دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Dynamic of Structures

Single Degree of Freedom Systems: Response to Pulse Excitations

By: Kaveh Karami

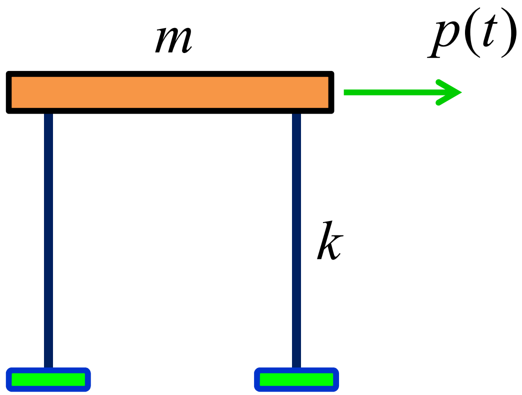
Associate Prof. of Structural Engineering

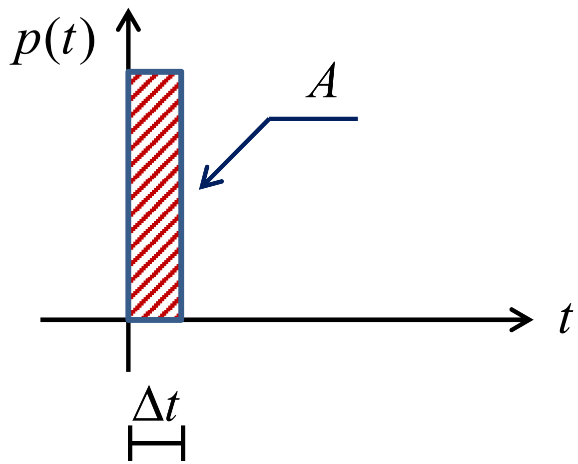
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

SDOF: Response to Pulse Excitations

I. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت بدون میرایی

ضربه (Pulse): ضربه نیرویی است که در زمان بسیار کوچکی (به صورت آنی) به سازه وارد می‌شود.

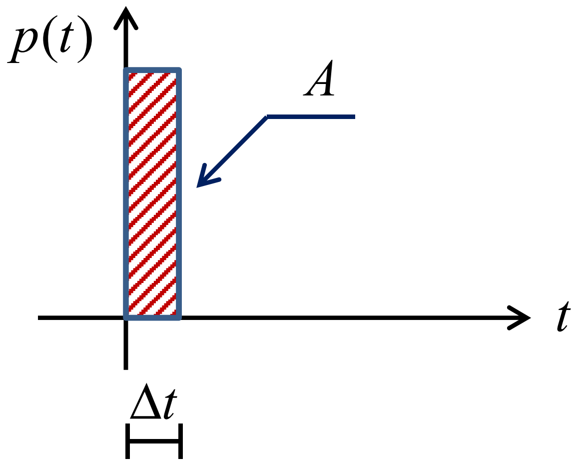




چون ضربه در یک لحظه (در زمان خیلی کوچک) به سازه اعمال می‌شود؛ عواملی سختی و میرایی در سازه فرصت آن را ندارند که به صورت آنی از خود واکنش نشان دهند. بنابراین در سازه جابجایی اولیه اتفاق نمی‌افتد و اثر ضربه به صورت یک سرعت اولیه در سازه ایجاد می‌شود. بعد از اعمال ضربه به سازه، در سازه نیرویی خارجی وجود ندارد و سازه تنها در اثر شرایط اولیه (همان سرعت اولیه ناشی از اثر ضربه) به ارتعاش آزاد در می‌آید.

SDOF: Response to Pulse Excitations

I. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت بدون میرایی



بر اساس تعریف اندازه حرکت

اندازه حرکت $= m\cdot\dot{x} \quad or \quad p\cdot t$

$\Rightarrow \quad m\cdot\dot{x}_0 = p(t)\cdot\Delta t = A$ (همان مساحت زیر منحنی نیرو- زمان)

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_0 = \frac{p(t)\cdot\Delta t}{m} \quad \& \quad x_0 = 0} \quad (1)$$

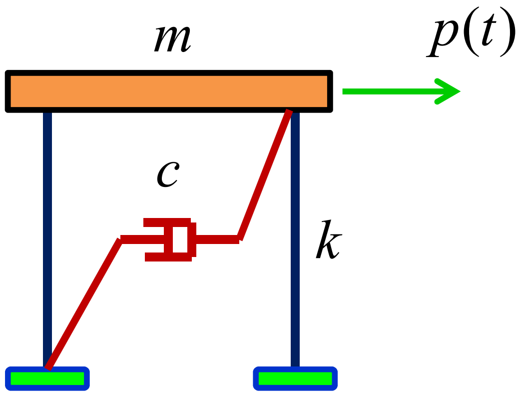
پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF بدون میرایی در اثر شرایط اولیه (1) به صورت زیر به دست می‌آید:

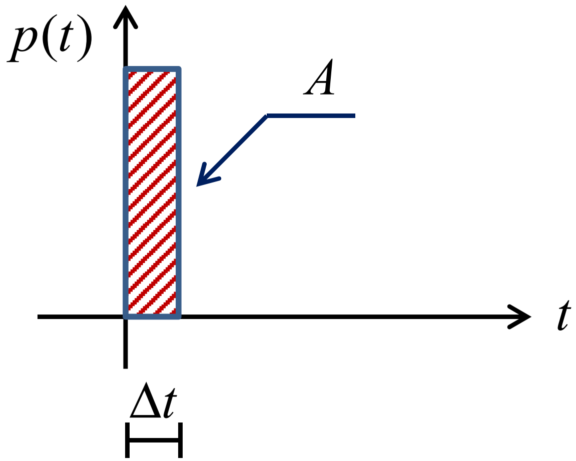
$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t) = (0)\cos(\omega t) + \frac{p(t)\cdot\Delta t}{m\omega}\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{p(t)\cdot\Delta t}{m\omega}\sin(\omega t)} \quad (2)$$

اگر Δt کوچک باشد (به طور مثال $\Delta t \approx 0.1T$) می‌توان با تقریب خوب از رابطه (2) استفاده کرد.

SDOF: Response to Pulse Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی





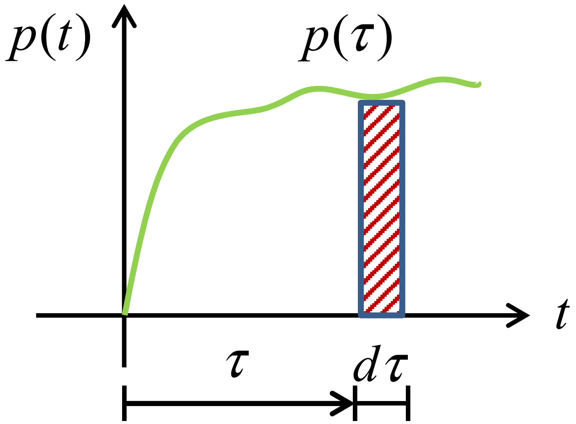
پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF با میرایی در اثر شرایط اولیه (1) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x(t)=e^{-\xi\omega t}\left[\frac{\dot{x}_0+x_0\,\xi\,\omega}{\omega_D}Sin(\omega_D\,t)+x_0\,Cos(\omega_D\,t)\right]\;\Rightarrow\;\boxed{x(t)=\frac{p(t)\cdot\Delta t}{m\,\omega_D}e^{-\xi\omega t}Sin(\omega_D\,t)}\qquad(3)$$

مبنای انتگرال دوهامل است.

SDOF: Response to Pulse Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی



$\tau \neq cte$: یک متغیر زمانی است.

اگر سازه رفتار خطی داشته باشد می‌توان هرگونه بار غیر مشخصی را به سازه وارد کرد و بر اساس اصل جمع آثار، بار در بازه‌های زمانی کوچک به صورت ضربه در نظر گرفته شود. به طوریکه در انتهای ضربه j اُم پاسخ جابجایی و سرعت سازه، به شرایط اولیه ناشی از ضربه j+1 اُم اضافه می‌گردد.

پاسخ سازه در لحظه τ در اثر بار ضربه‌ای $p(\tau)d\tau$ برابر است با:

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{p(\tau)\cdot d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega t} Sin(\omega_D t)} \quad (4)$$

چون رابطه (4) پاسخ سازه در اثر ضربه در مبدا زمان است بنابراین پارامتر زمان t به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$(4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{p(\tau)\cdot d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} Sin[\omega_D (t-\tau)]} \quad (5)$$

SDOF: Response to Pulse Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

پاسخ کلی سازه با انتگرال گیری از رابطه (5) به دست می‌آید:

$$(5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} Sin[\omega_D(t-\tau)]\cdot d\tau} \quad (6)$$

انتگرال دوهامل

(Duhamel Integral)

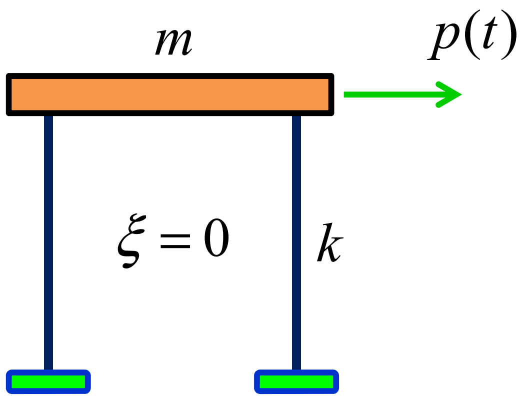
در حالت کلی چون در واقعیت نیروی خارجی $p(\tau)$ وارد بر سازه (مانند زلزله) رابطه مشخص ریاضی ندارد بنابراین انتگرال دوهامل حل صریح نداشته و از روش‌های عددی برای حل آن استفاده می‌شود.

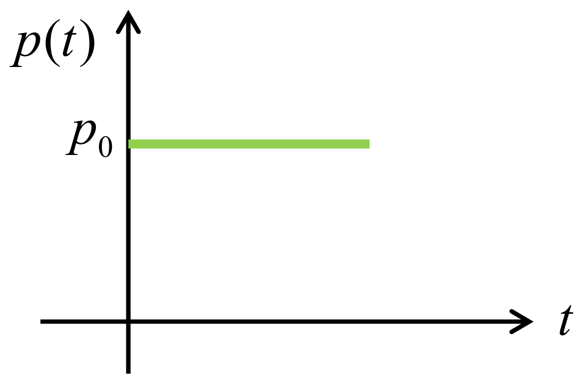
در حالتی که به سازه شتاب زمین وارد می‌گردد

$$p(\tau) = -m\ddot{x}_g \quad \overset{(6)}{\Rightarrow} \quad \boxed{x(t) = \frac{-1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} Sin[\omega_D(t-\tau)]\cdot d\tau} \quad (7)$$

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

مثال-1: پاسخ سیستم SDOF نشان داده شده در شکل زیر را تحت اثر بار ثابت p_0 محاسبه نمایید.

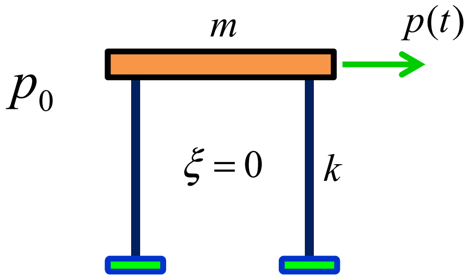


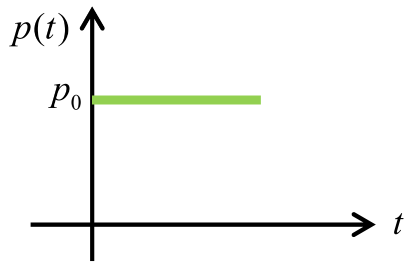


SDOF: Response to Pulse Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

پاسخ مثال-1:





SDOF: Response to Pulse Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

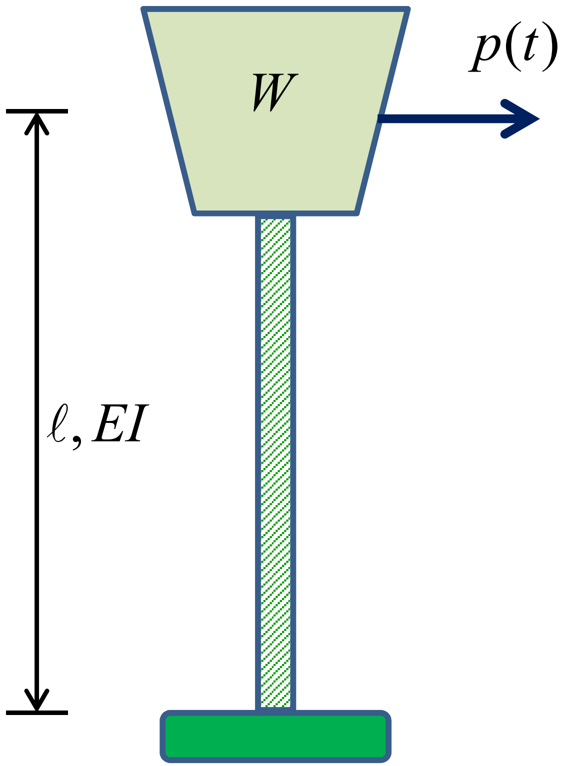
پاسخ مثال-1:

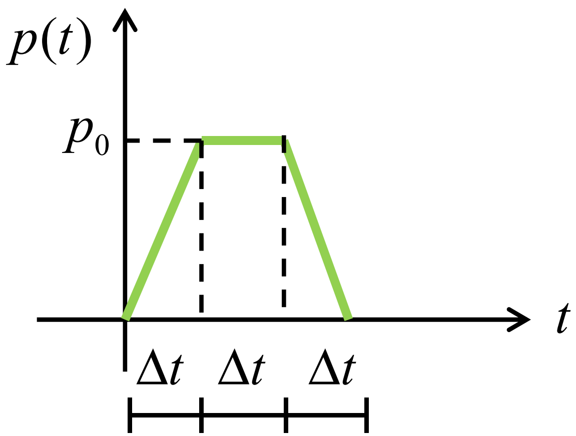
پاسخ سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی ثابت

با توجه به منحنی پاسخ اگر بار p_0 به طور ناگهانی بر سیستم وارد شود جابجایی ماکزیمم دینامیکی 2 برابر جابجایی ماکزیمم استاتیکی است.

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

مثال-2: مخزن آب نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر بار p(t) قرار دارد. حداکثر برش پایه را محاسبه نمایید.





$$\Delta t = 0.1\ (\text{sec})$$

$$P_0 = 50\,(kN)$$

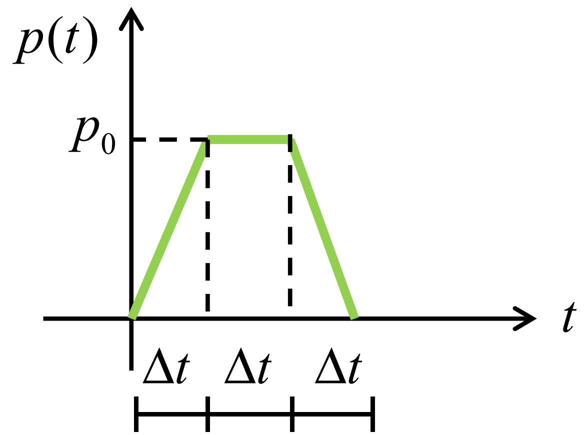
$$k = \frac{3EI}{\ell^3} = 51.1\ \ (kN/cm)$$

$$w = 5078\ (kN)$$

$$\xi = 20\%$$

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

پاسخ مثال-2:



$$\boxed{\omega = 3.14\ (rad/\sec)}$$

$$\boxed{\omega_D = 3.08\ (rad/\sec)}$$

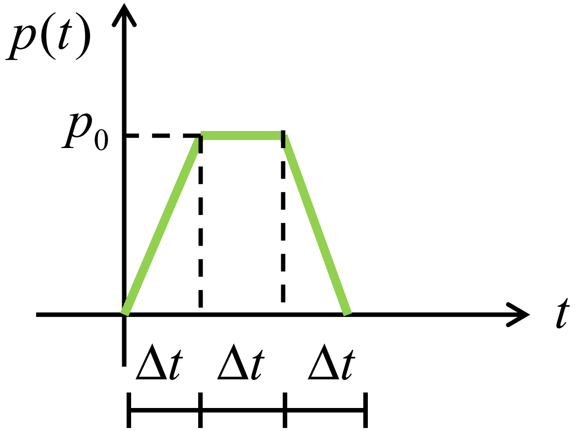
$$\boxed{T_D = 2.04\ (\sec)}$$

مدت زمان اعمال بار برابر است با $\frac{t}{T_D} = \frac{3\times 0.1}{2.04} = 0.15$ در نتیجه می‌توان بار را به صورت ضربه در نظر گرفت.

بنابراین در رابطه (3)، $x(t) = \frac{p(t)\cdot\Delta t}{m\omega_D} e^{-\xi\omega t} Sin(\omega_D t)$ ، به جای $p(t)\cdot\Delta t$ مساحت ذوزنقه را قرار می‌دهیم:

$$\boxed{x(t) = 0.627\times 10^{-2} e^{-0.628t} Sin(3.08t)}$$

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی



پاسخ مثال-2:

چون هدف تعیین ماکزیمم برش پایه است باید جابجایی ماکزیمم تعیین گردد.

$$\boxed{t_{x\max} = 0.445\ (\text{sec})}$$

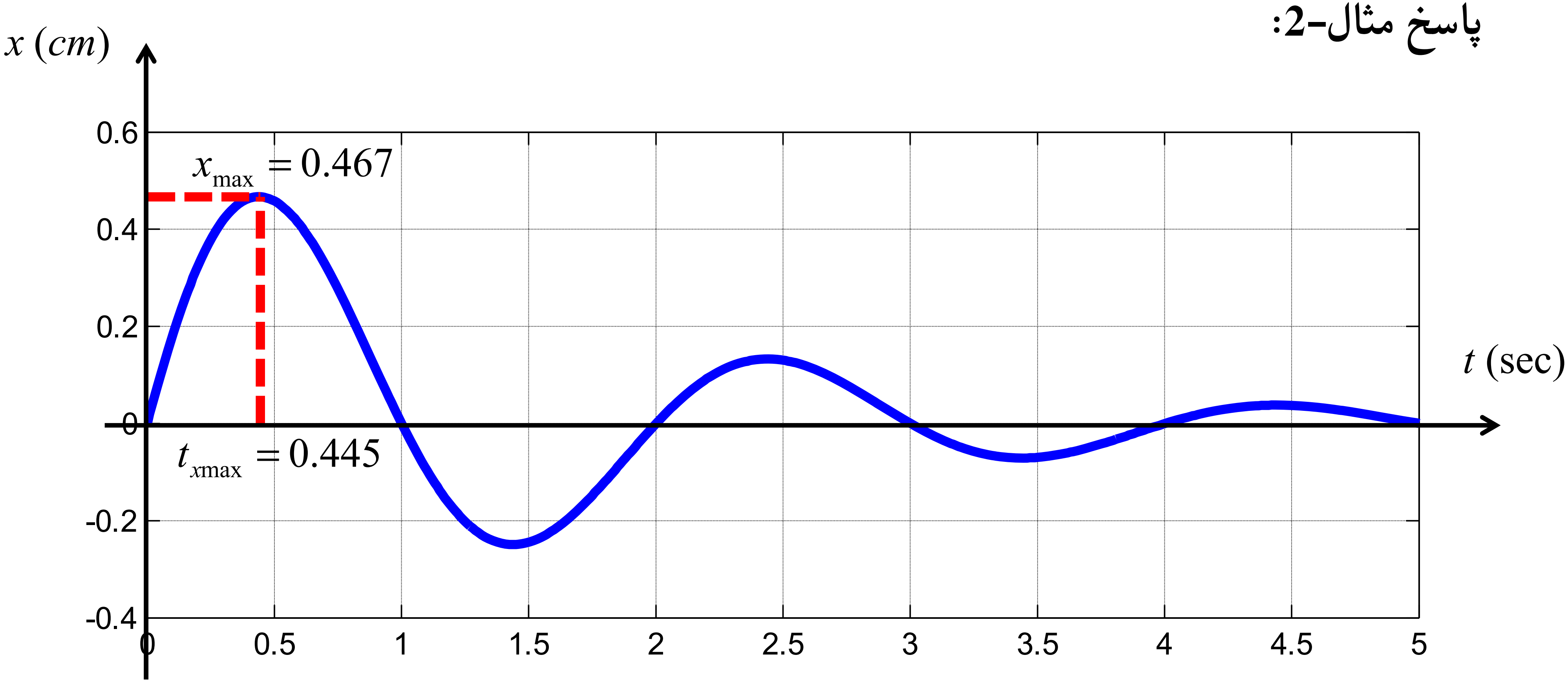
$$\boxed{x_{\max} = 0.467 \times 10^{-2}\ (m)}$$

$$\boxed{V_{\max} = 23.865\ (kN)}$$

SDOF: Response to Pulse Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

پاسخ مثال-2:



پاسخ سیستم SDOF با میرایی در اثر نیروی ضربه‌ای

SDOF: Response to Pulse Excitations

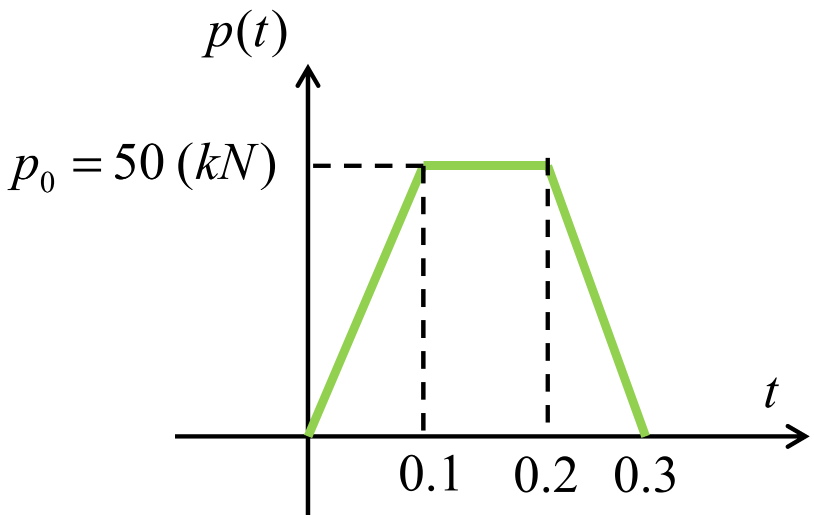
II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

پاسخ مثال-2:

Matlab Solution

نیروی خارجی را به صورت یک تابع در Matlab تعریف می‌کنیم.

```
function Force=f(t)
if t<= 0.1
   Force=500*t;
end
if t>0.1 && t<0.2
   Force=50;
end
if t>=0.2 && t<=0.3
   Force=-500*t+150;
end
if t> 0.3
   Force=0;
end
end
```



$$p(t)_{(kN)} = \begin{cases} 500\,t & t \le 0.1 \\ 50 & 0.1 < t < 0.2 \\ -500\,t + 150 & 0.2 \le t \le 0.3 \\ 0 & 0.3 < t \end{cases}$$

SDOF: Response to Pulse Excitations

.II ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

Matlab Solution

پاسخ مثال-2:

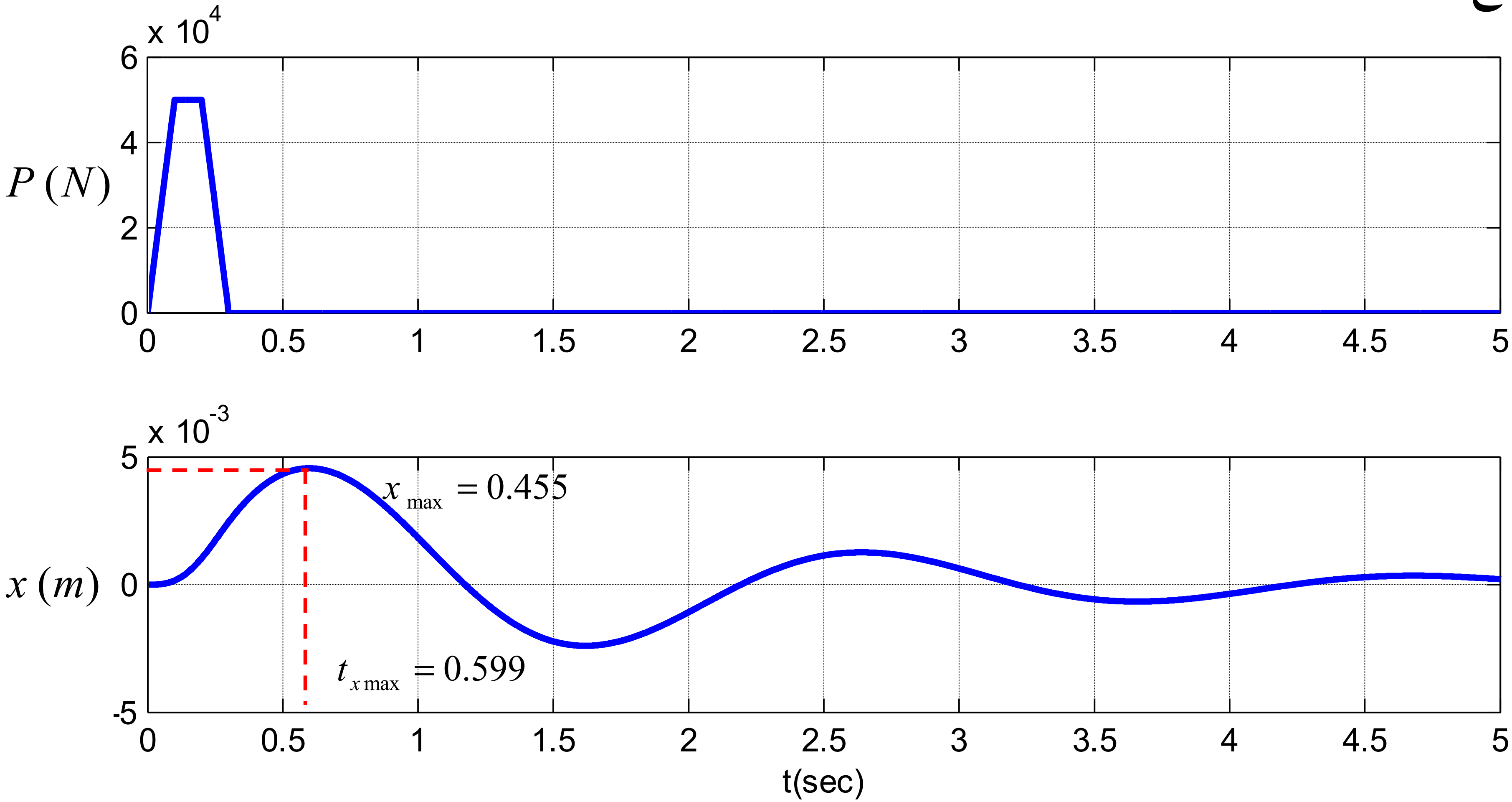
```
clc
clf
clear
format short g
dt=0.001;
t=0:dt:5;
m=5078*1000/9.806;
k=51.1*100000;
xi=0.2;
omega=sqrt(k/m);
omegad=omega*sqrt(1-xi^2);
for i=1:length(t)
   p(i)=f(t(i))*1000;
   G(i)=(1/(m*omegad))*exp(-xi*omega*t(i))*sin(omegad*t(i));
end
y=conv(p,G)*dt;
x=y(1:length(t));
[xmax nmax]=max(abs(x))
Vmax=k*xmax/1000
txmax=nmax*dt
subplot(2,1,1),plot(t,p,'LineWidth',2)
grid
subplot(2,1,2),plot([txmax txmax],[0 xmax],'--r','LineWidth',2)
hold on
subplot(2,1,2),plot([0 txmax],[xmax xmax],'--r','LineWidth',2)
hold on
subplot(2,1,2),plot(t,x,'LineWidth',2)
grid
```

SDOF: Response to Pulse Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی ضربه‌ای – حالت با میرایی

Matlab Solution

پاسخ مثال-2:



$t_{x\,max} = 0.599\ (\mathrm{sec})$

$x_{max} = 0.455 \times 10^{-2}\ (m)$

$V_{max} = 23.268\ (kN)$ پاسخ دقیق