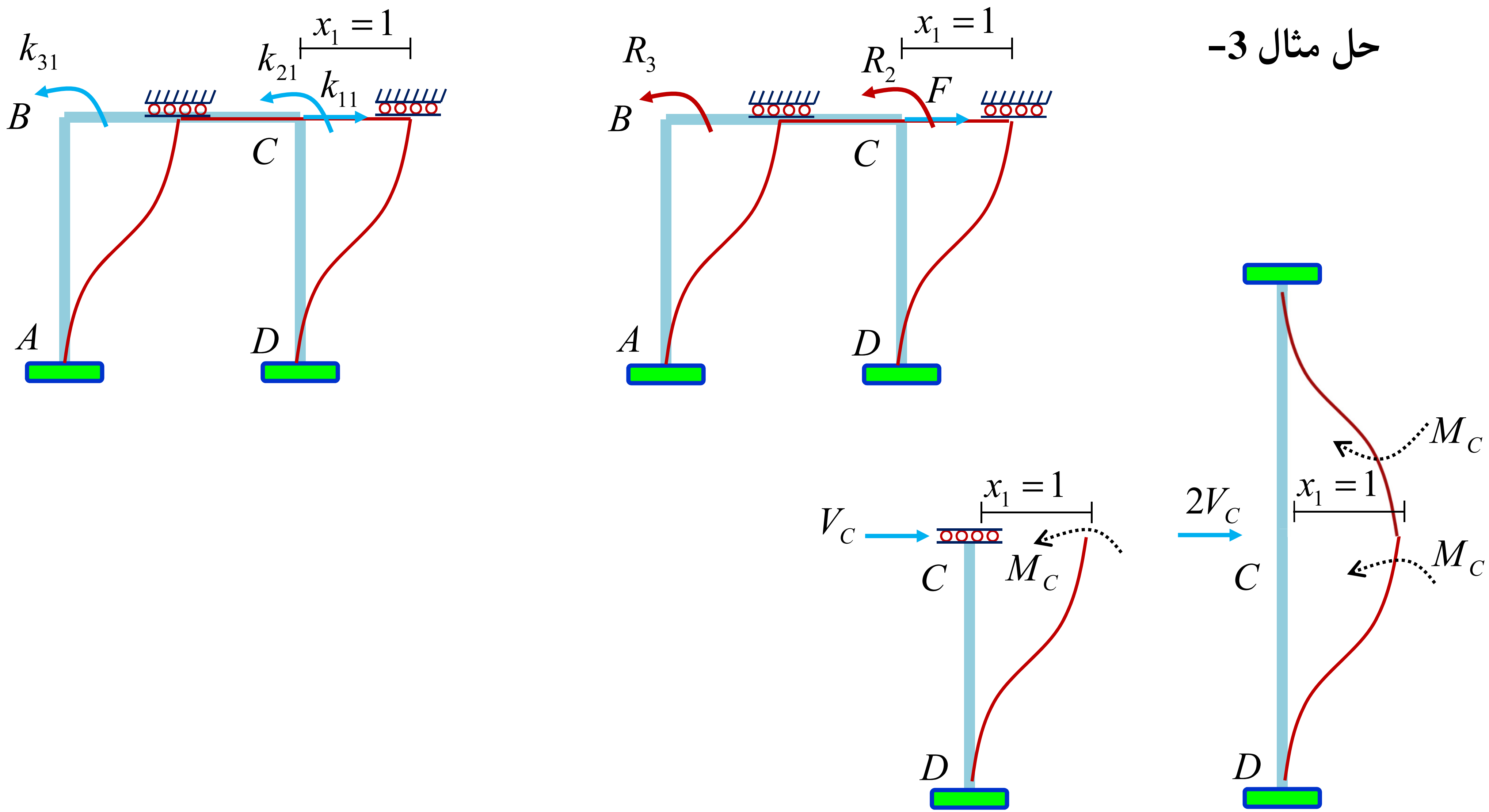
مثال 3- سختی قاب نشان داده شده با توجه به درجات آزادی مورد نظر را با استفاده از روش مستقیم ماتریس سختی محاسبه نمایید.



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

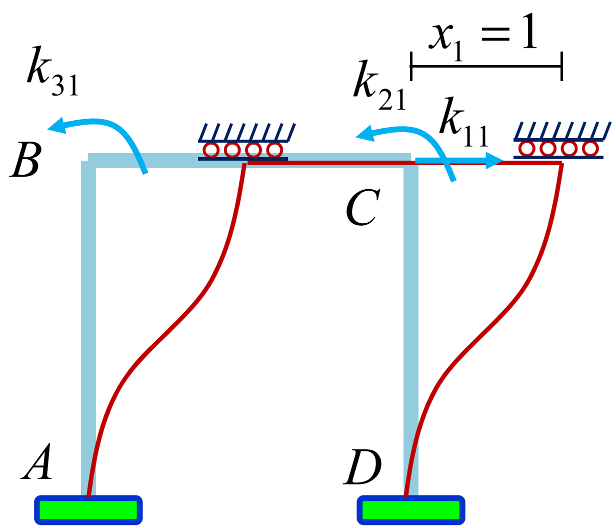
حل مثال 3-

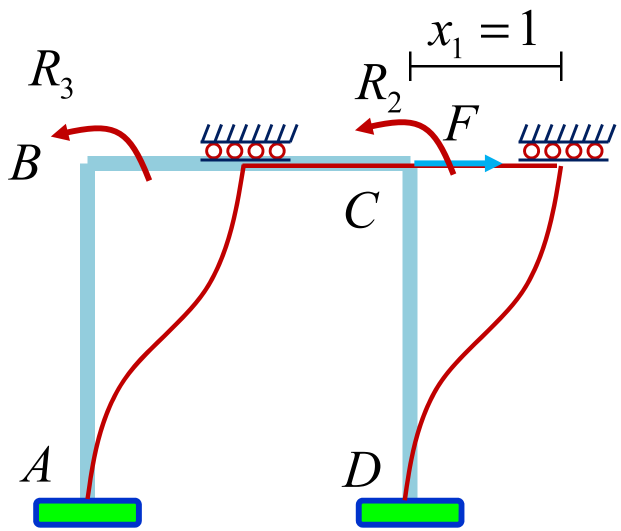


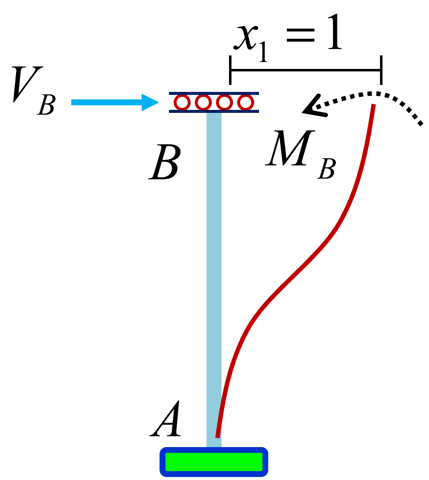
MDOF: Equations of Motion

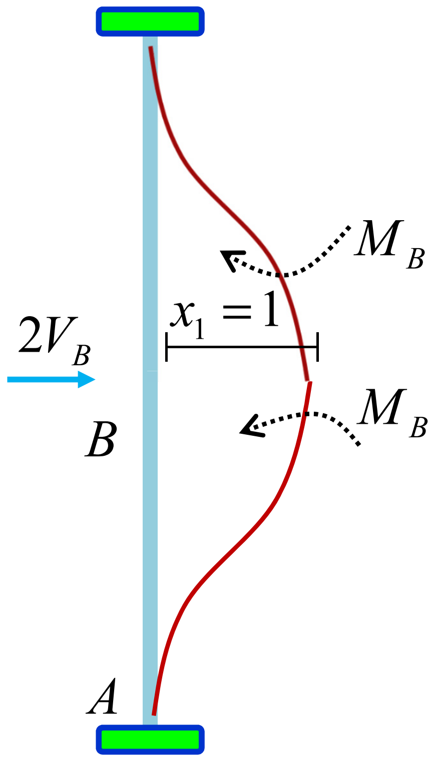
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 3-









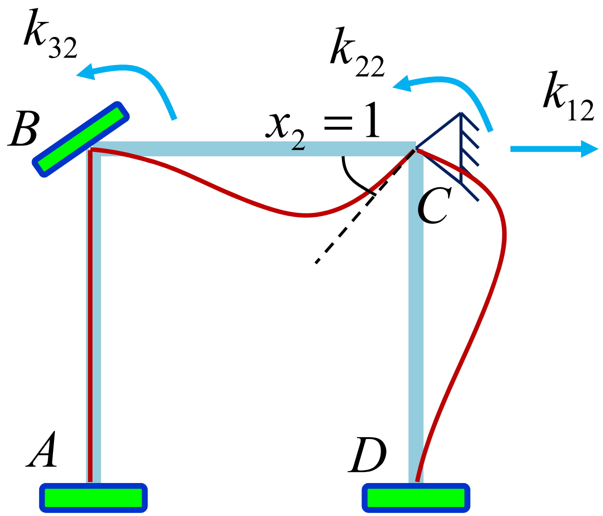
$$V_B = \frac{\frac{12EI_c}{h^3}}{2\times\frac{12EI_c}{h^3}}F = \frac{1}{2}F \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = \frac{k_{11}}{2}}$$

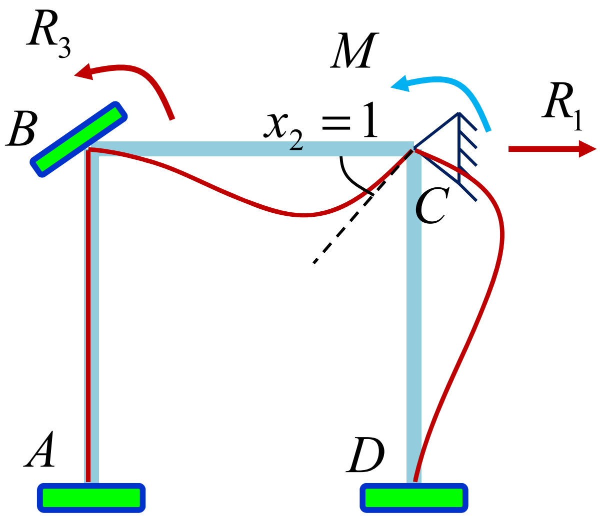
$$M_B = \frac{2pa^2b^2}{\ell^3} = \frac{2(2V_B)(h)^2(h)^2}{(2h)^3} = \frac{(k_{11})h}{4} = \frac{\frac{24EI_c}{h^3}h}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_3 = k_{31} = M_B = \frac{6EI_c}{h^2}}$$

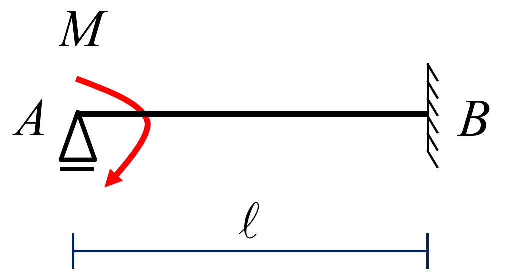
MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 3-

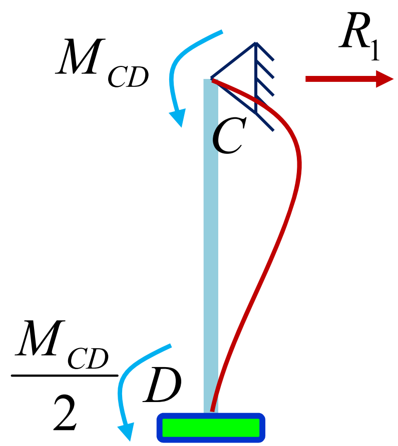






$$M_B = \frac{M}{2} \qquad \text{(هم جهت با M)}$$

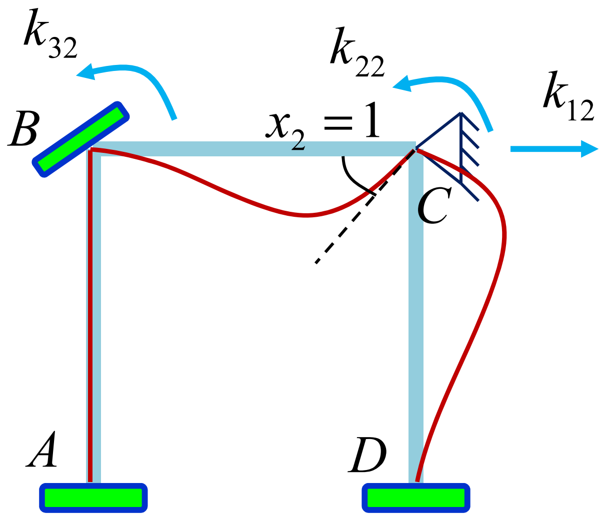
$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

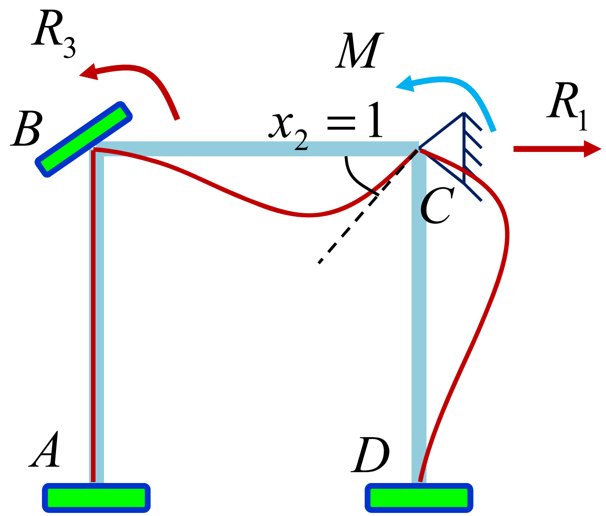


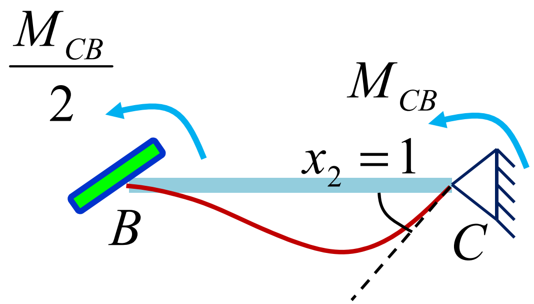
MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 3-



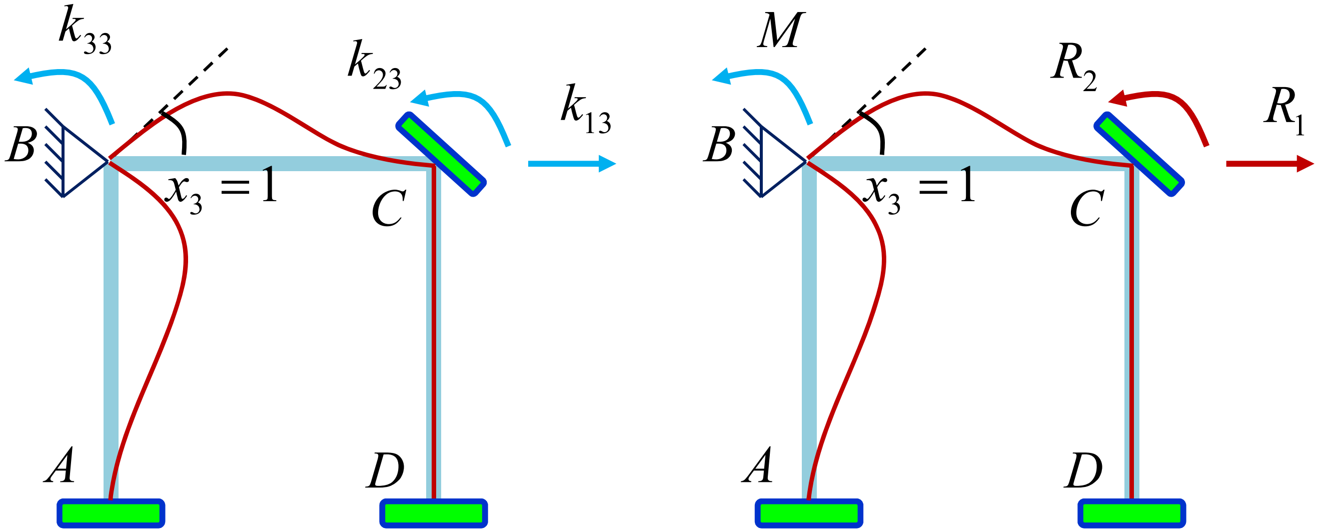


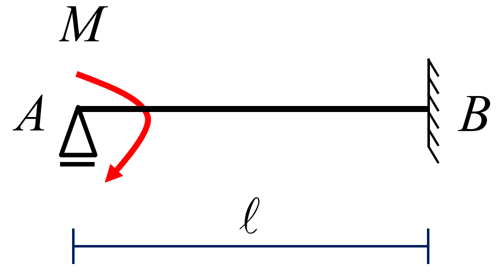


MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 3-





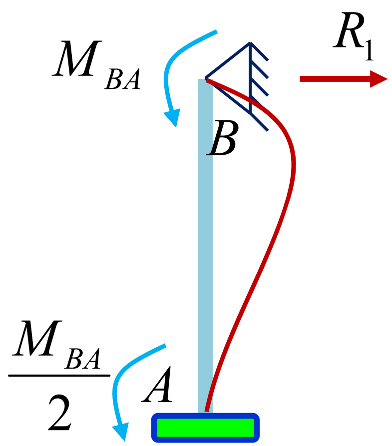
$$M_B = \frac{M}{2} \quad (\text{هم جهت با M})$$

$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

$$x_3 = \frac{M}{\frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{\ell}} = 1 \Rightarrow \boxed{M = k_{33} = \left(\frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{\ell}\right)}$$

$$M_{BA} = \frac{\frac{4EI_c}{h}}{\frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{\ell}} M \Rightarrow \boxed{M_{BA} = \frac{4EI_c}{h}}$$

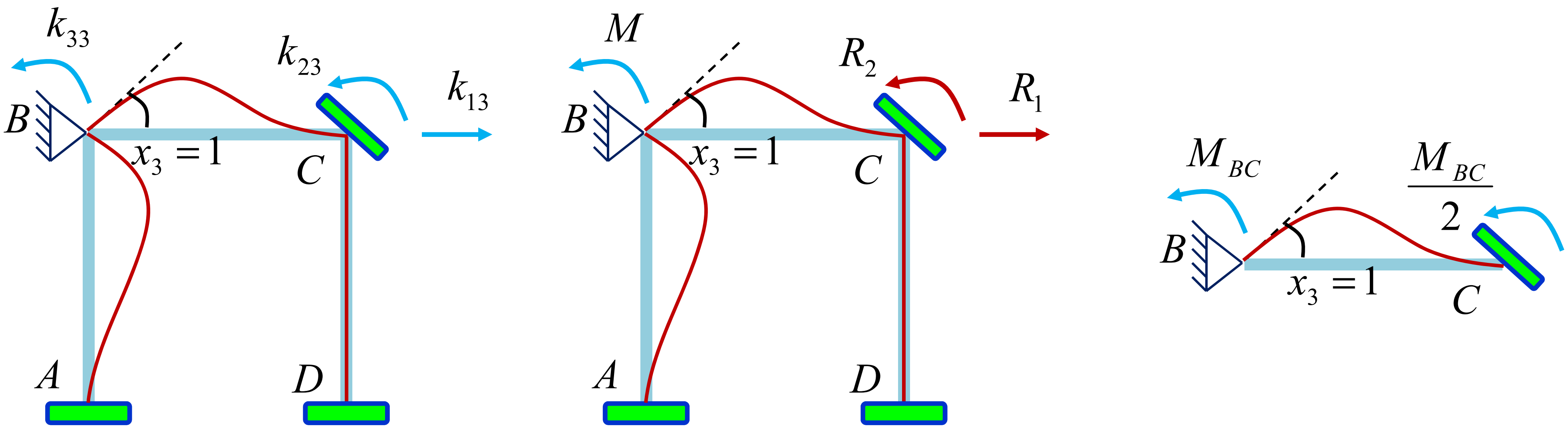
$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow R_1 h = M_{BA} + \frac{1}{2} M_{BA} \Rightarrow \boxed{R_1 = k_{13} = \frac{6EI_c}{h^2}}$$



MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 3-

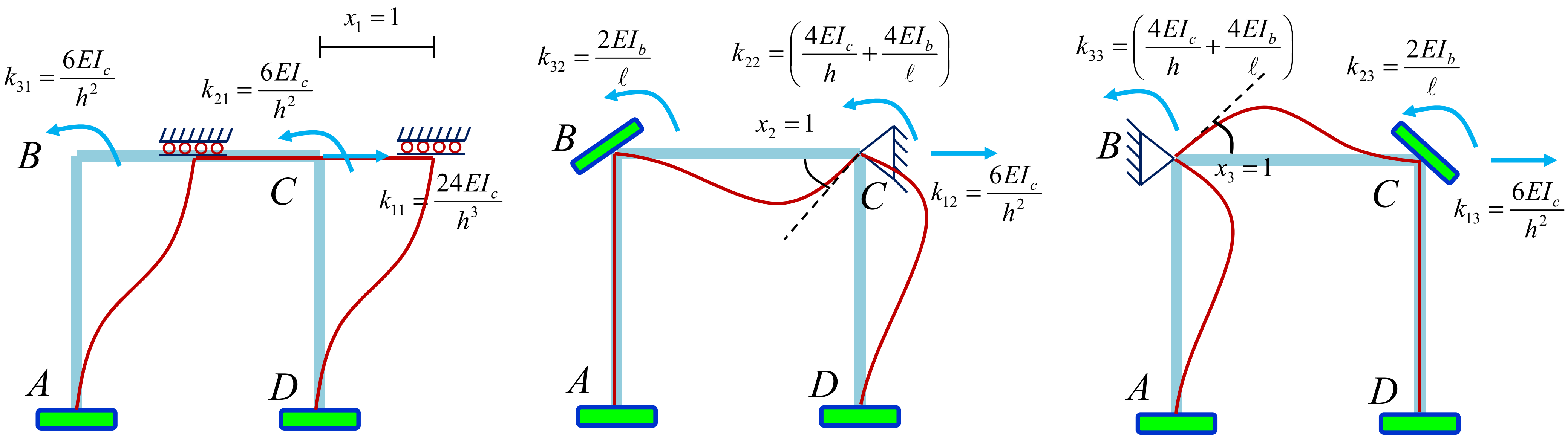


$$M_{BC} = \frac{\frac{4EI_b}{\ell}}{\frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{\ell}} M \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{BC} = \frac{4EI_b}{\ell}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_2 = k_{23} = \frac{M_{BC}}{2} = \frac{2EI_b}{\ell}}$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال 3-



$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24EI_c}{h^3} & \frac{6EI_c}{h^2} & \frac{6EI_c}{h^2} \\ \frac{6EI_c}{h^2} & \left(\frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{\ell}\right) & \frac{2EI_b}{\ell} \\ \frac{6EI_c}{h^2} & \frac{2EI_b}{\ell} & \left(\frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{\ell}\right) \end{bmatrix}$$

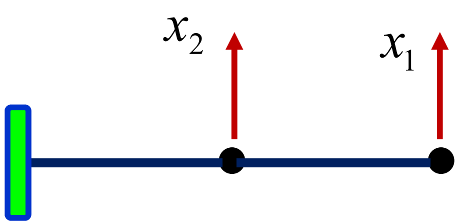
MDOF: Equations of Motion

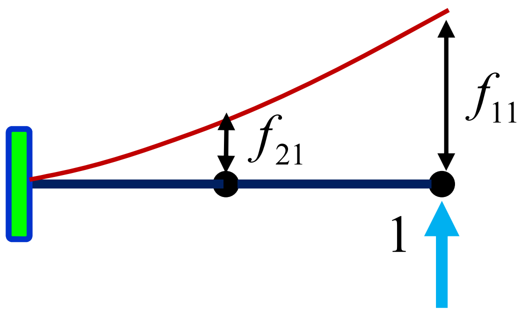
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

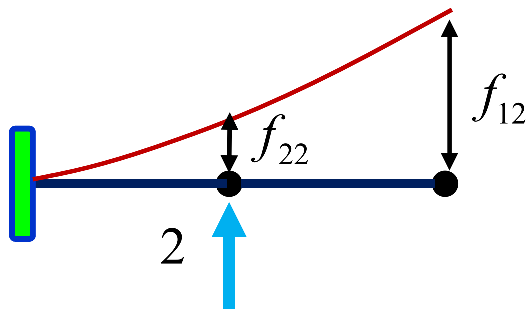
2) روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب نرمی

در سازه‌های معین نظیر شکل زیر، معمولا راحت‌تر است که ابتدا ماتریس نرمی تعیین شده و سپس با معکوس کردن آن، ماتریس سختی به دست آید.

ضریب تاثیر نرمی f_{ij} عبارت است از تغییرمکان در راستای درجه آزادی i اُم به علت تاثیر نیروی واحد در امتداد درجه آزادی j اُم





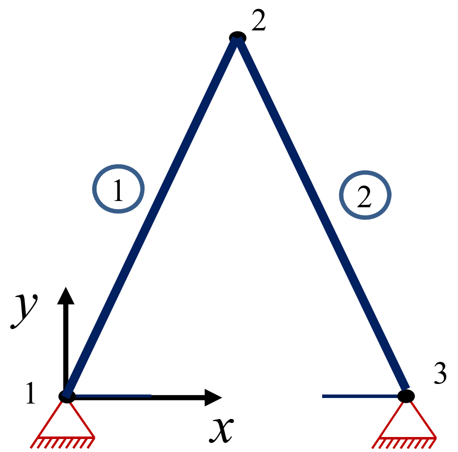


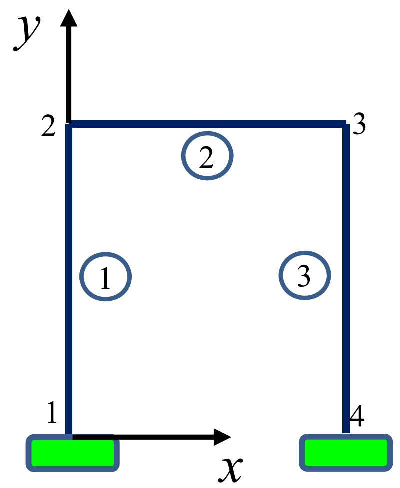
MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

در مسائل پیچیده برای تعیین مشخصات سازه از روش المان محدود استفاده می‌گردد. در این روش ابتدا سازه به مجموعه‌ای از المان‌های مجزا تقسیم‌بندی می‌شود که این المان‌ها توسط نقاط گرهی محدودی به یکدیگر متصل هستند، ابتدا مشخصه‌های هر کدام از اعضا به طور مجزا محاسبه می‌شود سپس از ترکیب مناسب آن‌ها (به طوری که شرایط تعادل و سازگاری در محل گره‌ها ارضا گردد) مشخصات کل سازه به دست می‌آید.



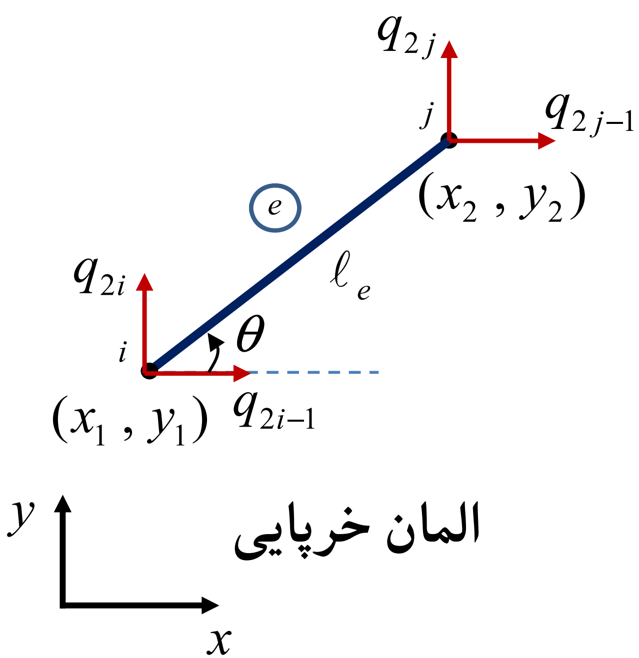


MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت اول : المان خرپایی



$$\ell_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\ell = \cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{\ell_e} \quad , \quad m = \sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{\ell_e} \qquad (10)$$

ماتریس تبدیل مختصات محلی به کلی به صورت زیر است:

$$\left[L^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \end{bmatrix} \qquad (11)$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت اول : المان خرپایی

ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات محلی برابر است با:

$$\left[k^{(e)\prime}\right]=\frac{EA}{\ell_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad (12)$$

ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left[k^{(e)}\right]=\left[L^{(e)}\right]^T\left[k^{(e)\prime}\right]\left[L^{(e)}\right] \quad \overset{(11)\,\&\,(12)}{\Rightarrow}$$

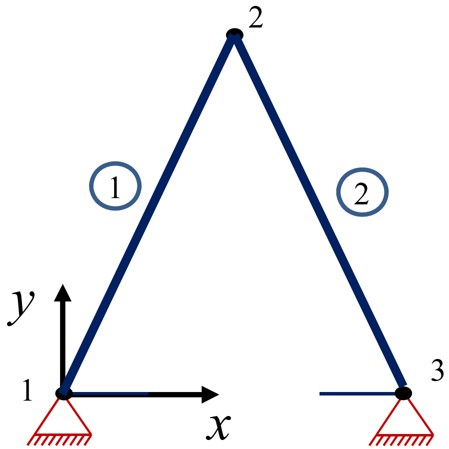
$$\left[k^{(e)}\right]=\frac{EA}{\ell_e}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}2i-1 & 2i & 2j-1 & 2j & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c}\ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m & 2i-1\\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 & 2i\\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m & 2j-1\\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 & 2j\end{array}\right]\end{array} \qquad (13)$$

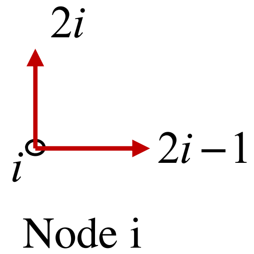
E : مدول الاستیسیته المان

A : سطح مقطع المان

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی





3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت اول : المان خرپایی

مراحل تشکیل ماتریس سختی

1) مختصات کلی تعیین می‌گردد (x,y) Establish General Coordinate

2) شماره‌گذاری اعضا و گره‌ها

3) $\left[k^e\right]$ ماتریس سختی برای هر عضو به کمک رابطه (13) محاسبه می‌شود.

$$\left[k^{(1)}\right]=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$\left[k^{(2)}\right]=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت اول : المان خرپایی

4) $[k]$ ماتریس سختی سازه در مختصات کلی به کمک Assemble کردن تمام $[k^e]$ ها و در نظر گرفتن درجات آزادی که مقید نمی‌باشند به دست می‌آید.

$$[k]=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad 3 & \quad\quad 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_{33}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(1)}+k_{34}^{(2)} \\ k_{43}^{(1)}+k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(1)}+k_{44}^{(2)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

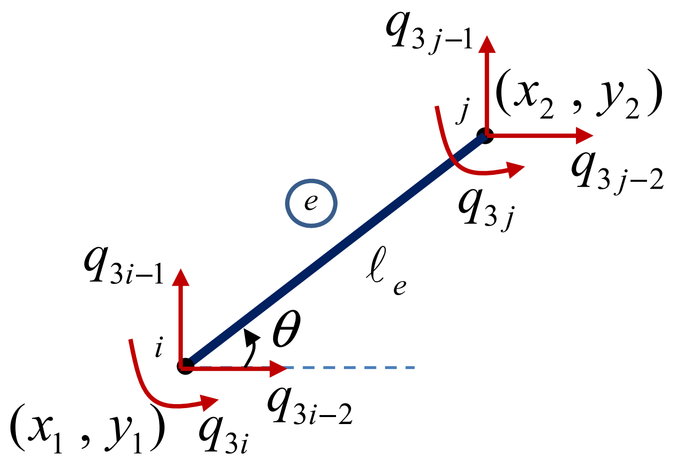
MDOF: Equations of Motion

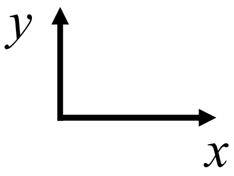
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت دوم : المان Frame

ماتریس تبدیل مختصات محلی به کلی به صورت زیر است:





المان Frame

$$\left[L^{(e)}\right]=\begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

MDOF: Equations of Motion

II.   محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت دوم : المان Frame

ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات محلی برابر است با:

$$\left[k^{(e)'}\right]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell_e^3} & \frac{6EI}{\ell_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell_e^3} & \frac{6EI}{\ell_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell_e^2} & \frac{4EI}{\ell_e} & 0 & -\frac{6EI}{\ell_e^2} & \frac{2EI}{\ell_e} \\ -\frac{EA}{\ell_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell_e^3} & -\frac{6EI}{\ell_e^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell_e^3} & -\frac{6EI}{\ell_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell_e^2} & \frac{2EI}{\ell_e} & 0 & -\frac{6EI}{\ell_e^2} & \frac{4EI}{\ell_e} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

E : مدول الاستیسیته المان

A : سطح مقطع المان

I : ممان اینرسی المان

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت دوم : المان Frame

ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left[k^{(e)}\right]=\left[L^{(e)}\right]^{T}\left[k^{(e)\prime}\right]\left[L^{(e)}\right] \quad \overset{(14)\,\&\,(15)}{\Rightarrow}$$

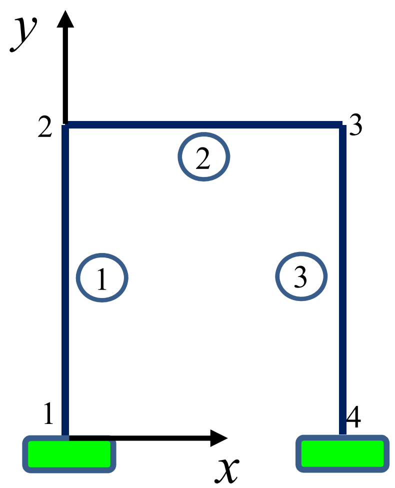
$$\left[k^{(e)}\right]=\frac{E}{\ell_e}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} 3i-2 & 3i-1 & 3i & 3j-2 & 3j-1 & 3j \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\left(A\ell^2+\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}m^2\right) & \left(A-\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\right)\ell m & -\frac{6I}{\ell_e}m & -\left(A\ell^2+\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}m^2\right) & \left(\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}-A\right)\ell m & -\frac{6I}{\ell_e}m \\
\left(A-\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\right)\ell m & \left(Am^2+\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\ell^2\right) & \frac{6I}{\ell_e}\ell & \left(\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}-A\right)\ell m & -\left(Am^2+\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\ell^2\right) & \frac{6I}{\ell_e}\ell \\
-\frac{6I}{\ell_e}m & \frac{6I}{\ell_e}\ell & 4I & \frac{6I}{\ell_e}m & -\frac{6I}{\ell_e}\ell & 2I \\
-\left(A\ell^2+\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}m^2\right) & \left(\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}-A\right)\ell m & \frac{6I}{\ell_e}m & \left(A\ell+\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}m^2\right) & \left(A-\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\right)\ell m & \frac{6I}{\ell_e}m \\
\left(\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}-A\right)\ell m & -\left(Am^2+\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\ell^2\right) & -\frac{6I}{\ell_e}\ell & \left(A-\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\right)\ell m & \left(Am^2-\frac{12I}{\ell_e^{\,2}}\ell^2\right) & -\frac{6I}{\ell_e}\ell \\
-\frac{6I}{\ell_e}m & \frac{6I}{\ell_e}\ell & 2I & \frac{6I}{\ell_e}m & -\frac{6I}{\ell_e}\ell & 4I
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{c} 3i-2 \\ 3i-1 \\ 3i \\ 3j-2 \\ 3j-1 \\ 3j \end{array}
\end{array}
\qquad (16)$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت دوم : المان Frame

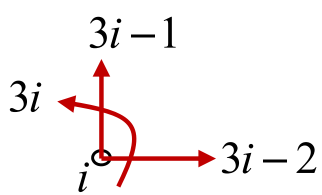


مراحل تشکیل ماتریس سختی

1) مختصات کلی تعیین می‌گردد (x,y) Establish General Coordinate

2) شماره‌گذاری اعضا و گره‌ها

3) $\left[k^e\right]$ ماتریس سختی برای هر عضو به کمک رابطه (16) محاسبه می‌شود.



Node i

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت دوم : المان Frame

$$[k^{(1)}]=\begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 1 & \quad\quad 2 & \quad\quad 3 & \quad\quad 4 & \quad\quad 5 & \quad\quad 6 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array}$$

$$[k^{(2)}]=\begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 4 & \quad\quad 5 & \quad\quad 6 & \quad\quad 7 & \quad\quad 8 & \quad\quad 9 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} & k_{47}^{(2)} & k_{48}^{(2)} & k_{49}^{(2)} \\ k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} & k_{57}^{(2)} & k_{58}^{(2)} & k_{59}^{(2)} \\ k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} & k_{67}^{(2)} & k_{68}^{(2)} & k_{69}^{(2)} \\ k_{74}^{(2)} & k_{75}^{(2)} & k_{76}^{(2)} & k_{77}^{(2)} & k_{78}^{(2)} & k_{79}^{(2)} \\ k_{84}^{(2)} & k_{85}^{(2)} & k_{86}^{(2)} & k_{87}^{(2)} & k_{88}^{(2)} & k_{89}^{(2)} \\ k_{94}^{(2)} & k_{95}^{(2)} & k_{96}^{(2)} & k_{97}^{(2)} & k_{98}^{(2)} & k_{99}^{(2)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array}$$

$$[k^{(3)}]=\begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 7 & \quad\quad 8 & \quad\quad 9 & \quad\quad 10 & \quad\quad 11 & \quad\quad 12 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} k_{77}^{(3)} & k_{78}^{(3)} & k_{79}^{(3)} & k_{7,10}^{(3)} & k_{7,11}^{(3)} & k_{7,12}^{(3)} \\ k_{87}^{(3)} & k_{88}^{(3)} & k_{89}^{(3)} & k_{8,10}^{(3)} & k_{8,11}^{(3)} & k_{8,12}^{(3)} \\ k_{97}^{(3)} & k_{98}^{(3)} & k_{99}^{(3)} & k_{9,10}^{(3)} & k_{9,11}^{(3)} & k_{9,12}^{(3)} \\ k_{10,7}^{(3)} & k_{10,8}^{(3)} & k_{10,9}^{(3)} & k_{10,10}^{(3)} & k_{10,11}^{(3)} & k_{10,12}^{(3)} \\ k_{11,7}^{(3)} & k_{11,8}^{(3)} & k_{11,9}^{(3)} & k_{11,10}^{(3)} & k_{11,11}^{(3)} & k_{11,12}^{(3)} \\ k_{12,7}^{(3)} & k_{12,8}^{(3)} & k_{12,9}^{(3)} & k_{12,10}^{(3)} & k_{12,11}^{(3)} & k_{12,12}^{(3)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{array}$$

MDOF: Equations of Motion

.II محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

3) روش المان محدود برای تعیین ماتریس سختی.

حالت دوم : المان Frame

4) $[k]$ ماتریس سختی سازه در مختصات کلی به کمک Assemble کردن تمام $[k^e]$ ها و در نظر گرفتن درجات آزادی که مقید نمی‌باشند به دست می‌آید.

$$[k]=\begin{array}{cc}
\begin{matrix} \quad 4 \quad & \quad 5 \quad & \quad 6 \quad & \quad 7 \quad & \quad 8 \quad & \quad 9 \quad \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
k_{44}^{(1)}+k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(1)}+k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(1)}+k_{46}^{(2)} & k_{47}^{(2)} & k_{48}^{(2)} & k_{49}^{(2)} \\
k_{54}^{(1)}+k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(1)}+k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(1)}+k_{56}^{(2)} & k_{57}^{(2)} & k_{58}^{(2)} & k_{59}^{(2)} \\
k_{64}^{(1)}+k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(1)}+k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(1)}+k_{66}^{(2)} & k_{67}^{(2)} & k_{68}^{(2)} & k_{69}^{(2)} \\
k_{74}^{(2)} & k_{75}^{(2)} & k_{76}^{(2)} & k_{77}^{(2)}+k_{77}^{(3)} & k_{78}^{(2)}+k_{78}^{(3)} & k_{79}^{(2)}+k_{79}^{(3)} \\
k_{84}^{(2)} & k_{85}^{(2)} & k_{86}^{(2)} & k_{87}^{(2)}+k_{87}^{(3)} & k_{88}^{(2)}+k_{88}^{(3)} & k_{89}^{(2)}+k_{89}^{(3)} \\
k_{94}^{(2)} & k_{95}^{(2)} & k_{96}^{(2)} & k_{97}^{(2)}+k_{97}^{(3)} & k_{98}^{(3)}+k_{98}^{(3)} & k_{99}^{(2)}+k_{99}^{(3)}
\end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}
\end{array}$$

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

روش‌های تعیین ماتریس جرم عبارت است از:

1) روش ماتریس جرم متمرکز
2) روش ماتریس جرم سازگار

1) ماتریس جرم متمرکز (Local Mass Matrix)

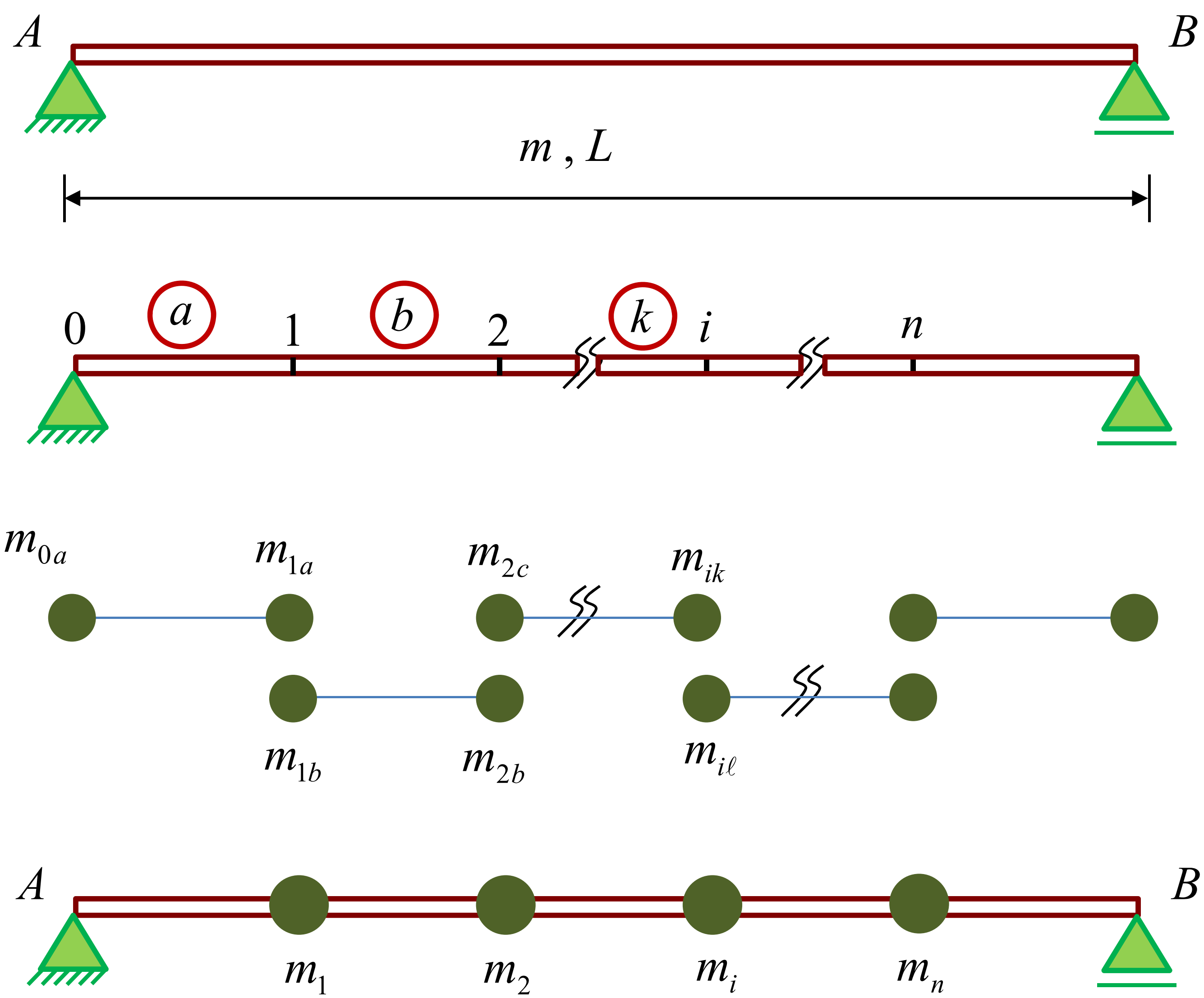
ساده‌ترین روش برای تعیین مشخصه‌های جرم در هر سازه‌ای، فرض متمرکز بودن جرم در نقاطی است که تغییرمکان‌های آن نقاط مورد نیاز می‌باشد. طبق روش متداول برای تعیین جرم متمرکزی که می‌باید در هر گره در نظر گرفته شود، فرض می‌گردد که سازه به قطعاتی تقسیم شده و گره‌ها در نقاط اتصال این قطعات به یکدیگر باشند.

جرم هر قطعه به صورت جرم‌های متمرکز نقطه‌ای در گره‌های دو انتهای آن فرض می‌شود. توزیع جرم قطعات در این نقاط، از محاسبات استاتیک تعیین می‌گردد. بنابراین، جرم کل متمرکز در هر گره از سازه، برابر با مجموع سهمی از جرم‌هایی است که از هر قطعه متصل به آن گره می‌رسد.

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

1) ماتریس جرم متمرکز (Local Mass Matrix)



$$m_1 = m_{1a} + m_{1b}$$
$$m_2 = m_{2c} + m_{2b}$$
$$\vdots$$
$$m_i = m_{ik} + m_{i\ell}$$

نمایش نحوه متمرکز کردن جرم در گره‌ها

MDOF: Equations of Motion

II.   محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

1) ماتریس جرم متمرکز (Local Mass Matrix)

در روش ماتریس جرم متمرکز جملات غیر قطری ماتریس m_{ij} همگی صفر هستند. زیرا شتاب هر جرم نقطه‌ای باعث ایجاد نیروی اینرسی در آن نقطه می‌گردد. واضح است که نیروی اینرسی نقطه i در اثر شتاب واحد در نقطه i برابر با جرم متمرکز در همان نقطه است. بنابراین در یک سیستم با جرم متمرکز ضریب تاثیر جرم m_{ii} برابر با m_i است و $m_{ij} = 0$ به ازای $i \neq j$ می‌باشد.

در سیستمی که فقط درجات آزادی تغییرمکانی جانبی برای آن تعیین شده باشد، ماتریس جرم متمرکز به صورت قطری خواهد بود و برای مثال تیر قبلی خواهیم داشت:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

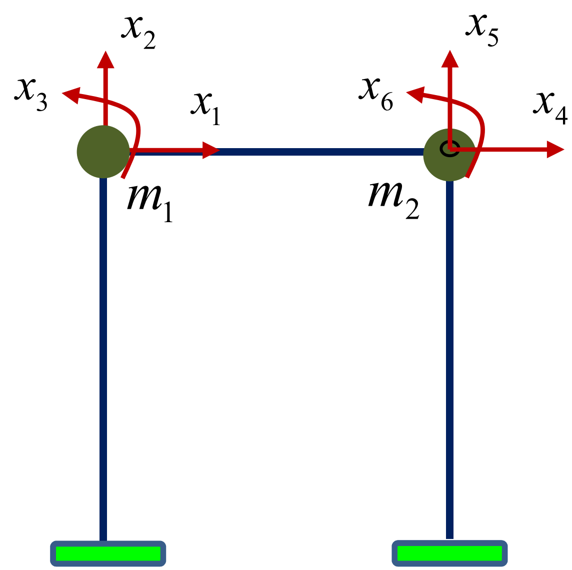
MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

1) ماتریس جرم متمرکز (Local Mass Matrix)

هر گاه در هر گره بیش از یک درجه آزادی جابجایی در نظر گرفته شده باشد، جرم آن نقطه در هر کدام از درجات آزادی مذکور مشارکت خواهد داشت. از طرف دیگر به علت فرض تمرکز جرم در نقاط، اینرسی چرخشی وجود نخواهد داشت و جرم متناظر با هر یک از درجات آزادی چرخشی صفر خواهد بود. اگر یک جسم صلب دارای اینرسی چرخشی معینی در رابطه با درجه آزادی چرخشی باشد، ضریب قطری برای آن درجه آزادی، اینرسی چرخشی جرم خواهد بود.

$$[m] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$



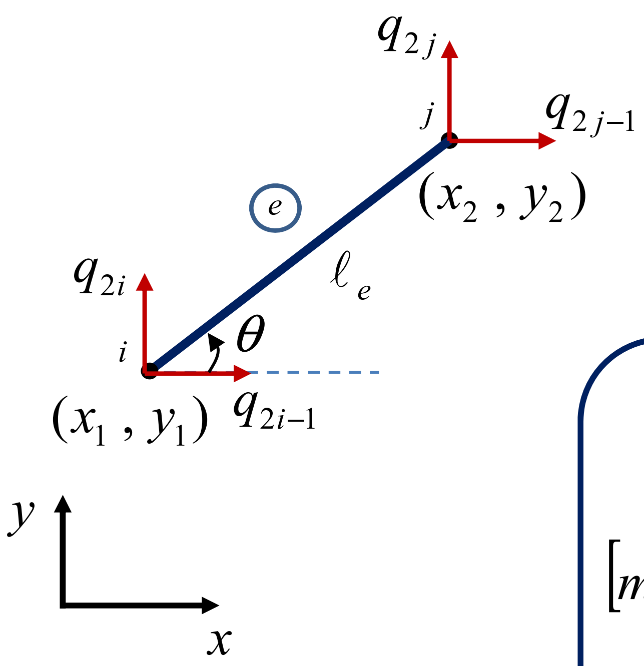
MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)

با استفاده از مفهوم المان محدود، مشابه با روش محاسبه ماتریس سختی، می‌توان ماتریس جرم اعضای یک سازه را محاسبه نمود.

حالت اول : المان خرپایی



ماتریس جرم المان در دستگاه مختصات کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

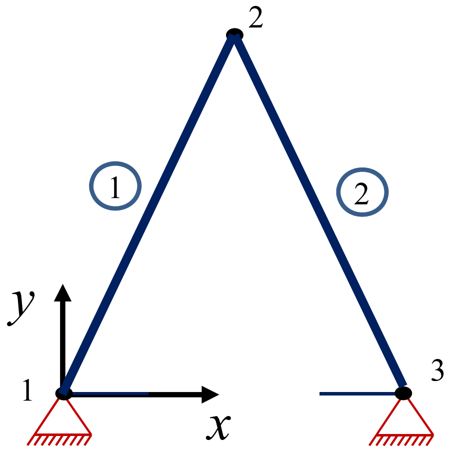
$$\left[m^{(e)}\right]=\frac{\rho A\ell_e}{6}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2i-1 & 2i & 2j-1 & 2j \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{array} \quad (17)$$

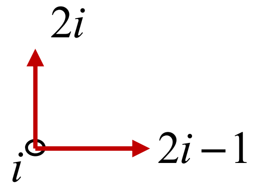
ρ : جرم واحد حجم المان

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)





Node i

حالت اول : المان خرپایی

مراحل تشکیل ماتریس جرم

1) مختصات کلی تعیین می‌گردد (x,y) Establish General Coordinate

2) شماره‌گذاری اعضا و گره‌ها

3) $\left[m^e\right]$ ماتریس جرم برای هر عضو به کمک رابطه (17) محاسبه می‌شود.

$$\left[m^{(1)}\right]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & m_{13}^{(1)} & m_{14}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & m_{23}^{(1)} & m_{24}^{(1)} \\ m_{31}^{(1)} & m_{32}^{(1)} & m_{33}^{(1)} & m_{34}^{(1)} \\ m_{41}^{(1)} & m_{42}^{(1)} & m_{43}^{(1)} & m_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \qquad \left[m^{(2)}\right]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{33}^{(2)} & m_{34}^{(2)} & m_{35}^{(2)} & m_{36}^{(2)} \\ m_{43}^{(2)} & m_{44}^{(2)} & m_{45}^{(2)} & m_{46}^{(2)} \\ m_{53}^{(2)} & m_{54}^{(2)} & m_{55}^{(2)} & m_{56}^{(2)} \\ m_{63}^{(2)} & m_{64}^{(2)} & m_{65}^{(2)} & m_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)

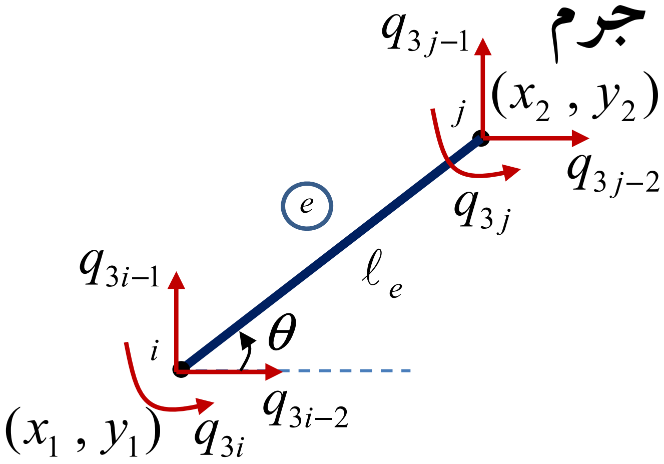
حالت اول : المان خرپایی

4) $[m]$ ماتریس جرم سازه در مختصات کلی به کمک Assemble کردن تمام $[m^e]$ ها و در نظر گرفتن درجات آزادی که مقید نمی‌باشند به دست می‌آید.

$$[m]=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} m_{33}^{(1)}+m_{33}^{(2)} & m_{34}^{(1)}+m_{34}^{(2)} \\ m_{43}^{(1)}+m_{43}^{(2)} & m_{44}^{(1)}+m_{44}^{(2)} \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

MDOF: Equations of Motion

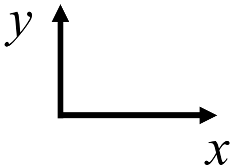
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم



2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)

حالت دوم : المان Frame

ماتریس جرم المان در دستگاه مختصات محلی برابر است با:



المان Frame

$$\left[m^{(e)'}\right]=\frac{\rho A\ell_e}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22\ell_e & 0 & 54 & -13\ell_e \\ 0 & 22\ell_e & 4\ell_e^{\,2} & 0 & 13\ell_e & -3\ell_e^{\,2} \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13\ell_e & 0 & 156 & -22\ell_e \\ 0 & -13\ell_e & -3\ell_e^{\,2} & 0 & -22\ell_e & 4\ell_e^{\,2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)

حالت دوم : المان Frame

ماتریس جرم المان در دستگاه مختصات کلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left[m^{(e)}\right]=\left[L^{(e)}\right]^T\left[m^{(e)'}\right]\left[L^{(e)}\right] \quad \overset{(14)\ \&\ (18)}{\Rightarrow}$$

$$\left[m^{(e)}\right]=\frac{\rho A\ell_e}{420}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 3i-2 & 3i-1 & 3i & 3j-2 & 3j-1 & 3j \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc}
\left(140\ell^2+156m^2\right) & -16\ell m & -22\ell_e m & \left(70\ell^2+54m^2\right) & 16\ell m & 13\ell_e m \\
-16\ell m & \left(156\ell^2+140m^2\right) & 22\ell_e\ell & 16\ell m & \left(54\ell^2+70m^2\right) & -13\ell_e\ell \\
-22\ell_e m & 22\ell_e\ell & 4\ell_e^2 & -13\ell_e m & 13\ell_e\ell & -3\ell_e^2 \\
\left(70\ell^2+54m^2\right) & 16\ell m & -13\ell_e m & \left(140\ell^2+156m^2\right) & -16\ell m & 22\ell_e m \\
16\ell m & \left(54\ell^2+70m^2\right) & 13\ell_e\ell & -16\ell m & \left(156\ell^2+140m^2\right) & -22\ell_e\ell \\
13\ell_e m & -13\ell_e\ell & -3\ell_e^2 & 22\ell_e m & -22\ell_e\ell & 4\ell_e^2
\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c} 3i-2 \\ 3i-1 \\ 3i \\ 3j-2 \\ 3j-1 \\ 3j \end{array} \qquad (19)$$

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)

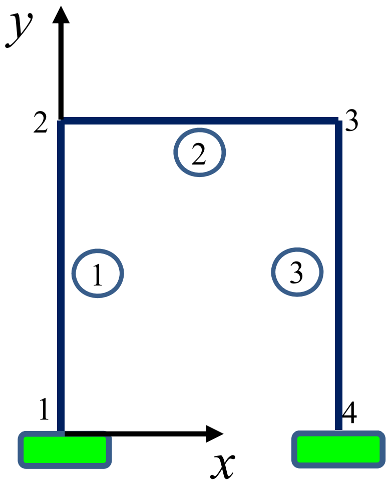
حالت دوم : المان Frame

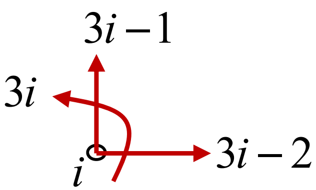
مراحل تشکیل ماتریس جرم

1) مختصات کلی تعیین می‌گردد (x,y) Establish General Coordinate

2) شماره‌گذاری اعضا و گره‌ها

3) $\left[m^e\right]$ ماتریس جرم برای هر عضو به کمک رابطه (19) محاسبه می‌شود.





Node i

MDOF: Equations of Motion

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)

حالت دوم : المان Frame

$$[m^{(1)}] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & m_{13}^{(1)} & m_{14}^{(1)} & m_{15}^{(1)} & m_{16}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & m_{23}^{(1)} & m_{24}^{(1)} & m_{25}^{(1)} & m_{26}^{(1)} \\ m_{31}^{(1)} & m_{32}^{(1)} & m_{33}^{(1)} & m_{34}^{(1)} & m_{35}^{(1)} & m_{36}^{(1)} \\ m_{41}^{(1)} & m_{42}^{(1)} & m_{43}^{(1)} & m_{44}^{(1)} & m_{45}^{(1)} & m_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & m_{52}^{(1)} & m_{53}^{(1)} & m_{54}^{(1)} & m_{55}^{(1)} & m_{56}^{(1)} \\ m_{61}^{(1)} & m_{62}^{(1)} & m_{63}^{(1)} & m_{64}^{(1)} & m_{65}^{(1)} & m_{66}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

$$[m^{(2)}] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} m_{44}^{(2)} & m_{45}^{(2)} & m_{46}^{(2)} & m_{47}^{(2)} & m_{48}^{(2)} & m_{49}^{(2)} \\ m_{54}^{(2)} & m_{55}^{(2)} & m_{56}^{(2)} & m_{57}^{(2)} & m_{58}^{(2)} & m_{59}^{(2)} \\ m_{64}^{(2)} & m_{65}^{(2)} & m_{66}^{(2)} & m_{67}^{(2)} & m_{68}^{(2)} & m_{69}^{(2)} \\ m_{74}^{(2)} & m_{75}^{(2)} & m_{76}^{(2)} & m_{77}^{(2)} & m_{78}^{(2)} & m_{79}^{(2)} \\ m_{84}^{(2)} & m_{85}^{(2)} & m_{86}^{(2)} & m_{87}^{(2)} & m_{88}^{(2)} & m_{89}^{(2)} \\ m_{94}^{(2)} & m_{95}^{(2)} & m_{96}^{(2)} & m_{97}^{(2)} & m_{98}^{(2)} & m_{99}^{(2)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

$$[m^{(3)}] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} m_{77}^{(3)} & m_{78}^{(3)} & m_{79}^{(3)} & m_{7,10}^{(3)} & m_{7,11}^{(3)} & m_{7,12}^{(3)} \\ m_{87}^{(3)} & m_{88}^{(3)} & m_{89}^{(3)} & m_{8,10}^{(3)} & m_{8,11}^{(3)} & m_{8,12}^{(3)} \\ m_{97}^{(3)} & m_{98}^{(3)} & m_{99}^{(3)} & m_{9,10}^{(3)} & m_{9,11}^{(3)} & m_{9,12}^{(3)} \\ m_{10,7}^{(3)} & m_{10,8}^{(3)} & m_{10,9}^{(3)} & m_{10,10}^{(3)} & m_{10,11}^{(3)} & m_{10,12}^{(3)} \\ m_{11,7}^{(3)} & m_{11,8}^{(3)} & m_{11,9}^{(3)} & m_{11,10}^{(3)} & m_{11,11}^{(3)} & m_{11,12}^{(3)} \\ m_{12,7}^{(3)} & m_{12,8}^{(3)} & m_{12,9}^{(3)} & m_{12,10}^{(3)} & m_{12,11}^{(3)} & m_{12,12}^{(3)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس جرم

2) ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix)

حالت دوم : المان Frame

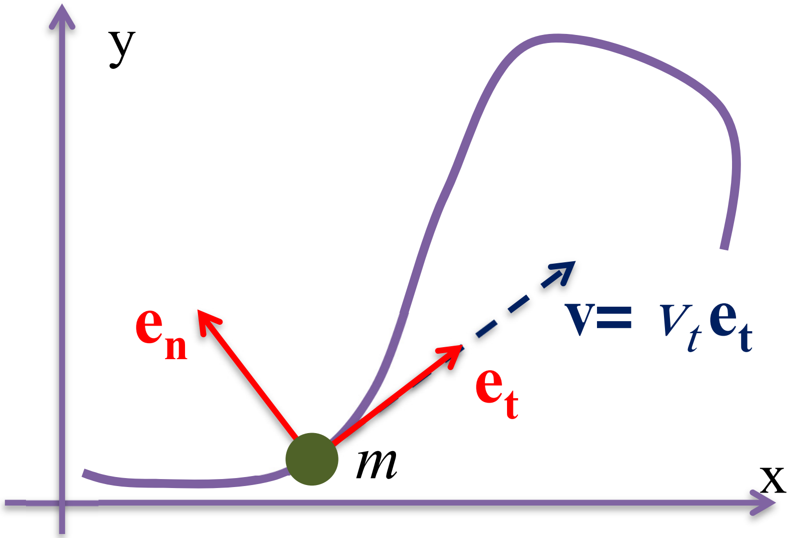
4) $[m]$ ماتریس جرم سازه در مختصات کلی به کمک Assemble کردن تمام $[m^e]$ ها و در نظر گرفتن درجات آزادی که مقید نمی‌باشند به دست می‌آید.

$$[m]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{44}^{(1)}+m_{44}^{(2)} & m_{45}^{(1)}+m_{45}^{(2)} & m_{46}^{(1)}+m_{46}^{(2)} & m_{47}^{(2)} & m_{48}^{(2)} & m_{49}^{(2)} \\ m_{54}^{(1)}+m_{54}^{(2)} & m_{55}^{(1)}+m_{55}^{(2)} & m_{56}^{(1)}+m_{56}^{(2)} & m_{57}^{(2)} & m_{58}^{(2)} & m_{59}^{(2)} \\ m_{64}^{(1)}+m_{64}^{(2)} & m_{65}^{(1)}+m_{65}^{(2)} & m_{66}^{(1)}+m_{66}^{(2)} & m_{67}^{(2)} & m_{68}^{(2)} & m_{69}^{(2)} \\ m_{74}^{(2)} & m_{75}^{(2)} & m_{76}^{(2)} & m_{77}^{(2)}+m_{77}^{(3)} & m_{78}^{(2)}+m_{78}^{(3)} & m_{79}^{(2)}+m_{79}^{(3)} \\ m_{84}^{(2)} & m_{85}^{(2)} & m_{86}^{(2)} & m_{87}^{(2)}+m_{87}^{(3)} & m_{88}^{(2)}+m_{88}^{(3)} & m_{89}^{(2)}+m_{89}^{(3)} \\ m_{94}^{(2)} & m_{95}^{(2)} & m_{96}^{(2)} & m_{97}^{(2)}+m_{97}^{(3)} & m_{98}^{(3)}+m_{98}^{(3)} & m_{99}^{(2)}+m_{99}^{(3)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

MDOF: Equations of Motion

III. محاسبه شتاب در حرکت‌های منحنی الخط

1) مولفه‌های مماسی و عمود بر مماس (Tangential and Normal Components)



بردار یکه ($\mathbf{e_t}$) مماس بر مسیر حرکت است.

بردار یکه ($\mathbf{e_n}$) عمود بر ($\mathbf{e_t}$) بوده و جهت آن به سمت داخل منحنی می‌باشد.

سرعت حرکت ذره دارای یک مولفه بوده و در جهت $\mathbf{e_t}$ است.

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{e}_t} \qquad (20)$$

شتاب حرکت ذره دارای مولفه‌هایی در هر دو جهت $\mathbf{e_t}$ و $\mathbf{e_n}$ می‌باشد.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n} \qquad (21)$$

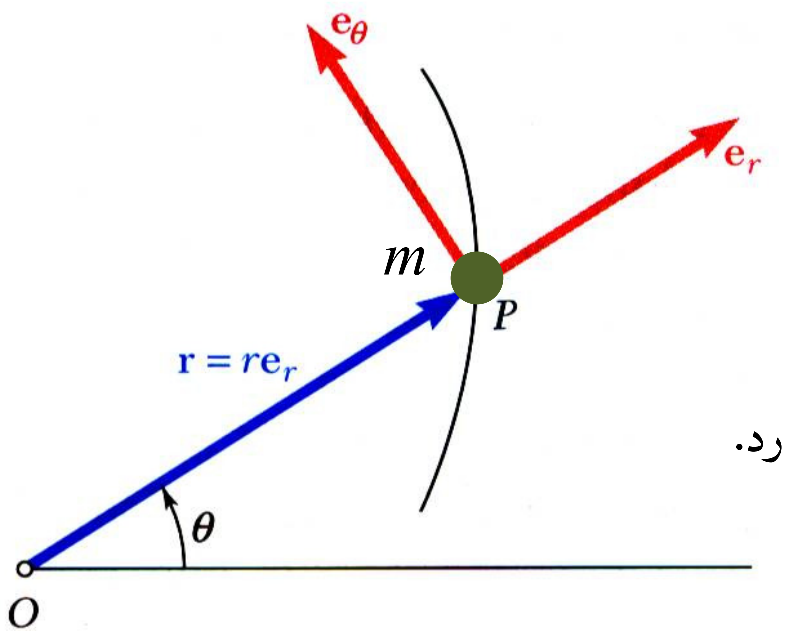
که در آن

ρ: شعاع انحنای لحظه‌ای منحنی

$$\boxed{\rho = \left| \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \Big/ \frac{d^2y}{dx^2} \right|} \qquad (22)$$

III. محاسبه شتاب در حرکت‌های منحنی الخط

2) مولفه‌های شعاعی و عمود بر شعاع (Radial and Transverse Components)



موقعیت ذره توسط بردار مکان **r** مشخص شده و فاصله مبدا o تا موقعیت ذره نقطه p را در هر لحظه مشخص می‌کند.

$$\boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r} \quad (23)$$

بردار یکه $(\mathbf{e}_r)$ جهت بردار **r** را مشخص می‌کند که مولفه شعاعی نام دارد.

بردار یکه $(\mathbf{e}_\theta)$ عمود بر $(\mathbf{e}_r)$ می‌باشد.

سرعت و شتاب حرکت ذره دارای مولفه‌های در هر دو جهت $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ هستند.

- بردار شتاب ذره

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta} \quad (26)$$

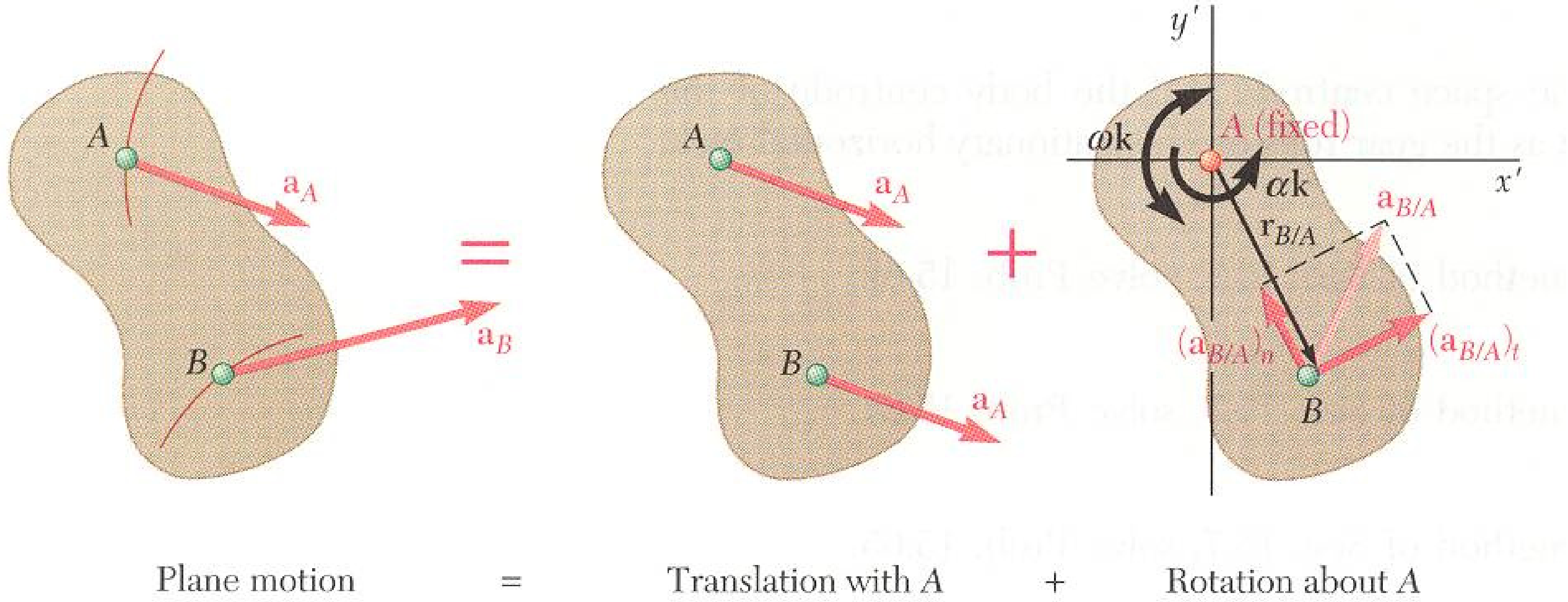
- بردار سرعت ذره

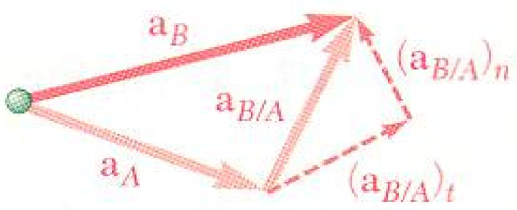
$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta} \quad (25)$$

MDOF: Equations of Motion

III. محاسبه شتاب در حرکت‌های منحنی الخط

3) شتاب مطلق و نسبی در حرکت صفحه‌ای





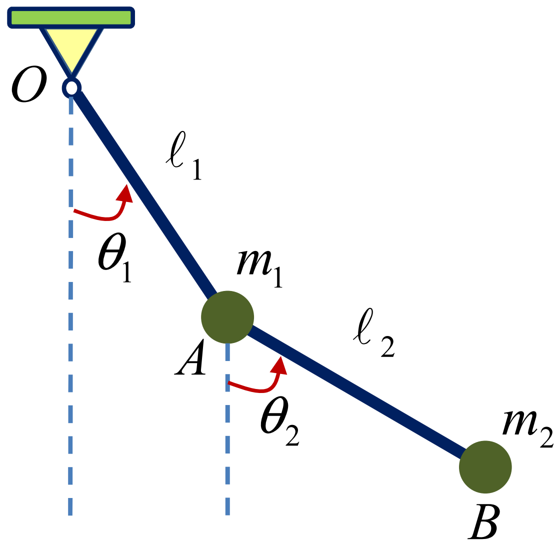
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \qquad (27)$$

$$(\vec{a}_{B/A})_t = \alpha\vec{k} \times \vec{r}_{B/A} \qquad (a_{B/A})_t = r\alpha$$
$$(\vec{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \vec{r}_{B/A} \qquad (a_{B/A})_n = r\omega^2 \qquad (28)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

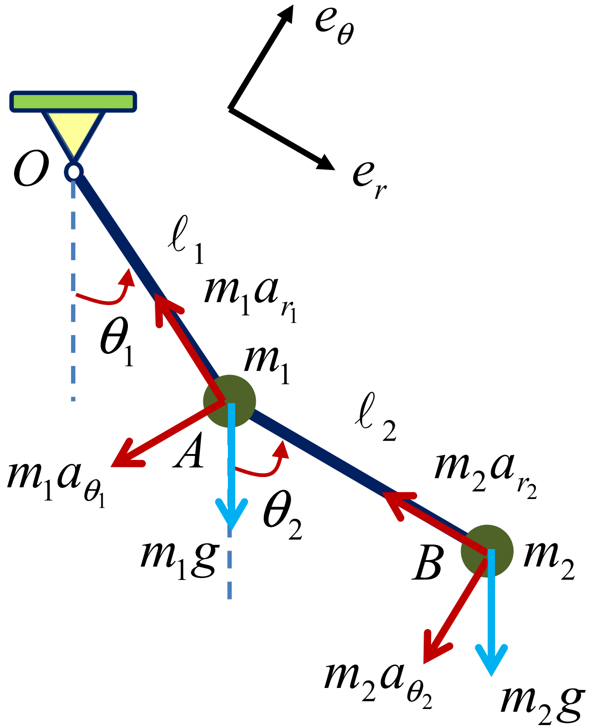
مثال 4– معادله حرکت آونگ دوگانه نشان داده شده را تعیین نمایید. میله‌های OA و AB صلب می‌باشند.



MDOF: Equations of Motion

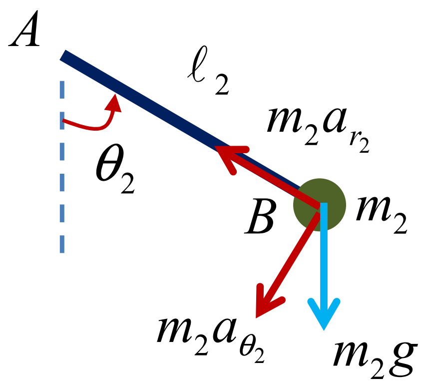
IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 4-



$$\boxed{a_{\theta_1} = \ell_1 \ddot{\theta}_1}$$

$$\boxed{a_{\theta_2} = \ell_1 \ddot{\theta}_1 + \ell_2 \ddot{\theta}_2}$$



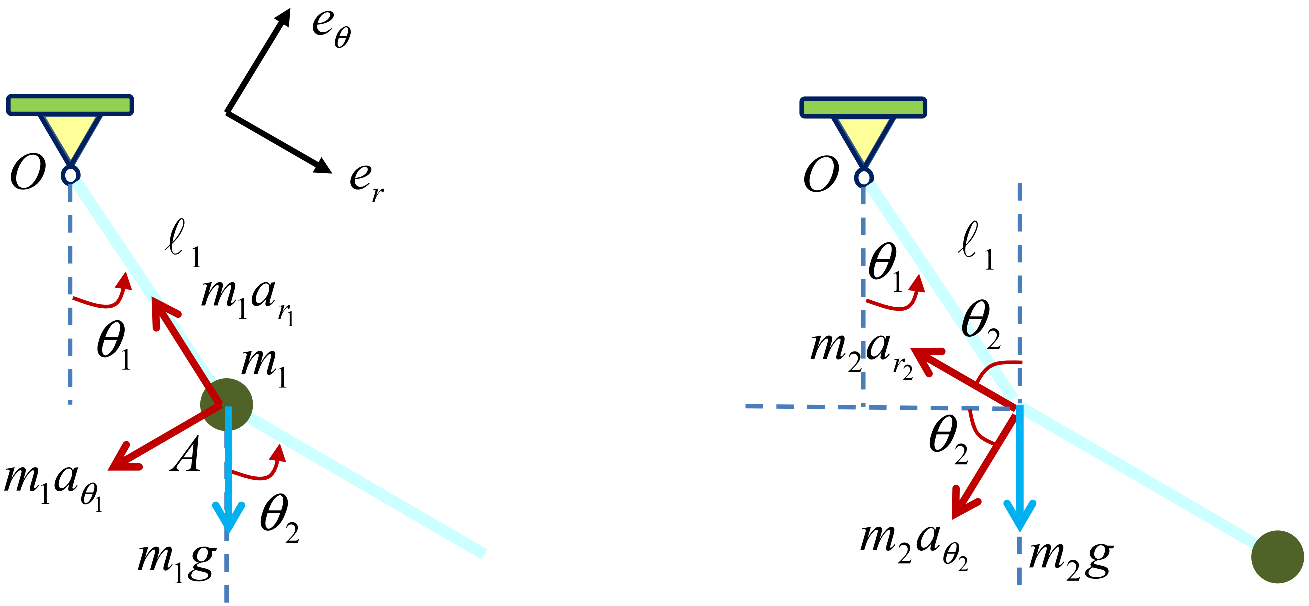
$$\Rightarrow \boxed{m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_2^{\,2} \ddot{\theta}_2 + m_2 g \ell_2 \theta_2 = 0} \qquad (I)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 4-

تمام نیروها را به نقطه A منتقل کرده و حول نقطه O معادله تعادل لنگر را می‌نویسیم. (چون در A مفصل داریم اثر ممان ناشی از نیروهای وارد بر m_2 در A براساس رابطه (1) صفر است.

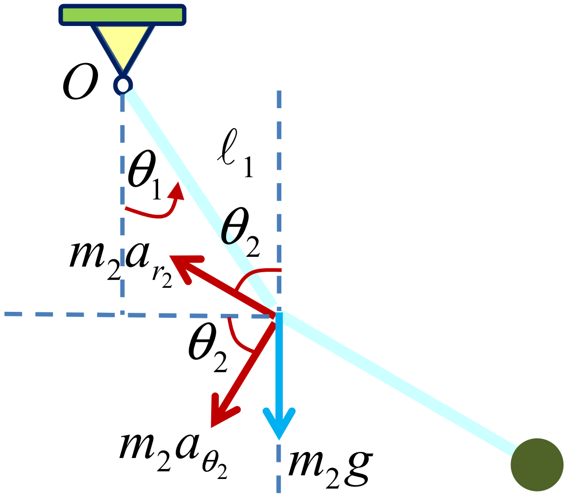


$$\Rightarrow \boxed{\sum M_{1/O} = m_1 a_{\theta_1} \cdot \ell_1 + m_1 g \cdot \ell_1 \theta_1}$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 4-

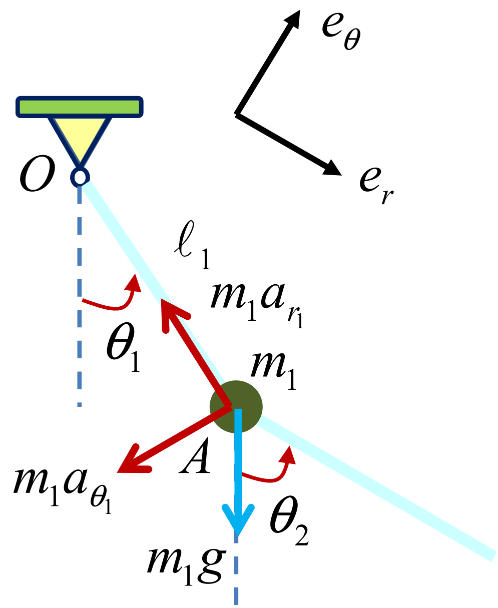


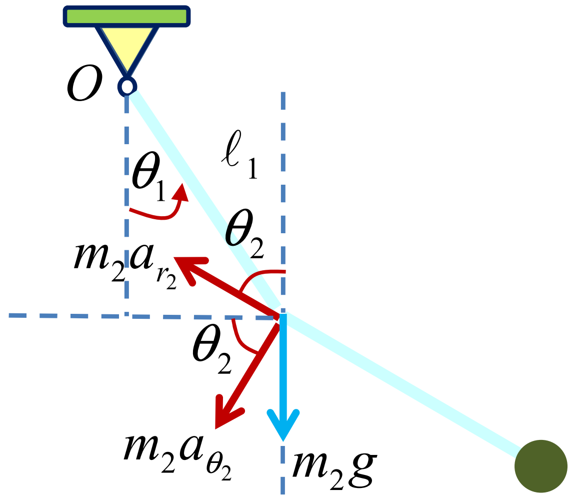
$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum M_{2/O} = m_2 a_{\theta_2} \cdot \ell_1 + m_2 g \cdot \ell_1 \theta_1}$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 4-





$$\sum M_{1/O} = m_1 a_{\theta_1} \cdot \ell_1 + m_1 g \cdot \ell_1 \theta_1$$

$$\sum M_{2/O} = m_2 a_{\theta_2} \cdot \ell_1 + m_2 g \cdot \ell_1 \theta_1$$

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ell_1^{\,2}\ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_2 \ell_1 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g \ell_1 \theta_1 = 0} \qquad (II)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 4-

$$\boxed{m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2^{\,2}\ddot{\theta}_2 + m_2 g\ell_2\theta_2 = 0} \qquad (I)$$

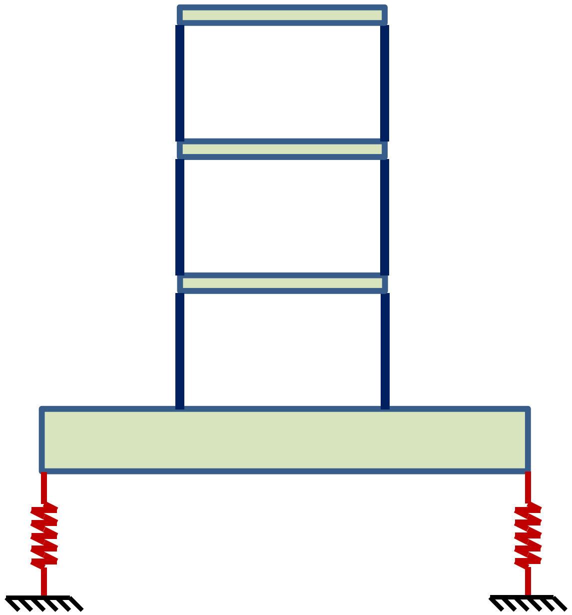
$$\boxed{(m_1+m_2)\ell_1^{\,2}\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2\ell_1\ddot{\theta}_2 + (m_1+m_2)g\ell_1\theta_1 = 0} \qquad (II)$$

$$if \quad \begin{matrix} \ell_1 = \ell_2 = \ell \\ m_1 = m_2 = m \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2g/\ell & 0 \\ 0 & g/\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

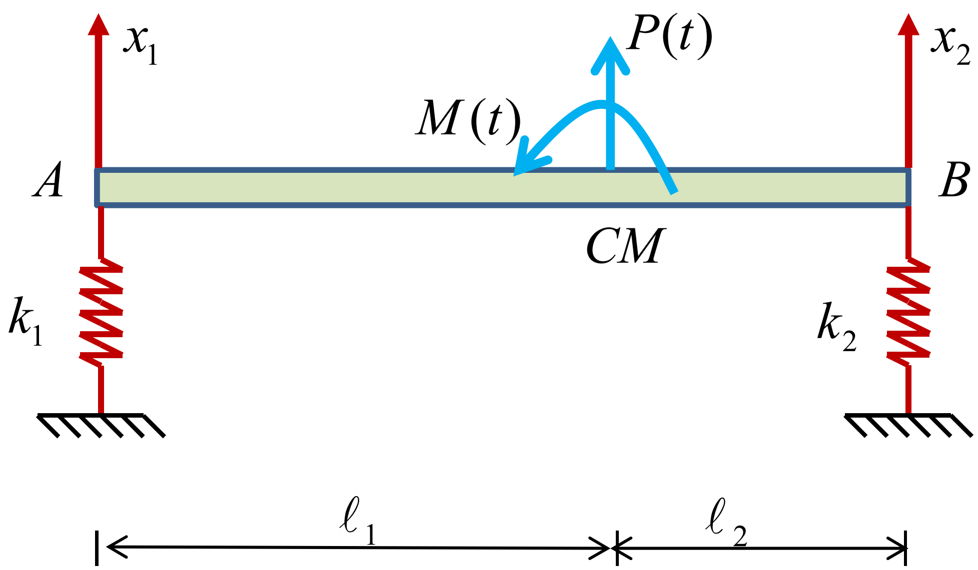
MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

مثال 5– تیر صلب AB بر روی دو فنر قرار دارد. با در نظر گرفتن درجه‌های آزادی نشان داده شده معادله حرکت را به دست آورید. جرم کل میله m و طول کل آن ℓ است.



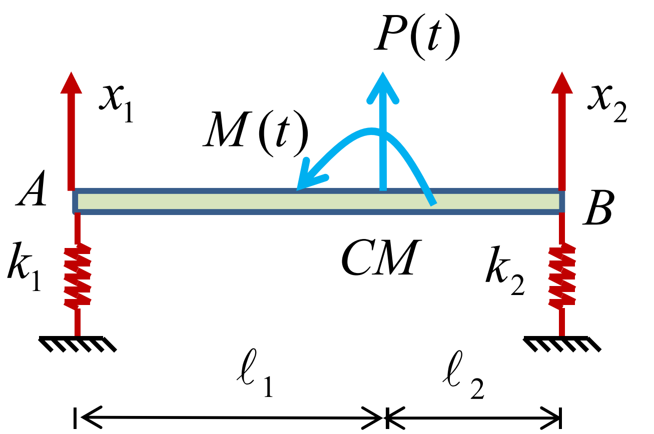
مانند ارتعاش ساختمان روی پی ارتجاعی

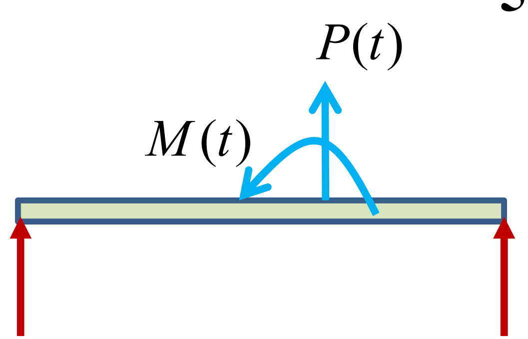


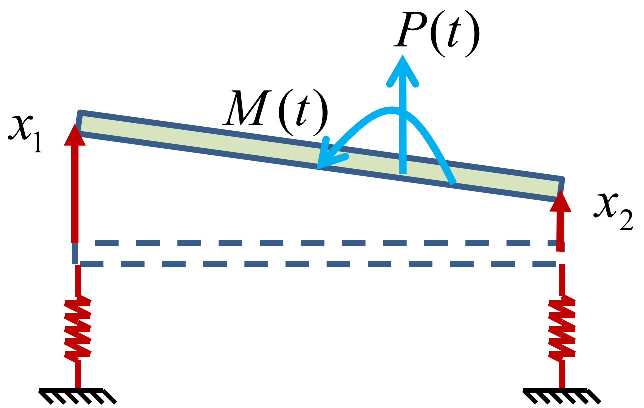
MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 5-







$$\boxed{\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{M(t)}{\ell} - \dfrac{\ell_2}{\ell} P(t) \\ -\dfrac{M(t)}{\ell} - \dfrac{\ell_1}{\ell} P(t) \end{Bmatrix}} \qquad (1)$$

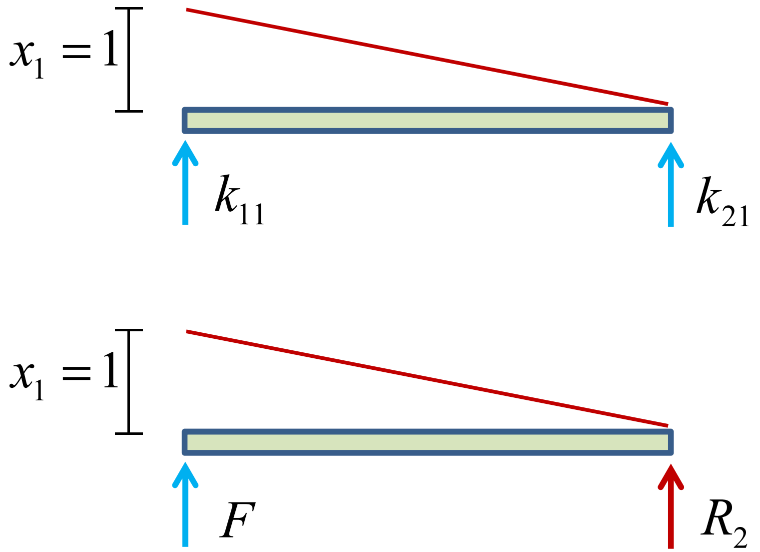
در این حالت سیستم دارای جرم گسترده است. هم حرکت دورانی و هم حرکت انتقالی در میله اتفاق می‌افتد.

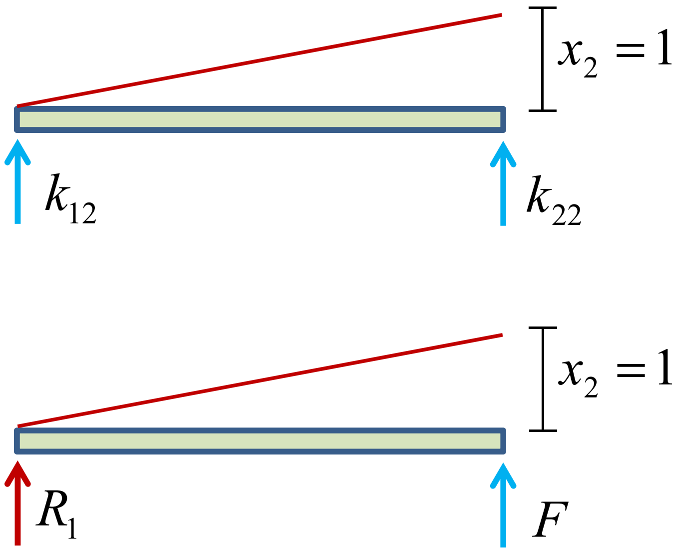
MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 5-

تعیین ماتریس سختی



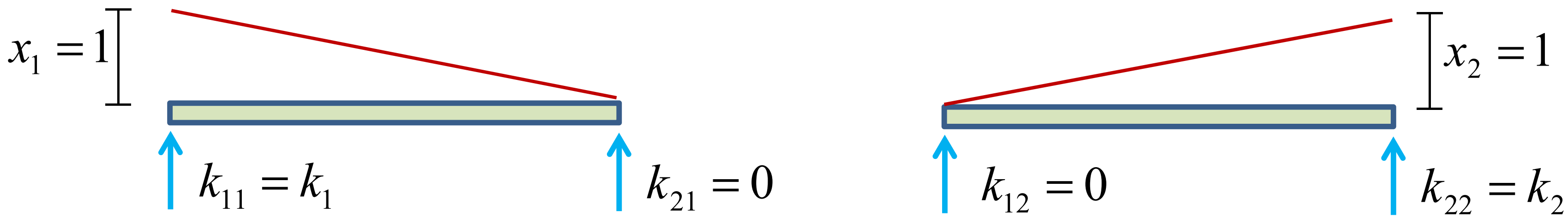


MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 5-

تعیین ماتریس سختی

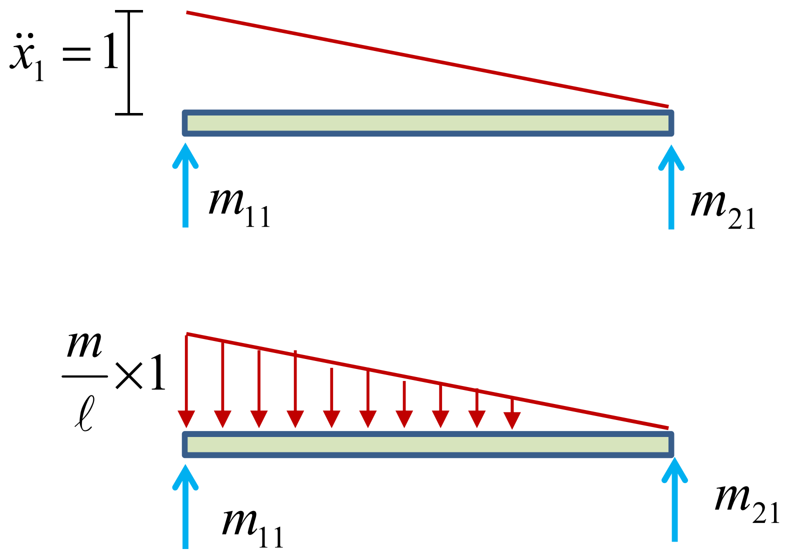


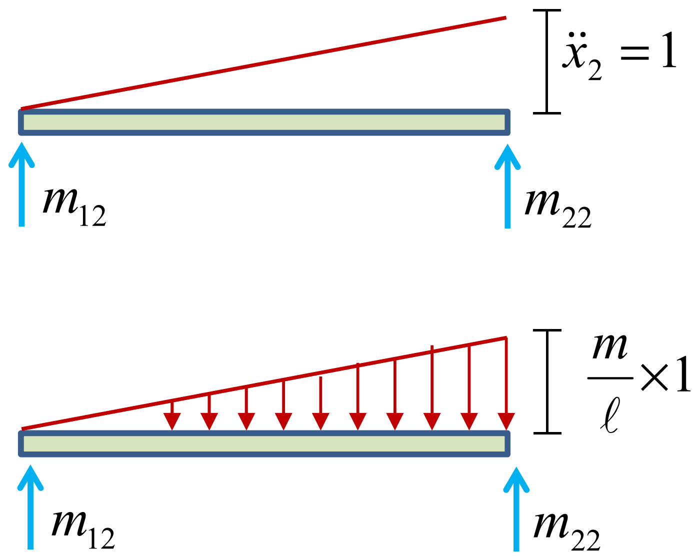
$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[k] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}} \qquad (2)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 5- تعیین ماتریس جرم



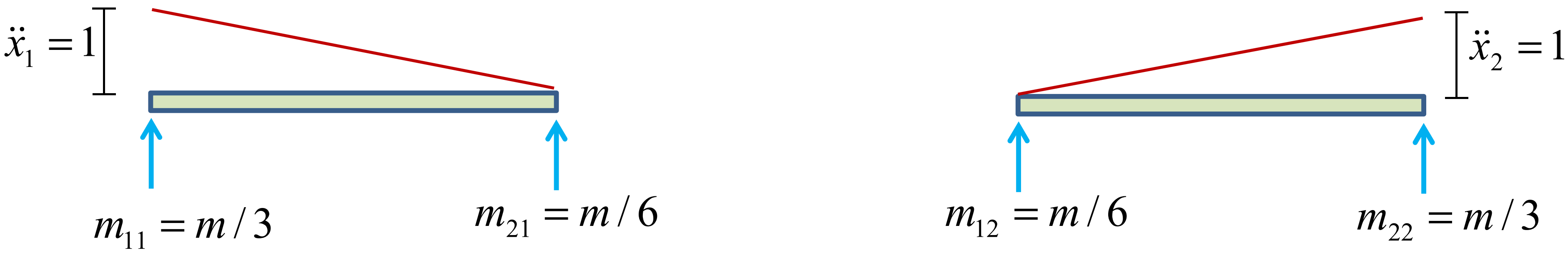


MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 5- تعیین ماتریس جرم

نکته : در روند محاسبه ماتریس جرم در شتاب‌های واحد، فنرها در نظر گرفته نشد چرا؟ یا این که در روند محاسبه ماتریس سختی نیز نیروهای اینرسی در نظر گرفته نشد چرا؟ زیرا طبق اصل برآیند جمع آثار اثر هر کدام را یک بار باید در نظر گرفت یعنی اثر فنرها تنها در حالت استاتیکی و نیروهای اینرسی تنها در حالت دینامیکی در نظر گرفته شود.

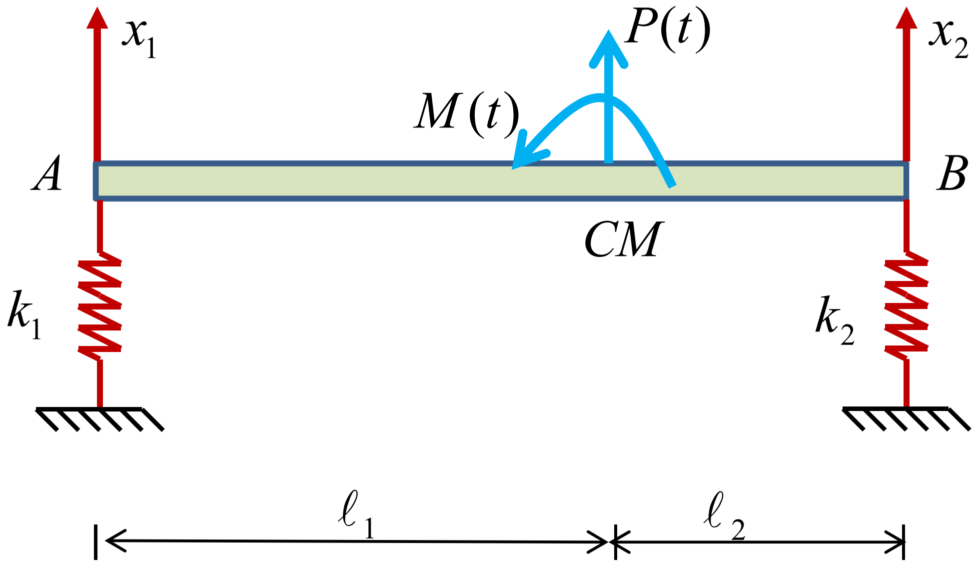


$$[m]=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[m]=\begin{bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{bmatrix}} \quad (3)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 5- تعیین ماتریس جرم

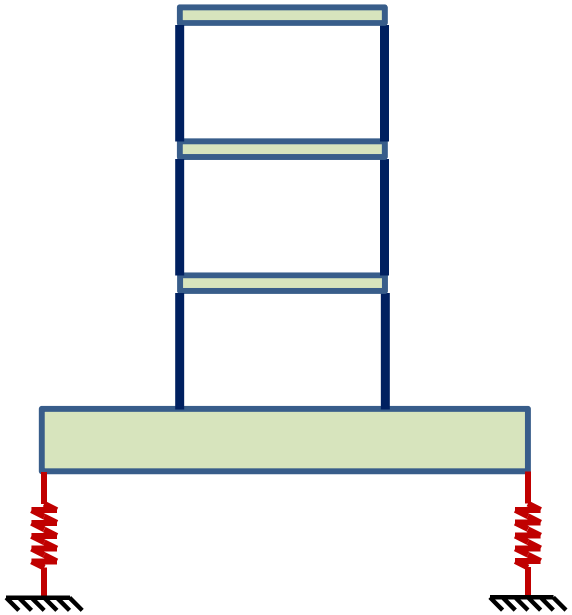


$$(1)\,,\,(2)\;\&\;(3)\quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M(t)}{\ell} - \frac{\ell_2}{\ell} P(t) \\ -\frac{M(t)}{\ell} - \frac{\ell_1}{\ell} P(t) \end{Bmatrix}$$

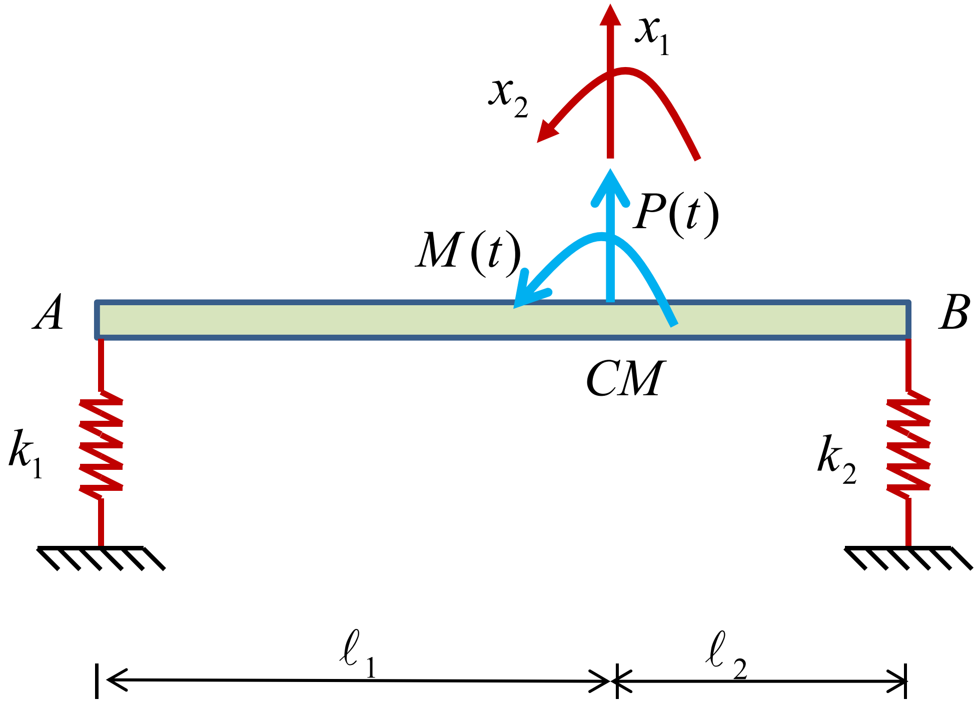
MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

مثال 6- تیر صلب AB بر روی دو فنر قرار دارد. با در نظر گرفتن درجه‌های آزادی نشان داده شده معادله حرکت را به دست آورید. جرم کل میله m و طول کل آن ℓ است.



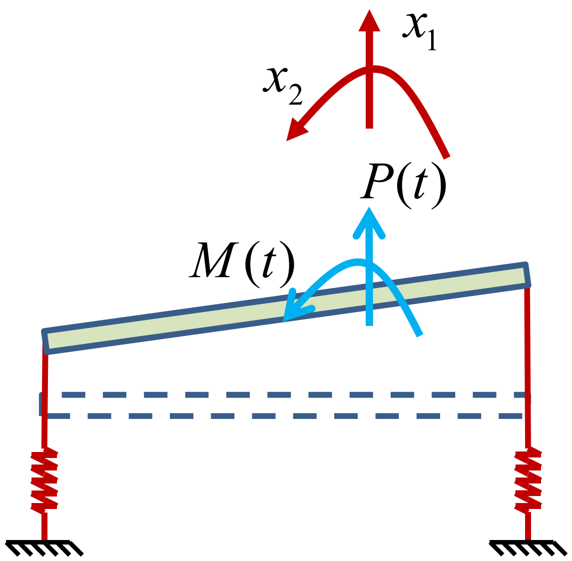
مانند ارتعاش ساختمان روی پی ارتجاعی



MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 6-



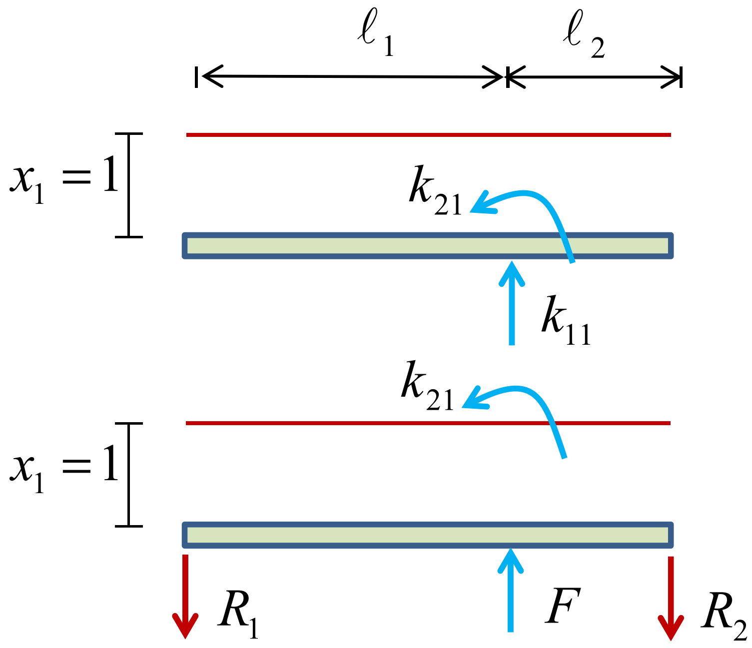
در این حالت سیستم دارای جرم گسترده است. هم حرکت دورانی و هم حرکت انتقالی در میله اتفاق می‌افتد.

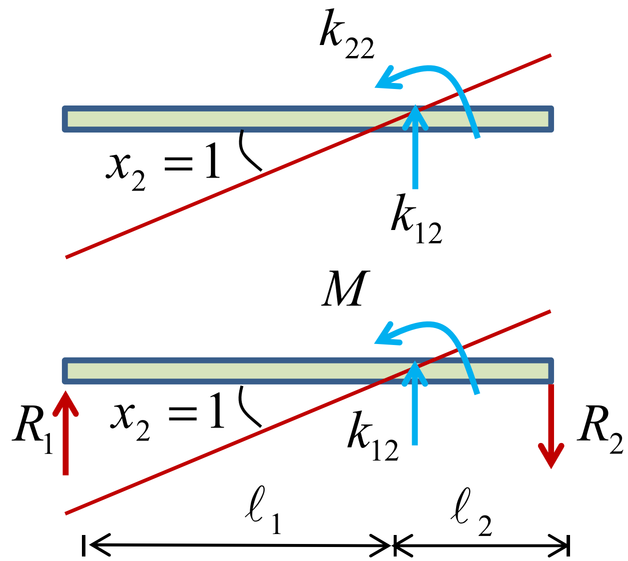
$$\boxed{\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}} \qquad (1)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 6- تعیین ماتریس سختی

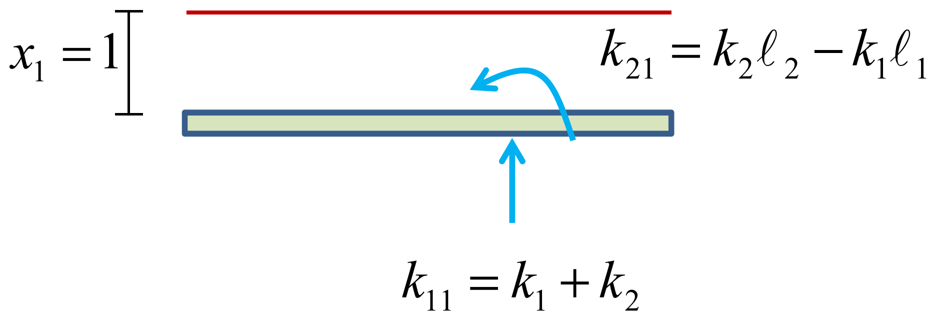


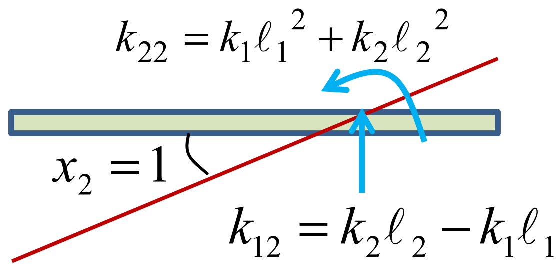


MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 6- تعیین ماتریس سختی



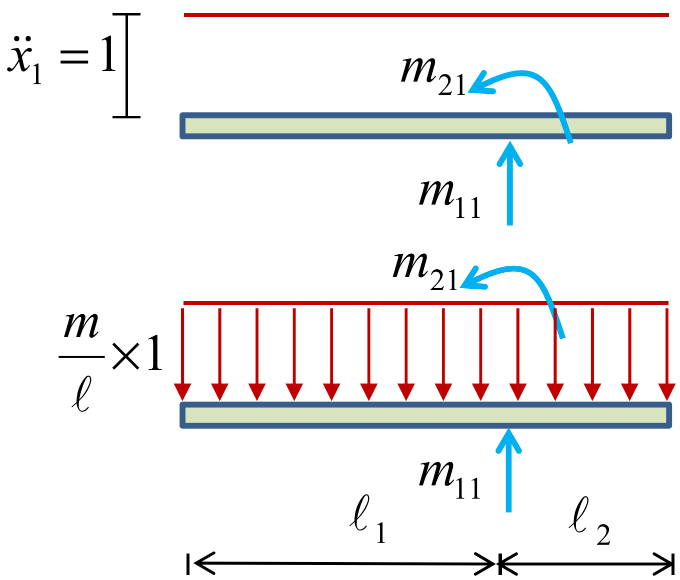


$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[k]=\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2\ell_2 - k_1\ell_1 \\ k_2\ell_2 - k_1\ell_1 & k_1{\ell_1}^2 + k_2{\ell_2}^2 \end{bmatrix}} \qquad (2)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

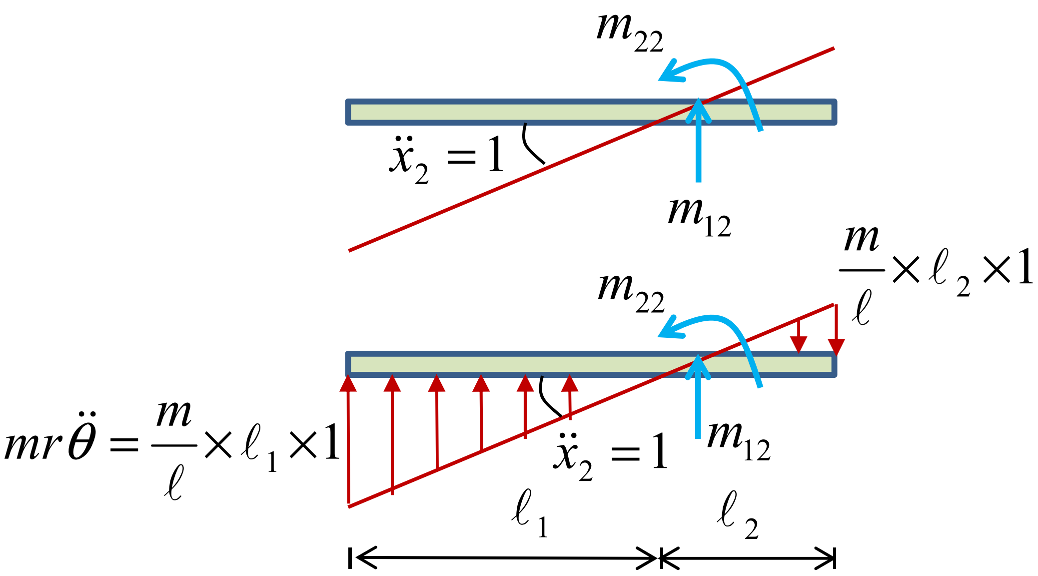
حل مثال 6- تعیین ماتریس جرم



MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

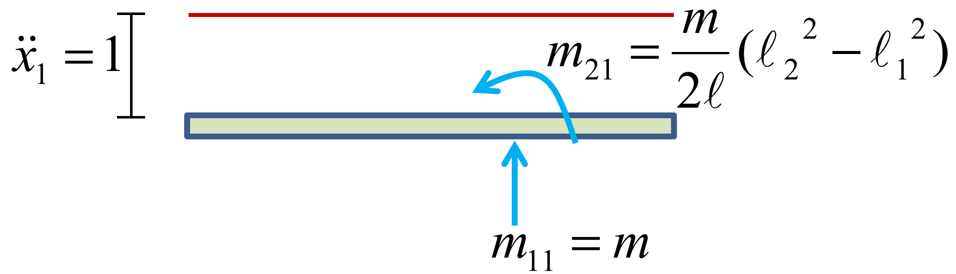
حل مثال 6- تعیین ماتریس جرم

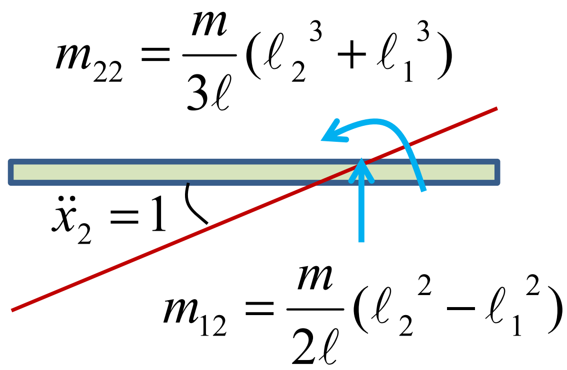


MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 6- تعیین ماتریس جرم



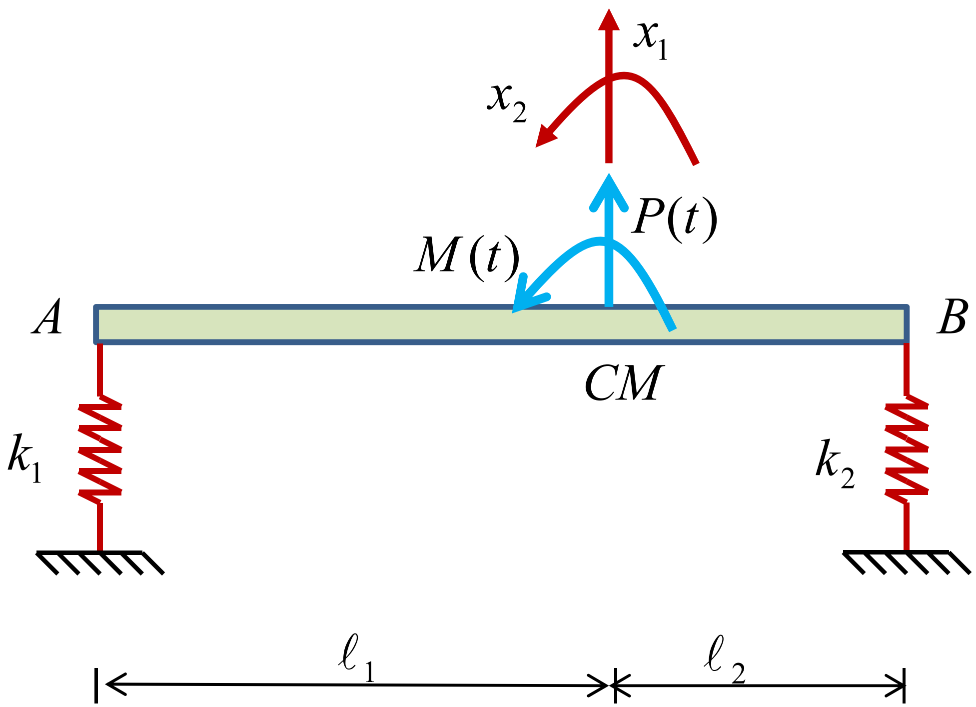


$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[m] = \begin{bmatrix} m & \dfrac{m}{2\ell}(\ell_2^{\,2} - \ell_1^{\,2}) \\ \dfrac{m}{2\ell}(\ell_2^{\,2} - \ell_1^{\,2}) & \dfrac{m}{3\ell}(\ell_2^{\,3} + \ell_1^{\,3}) \end{bmatrix}} \qquad (3)$$

MDOF: Equations of Motion

IV. معادله حرکت سیستم‌های MDOF

حل مثال 6- تعیین ماتریس جرم

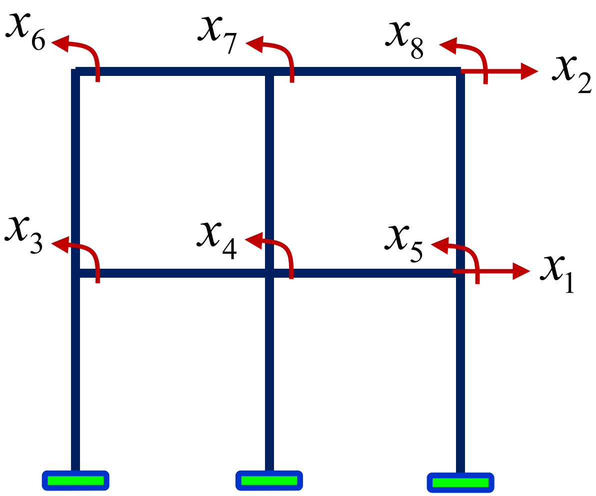


(1) , (2) & (3) $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} m & \dfrac{m(\ell_2^{\,2}-\ell_1^{\,2})}{2\ell} \\ \dfrac{m(\ell_2^{\,2}-\ell_1^{\,2})}{2\ell} & \dfrac{m(\ell_2^{\,3}+\ell_1^{\,3})}{3\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2\ell_2-k_1\ell_1 \\ k_2\ell_2-k_1\ell_1 & k_1\ell_1^{\,2}+k_2\ell_2^{\,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

MDOF: Equations of Motion

V. مدل‌سازی سازه‌ها

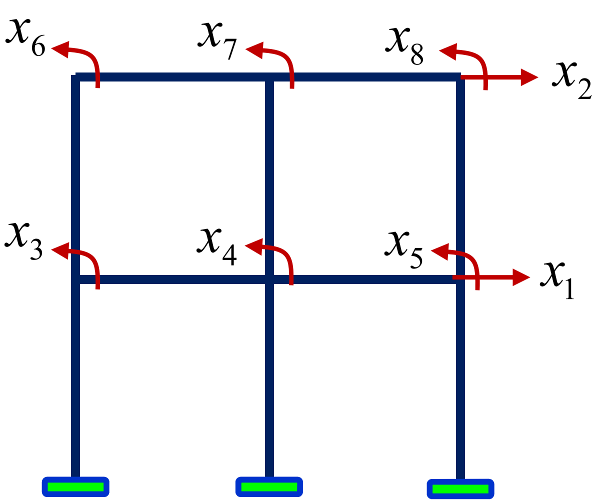


- قاب مقابل را در نظر می‌گیریم. کل درجه‌های آزادی این قاب برابر با 18 است که در این جا 8 درجه آزادی در نظر گرفته شده است.
- در حالت واقعی تمامی درجه‌های آزادی (جابجایی‌ها) در ایجاد تنش موثر می‌باشند. اما انتخاب درجه‌های آزادی مناسب برای یک سازه بستگی به تشخیص ما از اهمیت تاثیر آن‌ها بر تنش‌ها دارد.
- قاب نشان داده شده را می‌توان به 5 روش مدل‌سازی کرد.

1) **روش اول:** ماتریس سختی با استفاده از روش **المان محدود** و یا روش **مستقیم**؛ و ماتریس جرم به کمک روش **ماتریس جرم سازگار** تعیین می‌گردد. (کاربرد این روش در کارهای تحقیقاتی است)

$$[m]_{8\times 8} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{81} & m_{82} & \cdots & m_{88} \end{bmatrix} \quad \& \quad [k]_{8\times 8} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{81} & k_{82} & \cdots & k_{88} \end{bmatrix}$$

MDOF: Equations of Motion



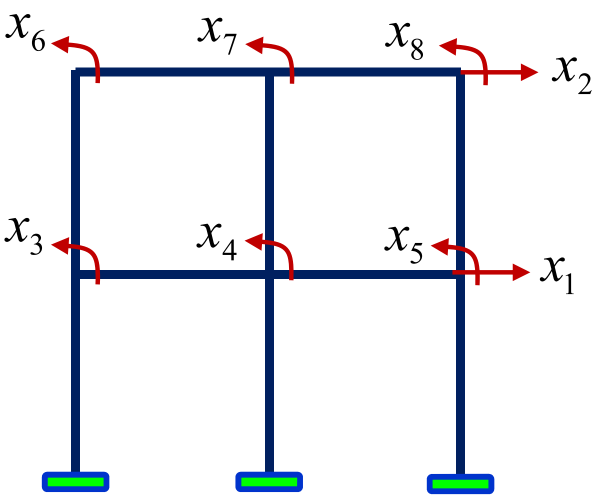
V. مدل‌سازی سازه‌ها

در سه روش بعدی فرض بر آن است که دوران‌ها تاثیر چندانی در ایجاد تنش‌ها ندارند. به این منظور دوران‌ها را در قسمت استاتیکی در نظر می‌گیریم اما در قسمت دینامیکی از اینرسی دورانی صرف نظر می‌شود.
جواب مدل‌سازی با هر سه روش یکسان است.

2) روش دوم: فرض می‌شود که درجه‌های آزادی انتقالی اهمیت اصلی را دارا می‌باشند و از اثر درجه‌های آزادی دورانی در قسمت دینامیکی صرف نظر می‌شود.

$$[m]_{8\times 8}=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad [k]_{8\times 8}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{81} & k_{82} & \cdots & k_{88} \end{bmatrix}$$

MDOF: Equations of Motion



V. مدل‌سازی سازه‌ها

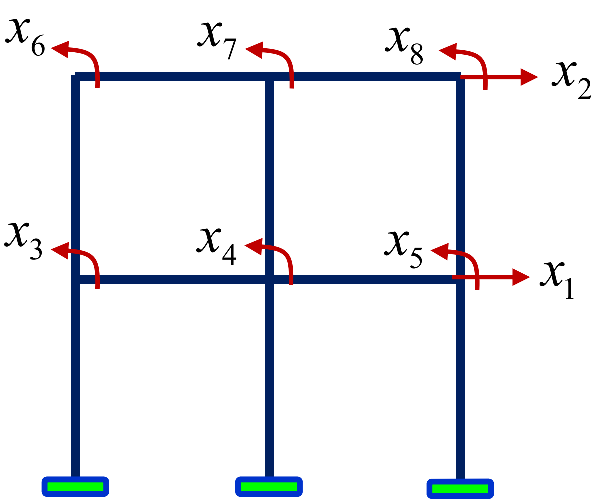
3) روش سوم: ماتریس سختی با در نظر گرفتن درجه‌های آزادی با اهمیت به صورت **سختی اصلاح شده** به دست می‌آید.

$$[m]_{2\times2}=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \qquad \& \qquad [k']_{2\times2}=\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix}$$

$[k']$: ماتریس سختی اصلاح شده سازه نامیده می‌شود. که در آن درایه k'_{ij} ، i و j اُمین المان ماتریس سختی اصلاح شده می‌باشد که برابر است با مقدار نیروی لازم در راستای درجه آزادی i جهت ایجاد تغییر مکان واحد در راستای درجه آزادی j زمانی که از تغییر مکان در راستای تنها و فقط سایر درجات آزادی با اهمیت جلوگیری شده باشد. یعنی درجه‌های آزادی صرف نظر شده می‌توانند جابجایی داشته باشند. به طور مثال در x_1 جابجایی واحد ایجاد کرده در حالی که x_2 را ثابت کرده و سایر دوران‌ها را آزاد رها نماییم.

ساده‌ترین راه برای محاسبه ماتریس سختی اصلاح شده محاسبه ماتریس نرمی است.$[k']$ عکس ماتریس نرمی است.

MDOF: Equations of Motion



V. مدل‌سازی سازه‌ها

4) روش چهارم: استفاده از **ماتریس متراکم شده سختی** (Condensed Stiffness) به روش **تراکم استاتیکی** است. این روش در عمل کاربرد بیشتری دارد.

تراکم استاتیکی (Static Condensation)

در استاتیک دوران در تولید تنش اهمیت دارند. اما در دینامیک از آن‌ها صرف نظر می‌کنیم. این فرض زمانی برقرار است که در محل درجات آزادی که در دینامیک از آن‌ها صرف نظر می‌کنیم نیروی خارجی (لنگر در گره‌ها) وارد نشود.

درجه‌های آزادی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

a. درجه آزادی اصلی (Master) که با اندیس M نشان داده می‌شود.

b. درجه آزادی فرعی (Slave) که با اندیس S نشان داده می‌شود.

MDOF: Equations of Motion

V. مدل‌سازی سازه‌ها

4) روش چهارم: تراکم استاتیکی

$$[m]_{8\times8}=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\&\; [k]_{8\times8}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{13} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix}$$

$$\{x\}_{8\times1}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix},\ \{\ddot{x}\}_{8\times1}=\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{x}_6 \\ \ddot{x}_7 \\ \ddot{x}_8 \end{Bmatrix},\ \{p(t)\}_{8\times1}=\begin{Bmatrix} p(t)_1 \\ p(t)_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[m]_{8\times8}=\begin{bmatrix} [m_M]_{2\times2} & [O]_{2\times6} \\ [O]_{6\times2} & [O]_{6\times6} \end{bmatrix} \quad , \quad [k]_{8\times8}=\begin{bmatrix} [k_{MM}]_{2\times2} & [k_{MS}]_{2\times6} \\ [k_{SM}]_{6\times2} & [k_{SS}]_{6\times6} \end{bmatrix}$$

$$\{x\}_{8\times1}=\begin{Bmatrix} \{x_M\}_{2\times1} \\ \{x_S\}_{6\times1} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\ddot{x}\}_{8\times1}=\begin{Bmatrix} \{\ddot{x}_M\}_{2\times1} \\ \{\ddot{x}_S\}_{6\times1} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{p(t)\}_{8\times1}=\begin{Bmatrix} \{p(t)_M\}_{2\times1} \\ \{O\}_{6\times1} \end{Bmatrix}$$

MDOF: Equations of Motion

V. مدل‌سازی سازه‌ها

4) روش چهارم: تراکم استاتیکی

برای نادیده گرفتن درجه‌های آزادی فرعی x_Sباید در طرف دوم معادله حرکت نیروی متناظر آن‌ها صفر باشد. البته کنارگذاشتن درجه‌های آزادی فرعی در محاسبات دینامیک است نه در استاتیک. یعنی اگر در یکی ازگره‌ها نیروی خارجی به صورت لنگر وجود داشته باشد، آن دوران خاص نیز در محاسبات دینامیک وارد می‌شود. اگر درحالت کلی تعداد درجه‌های اصلی را M و تعداد درجه‌های فرعی را با S نمایش دهیم معادله حرکت برابر است با:

$$\boxed{\begin{bmatrix} m_{MM} & O_{MS} \\ O_{SM} & O_{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{x}_S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{MM} & k_{MS} \\ k_{SM} & k_{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_M \\ x_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t)_M \\ O_S \end{Bmatrix}} \quad (29)$$

$$(29) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{m_{MM}\ddot{x}_M + k_{MM}x_M + k_{MS}x_S = p(t)_M} & (30) \\ \boxed{k_{SM}x_M + k_{SS}x_S = O_S} & (31) \end{cases}$$

$$(31) \quad \overset{\times k_{SS}^{-1}}{\Rightarrow} \quad k_{SS}^{-1}k_{SM}x_M + k_{SS}^{-1}k_{SS}x_S = k_{SS}^{-1}O_S \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_S = -k_{SS}^{-1}k_{SM}x_M} \quad (32)$$

V. مدل‌سازی سازه‌ها

4) روش چهارم: تراکم استاتیکی

با جایگذاری رابطه (32) در رابطه (30) خواهیم داشت:

$$(30)\ \&\ (32) \quad \Rightarrow \quad m_{MM}\ddot{x}_M + k_{MM}x_M + k_{MS}(-k_{SS}{}^{-1}k_{SM}x_M) = p(t)_M$$

$$\Rightarrow \quad m_{MM}\ddot{x}_M + (k_{MM} - k_{MS}k_{SS}{}^{-1}k_{SM})x_M = p(t)_M \quad \Rightarrow \quad \boxed{[m_{MM}]\{\ddot{x}_M\} + [k_{con}]\{x_M\} = \{p(t)_M\}} \quad (33)$$

که در آن

$$\boxed{[k_{con}]_{M\times M} = k_{MM} - k_{MS}k_{SS}{}^{-1}k_{SM}} \quad (34)$$

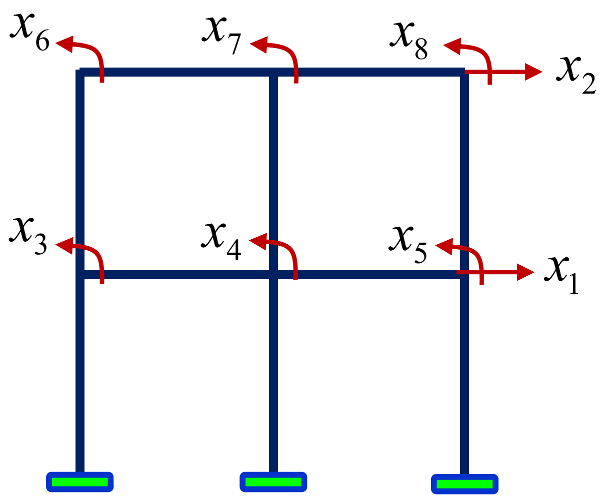
$[k_{con}]_{M\times M}$: ماتریس سختی متراکم شده نام دارد که همان ماتریس سختی اصلاح شده می‌باشد.

در این روش درجه‌های آزادی فرعی در معادله‌های استاتیک لحاظ شده‌اند اما در بخش دینامیکی در نظر گرفته نمی‌شوند. رابطه (34) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

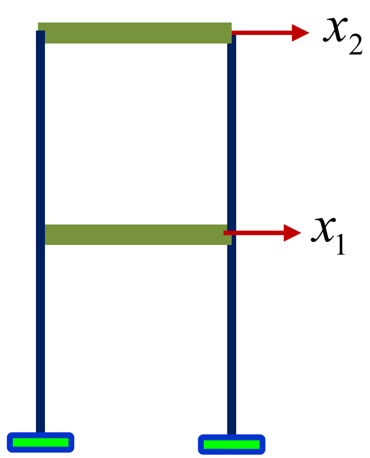
$$[k_{MS}] = [k_{SM}]^T \quad \Rightarrow \quad \boxed{[k_{con}]_{M\times M} = k_{MM} - k_{SM}{}^T k_{SS}{}^{-1}k_{SM}} \quad (35)$$

MDOF: Equations of Motion

V. مدل‌سازی سازه‌ها



4) روش پنجم: در این روش تنها درجه‌های آزادی را در نظر می‌گیریم که تاثیر مهمی در ایجاد تنش‌ها دارند. یعنی از درجه‌های آزادی که حتی در استاتیک اثر بسیار کمی دارند (مانند دوران‌ها) کاملا صرف نظر می‌کنیم. شرط این حالت آن است که سقف‌ها کاملا صلب باشند.



$$[m]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \& \quad [k]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

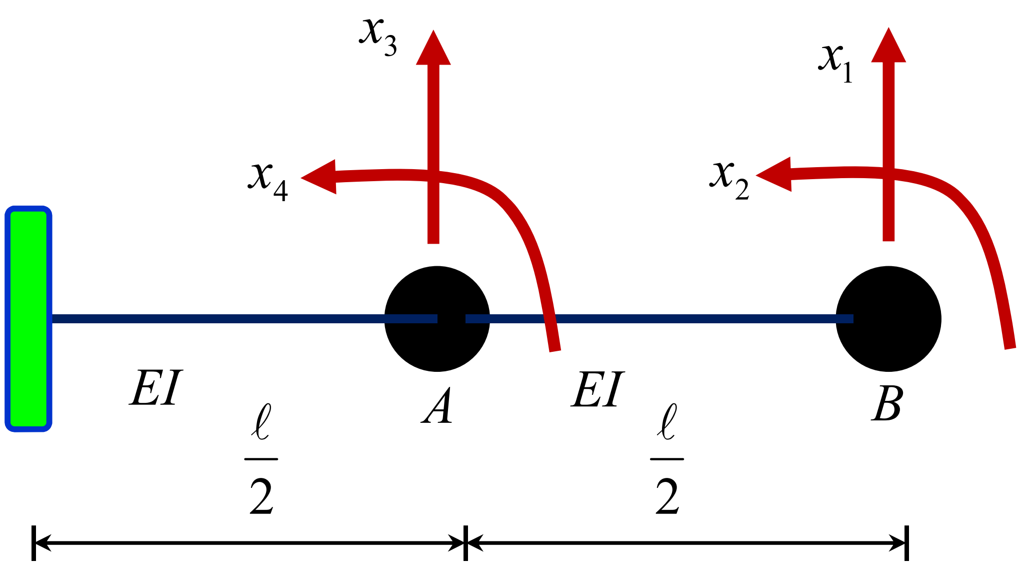
V. مدل‌سازی سازه‌ها

مثال 7– معادله دیفرانسیل حرکت سیستم نشان داده را در حالت‌های زیر تشکیل دهید.

الف) سیستم دارای چهار درجه آزادی x_1 , x_2 , x_3 , x_4 باشد.

ب) سیستم دارای دو درجه آزادی x_1 , x_3 باشد. (از روش تراکم استاتیکی استفاده کنید)

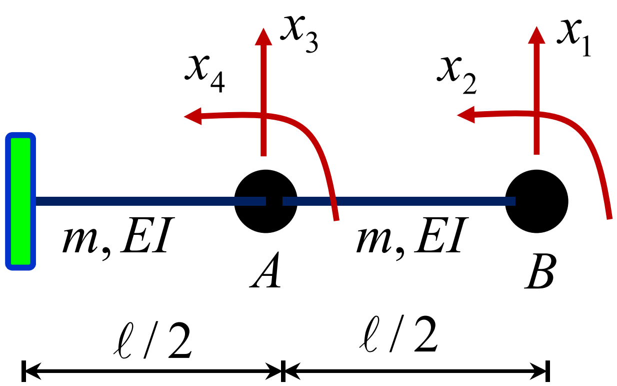
جرم واحد طول میله m است.



MDOF: Equations of Motion

V. مدل‌سازی سازه‌ها

حل مثال 7–الف



$$\Rightarrow [m]_{4\times4} = \left(\frac{m\ell}{4}\right) \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] \end{array}$$

نتایج مثال 2

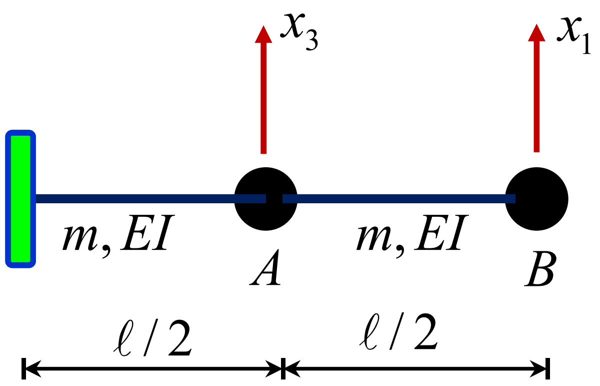
$$\Rightarrow [k] = \frac{8EI}{\ell^3} \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 12 & -3\ell & -12 & -3\ell \\ -3\ell & \ell^2 & 3\ell & \frac{1}{2}\ell^2 \\ -12 & 3\ell & 24 & 0 \\ -3\ell & \frac{1}{2}\ell^2 & 0 & 2\ell^2 \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow [m]_{4\times4}\{\ddot{x}\}_{4\times1} + [k]_{4\times4}\{x\}_{4\times1} = \{O\}_{4\times1}$$

MDOF: Equations of Motion

V. مدل‌سازی سازه‌ها

حل مثال 7- ب



برای تشکیل ماتریس سختی متراکم شده نیاز هست که ماتریس کلی براساس چیدمان به ترتیب درجه‌های آزادی اصلی و سپس فرعی چیده شود

$$[k_{MM}] = \frac{8EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix} \qquad [k_{SM}] = \frac{8EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} -3\ell & 3\ell \\ -3\ell & 0 \end{bmatrix} \qquad [k_{SS}] = \frac{8EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} \ell^2 & \frac{1}{2}\ell^2 \\ \frac{1}{2}\ell^2 & 2\ell^2 \end{bmatrix}$$

MDOF: Equations of Motion

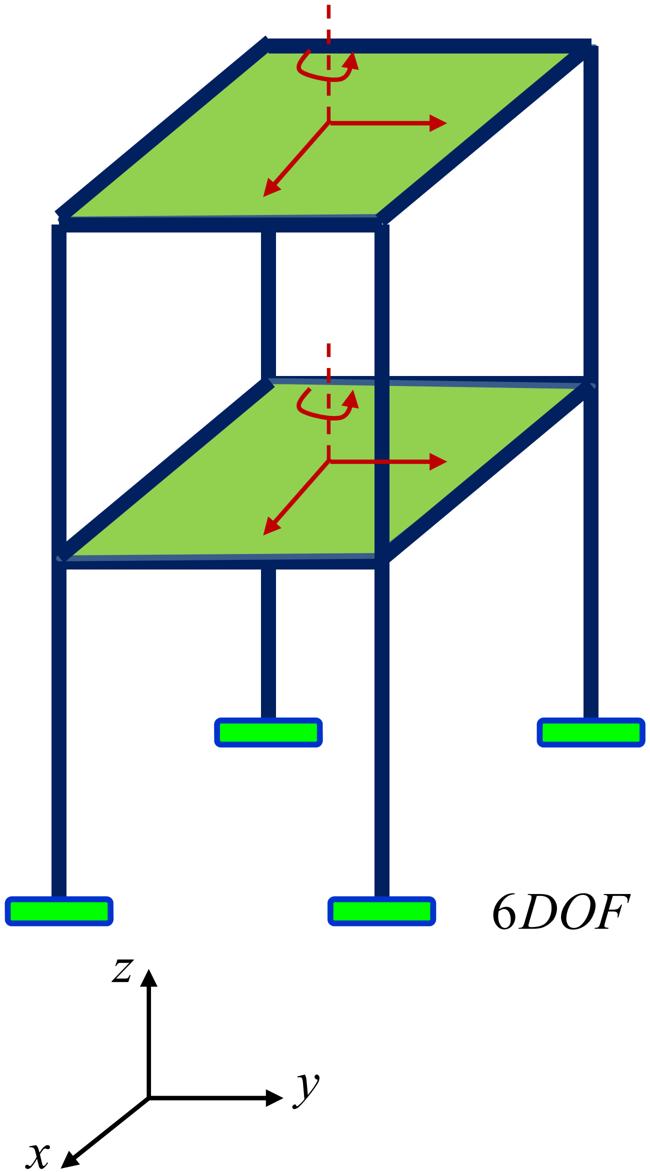
V. مدل‌سازی سازه‌ها

حل مثال 7- ب

$$\Rightarrow \boxed{\left[k_{con}\right]_{2\times2} = \frac{48EI}{7\ell^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{m\ell}{4}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \frac{48EI}{7\ell^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



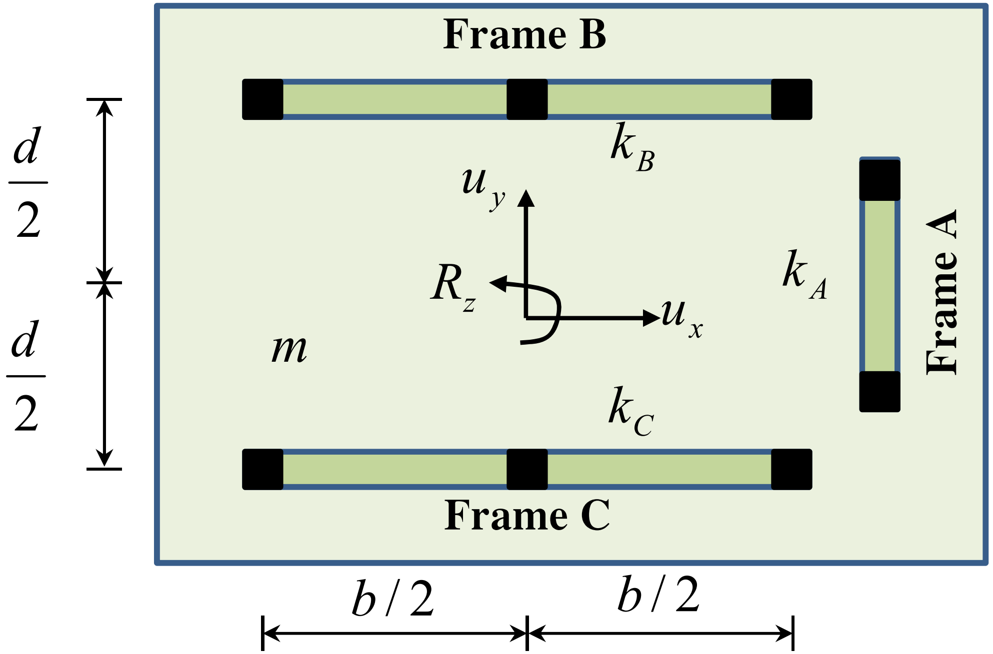
ساختمان در حالت سه بعدی با مدل برشی در هر طبقه دارای سه درجه آزادی است. که دو درجه آزادی آن از نوع انتقالی u_x , u_y و یک درجه آزادی آن از نوع دورانی با اثر پیچشی R_z است.

نیروی زلزله، نیروی اینرسی است که بر جرم سازه اثر می‌کند. حال اگر مرکز سختی و مرکز جرم بر هم منطبق نباشند سازه حول مرکز سختی تمایل به دوران دارد. در ساختمان‌هایی که عدم تقارن زیادی دارند اثر پیچش می‌تواند تاثیر بسزایی بر سازه داشته باشد.

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

پلان یک ساختمان یک طبقه مطابق شکل مقابل است:



k_A: سختی قاب A در جهت y

k_B: سختی قاب B در جهت x

k_C: سختی قاب C در جهت x

m: جرم کل طبقه

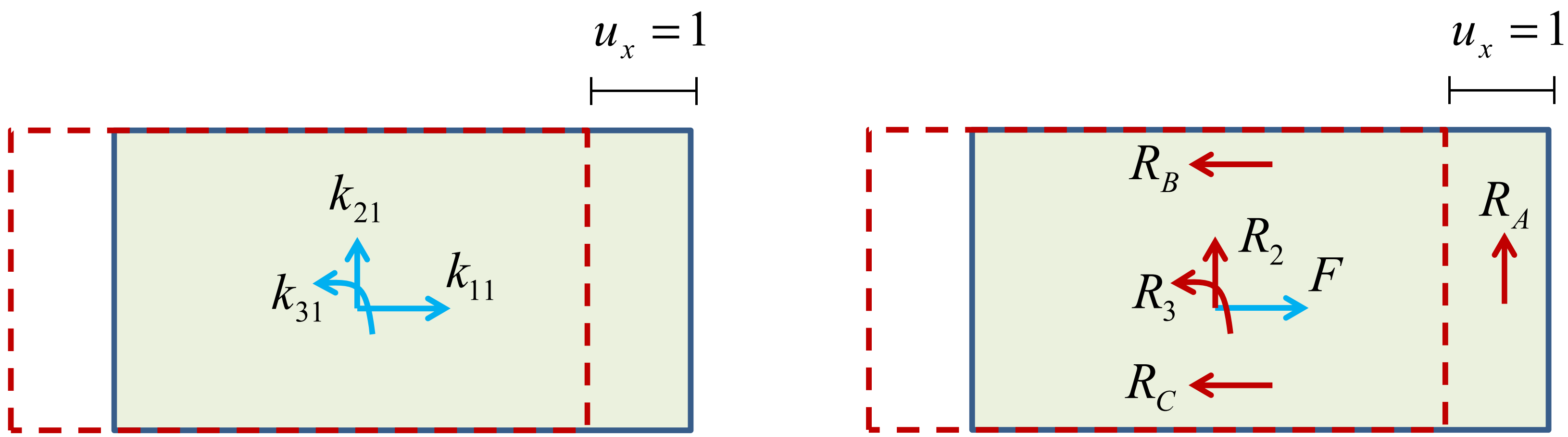
به دلیل آن که جرم طبقه متمرکز نیست اثر اینرسی دورانی آن را باید در ماتریس جرم در نظر گرفت:

$$[m]_{3\times3}=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_x & u_y & R_z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{mo} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{matrix} \Rightarrow \boxed{[m]_{3\times3}=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_x & u_y & R_z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\,(b^2+d^2)}{12} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{matrix}}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

ماتریس سختی این سازه را می‌توان به روش مستقیم محاسبه کرد



$$\boxed{R_B = k_B \cdot (1) = k_B \quad , \quad R_C = k_C \cdot (1) = k_C \quad , \quad R_A = k_A \cdot (0) = 0}$$

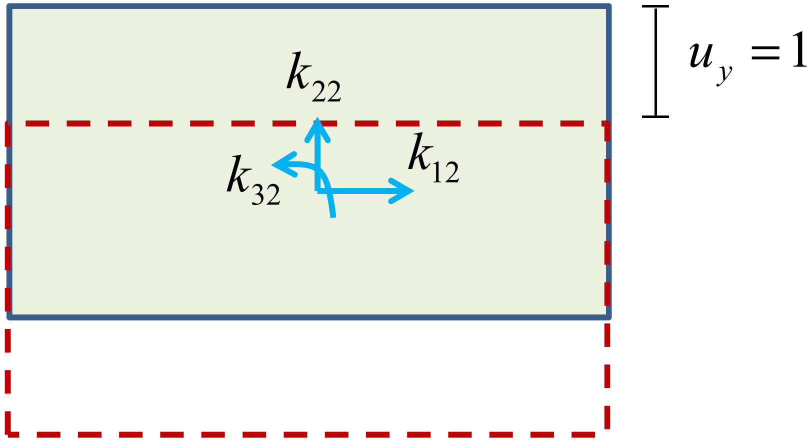
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; F = R_B + R_C \;\Rightarrow\; \boxed{k_{11} = F = k_B + k_C}$$

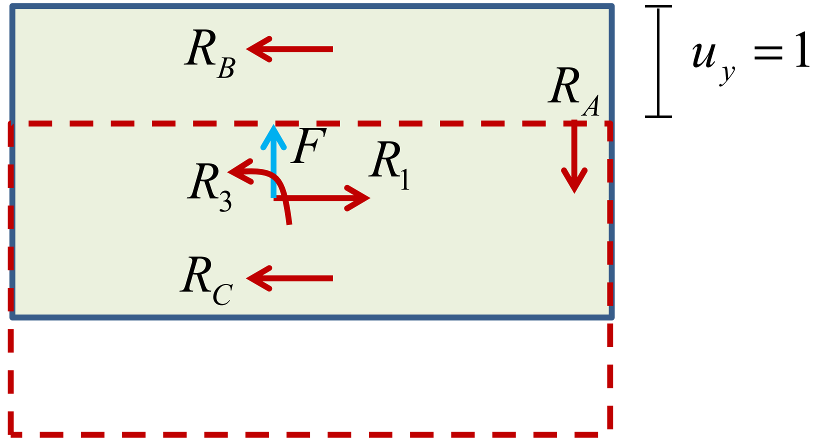
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_2 = -R_A = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{k_{21} = R_2 = 0}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \;\Rightarrow\; R_3 = R_C \frac{d}{2} - R_B \frac{d}{2} = (k_C - k_B)\frac{d}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{k_{31} = R_3 = (k_C - k_B)\frac{d}{2}}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)





$$\boxed{R_B = k_B \cdot (0) = 0 \quad , \quad R_C = k_C \cdot (0) = 0 \quad , \quad R_A = k_A \cdot (1) = k_A}$$

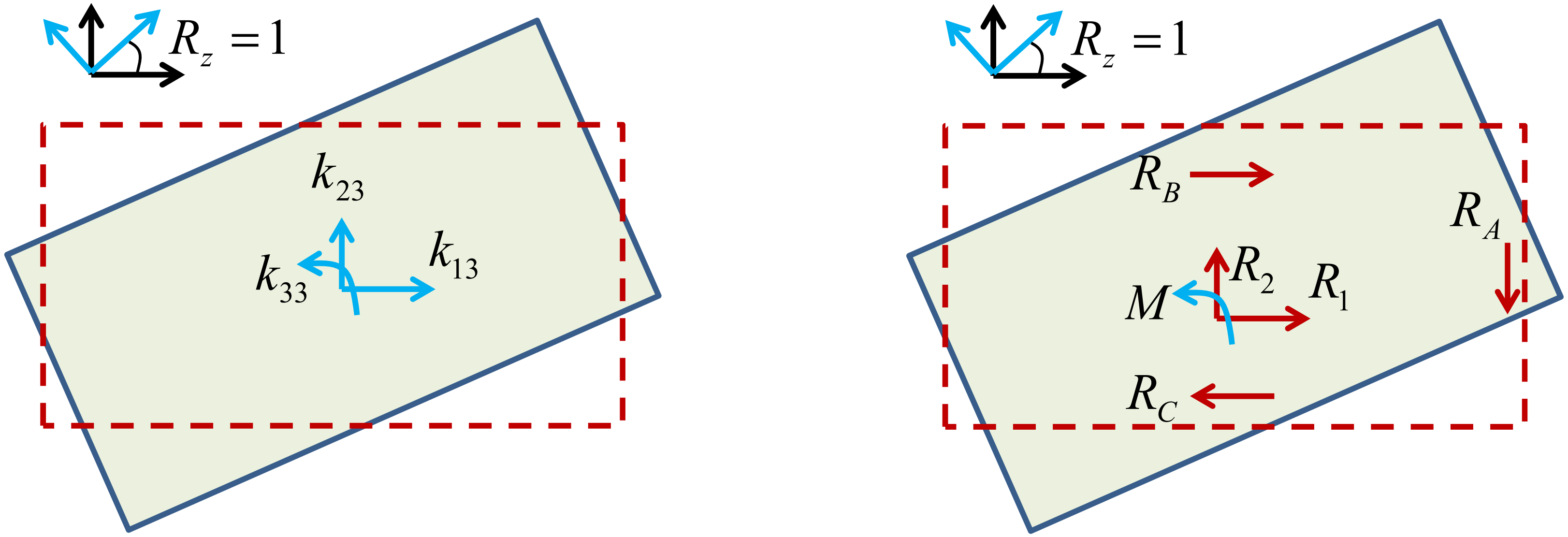
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_B + R_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{12} = R_1 = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F = R_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{22} = F = k_A}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = R_A \frac{b}{2} = (k_A)\frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{32} = R_3 = (k_A)\frac{b}{2}}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



$$\boxed{R_B = k_B \cdot (\frac{d}{2} \times 1) = \frac{k_B d}{2} \quad , \quad R_C = k_C \cdot (\frac{d}{2} \times 1) = \frac{k_C d}{2} \quad , \quad R_A = k_A \cdot (\frac{b}{2} \times 1) = \frac{k_A b}{2}}$$

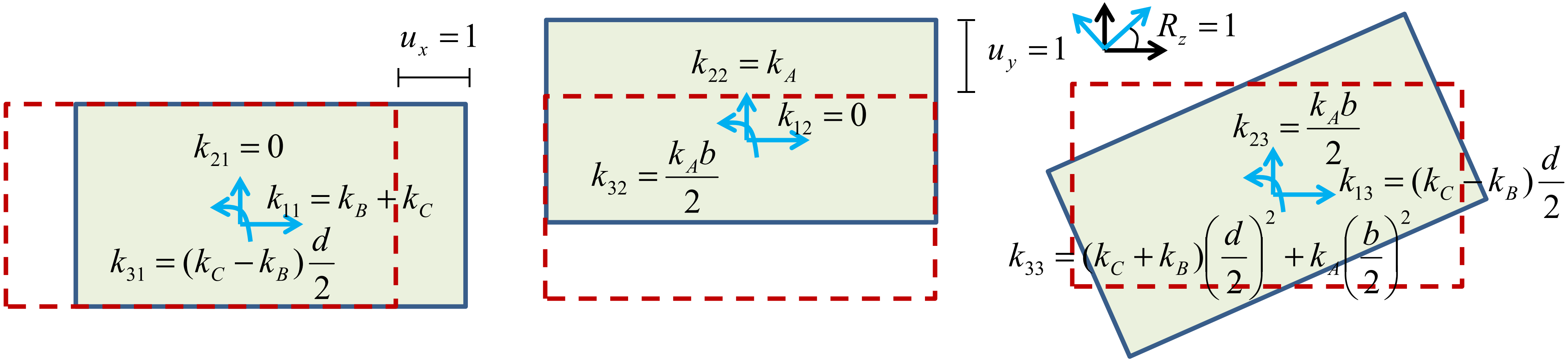
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_C - R_B = \frac{k_C d}{2} - \frac{k_B d}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{13} = R_1 = (k_C - k_B)\frac{d}{2}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = R_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{23} = R_2 = \frac{k_A b}{2}}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = R_B \frac{d}{2} + R_C \frac{d}{2} + R_A \frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{33} = M = (k_C + k_B)\left(\frac{d}{2}\right)^2 + k_A\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

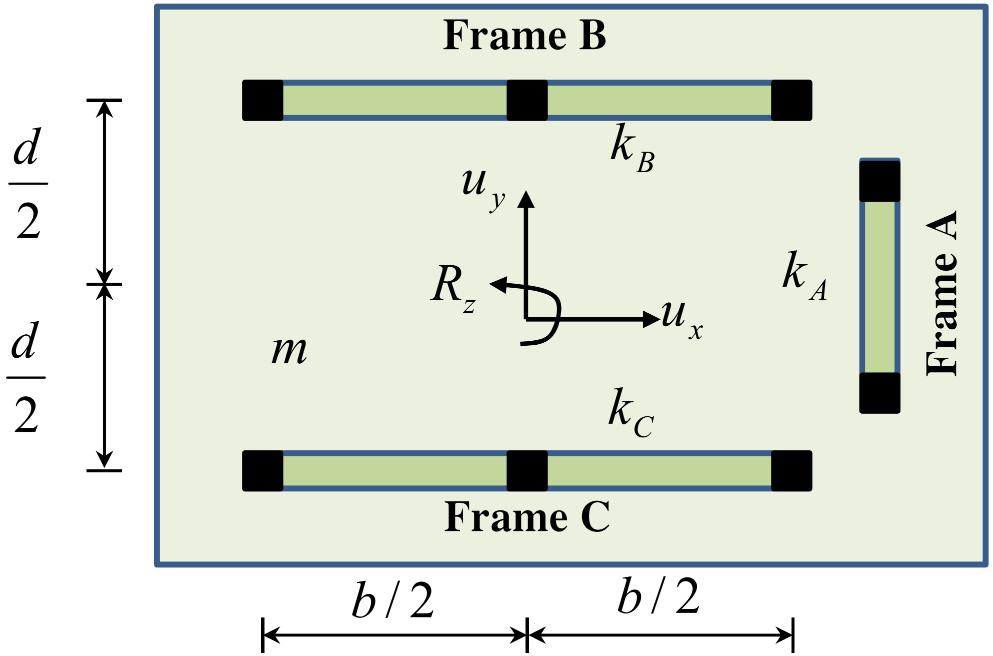


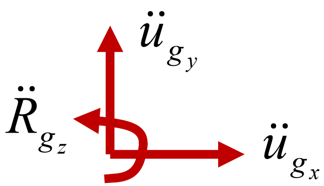
$$[k]_{3\times3} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} u_x & u_y & R_z & \\ \end{array}$$

$$[k]_{3\times3} = \begin{array}{cccc} u_x & u_y & R_z & \\ \left[\begin{matrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \end{matrix}\right] & \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{matrix} \end{array} \Rightarrow [k]_{3\times3} = \begin{array}{cccc} u_x & u_y & R_z & \\ \left[\begin{matrix} (k_B + k_C) \\ 0 \\ (k_C - k_B)\dfrac{d}{2} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ k_A \\ \dfrac{k_A b}{2} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} (k_C - k_B)\dfrac{d}{2} \\ \dfrac{k_A b}{2} \\ (k_C + k_B)\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + k_A\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{matrix} \end{array}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



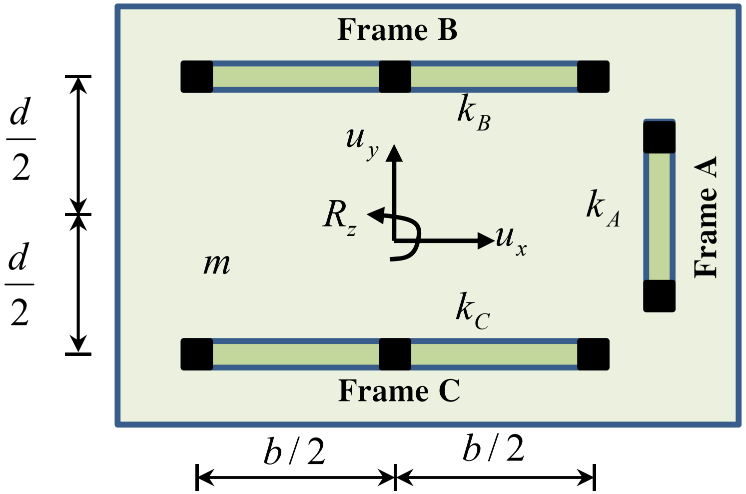


اگر شتاب زلزله در سه درجه آزادی اعمال شود بردار نیروی خارجی به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\{p(t)\}_{3\times1} = -\begin{Bmatrix} m\,\ddot{u}_{g_x} \\ m\,\ddot{u}_{g_y} \\ I_{mo}\,\ddot{R}_{g_z} \end{Bmatrix}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



در نهایت می‌توان معادله حرکت را تشکیل داد:

$$[m]_{3\times3}\{\ddot{x}\}_{3\times1}+[k]_{3\times3}\{x\}_{3\times1}=\{p(t)\}_{3\times1}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\,(b^2+d^2)}{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{R}_z \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_B+k_C) & 0 & (k_C-k_B)\dfrac{d}{2} \\ 0 & k_A & \dfrac{k_A b}{2} \\ (k_C-k_B)\dfrac{d}{2} & \dfrac{k_A b}{2} & (k_C+k_B)\left(\dfrac{d}{2}\right)^2+k_A\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} m\,\ddot{u}_{g_x} \\ m\,\ddot{u}_{g_y} \\ I_{mo}\,\ddot{R}_{g_z} \end{Bmatrix}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

حالت خاص I: سختی در یک امداد متقارن

اگر سازه در راستای x متقارن باشد

$$if \quad k_B = k_C = k \quad \Rightarrow \quad k_A = k$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m(b^2+d^2)}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{R}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & \dfrac{kb}{2} \\ 0 & \dfrac{kb}{2} & (2k)\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + k\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m\ddot{u}_{g_x} \\ m\ddot{u}_{g_y} \\ I_{mo}\ddot{R}_{g_z} \end{Bmatrix}$$

می‌توان گفت که معادله حرکت در راستای x، مستقل از دو امداد دیگر می‌شود و این ناشی از اثر تقارن است. یعنی اگر سازه نسبت به امداد خاصی متقارن باشد، معادله حرکت در آن امداد مستقل از درجه‌های آزادی دیگر خواهد بود. این در حالی است که دو معادله دیگر و دو مود متناظر آن‌ها از هم مستقل نبوده و همبسته می‌باشند.

$$\boxed{m\ddot{u}_x + 2ku_x = -m\ddot{u}_{g_x}}$$

$$m\ddot{u}_y + ku_y + \frac{kb}{2}R_z = -m\ddot{u}_{g_y}$$

$$\frac{m(b^2+d^2)}{12}\ddot{R}_z + \frac{kb}{2}u_y + \left((2k)\left(\frac{d}{2}\right)^2 + k\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)R_z = -I_{mo}\ddot{R}_{g_z}$$

MDOF: Equations of Motion

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

حالت خاص II: سختی در دو امتداد متقارن (منطبق بودن مرکز سختی و مرکز جرم)

$if \quad k_B = k_C = k \quad \Rightarrow$ اگر سازه در راستای x متقارن باشد

$if \quad \dfrac{b}{2} = 0 \quad , \quad k_A = k \quad \Rightarrow$ قاب A در وسط پلان قرارگیرد. اگر سازه در راستای y متقارن باشد

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\,(b^2+d^2)}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{R}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{kd^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m\,\ddot{u}_{g_x} \\ m\,\ddot{u}_{g_y} \\ I_{mo}\,\ddot{R}_{g_z} \end{Bmatrix}$$

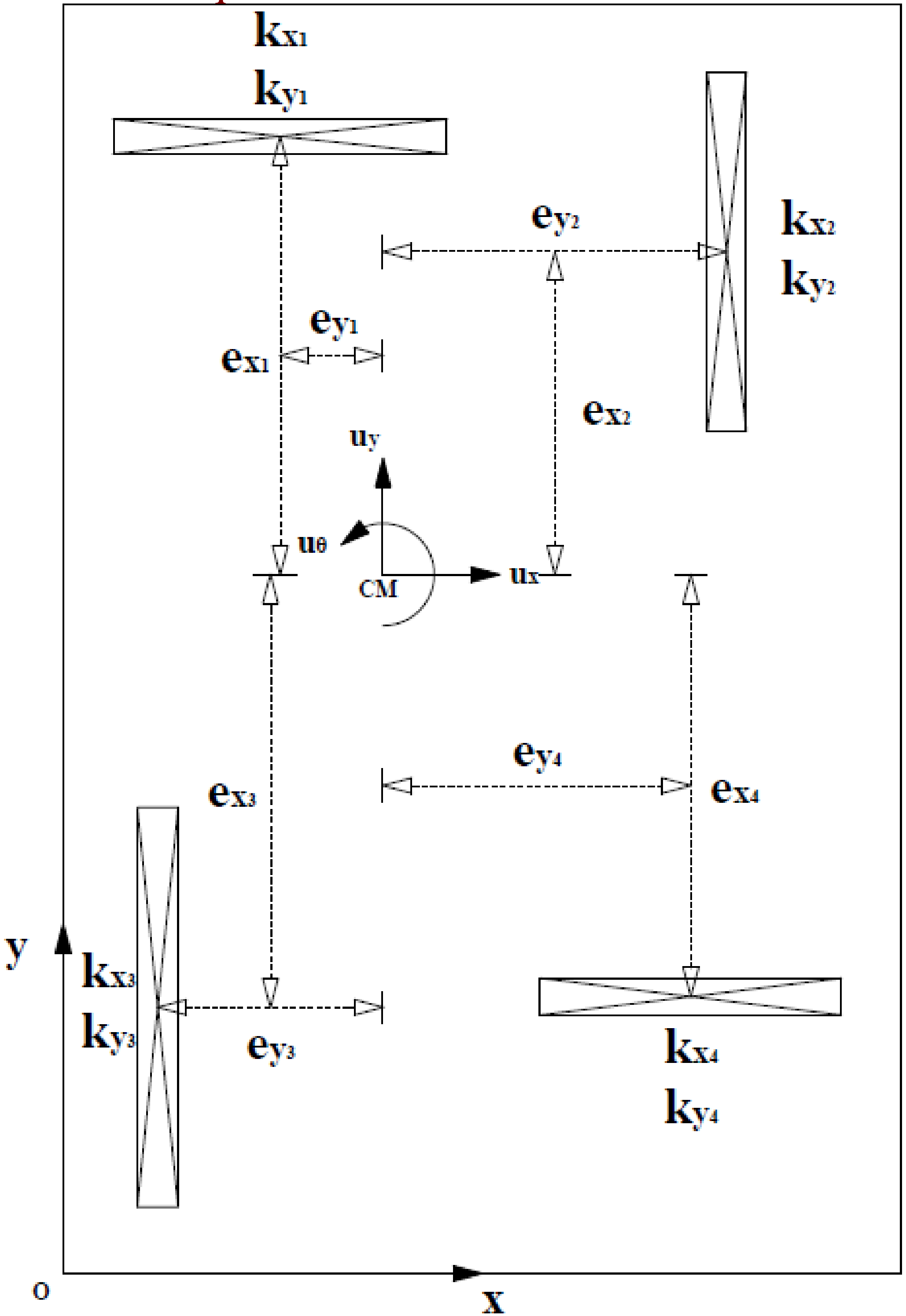
در این حالت ماتریس سختی قطری می‌شود. از سه درجه آزادی، دو درجه مستقل شده است در نتیجه درجه آزادی سوم خود به خود مستقل می‌شود. در این حالت در هر امتداد SDOF داریم و سه معادله مستقل از هم به دست می‌آید. حرکت سازه در هر راستا مستقل از سایر راستاها بوده و مودها نسبت به هم مستقل می‌باشند.

$$m\ddot{u}_x + 2ku_x = -m\,\ddot{u}_{g_x}$$

$$m\ddot{u}_y + ku_y = -m\,\ddot{u}_{g_y}$$

$$\frac{m\,(b^2+d^2)}{12}\ddot{R}_z + \frac{kd^2}{2}R_z = -I_{mo}\,\ddot{R}_{g_z}$$

MDOF: Equations of Motion



VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

خروج از مرکزیت (فاصله از مرکز جرم)

$$e_{xi} = y_i - y_{CM}$$

$$e_{yi} = x_i - x_{CM}$$

$$a_{xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_{xi} \end{bmatrix}$$

$$a_{yi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & e_{yi} \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی هر المان

$$[k]_i = a_{xi}{}^T k_{xi} a_{xi} + a_{yi}{}^T k_{yi} a_{yi}$$

ماتریس سختی طبقه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$[k] = \sum [k]_i = \begin{array}{c} \\ u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_x & u_y & u_\theta \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sum k_{xi} & 0 & -\sum k_{xi} \cdot e_{xi} \\ 0 & \sum k_{yi} & \sum k_{yi} \cdot e_{yi} \\ -\sum k_{xi} \cdot e_{xi} & \sum k_{yi} \cdot e_{yi} & \sum k_{xi} \cdot e_{xi}{}^2 + \sum k_{yi} \cdot e_{yi}{}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر عناصر مقاوم سازه در پلان متقارن باشد

$$[k] = \begin{array}{c} \\ u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_x & u_y & u_\theta \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sum k_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sum k_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & \sum k_{xi} \cdot e_{xi}{}^2 + \sum k_{yi} \cdot e_{yi}{}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$