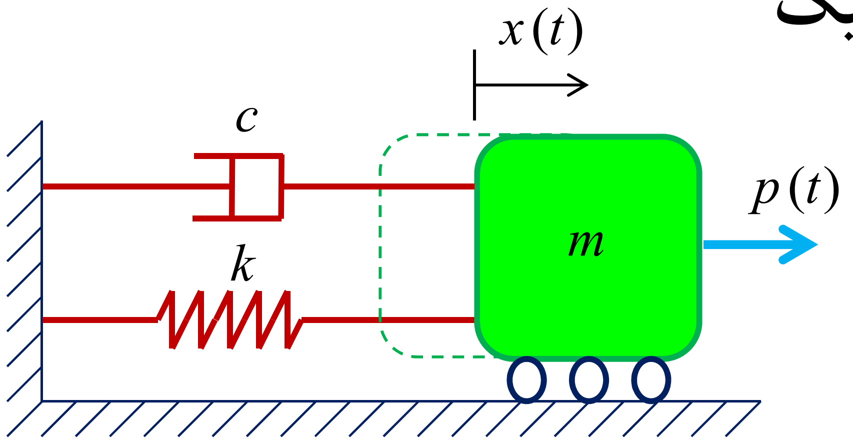
Dynamic of Structures

Single Degree of Freedom Systems:
Response to Harmonic and Periodic Excitations

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

I. ارتعاش اجباری- پاسخ به بارگذاری هارمونیک



معادله حرکت یک سیستم SDOF در حالت کلی

به صورت زیر است:

$$\boxed{m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=p(t)} \quad (1)$$

رابطه (1) یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد که جواب آن از دو بخش تشکیل می‌گردد.

$$\boxed{x(t)=x_c(t)+x_p(t)} \quad (2)$$

که در آن

$x_c(t)$: جواب عمومی (Complementary Solution) است که از نظر فیزیکی همان پاسخ نظیر ارتعاش آزاد سیستم می‌باشد و از حل معادله $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$ به دست می‌آید.

$x_p(t)$: جواب خصوصی (Particular Solution) است که از نظر فیزیکی همان پاسخ نظیر ارتعاش اجباری سیستم در اثر نیروی خارجی می‌باشد و از حل معادله‌های غیرهمگن با ضرایب ثابت به دست می‌آید.

یادآوری: حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین

در حالت کلی معادله خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$\boxed{\ddot{x}+a\,\dot{x}+b\,x=f(t)} \quad (I)$$

در روش ضریب‌های نامعین، فقط در چهار حالت زیر می‌توان جواب خصوصی معادله (I) را به دست آورد.

حالت اول: اگر در معادله (I)، f(t) به فرم یک چند جمله‌ای از درجه n باشد. جواب خصوصی را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_p(t)=t^s\,(\underbrace{a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1 t+a_0}_{\text{یک چند جمله‌ای کامل از درجه } n})$$

که در آن s تعداد ریشه‌های صفر معادله مفسر ($z^2+a\,z+b=0$) می‌باشد.

یادآوری: حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین

حالت دوم: اگر در معادله (I)، f(t) به فرم $f(t)=Q(t)e^{pt}$ باشد؛ که در آن Q(t) یک چندجمله‌ای از درجه n است. آنگاه جواب خصوصی را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم:

که در آن n درجه چندجمله‌ای Q(t) و s تعداد ریشه‌های مساوی p معادله مفسر ($z^2+az+b=0$) می‌باشد.

$$\boxed{x_p(t)=t^s e^{pt}\underbrace{(a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1 t+a_0)}_{\text{یک چند جمله‌ای کامل از درجه n}}}$$

حالت سوم: اگر در معادله (I)، f(t) به فرم $f(t)=Q_1(t)\cos(qt)+Q_2(t)\sin(qt)$ و $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ دو چند جمله‌ای باشند. آنگاه جواب خصوصی را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\boxed{x_p(t)=t^s[G_1(t)\cos(qt)+G_2(t)\sin(qt)]}$$

که در آن s تعداد ریشه‌های مساوی iq+ معادله مفسر ($z^2+az+b=0$) و $G_1(t)$ و $G_2(t)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه n می‌باشند که n بزرگترین درجه بین $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ است.

یادآوری: حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین

حالت چهارم: اگر در معادله (I)، f(t) به فرم $f(t) = e^{pt}[Q_1(t)\cos(qt) + Q_2(t)\sin(qt)]$ و $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ دو چند جمله‌ای باشند. آنگاه جواب خصوصی را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\boxed{x_p(t) = t^s e^{pt}[G_1(t)\cos(qt) + G_2(t)\sin(qt)]}$$

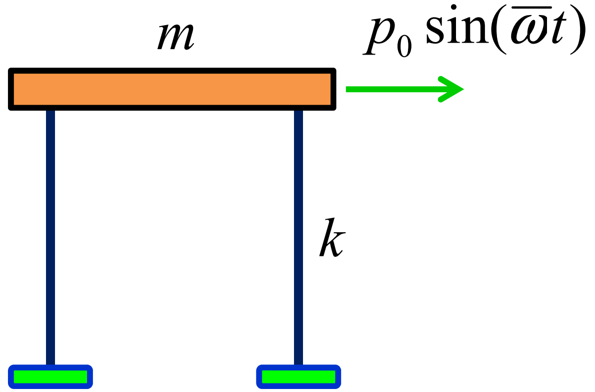
که در آن s تعداد ریشه‌های مساوی p+iq معادله مفسر ($z^2 + az + b = 0$) و $G_1(t)$ و $G_2(t)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه n می‌باشند که n بزرگترین درجه بین $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ است.

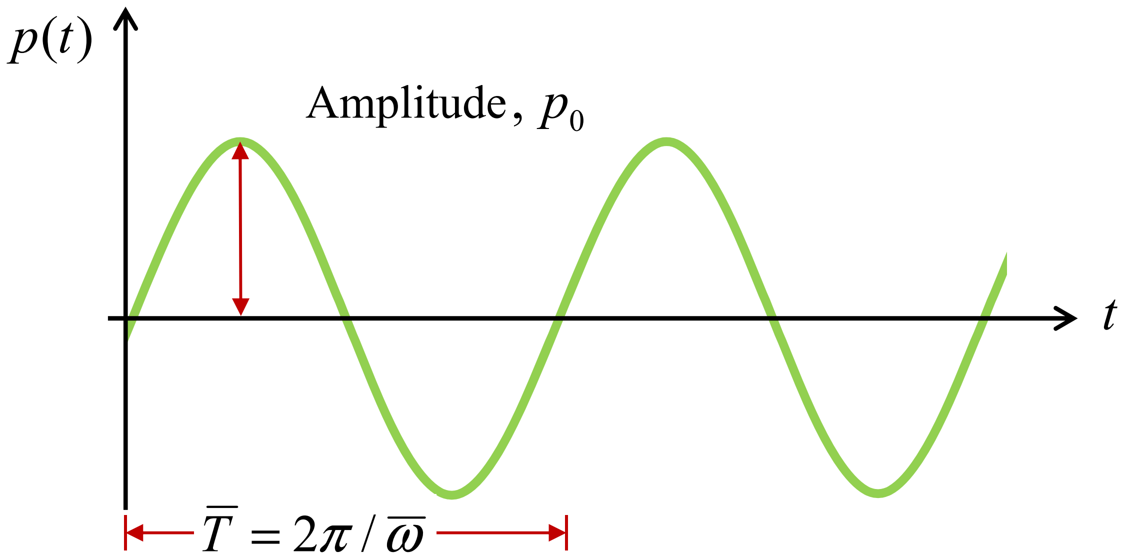
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

نیروهای سینوسی (کسینوسی)، مدل‌های مناسبی برای نیروهای واقعی موجود در طبیعت از قبیل زلزله، انفجار و موج دریا می‌باشد. زیرا به کمک سری‌های فوریه می‌توان این نیروها را به شکل سینوس و کسینوس نوشت.

در شکل نشان داده شده بارگذاری $p(t) = p_0 \sin(\varpi t)$ بر سیستم SDOF بدون میرایی اعمال می‌شود؛ که در آن ϖ فرکانس نیروی خارجی (تحریک خارجی) است و مستقل از فرکانس سازه ω می‌باشد.





نمودار نیروی هارمونیک سینوسی

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

معادله حرکت سیستم در رابطه (1) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=p_0\sin(\overline{\omega}t)} \quad (3)$$

جواب عمومی رابطه (3) همان پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF بدون میرایی است

$$\boxed{x_c = A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)} \quad (4)$$

جواب خصوصی رابطه (3) بر اساس حالت سوم حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین به دست می‌آید. معادله مفسر رابطه (3) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{z^2+\frac{k}{m}=0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2}=i\sqrt{\frac{k}{m}}=i\omega \quad , \quad if\ \overline{\omega}\neq\omega \quad \Rightarrow \quad s=0}$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

با توجه به فرم نیروی خارجی در رابطه (3) $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ برابر است با

$$\begin{array}{c} f(t)=Q_1(t)\cos(q\,t)+Q_2(t)\sin(q\,t) \\ p(t)=p_0\sin(\overline{\omega}t) \end{array} \Rightarrow \boxed{Q_1(t)=0 \quad , \quad Q_2(t)=p_0}$$

با توجه به درجه $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ بزرگترین درجه آن‌ها $n=0$ می‌باشد در نتیجه $G_1(t)$ و $G_2(t)$ مقدار ثابتی دارند و جواب خصوصی رابطه (3) به صورت زیر است

$$\boxed{x_p(t)=G_1\cos(\overline{\omega}\,t)+G_2\sin(\overline{\omega}\,t)} \quad (5)$$

جواب خصوصی در نظر گرفته شده در رابطه (5) و مشتقات آن باید در معادله حرکت رابطه (3) برقرار باشد.

$$(5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x}_p(t)=\overline{\omega}[-G_1\sin(\overline{\omega}\,t)+G_2\cos(\overline{\omega}\,t)]} \quad (6)$$

$$(6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_p(t)=-\overline{\omega}^2[G_1\cos(\overline{\omega}\,t)+G_2\sin(\overline{\omega}\,t)]=-\overline{\omega}^2 x_p(t)} \quad (7)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

$$(3)\,,(5)\ \&\ (7)\quad\Rightarrow$$

$$-m\bar{\omega}^2[G_1\cos(\bar{\omega}t)+G_2\sin(\bar{\omega}t)]+k[G_1\cos(\bar{\omega}t)+G_2\sin(\bar{\omega}t)]=p_0\sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{(-m\bar{\omega}^2G_1+kG_1)\cos(\bar{\omega}t)+(-m\bar{\omega}^2G_2+kG_2)\sin(\bar{\omega}t)=p_0\sin(\bar{\omega}t)}\quad(8)$$

باید ضریب‌های سینوس و کسینوس در دو طرف رابطه (8) یکسان باشد.

$$(8)\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}-m\bar{\omega}^2G_1+kG_1=0\\ -m\bar{\omega}^2G_2+kG_2=p_0\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}G_1=0\\ G_2=\dfrac{p_0}{-m\bar{\omega}^2+k}\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{matrix}G_1=0\\ G_2=\dfrac{p_0}{k}\dfrac{1}{1-\beta^2}\quad,\quad\beta=\bar{\omega}/\omega\end{matrix}}\quad(9)$$

جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(5)\ \&\ (9)\quad\Rightarrow\quad\boxed{x_p(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin(\bar{\omega}t)}\quad(10)$$

نسبت فرکانس : $\beta=\bar{\omega}/\omega$

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

به کمک جواب‌های عمومی و خصوصی به دست آمده به ترتیب در روابط (4) و (10) جواب کلی معادله (1) به دست می‌آید:

$$(4)\ \&\ (10) \quad \Rightarrow \boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin(\overline{\omega}\, t)} \quad (11)$$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب ثابت A و B تعیین می‌گردد:

$$@t=0 \quad x(0)=x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = A\cos(0) + B\sin(0) + \frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin(0) \quad \Rightarrow \boxed{A = x_0} \quad (12)$$

$$@t=0 \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_0 = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) + \frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\overline{\omega}\cos(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{p_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}} \quad (13)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

با جاگذاری ضرایب ثابت A و B در رابطه (11) خواهیم داشت:

$$(11)\,,(12)\;\&\;(13)\quad\Rightarrow\quad \boxed{x(t)=x_0\cos(\omega t)+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}-\frac{p_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)\sin(\omega t)+\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin(\overline{\omega}\,t)}\qquad(14)$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF بدون میرایی ناشی از

بار سینوسی در حالت $\overline{\omega}\neq\omega$

پاسخ کلی (Total Response)

$$x(t)=x_T(t)+x_S(t)$$

پاسخ گذرا (Transient Response)

$$x_T(t)=x_0\cos(\omega t)+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}-\frac{p_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)\sin(\omega t)$$

وابسته به شرایط اولیه و نیروی خارجی

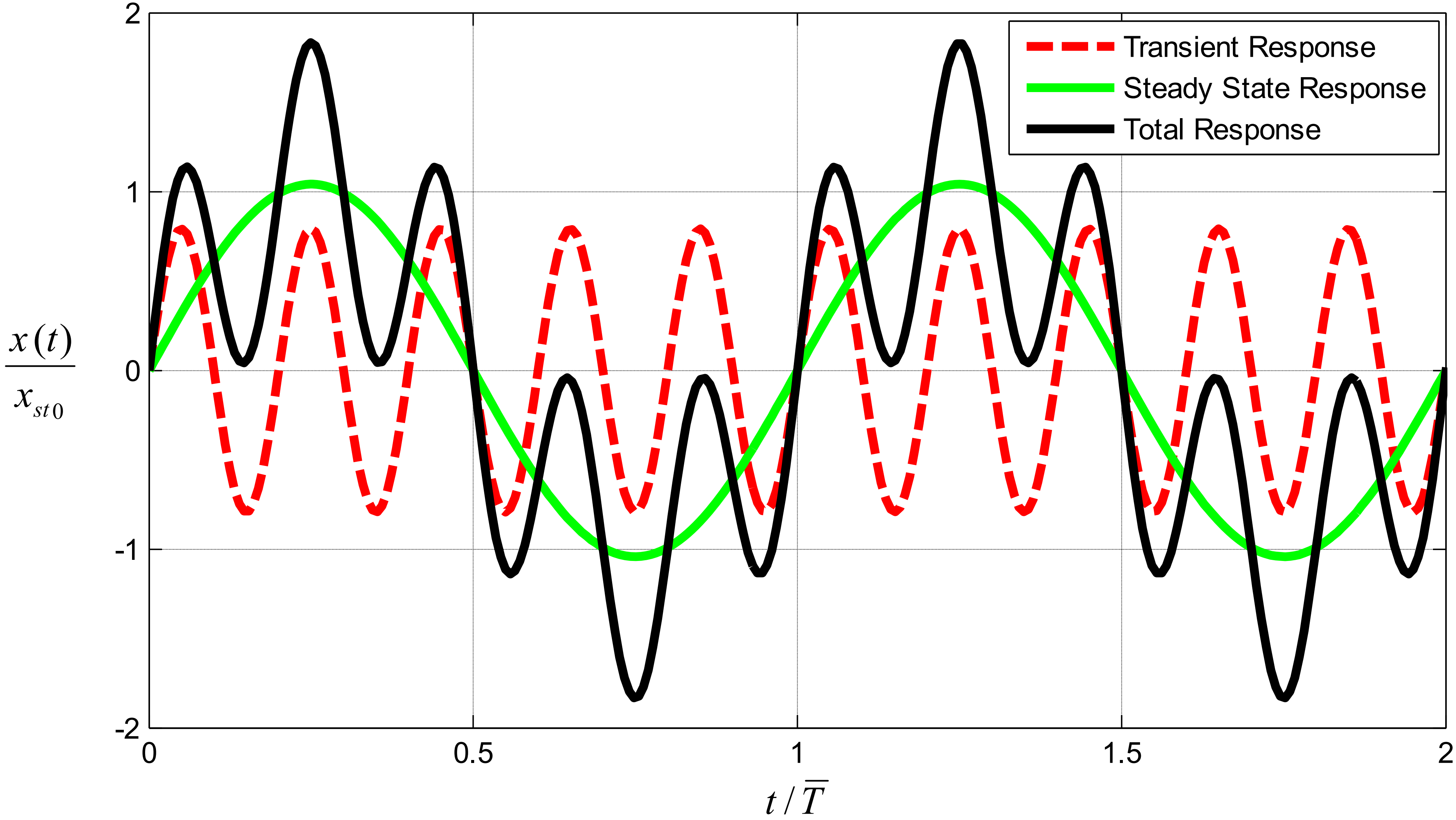
پاسخ دائمی (Steady state Response)

$$x_S(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin(\overline{\omega}\,t)$$

وابسته به نیروی خارجی

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 0.2$ و شرایط اولیه $x_0 = 0$, $\dot{x} = \omega p_0 / k$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

معادله حرکت سیستم در رابطه (3) دوباره اینجا آمده است

$$\boxed{m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=p_0\sin(\overline{\omega}t)} \qquad (3)$$

جواب خصوصی رابطه (3) برای حالتی که $\overline{\omega}=\omega$ باشد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{z^2+\frac{k}{m}=0 \quad\Rightarrow\quad z_{1,2}=i\sqrt{\frac{k}{m}}=i\omega \quad , \quad if\ \overline{\omega}=\omega \quad\Rightarrow\quad s=1}$$

$$\boxed{x_p(t)=G_1\,t\cos(\omega t)+G_2\,t\sin(\omega t)} \qquad (15)$$

جواب خصوصی در نظر گرفته شده در رابطه (15) و مشتقات آن باید در معادله حرکت رابطه (3) برقرار باشد.

$$(15) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\dot{x}_p(t)=[G_2-G_1\omega t]\sin(\omega t)+[G_1+G_2\omega t]\cos(\omega t)} \qquad (16)$$

$$(16) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{x}_p(t)=[-2G_1\omega-G_2\omega^2\,t]\sin(\omega t)+[2G_2\omega-G_1\omega^2\,t]\cos(\omega t)} \qquad (17)$$

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

$$(3)\,,(15)\,\&\,(17)\quad\Rightarrow$$

$$[-2G_1\omega m - G_2\omega^2 m\,t + k\,G_2 t]\sin(\omega t) + [2G_2\omega m - G_1\omega^2 m\,t + k\,G_1 t]\cos(\omega t) = p_0\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{[-2G_1\omega]\sin(\omega t) + [2G_2\omega]\cos(\omega t) = \frac{p_0}{m}\sin(\omega t)} \quad (18)$$

باید ضریب‌های سینوس و کسینوس در دو طرف رابطه (18) یکسان باشد.

$$(18)\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 2G_2\omega &= 0 \\ -2G_1\omega &= \frac{p_0}{m} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} G_2 &= 0 \\ G_1 &= -\frac{p_0}{2m\omega} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{aligned} G_2 &= 0 \\ G_1 &= -\frac{p_0}{2k}\omega \end{aligned}} \quad (19)$$

جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(15)\,\&\,(19)\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_p(t) = -\frac{p_0}{2k}\omega t\cos(\omega t) \quad,\quad \overline{\omega} = \omega} \quad (20)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

به کمک جواب‌های عمومی و خصوصی به دست آمده به ترتیب در روابط (4) و (20) جواب کلی معادله (1) به دست می‌آید:

$$(4)\ \&\ (20) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - \frac{p_0}{2k}\omega t\cos(\omega t)} \quad (21)$$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب ثابت A و B تعیین می‌گردد:

$$@t=0 \quad x(0)=x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = A\cos(0) + B\sin(0) - \frac{p_0}{2k}\omega(0)\cos(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = x_0} \quad (22)$$

$$@t=0 \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_0 = B\omega\cos(0) - \frac{p_0}{2k}\omega\cos(0) + \frac{p_0}{2k}\omega^2(0)\sin(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{p_0}{2k}} \quad (23)$$

با جاگذاری ضرایب ثابت A و B در رابطه (21) خواهیم داشت:

$$(21),\ (22)\ \&\ (23) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = [\frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{p_0}{2k}]\sin(\omega t) + [x_0 - \frac{p_0}{2k}\omega t]\cos(\omega t)} \quad (24)$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF بدون میرایی ناشی از بار سینوسی در حالت $\overline{\omega} = \omega$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

اگر از اثرات دینامیکی در معادله حرکت، رابطه (3)، صرفنظر شود پاسخ تغییرشکل استاتیکی در هر لحظه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=p_0\sin(\overline{\omega}t)\quad\Rightarrow\quad\boxed{x_{st}(t)=\frac{p_0}{k}\sin(\overline{\omega}t)}\qquad(25)$$

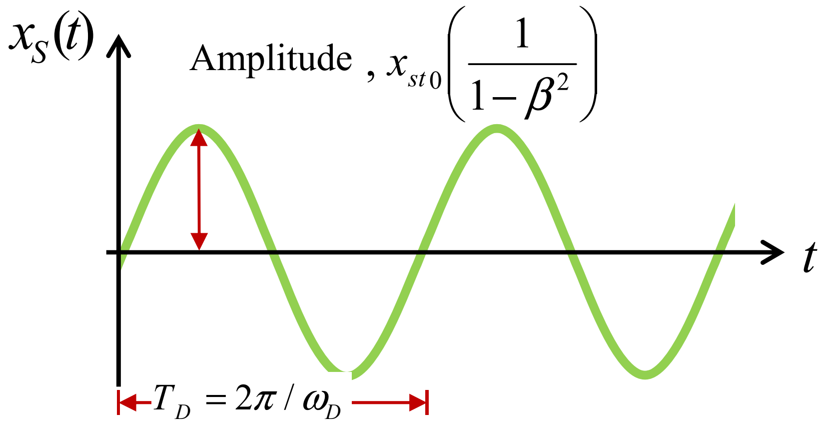
ماکزیمم تغییرشکل استاتیکی برابر است با

$$if\quad \sin(\overline{\omega}t)=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{x_{st\max}=x_{st0}=\frac{p_0}{k}}\qquad(26)$$

با استفاده از (26) رابطه پاسخ دائمی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

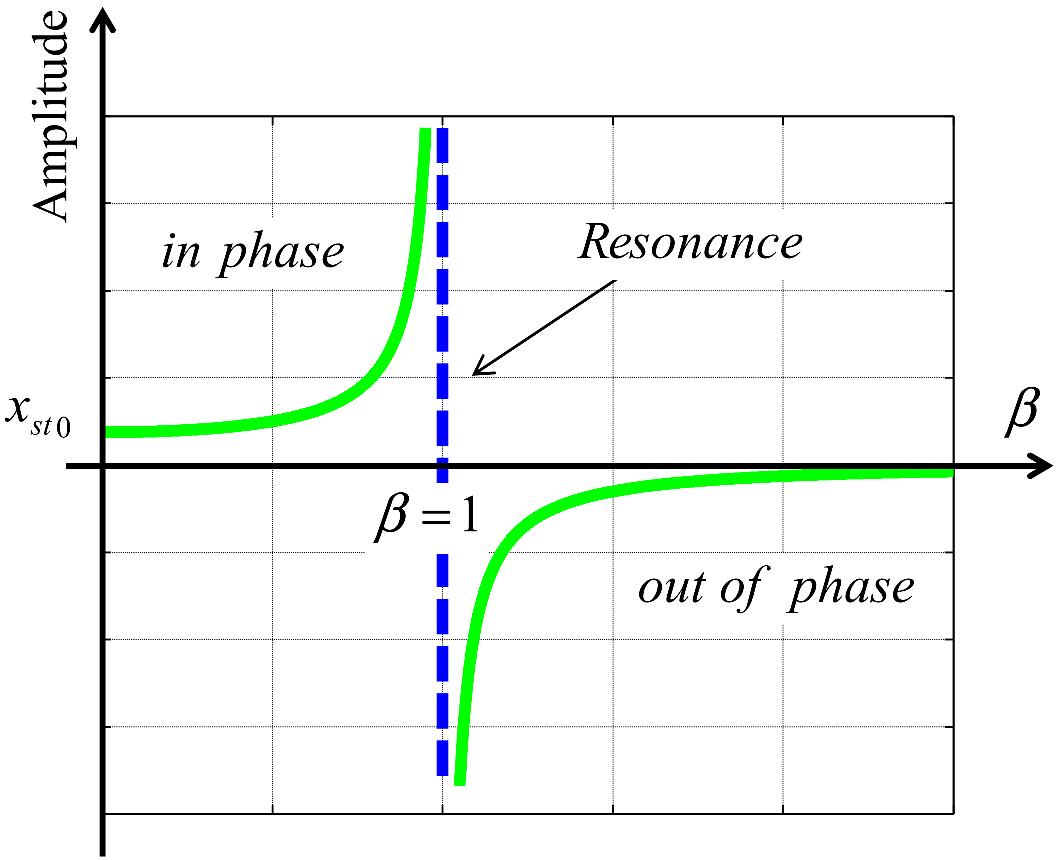
$$(14)\,\&\,(26)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{x_S(t)=x_{st0}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)\sin(\overline{\omega}\,t)}\qquad(27)$$



SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی



تغییرات دامنه پاسخ دائمی برای نسبت فرکانس‌های مختلف

اگر $\overline{\omega} > \omega$ در این صورت

$$\beta < 1 \quad \Rightarrow \quad Amplitude > 0$$

این حالت را هم‌فاز (in phase) می‌نامند و نشان دهنده آن است که جهت جابجایی با جهت نیرو یکی است.

اگر $\overline{\omega} < \omega$ در این صورت

$$\beta > 1 \quad \Rightarrow \quad Amplitude < 0$$

این حالت را غیرهم‌فاز (out of phase) می‌نامند و نشان دهنده آن است که جهت جابجایی با جهت نیرو مخالف است.

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

پاسخ دائمی در رابطه (27) را می‌توان به صورت برداری نوشت

$$\boxed{x_S(t) = \rho \sin(\varpi t - \theta)} \quad (28)$$

که در آن

$$\theta = \begin{cases} 0^o & \omega > \varpi \\ 180^o & \omega < \varpi \end{cases} \qquad \rho = \frac{x_{st0}}{\left|1-\beta^2\right|} \quad (29)$$

θ : زاویه فاز (Phase angle)

ρ : حداکثر جابجایی دینامیکی

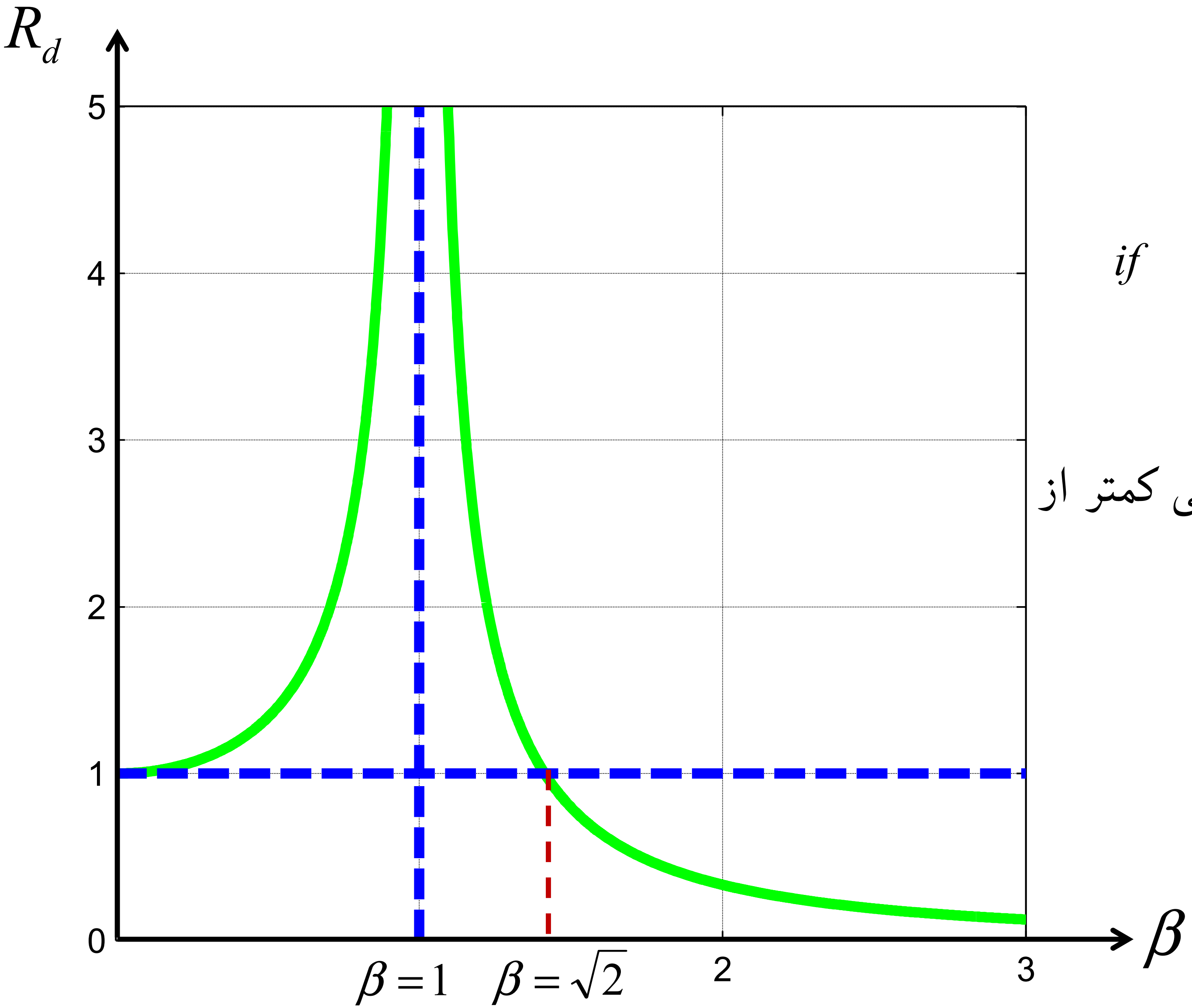
ضریب بزرگنمایی دینامیکی (Dynamic magnification factor)

ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت بدون میرایی (بدون بُعد)

$$R_d = \frac{\text{حداکثر جابجایی دینامیکی}}{\text{حداکثر جابجایی استاتیکی}} = \frac{\rho}{x_{st0}} \Rightarrow \boxed{R_d = \frac{1}{\left|1-\beta^2\right|}} \quad (30)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی



$$if \quad \beta > \sqrt{2} \qquad (\text{یعنی} \quad \overline{\omega} > \sqrt{2}\,\omega)$$

$$\Rightarrow \quad R_d < 1$$

یعنی حداکثر جابجایی دائمی دینامیکی کمتر از حداکثر جابجایی استاتیکی است

نمودار تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای نسبت فرکانس‌های مختلف

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

با اعمال شرایط اولیه صفر رابطه‌های (14) و (24) به صورت زیر می‌باشند:

$$@\, t=0 \quad ; \quad x(0)=\dot{x}(0)=0 \quad \Rightarrow$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF بدون میرایی ناشی از بار سینوسی در دو حالت

$$(14) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}[\sin(\overline{\omega}\,t)-\beta\sin(\omega t)] \quad , \quad (\overline{\omega}\neq\omega)} \qquad (31)$$

$$(24) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t)=\frac{p_0}{2k}[\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)] \quad , \quad (\overline{\omega}=\omega)} \qquad (32)$$

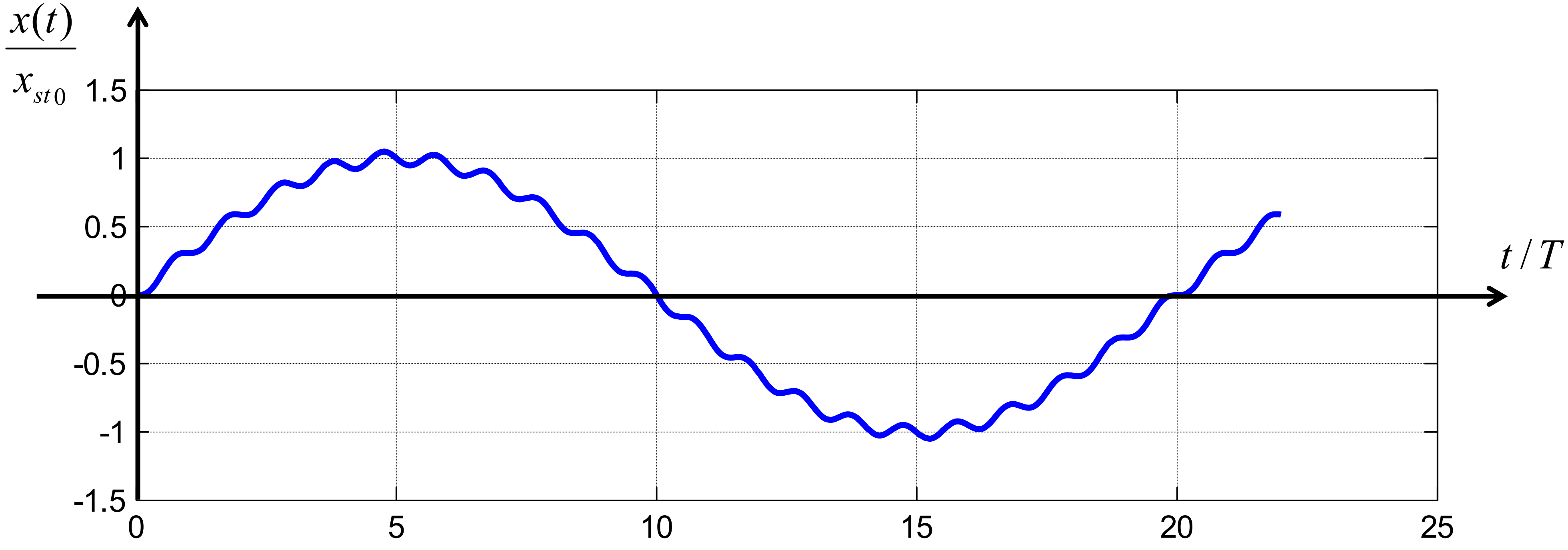
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

حالت خاص I) $\bar{\omega} << \omega$ $\qquad \bar{\omega} << \omega \;\Rightarrow\; \beta << 1 \;\Rightarrow\; R_d \to 1$

حالتی که فرکانس بار بسیار کمتر از فرکانس سازه باشد (یعنی نیرو به آرامی تغییر کند)؛ در نتیجه حداکثر جابجایی دینامیکی برابر است با حداکثر جابجایی استاتیکی

$$(31) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x(t)}{x_{st0}} \approx \sin\left(\frac{2\pi T}{\bar{T}}\frac{t}{T}\right) - \beta \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)}$$



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta << 1$ و شرایط اولیه صفر

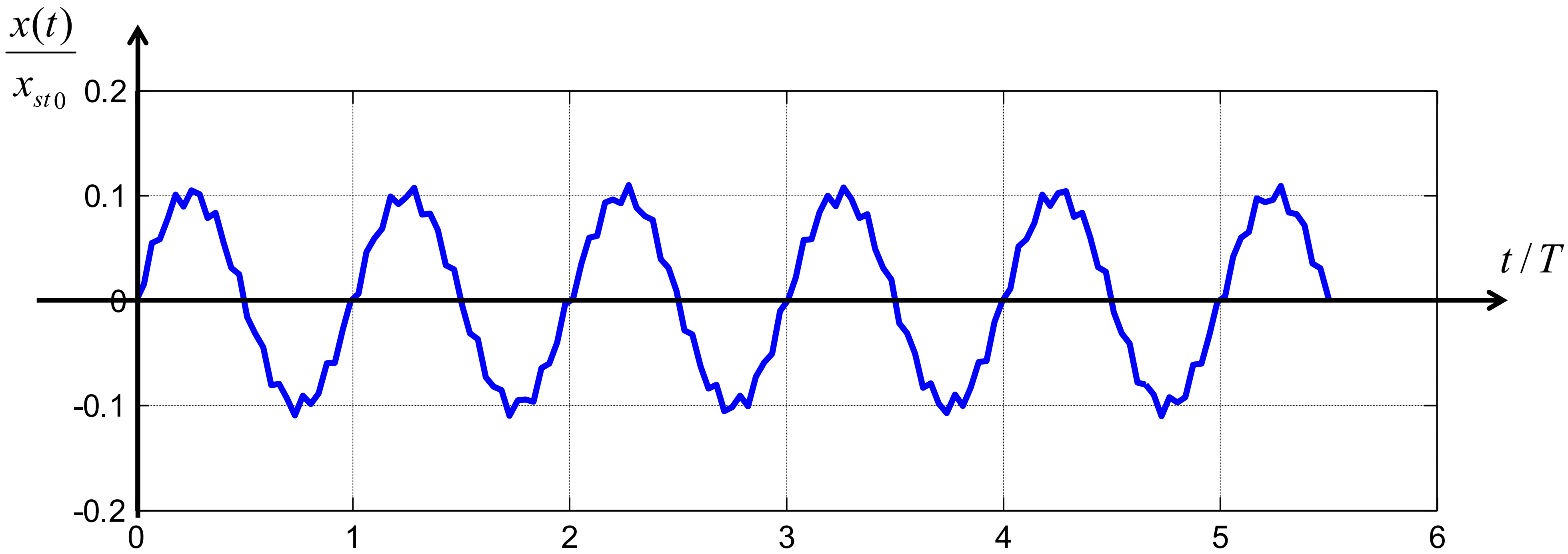
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

حالت خاص II) $\overline{\omega} >> \omega$

$$\overline{\omega} >> \omega \quad \Rightarrow \quad \beta \to \infty \quad \Rightarrow \quad R_d \to 0$$

حالتی که فرکانس بار بسیار بزرگتر از فرکانس سازه باشد. در نتیجه تغییرشکل ارتعاشی برای نیروهای با سرعت نوسان زیاد، بسیار کوچک است.



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta >> 1$ و شرایط اولیه صفر

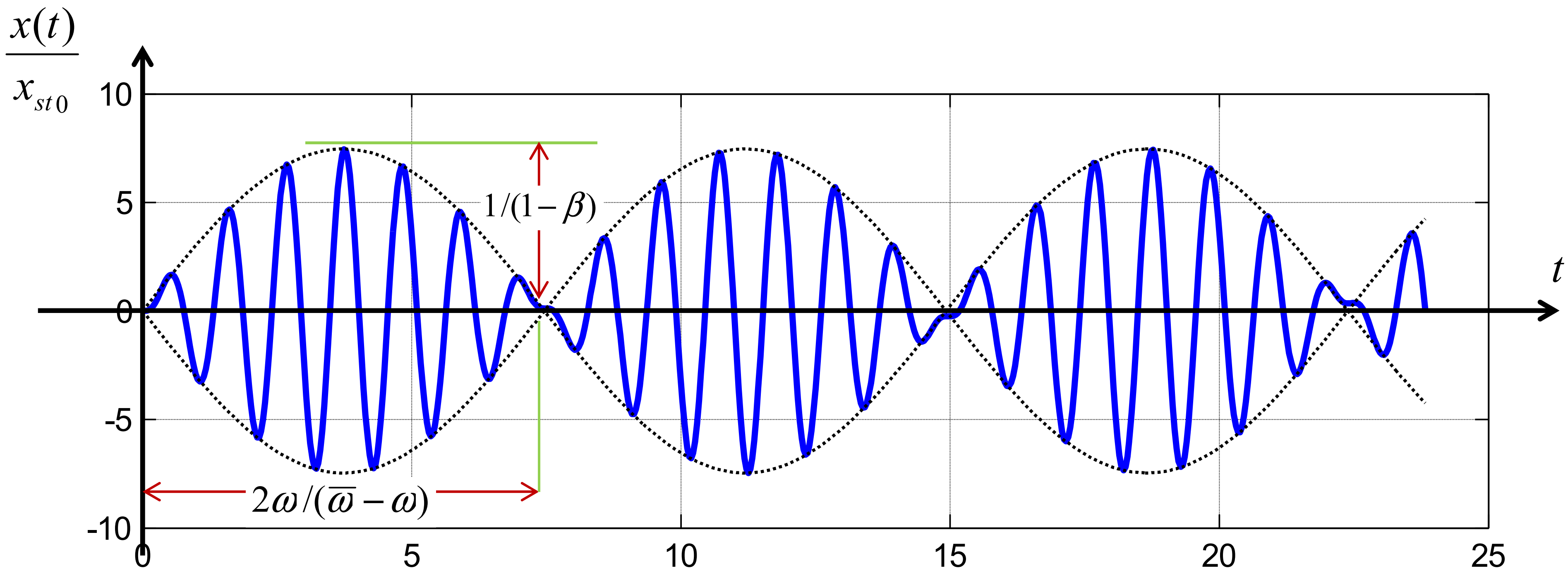
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

حالت خاص III) $\bar{\omega} \to \omega$

$$\bar{\omega} \to \omega \quad (for\ example \quad \bar{\omega} = 0.866\,\omega) \quad \Rightarrow \quad \beta \to 1 \quad \Rightarrow \quad R_d \uparrow$$

هم‌فاز شدن و غیرهم‌فاز شدن دو مولفه پاسخ در زمان‌های مختلف باعث ایجاد پدیده ضربان (Beating) می‌گردد.



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta \to 1$ و شرایط اولیه صفر

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

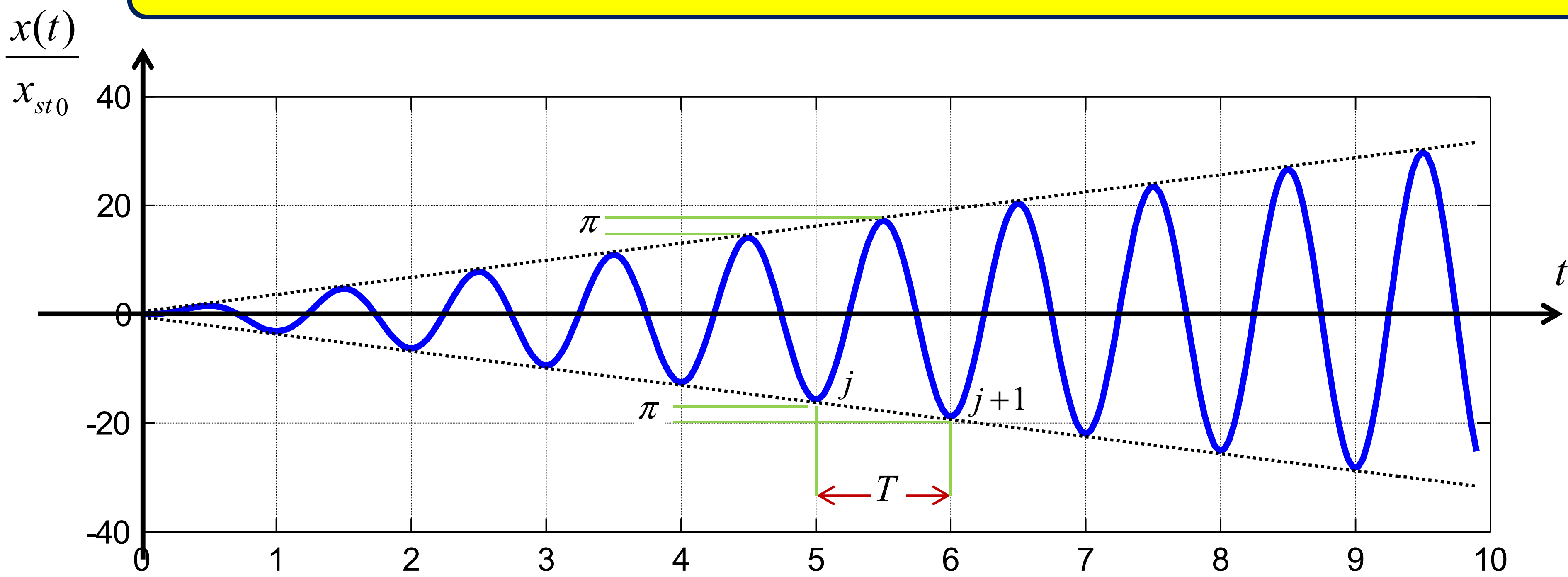
IV) حالت خاص $\overline{\omega}=\omega$

$$\overline{\omega}=\omega \quad \Rightarrow \quad \beta=1 \quad \Rightarrow \quad R_d \rightarrow \infty$$

یعنی حداکثر جابجایی دینامیکی خیلی بزرگتر از حداکثر جابجایی استاتیکی است

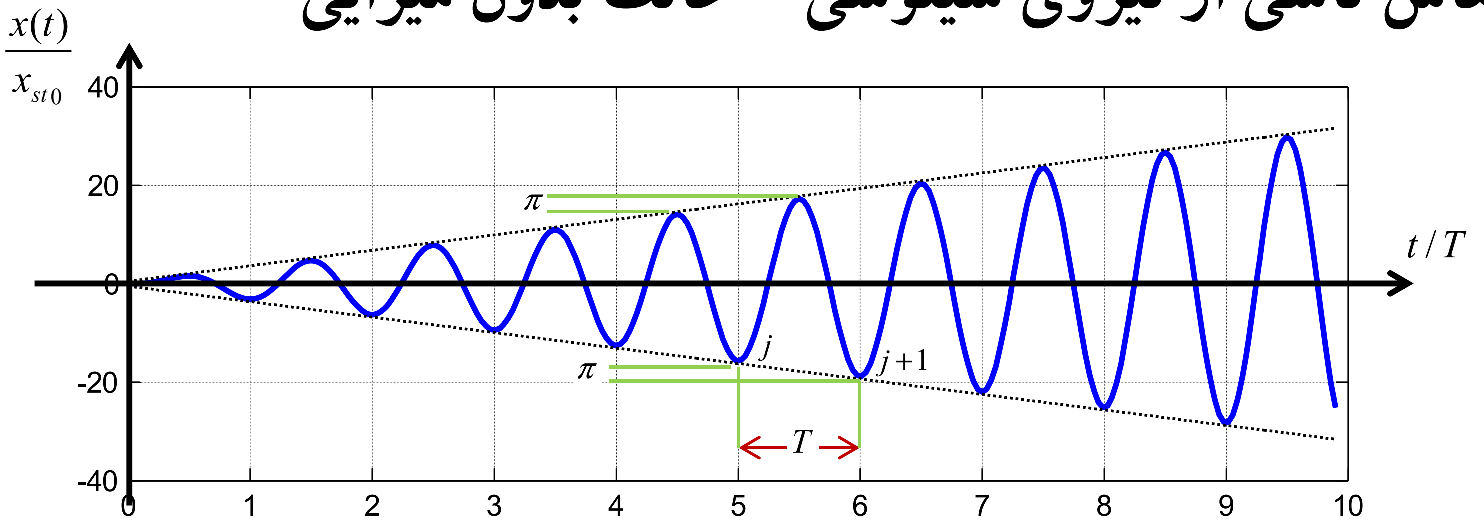
حالتی که فرکانس نیروی خارجی با فرکانس سازه برابر شود حالت تشدید یا همگامی (Resonance) رخ می‌دهد.

فرکانس تشدید (Frequency Resonant): فرکانس نیرویی است که در آن R_d مقدار ماکزیمم دارد.



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta=1$ و شرایط اولیه صفر

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 1$ و شرایط اولیه صفر

$$@\quad t=(j-\tfrac{1}{2})T \quad\Rightarrow\quad =\pi(j-\tfrac{1}{2})$$

$$@\quad t=(j+\tfrac{1}{2})T \quad\Rightarrow\quad x_{(j+1)}/x_{st0}=\pi(j+\tfrac{1}{2})$$

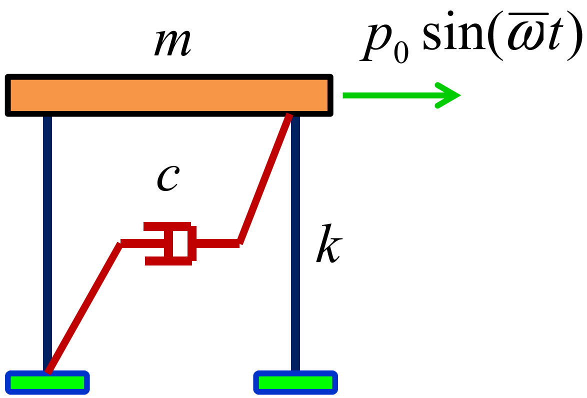
$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x_{(j+1)}}{x_{st0}}-\frac{x_{(j)}}{x_{st0}}=\pi}$$

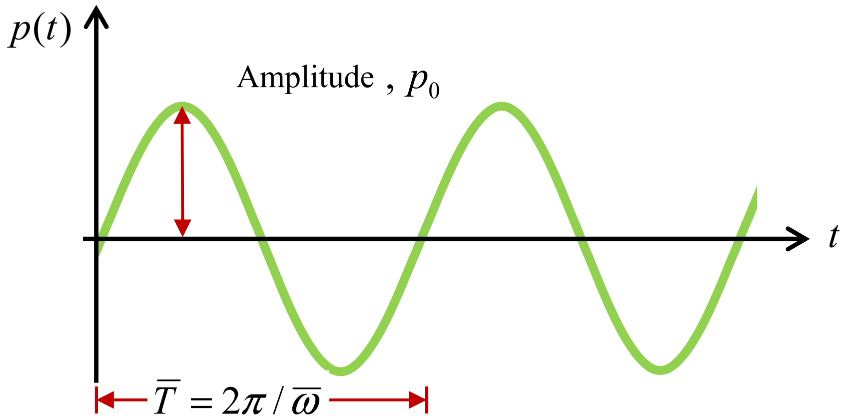
برای سیستم‌های نامیرا فرکانس تشدید برابر با ω است به طوری که در این فرکانس مقدار R_d نامحدود می‌باشد. اما در واقعیت تغییرشکل ارتعاشی سریعا نامحدود نمی‌شود بلکه به آرامی نامحدود می‌گردد. همچنین نتایج مربوط به تشدید در حالت واقعی زمانی برقرار است که سازه در ناحیه خطی رفتار نماید زیرا

$$in\ nonlinear \quad\Rightarrow\quad k\downarrow \quad\Rightarrow\quad \omega\neq cte \quad\Rightarrow\quad \overline{\omega}\neq\omega$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی





نمودار نیروی هارمونیک سینوسی

معادله حرکت یک سیستم SDOF با میرایی از رابطه کلی (1) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = p_0 \sin(\varpi t)} \quad (33)$$

رابطه (33) یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد که جواب آن از دو بخش تشکیل می‌گردد.

$$\boxed{x(t) = x_c(t) + x_p(t)}$$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

جواب عمومی رابطه (33) همان پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF با میرایی است

$$\boxed{x_c = e^{-\xi\omega t}[A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)]} \quad (34)$$

جواب خصوصی رابطه (33) بر اساس حالت سوم حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین به دست می‌آید. معادله مفسر رابطه (33) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{z^2 + 2\xi\omega z + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad , \quad if\ \varpi \neq \omega_D \quad \Rightarrow \quad s = 0}$$

جواب خصوصی رابطه (33) برای حالتی که $\varpi \neq \omega_D$ باشد شبیه رابطه (5) است:

$$\boxed{x_p(t) = G_1\cos(\varpi t) + G_2\sin(\varpi t)} \quad (5)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

جواب خصوصی در رابطه (5) و مشتقات آن (6) و (7) باید در معادله حرکت رابطه (33) برقرار باشد.

$$(5)\,,(6)\,,(7)\,\&\,(33)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{[-m\bar{\omega}^2 G_1 + c\bar{\omega}G_2 + kG_1]\cos(\bar{\omega}\,t) + [-m\bar{\omega}^2 G_2 - c\bar{\omega}G_1 + kG_2]\sin(\bar{\omega}\,t) = p_0\sin(\bar{\omega}t)}\qquad(35)$$

باید ضریب‌های سینوس و کسینوس در دو طرف رابطه (35) یکسان باشد.

$$(35)\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}(k-m\bar{\omega}^2)\,G_1 + c\bar{\omega}\,G_2 &= 0\\ -c\bar{\omega}\,G_1 + (k-m\bar{\omega}^2)\,G_2 &= p_0\end{aligned} \quad\xrightarrow{if\ \beta=\frac{\bar{\omega}}{\omega},\ \frac{c}{k}=\frac{2\xi}{\omega},\ \frac{m}{k}=\frac{1}{\omega^2}}\quad \boxed{\begin{aligned}G_1 &= \frac{-2\xi\beta}{(2\xi\beta)^2+(1-\beta^2)^2}\frac{p_0}{k}\\ G_2 &= \frac{1-\beta^2}{(2\xi\beta)^2+(1-\beta^2)^2}\frac{p_0}{k}\end{aligned}}\qquad(36)$$

جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(5)\,\&\,(36)\quad\Rightarrow\quad\boxed{x_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(2\xi\beta)^2+(1-\beta^2)^2}[(1-\beta^2)\sin(\bar{\omega}\,t) - 2\xi\beta\cos(\bar{\omega}\,t)]}\qquad(37)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

به کمک جواب‌های عمومی و خصوصی به دست آمده به ترتیب در روابط (34) و (37) جواب کلی معادله (33) به دست می‌آید:

(34) & (37) $\Rightarrow$

$$\boxed{x(t) = e^{-\xi\omega t}[A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)] + \frac{p_0}{k}\frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}[(1-\beta^2)\sin(\overline{\omega} t) - 2\xi\beta\cos(\overline{\omega} t)]} \quad (38)$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF با میرایی ناشی از بار سینوسی در حالت $\overline{\omega} \neq \omega_D$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب ثابت A و B تعیین می‌گردد:

$$@t=0 \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad A = x_0 + \frac{2\xi\beta}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}\frac{p_0}{k}$$

$$@t=0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\dot{x}_0 - \xi\omega x_0}{\omega_D} + \frac{p_0}{k\omega_D}\frac{2\xi^2\beta\omega - (1-\beta^2)\overline{\omega}}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \quad (39)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ کلی (Total Response)

$$x(t) = x_T(t) + x_S(t)$$

پاسخ دائمی (Steady State Response)

$$x_S(t) = \frac{p_0}{k}\frac{(1-\beta^2)\sin(\varpi t) - 2\xi\beta\cos(\varpi t)}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}$$

پاسخ گذرا (Transient Response)

$$x_T(t) = e^{-\xi\omega t}[A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)]$$

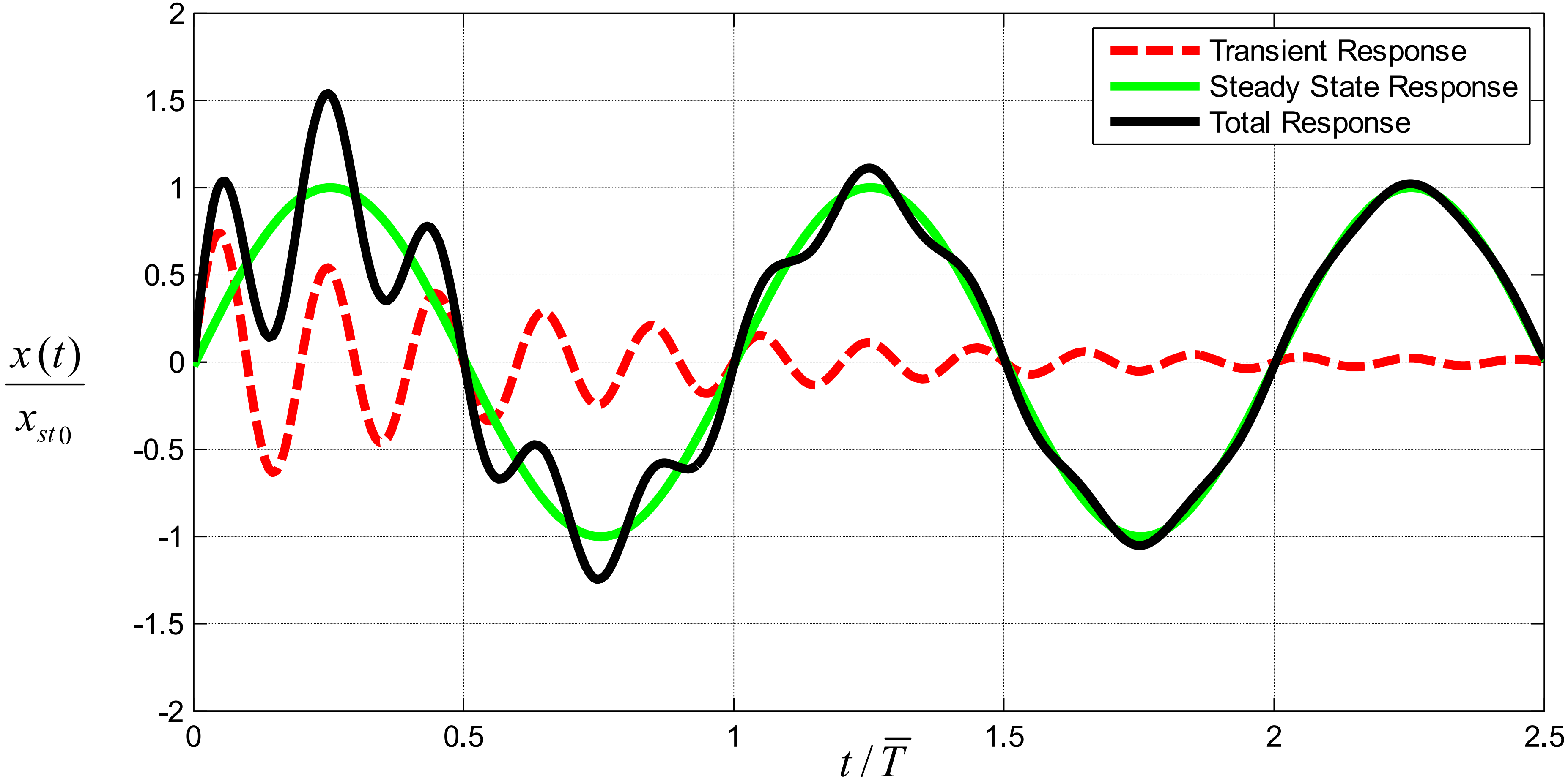
(وابسته به نیروی خارجی)

(وابسته به شرایط اولیه و نیروی خارجی)

تا زمانی که نیرو بر سازه اعمال گردد پاسخ دائمی به صورت ثابت با زمان جریان خواهد داشت.

دامنه آن به دلیل عامل میرایی در اثر گذر زمان کاهش می‌یابد. به همین دلیل به آن پاسخ گذرا گفته می‌شود.

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی



پاسخ یک سیستم SDOF با میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 0.2$ و شرایط اولیه $\dot{x} = \omega p_0 / k \, , x_0 = 0$

در خیلی ازکارهای عملی فقط قسمت دائم جواب را در نظر می‌گیرند. برای این منظور زمان کافی باید موجود باشد تا قسمت گذرا ناپدید شود. (در حدود 7 ثانیه جواب‌های گذرا کوچک است)

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

$$x_S(t)=\frac{p_0}{k}\frac{(1-\beta^2)\sin(\overline{\omega}\,t)-2\xi\beta\cos(\overline{\omega}\,t)}{(2\xi\beta)^2+(1-\beta^2)^2}$$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

قسمت دائم جواب را می‌توان به صورت برداری نوشت:

$$x_S(t)=\rho\sin(\overline{\omega}t-\theta) \quad (40)$$

که در آن

$$\rho=\sqrt{G_1^{\,2}+G_2^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad \rho=\frac{p_0}{k}\left[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (41)$$

ρ : حداکثر جابجایی دینامیکی

θ : زاویه فاز (Phase angle)

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \quad (42)$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی (Dynamic magnification factor)

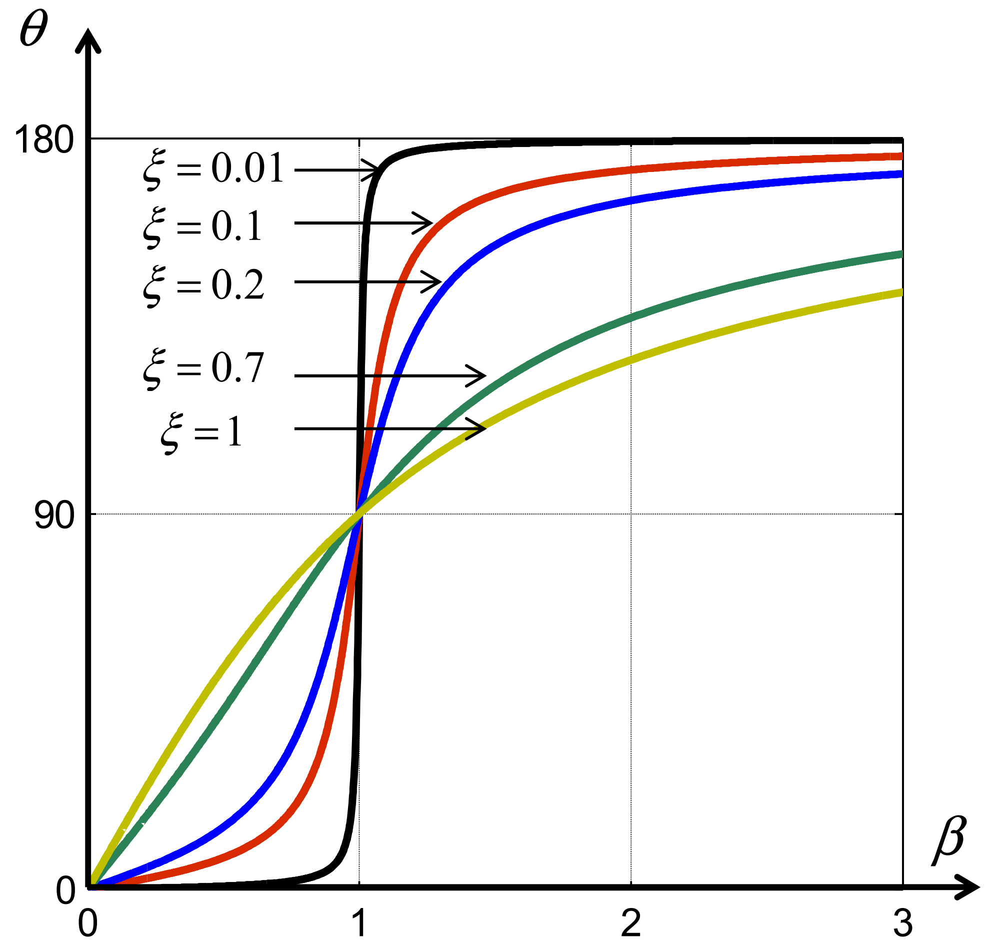
$$R_d=\frac{\text{حداکثر جابجایی دینامیکی}}{\text{حداکثر جابجایی استاتیکی}}=\frac{\rho}{x_{st0}} \quad \Rightarrow \quad R_d=\left[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (43)$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت با میرایی (بدون بُعد)

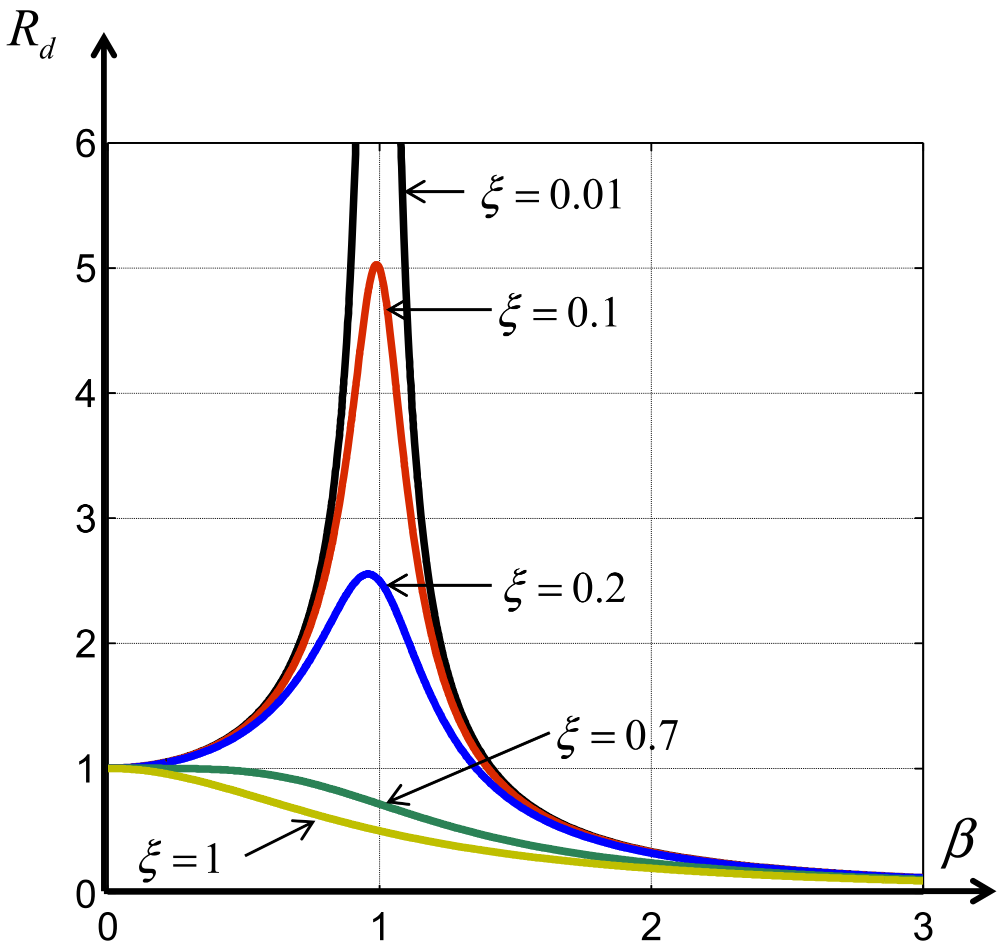
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ضریب بزرگنمایی دینامیکی و زاویه فاز بستگی به دو پارامتر ضریب میرایی و نسبت فرکانس دارند.



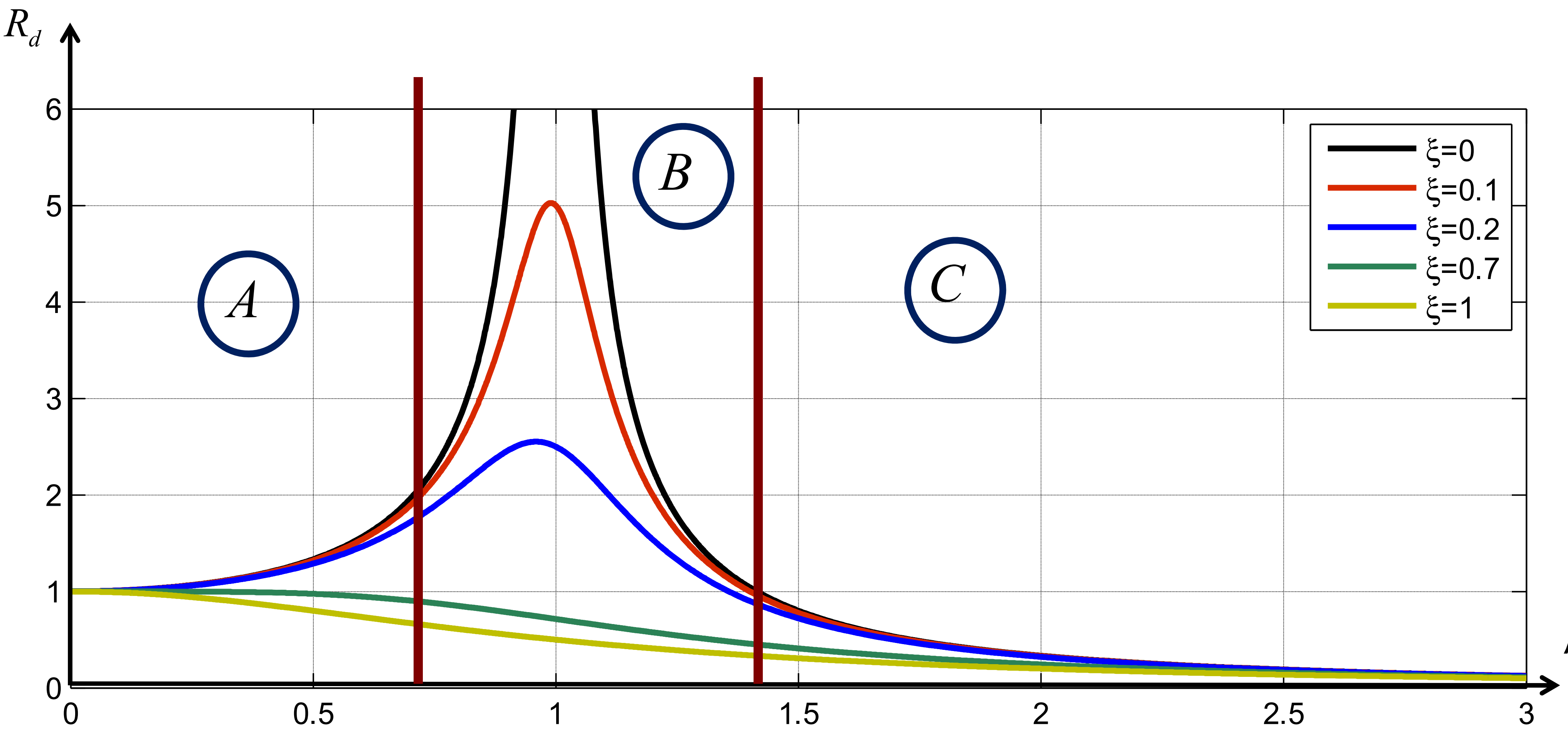
نمودار نسبت فرکانس – زاویه فاز یک سیستم SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک



نمودار نسبت فرکانس – ضریب بزرگنمایی یک سیستم SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی



ناحیه بندی نمودار نسبت فرکانس – ضریب بزرگنمایی یک سیستم SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک:

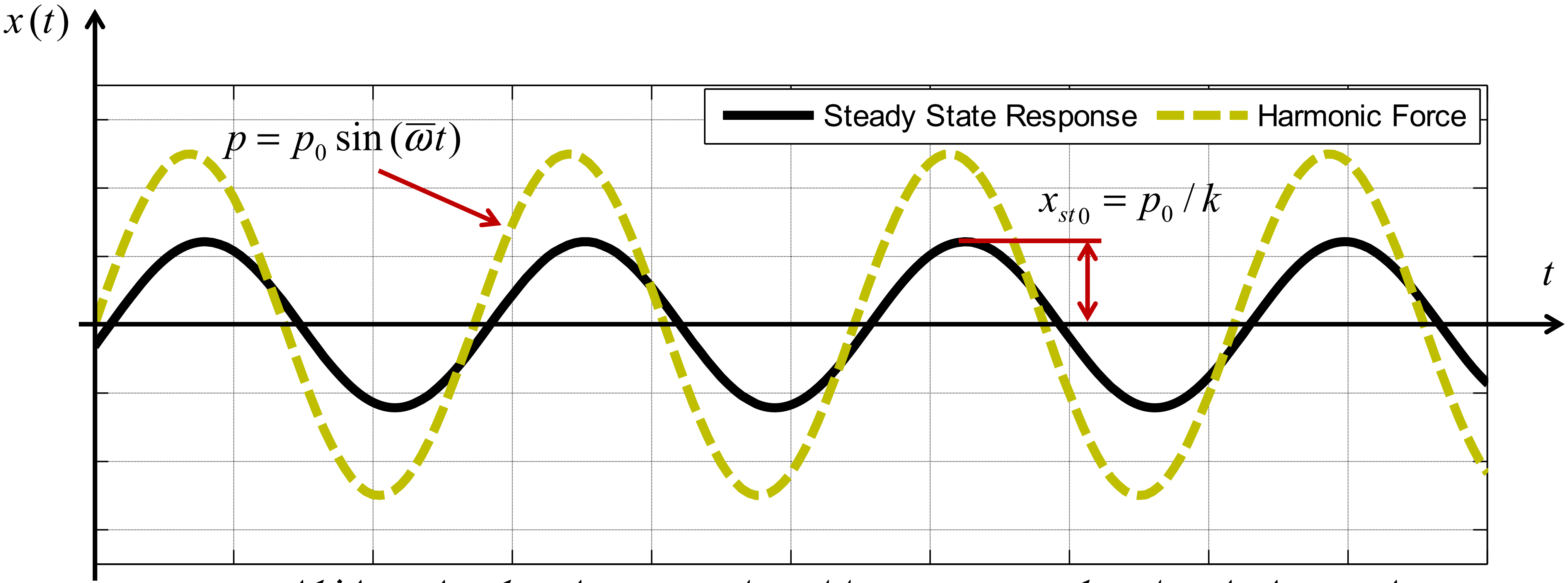
A ناحیه سخت، B ناحیه تشدید و C ناحیه نرم.

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه A : در ناحیه سخت فرکانس محرک کمتر از فرکانس سیستم می‌باشد. در واقع سازه آنچنان سخت است که اگر آن را از پایه با شتاب α حرکت دهیم؛ قسمت بالای سازه نیز با همان شتاب α حرکت می‌کند. در این حالت اثر رفتار دینامیکی قابل اغماض بوده و جابجایی استاتیکی و دینامیکی به هم نزدیک می‌باشند و ضریب بزرگ نمایی دینامیکی اندکی بزرگتر از یک است.

$$if \quad \overline{\omega} << \omega \quad \Rightarrow \quad \beta << 1 \quad \Rightarrow \quad R_d \rightarrow 1 \quad \& \quad \theta \rightarrow 0$$ ارتعاش هم فاز

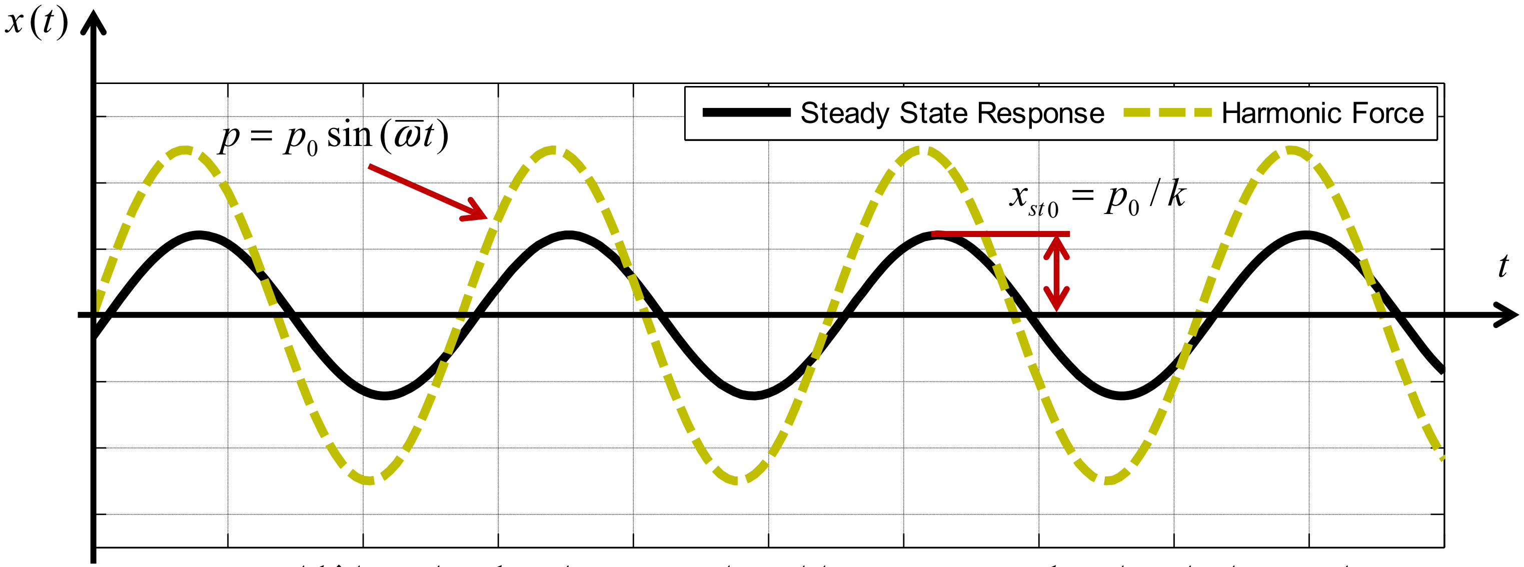


نمایش همزمان پاسخ دائمی یکی سیستم SDOF دارای میرایی و نیروی هارمونیک خارجی با فرکانس $\overline{\omega} << \omega$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه A :



نمایش همزمان پاسخ دائمی یکی سیستم SDOF دارای میرایی و نیروی هارمونیک خارجی با فرکانس $\overline{\omega} << \omega$

نکات مهم در ناحیه A :

- تغییر مکان با نیرو هم فاز است.
- دامنه تغییرمکان به سختی k بستگی دارد.
- رفتار تحت کنترل سختی (Stiffness Control) می‌باشد. بهتر است سازه سخت طراحی گردد.
- بار سنوسی وارده به آرامی اعمال شده $\beta = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega} \rightarrow 0$ و نظیر یک بار استاتیکی عمل می‌کند.

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه B : در ناحیه تشدید به علت نزدیک بودن فرکانس محرک و فرکانس طبیعی سازه، حالت تشدید اتفاق می‌افتد و هنگامی که فرکانس‌ها با هم برابر باشند. مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت تشدید برابر است با :

$$(43) \quad \overset{\beta=1}{\Rightarrow} \quad \boxed{R_{d\,res} = \frac{1}{2\xi}} \quad (44)$$

مقدار ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی برابر است با :

$$\frac{dR_d}{d\beta} = 0 \quad \overset{(43)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\beta_{peak} = \sqrt{1-2\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{d\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (45)$$

در سیستم‌های با ضریب میرایی کم، مقدار ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی همان مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت تشدید است:

$$\sqrt{1-\xi^2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{d\max} \approx R_{d\,res} = \frac{1}{2\xi}}$$

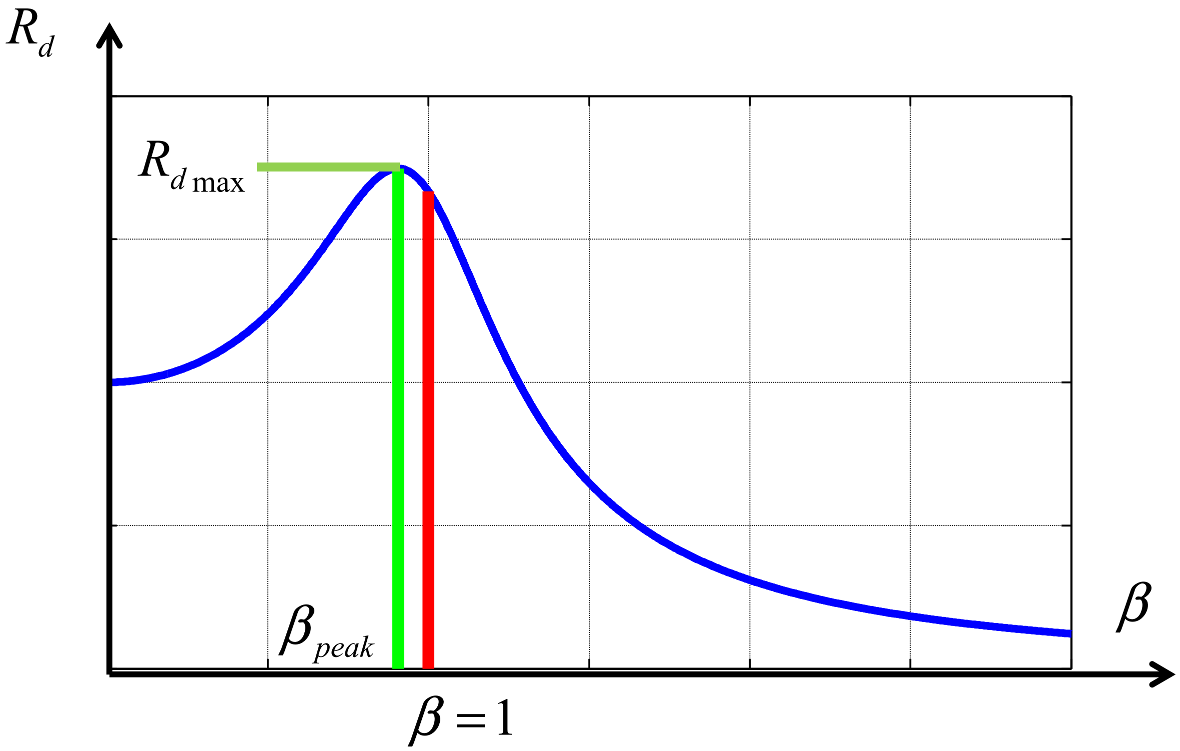
III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه B :

برای مثال برای یک سازه فولادی با ضریب میرایی 0.01 ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت تشدید برابر است با

$$R_{d\ Resonance} = \frac{1}{2(0.01)} = 50$$

یعنی اگر سازه تحت اثر یک نیروی معین در حالت استاتیکی 1 cm جابجایی داشته باشد؛ در حالت تشدید 50 cm جابجایی دارد. بنابراین ناحیه تشدید از اهمیت زیادی برخوردار است و نقاط مجاور نقطه تشدید هم از ضریب بزرگنمایی دینامیکی بالایی برخوردار می‌باشند.



مقایسه ضریب بزرگنمایی دینامیکی بین حالت ماکزیمم و حالت تشدید

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه B :

اگر کل جواب (دائم و گذرا) را در حالت تشدید و شرایط اولیه صفر در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$for \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0 \quad \& \quad \overline{\omega} = \omega \quad \overset{(38)}{\Rightarrow}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\xi}\frac{p_0}{k}\left(e^{-\xi\omega t}[\cos(\omega_D\, t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_D\, t)] - [\cos(\omega t)]\right) \qquad (46)$$

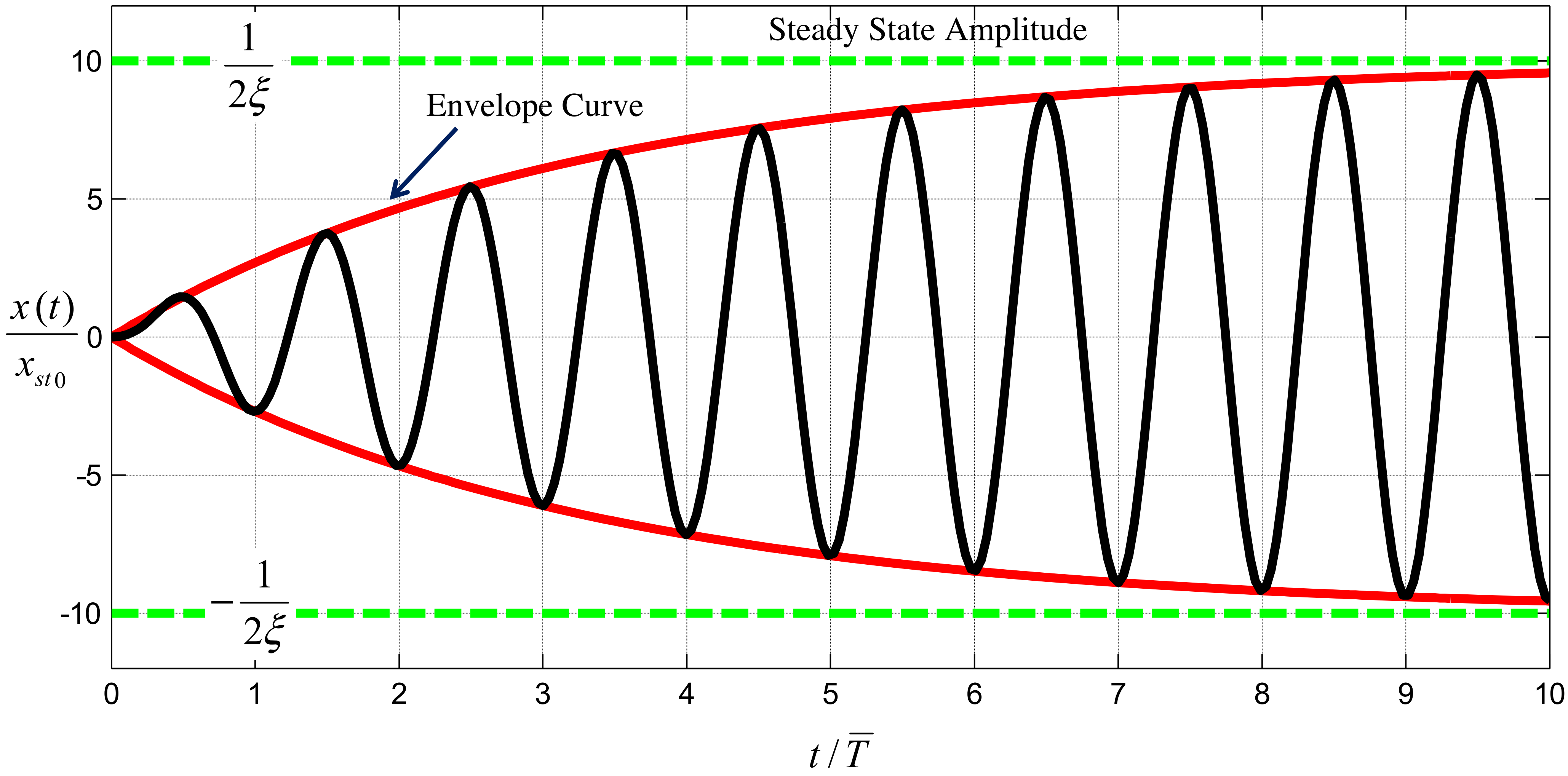
در سیستم‌های با ضریب میرایی کم می‌توان از اثر عبارت سینوسی در رابطه (46) صرف نظر کرده و $\omega_D \approx \omega$ در نتیجه :

$$(46) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \underbrace{\frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}}_{\text{منحنی پوش}}(e^{-\xi\omega t} - 1)\cos(\omega t)} \quad \overset{or}{\Rightarrow} \quad \boxed{x(t) = \underbrace{\frac{p_0}{c\omega}}_{\text{منحنی پوش}}(e^{-\xi\omega t} - 1)\cos(\omega t)} \qquad (47)$$

براساس رابطه (47) در ناحیه B میرایی تعیین کننده است و بیشترین نقش را در کاهش پاسخ دینامیکی دارد. بنابراین در مهندسی سازه، شیوه‌های افزایش ظرفیت جذب و استهلاک انرژی ارتعاشی از اهمیت خاصی برخوردار است.

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

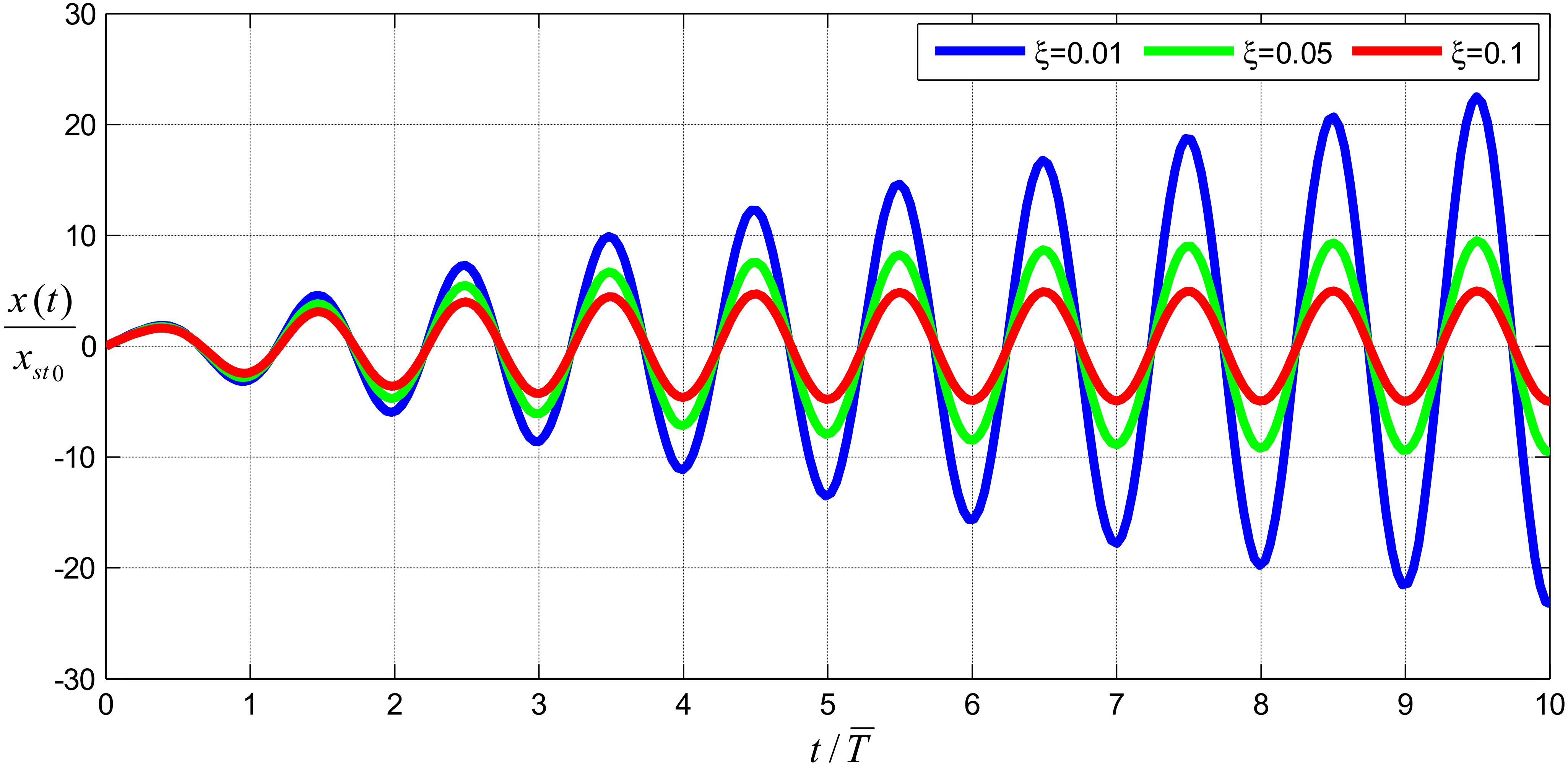
ناحیه B :



پاسخ یک سیستم **SDOF** با میرایی **0.05** در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 1$ و شرایط اولیه $\dot{x} = x_0 = 0$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه B :



پاسخ سه سیستم SDOF با میرایی‌های 0.01، 0.05 و 0.1 در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 1$ **و شرایط اولیه** $\dot{x} = \omega p_0 / k \,, x_0 = 0$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه B :

محاسبه j اُمین دامنه بعد از j بار دروره تناوب.

$$@ \quad t = jT \quad \overset{(47)}{\Rightarrow} \quad x(jT) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left(e^{-\xi\frac{2\pi}{T}jT} - 1\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}jT\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(jT) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left(e^{-2\pi\xi j} - 1\right)} \quad (48)$$

$$\rho_{res} = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi} \quad \Rightarrow$$

$$(48) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{|x(jT)|}{\rho_{res}} = 1 - e^{-2\pi\xi j}} \quad (49)$$

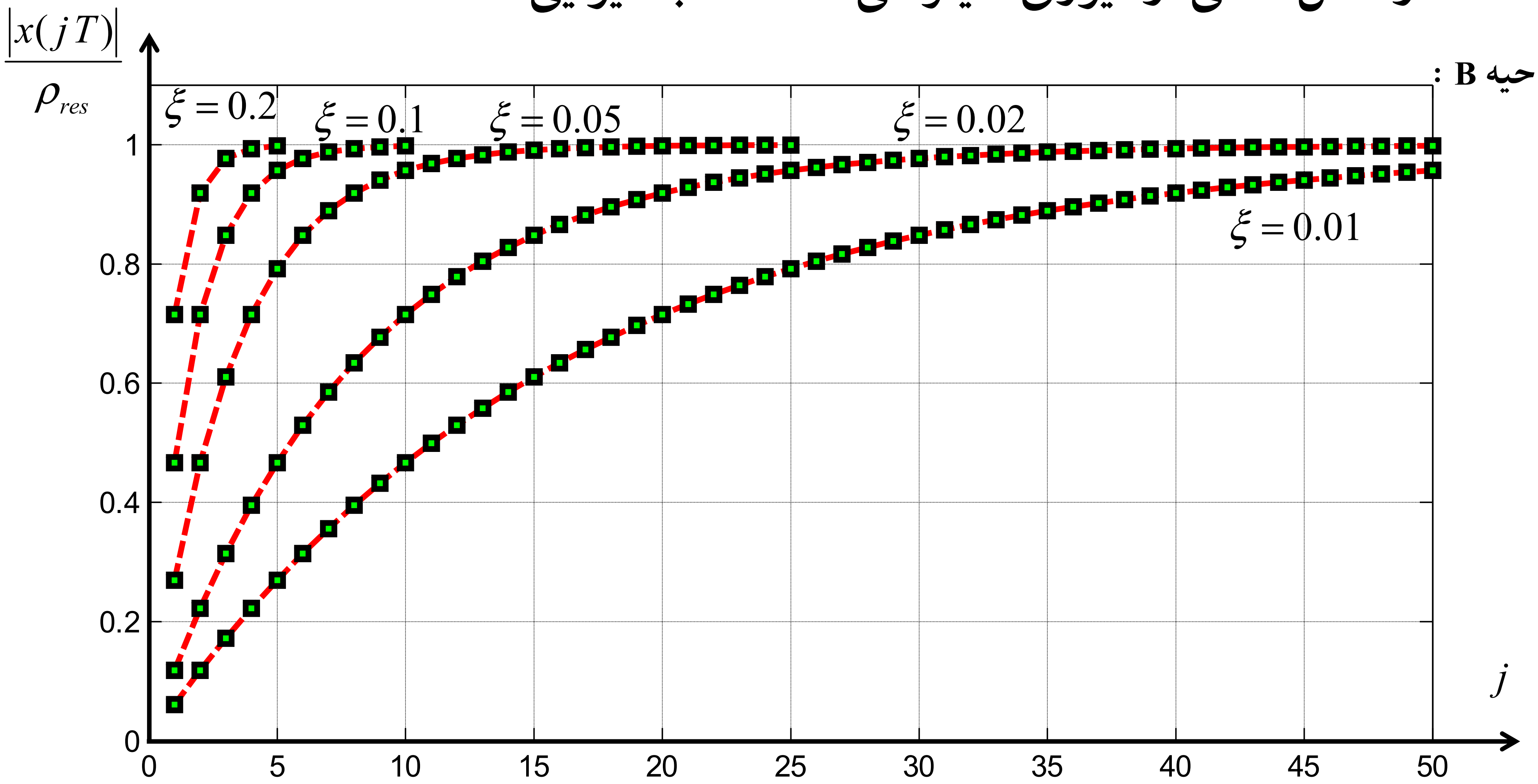
که در زمان زیاد این نسبت به سمت یک میل می‌کند.

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که در سیستم‌های با ضریب میرایی متفاوت بعد از چند سیکل حرکت رفت و برگشتی در حالت تشدید به دامنه ارتعاش ماکزیمم می‌رسیم.

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه B :



تغییرات دامنه پاسخ با تعداد چرخه‌های نیروی هارمونیک در حالت تشدید $\overline{\omega} = \omega$

نمودار نشان می‌دهد که در سیستم‌های با میرایی زیاد، با تعداد سیکل‌های کمتر بارگذاری، دامنه پاسخ به سمت مقدار ماکزیمم میل می‌کند و بر عکس.

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه C : با افزایش فرکانس نیروی محرک، وارد ناحیه نرم می‌شویم؛ جایی که بارگذاری آنقدر سریع است که سازه آن را حس نمی‌کند. به عبارت دیگر، همین که سازه شروع به واکنش نماید و جابجایی آغاز شود جهت نیرو عوض شده و حرکت معکوس می‌گردد. در نتیجه جابجایی از حالت استاتیکی کمتر می‌شود. به همین علت است که سازه‌هایی که زمان تناوب بالایی دارند (یعنی ω آن‌ها کوچک است) شتاب‌های حاصل از زلزله را که مقدارشان بزرگ اما زمان تناوب آن‌ها کم باشد (یعنی $\bar{\omega}$ بزرگ است) حس نمی‌کنند. زیرا سرعت بارگذاری آن چنان زیاد است که پاسخ در ناحیه نرم قرار می‌گیرد.

$$if \quad \bar{\omega} >> \omega \quad \Rightarrow \quad \beta >> 1 \quad \Rightarrow \quad R_d \rightarrow 0 \quad \& \quad \theta \rightarrow \pi$$ ارتعاش غیر هم فاز

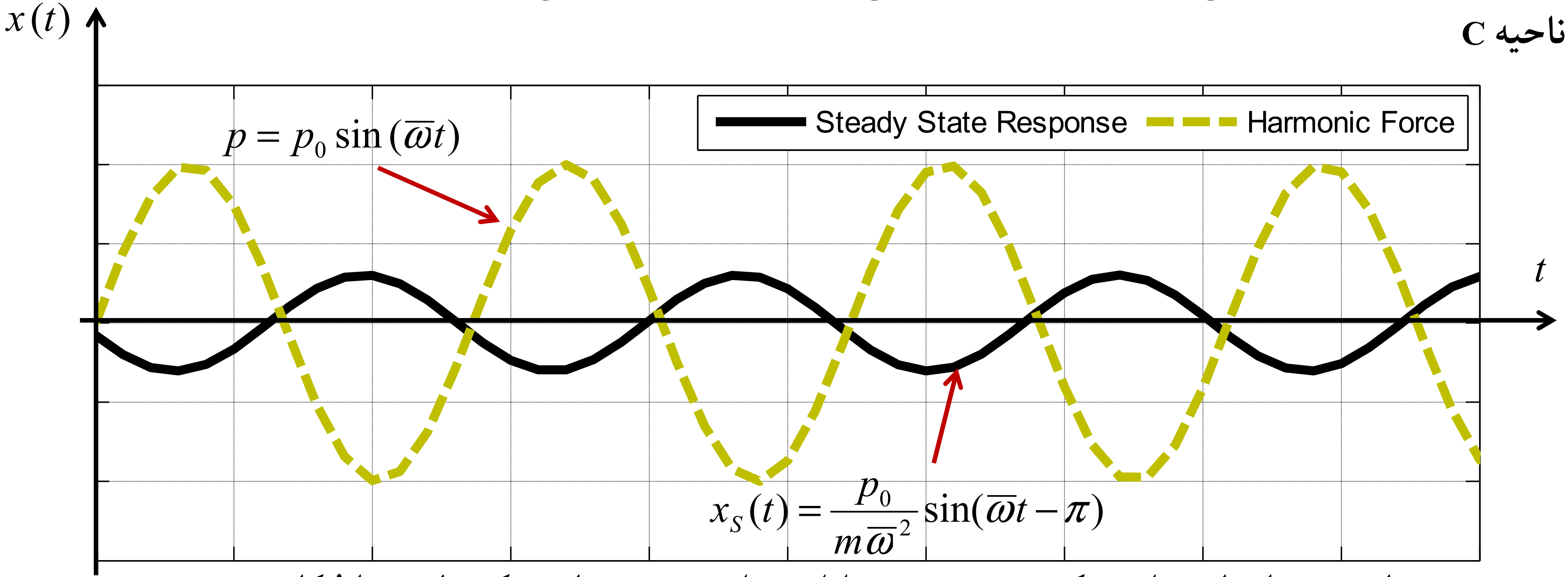
$$(40) \quad \Rightarrow \quad x_S(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$= \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\beta^4 \cancel{-2\beta^2} \cancel{+1} + \cancel{4\xi^2\beta^2}}} \sin(\bar{\omega} t - \theta) \approx \frac{p_0}{k} \frac{1}{\beta^2} \sin(\bar{\omega} t - \pi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_S(t) = \frac{p_0}{m\bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega} t - \pi)} \quad (49)$$

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه C



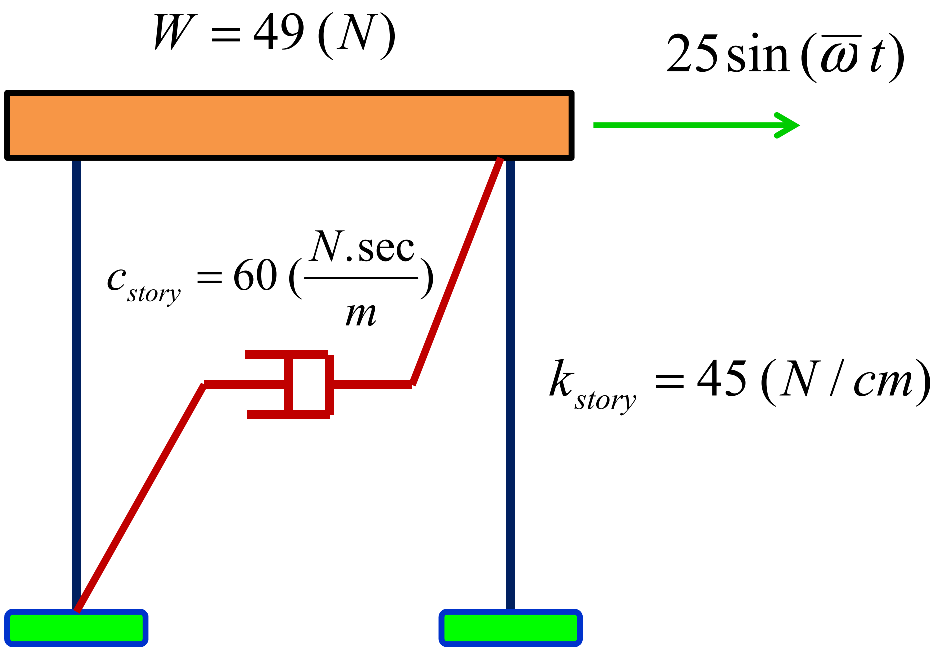
نمایش همزمان پاسخ دائمی یکی سیستم SDOF دارای میرایی و نیروی هارمونیک خارجی با فرکانس $\bar{\omega} >> \omega$

نکات مهم در ناحیه C :

- تغییر مکان با نیرو 180 درجه اختلاف فاز دارند (در خلاف جهت هم می‌باشند).
- دامنه تغییرمکان به جرم (اینرسی) $\dfrac{p_0}{m\bar{\omega}}$ بستگی دارد.
- رفتار تحت کنترل اینرسی (Inertia Control) می‌باشد. بنابراین بهتر است سازه سنگین طراحی گردد.

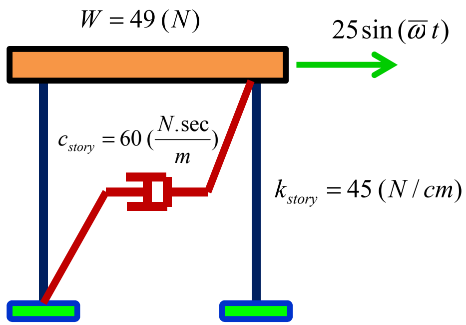
III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

مثال-1: سیستم SDOF نشان داده شده در شکل تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد. الف) پاسخ دینامیکی ماکزیمم و همچنین پاسخ دینامیکی ماکزیمم متناظر با حالت تشدید را محاسبه نمایید. ب) پاسخ دینامیکی ماکزیمم را در حالتی که $\overline{\omega}=15\ (rad/\sec)$ را تعیین کنید.



III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ مثال-1:



$$\boxed{\omega = 30\ (rad/s)}$$

$$\boxed{\xi = 0.2}$$

$$\boxed{R_{d\max} = 2.552}$$

$$\rho_{\max} = 1.418\times10^{-2}(m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_{\max} = 1.418\ (cm)}$$

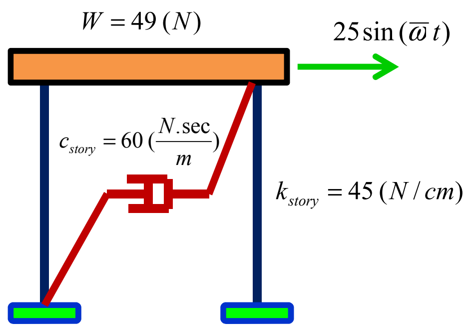
$$\boxed{R_{d\ Resonance} = 2.5}$$

$$\rho_{res} = 1.389\times10^{-2}(m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_{res} = 1.389\ (cm)}$$

چون ضریب میرایی 20 درصد قابل ملاحظه است ضریب بزرگنمایی در دو حالت آنچنان بزرگ نمی‌باشد.

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ مثال-1:



$$\boxed{\beta = 0.5}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = 0.72 \times 10^{-2}\ (m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = 0.72\ (cm)}$$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

مثال–2: تیر بدون وزن AB در اثر لرزش ناشی از یک دستگاه موتور دوار در حال ارتعاش می‌باشد. وزن کل این موتور W است. جرم m با خروج از مرکزیت e جهت تنظیم حرکت موتور بر روی آن نصب شده است. دامنه ارتعاش تیر را با در نظرگرفتن قسمت دایم پاسخ سیستم به دست آورید.

$$W = 72000\ (N)$$

$$f = 300\ (rpm)$$

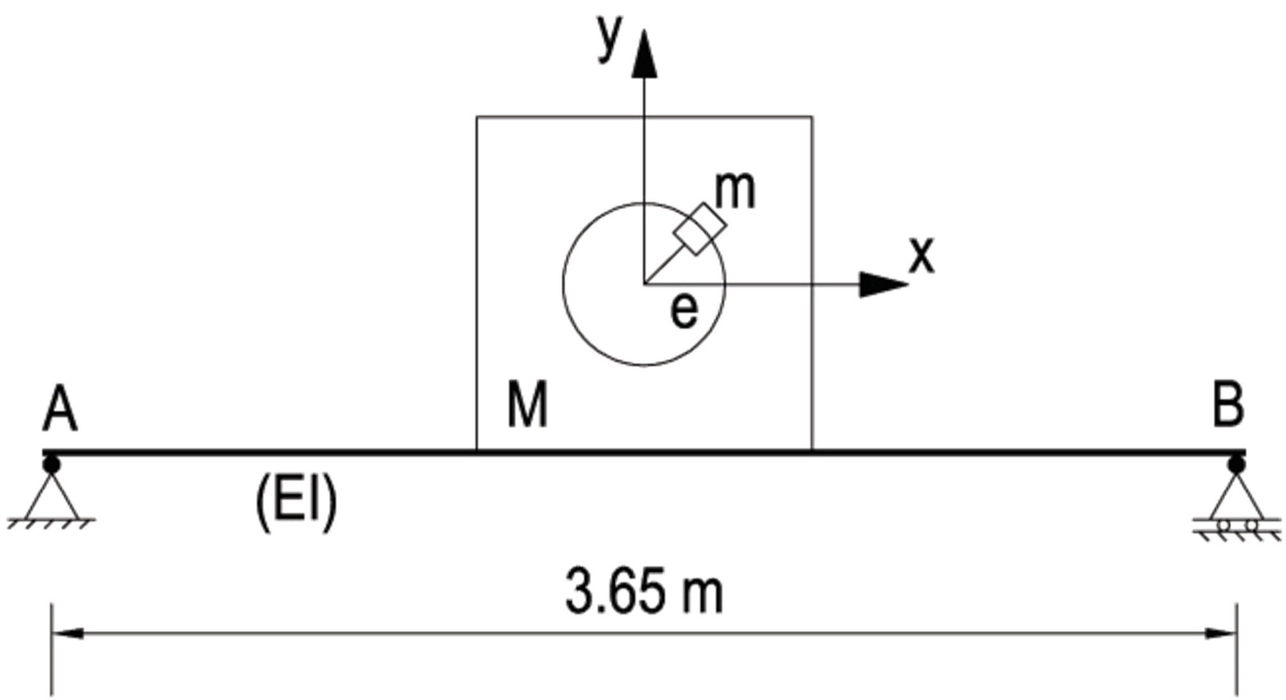
$$m = \frac{180}{9.806}\ (kg)$$

$$e = 25.4\ (cm)$$

$$E_{beam} = 21\times10^{6}\ (N/cm^{2})$$

$$I = 5300\ (cm^{4})$$

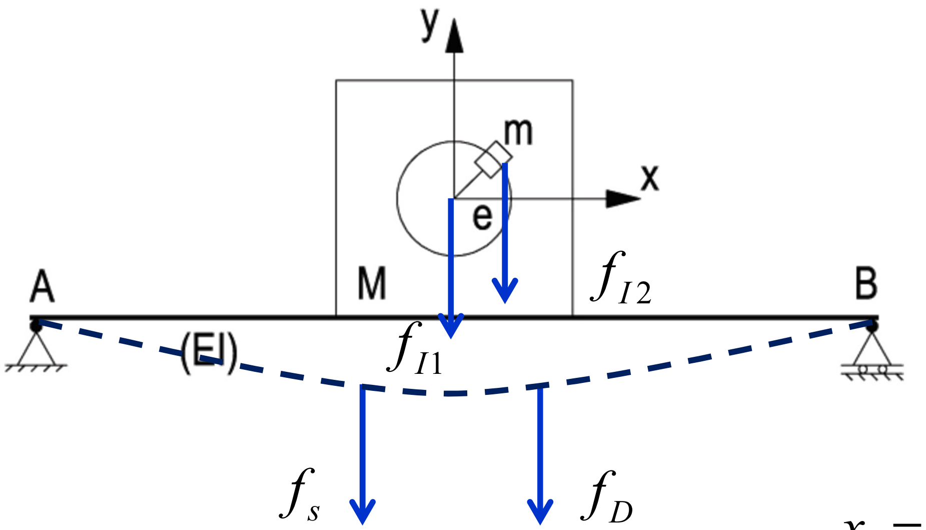
$$\xi = 10\%$$

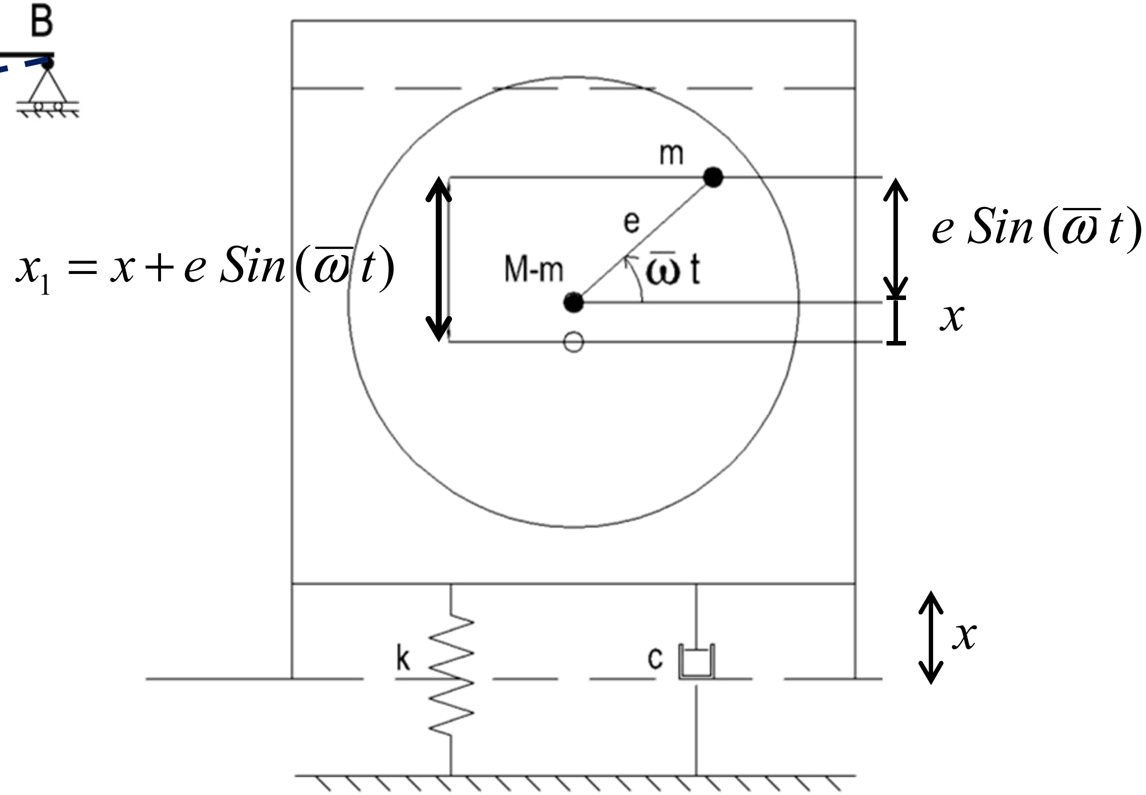


SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ مثال–2:



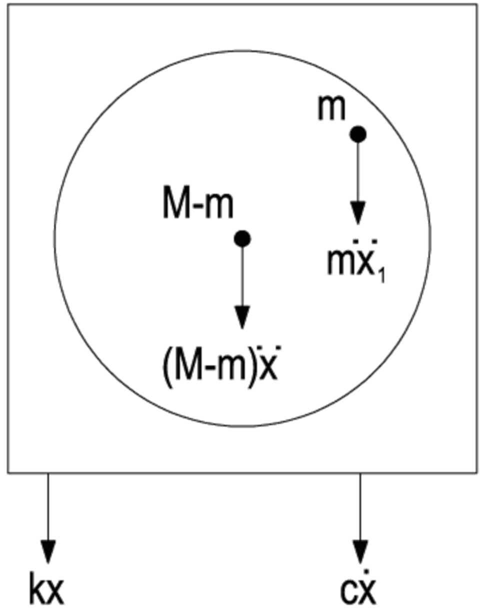


مدل دیاگرام جسم آزاد

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ مثال-2:



دیاگرام جسم آزاد مدل

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underbrace{me\overline{\omega}^2}_{p_0} \sin(\overline{\omega} t)$$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

$$\boxed{\begin{gathered} M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=p_0\sin(\overline{\omega}t) \\ p_0=me\overline{\omega}^2 \end{gathered}}$$

پاسخ مثال-2:

$$\boxed{\overline{\omega}=31.41\,(rad/\sec)}$$

$$\boxed{k=1098.64\times10^4\ (N/m)}$$

$$\boxed{\omega=38.68\ (rad/\sec)}$$

$$\boxed{\beta=0.811}$$

$$\boxed{p_0=4598\,(N)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho=1.1\times10^{-3}\ (m)}$$

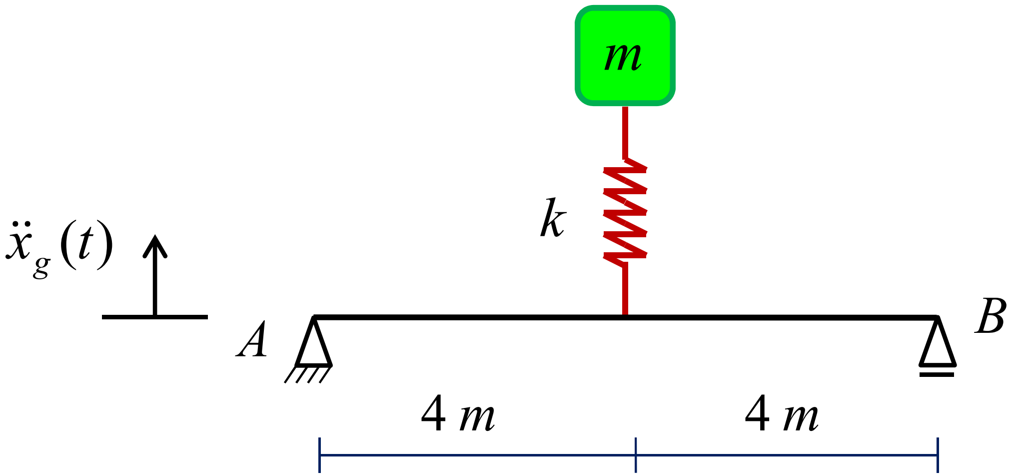
III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

مثال-3: تیر نشان داده شده وزنه‌ای را در وسط دهانه خود بر روی فنری تحمل می‌کند. اگر از وزن تیر صرف نظر شود، با فرض آن که تیر تحت شتاب پایه قائم $\ddot{x}_g(t) = 0.35g\sin(5t)$ قرار گیرد مطلوب است تعیین:

الف- زمان تناوب طبیعی ارتعاش تیر.

ب- جابجایی و سرعت وزنه در لحظه t=2 sec

ج- واکنش تکیه‌گاهی در لحظه t=2 sec



$$m = 400\ (ton)$$

$$E_{beam} = 21\times10^{6}\ (N/cm^{2})$$

$$I = 25170\ (cm^{4})$$

$$\xi = 10\%$$

$$k_{spring} = 5393.3\ (kN/m)$$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ مثال-3:

$$\boxed{k_{spring} = 5393.3\ (kN/m)}$$

$$\boxed{k_{beam} = 4955.3\ (kN/m)}$$

$$\boxed{k = 2582.5\ (kN/m)}$$

$$\boxed{\omega = 2.54\ (rad/\sec)}$$

$$\boxed{T = 2.47\ (\sec)}$$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ مثال-3:

$$\boxed{p_0 = -1372.84\ (kN)}$$

$$\boxed{\beta = 1.97}$$

$$\boxed{\theta = -0.136^{rad}}$$

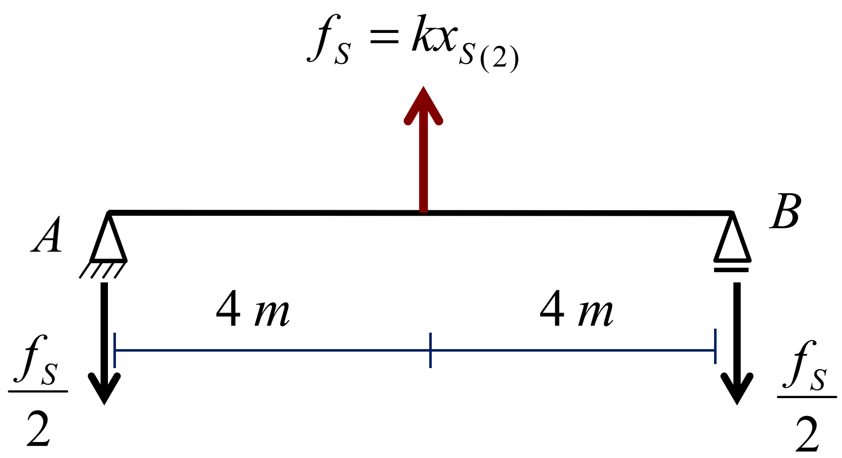
$$\boxed{\rho = -0.1828\ (m)}$$

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

پاسخ مثال-3:

$$x_{S(2)} = 11.91\ (cm)$$

$$\dot{x}_{S(2)} = 69.25\ (cm/\sec)$$



$$R_A = R_B = 153.79\ (kN)$$