



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

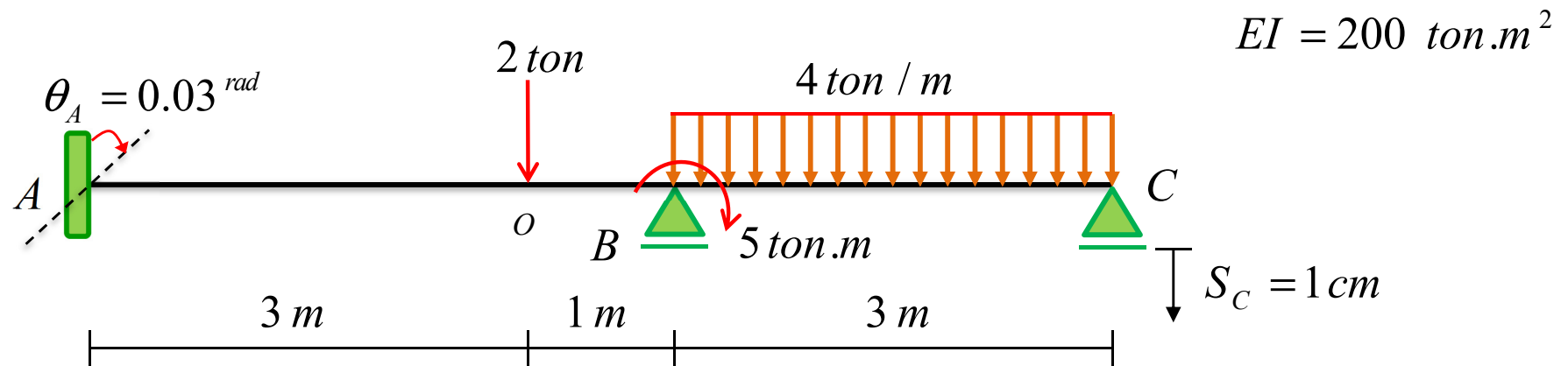
روش پخش لنگر-تمرین‌ها (Moment Distribution Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 1- در تیر نشان داده شده تکیه‌گاه A به اندازه 0.03 رادیان در جهت ساعتگرد دوران داشته است و علاوه بر آن تکیه‌گاه C نیز به اندازه 1 cm در جهت قائم به سمت پایین نشست می‌کند. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.



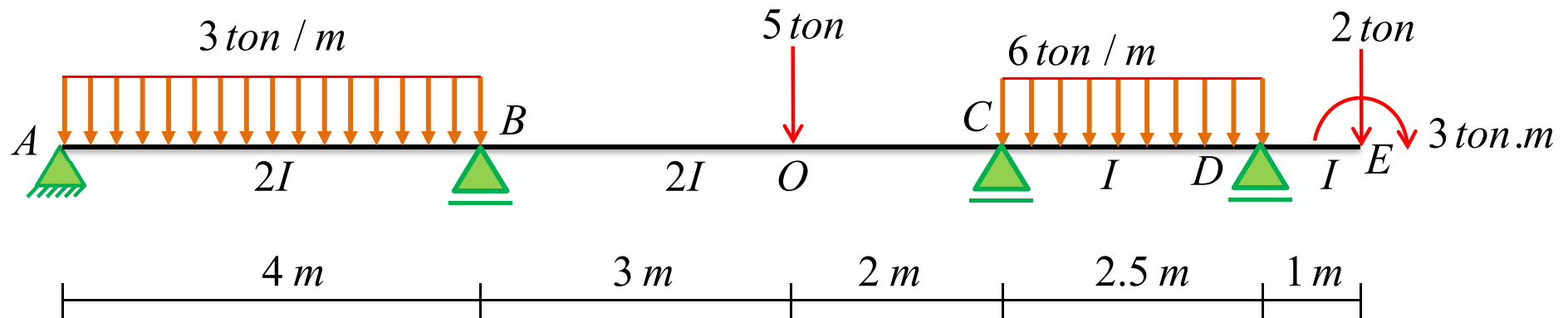
پاسخ تمرین 1-

$AO : 0 \leq x \leq 3$	$V_{(x)} = -3.07$	$M_{(x)} = -3.07x + 7.135$
$OB : 0 \leq x \leq 1$	$V_{(x)} = -5.07$	$M_{(x)} = -5.07x - 2.075$
$CB : 3 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = 4x - 5.285$	$M_{(x)} = -2x^2 + 5.285x$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 2- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$



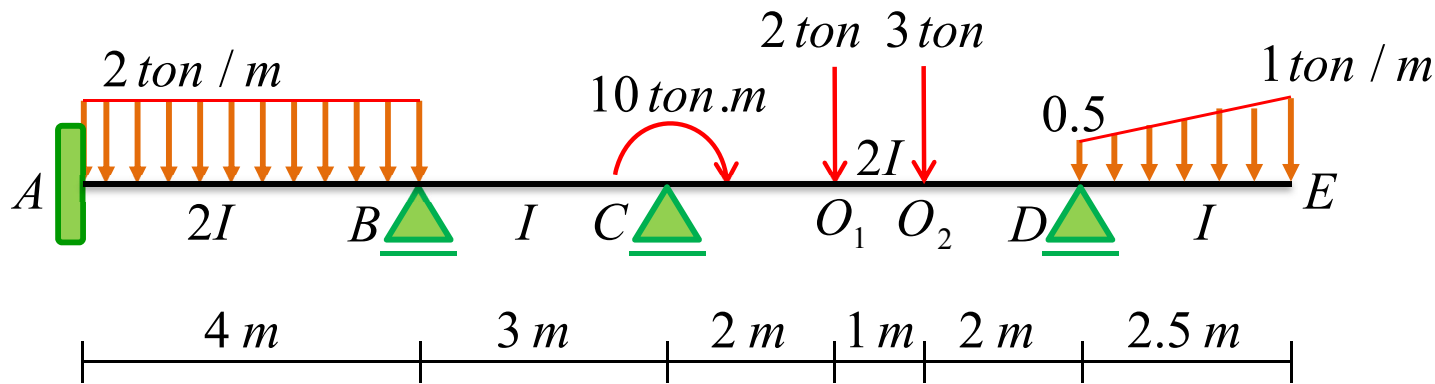
پاسخ تمرین 2-

$AB : 0 \leq x \leq 4$	$V_{(x)} = -3x + 4.918$	$M_{(x)} = -1.5x^2 + 4.918x$
$BO : 0 \leq x \leq 3$	$V_{(x)} = 2.385 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 2.385x - 4.328$
$OC : 0 \leq x \leq 2$	$V_{(x)} = -2.615 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -2.615x + 2.827$
$DC : 2.5 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = 6x - 8.536$	$M_{(x)} = -3x^2 + 8.536x - 5$
$ED : 1 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = 2 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -2x - 3$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 3- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

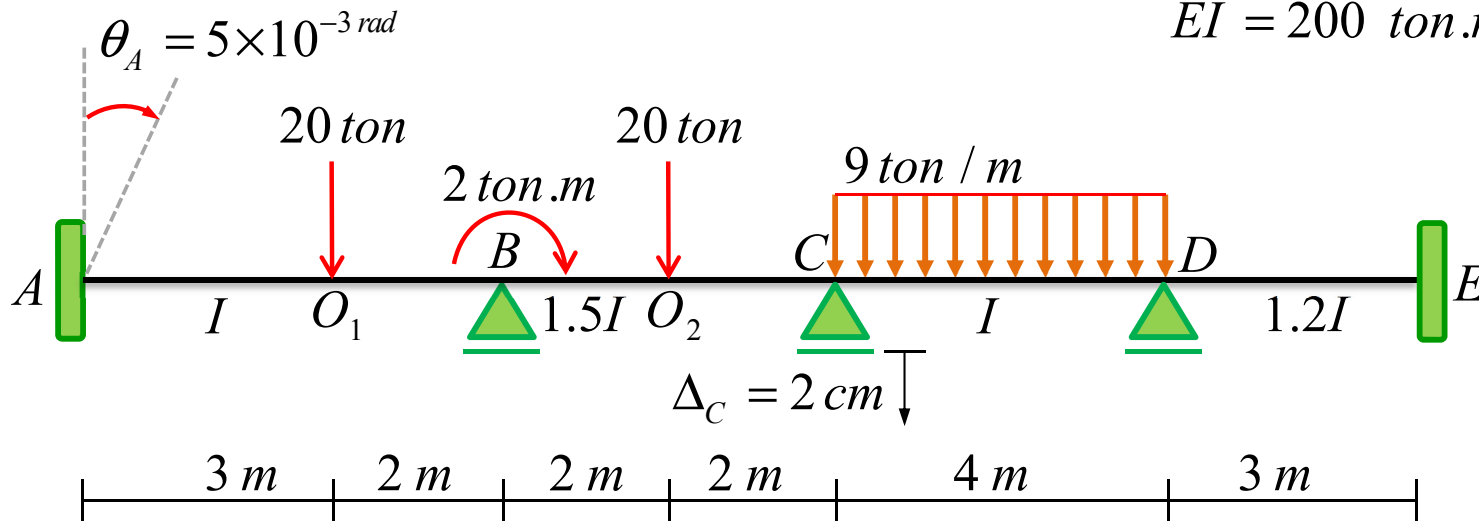


پاسخ تمرین 3-

AB	$0 \leq x \leq 4$	$V_{(x)} = -2x + 5.455$	$M_{(x)} = -x^2 + 5.455x - 4.61$
BC	$0 \leq x \leq 3$	$V_{(x)} = -2.5 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -2.5x + 1.21$
CO ₁	$0 \leq x \leq 2$	$V_{(x)} = 1.14 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 1.14x + 3.701$
O ₁ O ₂	$0 \leq x \leq 1$	$V_{(x)} = -0.86 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -0.86x + 5.981$
O ₂ D	$0 \leq x \leq 2$	$V_{(x)} = -3.86 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -3.86x + 5.121$
ED	$2.5 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = -0.1x^2 + x$	$M_{(x)} = \frac{x^3}{30} - \frac{x^2}{2}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 4- در تیر نشان داده شده تکیه‌گاه A به اندازه 0.005 رادیان در جهت ساعتگرد دوران دارد. همچنین تکیه‌گاه C نیز به اندازه 2 سانتیمتر در راستای قائم نشست می‌کند. مطلوب است نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید. $EI = 200 \text{ ton.m}^2$

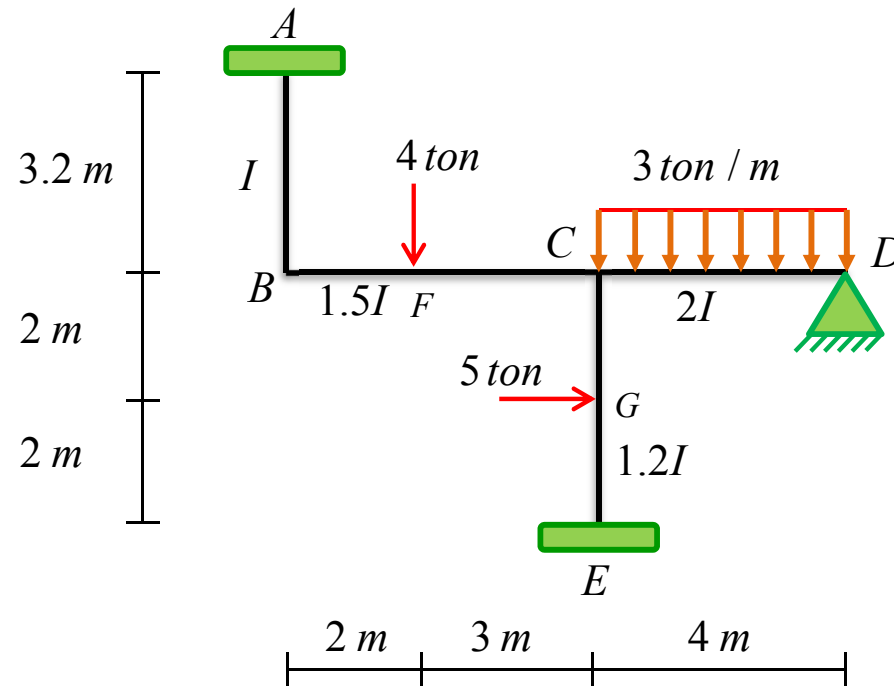


پاسخ تمرین 4-

AO_1	$0 \leq x \leq 3$	$V_{(x)} = 7.06 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 7.06x - 9.23$
O_1B	$0 \leq x \leq 2$	$V_{(x)} = -12.94 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -12.94x + 11.95$
BO_2	$0 \leq x \leq 2$	$V_{(x)} = 10.29 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 10.29x - 11.93$
O_2C	$0 \leq x \leq 2$	$V_{(x)} = -9.71 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -9.71x + 8.65$
DC	$4 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = 9x - 17.58$	$M_{(x)} = -4.5x^2 + 17.58x - 9.1$
ED	$3 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = 4.55 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -4.55x + 4.55$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 5- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

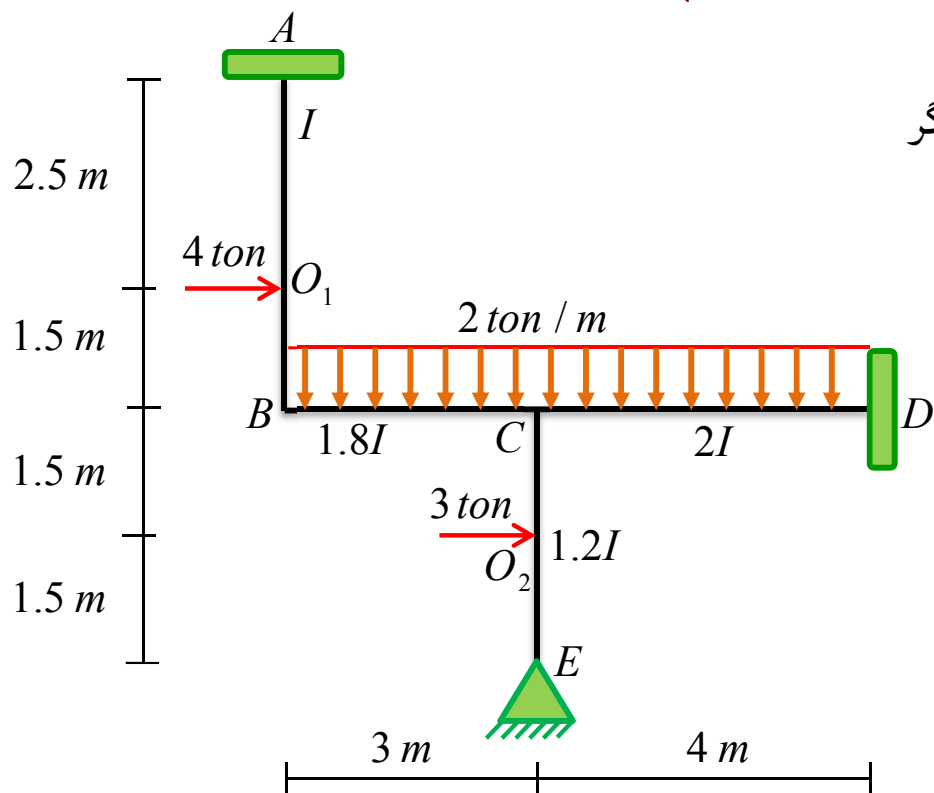


$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

$AB : 0 \leq x \leq 3.2$	$P_{(x)} = 2.106 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -0.665 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 0.655x - 0.699$
$BF : 0 \leq x \leq 2$	$P_{(x)} = 0.655 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 2.106 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 2.106x - 1.379$
$FC : 0 \leq x \leq 3$	$P_{(x)} = 0.655 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -1.894 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -1.894x + 2.815$
$DC : 4 \geq x \geq 0$	$P_{(x)} = -1.95 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 3x - 4.588$	$M_{(x)} = -1.5x^2 + 4.588x$
$GC : 2 \geq x \geq 0$	$P_{(x)} = -9.307 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -2.605 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -2.605x + 2.43$
$EG : 2 \geq x \geq 0$	$P_{(x)} = -9.307 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 2.395 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 2.395x - 2.36$

پاسخ تمرین 5-

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



تمرین 6- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر
خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

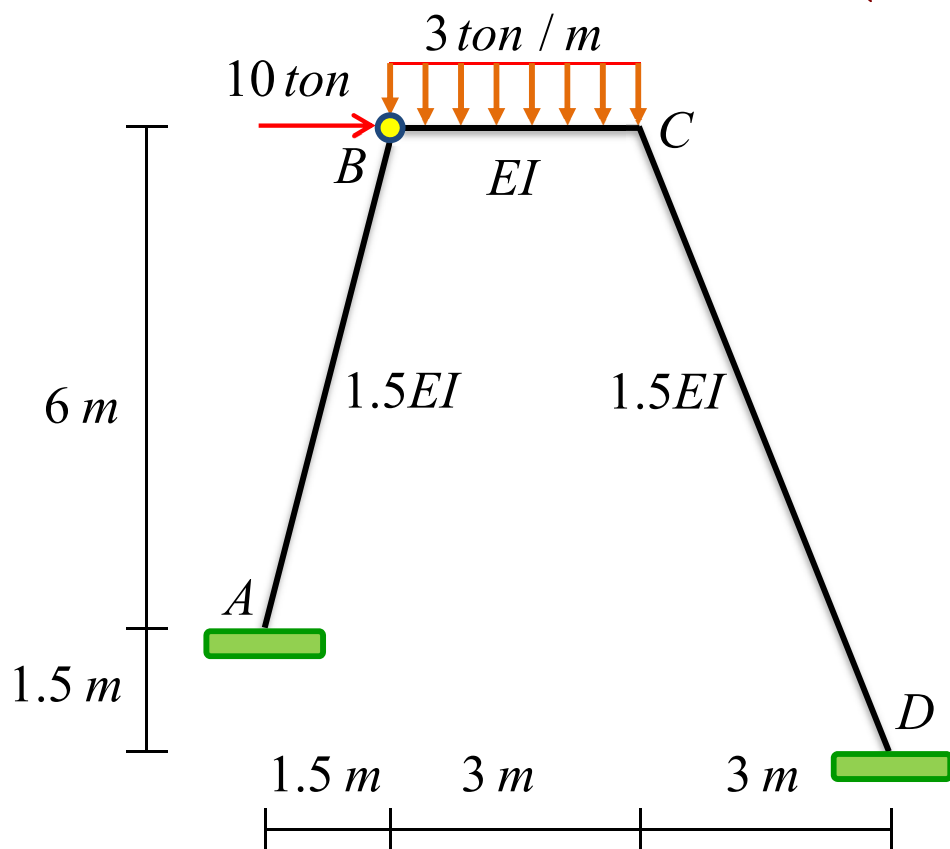
AO_1	$0 \leq x \leq 2.5$	$P_{(x)} = 1.92 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -1.74 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 1.74x - 2.04$
O_1B	$0 \leq x \leq 1.5$	$P_{(x)} = 1.92 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 2.26 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -2.26x + 2.31$
BC	$0 \leq x \leq 3$	$P_{(x)} = -2.26 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -2x + 1.92$	$M_{(x)} = -x^2 + 1.92x + 1.08$
DC	$4 \geq x \geq 0$	$P_{(x)} = -4.18 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 2x - 3.73$	$M_{(x)} = -x^2 + 3.73x - 2.3$
O_2C	$0 \leq x \leq 1.5$	$P_{(x)} = -8.35 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -1.92 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -1.92x + 1.62$
EO_2	$0 \leq x \leq 1.5$	$P_{(x)} = -8.35 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 1.08 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 1.08x$

پاسخ تمرین 6-

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 8- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر
خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

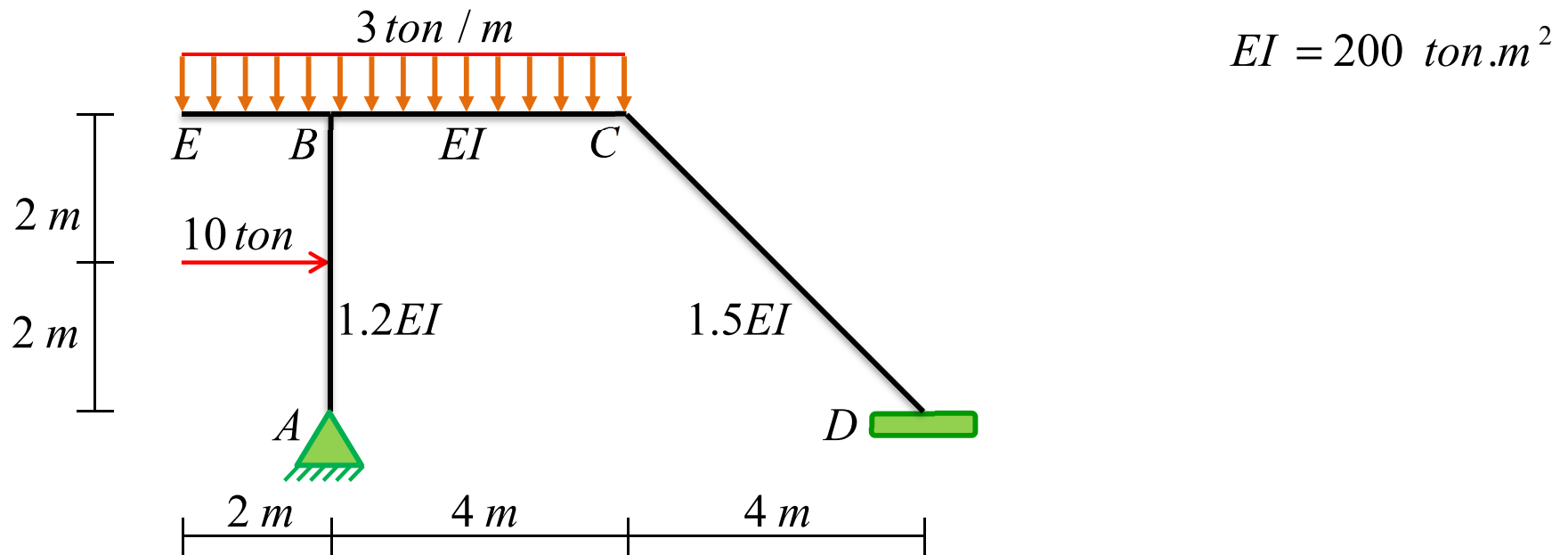


پاسخ تمرین 8-

$AB : 0 \leq x \leq 1.5\sqrt{17}$	$P_{(x)} = 1.381 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 1.643 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 1.643x - 10.163$
$BC : 0 \leq x \leq 3$	$P_{(x)} = -8.071 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -3x - 0.941$	$M_{(x)} = -1.5x^2 - 0.941x$
$DC : 1.5\sqrt{29} \geq x \geq 0$	$P_{(x)} = -12.227 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 3.802 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -3.802x + 14.387$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

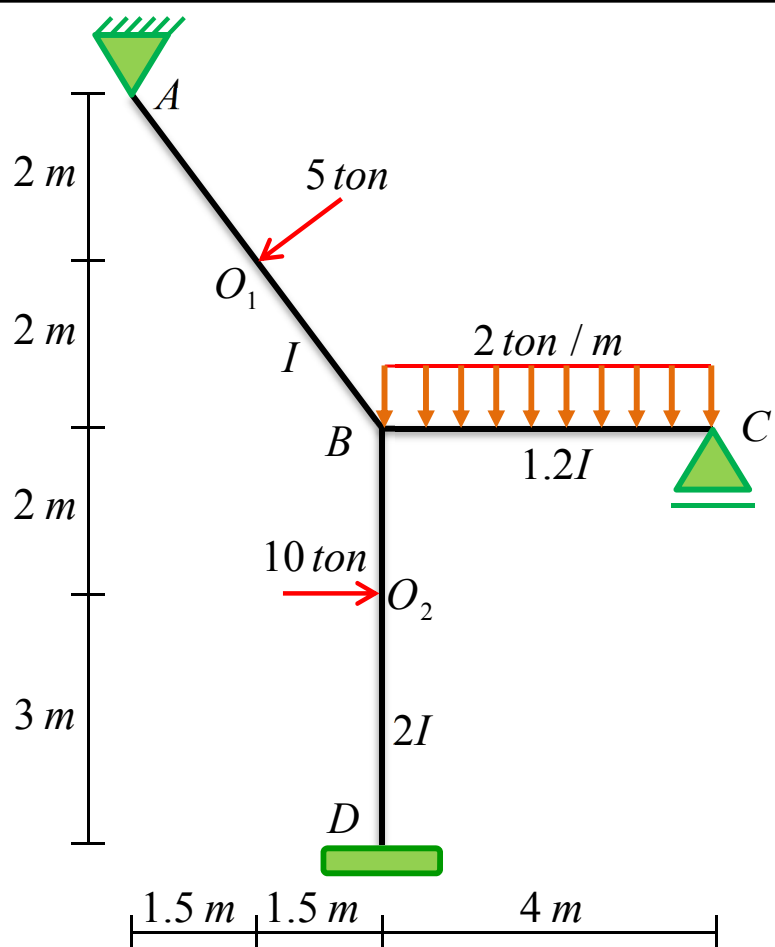
تمرین 9- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.



پاسخ تمرین 9-

$AB :$	$0 \leq x \leq 2$	$P_{(x)} = -13.48 \text{ ton}$	$V_{(x)} = 4.48 \text{ ton}$	$M_{(x)} = 4.48x$
$AB :$	$2 \leq x \leq 4$	$P_{(x)} = -13.48 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -5.52 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -5.52x + 20$
$EB :$	$0 \leq x \leq 2$	$P_{(x)} = 0$	$V_{(x)} = -3x$	$M_{(x)} = -1.5x^2$
$BC :$	$0 \leq x \leq 4$	$P_{(x)} = -5.52 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -3x + 7.48$	$M_{(x)} = -1.5x^2 + 7.48x - 8.08$
$DC :$	$4\sqrt{2} \geq x \geq 0$	$P_{(x)} = -7.1 \text{ ton}$	$V_{(x)} = -0.71 \text{ ton}$	$M_{(x)} = -0.71x + 1.81$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



تمرین 10- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

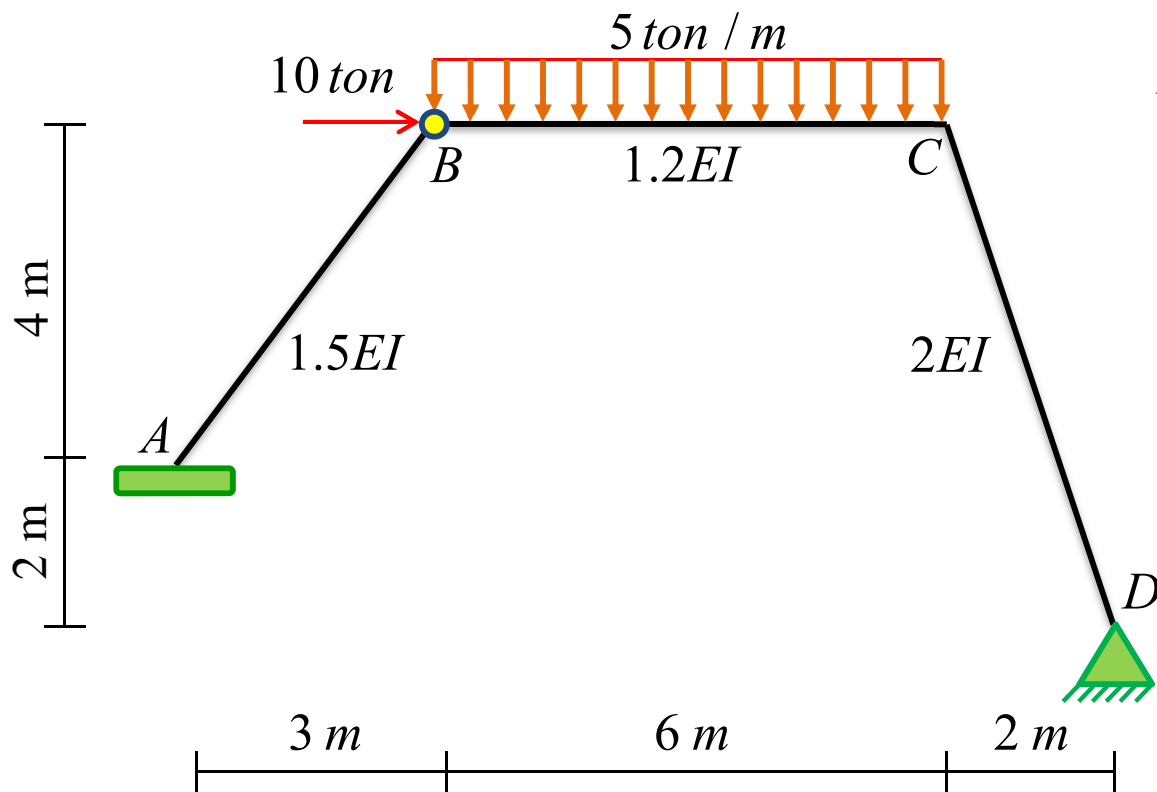
پاسخ تمرین 10-

AO_1	$0 \leq x \leq 2.5$	$M_{(x)} = -1.866x$	$V_{(x)} = 1.866 \text{ ton}$	$P_{(x)} = 4.59 \text{ ton}$
O_1B	$0 \leq x \leq 2.5$	$M_{(x)} = 3.134x - 4.665$	$V_{(x)} = -3.134 \text{ ton}$	$P_{(x)} = 4.59 \text{ ton}$
CB	$4 \geq x \geq 0$	$M_{(x)} = -x^2 + 2.43x$	$V_{(x)} = 2x - 2.43$	$P_{(x)} = 0$
O_2B	$0 \leq x \leq 2$	$M_{(x)} = -5.26x + 7.38$	$V_{(x)} = -5.26 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -3.78 \text{ ton}$
DO_2	$0 \leq x \leq 3$	$M_{(x)} = 4.74x - 6.84$	$V_{(x)} = 4.74 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -3.78 \text{ ton}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 11- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$



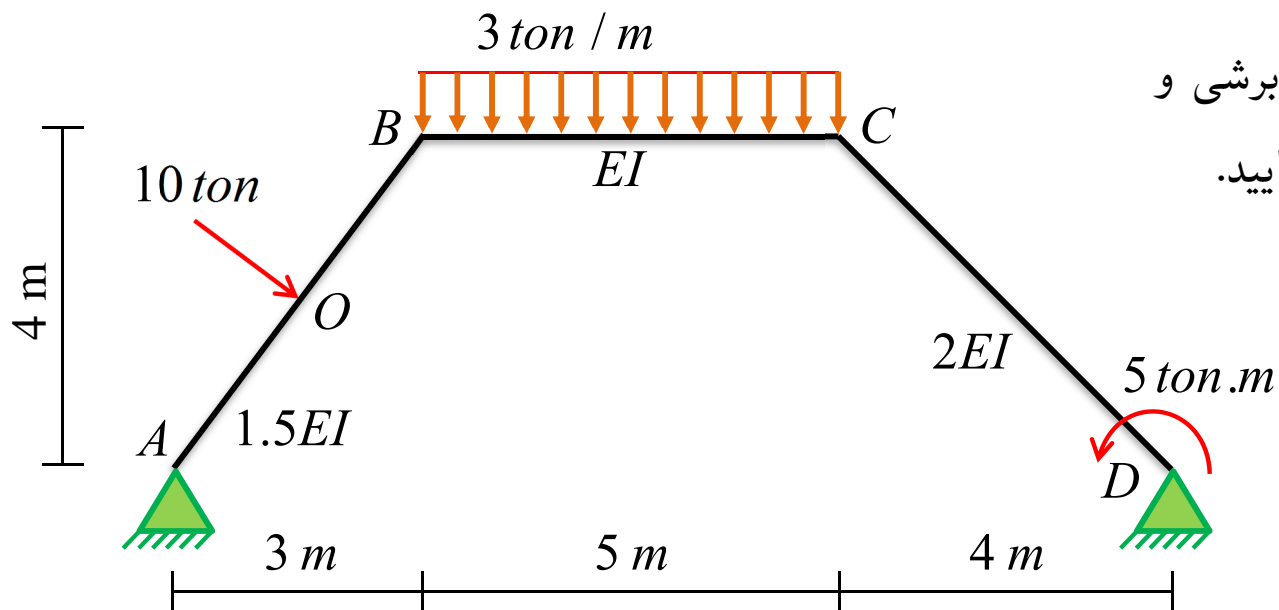
پاسخ تمرین 11-

AB	$0 \leq x \leq 5$	$M_{(x)} = 5.128x - 25.65$	$V_{(x)} = 5.128 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -9 \text{ ton}$
BC	$0 \leq x \leq 6$	$M_{(x)} = -2.5x^2 + 10.28x$	$V_{(x)} = -5x + 10.28$	$P_{(x)} = -11.3 \text{ ton}$
DC	$2\sqrt{10} \geq x \geq 0$	$M_{(x)} = 4.48x$	$V_{(x)} = 4.48 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -22.28 \text{ ton}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 12- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

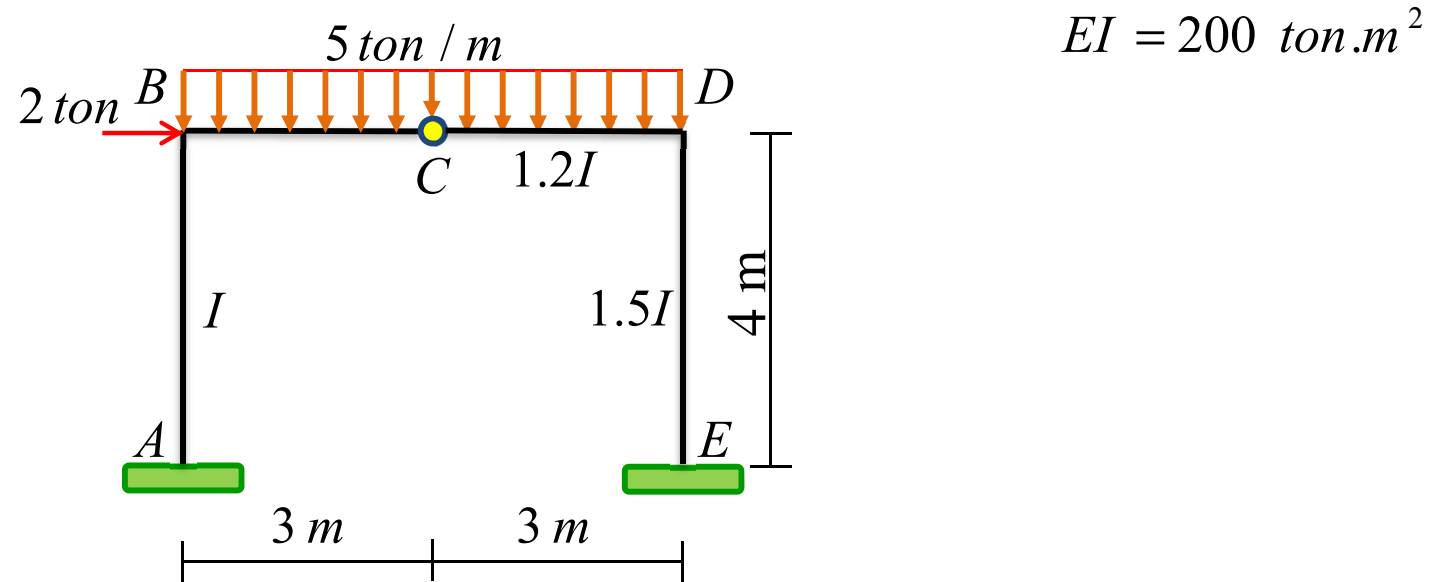


پاسخ تمرین 12-

$AO : 0 \leq x \leq 2.5$	$M_{(x)} = 4.26x$	$V_{(x)} = 4.26 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -12.38 \text{ ton}$
$OB : 0 \leq x \leq 2.5$	$M_{(x)} = -5.74x + 10.65$	$V_{(x)} = -5.74 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -12.38 \text{ ton}$
$BC : 0 \leq x \leq 5$	$M_{(x)} = -1.5x^2 + 6.46x - 3.7$	$V_{(x)} = -3x + 6.46$	$P_{(x)} = -12.02 \text{ ton}$
$DC : 4\sqrt{2} \geq x \geq 0$	$M_{(x)} = -2.46x + 5$	$V_{(x)} = -2.46 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -14.54 \text{ ton}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 13- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

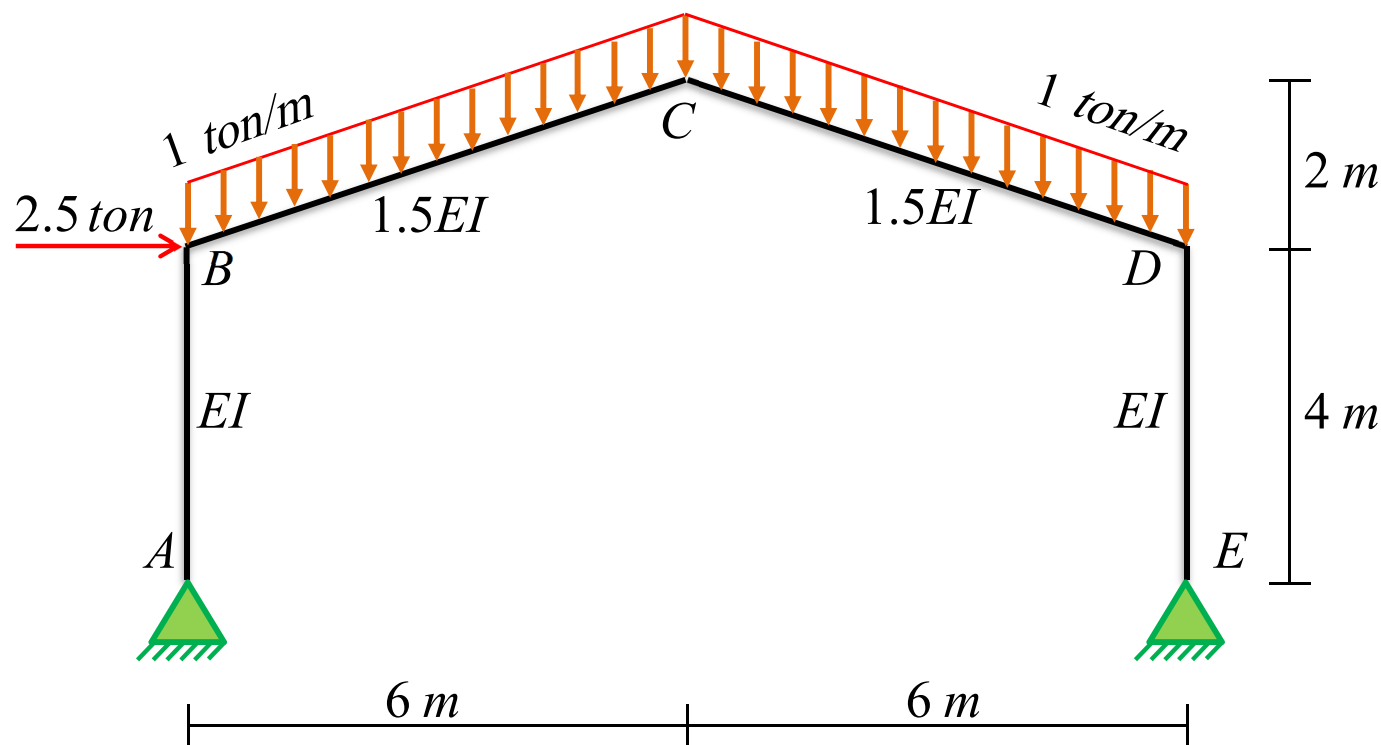


پاسخ تمرین 13-

AB	$0 \leq x \leq 4$	$M_{(x)} = -7.45x + 9.8$	$V_{(x)} = -7.45 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -14.17 \text{ ton}$
BD	$0 \leq x \leq 6$	$M_{(x)} = -2.5x^2 + 14.17x - 20$	$V_{(x)} = -5x + 14.17$	$P_{(x)} = -9.45 \text{ ton}$
ED	$0 \leq x \leq 4$	$M_{(x)} = -9.45x + 12.81$	$V_{(x)} = 9.45 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -15.83 \text{ ton}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 14- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.



$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

پاسخ تمرین 14-

$$AB : 0 \leq x \leq 4 \quad M_{(x)} = -0.72x \quad , \quad V_{(x)} = -0.72 \text{ ton} \quad , \quad P_{(x)} = -5.49 \text{ ton}$$

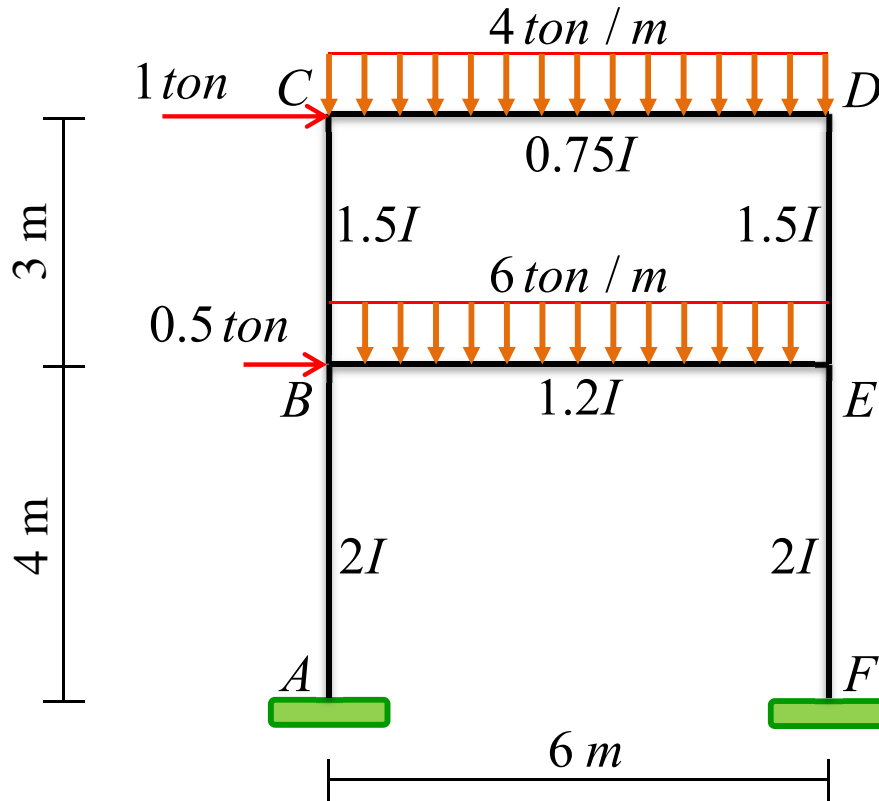
$$BC : 0 \leq x \leq 2\sqrt{10} \quad M_{(x)} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}x^2 + 1.325\sqrt{10}x - 2.88 \quad , \quad V_{(x)} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}x + 1.325\sqrt{10} \quad , \quad P_{(x)} = \frac{x\sqrt{10}}{10} - 1.515\sqrt{10}$$

$$DC : 2\sqrt{10} \geq x \geq 0 \quad M_{(x)} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}x^2 + 1.826\sqrt{10}x - 12.88 \quad , \quad V_{(x)} = \frac{3\sqrt{10}}{10}x - 1.826\sqrt{10} \quad , \quad P_{(x)} = \frac{\sqrt{10}}{10}x - 1.682\sqrt{10}$$

$$ED : 4 \geq x \geq 0 \quad M_{(x)} = -3.22x \quad , \quad V_{(x)} = 3.22 \text{ ton} \quad , \quad P_{(x)} = -7.16 \text{ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 15- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

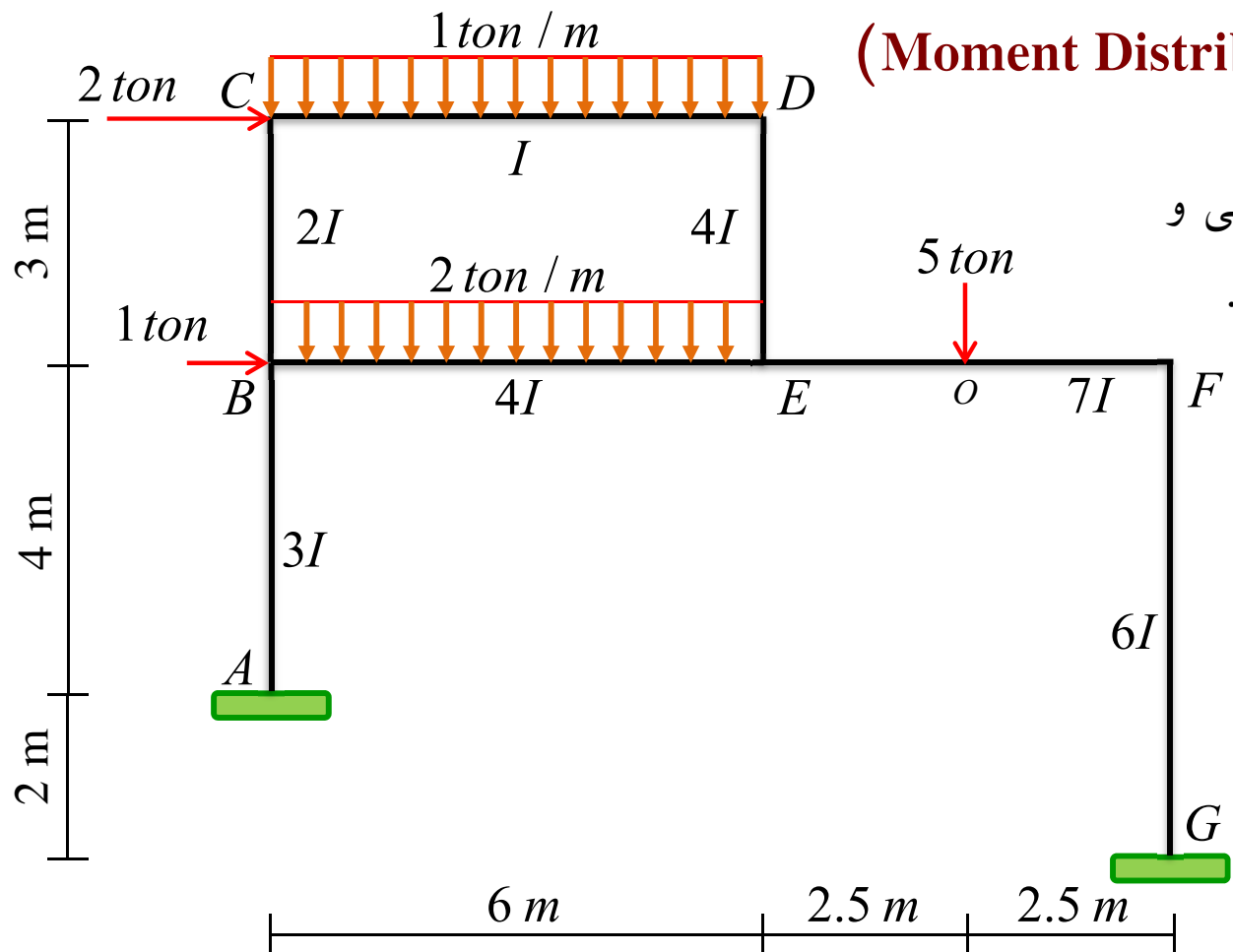


$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

پاسخ تمرین 15-

$AB : 0 \leq x \leq 4$	$M_{(x)} = -1.65x + 1.06$	$V_{(x)} = -1.65 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -29.21 \text{ ton}$
$FE : 0 \leq x \leq 4$	$M_{(x)} = 3.15x - 5.34$	$V_{(x)} = 3.15 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -30.79 \text{ ton}$
$BE : 0 \leq x \leq 6$	$M_{(x)} = -3x^2 + 17.49x - 15.19$	$V_{(x)} = -6x + 17.49$	$P_{(x)} = 4.46 \text{ ton}$
$BC : 0 \leq x \leq 3$	$M_{(x)} = -6.61x + 9.65$	$V_{(x)} = -6.61 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -11.72 \text{ ton}$
$ED : 0 \leq x \leq 3$	$M_{(x)} = 7.61x - 10.98$	$V_{(x)} = 7.61 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -12.28 \text{ ton}$
$CD : 0 \leq x \leq 6$	$M_{(x)} = -2x^2 + 11.72x - 10.19$	$V_{(x)} = -4x + 11.72$	$P_{(x)} = -7.61 \text{ ton}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



تمرین 16- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

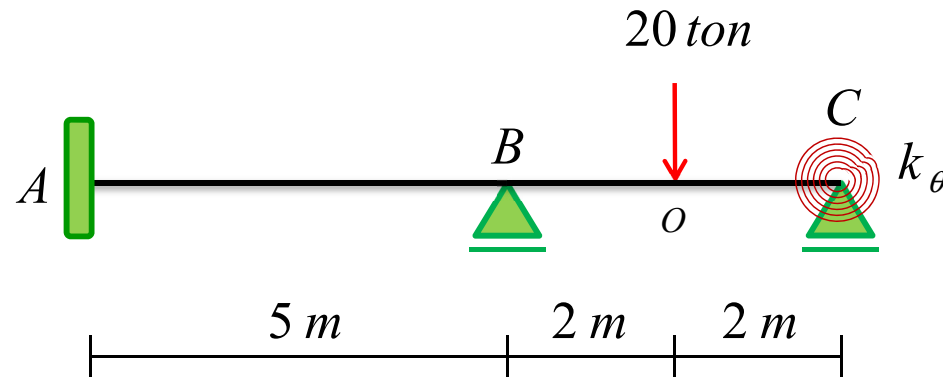
$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

AB :	$0 \leq x \leq 4$	$M_{(x)} = -2.09x + 1.27$	$V_{(x)} = -2.09 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -12.6 \text{ ton}$
GF :	$0 \leq x \leq 6$	$M_{(x)} = 5.09x - 11.53$	$V_{(x)} = 5.09 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -10.4 \text{ ton}$
BE :	$0 \leq x \leq 6$	$M_{(x)} = -x^2 + 9.29x - 12.63$	$V_{(x)} = -2x + 9.29$	$P_{(x)} = 0.1 \text{ ton}$
EO :	$0 \leq x \leq 2.5$	$M_{(x)} = -5.4x + 20.51$	$V_{(x)} = -5.4 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -5.09 \text{ ton}$
OF :	$0 \leq x \leq 2.5$	$M_{(x)} = -10.4x + 7.01$	$V_{(x)} = -10.4 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -5.09 \text{ ton}$
BC :	$0 \leq x \leq 3$	$M_{(x)} = -3.19x + 5.54$	$V_{(x)} = -3.19 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -3.31 \text{ ton}$
ED :	$0 \leq x \leq 3$	$M_{(x)} = 5.19x - 13.41$	$V_{(x)} = 5.19 \text{ ton}$	$P_{(x)} = -2.69 \text{ ton}$
CD :	$0 \leq x \leq 6$	$M_{(x)} = -0.5x^2 + 3.31x - 4.02$	$V_{(x)} = -x + 3.31$	$P_{(x)} = -5.19 \text{ ton}$

پاسخ تمرین 16-

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 17- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.



$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

$$k_{\theta} = 20 \frac{\text{ton.m}}{\text{rad}}$$

پاسخ تمرین 17-

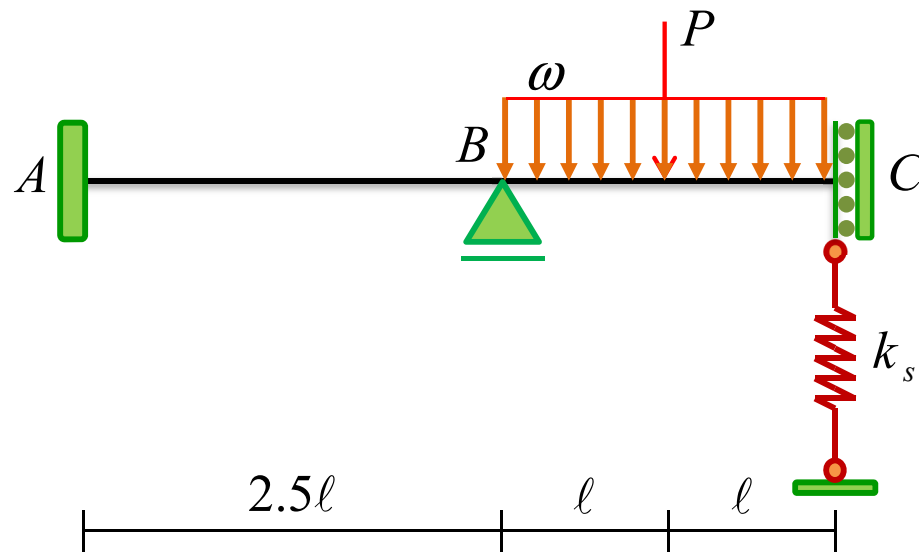
$$AB : 0 \leq x \leq 5 \quad M_{(x)} = -2.22x + 3.7 \quad , \quad V_{(x)} = -2.22 \text{ ton}$$

$$BO : 0 \leq x \leq 2 \quad M_{(x)} = 11.52x - 7.4 \quad , \quad V_{(x)} = 11.52 \text{ ton}$$

$$CO : 2 \geq x \geq 0 \quad M_{(x)} = 8.48x - 1.33 \quad , \quad V_{(x)} = -8.48 \text{ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 18- در سازه نشان داده شده مقدار نیروی ایجاد شده در فنر را محاسبه نمایید.



$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

$$k_s = 50 \text{ ton / m}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

$$P = 10 \text{ ton}$$

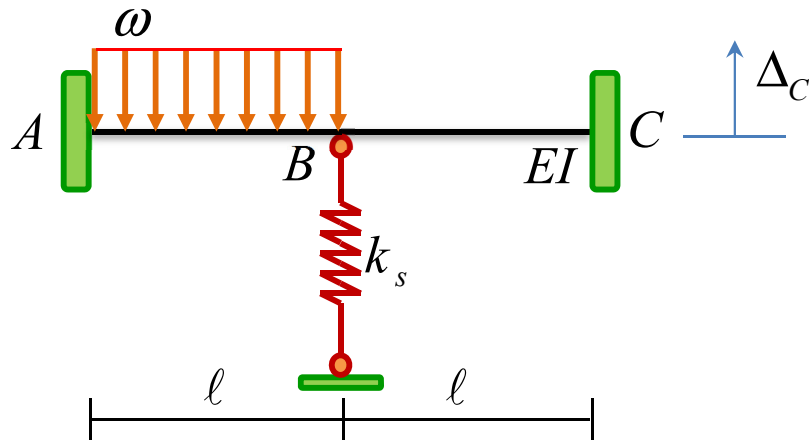
$$\omega = 2 \text{ ton / m}$$

پاسخ تمرین 18-

$$f_s = \frac{\frac{29P\ell^3}{24EI} + \frac{41\omega\ell^4}{18EI}}{\frac{7}{4k_s} + \frac{2\ell^3}{EI}} = 7.37 \text{ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تمرین 19- در سازه نشان داده شده تکیه‌گاه C به اندازه 10 سانتیمتر در راستای قائم حرکت دارد. مطلوب است تعیین مقدار نیروی ایجاد شده در فنر.



$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

$$k_s = 50 \text{ ton / m}$$

$$l = 3 \text{ m}$$

$$\Delta_c = 10 \text{ cm}$$

$$\omega = 2 \text{ ton / m}$$

پاسخ تمرین 19-

$$f_s = \frac{\frac{12EI}{l^3} \Delta_c - \frac{\omega l}{2}}{\frac{24EI}{l^3 k_s} + 1} = 1.2927 \text{ ton} \quad (\text{نیروی ایجاد شده در فنر به صورت کششی است.})$$