دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها
(Virtual Work Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی: رفع محدودیت‌های روش‌های قبلی

روش کار حقیقی

تغییرشکل در محل اثر یک نیروی متمرکز واقعی.

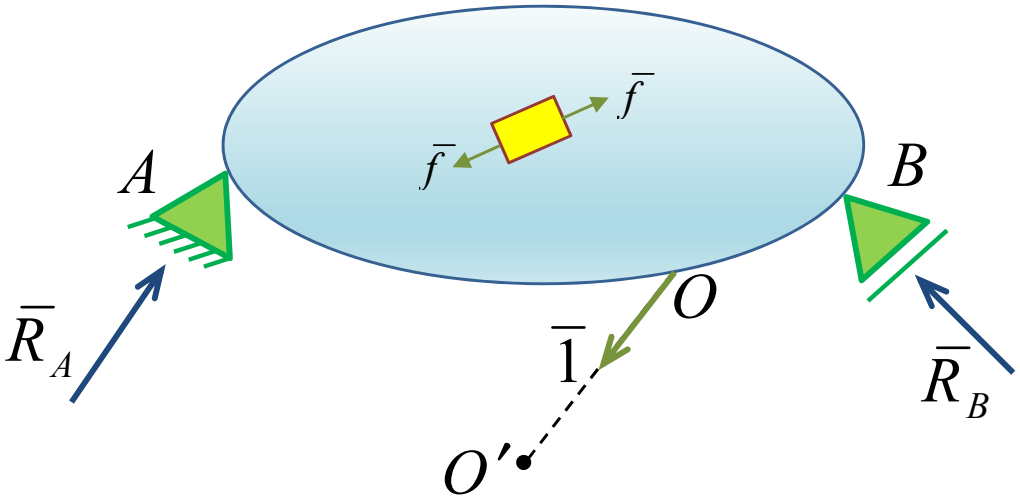
روش کاستیلیانو

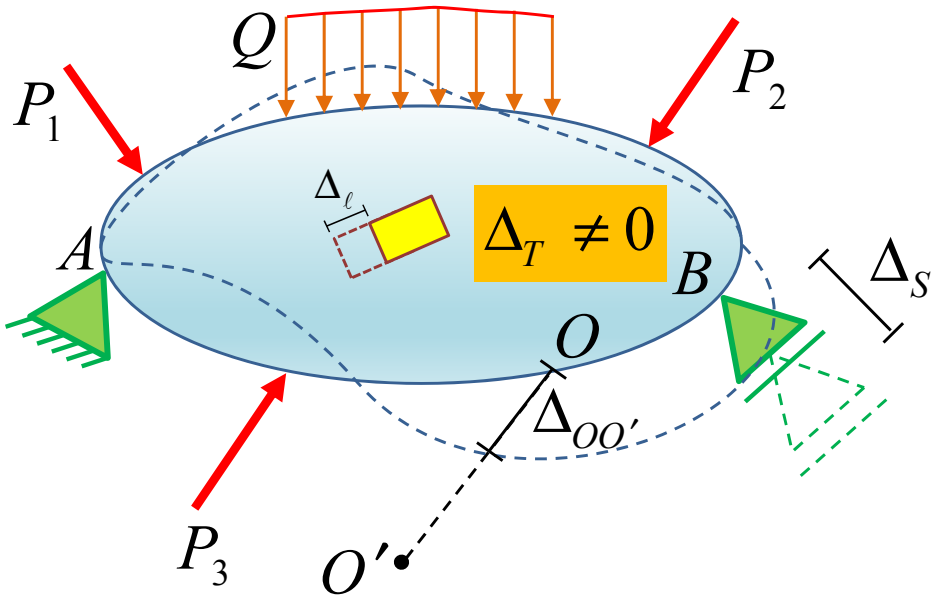
تغییر شکل در هر گره دلخواه از سازه با فرض عدم نشست تکیه‌گاه‌ها و ثابت ماندن درجه حرارت.

روش کار مجازی

تغییر شکل در هر گره دلخواه از سازه

روش کار مجازی (Virtual Work Method)





کار مجازی انجام شده توسط نیروهای مجازی داخلی

=

کار مجازی انجام شده توسط نیروهای مجازی خارجی

$$\bar{1}.\Delta_{OO'} + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \qquad (1)$$

Δ_ℓ : تغییرشکل ناشی از نیروهای واقعی، تغییرات حرارتی و نقص عضو

Δ_S : نشست تکیه‌گاهی ناشی از نیروهای واقعی

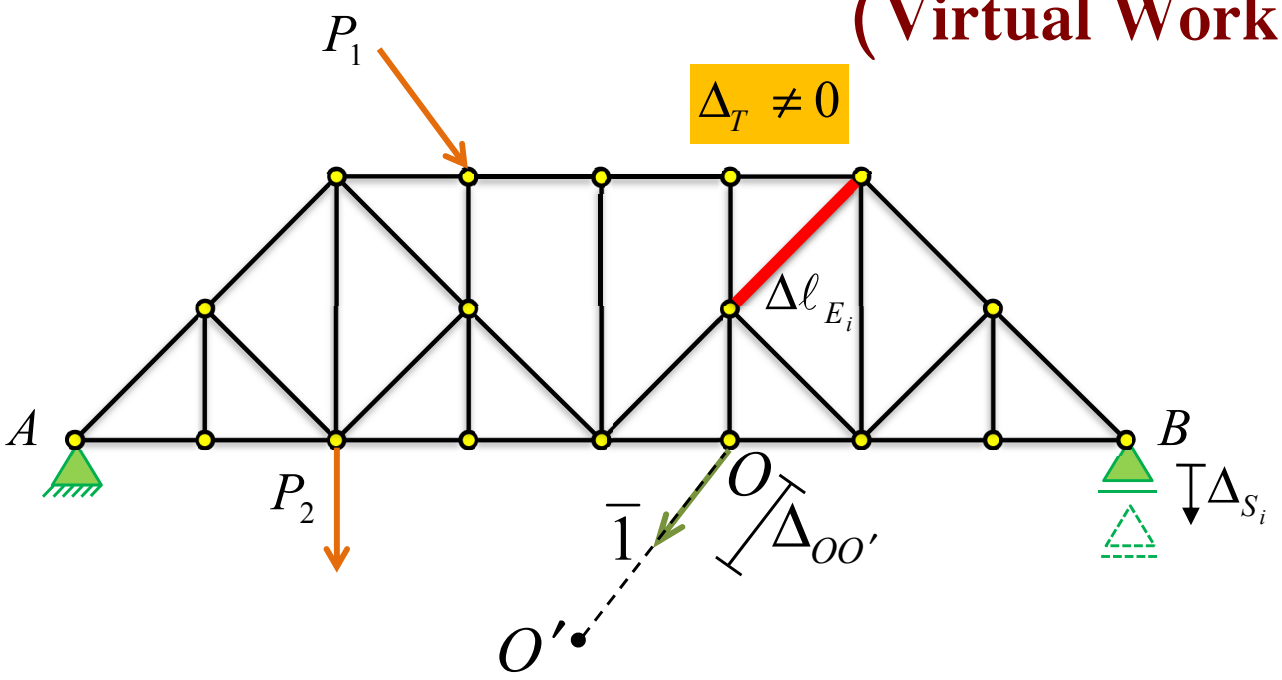
$\Delta_{OO'}$: جابجایی گره O در راستای خط OO' ناشی از نیروهای واقعی

$\bar{f}$: نیروهای داخلی ناشی از بار مجازی واحد

$\bar{R}_B$: عکس‌العمل تکیه‌گاهی ناشی از بار مجازی واحد

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا



فرضیات:

- تغییرشکل‌های واقعی در ناحیه الاستیک (خطی) باشد.
- نیروهای وارد بر خرپا در گره‌های خرپا اعمال می‌شود.

$$(1) \Rightarrow \boxed{\bar{1}.\Delta_{OO'} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta\ell_{E_i} \right)} \quad (2)$$

$\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i}$: تغییرشکل ناشی از نیروهای واقعی در عضو i اُم

$\alpha_i \ell_i \Delta T_i$: تغییرشکل ناشی از تغییرات حرارتی در عضو i اُم

f_i: نیروی داخلی عضو i اُم ناشی از بارهای واقعی

$\bar{f}_i$: نیروی داخلی عضو i اُم ناشی از بار واحد مجازی

$\Delta\ell_{E_i}$: تغییرشکل ناشی از نقص عضو i اُم (عضو کوتاهتر منفی، عضو با طول بیشتر مثبت)

ℓ_i : طول عضو i اُم

A_i : سطح مقطع عضو i اُم

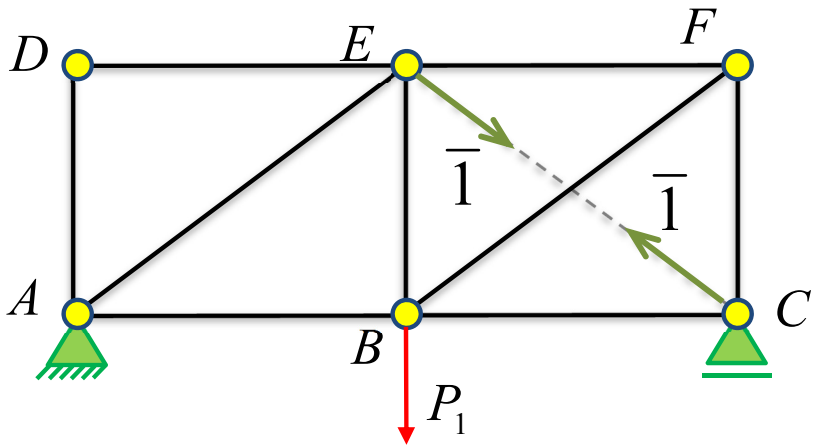
E_i : مدول الاستیسیته عضو i اُم

α_i : ضریب انبساط حرارتی عضو i اُم

ΔT_i : تغییرات حرارتی عضو i اُم

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نحوه اعمال بار مجازی واحد در تعیین سایر تغییرشکل‌ها

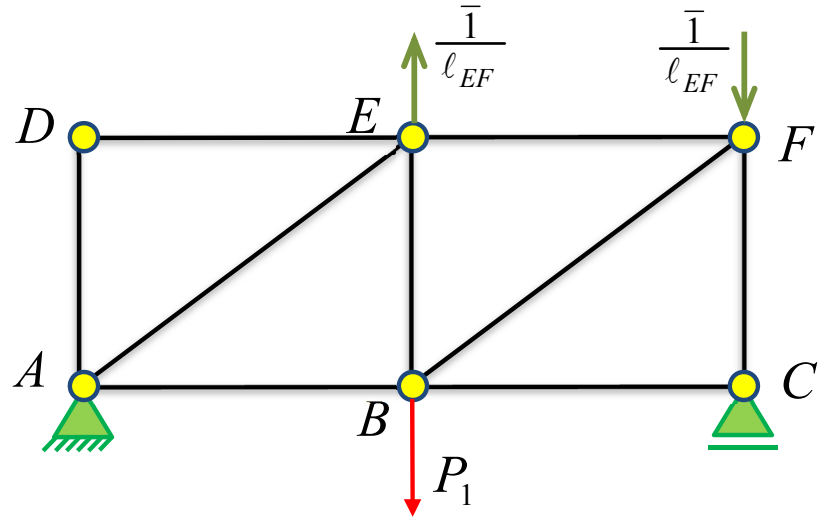


$$(1) \Rightarrow \bar{1}.(\Delta_E{}^{\searrow}) + \bar{1}.(\Delta_C{}^{\nwarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\bar{1}.(\Delta_E{}^{\searrow} + \Delta_C{}^{\nwarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{1}.(\Delta_{E-C}{}^{\searrow\nwarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell} \quad (3)$$

$\Delta_{E-C}{}^{\searrow\nwarrow}$: تغییرشکل نسبی دو گره E و C در امتداد خط اتصال



$$(1) \Rightarrow \frac{\bar{1}}{\ell_{EF}}.(\Delta_E{}^{\uparrow}) + \frac{\bar{1}}{\ell_{EF}}.(\Delta_F{}^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{1}}{\ell_{EF}}.(\Delta_E{}^{\uparrow} + \Delta_F{}^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

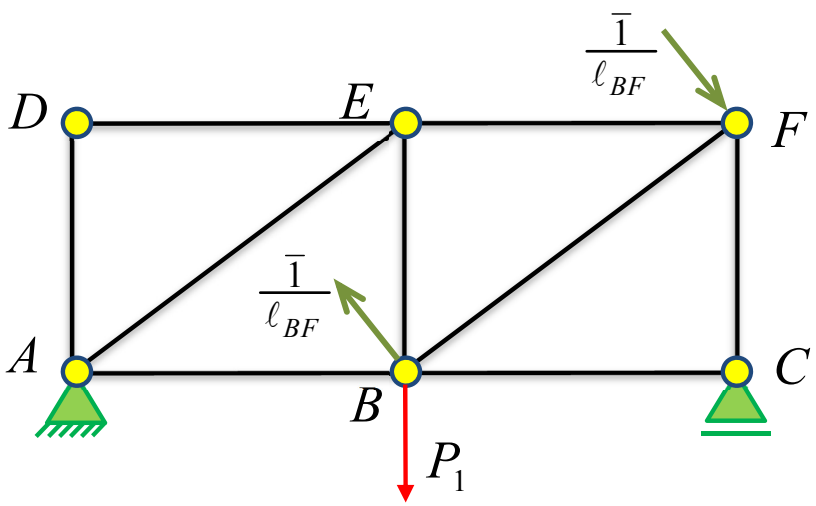
$$\bar{1}.(\frac{\Delta_{E-F}{}^{\updownarrow}}{\ell_{EF}}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{1}.(\theta_{EF}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell} \quad (4)$$

θ_{EF} : دوران عضو EF نسبت به خود عضو

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نحوه اعمال بار مجازی واحد در تعیین سایر تغییرشکل‌ها



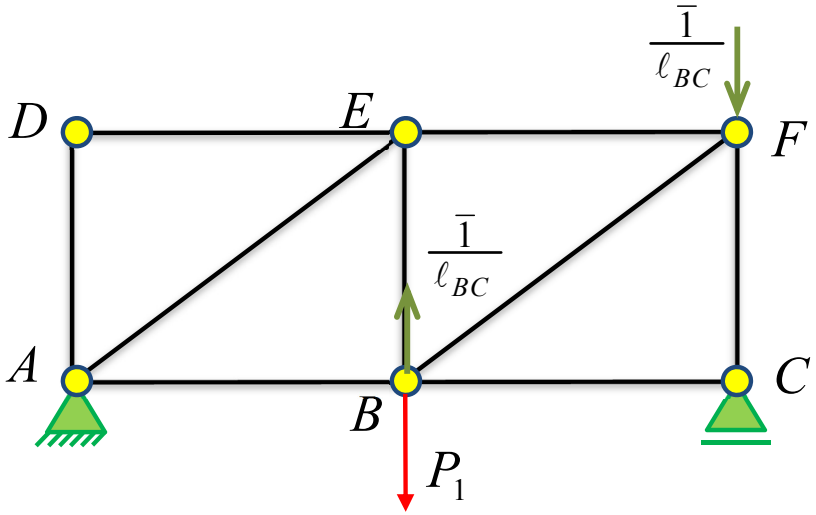
$$(1) \Rightarrow \frac{\bar{1}}{\ell_{BF}}.(\Delta_B^{\nwarrow}) + \frac{\bar{1}}{\ell_{BF}}.(\Delta_F^{\searrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{1}}{\ell_{BF}}.(\Delta_B^{\nwarrow} + \Delta_F^{\searrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\bar{1}.(\frac{\Delta_{B-F}^{\searrow}}{\ell_{BF}}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{1}.(\theta_{BF}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell} \quad (5)$$

θ_{BF} : دوران عضو BF نسبت به خود عضو



$$(1) \Rightarrow \frac{\bar{1}}{\ell_{BC}}.(\Delta_B^{\uparrow}) + \frac{\bar{1}}{\ell_{BC}}.(\Delta_F^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{1}}{\ell_{BC}}.(\Delta_B^{\uparrow} + \Delta_F^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\bar{1}.(\frac{\Delta_{B-F}^{\updownarrow}}{\ell_{BC}}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{1}.(\theta_{BF/BC}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f}.\Delta_\ell} \quad (6)$$

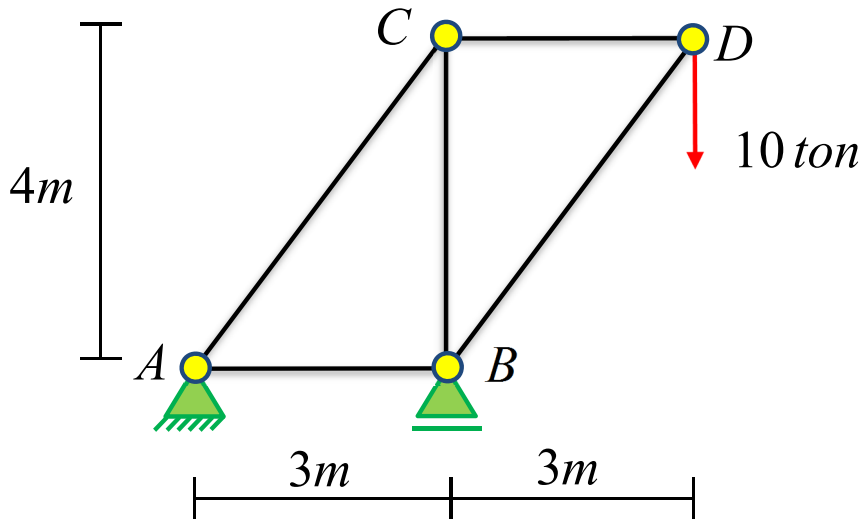
$\theta_{BF/BC}$: دوران عضو BF نسبت به عضو BC

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

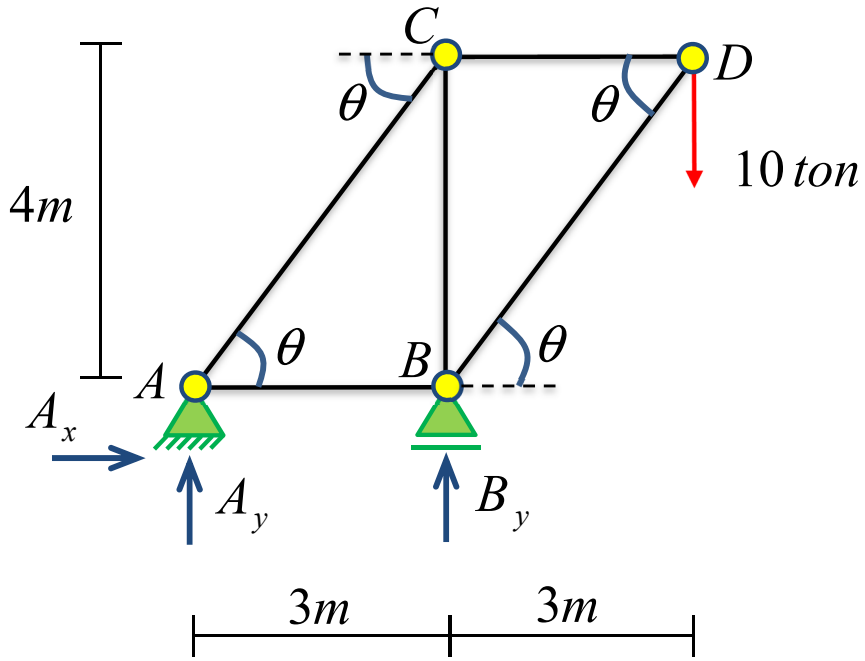
مثال 1- در خرپای نشان داده شده جابجایی افقی گره C را محاسبه نمایید. $\Delta h_C = ?$

$$EA = 2\times10^4\ (ton)$$



روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا



پاسخ مثال 1-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{3}{5}=0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

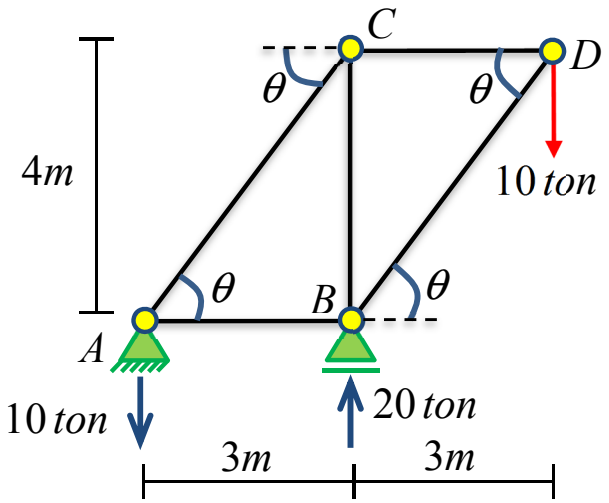
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{A_x=0}$$

$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow B_y\times 3-10\times 6=0 \Rightarrow \boxed{B_y=20\,ton} \quad (1.1)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+B_y-10=0 \overset{(1.1)}{\Rightarrow} \boxed{A_y=-10\,ton}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

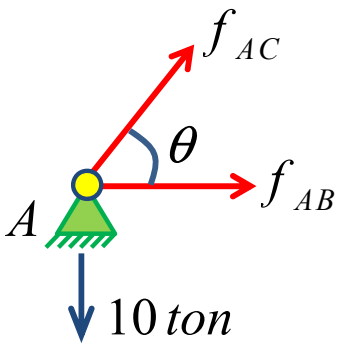
رابطه کار مجازی در خرپا



$$\sin(\theta)=0.8$$
$$\cos(\theta)=0.6$$

پاسخ مثال 1-

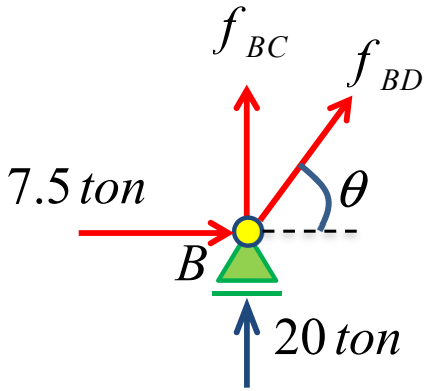
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow f_{AB}+f_{AC}(0.6)=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -10+f_{AC}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{AB}=-7.5\,ton \\ f_{AC}=12.5\,ton \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:

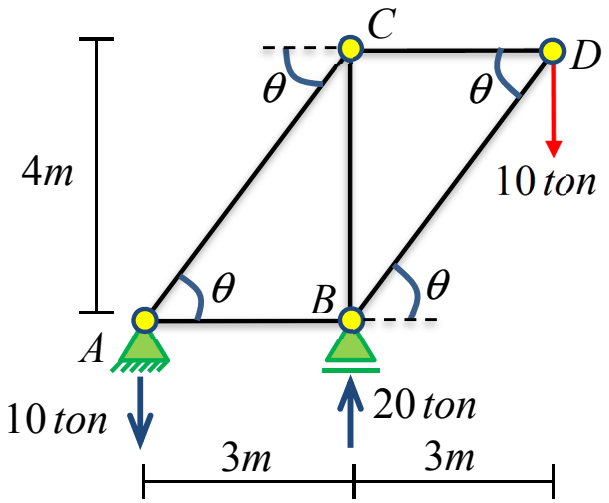


$$\sum F_x=0 \Rightarrow 7.5+f_{BD}(0.6)=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow 20+f_{BC}+f_{BD}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BD}=-12.5\,ton \\ f_{BC}=-10\,ton \end{cases}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

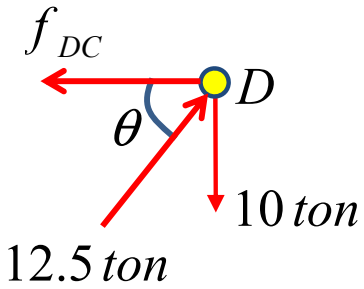
رابطه کار مجازی در خرپا



$$\sin(\theta) = 0.8$$
$$\cos(\theta) = 0.6$$

پاسخ مثال 1-

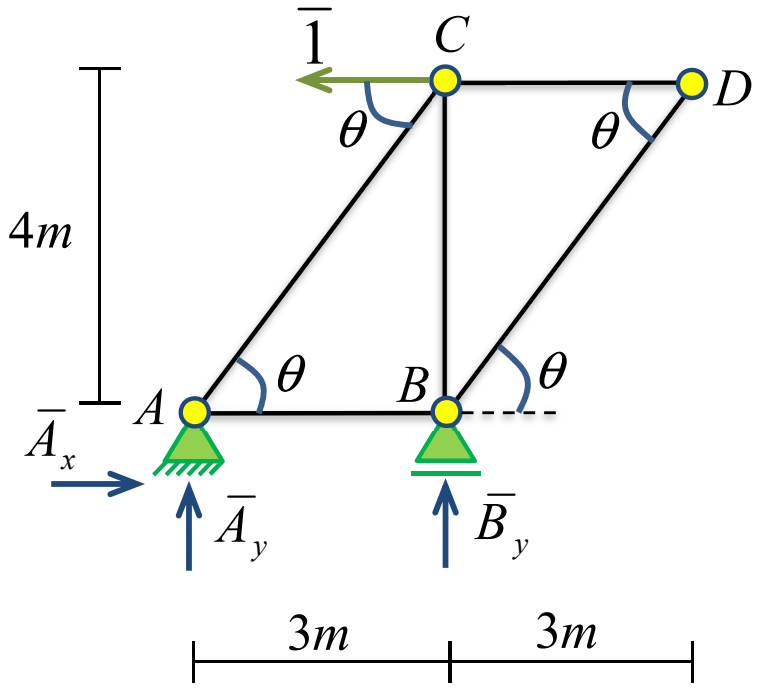
با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -f_{DC} + 12.5(0.6) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{DC} = 7.5\,ton$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا



پاسخ مثال 1-

سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی (با مقدار واحد) در گره C اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{3}{5}=0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow \bar{A}_x-1=0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x=1}$$

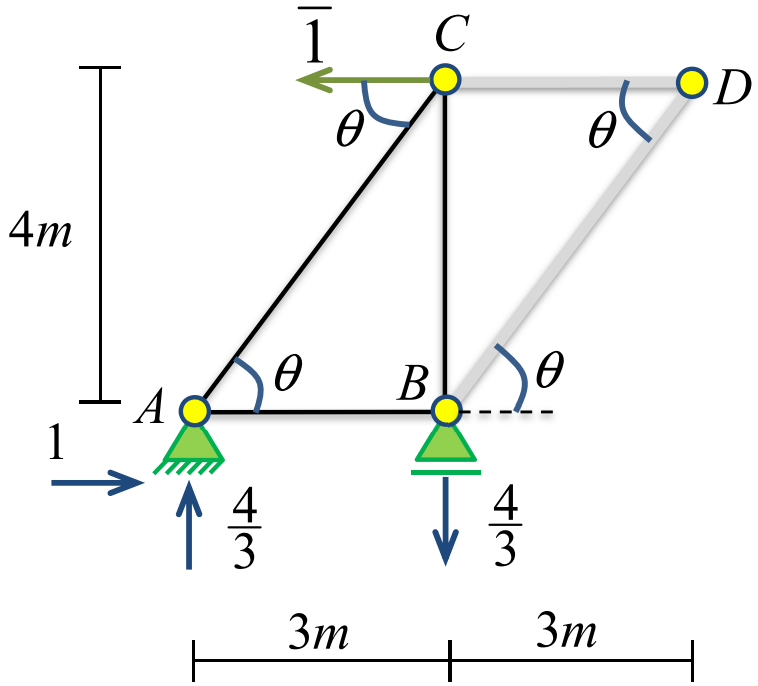
$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow \bar{B}_y\times 3+1\times 4=0 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_y=-\frac{4}{3}} \qquad (1.2)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{A}_y+\bar{B}_y=0 \overset{(1.2)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y=\frac{4}{3}}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

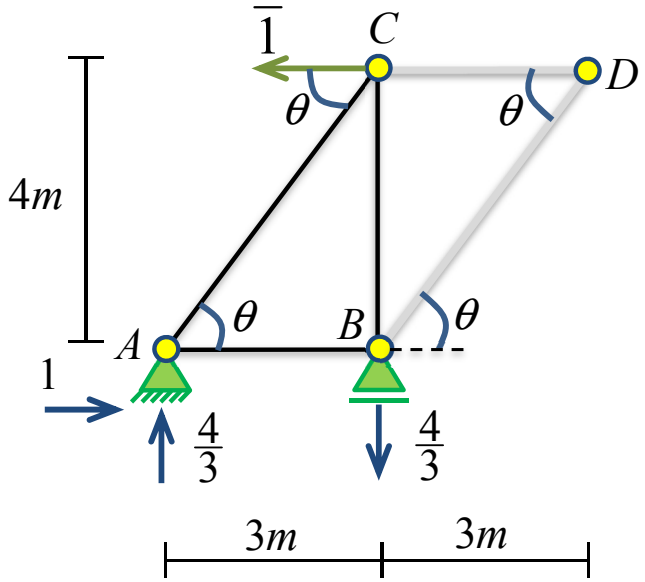
پاسخ مثال 1-



با توجه به آن که در گره D تنها دو عضو به هم متصل شده و همچنین از آنجایی که بار خارجی در این گره اعمال نشده است می‌توان نتیجه گرفت عضوهای CD و BD صفر نیرویی می‌باشند.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

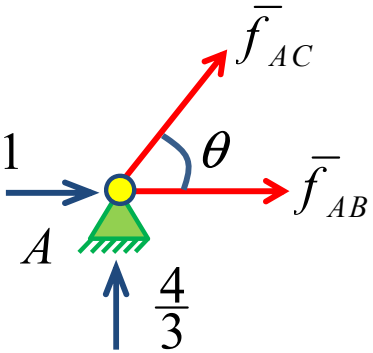
رابطه کار مجازی در خرپا



$$\sin(\theta)=0.8$$
$$\cos(\theta)=0.6$$

پاسخ مثال 1-

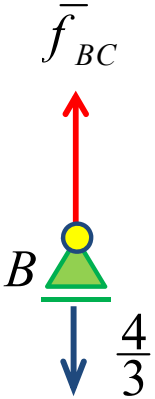
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow \bar{f}_{AB}+\bar{f}_{AC}(0.6)+1=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow \frac{4}{3}+\bar{f}_{AC}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar{f}_{AB}=0\\ \bar{f}_{AC}=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_y=0 \Rightarrow -\frac{4}{3}+\bar{f}_{BC}=0$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{BC}=\frac{4}{3}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 1-

عضو	$\ell_i\ (m)$	$\bar{f}_i$	$f_i\ (ton)$	$\bar{f}_i.(f_i\ell_i)$
AB	3	0	-7.5	0
AC	5	$-\frac{5}{3}$	12.5	-104.167
BD	5	0	-12.5	0
BC	4	$\frac{4}{3}$	-10	-53.333
DC	3	0	7.5	0
			$\sum$	-157.5

$(1.3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h_C = -0.7875\ (cm)}$$

جابجایی در خلاف جهت نیروی واحد مجازی ایجاد می‌شود.

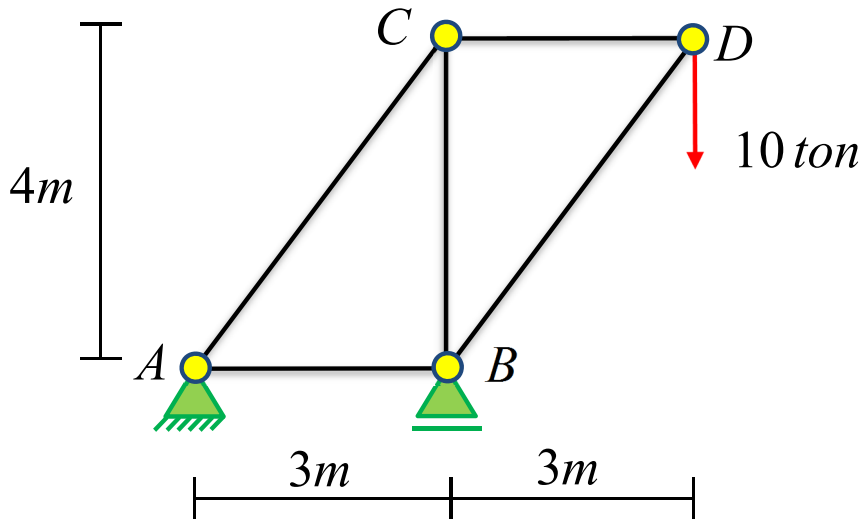
ETABS File Name: **05-Example-01.EDB**

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

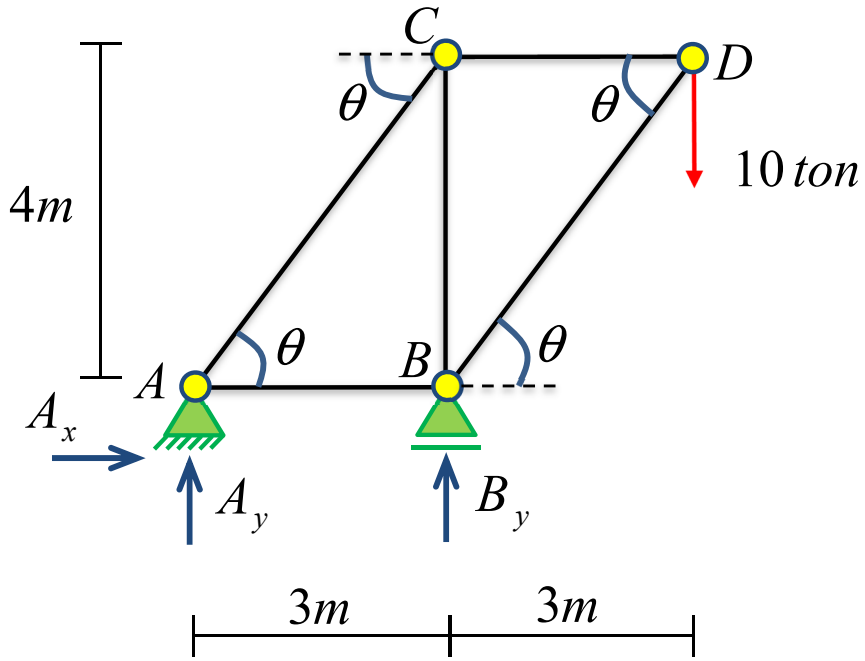
مثال 2- در خرپای نشان داده شده جابجایی نسبی دو گره A و D نسبت به هم را محاسبه نمایید. $\Delta_{AD} = ?$

$$EA = 2\times10^4\ (ton)$$



روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا



پاسخ مثال 2-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{3}{5}=0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

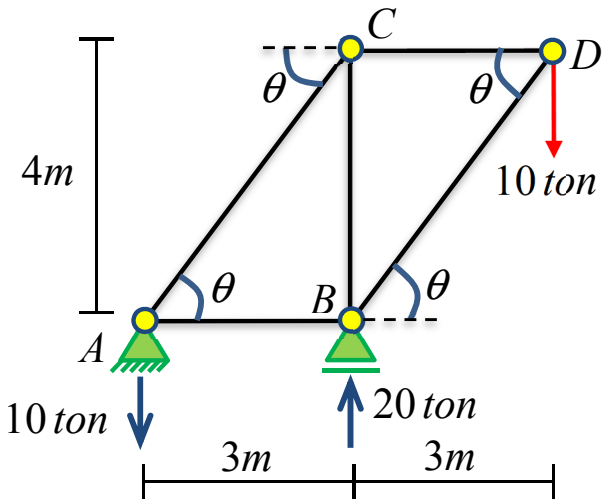
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{A_x=0}$$

$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow B_y\times 3-10\times 6=0 \Rightarrow \boxed{B_y=20\,ton} \quad (2.1)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+B_y-10=0 \overset{(2.1)}{\Rightarrow} \boxed{A_y=-10\,ton}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

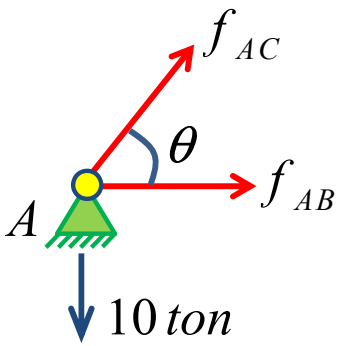
رابطه کار مجازی در خرپا



$$\sin(\theta)=0.8$$
$$\cos(\theta)=0.6$$

پاسخ مثال 2-

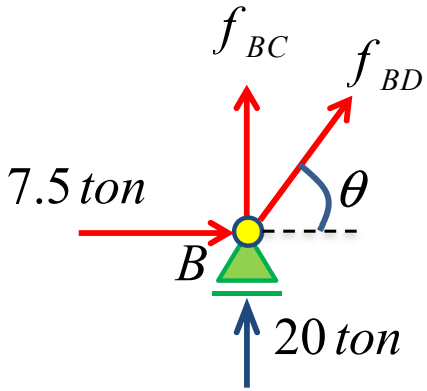
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow f_{AB}+f_{AC}(0.6)=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -10+f_{AC}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{AB}=-7.5\,ton \\ f_{AC}=12.5\,ton \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:

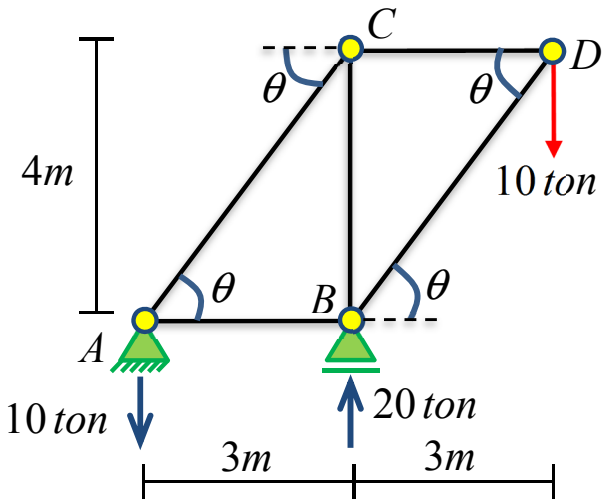


$$\sum F_x=0 \Rightarrow 7.5+f_{BD}(0.6)=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow 20+f_{BC}+f_{BD}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BD}=-12.5\,ton \\ f_{BC}=-10\,ton \end{cases}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

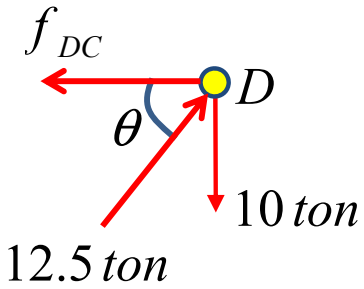
رابطه کار مجازی در خرپا



$$\sin(\theta) = 0.8$$
$$\cos(\theta) = 0.6$$

پاسخ مثال 2-

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



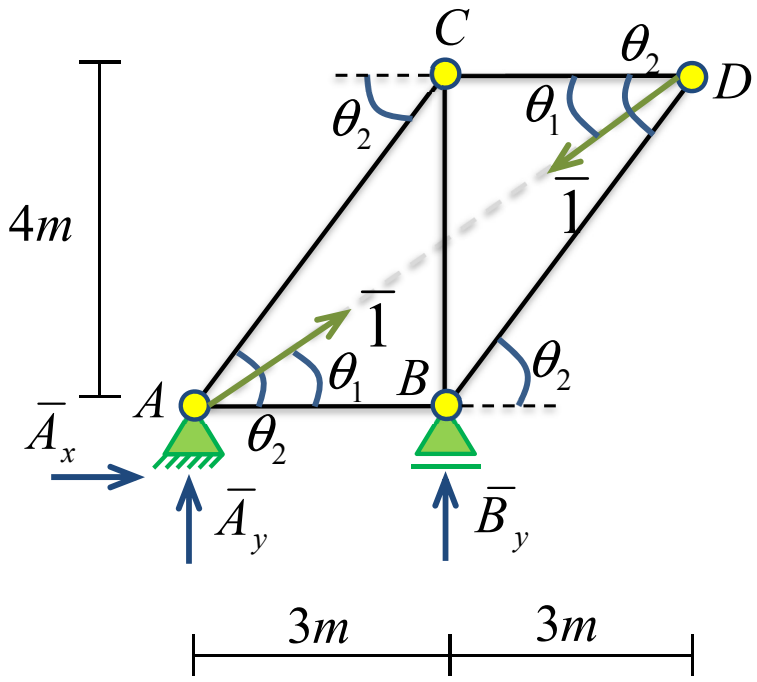
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -f_{DC} + 12.5(0.6) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{DC} = 7.5\,ton$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 2-

سپس در ادامه دو نیروی متمرکز مجازی مساوی (با مقدار واحد) و مختلف الجهت در راستای AD در گره‌های A و D اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

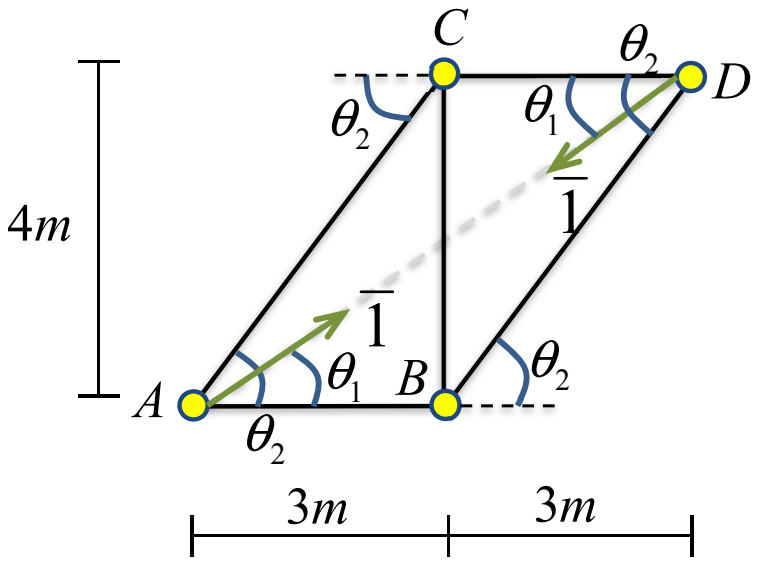
$$\bar{A}_x=\bar{B}_y=\bar{A}_y=0$$

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

نکته: در یک سیستم سازه‌ای تحت اثر دو نیروی داخلی مساوی، هم راستا و مختلف الجهت مقدار عکس العمل‌های تکیه‌گاهی برابر با صفر خواهد بود.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

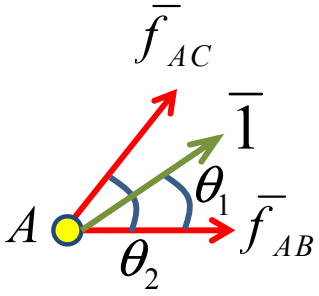


$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8\quad,\quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

پاسخ مثال 2-

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

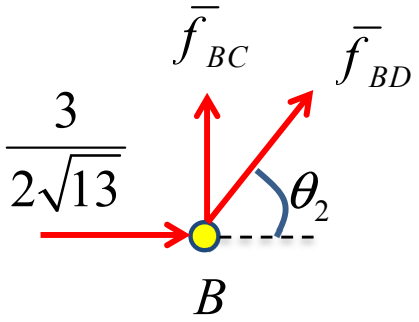


$$\sum F_x=0 \Rightarrow \bar{f}_{AB}+\bar{f}_{AC}(0.6)+1\times\frac{6}{\sqrt{52}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{f}_{AC}(0.8)+1\times\frac{4}{\sqrt{52}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar{f}_{AB}=-\dfrac{3}{2\sqrt{13}}\\ \bar{f}_{AC}=-\dfrac{5}{2\sqrt{13}}\end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



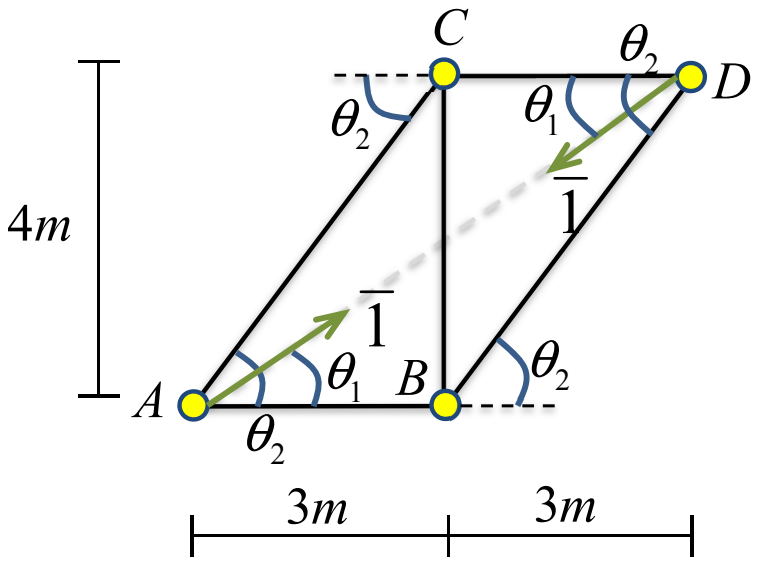
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{13}}+\bar{f}_{BD}(0.6)=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{f}_{BC}+\bar{f}_{BD}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar{f}_{BD}=-\dfrac{5}{2\sqrt{13}}\\ \bar{f}_{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

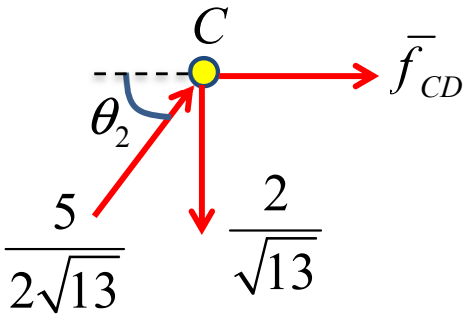


$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

پاسخ مثال 2-

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_{CD}+\frac{5}{2\sqrt{13}}(0.6)=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_{CD}=-\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 2-

عضو	$\ell_i\ (m)$	$\bar{f}_i$	$f_i\ (ton)$	$\bar{f}_i.(f_i\ell_i)$
AB	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	-7.5	$\frac{33.75}{\sqrt{13}}$
AC	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	12.5	$-\frac{156.25}{\sqrt{13}}$
BD	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	-12.5	$\frac{156.25}{\sqrt{13}}$
BC	4	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	-10	$-\frac{80}{\sqrt{13}}$
CD	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	7.5	$-\frac{33.75}{\sqrt{13}}$
			$\sum$	$-\frac{80}{\sqrt{13}}$

ETABS File Name: **05-Example-02.EDB**

$(2.2) \quad \Rightarrow$

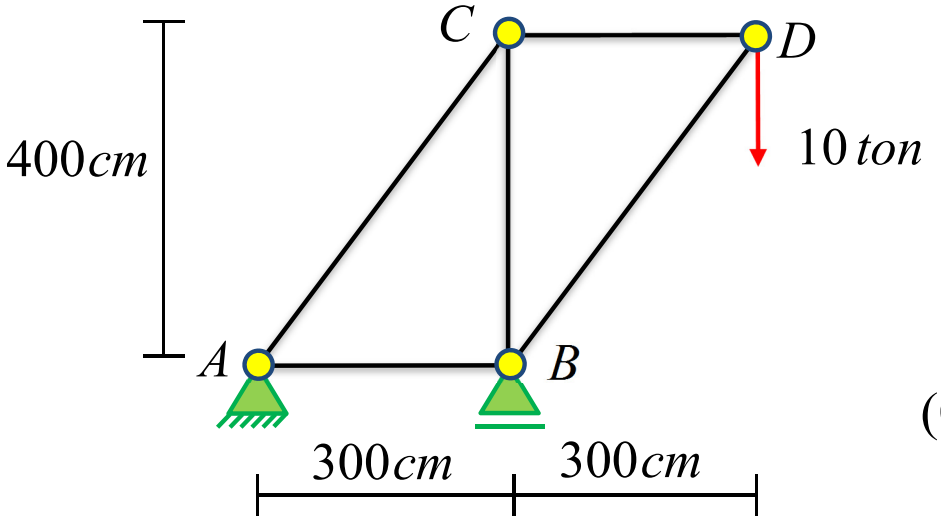
$$\Rightarrow \boxed{\Delta_{AD} = -0.1109\ (cm)}$$

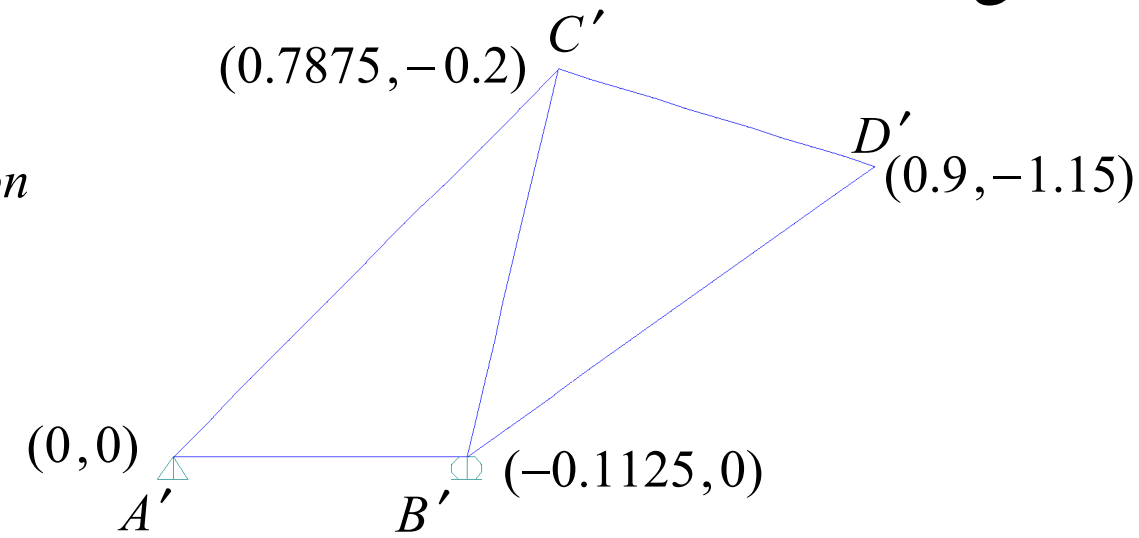
دو گره A و D از همدیگر دور می‌شوند.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 2-





جابجایی گره‌ای برحسب سانتیمتر خروجی نرم‌افزار ETABS

$$\overrightarrow{AD} = (600-0)\vec{i} + (400-0)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AD} = 600\vec{i} + 400\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{A'D'} = [(600+0.9)-(0+0)]\vec{i} + [(400-1.15)-(0+0)]\vec{j} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A'D'} = 600.9\vec{i} + 398.85\vec{j}}$$

$$P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{A'D'}\bullet\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{(600.9\times600)+(398.85\times400)}{\sqrt{(600)^2+(400)^2}} \Rightarrow \boxed{P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}} = 721.2212\,cm}$$

$$\Delta_{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| - P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}} = \sqrt{(600)^2+(400)^2} - 721.2212 \Rightarrow \boxed{\Delta_{AD} = -0.1109\,(cm)}$$

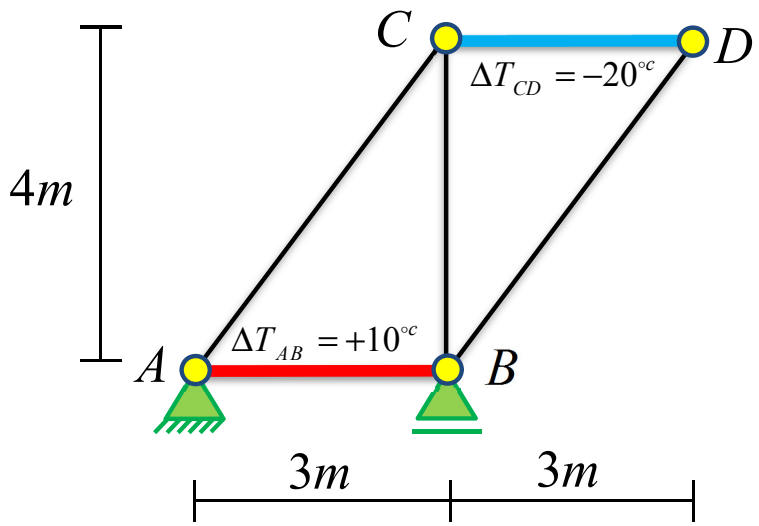
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

مثال 3- در خرپای نشان داده شده دمای عضو AB به اندازه 10 درجه سانتیگراد افزایش و دمای عضو CD به اندازه 20 درجه سانتیگراد کاهش پیدا می‌کند. جابجایی نسبی دو گره A و D نسبت به هم را محاسبه نمایید. $\Delta_{AD} = ?$

$$EA = 2\times10^{4}\ (ton)$$

$$\alpha = 1\times10^{-3}\left(\frac{1}{^{\circ}c}\right)$$

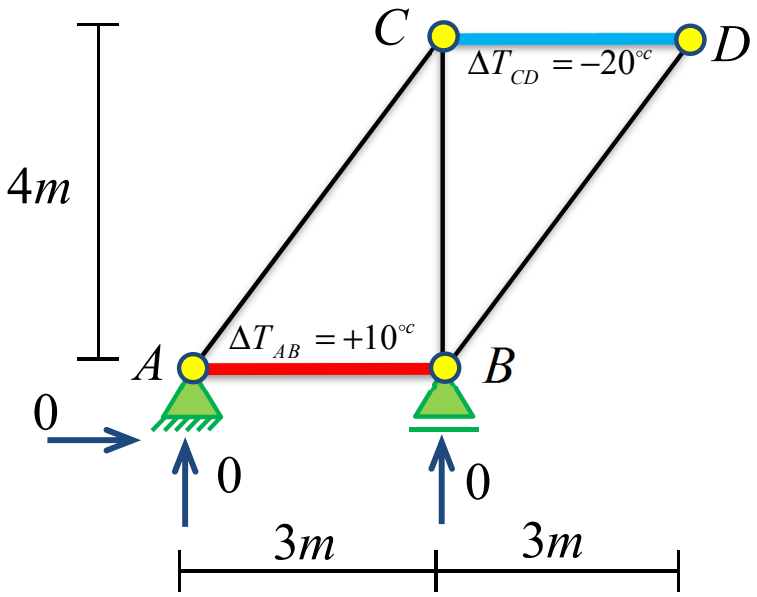


روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

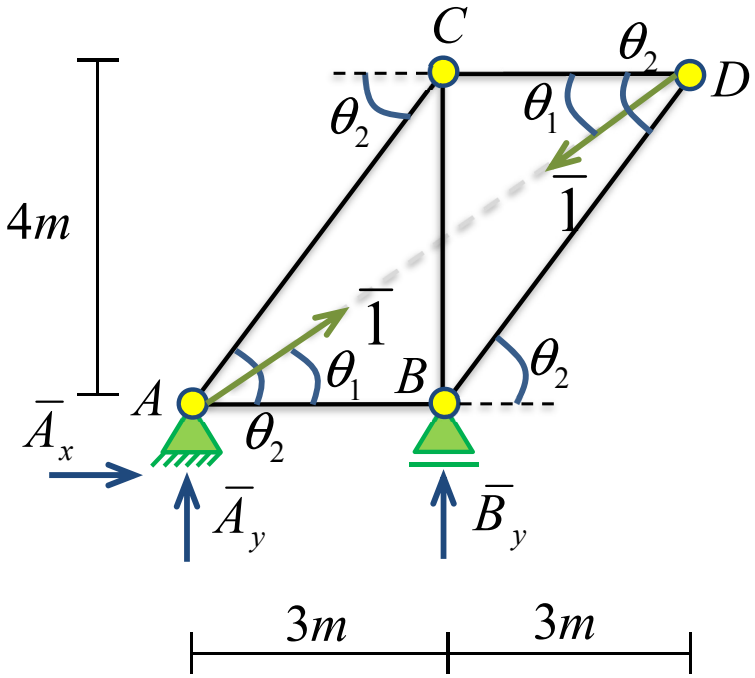
پاسخ مثال 3-

در این سازه چون بار واقعی خارجی وجود ندارد و سازه معین است؛ از این رو نیروی داخلی واقعی و بالتبع تغییر شکل داخلی واقعی ناشی از بار واقعی خارجی در این سازه ایجاد نمی‌شود و برابر با صفر است.



روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا



پاسخ مثال 3-

سپس در ادامه دو نیروی متمرکز مجازی مساوی (با مقدار واحد) و مختلف الجهت در راستای AD در گره‌های A و D اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

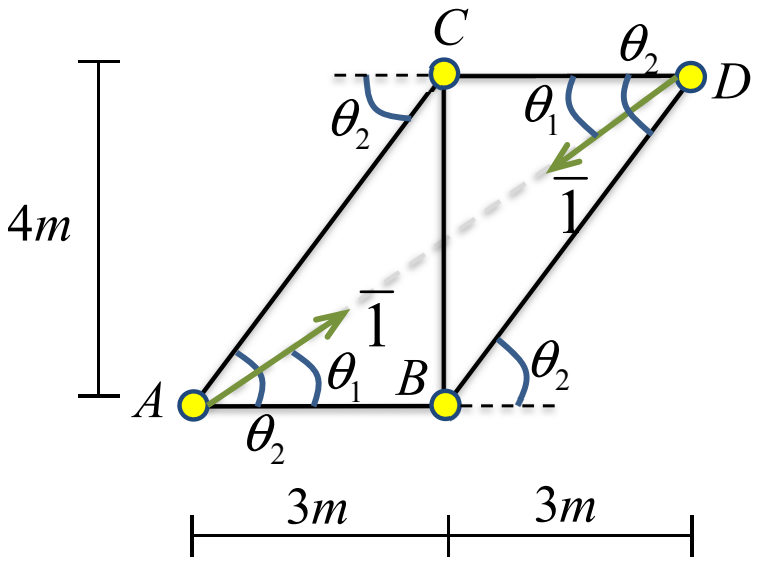
عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$\bar{A}_x=\bar{B}_y=\bar{A}_y=0$$

نکته: در یک سیستم سازه‌ای تحت اثر دو نیروی داخلی مساوی، هم راستا و مختلف الجهت مقدار عکس العمل‌های تکیه‌گاهی برابر با صفر خواهد بود.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

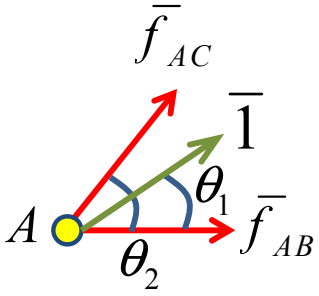


$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

پاسخ مثال 3-

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

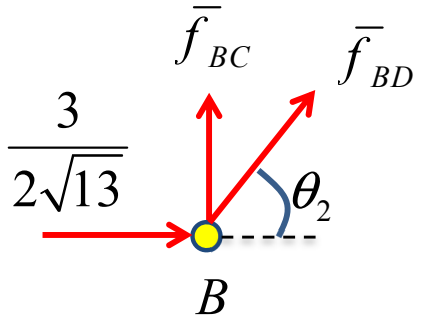


$$\sum F_x=0 \Rightarrow \bar{f}_{AB}+\bar{f}_{AC}(0.6)+1\times\frac{6}{\sqrt{52}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{f}_{AC}(0.8)+1\times\frac{4}{\sqrt{52}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}_{AB}=-\dfrac{3}{2\sqrt{13}} \\ \bar{f}_{AC}=-\dfrac{5}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



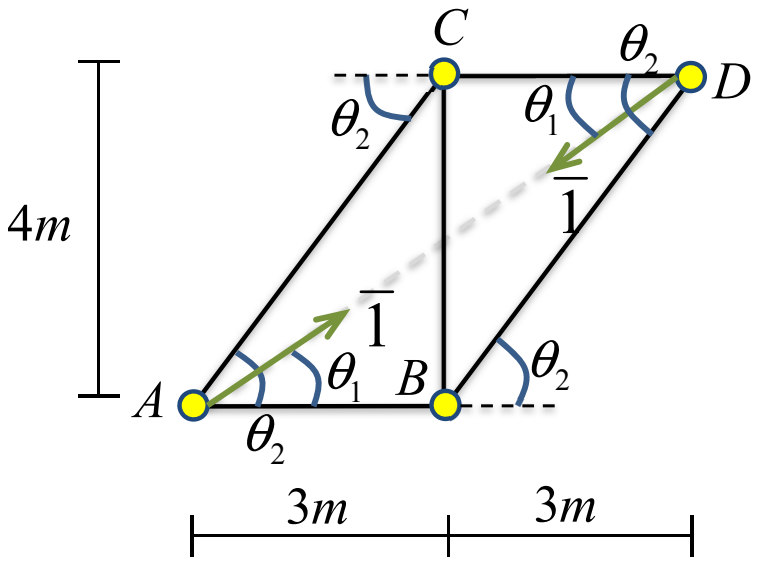
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{13}}+\bar{f}_{BD}(0.6)=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{f}_{BC}+\bar{f}_{BD}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}_{BD}=-\dfrac{5}{2\sqrt{13}} \\ \bar{f}_{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

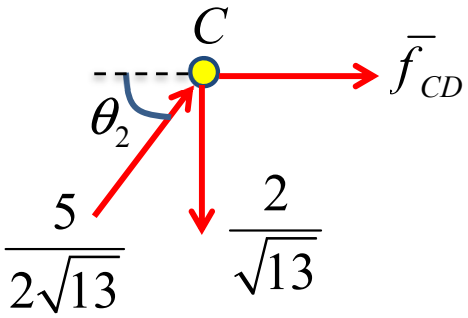


$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

پاسخ مثال 3-

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_{CD}+\frac{5}{2\sqrt{13}}(0.6)=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_{CD}=-\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 3-

عضو	$\ell_i\ (m)$	$\bar{f}_i$	$\Delta T_i\ (\circ c)$	$\bar{f}_i.(\ell_i \Delta T_i)$
AB	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	+10	$-\frac{45}{\sqrt{13}}$
AC	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BD	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BC	4	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	0	0
CD	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	–20	$+\frac{90}{\sqrt{13}}$
			$\sum$	$\frac{45}{\sqrt{13}}$

ETABS File Name: **05-Example-03.EDB**

$(3.1) \Rightarrow$

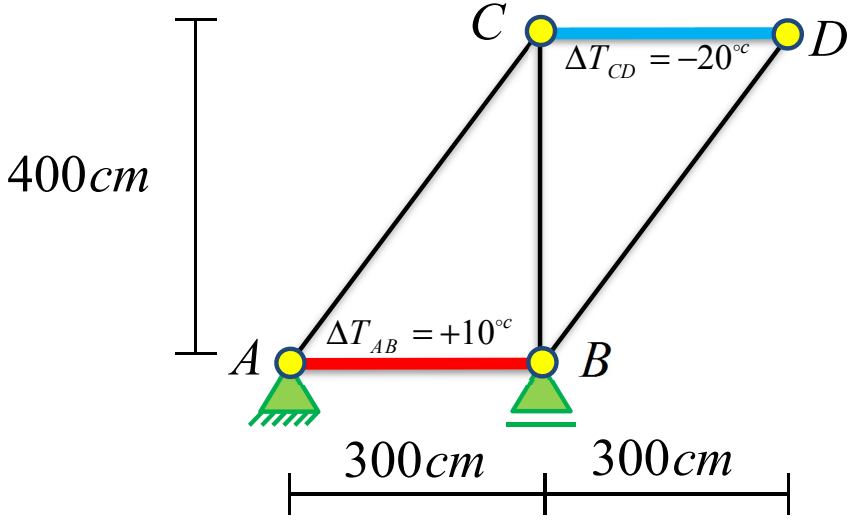
$$\Rightarrow \boxed{\Delta_{AD} = 1.2481\,(cm)}$$

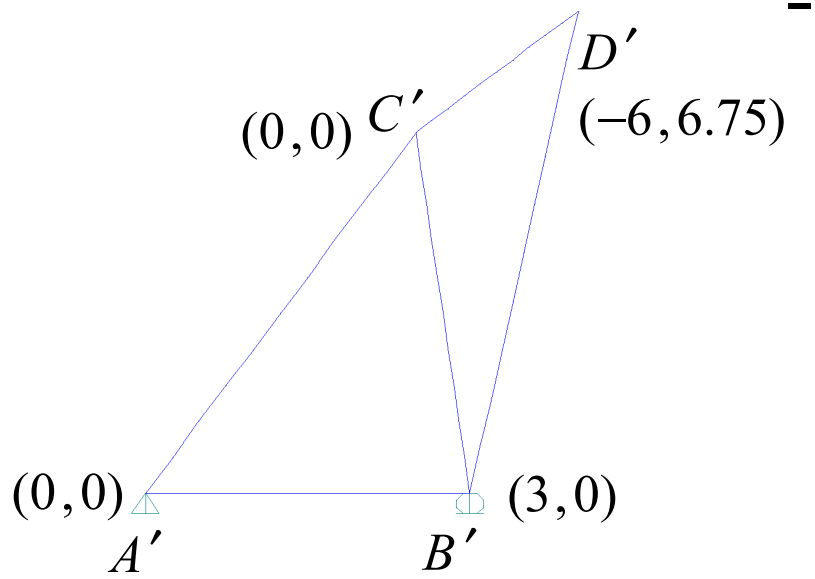
دو گره A و D به همدیگر نزدیک می‌شوند.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 3-





جابجایی گره‌ای برحسب سانتیمتر خروجی نرم‌افزار ETABS

$$\overrightarrow{AD} = (600-0)\vec{i} + (400-0)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AD} = 600\vec{i} + 400\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{A'D'} = [(600-6)-(0+0)]\vec{i} + [(400+6.75)-(0+0)]\vec{j} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A'D'} = 594\vec{i} + 406.75\vec{j}}$$

$$P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{A'D'}\bullet\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{(594\times600)+(406.75\times400)}{\sqrt{(600)^2+(400)^2}} \Rightarrow \boxed{P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}} = 719.8622\,cm}$$

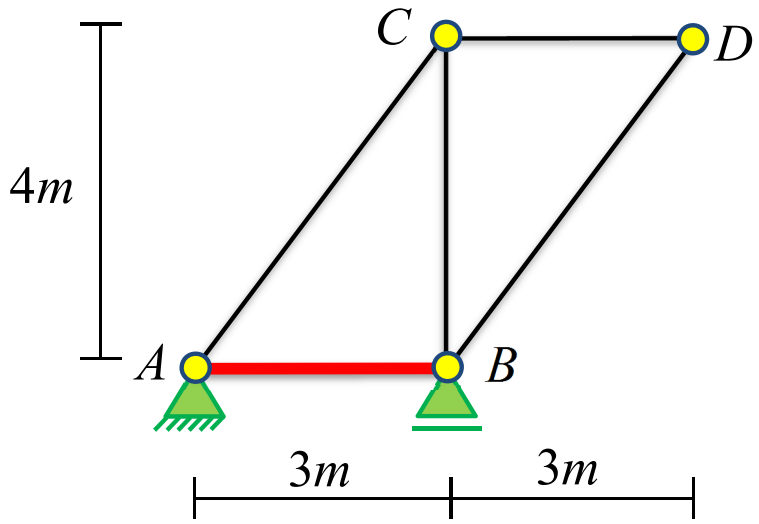
$$\Delta_{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| - P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}} = \sqrt{(600)^2+(400)^2} - 719.8622 \Rightarrow \boxed{\Delta_{AD} = 1.2481\,(cm)}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

مثال 4- در خرپای نشان داده شده عضو AB در کارخانه 5 cm کوتاهتر ساخته شده است. جابجایی نسبی دو گره A و D نسبت به هم را محاسبه نمایید. $\Delta_{AD} = ?$

$EA = 2\times10^4\ (ton)$

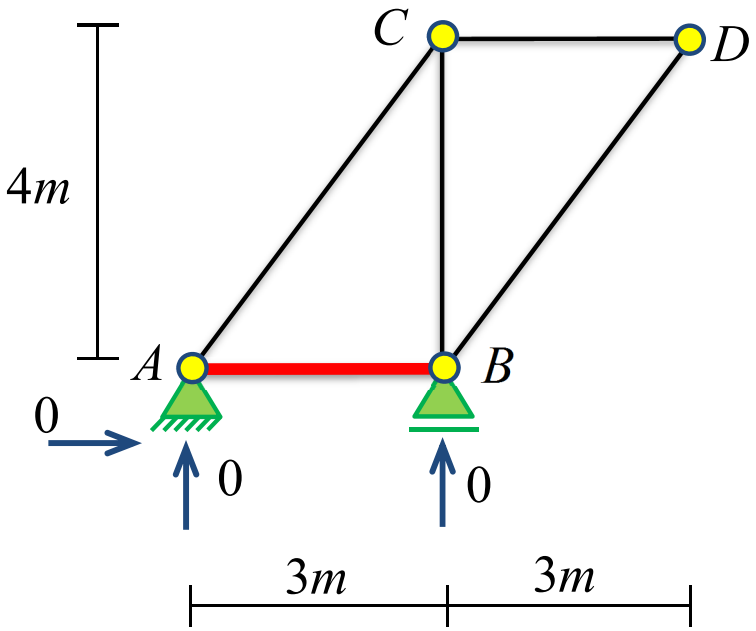


روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 4-

در این سازه چون بار واقعی خارجی وجود ندارد و سازه معین است؛ از این رو نیروی داخلی واقعی و بالتبع تغییر شکل داخلی واقعی ناشی از بار واقعی خارجی در این سازه ایجاد نمی‌شود و برابر با صفر است.

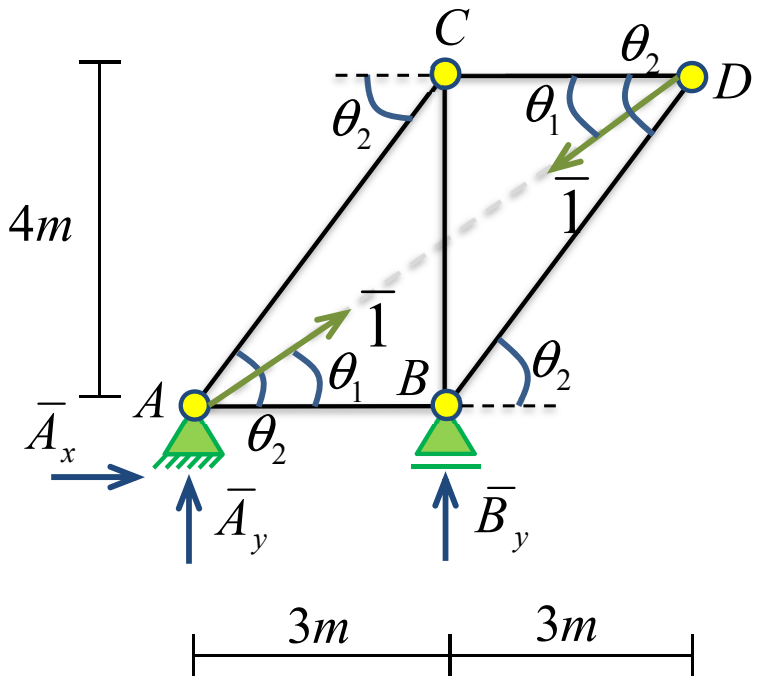


روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 4-

سپس در ادامه دو نیروی متمرکز مجازی مساوی (با مقدار واحد) و مختلف الجهت در راستای AD در گره‌های A و D اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

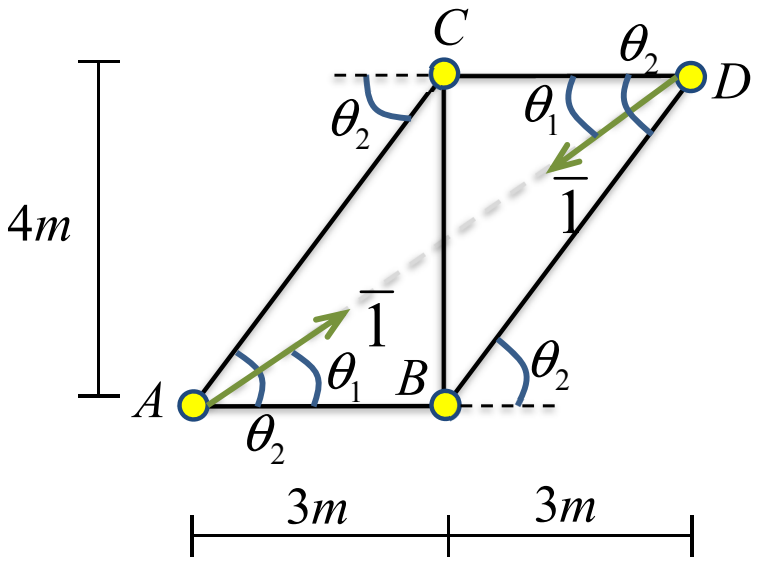
$$\bar{A}_x=\bar{B}_y=\bar{A}_y=0$$

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

نکته: در یک سیستم سازه‌ای تحت اثر دو نیروی داخلی مساوی، هم راستا و مختلف الجهت مقدار عکس العمل‌های تکیه‌گاهی برابر با صفر خواهد بود.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

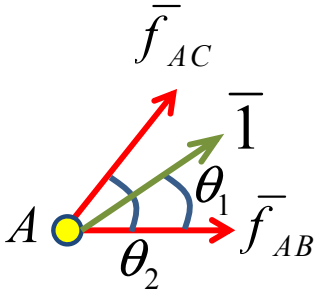


$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8\quad,\quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

پاسخ مثال 4-

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

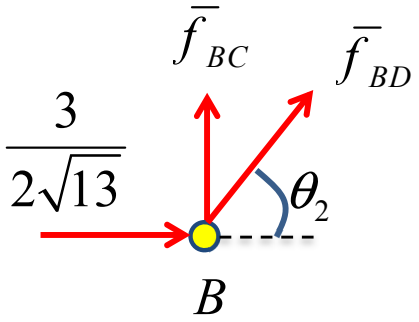


$$\sum F_x=0 \Rightarrow \bar{f}_{AB}+\bar{f}_{AC}(0.6)+1\times\frac{6}{\sqrt{52}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{f}_{AC}(0.8)+1\times\frac{4}{\sqrt{52}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar{f}_{AB}=-\dfrac{3}{2\sqrt{13}}\\ \bar{f}_{AC}=-\dfrac{5}{2\sqrt{13}}\end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



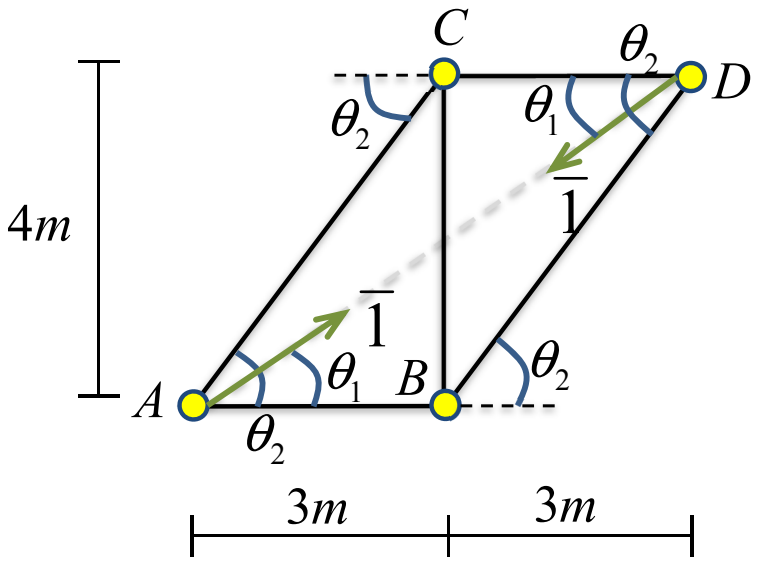
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{13}}+\bar{f}_{BD}(0.6)=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{f}_{BC}+\bar{f}_{BD}(0.8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar{f}_{BD}=-\dfrac{5}{2\sqrt{13}}\\ \bar{f}_{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

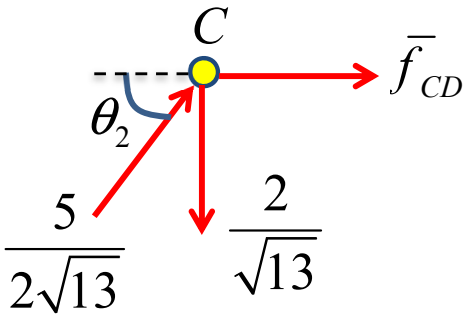


$$\sin(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{3}{5}=0.6$$

پاسخ مثال 4-

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_{CD}+\frac{5}{2\sqrt{13}}(0.6)=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_{CD}=-\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 4-

عضو	$\bar{f}_i$	$\Delta\ell_{E_i}\ (m)$	$\bar{f}_i.\Delta\ell_{E_i}$
AB	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	-0.05	$\frac{0.075}{\sqrt{13}}$
AC	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BD	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BC	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	0	0
CD	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	0	0
		$\sum$	$\frac{0.075}{\sqrt{13}}$

$(4.1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\Delta_{AD} = 2.0801\,(cm)}$

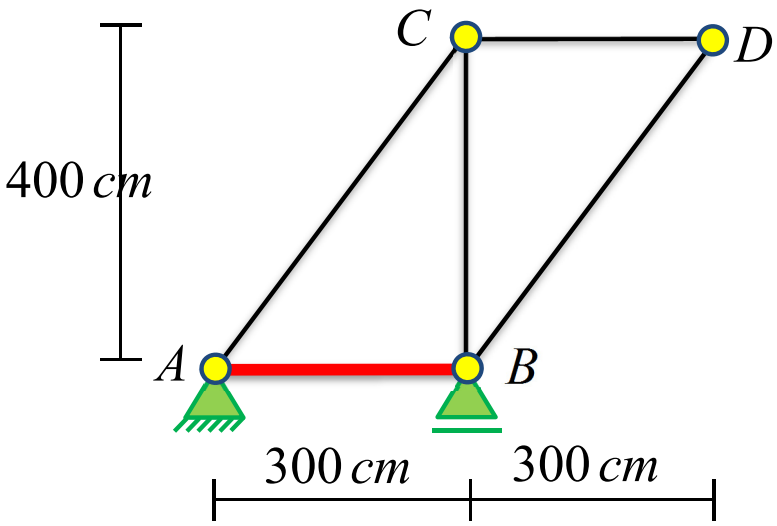
دو گره A و D به همدیگر نزدیک می‌شوند.

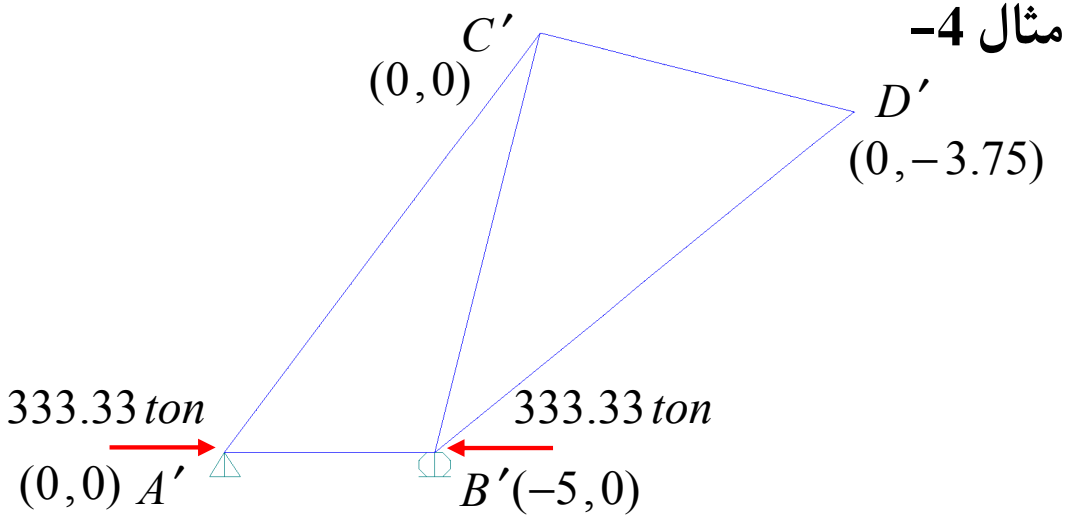
ETABS File Name: **05-Example-04.EDB**

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 4-





جابجایی گره‌ای برحسب سانتیمتر خروجی نرم‌افزار ETABS

$$F_{AB}=\frac{EA}{\ell_{AB}}\Delta\ell_{E_{AB}}=\frac{2\times10^4}{3}(-0.05)\Rightarrow \boxed{F_{AB}=-333.33\,(ton)}$$

نیروی وارد شده در گره های A و B در نرم‌افزار ETABS جهت مدل سازی نقص عضو

$$\overrightarrow{AD}=(600-0)\vec{i}+(400-0)\vec{j}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AD}=600\vec{i}+400\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{A'D'}=[(600+0)-(0+0)]\vec{i}+[(400-3.75)-(0+0)]\vec{j}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A'D'}=600\vec{i}+396.25\vec{j}}$$

$$P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}}=\frac{\overrightarrow{A'D'}\bullet\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{(600\times600)+(396.25\times400)}{\sqrt{(600)^2+(400)^2}}\Rightarrow \boxed{P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}}=719.0301\,cm}$$

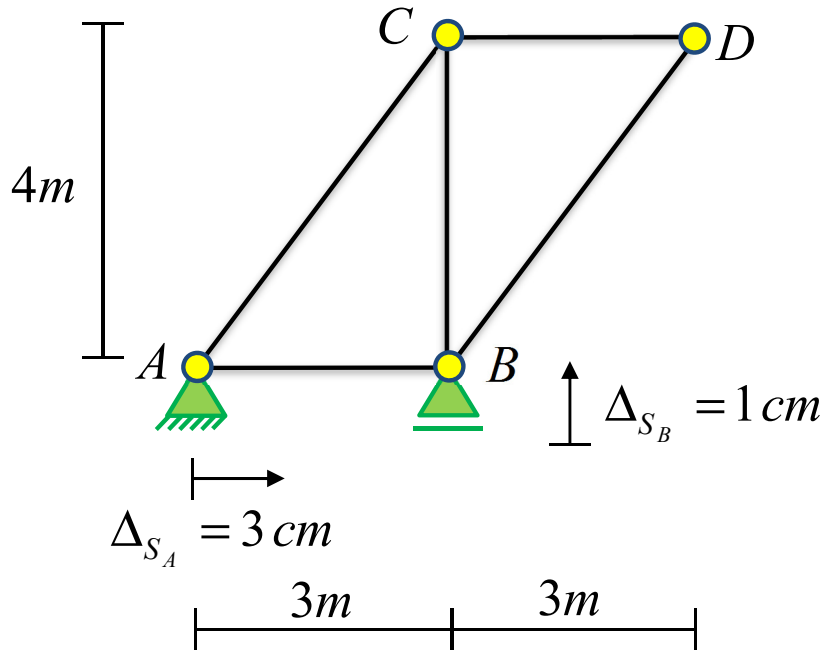
$$\Delta_{AD}=\left|\overrightarrow{AD}\right|-P_{\overrightarrow{A'D'}\perp\overrightarrow{AD}}=\sqrt{(600)^2+(400)^2}-719.0301\Rightarrow \boxed{\Delta_{AD}=2.0801\,(cm)}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

مثال 5- در خرپای نشان داده شده تکیه‌گاه A در راستای افق به مقدار 3cm به سمت راست و تکیه‌گاه B در راستای قائم به اندازه 1cm به سمت بالا حرکت داشته است جابجایی افقی گره C را محاسبه نمایید. $\Delta h_C = ?$

$EA = 2\times10^4\ (ton)$

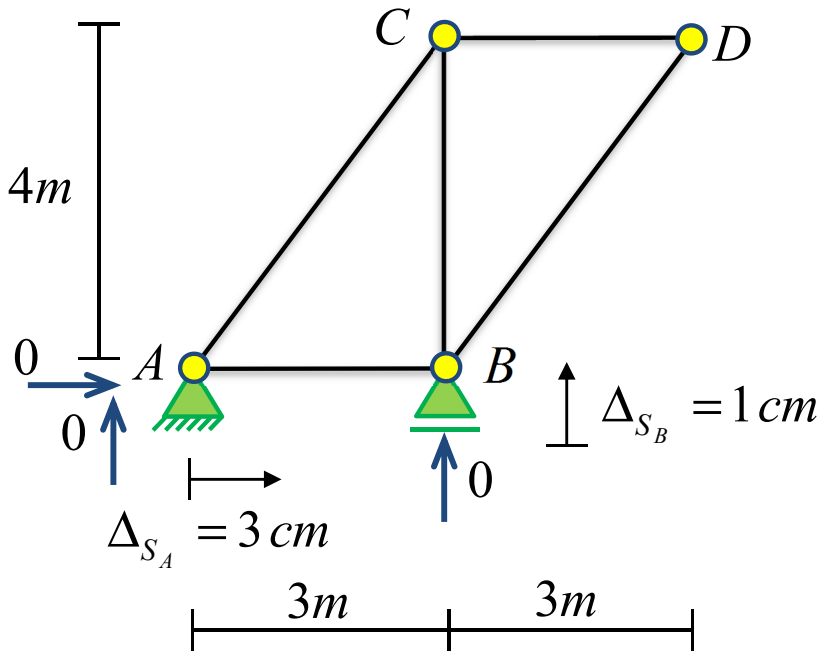


روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

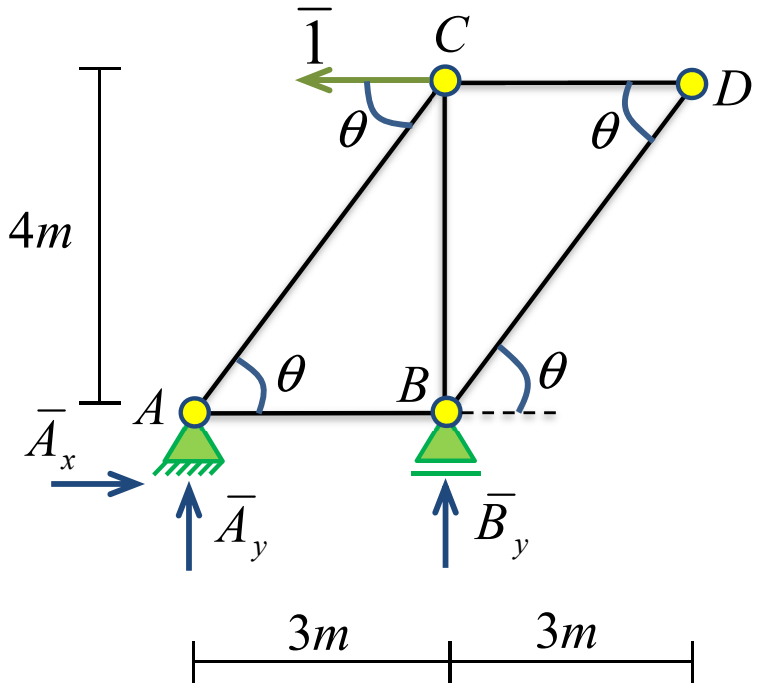
پاسخ مثال 5-

در این سازه چون بار واقعی خارجی وجود ندارد و سازه معین است؛ از این رو نیروی داخلی واقعی و بالتبع تغییر شکل داخلی واقعی ناشی از بار واقعی خارجی در این سازه ایجاد نمی‌شود و برابر با صفر است.



روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا



پاسخ مثال 5-

سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی (با مقدار واحد) در گره C اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta)=\frac{4}{5}=0.8 \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{3}{5}=0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow \bar{A}_x-1=0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x=1}$$

$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow \bar{B}_y\times 3+1\times 4=0 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_y=-\frac{4}{3}} \qquad (5.1)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \bar{A}_y+\bar{B}_y=0 \overset{(5.1)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y=\frac{4}{3}}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال 5-

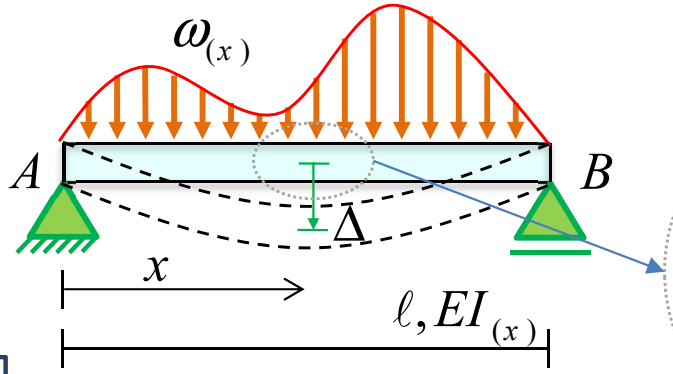
جابجایی در خلاف جهت نیروی واحد مجازی ایجاد می‌شود.

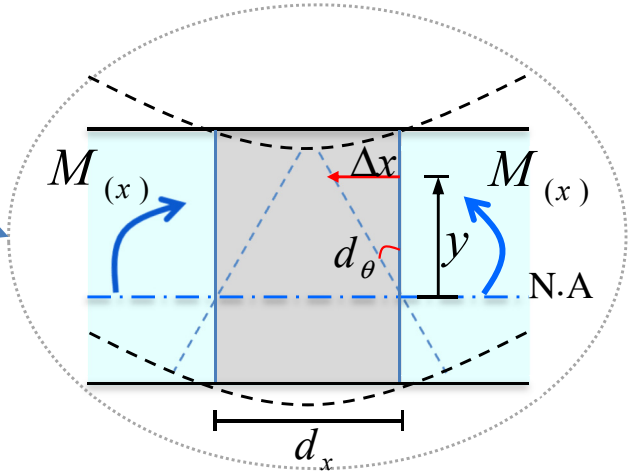
$$\Rightarrow \boxed{\Delta h_C = -1.67\,(cm)}$$

ETABS File Name: **05-Example-05.EDB**

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای خمشی در اثر بارگذاری





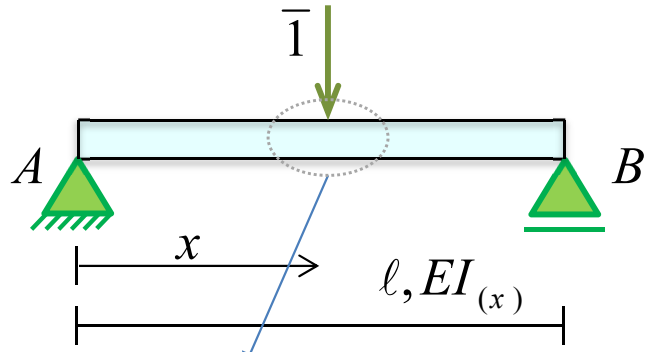
$$(1) \Rightarrow \boxed{\bar{1}.\Delta + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \int \bar{m}_{(x)} . d_\theta} \quad (7)$$

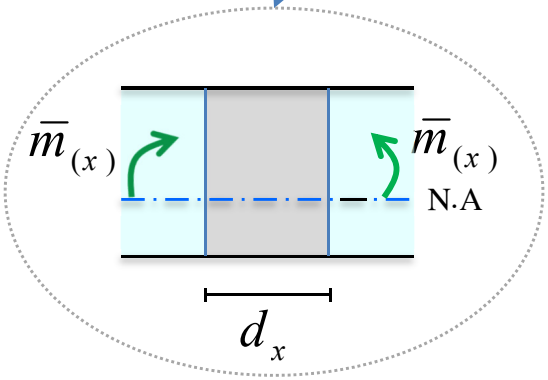
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \overset{\sigma_x = -\frac{M_{(x)} y}{I_{(x)}}}{\Rightarrow} \boxed{\varepsilon_x = -\frac{M_{(x)} y}{EI_{(x)}}} \quad (8)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{d_x} \Rightarrow |\Delta x| = |\varepsilon_x| \cdot d_x \overset{(8)}{\Rightarrow} \boxed{|\Delta x| = \frac{M_{(x)} y}{EI_{(x)}} \cdot d_x} \quad (9)$$

$$\tan(d_\theta) \approx d_\theta = \frac{|\Delta x|}{y} \overset{(9)}{\Rightarrow} \boxed{d_\theta = \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \cdot d_x} \quad (10)$$

$$(10) \rightarrow (7) \Rightarrow \boxed{\bar{1}.\Delta + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \int_0^\ell \frac{\bar{m}_{(x)} M_{(x)}}{EI_{(x)}} \cdot d_x} \quad (11)$$





روش کار مجازی (Virtual Work Method)

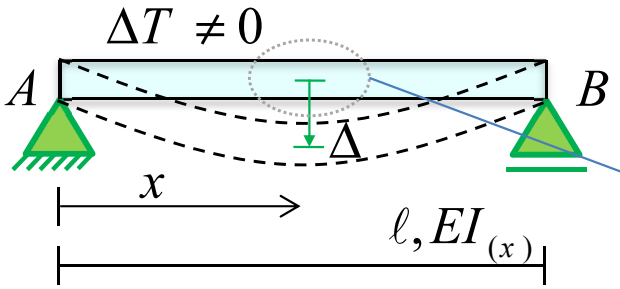
روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای خمشی در اثر حرارت

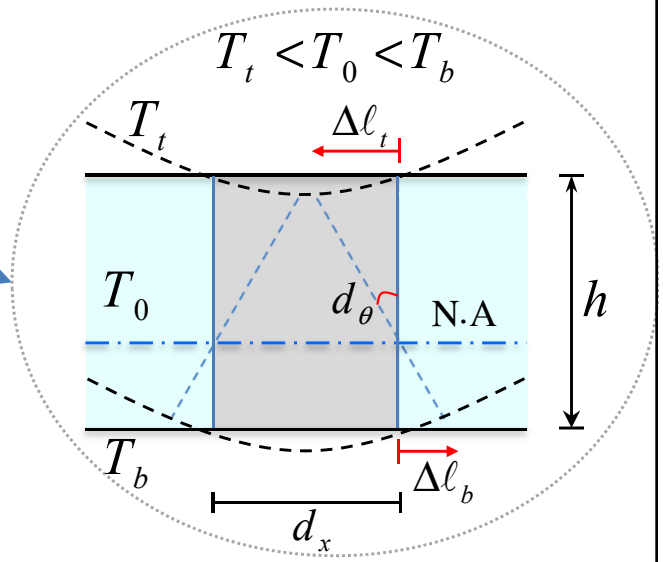
T_t: دمای بخش بالایی المان

T_0: دمای زمان ساخت المان

T_b: دمای بخش پایینی المان

h: ارتفاع سطح مقطع





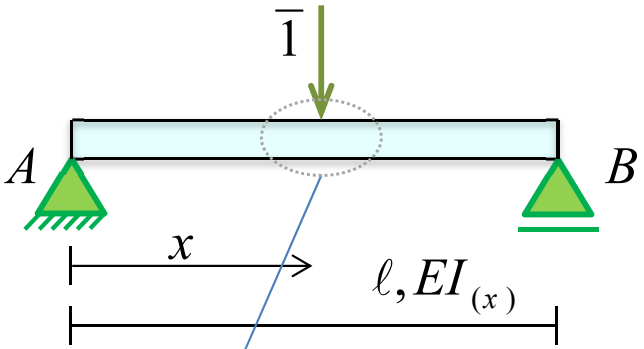
تغییر طول تار پایین (افزایش طول) :
$$\Delta\ell_b = \alpha \cdot d_x \cdot (T_b - T_0) \quad (12)$$

تغییر طول تار بالا (کاهش طول) :
$$\Delta\ell_t = \alpha \cdot d_x \cdot (T_t - T_0) \quad (13)$$

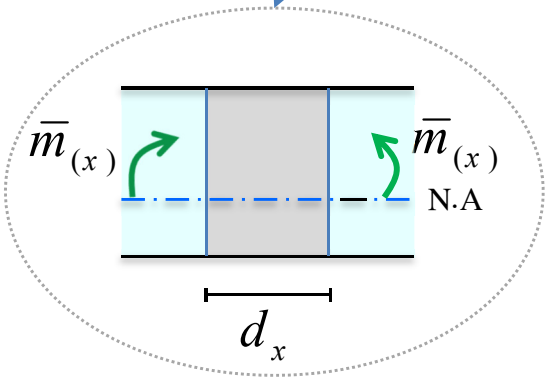
تغییر طول نسبی تارهای بالا و پایین :
$$\Delta\ell = \Delta\ell_b - \Delta\ell_t \xrightarrow{(12)\&(13)} \Rightarrow$$

$$\Delta\ell = \alpha \cdot d_x \cdot (T_b - T_0) - \alpha \cdot d_x \cdot (T_t - T_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\ell = \alpha \cdot d_x \cdot (T_b - T_t)} \quad (14)$$



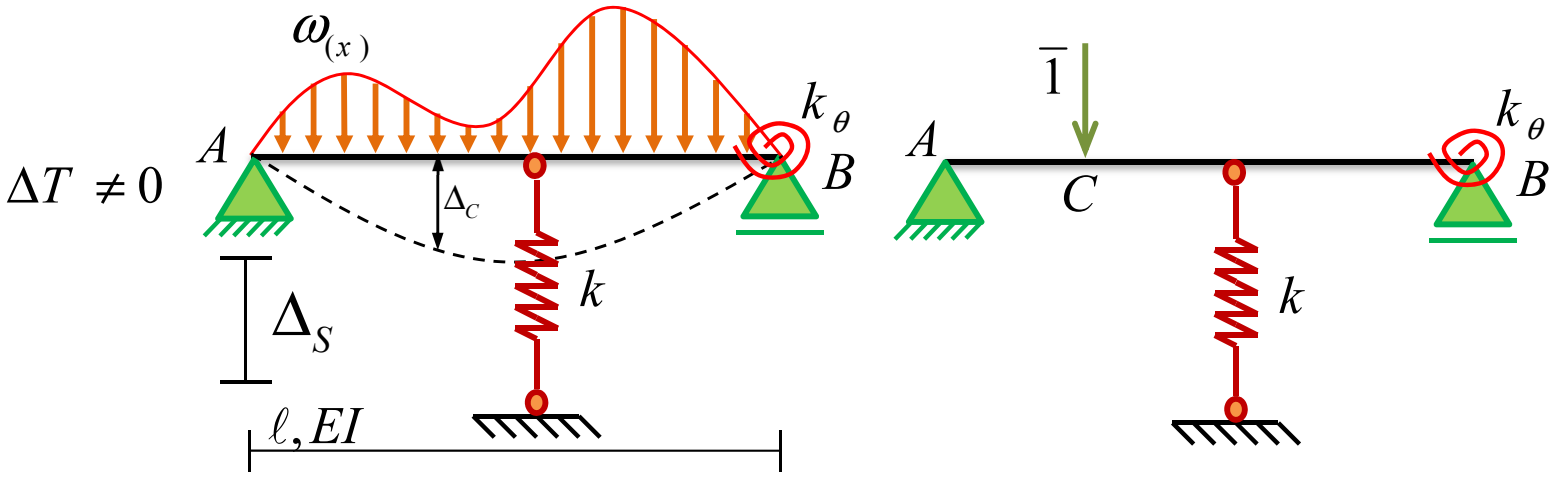
$$\tan(d_\theta) \approx d_\theta = \frac{\Delta\ell}{h} \xrightarrow{(14)} \Rightarrow \boxed{d_\theta = \frac{\alpha d_x (T_b - T_t)}{h}} \quad (15)$$



$$(15) \rightarrow (7) \Rightarrow \boxed{\bar{1}.\Delta + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \int_0^\ell \frac{\bar{m}_{(x)} \alpha (T_b - T_t)}{h} \cdot d_x} \quad (16)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

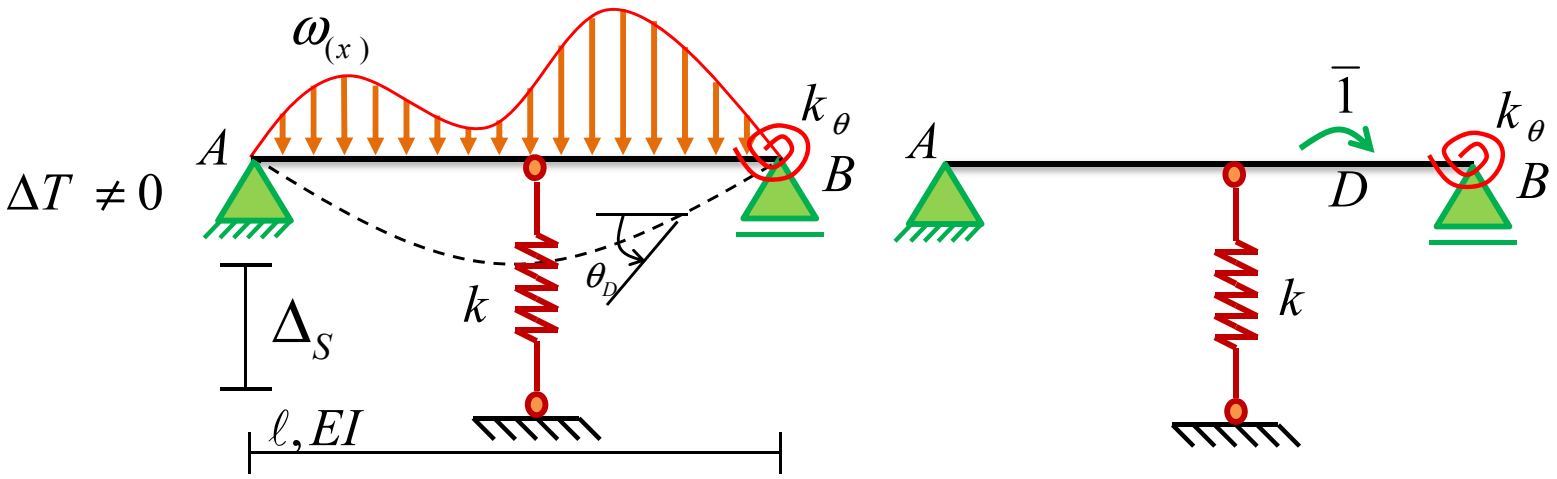


$$(1) \Rightarrow \begin{aligned} & \bar{1}.\Delta_C + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} \\ & = \int_0^\ell \frac{\bar{p}_{(x)} P_{(x)}}{EA_{(x)}} \cdot d_x + \int_0^\ell \bar{m}_{(x)} \left(\frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} + \frac{\alpha (T_b - T_t)}{h} \right) \cdot d_x \\ & + k \int_0^\ell \frac{\bar{v}_{(x)} V_{(x)}}{GA_{(x)}} \cdot d_x + \int_0^\ell \frac{\bar{t}_{(x)} T_{(x)}}{GJ_{(x)}} \cdot d_x + \sum \bar{f}_s \frac{F_s}{k} + \sum \bar{m}_s \frac{M_s}{k_\theta} \end{aligned} \qquad (17)$$

نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی



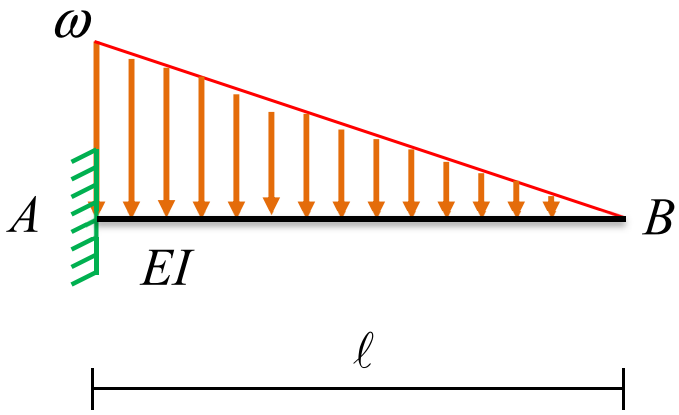
$$(1) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\bar{1}.\theta_D + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} \\ &= \int_0^\ell \frac{\bar{p}_{(x)} P_{(x)}}{EA_{(x)}} \cdot d_x + \int_0^\ell \bar{m}_{(x)} \left(\frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} + \frac{\alpha (T_b - T_t)}{h} \right) \cdot d_x \\ &+ k \int_0^\ell \frac{\bar{v}_{(x)} V_{(x)}}{GA_{(x)}} \cdot d_x + \int_0^\ell \frac{\bar{t}_{(x)} T_{(x)}}{GJ_{(x)}} \cdot d_x + \sum \bar{f}_s \frac{F_s}{k} + \sum \bar{m}_s \frac{M_s}{k_\theta} \end{aligned}} \quad (18)$$

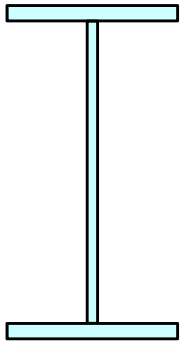
نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

مثال 6- در تیر فولادی نشان داده شده مقدار تغییر شکل و دوران تحت اثر بار وارده در گره B را محاسبه نمایید.





Cross Section

$$\omega = 4.5\ ton/m \qquad \ell = 3\ m \qquad k = 1$$

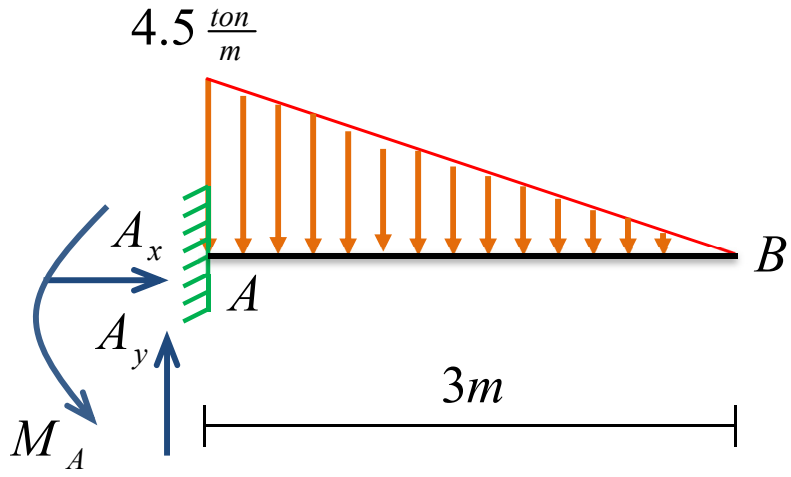
$$Steel: \begin{cases} E = 2\times10^{6}\ \dfrac{kg}{cm^{2}} \\ G = 8\times10^{5}\ \dfrac{kg}{cm^{2}} \end{cases} \qquad IPE\,160: \begin{cases} A_{web} = 8\ cm^{2} \\ I = 869\ cm^{4} \end{cases}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 6-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

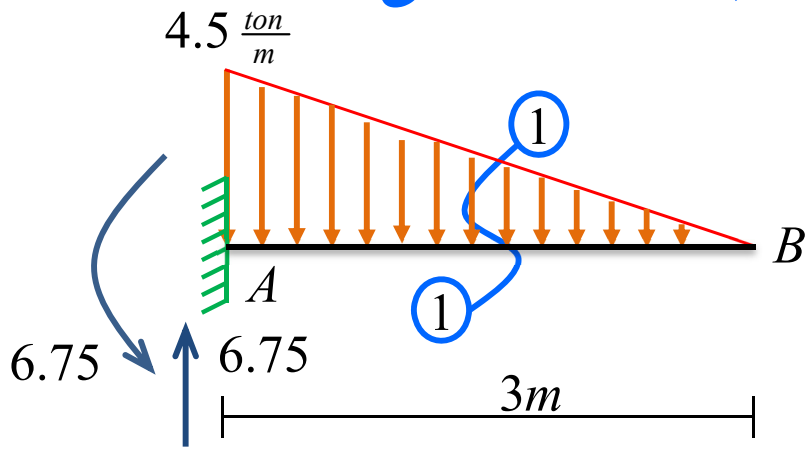
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A - \left(\frac{1}{2}\times 3 \times 4.5\right)\times\left(\frac{1}{3}\times 3\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 6.75\, ton.m}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - \frac{1}{2}\times 3 \times 4.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = 6.75\, ton}$$

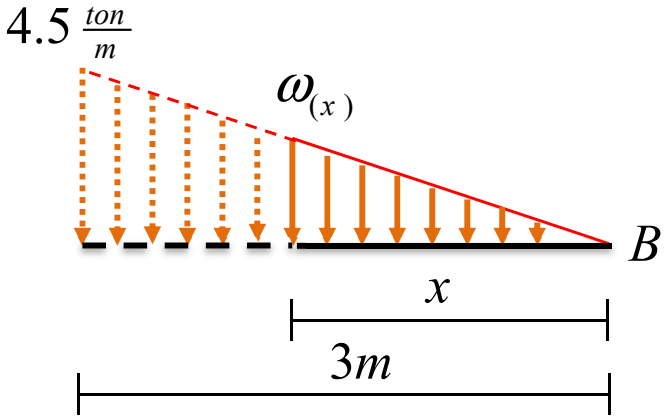
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

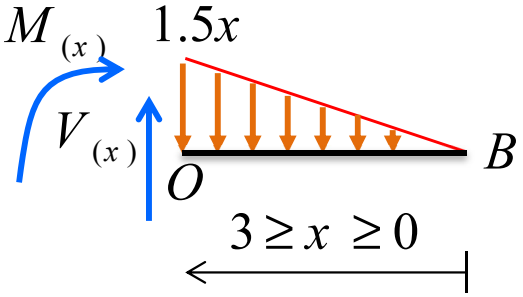
روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 6-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:





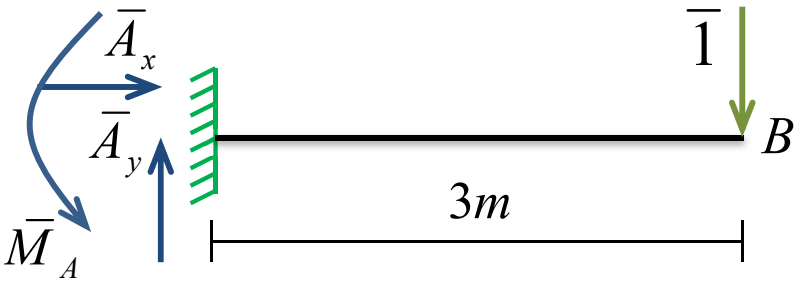
$$M_{(x)} = -0.25x^{3} \quad (6.1)$$

$$V_{(x)} = 0.75x^{2} \quad (6.2)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 6-



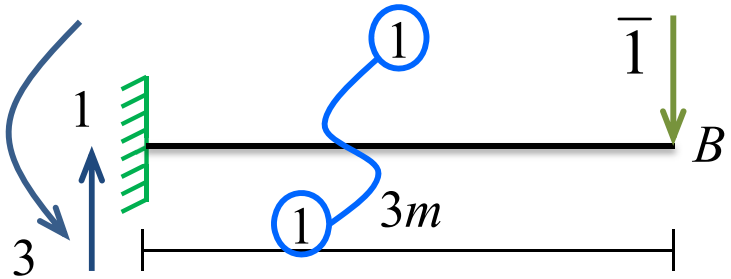
سپس در ادامه برای محاسبه خیز در گره B یک نیروی متمرکز مجازی واحد در گره B اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x = 0}$$

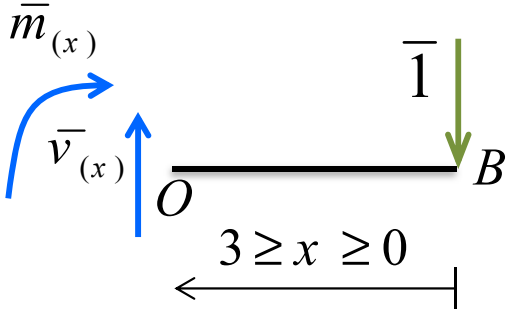
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_y = 1}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A - 1\times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{M}_A = 3}$$



نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} + 1\times x = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = -x} \quad (6.3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{v}_{(x)} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{v}_{(x)} = 1} \quad (6.4)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 6-

$$= \frac{0.05x^{5}}{EI}\Big]_0^3 + k\,\frac{0.25x^{3}}{GA}\Big]_0^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_B = \frac{12.15}{EI} + k\,\frac{6.75}{GA}} \quad (6.5)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (6.5) خواهیم داشت:

$$(6.5) \Rightarrow \Delta_B = \frac{12.15}{EI} + k\,\frac{6.75}{GA}$$

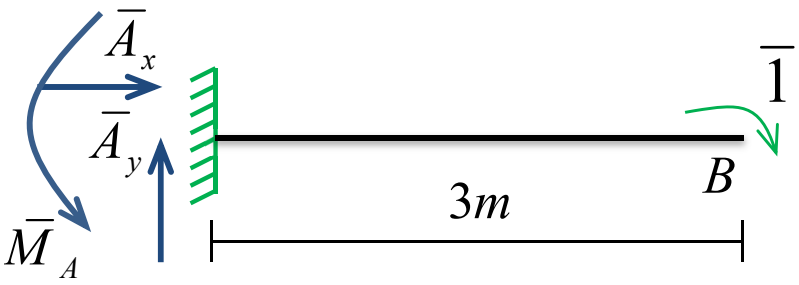
$$= \frac{12.15}{\left(2\times10^{6}\times10\,\frac{ton}{m^{2}}\right)\left(869\times10^{-8}\,m^{4}\right)} + (1)\frac{6.75}{\left(8\times10^{5}\times10\,\frac{ton}{m^{2}}\right)\left(8\times10^{-4}\,m^{2}\right)} = (6.99+0.1055)\times10^{-2}(m)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_B = 7.096\,cm}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 6-

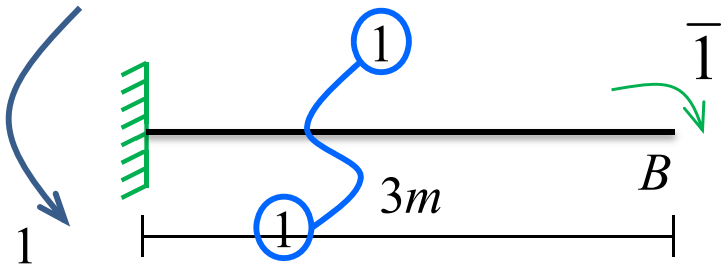


سپس در ادامه برای محاسبه دوران در گره B یک لنگر متمرکز مجازی واحد در گره B اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر لنگر واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

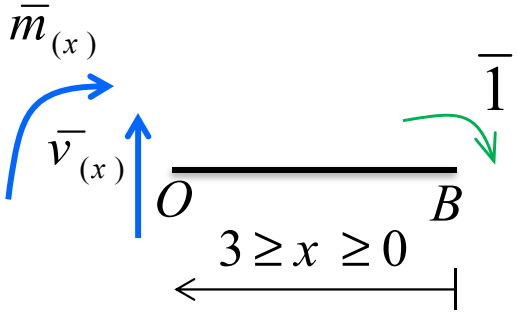
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_y = 0} \qquad \sum M_{/A} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{M}_A = 1}$$



نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = -1} \qquad (6.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{v}_{(x)} = 0} \qquad (6.7)$$

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 6-

$$= \frac{0.0625x^4}{EI}\Bigg]_0^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = \frac{5.0625}{EI}} \quad (6.8)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (6.8) خواهیم داشت:

$$(6.8) \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{5.0625}{EI} = \frac{5.0625}{\left(2\times10^6\times10\frac{ton}{m^2}\right)\left(869\times10^{-8}m^4\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = 0.0291\,(rad)}$$

ETABS File Name: **05-Example-06.EDB**

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

مثال 7- در قاب نشان داده شده عضو CD کابل است. دمای بالا و پایین تیر BC به ترتیب $20^{\circ c}$ و $-10^{\circ c}$ می‌باشد. تکیه‌گاه A نیز در راستای عمود بر عضو AB به اندازه 5 سانتیمتر نشست دارد. ارتفاع سطح مقطع تیر BC 20 سانتیمتر است. تغییرمکان افقی گره C را محاسبه نمایید.

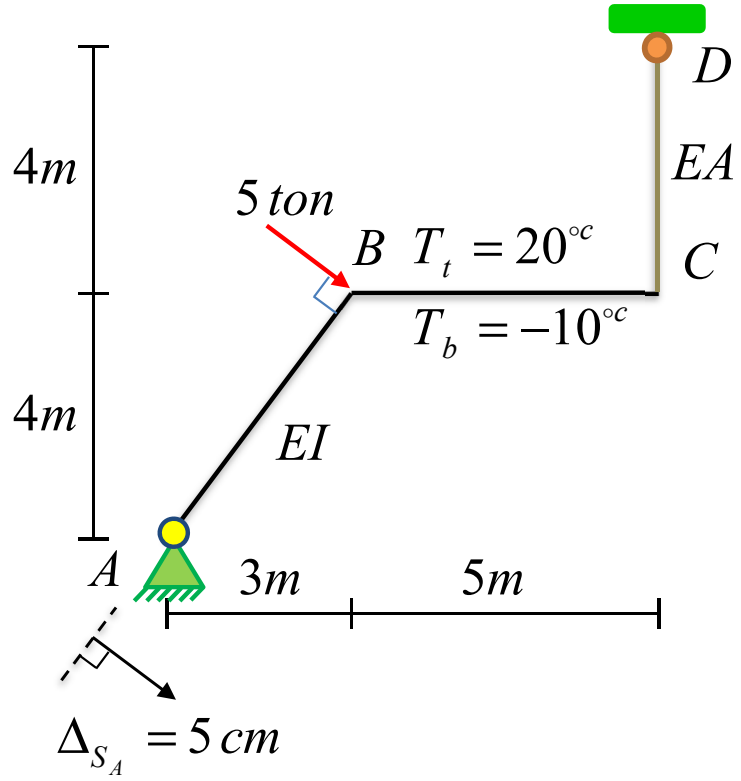
$$E = 2\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^{2}}$$

$$I = 1940\ cm^{4}$$

$$A = 5\ cm^{2}$$

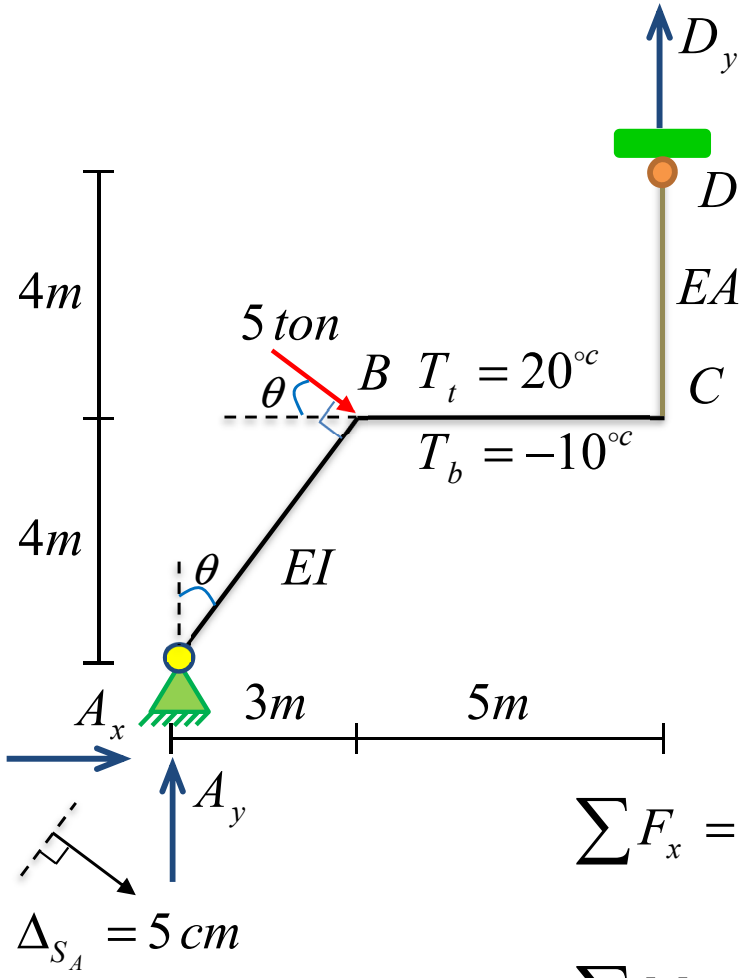
$$h_{BC} = 20cm$$

$$\alpha = 1\times10^{-4}\ \frac{1}{^{\circ}c}$$



روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی



پاسخ مثال 7-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x + 5\times\frac{4}{5} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_x = -4\,ton}$$

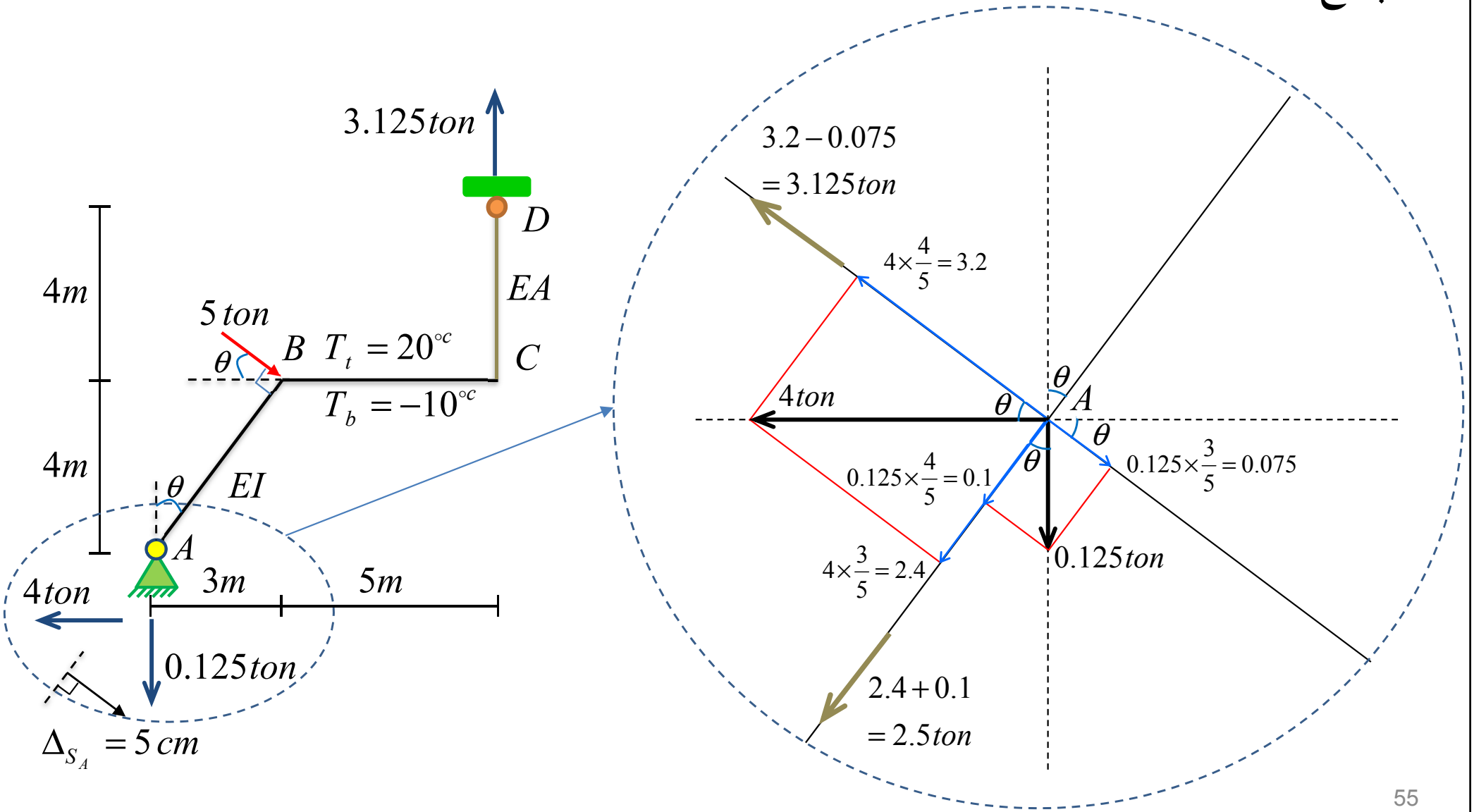
$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; D_y \times 8 - 5\times 5 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{D_y = 3.125\,ton} \qquad (7.1)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y + D_y - 5\times\frac{3}{5} = 0 \;\overset{(7.1)}{\Rightarrow}\; \boxed{A_y = -0.125\,ton}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

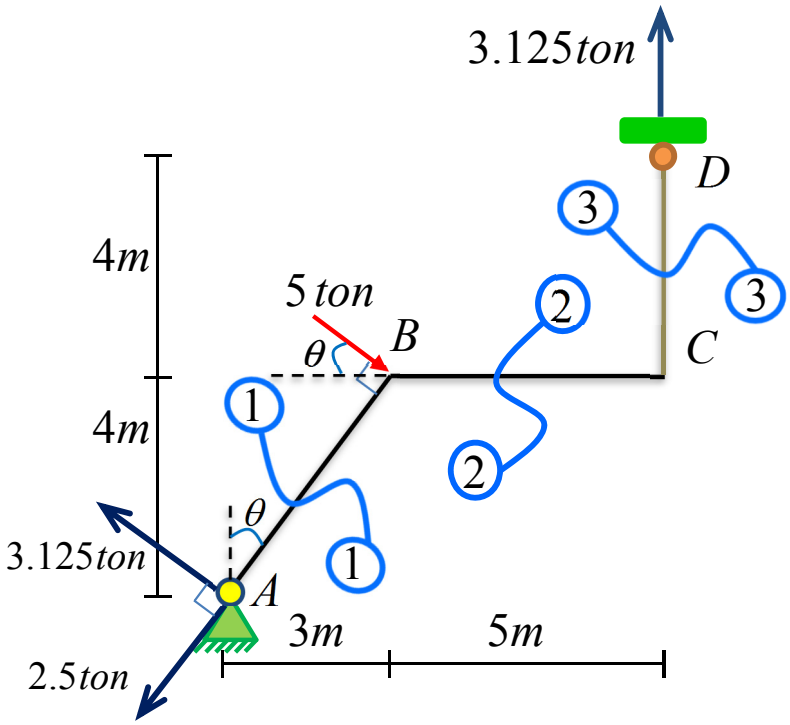
پاسخ مثال 7-

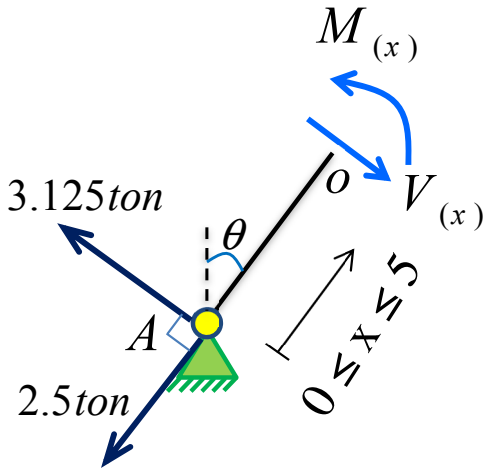


روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 7-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

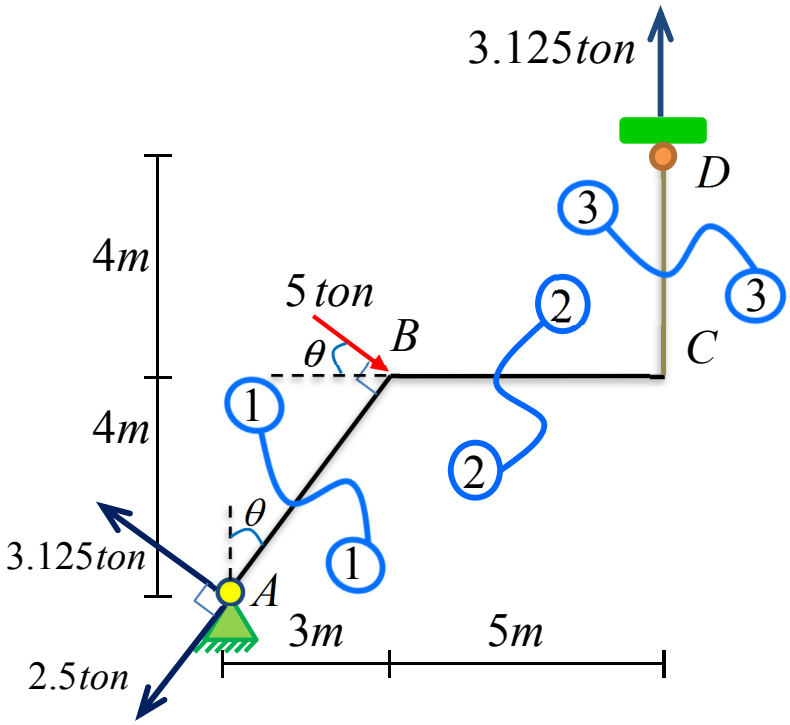
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} - 3.125x = 0$$

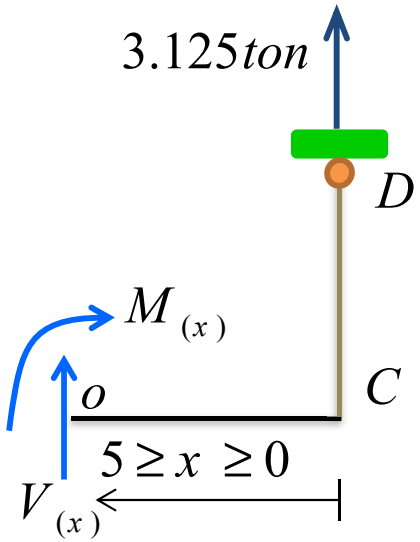
$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 3.125x} \quad (7.2)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 7-





با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:

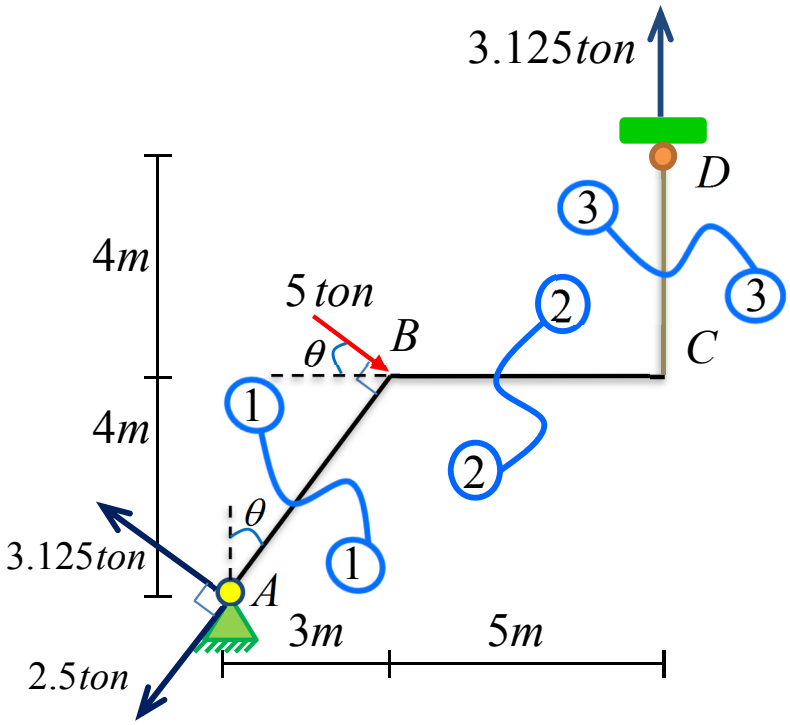
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} + 3.125x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 3.125x} \quad (7.3)$$

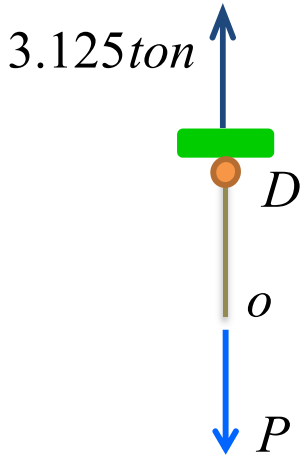
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 7-



با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع 3-3 خواهیم داشت:



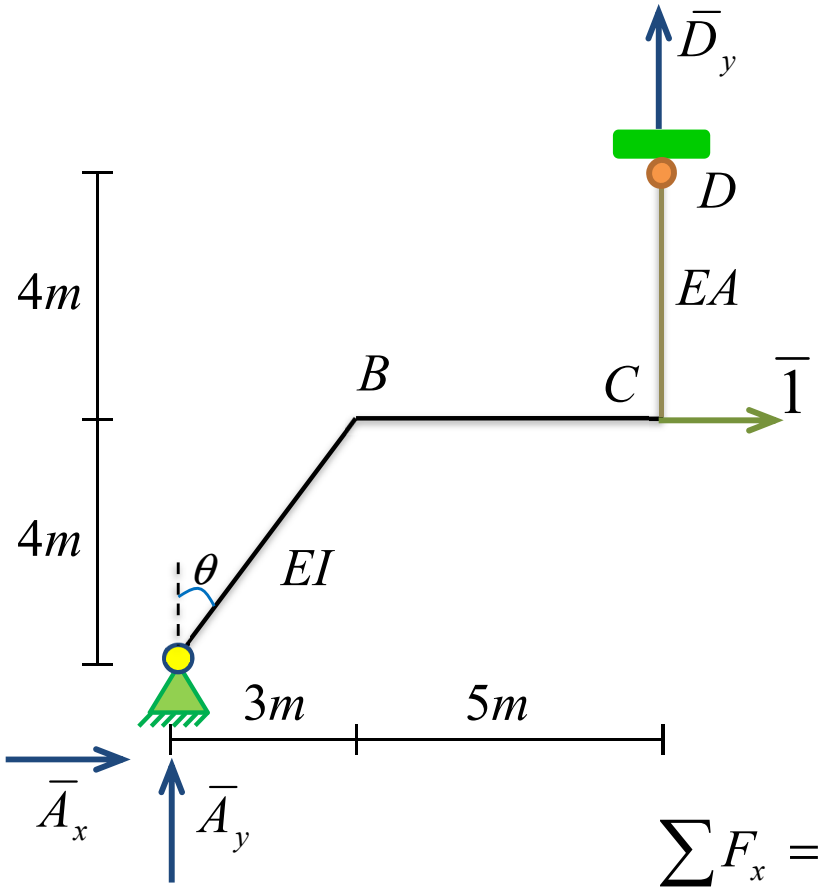
نیروی محوری کابل

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -P + 3.125 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = 3.125ton} \quad (7.4)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی



پاسخ مثال 7-

سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی با مقدار واحد در گره C اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x=0 \;\Rightarrow\; \bar{A}_x+1=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{A}_x=-1}$$

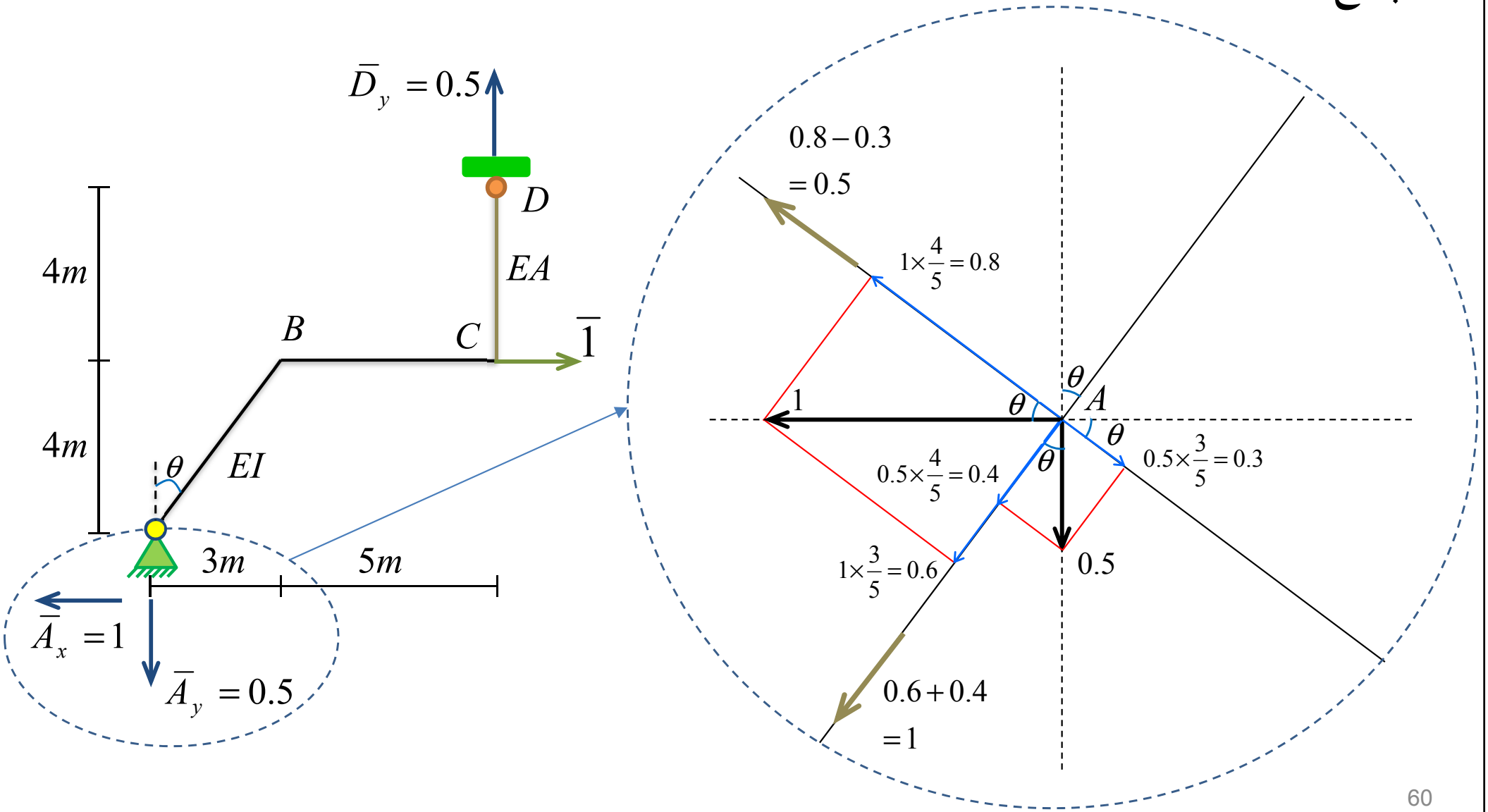
$$\sum M_A=0 \;\Rightarrow\; \bar{D}_y\times 8-1\times 4=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{D}_y=0.5} \quad (7.5)$$

$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; \bar{A}_y+\bar{D}_y=0 \overset{(7.5)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y=-0.5}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

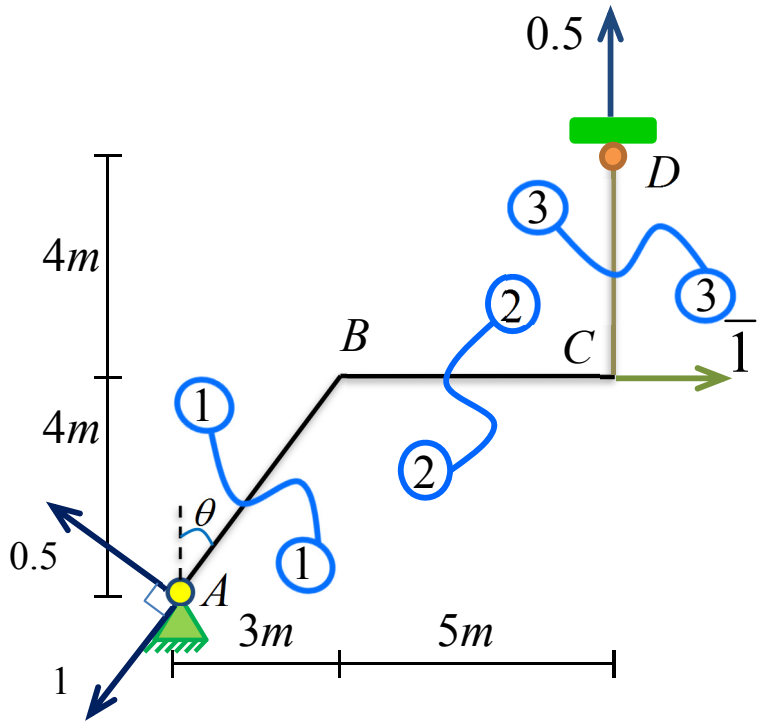
پاسخ مثال 7-

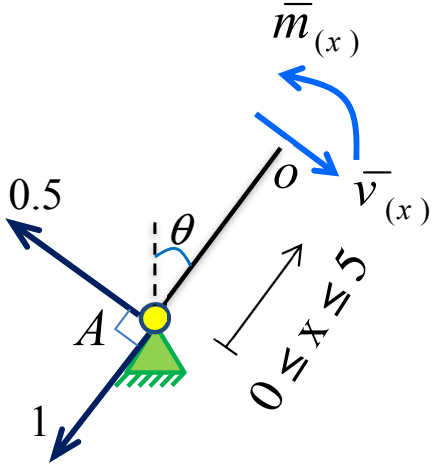


روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 7-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

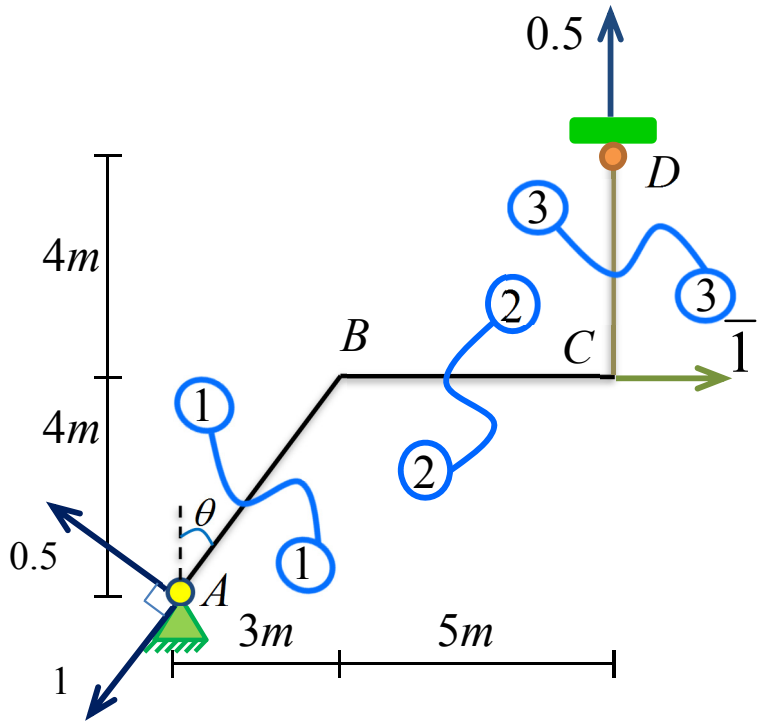
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{m}_{(x)} - 0.5x = 0$$

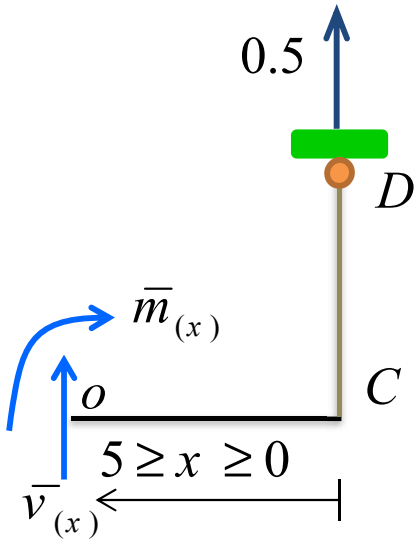
$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0.5x} \quad (7.6)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 7-





با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:

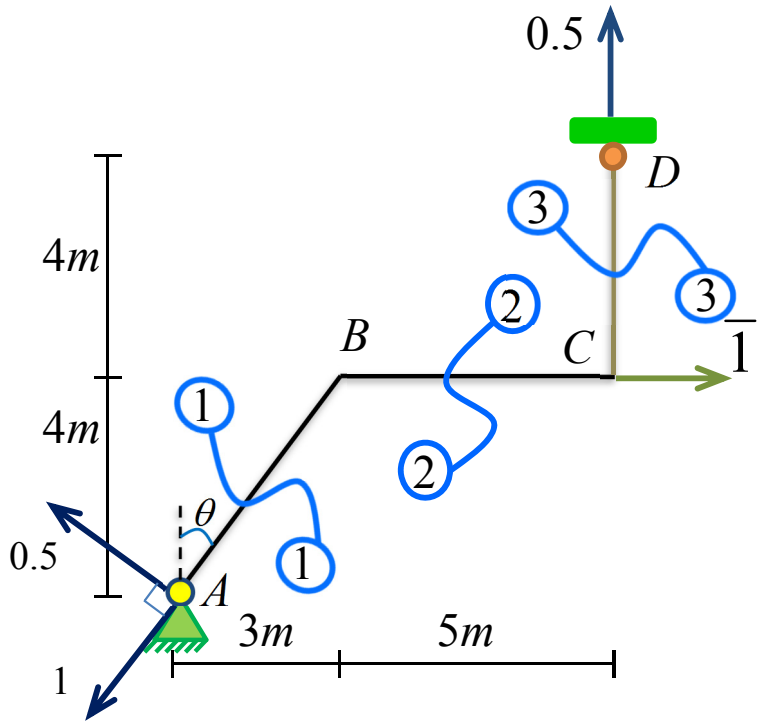
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -\bar{m}_{(x)} + 0.5x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0.5x} \quad (7.7)$$

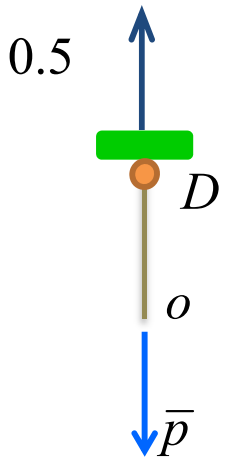
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 7-



با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع 3-3 خواهیم داشت:



نیروی محوری کابل

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\bar{p} + 0.5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{p} = 0.5} \quad (7.8)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال 7-

$$\Rightarrow \quad \Delta_{h_C} + (-0.5)(0.05) = \frac{6.25}{EA} + \left.\frac{1.5625x^{3}}{3EI}\right]_0^5 + \left.\frac{1.5625x^{3}}{3EI}\right]_0^5 - \left.\left(37.5\times10^{-4}\right)x^{2}\right]_0^5$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{h_C} = \frac{6.25}{EA} + \frac{390.625}{3EI} - 9.365\times10^{-2} + 2.5\times10^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{h_C} = \frac{6.25}{\left(2\times10^{6}\times10\frac{ton}{m^{2}}\right)\left(5\times10^{-4}m^{4}\right)} + \frac{390.625}{3\left(2\times10^{6}\times10\frac{ton}{m^{2}}\right)\left(1940\times10^{-8}m^{4}\right)} - 9.365\times10^{-2} + 2.5\times10^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{h_C} = (0.0625 + 33.5588 - 9.365 + 2.5)\times10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{h_C} = 26.7563\times10^{-2}\,m}$$

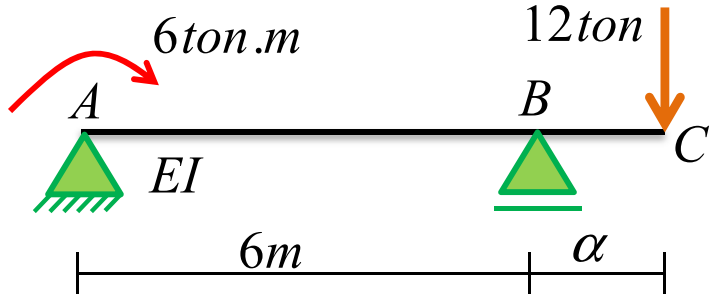
محوری (کابل) خمشی حرارتی نشست تکیه‌گاهی

ETABS File Name: **05-Example-07.EDB**

(توجه: در مدل ETABS اثر حرارت مدل نشده است)

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

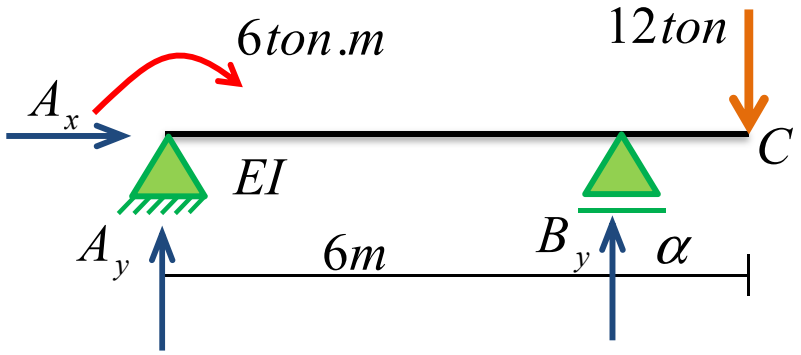
مثال 8- در تیر نشان داده شده مقدار α را به گونه‌ای تعیین کنید که شیب در A صفر شود.



روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 8-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

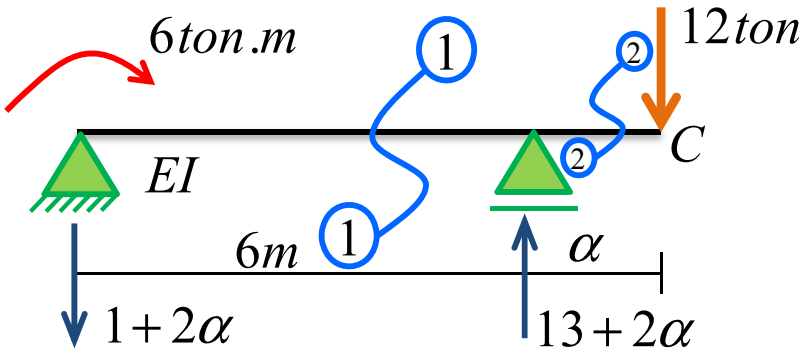
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \times 6 - 12 \times (6+\alpha) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = 13 + 2\alpha} \quad (8.1)$$

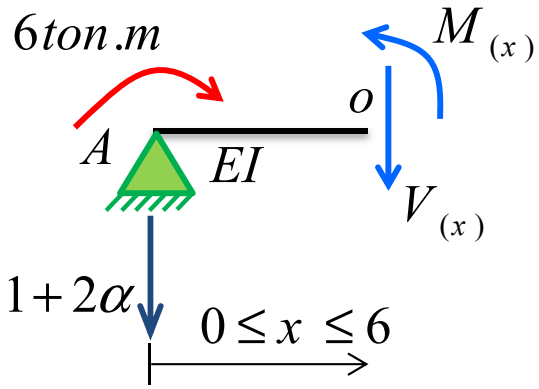
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y - 12 = 0 \quad \overset{(8.1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{A_y = -1 - 2\alpha}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 8-



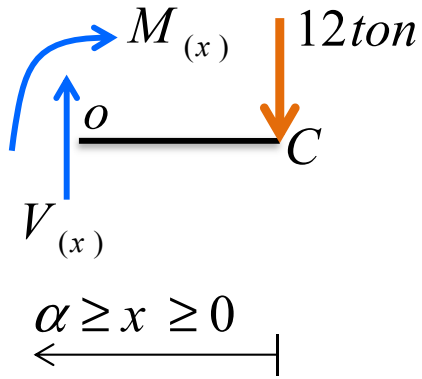
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + (1+2\alpha)x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 6 - x - 2\alpha x} \quad (8.2)$$

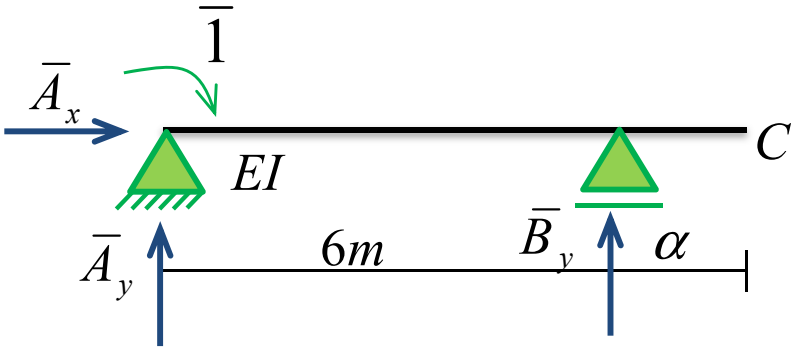
با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -12x} \quad (8.3)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 8-



سپس در ادامه یک لنگر متمرکز مجازی با مقدار واحد در گره A اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر لنگر واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

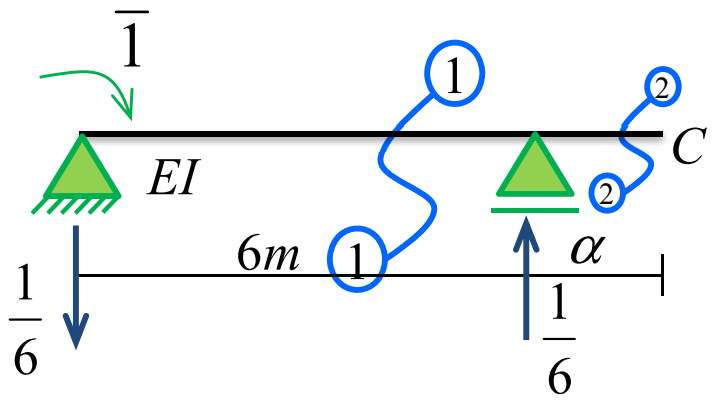
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{B}_y \times 6 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_y = \frac{1}{6}} \quad (8.4)$$

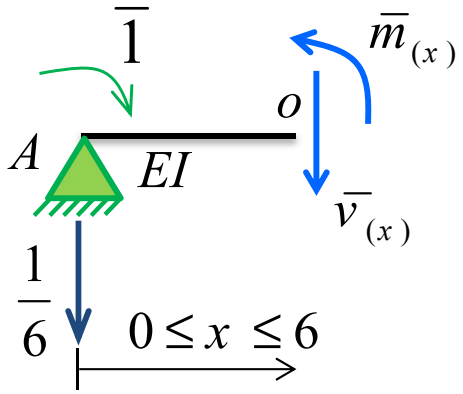
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y + \bar{B}_y = 0 \overset{(2.4)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y = -\frac{1}{6}}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)



پاسخ مثال 8-

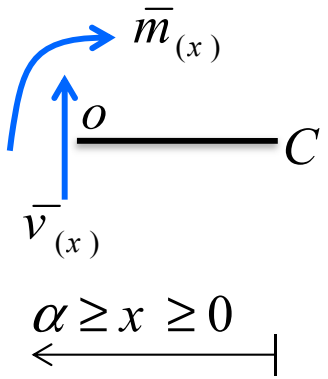
نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{m}_{(x)} + \frac{1}{6}x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = 1 - \frac{1}{6}x} \quad (8.5)$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0} \quad (8.6)$$

پاسخ مثال 8-

$$= \frac{6x - (1+\alpha)x^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{18}\right)x^3}{EI} \Bigg]_0^6$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_A = \frac{12(1-\alpha)}{EI}} \quad (8.7)$$

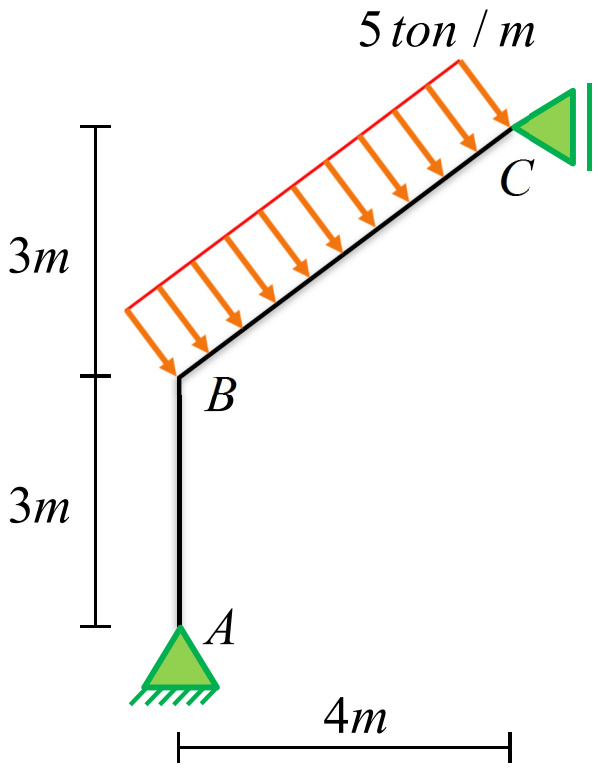
برای صفر شدن شیب در تکیه‌گاه A رابطه بالا باید برابر با صفر قرار داده شود:

$$\theta_A = 0 \overset{(8.7)}{\Rightarrow} \frac{12(1-\alpha)}{EI} = 0 \Rightarrow 12(1-\alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1m}$$

ETABS File Name: **05-Example-08.EDB**

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

مثال 9- در قاب مقابل تغییر مکان افقی گره B را محاسبه نمایید.

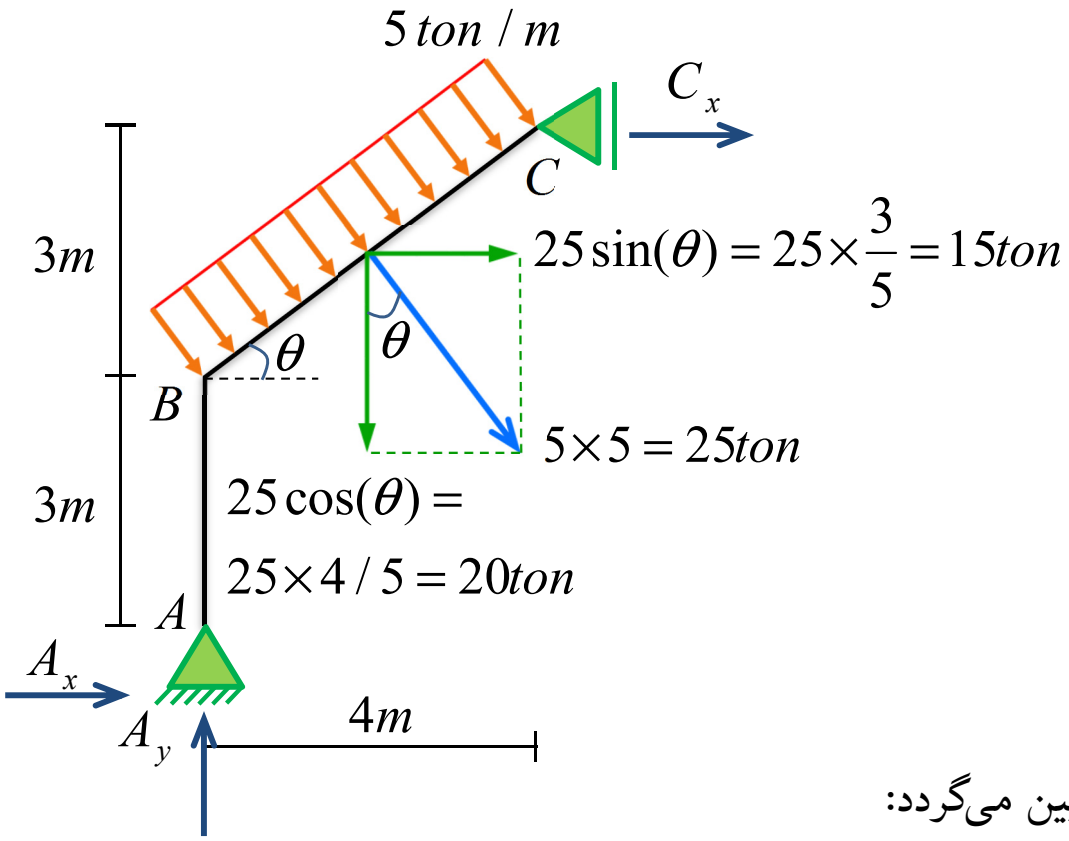


$$EI = 200\, ton.m^2$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 9-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad\cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

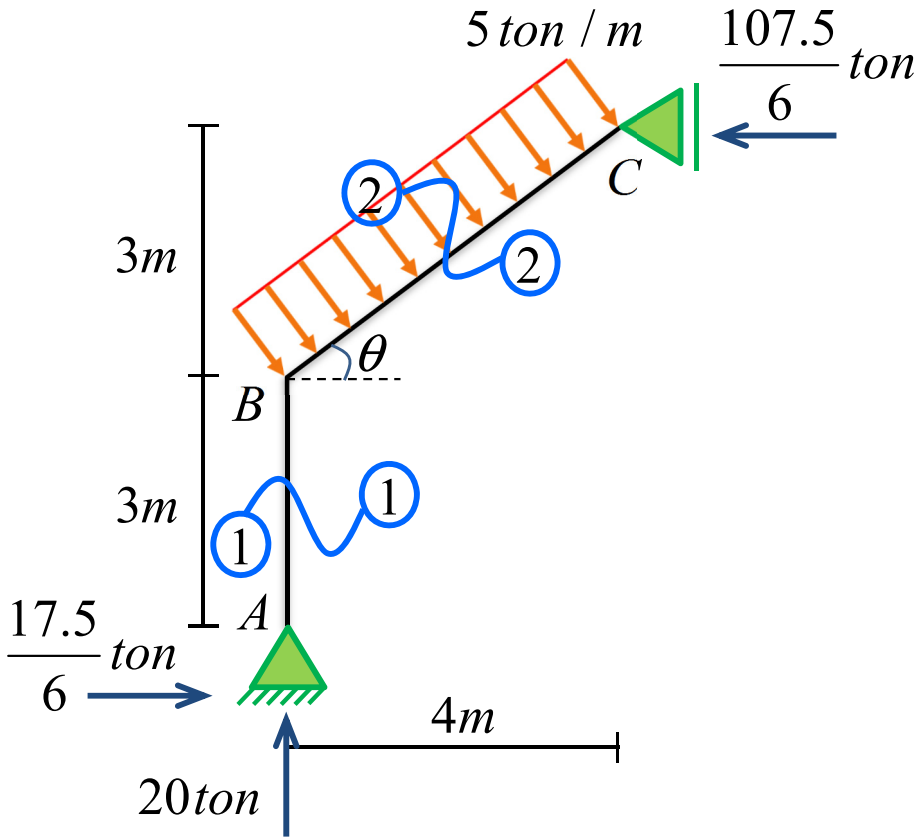
$$\sum M_A=0\ \Rightarrow\ -C_x\times6-20\times\left(\frac{4}{2}\right)-15\times\left(3+\frac{3}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ \boxed{C_x=-\frac{107.5}{6}ton}\qquad(9.1)$$

$$\sum F_x=0\ \Rightarrow\ A_x+C_x+15=0\ \overset{(9.1)}{\Rightarrow}\ \boxed{A_x=\frac{17.5}{6}ton}$$

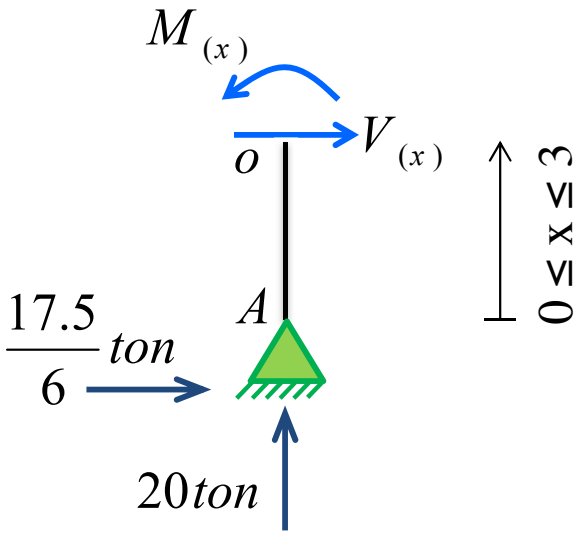
$$\sum F_y=0\ \Rightarrow\ A_y-20=0\ \Rightarrow\ \boxed{A_y=20ton}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 9-



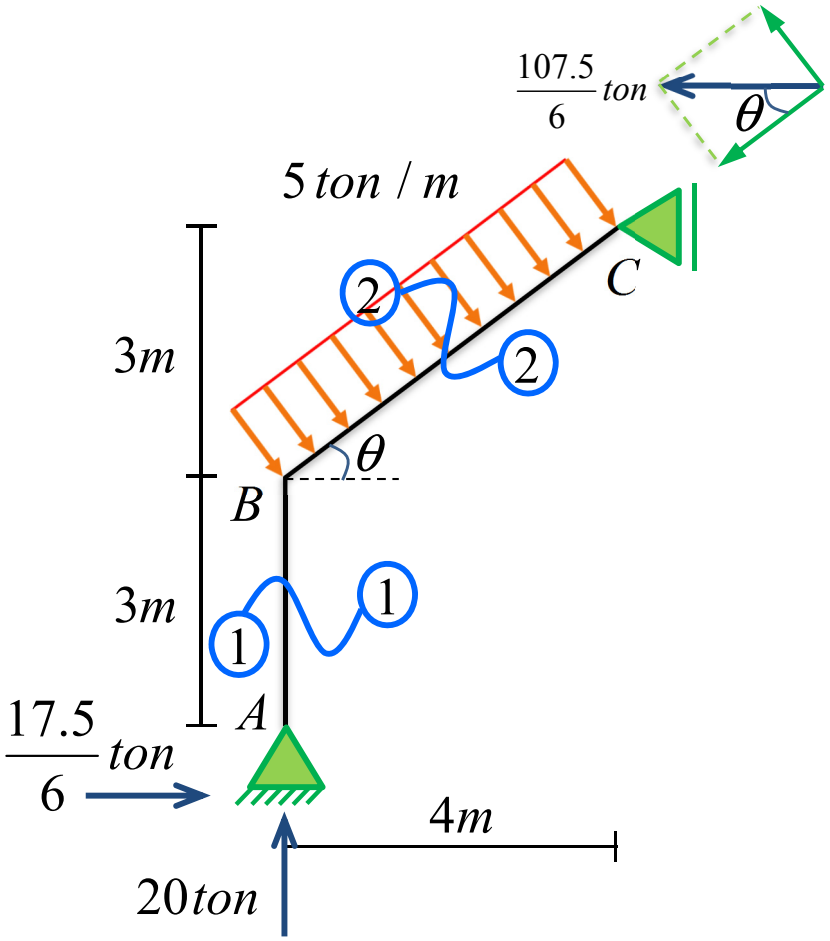
با در نظر گرفتن قسمت پایین مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + \frac{17.5}{6}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -\frac{17.5}{6}x} \qquad (9.2)$$

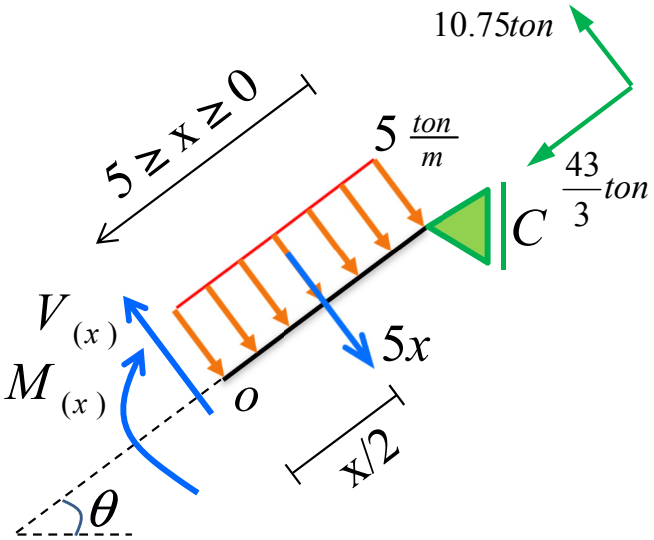
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 9-



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

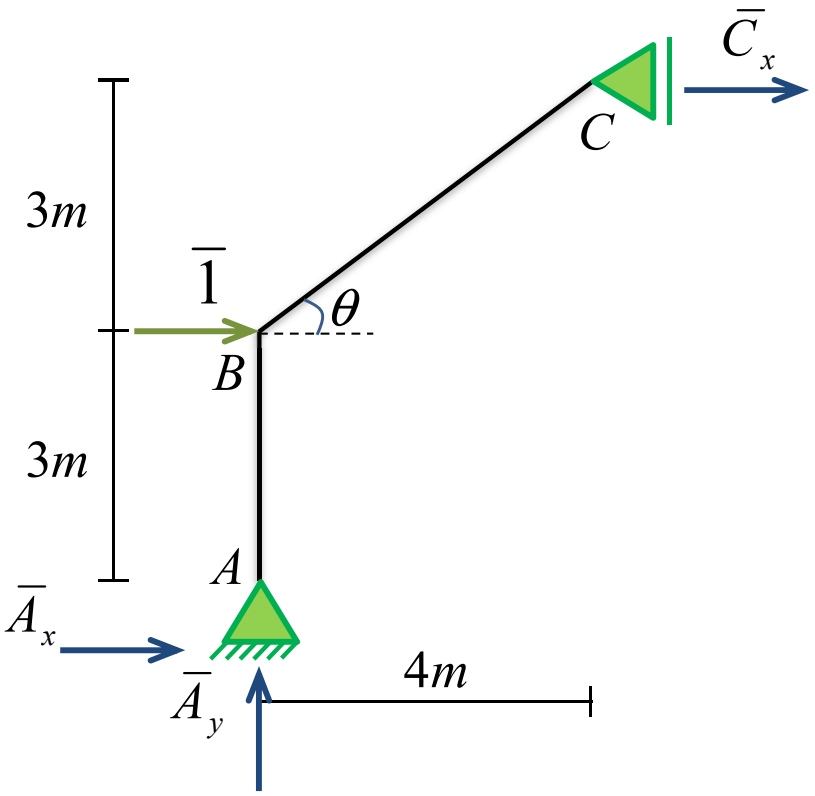
با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع 2-2 خواهیم داشت:



$$M_{(x)}=10.75x-2.5x^{2}\qquad (9.3)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 9-



سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی با مقدار واحد در گره B اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

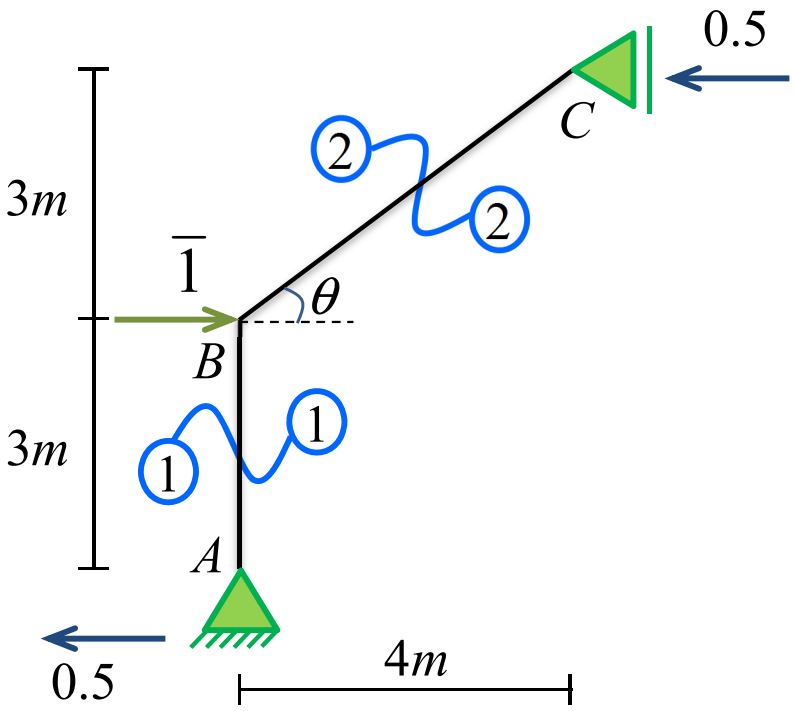
$$\sum M_A=0 \;\Rightarrow\; -\bar{C}_x\times 6-\bar{1}\times 3=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{C}_x=-0.5} \quad (9.4)$$

$$\sum F_x=0 \;\Rightarrow\; \bar{A}_x+\bar{C}_x+\bar{1}=0 \overset{(9.4)}{\Rightarrow} \boxed{A_x=-0.5}$$

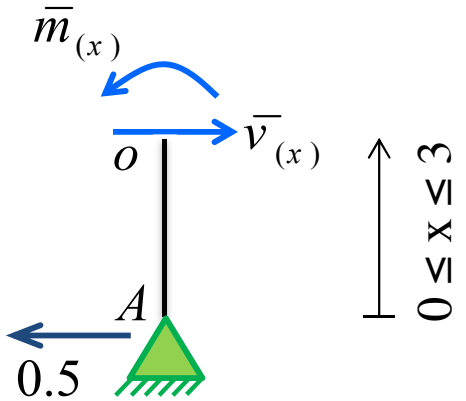
$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{A}_y=0}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 9-



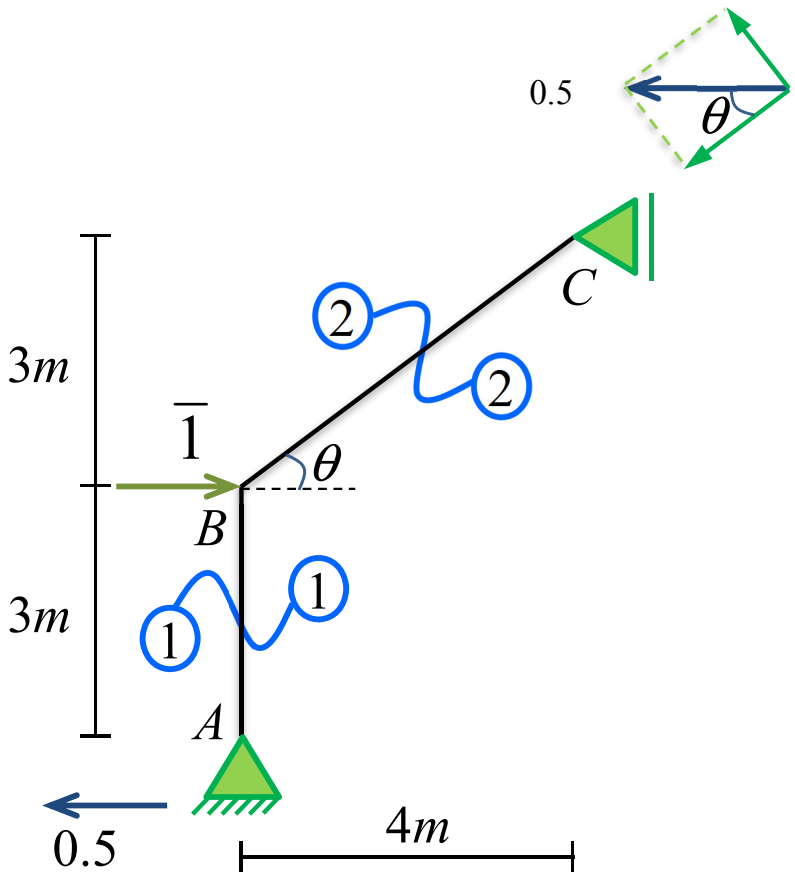
با در نظر گرفتن قسمت پایین مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{m}_{(x)} - 0.5x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0.5x} \qquad (9.5)$$

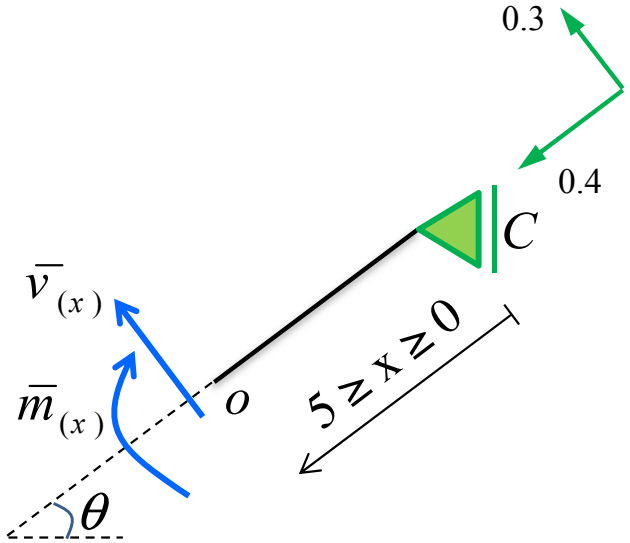
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال 9-



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع 2-2 خواهیم داشت:



$$\bar{m}_{(x)}=0.3x \qquad (9.6)$$

پاسخ مثال 9-

$$= -\frac{17.5x^3}{36EI}\Big]_0^3 + \left(\frac{3.225}{3EI}x^3 - \frac{0.75}{4EI}x^4\right)\Big]_0^5$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{h_B} = -\frac{13.125}{EI} + \frac{17.1875}{EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{h_B} = \frac{4.0625}{EI}} \quad (9.7)$$

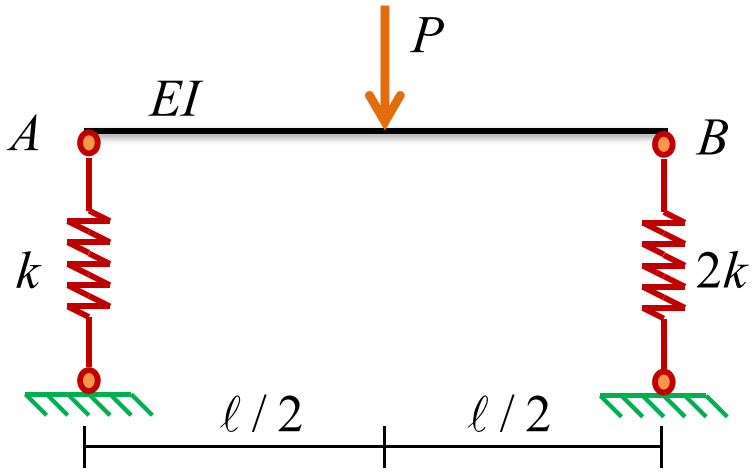
با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (9.7) خواهیم داشت:

$$(9.7) \quad \Rightarrow \quad \Delta_{h_B} = \frac{4.0625}{EI} = \frac{4.0625}{200} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{h_B} = 2.03\times10^{-2}\ (m)}$$

ETABS File Name: **05-Example-09.EDB**

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

مثال 10- تغییرمکان وسط تیر نشان داده شده را تعیین نمایید:



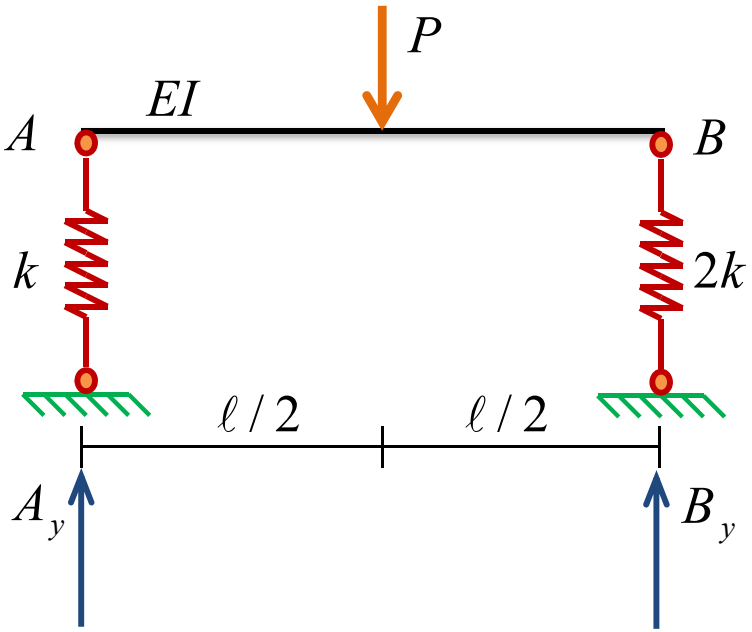
$P = 1\,ton$

$EI = 200\,ton.m^2$

$k = 9.375\,ton/m$

$\ell = 4\,m$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)



پاسخ مثال 10-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

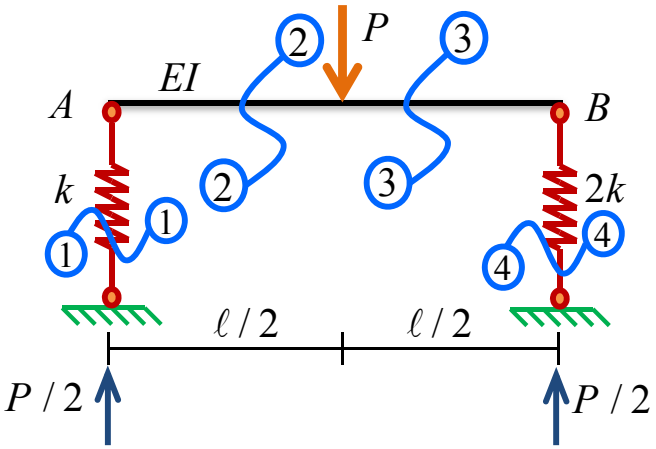
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

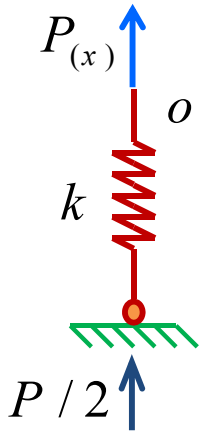
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \ell - P\ell/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = P/2} \quad (10.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y = P \quad \overset{(10.1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{A_y = P/2} \quad (10.2)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

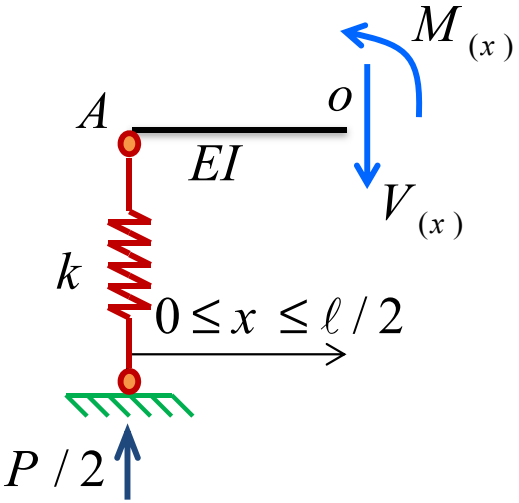
پاسخ مثال 10-





با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{(x)} + P/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = -P/2} \qquad (10.3)$$

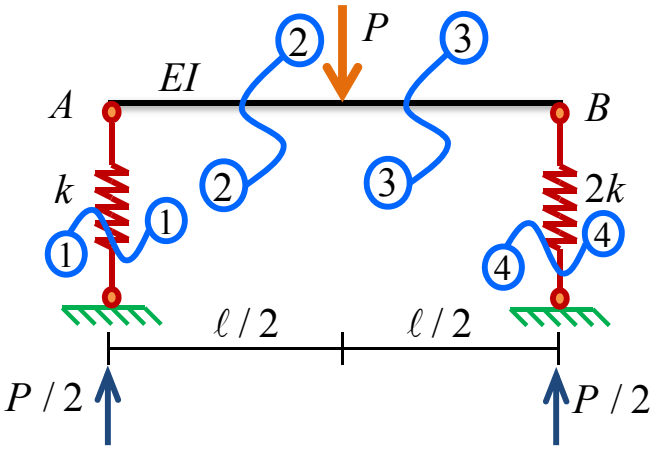


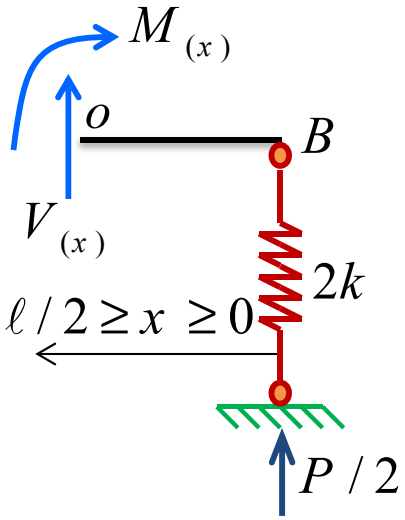
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = Px/2} \qquad (10.4)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

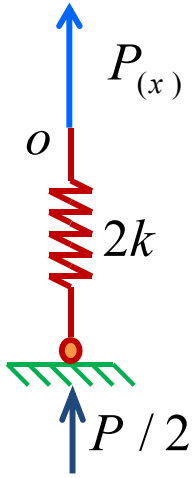
پاسخ مثال 10-





با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:

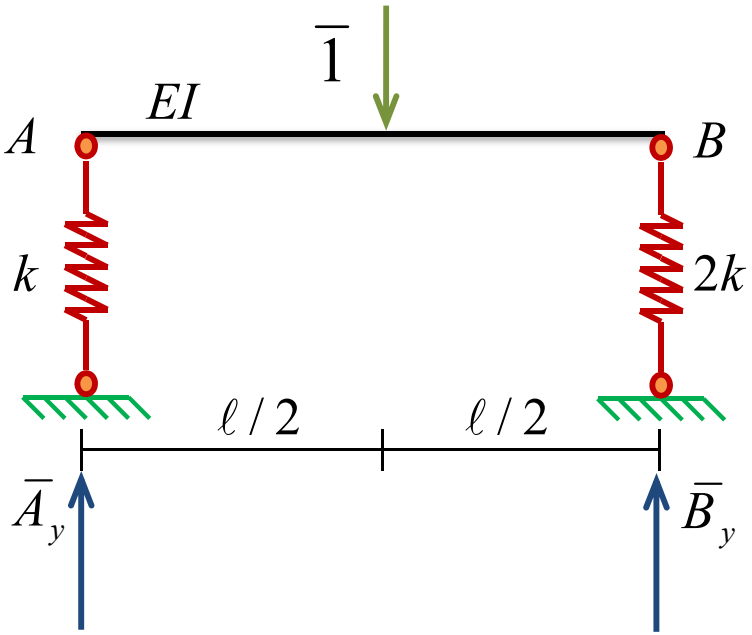
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = Px\ /\ 2} \qquad (10.5)$$



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع 4-4 خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{(x)} + P\ /\ 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = -P\ /\ 2} \qquad (10.6)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)



پاسخ مثال 10-

سپس در ادامه یک نیروی متمرکز قائم مجازی با مقدار واحد در وسط تیر اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

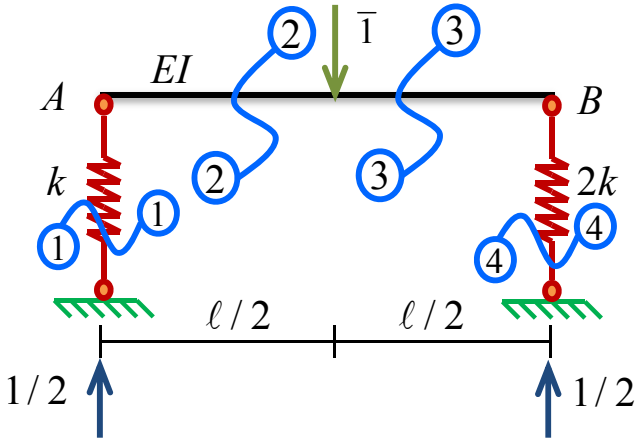
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

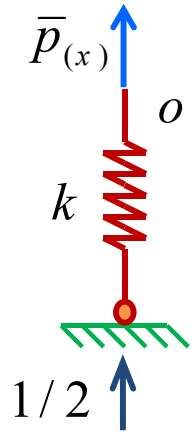
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{B}_y \ell - \bar{1} \cdot \ell/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{B}_y = 1/2} \quad (10.7)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{A}_y + \bar{B}_y = \bar{1} \quad \overset{(10.7)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\bar{A}_y = 1/2} \quad (10.8)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

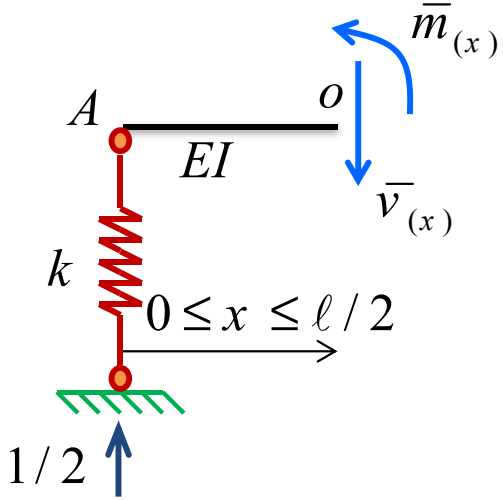
پاسخ مثال 10-





با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{(x)} + 1/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{p}_{(x)} = -1/2} \qquad (10.9)$$

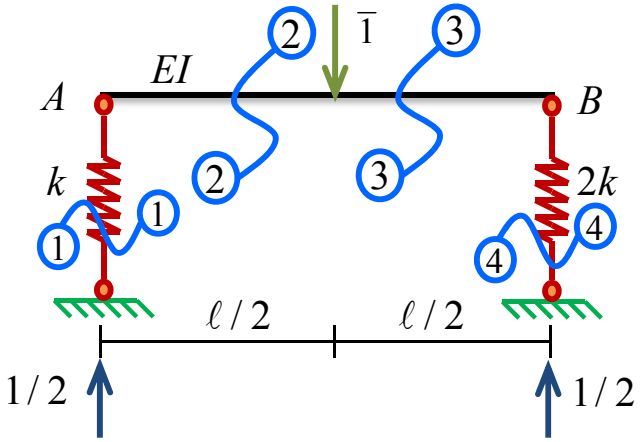


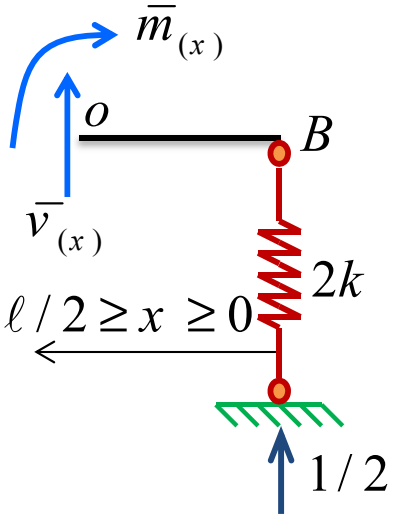
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{m}_{(x)} = x / 2} \qquad (10.10)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

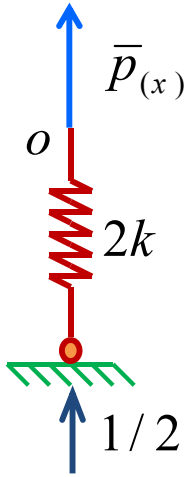
پاسخ مثال 10-





با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{m}_{(x)} = x / 2} \quad (10.11)$$



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع 4-4 خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{(x)} + 1/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{p}_{(x)} = -1/2} \quad (10.12)$$

پاسخ مثال 10-

محاسبه خیز وسط تیر

$$= \frac{Px^3}{12EI}\Big]_0^{\frac{\ell}{2}} + \frac{Px^3}{12EI}\Big]_0^{\frac{\ell}{2}} + \frac{P}{4k} + \frac{P}{8k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{3P}{8k}} \quad (10.13)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (10.13) خواهیم داشت:

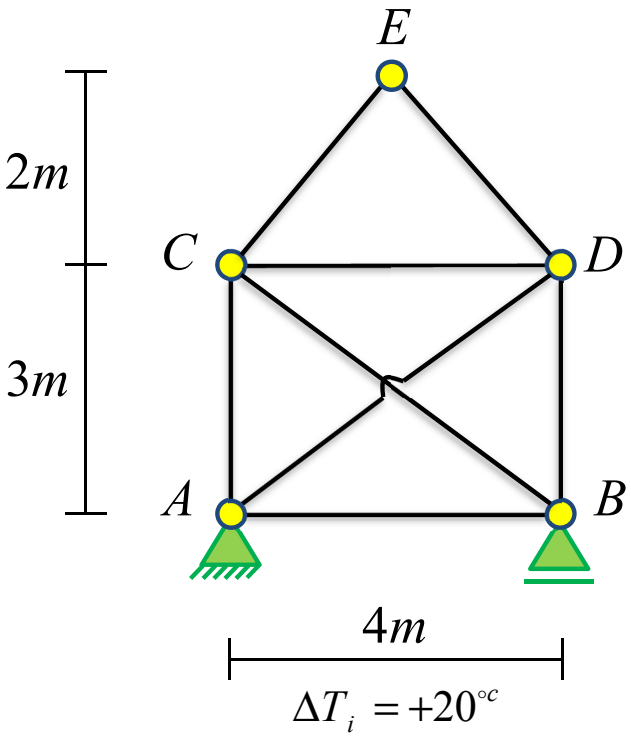
$$(10.13) \Rightarrow \Delta = \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{3P}{8k} = \left(\frac{(1)(4)^3}{48(200)} + \frac{3(1)}{8(9.375)} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta = 4.67 \times 10^{-2}\ (m)}$$

ETABS File Name: **05-Example-10.EDB**

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین و همچنین در سازه‌های نامعین داخلی تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.

مثال 11- در خرپای نشان داده شده دمای تمامی اعضا 20 درجه سانتیگراد افزایش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین نیروی داخلی اعضای خرپا.



$$EA = 6\times10^{4}\ (ton)$$

$$\alpha = 1\times10^{-3}\left(\frac{1}{^{\circ}c}\right)$$

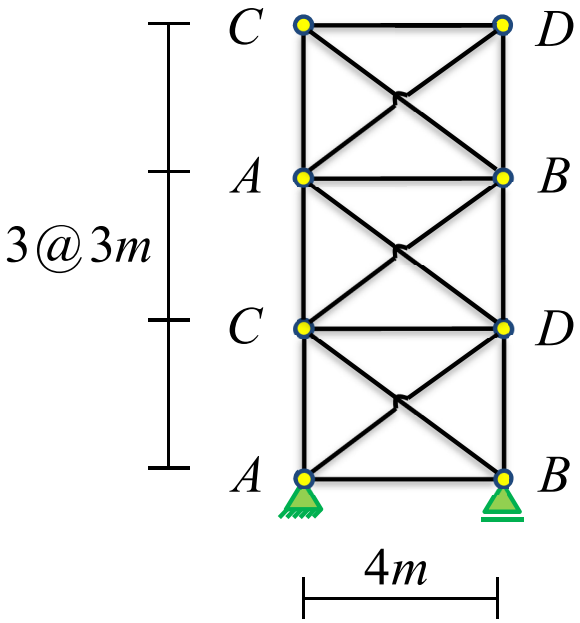
حل مثال 11-

سازه از نظر خارجی معین اما از نظر داخلی نامعین است. بنابراین تحت اثر تغییر درجه حرارت، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین و همچنین در سازه‌های نامعین داخلی تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.

مثال 12- در خرپای نشان داده شده دمای تمامی اعضا 40 درجه سانتیگراد افزایش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین نیروی داخلی اعضای خرپا.



$$\Delta T_i = +40^{\circ c}$$

$$EA = 6\times10^{4}\ (ton)$$

$$\alpha = 1\times10^{-3}\left(\frac{1}{^{\circ}c}\right)$$

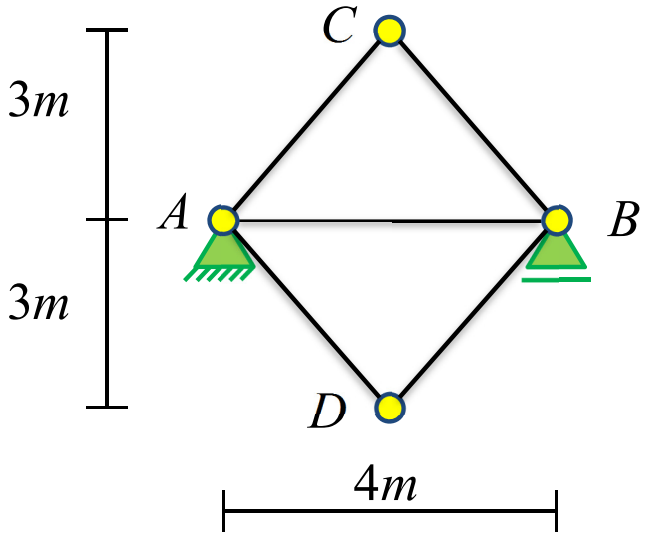
حل مثال 12-

سازه از نظر خارجی معین اما از نظر داخلی نامعین است. بنابراین تحت اثر تغییر درجه حرارت، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین و همچنین در سازه‌های نامعین داخلی تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.

مثال 13- در خرپای نشان داده شده عضو AB به اندازه 1 cm انبساط حرارتی دارد. مطلوب است تعیین نیروی داخلی اعضای خرپا.



$$EA = 6\times10^{4}\ (ton)$$

$$\alpha = 1\times10^{-3}\left(\frac{1}{\circ c}\right)$$

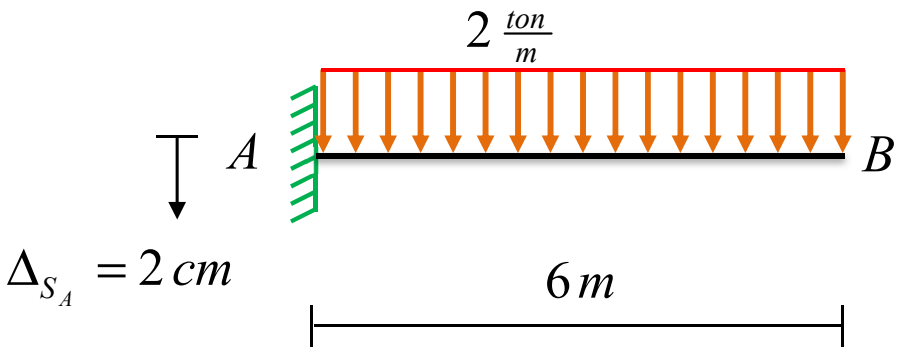
حل مثال 13-

درجه نامعینی سازه مورد نظر صفر است. بنابراین در سازه معین تحت اثر تغییر درجه حرارت، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.

مثال 14- در تیر نشان داده شده اگر تکیه‌گاه A به اندازه 2 cm نشست داشته باشد میزان تغییرات در عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید.



$$EI = 200\,ton.m^2$$

حل مثال 14-

درجه نامعینی سازه مورد نظر صفر است. بنابراین در سازه معین تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید.