دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها
(Energy Method)

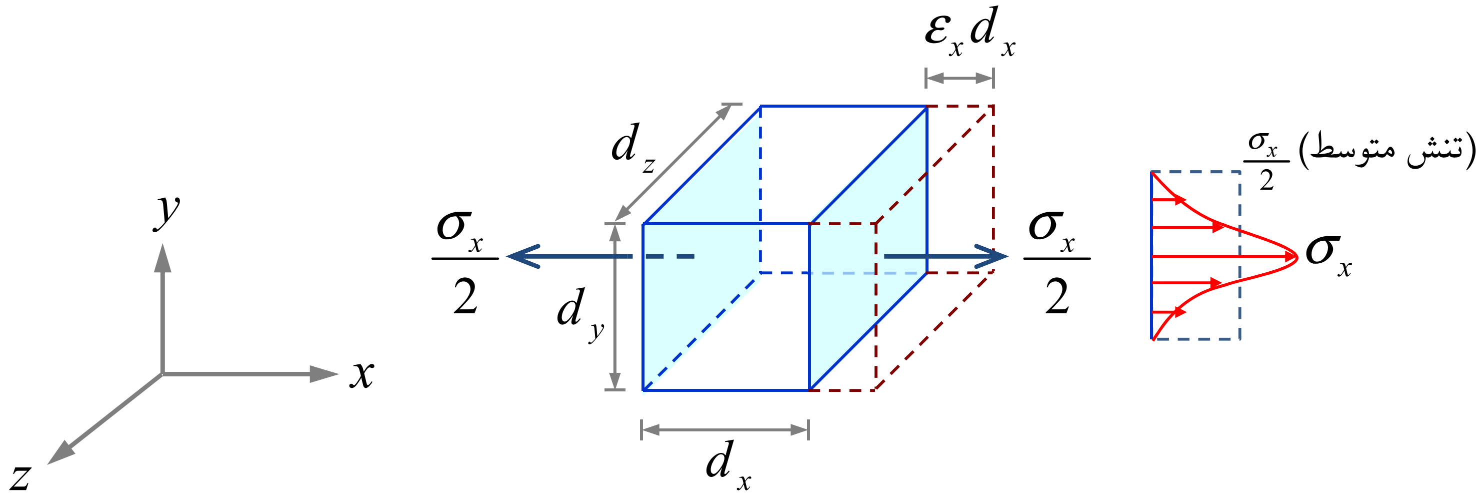
تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری

انرژی: ظرفیت انجام کار را انرژی می‌نامند.

کار: حاصل ضرب نیرو در جابجایی در راستای نیرو است.

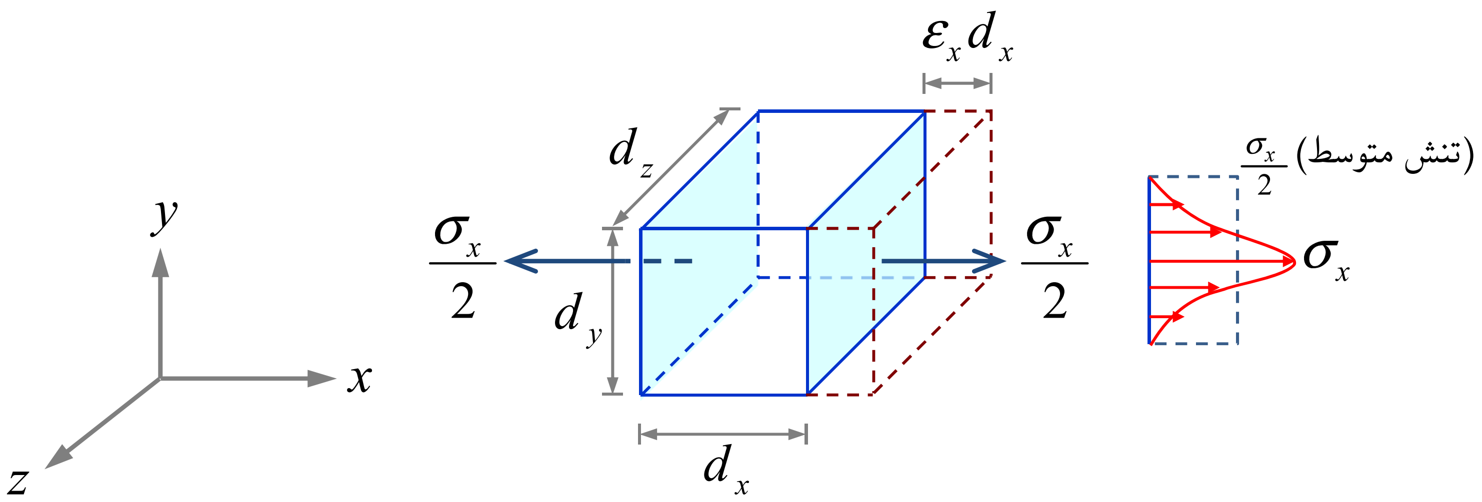


نیروی وارد بر سطح المان، F_x ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{F_x = \frac{\sigma_x}{2} d_y d_z} \quad (1)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری



همچنین تغییر طول المان، Δ_x ، در امتداد تنش وارده برابر است با:

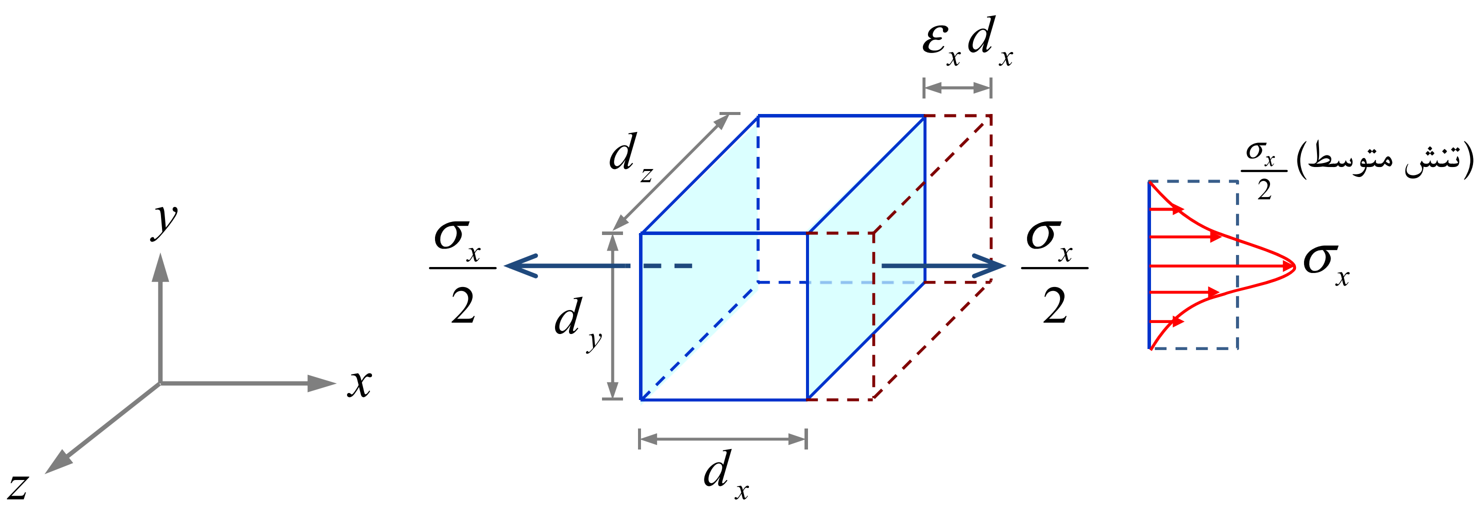
$$\boxed{\Delta_x = \varepsilon_x d_x} \quad (2)$$

کار انجام شده توسط نیروهای داخلی یا همان انرژی کرنشی ذخیره شده در المان، d_u را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$d_u = F_x \times \Delta_x \quad \overset{(1)\&(2)}{\Rightarrow} \quad d_u = \frac{\sigma_x}{2} d_y d_z \cdot \varepsilon_x d_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_u = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \cdot d_x d_y d_z} \quad (3)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری



حجم جز المان در نظر گرفته شده برابر است با $d_V = d_x d_y d_z$ از این رو رابطه (3) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

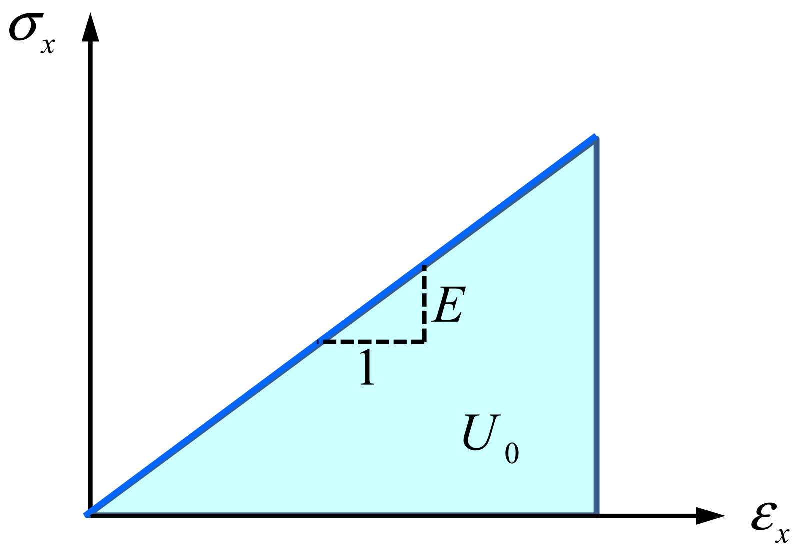
$$\boxed{d_u = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \cdot d_V} \quad (4)$$

به کمک رابطه (4) چگالی انرژی کرنشی (مقدار انرژی ذخیره شده در واحد حجم المان) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$(4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_0 = \frac{d_u}{d_V} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x} \quad (5)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری



مقدار کل انرژی ذخیره شده در جسم، U ، با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (4) حاصل می‌گردد:

$$(4) \quad \stackrel{\int}{\Rightarrow} \quad \int d_u = \int \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \cdot d_V \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2} \int \sigma_x \varepsilon_x \cdot d_V} \quad (6)$$

با بکارگیری قانون هوک، $\sigma_x = E\varepsilon_x$ ، مقدار کل انرژی ذخیر شده در جسم را می توان به صورت روابط زیر نیز نوشت:

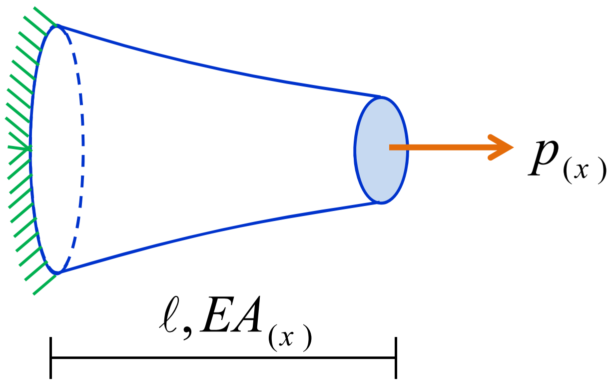
$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \quad \boxed{U = \int \frac{E \varepsilon_x{}^2}{2} \cdot d_V} \quad (7)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \quad \boxed{U = \int \frac{\sigma_x{}^2}{2E} \cdot d_V} \quad (8)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری

1- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی محوری



تنش محوری (نرمال) ناشی از نیروی محوری از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{p_{(x)}}{A_{(x)}}} \qquad (9)$$

با جایگذاری رابطه (9) در رابطه (8) انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی محوری به دست می‌آید:

$$(9) \rightarrow (8) \quad \overset{d_V = A_{(x)} d_x}{\Rightarrow} \quad U = \int_0^{\ell} \frac{1}{2E} \left(\frac{p_{(x)}}{A_{(x)}} \right)^2 . \left(A_{(x)} d_x \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \int_0^{\ell} \frac{p^2_{(x)}}{2EA_{(x)}} d_x} \qquad (10)$$

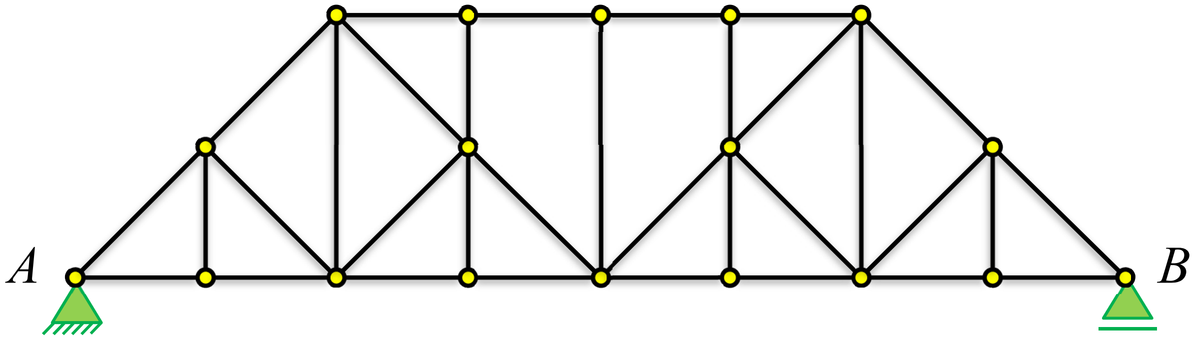
در حالت خاص که نیروی محوری و سطح مقطع در طول تیر ثابت باشد رابطه (10) به صورت زیر در می‌آید:

$$if \ : \ \begin{cases} A_{(x)} = A \\ p_{(x)} = p \end{cases} \quad \overset{(10)}{\Rightarrow} \quad U = \int_0^{\ell} \frac{p^2}{2EA} d_x \quad \Rightarrow \quad U = \frac{p^2}{2EA} \int_0^{\ell} d_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{p^2 \ell}{2EA}} \qquad (11)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری

1- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی محوری



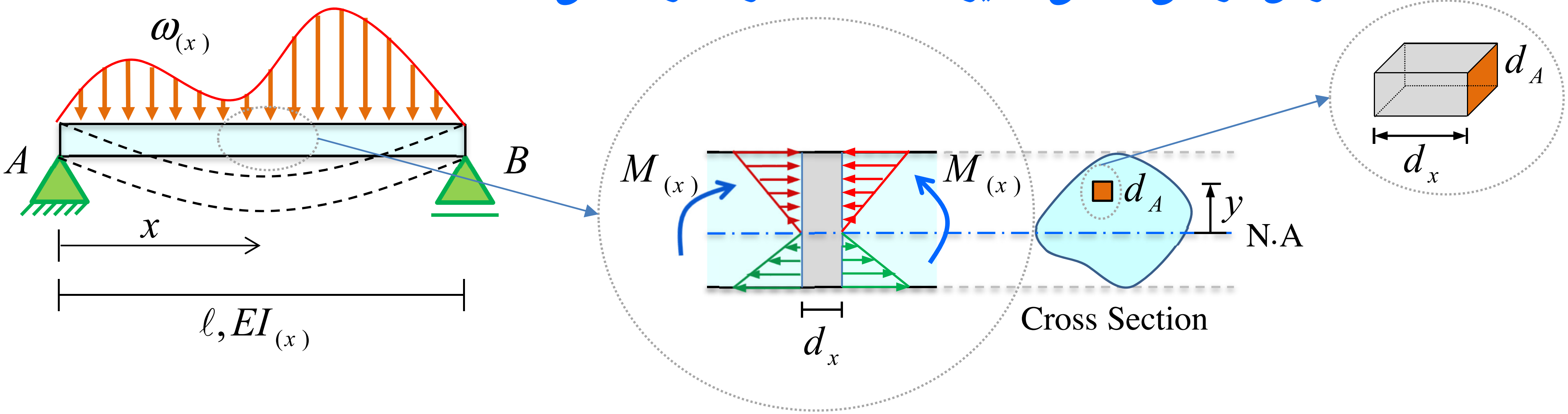
انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده دریک خرپا که دارای m عضو می‌باشد براساس رابطه (11) یه صورت زیر به دست می‌آید:

$$(11) \quad \Rightarrow \quad U = \frac{p_1^{\,2}\ell_1}{2E_1A_1} + \frac{p_2^{\,2}\ell_2}{2E_2A_2} + \cdots + \frac{p_i^{\,2}\ell_i}{2E_iA_i} + \cdots + \frac{p_m^{\,2}\ell_m}{2E_mA_m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\,2}\ell_i}{2E_iA_i}} \quad (12)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری

2- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر لنگر خمشی



تنش محوری (نرمال) ناشی از لنگر خمشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_{(x)}y}{I_{(x)}}} \qquad (13)$$

با جایگذاری رابطه (13) در رابطه (8) خواهیم داشت:

$$(13) \rightarrow (8) \overset{d_V = d_A d_x}{\Rightarrow} U = \int \frac{1}{2E}\left(-\frac{M_{(x)}y}{I_{(x)}}\right)^2 .(d_A d_x) \Rightarrow \boxed{U = \int_0^{\ell} \frac{M^2_{(x)}}{2EI^2_{(x)}} d_x \cdot \int y^2 d_A} \qquad (14)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

الف- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های عمودی تک محوری

2- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر لنگر خمشی

لنگر سطح دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{I_{(x)} = \int y^2 d_A} \qquad (15)$$

با جایگذاری رابطه (15) در رابطه (14) انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر لنگر خمشی به دست می‌آید:

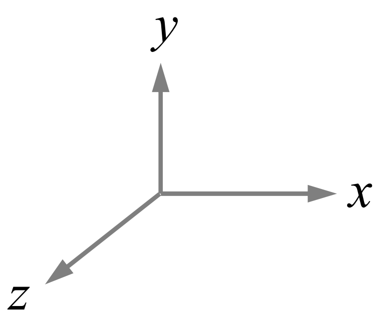
$$(15) \rightarrow (14) \quad \boxed{U = \int_0^{\ell} \frac{M^2_{(x)}}{2EI_{(x)}} d_x} \qquad (16)$$

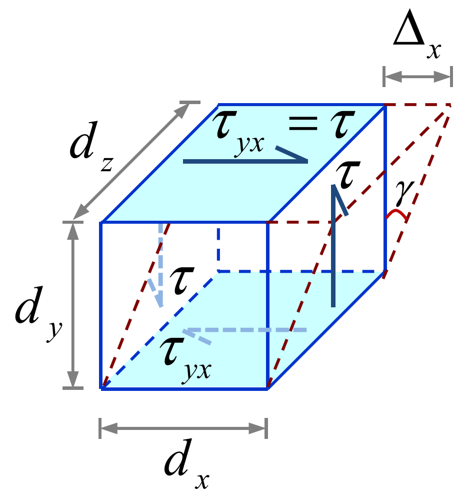
در حالت خاص که ممان اینرسی در طول تیر ثابت باشد رابطه (16) به صورت زیر در می‌آید:

$$if \quad I_{(x)} = I \quad \overset{(16)}{\Rightarrow} \quad \boxed{U = \int_0^{\ell} \frac{M^2_{(x)}}{2EI} d_x} \qquad (17)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی





نیروی متوسط وارد بر سطح المان، F_x ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{F_x = \frac{\tau}{2} d_x d_z} \quad (18)$$

همچنین تغییر طول المان، Δ_x ، در امتداد تنش وارده برابر است با:

$$\tan(\gamma) = \gamma = \frac{\Delta_x}{d_y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_x = \gamma d_y} \quad (19)$$

کار انجام شده توسط نیروهای داخلی یا همان انرژی کرنشی ذخیره شده در المان، d_u را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

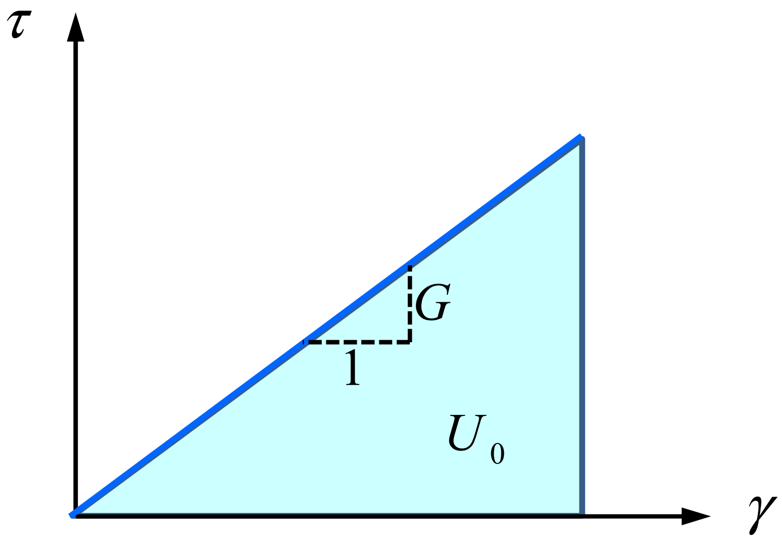
$$d_u = F_x \times \Delta_x \quad \overset{(18)\&(19)}{\Rightarrow} \quad d_u = \frac{\tau}{2} d_x d_z \cdot \gamma d_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_u = \frac{1}{2} \tau\gamma \cdot d_x d_y d_z} \quad (20)$$

حجم جز المان در نظر گرفته شده برابر است با $d_V = d_x d_y d_z$ از این رو رابطه (20) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{d_u = \frac{1}{2} \tau\gamma \cdot d_V} \quad (21)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی



مقدار کل انرژی ذخیره شده در جسم، U ، با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (21) حاصل می‌گردد:

$$(21) \;\overset{\int}{\Rightarrow}\; \int d_u = \int \frac{1}{2}\tau\gamma\cdot d_V \;\Rightarrow\; \boxed{U = \frac{1}{2}\int \tau\gamma\cdot d_V} \quad (22)$$

با بکارگیری قانون هوک، $\tau = G\gamma$ ، مقدار کل انرژی ذخیر شده در جسم را می توان به صورت روابط زیر نیز نوشت:

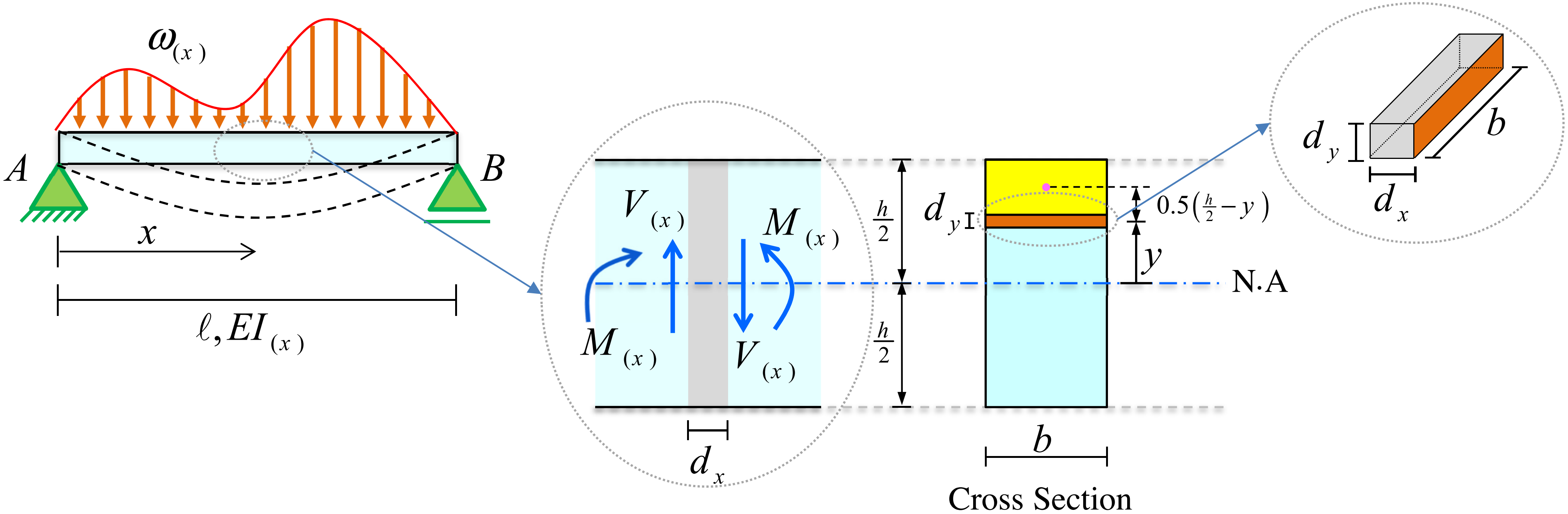
$$\tau = G\gamma \;\overset{(22)}{\Rightarrow}\; \boxed{U = \int \frac{G\gamma^2}{2}\cdot d_V} \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \;\overset{(22)}{\Rightarrow}\; \boxed{U = \int \frac{\tau^2}{2G}\cdot d_V} \quad (24)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

1- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی برشی



تنش برشی ناشی از نیروی برشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

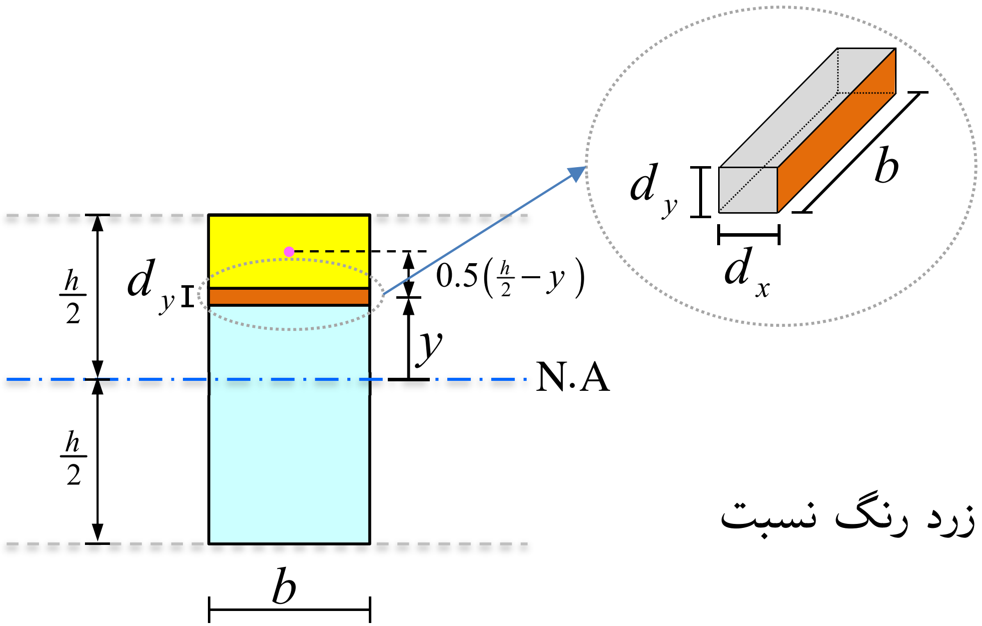
$$\boxed{\tau = \frac{V_{(x)} Q}{I_{(x)} b}} \qquad (25)$$

Q: گشتاور اول سطح نسبت به تار خنثی

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

1- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی برشی



حجم جز المان در نظر گرفته شده برابر است با:

$$\boxed{d_V = b.d_x d_y} \quad (26)$$

گشتاور اول سطح، Q، در رابطه (25) برای مقطع مستطیلی زرد رنگ نسبت به تار خنثی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = A \cdot \bar{y} = \left(b \times \left(\frac{h}{2} - y\right)\right) . \left(y + \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{2}\right) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)} \quad (27)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

1- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی برشی

با جایگذاری رابطه (27) در رابطه (25) خواهیم داشت:

$$(27) \rightarrow (25) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{V_{(x)}(h^2 - 4y^2)}{8I_{(x)}}} \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (26) و (28) در رابطه (24) خواهیم داشت:

$$(26)\,\&\,(28) \rightarrow (24) \quad \Rightarrow \quad U = \int \frac{1}{2G}\left(\frac{V_{(x)}(h^2 - 4y^2)}{8I_{(x)}}\right)^2 .b\, d_x d_y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = \int_0^{\ell} \frac{bV^2_{(x)}}{128GI^2_{(x)}} d_x \,.\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (h^2 - 4y^2)^2 d_y} \quad (29)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

1- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی برشی

با محاسبه مقدار زیر:

$$\boxed{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (h^2 - 4y^2)^2 d_y = h^4 y - \frac{8h^2 y^3}{3} + \frac{16y^5}{5} \Bigg]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{8h^5}{15}} \qquad (30)$$

و جایگذاری آن در رابطه (29) انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی برشی، در یک المان با سطح مقطع مستطیلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(30) \rightarrow (29) \quad U = \int_0^{\ell} \frac{bV^2_{(x)} h^5}{240 G I^2_{(x)}} d_x \overset{I_{(x)} = \frac{bh^3}{12},\, A = bh}{\Longrightarrow} \boxed{U = \int_0^{\ell} \frac{1.2 V^2_{(x)}}{2GA} d_x} \qquad (31)$$

در حالت کلی انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی برشی، در یک المان با سطح مقطع دلخواه برابر است با:

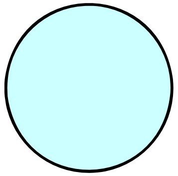
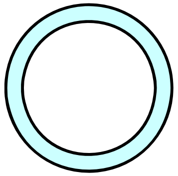
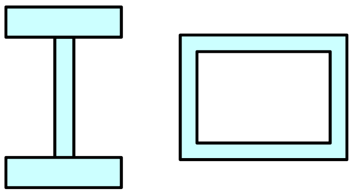
$$\boxed{U = k \int_0^{\ell} \frac{V^2_{(x)}}{2GA_{(x)}} d_x} \qquad (32)$$

پارامتر k ، ثابت شکل نام دارد. در جدول (1) ثابت شکل برای تعدادی از مقاطع پرکارد آمده است.

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

1- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر نیروی برشی

شکل مقاطع	k
 مستطیل	1.2
 دایره	$\frac{10}{9}$
 دایره توخالی (لوله)	2
 مستطیل توخالی (جعبه) و آی شکل	1

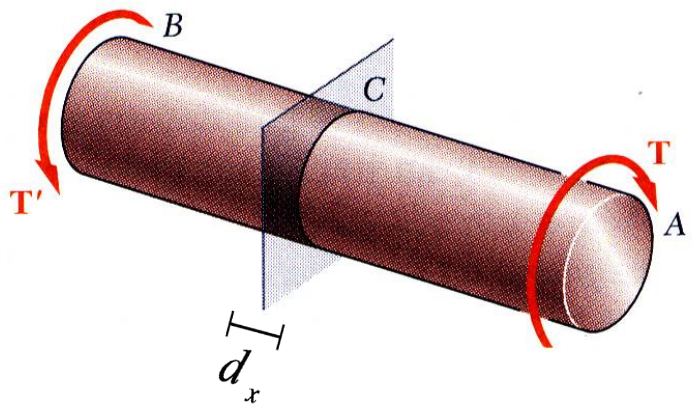
جدول (1)

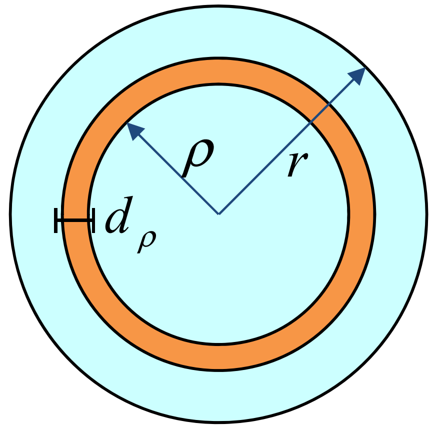
نکته: در مقاطع مستطیل توخالی (جعبه) و I شکل پارامتر A در رابطه (32) برابر با مساحت جان است.

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

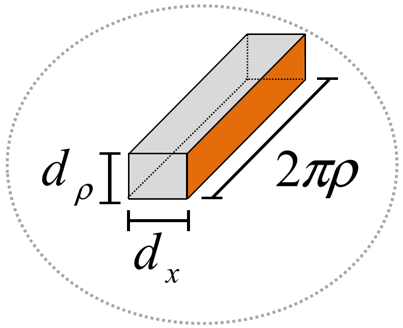
ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

2- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر لنگر پیچشی





Cross Section



تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\tau = \frac{T_{(x)}\rho}{J_{(x)}}} \qquad (33)$$

$J_{(x)}$: ممان اینرسی قطبی

حجم جز المان در نظر گرفته شده برابر است با:

$$\boxed{d_V = 2\pi\rho . d_\rho d_x} \qquad (34)$$

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

2- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر لنگر پیچشی

با جایگذاری روابط (33) و (34) در رابطه (24) خواهیم داشت:

$$(26)\,\&\,(28) \rightarrow (24) \quad \Rightarrow \quad U = \int \frac{T^2_{(x)}\rho^2}{2GJ^2_{(x)}} \cdot 2\pi\rho . d_\rho d_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \int_0^\ell \frac{T^2_{(x)}}{2GJ^2_{(x)}} d_x . \int_0^r 2\pi\rho^3 d_\rho} \quad (35)$$

با محاسبه مقدار زیر:

$$\boxed{\int_0^r 2\pi\rho^3 d_\rho = \frac{\pi r^4}{2} = J_{(x)}} \qquad (36)$$

و جایگذاری آن در رابطه (35) انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر لنگر پیچشی، در یک المان با سطح مقطع دایره‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

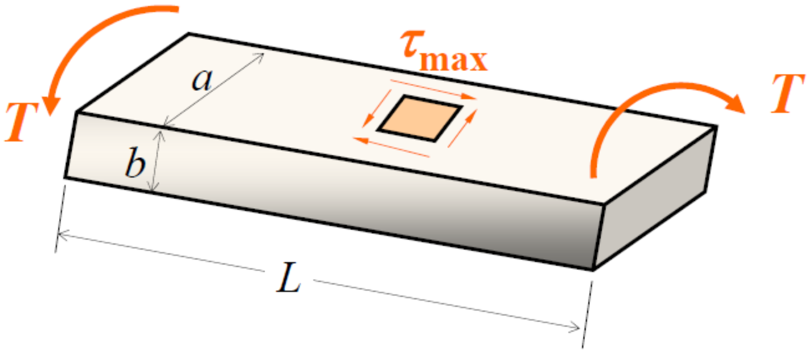
$$(36) \rightarrow (35) \quad \boxed{U = \int_0^\ell \frac{T^2_{(x)}}{2GJ_{(x)}} d_x} \qquad (37)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

ب- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر تنش‌های برشی

2- انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده تحت اثر لنگر پیچشی

در میله با سطح مقطع مستطیلی، ممان اینرسی قطبی از رابطه زیر حاصل می‌گردد:



$$\boxed{J = cb^3a} \qquad (38)$$

که در آن a ضلع بزرگتر و b ضلع کوچکتر می‌باشد. مقدار c نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\boxed{c = \frac{1}{3} - 0.21\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{a^4}\right)} \qquad (39)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)

U : کار انجام شده توسط نیروهای داخلی (همان انرژی کرنشی ذخیره شده)

$=$

W : کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

در حالت کلی انرژی کرنشی ذخیره شده در یک المان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{p^2_{(x)}}{2EA_{(x)}} d_x + \int_0^{\ell} \frac{M^2_{(x)}}{2EI_{(x)}} d_x + k \int_0^{\ell} \frac{V^2_{(x)}}{2GA_{(x)}} d_x + \int_0^{\ell} \frac{T^2_{(x)}}{2GJ_{(x)}} d_x \qquad (40)$$

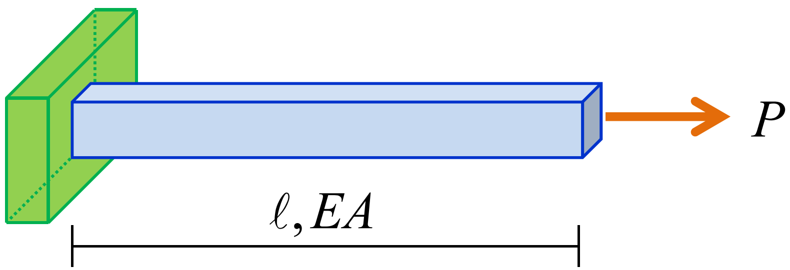
با فرض ثابت بودن سطح مقطع المان در طول تیر رابطه (40) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{p^2_{(x)}}{2EA} d_x + \int_0^{\ell} \frac{M^2_{(x)}}{2EI} d_x + k \int_0^{\ell} \frac{V^2_{(x)}}{2GA} d_x + \int_0^{\ell} \frac{T^2_{(x)}}{2GJ} d_x \qquad (41)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

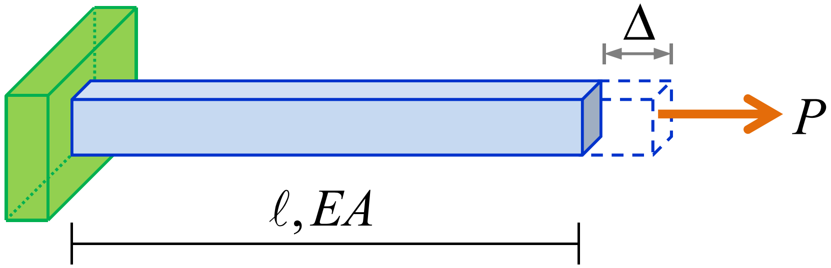
روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)

مثال 1- در تیر نشان داده شده مقدار تغییر طول تیر تحت اثر نیروی محوری وارده را محاسبه نمایید.

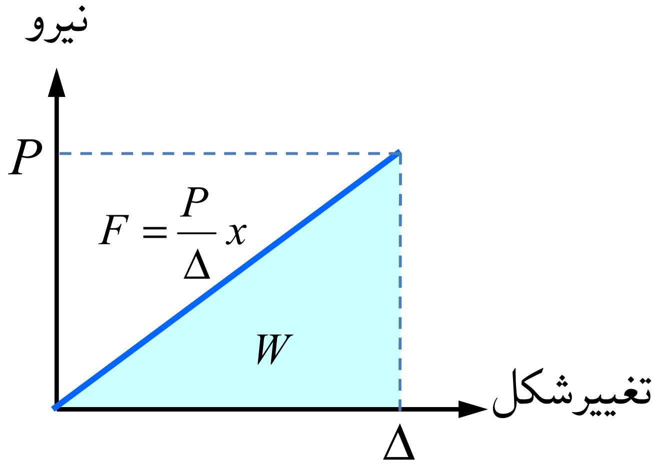


روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)



پاسخ مثال 1-



$$\boxed{W = \frac{1}{2}P\Delta} \quad (1.1)$$

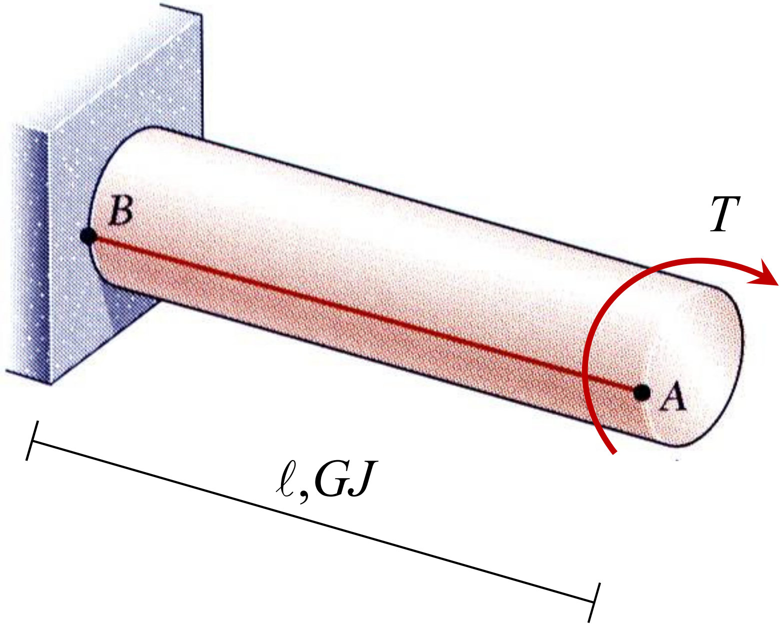
$$(11) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{P^2\ell}{2EA}} \quad (1.2)$$

$$\boxed{\Delta = \frac{P\ell}{EA}}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

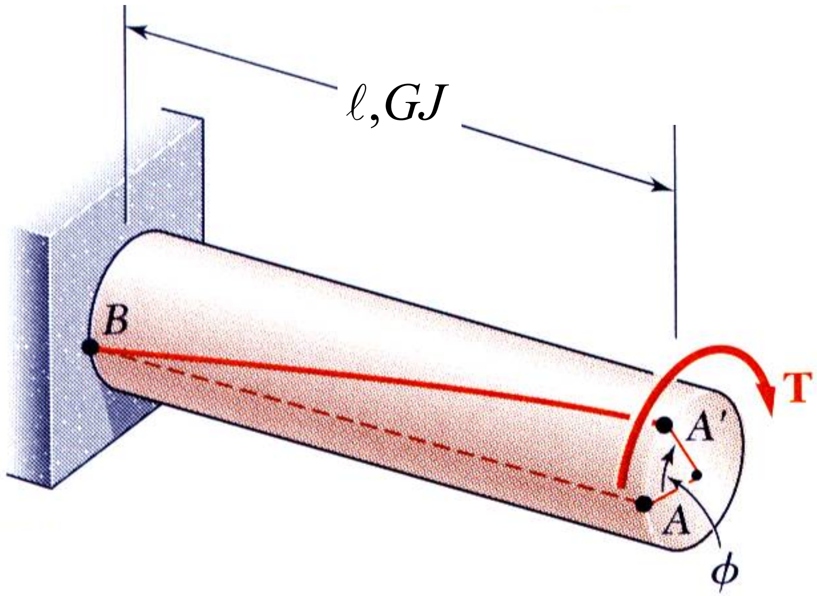
روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)

مثال 2– در شکل نشان داده شده مقدار دوران میله تحت اثر لنگر پیچشی وارده را محاسبه نمایید.

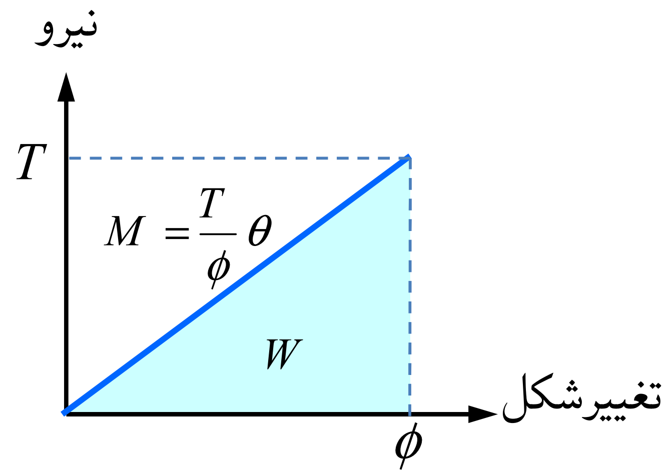


روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)



پاسخ مثال 2-



$$\boxed{W = \frac{1}{2} T \phi} \qquad (2.1)$$

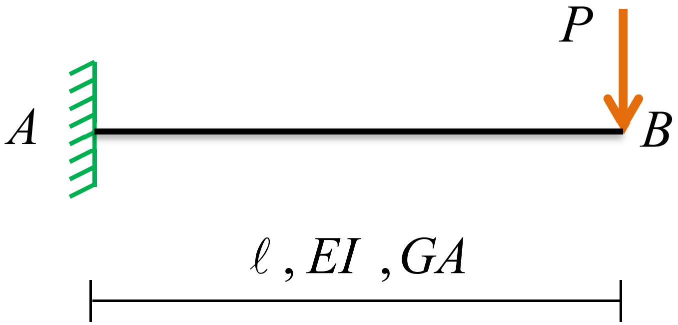
$$\boxed{U = \frac{T^{2}\ell}{2GJ}} \qquad (2.2)$$

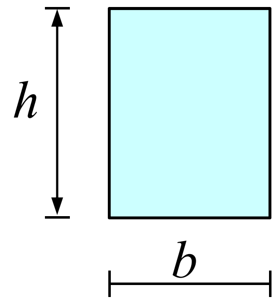
$$\boxed{\phi = \frac{T\ell}{GJ}}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)

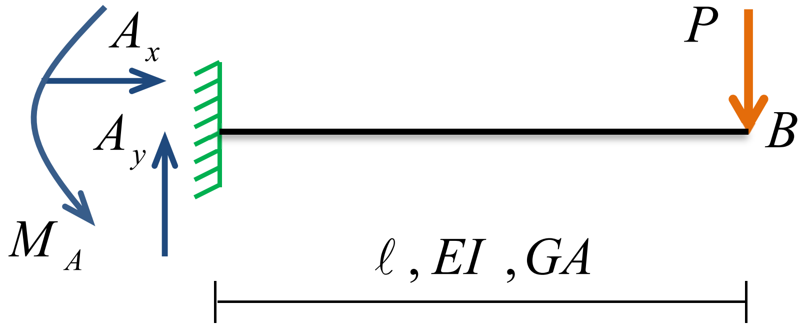
مثال 3- در تیر فولادی نشان داده شده مقدار تغییر شکل تحت اثر بار وارده در گره B را محاسبه نمایید.





Cross Section

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها



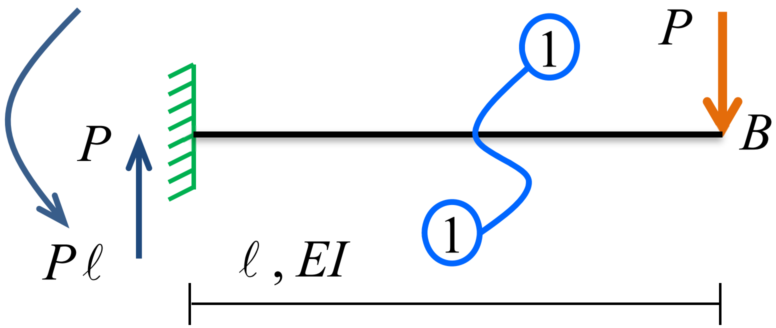
روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)

پاسخ مثال 3-

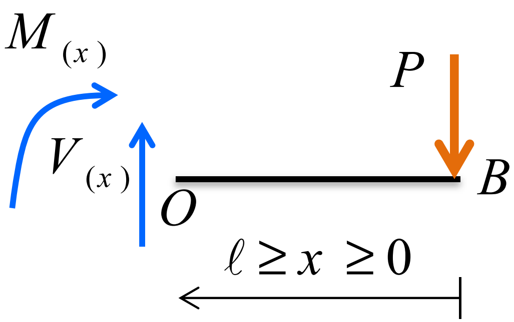
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0} \qquad \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - P \times \ell = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = P\ell}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - p = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = P}$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



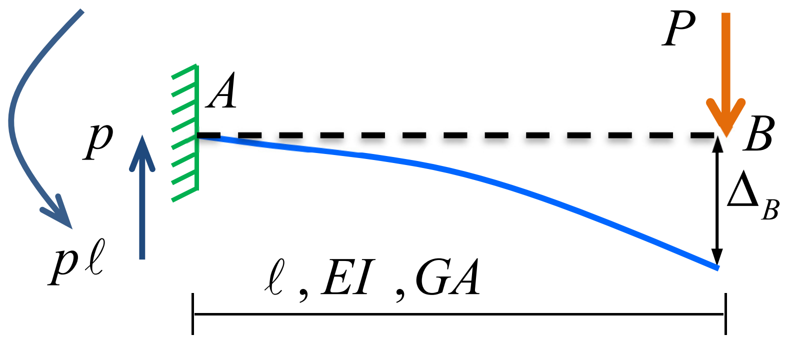
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + P \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -Px} \quad (3.1)$$

$$\ell \geq x \geq 0$$

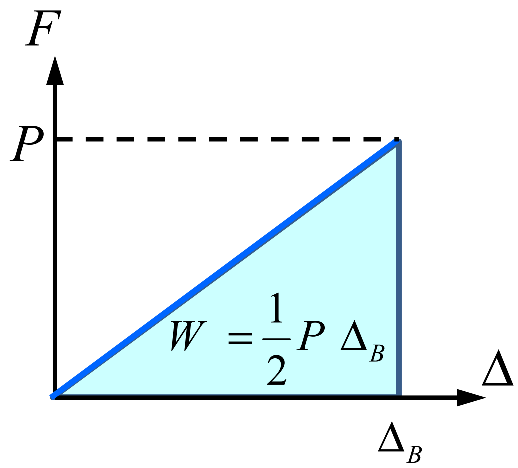
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - P = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = P} \quad (3.2)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)



پاسخ مثال 3-



چون نیرو از صفر شروع می‌شود و به مقدار ماکزیمم می‌رسد بنابراین متوسط آن را لحاظ می‌کنیم.

$$\boxed{W = \frac{1}{2} P \,.\, \Delta_B} \quad (3.3)$$

$$= \frac{P^2 x^3}{6EI}\Bigg]_0^{\ell} + k\,\frac{P^2 x}{2GA}\Bigg]_0^{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{P^2 \ell^3}{6EI} + k\,\frac{P^2 \ell}{2GA}} \quad (3.4)$$

$$\boxed{\Delta_B = \frac{P\ell^3}{3EI} + k\,\frac{P\ell}{GA}} \quad (3.5)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)

پاسخ مثال 3-

در رابطه (3.5) عبارت‌های اول و دوم به ترتیب نشان دهنده تغییر شکل خمشی و برشی می‌باشد. اگر کل مقدار تغییر شکل را برحسب تغییر شکل خمشی بنویسیم خواهیم داشت:

$$(3.5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_B = \frac{P\ell^3}{3EI}\left(1 + \frac{3kEI}{\ell^2 GA}\right)} \quad (3.6)$$

برای مقطع مستطیلی از جنس فولاد، مشخصات هندسی و مکانیکی آن به صورت زیر است:

$$\boxed{I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad A = bh \quad , \quad \frac{E}{G} = 2.5 \quad , \quad k = 1.2 \quad , \quad \ell = \beta h} \quad (3.7)$$

با جایگذاری رابطه (3.7) در رابطه (3.6) نتیجه می‌شود:

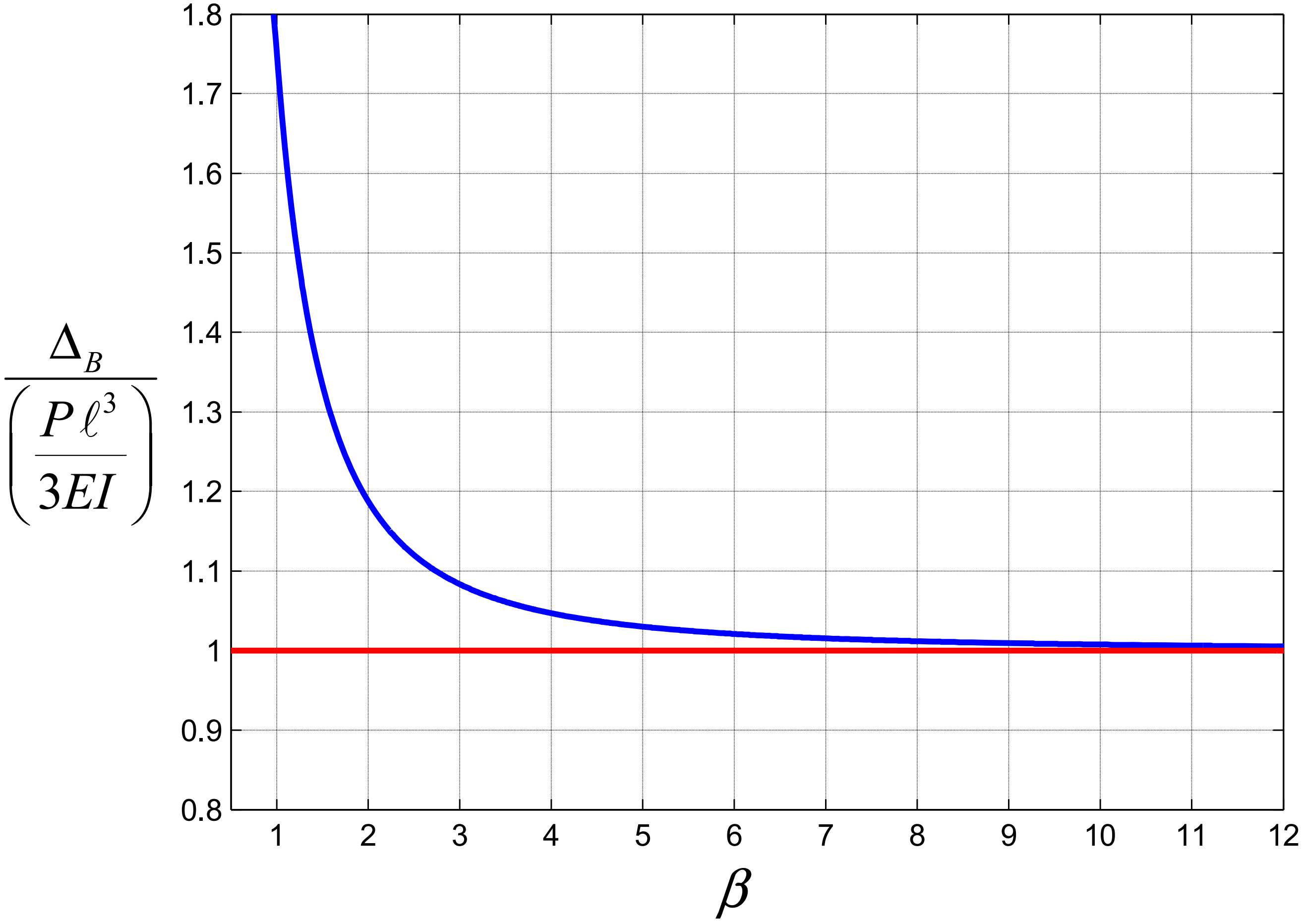
$$(3.7) \rightarrow (3.6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta_B}{\left(\dfrac{P\ell^3}{3EI}\right)} = \left(1 + 0.75\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right)} \quad (3.8)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

روش کار حقیقی (اصل بقای انرژی)

$$\frac{\Delta_B}{\left(\frac{P\ell^3}{3EI}\right)} = \left(1+0.75\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right) \quad (3.8)$$

پاسخ مثال 3-



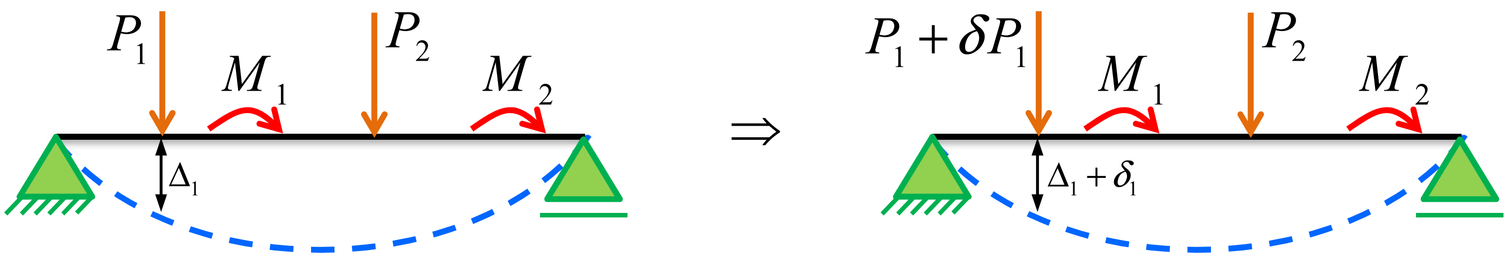
از نمودار می‌توان نتیجه گرفت که برای یک تیر با طول کوتاه $\beta = 1$(به طور مثال $\ell = h$) تغییرشکل کل مساوی $1/75$ برابر تغییر شکل خمشی می‌باشد. یعنی تغییر شکل برشی نیز از اهمیت زیادی برخوردار است. این درحالی است که برای یک تیر با طول بلند $\beta = 10$(به طور مثال $\ell = 10h$) تغییرشکل کل تقریبا برابر با تغییر شکل خمشی می‌گردد. یعنی تغییر شکل برشی اثر ناچیزی دارد و می‌توان از اثر آن صرف نظر کرد.

نکته: در محاسبه تغییرشکل تیرهای معمولی که نسبت طول دهانه به ارتفاع مقطع آن‌ها همیشه بزرگتر از 10 باشد می‌توان از اثر تغییرشکل برشی صرف نظر کرد.

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

در یک سیستم سازه‌ای با فرض رفتار خطی مصالح، عدم وجود تغییرات درجه حرارت و همچنین عدم وجود نشست تکیه‌گاهی، مشتق جزئی انرژی کرنشی داخلی نسبت به هر نیروی موثر بر سیستم سازه‌ای با تغییر مکان نقطه اثر نیرو در امتداد راستای نیرو برابر است.

اثبات: فرض کنید در تیر نشان داده شده نیروی P_1 به اندازه δP_1 تغییر نماید.



در این حالت میزان تغییرات انرژی کرنشی داخلی و کار ناشی از نیروی δP_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial P_1}\delta P_1+\frac{\partial U}{\partial P_2}\delta P_2+\frac{\partial U}{\partial M_1}\delta M_1+\frac{\partial U}{\partial M_2}\delta M_2 \xRightarrow[\delta M_2=0]{\delta P_2=0,\ \delta M_1=0} \boxed{\delta U=\frac{\partial U}{\partial P_1}\delta P_1} \quad (42)$$

(تغییرات انرژی کرنشی داخلی)

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

اثبات:

(ضرب دو مقدار جزئی $=0$)

(کار ناشی از نیروی δP_1)

$$\delta W = \delta P_1 \cdot (\Delta_1 + \delta_1) = \delta P_1 \cdot \Delta_1 + \cancel{\delta P_1 \cdot \delta_1} \Rightarrow \boxed{\delta W = \delta P_1 \cdot \Delta_1} \quad (43)$$

طبق اصل بقای انرژی میزان تغییرات انرژی کرنشی داخلی با کار ناشی از نیروی δP_1 باید برابر باشد از این رو:

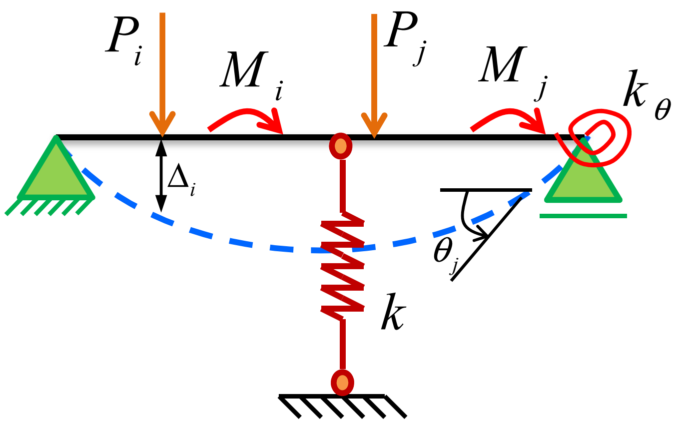
$$\delta U = \delta W \overset{(42)\&(43)}{\Rightarrow} \frac{\partial U}{\partial P_1}\delta P_1 = \delta P_1 \cdot \Delta_1 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial P_1} = \Delta_1} \quad (44)$$

رابطه (44) بیان‌گر آن است که مشتق جزئی انرژی کرنشی داخلی نسبت به نیروی P_1 با تغییر مکان نقطه اثر نیرو در امتداد راستای نیرو یعنی Δ_1 برابر است.

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

در قاب‌ها:



$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta_i = \int_0^\ell \frac{p_{(x)}}{EA}\frac{\partial p_{(x)}}{\partial P_i}d_x + \int_0^\ell \frac{M_{(x)}}{EI}\frac{\partial M_{(x)}}{\partial P_i}d_x + k\int_0^\ell \frac{V_{(x)}}{GA}\frac{\partial V_{(x)}}{\partial P_i}d_x + \int_0^\ell \frac{T_{(x)}}{GJ}\frac{\partial T_{(x)}}{\partial P_i}d_x + \sum \frac{F_s}{k}\frac{\partial F_s}{\partial P_i} + \sum \frac{M_s}{k_\theta}\frac{\partial M_s}{\partial P_i}}$$

(45)

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \quad \Rightarrow$$

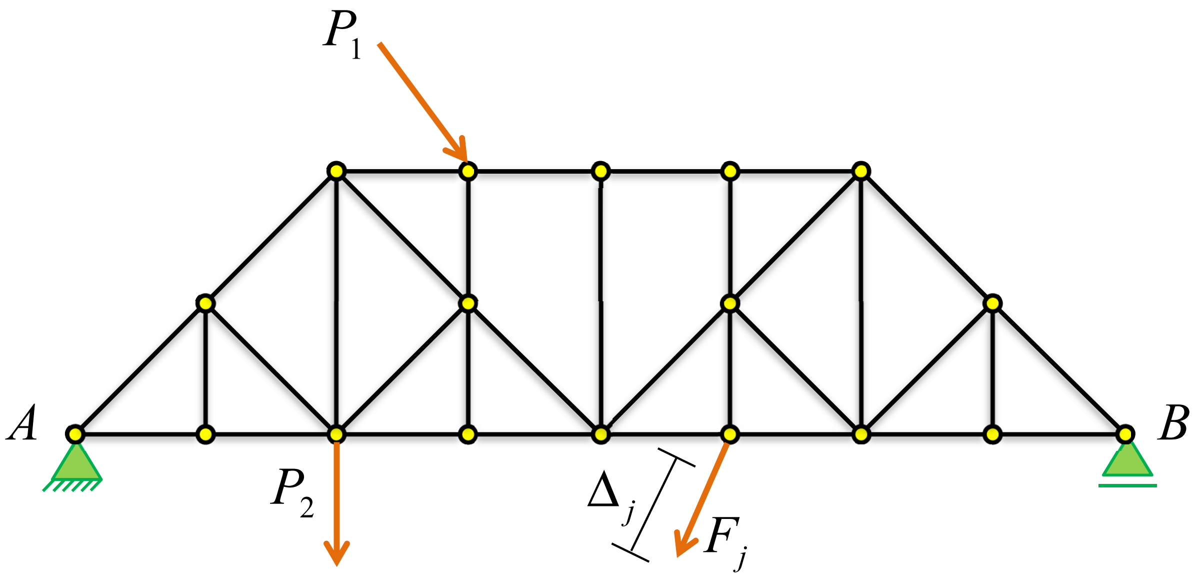
$$\boxed{\theta_j = \int_0^\ell \frac{p_{(x)}}{EA}\frac{\partial p_{(x)}}{\partial M_j}d_x + \int_0^\ell \frac{M_{(x)}}{EI}\frac{\partial M_{(x)}}{\partial M_j}d_x + k\int_0^\ell \frac{V_{(x)}}{GA}\frac{\partial V_{(x)}}{\partial M_j}d_x + \int_0^\ell \frac{T_{(x)}}{GJ}\frac{\partial T_{(x)}}{\partial M_j}d_x + \sum \frac{F_s}{k}\frac{\partial F_s}{\partial M_j} + \sum \frac{M_s}{k_\theta}\frac{\partial M_s}{\partial M_j}}$$

(46)

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

در خرپاها:

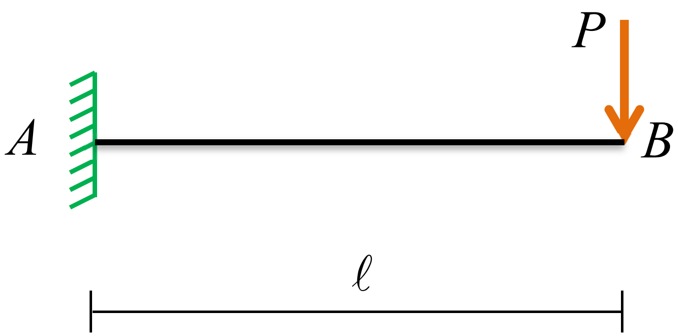


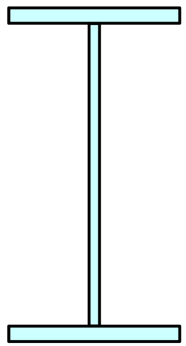
$$\Delta_j = \frac{\partial U}{\partial F_j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i \ell_i}{E_i A_i} \frac{\partial p_i}{\partial F_j}} \qquad (47)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

مثال 4- در تیر فولادی نشان داده شده مقدار تغییر شکل و شیب تحت اثر بار وارده در گره B را محاسبه نمایید.





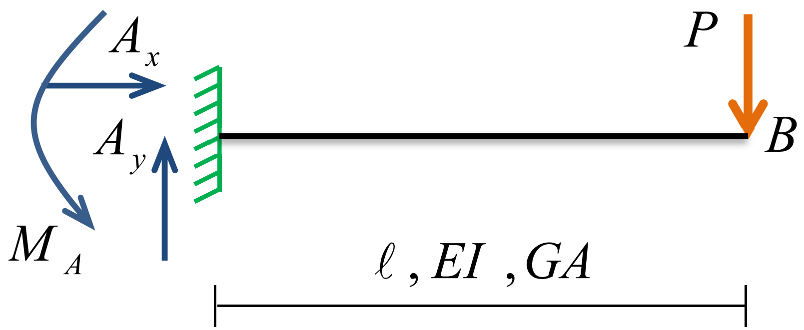
Cross Section

$$P = 5\,ton \qquad \ell = 3\,m \qquad k = 1$$

$$Steel:\begin{cases} E = 2\times10^6\ \dfrac{kg}{cm^2} \\ G = 8\times10^5\ \dfrac{kg}{cm^2} \end{cases} \qquad IPE\,160:\begin{cases} A_{web} = 8\,cm^2 \\ I = 869\,cm^4 \end{cases}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

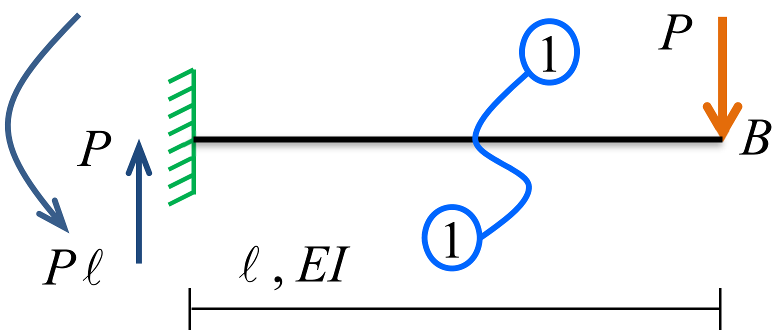


پاسخ مثال 4-

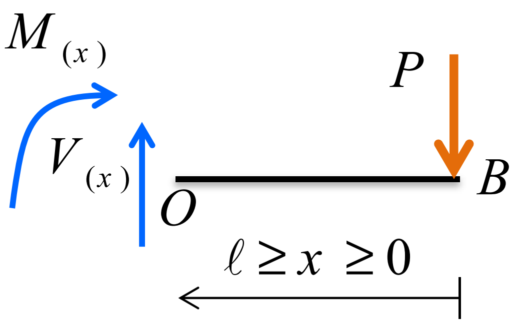
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_x = 0} \qquad \sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A - P \times \ell = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_A = P\ell}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y - p = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_y = P}$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} + P \times x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = -Px} \quad (4.1)$$

$$\ell \ge x \ge 0$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{(x)} - P = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{(x)} = P} \quad (4.2)$$

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 4-

$$= \left.\frac{Px^3}{3EI}\right]_0^{\ell} + k\left.\frac{Px}{GA}\right]_0^{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_B = \frac{P\ell^3}{3EI} + k\frac{P\ell}{GA}} \qquad (4.3)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (4.3) خواهیم داشت:

$$(4.3) \quad \Rightarrow \quad \Delta_B = \frac{P\ell^3}{3EI} + k\frac{P\ell}{GA}$$

$$= \frac{(5\times10^3\,kg)(3\times10^2\,cm)^3}{3\left(2\times10^6\,\frac{kg}{cm^2}\right)\left(869\,cm^4\right)} + (1)\frac{(5\times10^3\,kg)(3\times10^2\,cm)}{\left(8\times10^5\,\frac{kg}{cm^2}\right)\left(8\,cm^2\right)} = 25.892 + 0.234$$

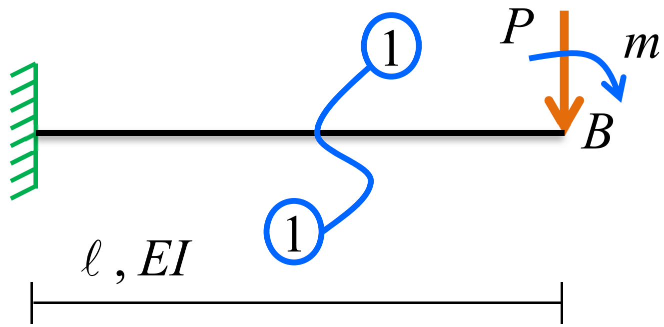
$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta_B = 26.126\,cm}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

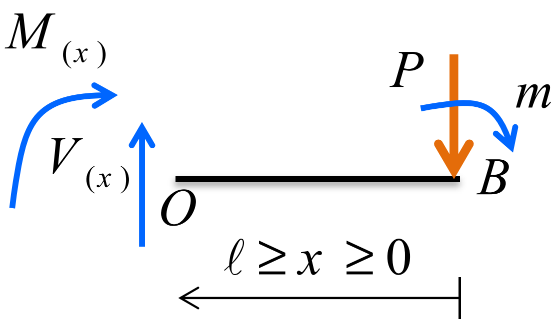
قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 4-

برای تعیین میزان دوران درگره B باید از انرژی نسبت به یک لنگر متمرکز درگره B مشتق جزئی گرفت. اما از آنجایی که درگره B لنگر خارجی وجود ندارد خودمان یک لنگر مجازی (با مقدار صفر) درگره B اعمال می‌کنیم تا انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه برحسب تابعی از m به دست آید.



با در نظرگرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} + P \times x + m = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = -Px - m} \quad (4.4)$$

$$\ell \geq x \geq 0$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{(x)} - P = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{(x)} = P} \quad (4.5)$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 4-

$$\left.\frac{Px^2}{2EI}\right]_0^{\ell} \Rightarrow \boxed{\theta_B = \frac{P\ell^2}{2EI}} \quad (4.6)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (4.6) خواهیم داشت:

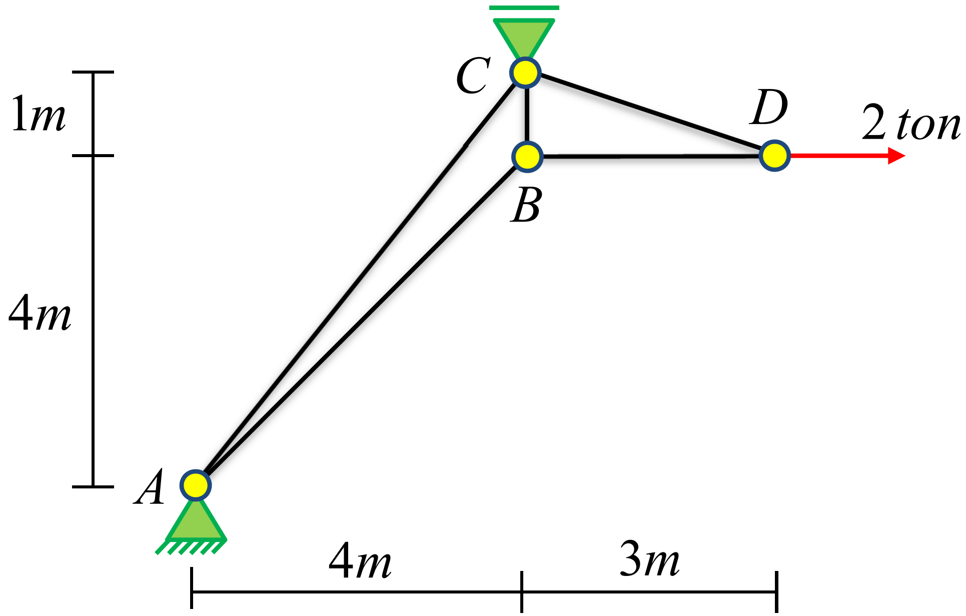
$$(4.6) \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{P\ell^2}{2EI} = \frac{(5\times10^3\,kg)(3\times10^2\,cm)^2}{2\left(2\times10^6\,\dfrac{kg}{cm^2}\right)\left(869\,cm^4\right)} \Rightarrow \boxed{\theta_B = 0.129\ ^{rad}}$$

ETABS File Name: **04-Example-04.EDB**

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

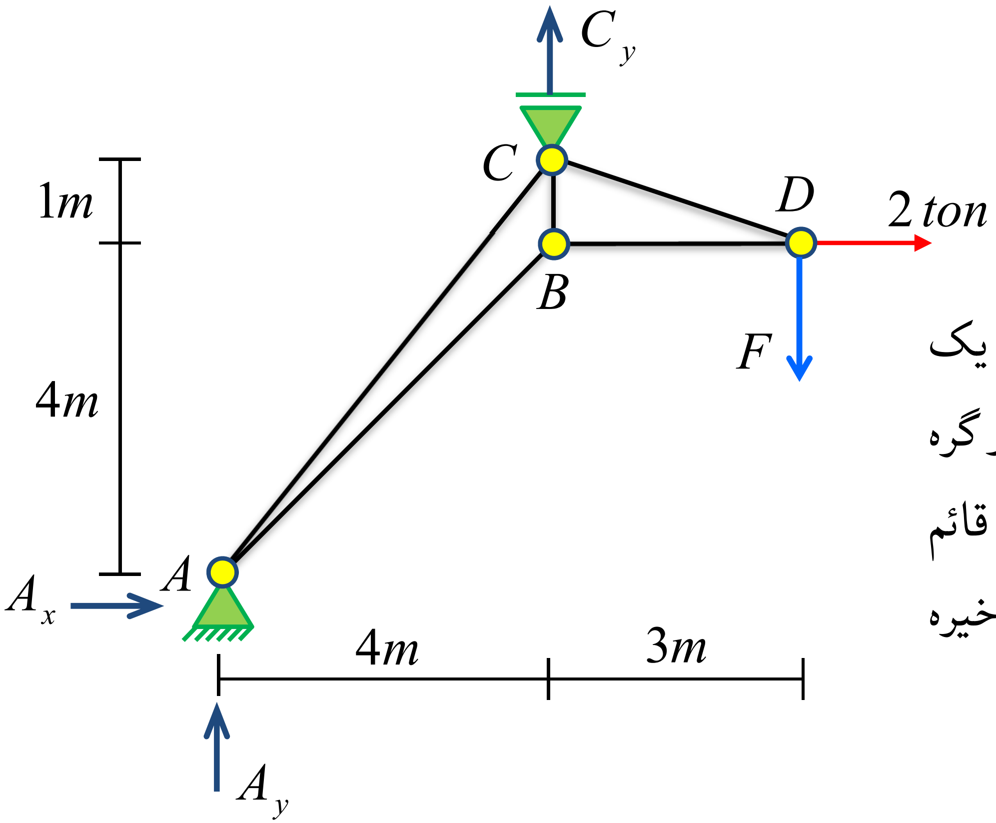
مثال 5- در خرپای نشان داده شده جابجایی قائم گره D را محاسبه نمایید.



$$\begin{cases} E_i = 2\times10^6 \dfrac{kg}{cm^2} \\ A_i = 10\,cm^2 \end{cases}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



پاسخ مثال 5-

برای تعیین میزان جابجایی قائم در گره D باید از انرژی نسبت به یک نیروی متمرکز قائم در گره D مشتق جزئی گرفت. اما از آنجایی که در گره D نیروی متمرکز قائم وجود ندارد خودمان یک نیروی متمرکز قائم مجازی (با مقدار صفر) در گره D اعمال می‌کنیم تا انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه برحسب تابعی از F به دست آید.

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

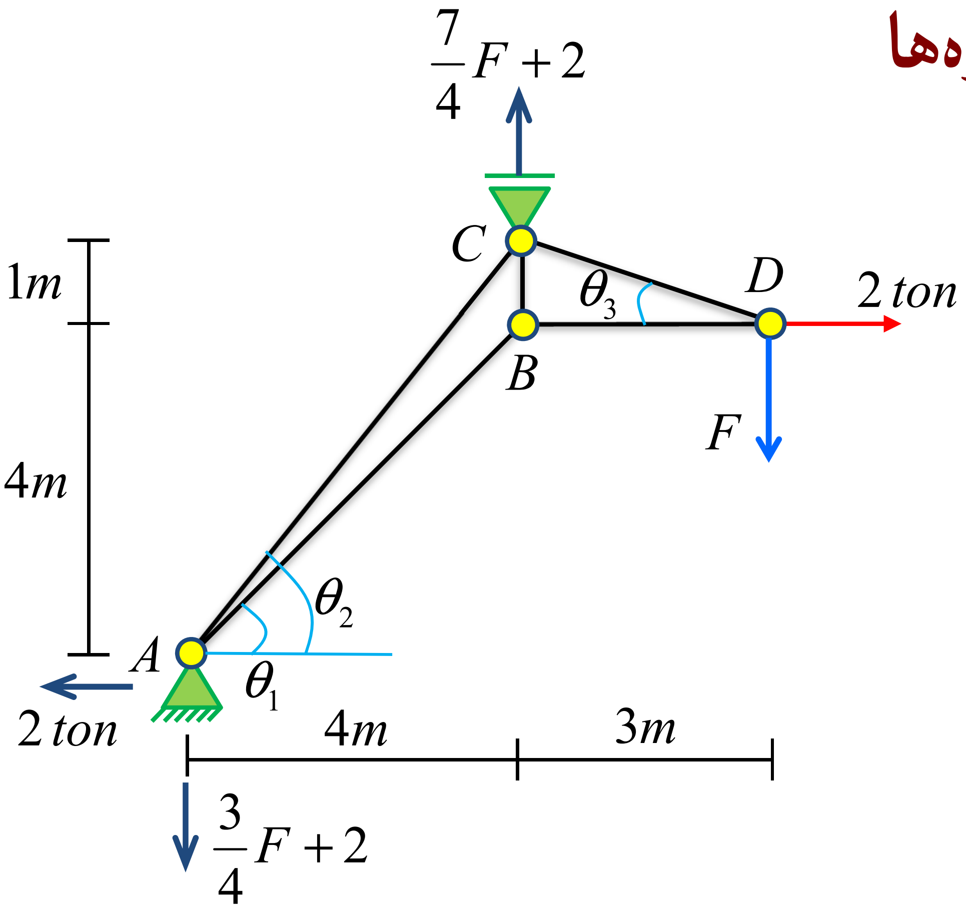
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_x = -2\,ton}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \;\Rightarrow\; C_y \times 4 - F \times 7 - 2 \times 4 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{C_y = \frac{7}{4}F + 2} \quad (5.1)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y + C_y - F = 0 \;\overset{(5.1)}{\Rightarrow}\; \boxed{A_y = -\frac{3}{4}F - 2}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



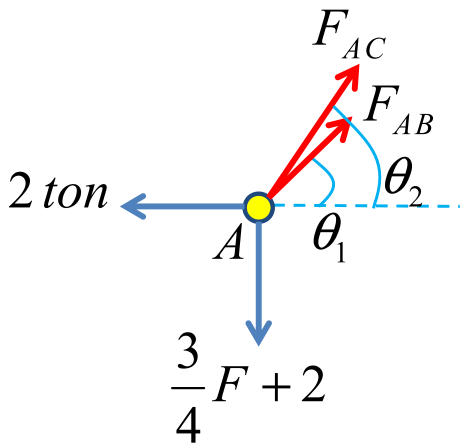
پاسخ مثال 5-

$$\sin(\theta_1)=\cos(\theta_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{5}{\sqrt{41}} \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



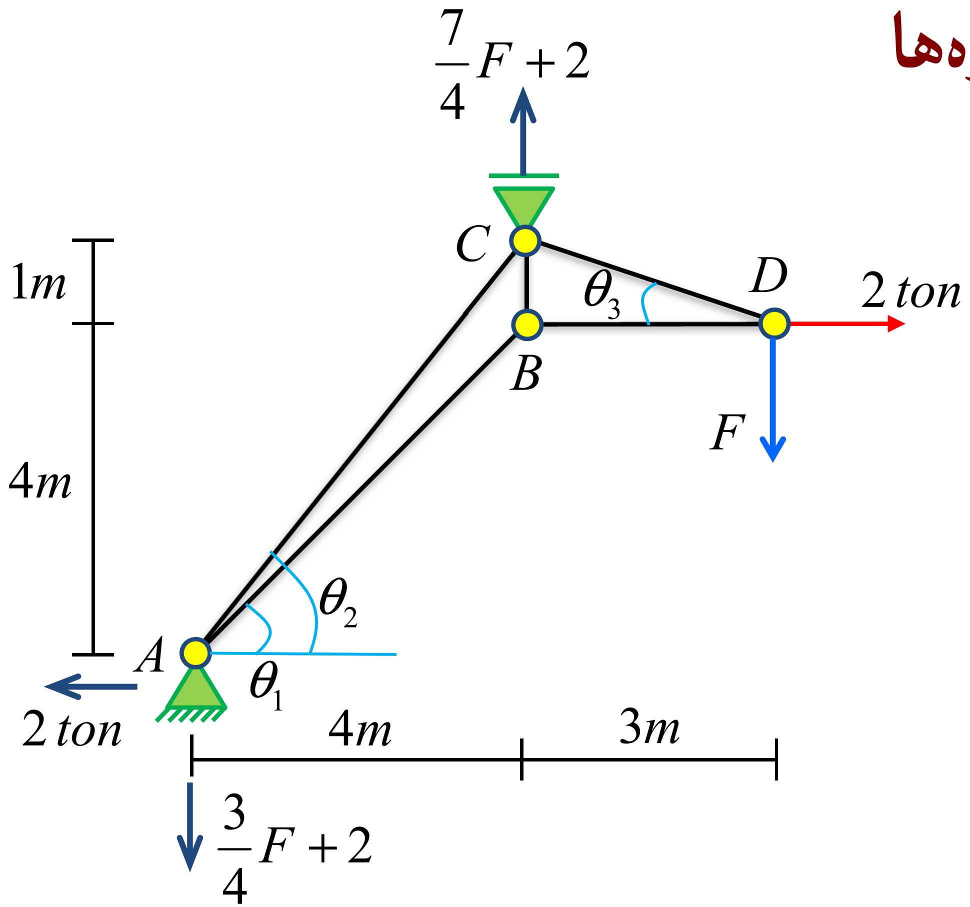
$$\sum F_x=0 \Rightarrow -2+F_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}+F_{AC}\frac{4}{\sqrt{41}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow -\frac{3}{4}F-2+F_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}+F_{AC}\frac{5}{\sqrt{41}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_{AB}=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}F \\ F_{AC}=\dfrac{3\sqrt{41}}{4}F \end{cases}}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



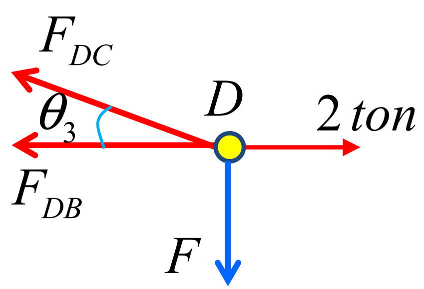
پاسخ مثال 5-

$$\sin(\theta_1)=\cos(\theta_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta_2)=\frac{5}{\sqrt{41}} \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



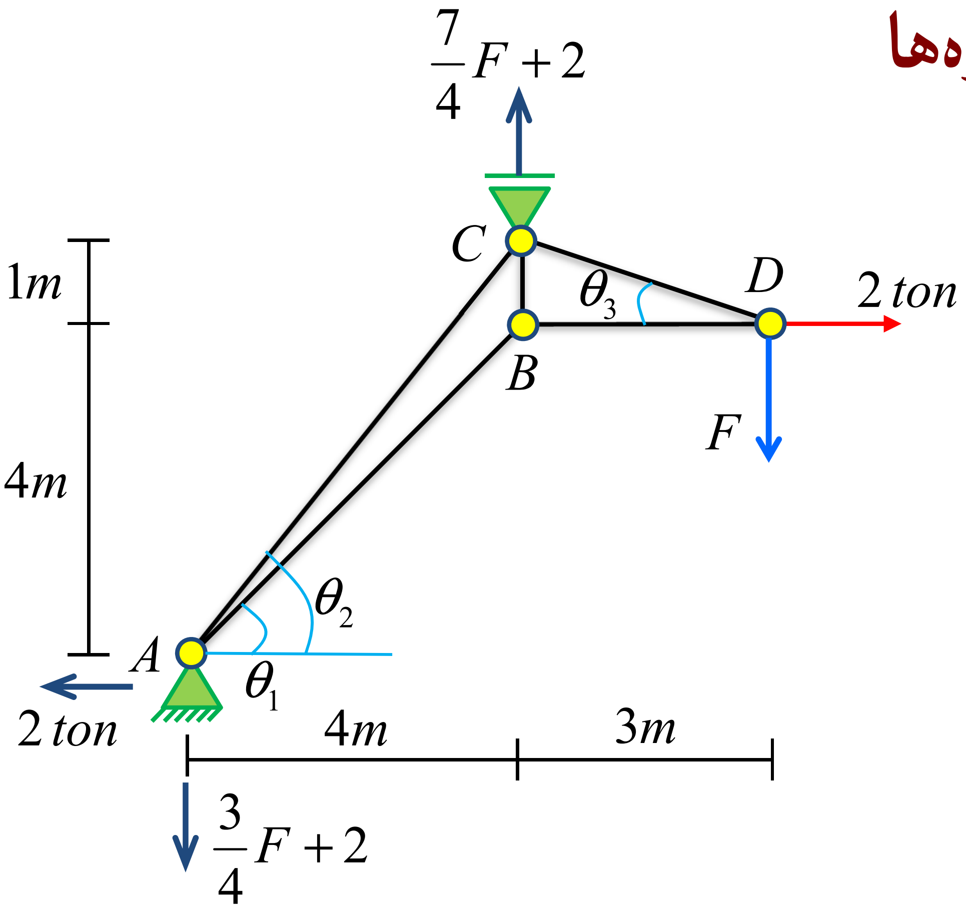
$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{DB}-F_{DC}\frac{3}{\sqrt{10}}+2=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow -F+F_{DC}\frac{1}{\sqrt{10}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_{DB}=2-3F \\ F_{DC}=\sqrt{10}F \end{cases}}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

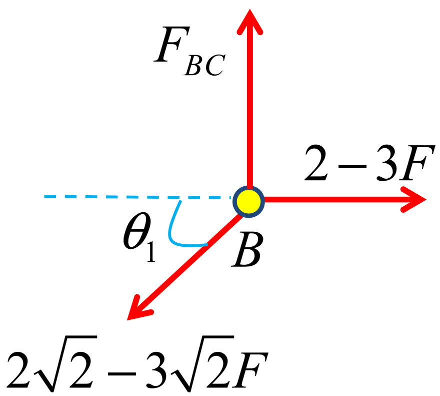
قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



پاسخ مثال 5-

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sin(\theta_1)=\cos(\theta_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\sin(\theta_2)=\frac{5}{\sqrt{41}} \quad , \quad \cos(\theta_2)=\frac{4}{\sqrt{41}}\\
&\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; F_{BC}-(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}F)\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{F_{BC}=2-3F}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 5-

$$\boxed{\Delta_D = \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{5} p_i \ell_i \frac{\partial p_i}{\partial F}} \quad (5.2)$$

$$\boxed{EA = 2\times 10^4\ (ton)} \quad (5.3)$$

عضو	$\ell_i\ (m)$	$p_i\ (ton)$	$\frac{\partial p_i}{\partial F}$	$p_i \ell_i \frac{\partial p_i}{\partial F}$
AB	$\sqrt{32}$	$2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\cancelto{0}{F}$	$-3\sqrt{2}$	$-48\sqrt{2}$
AC	$\sqrt{41}$	$\frac{3\sqrt{41}}{4}\cancelto{0}{F}$	$\frac{3\sqrt{41}}{4}$	0
DB	3	$2-3\cancelto{0}{F}$	-3	-18
DC	$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}\cancelto{0}{F}$	$\sqrt{10}$	0
BC	1	$2-3\cancelto{0}{F}$	-3	-6
			$\sum$	-91.882

$(5.2)\,\&\,(5.3) \Rightarrow$

$$\boxed{}$$

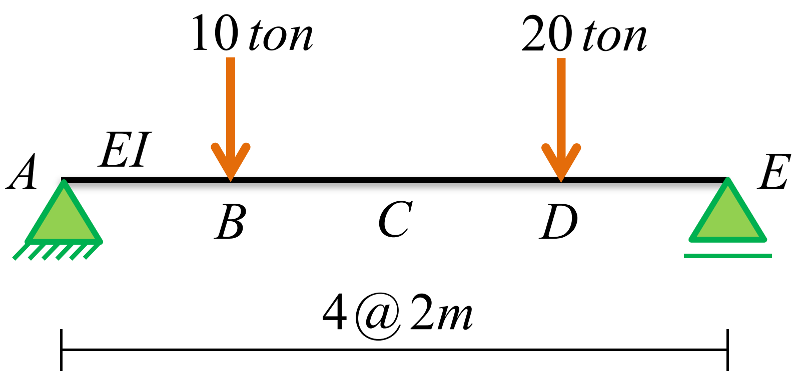
جابجایی در خلاف جهت نیروی F ایجاد می‌شود.

ETABS File Name: **04-Example-05.EDB**

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

مثال 6- در تیر نشان داده شده مقدار شیب و خیز در گره C را محاسبه نمایید.



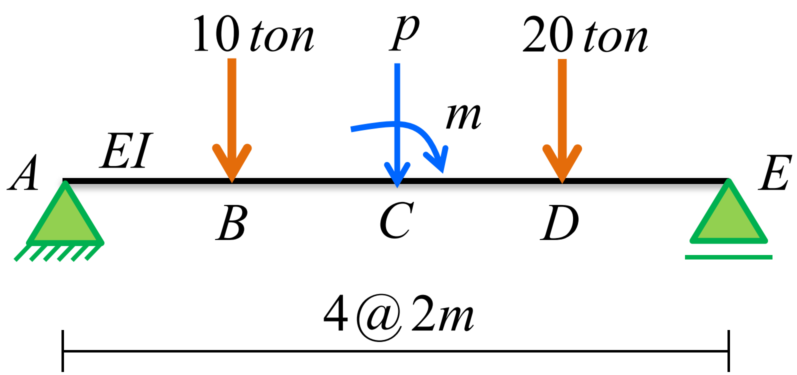
$$EI = 2000\, ton.m^2$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 6-

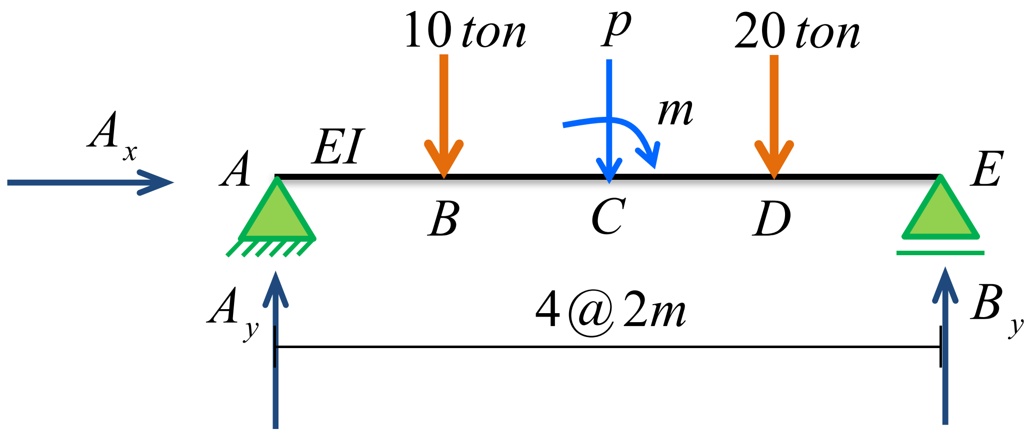
برای تعیین میزان خیز (دوران) در گره C باید از انرژی نسبت به یک نیرو متمرکز (لنگر خارجی) در گره C مشتق جزئی گرفت. اما از آنجایی که در گره C نیروی متمرکز (لنگر خارجی) وجود ندارد خودمان یک نیروی متمرکز (لنگر خارجی) مجازی با مقدار صفر در گره C اعمال می‌کنیم تا انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه برحسب تابعی از p (m) به دست آید.



روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 6-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

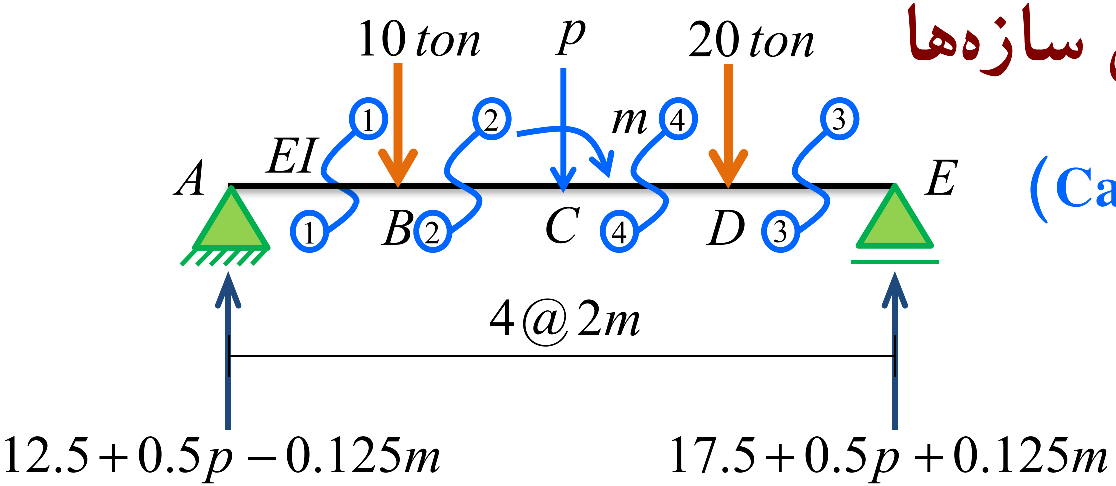
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \times 8 - 20\times 6 - p\times 4 - 10\times 2 - m = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = 17.5 + 0.5p + 0.125m} \quad (6.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y - 10 - p - 20 = 0 \quad \overset{(6.1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{A_y = 12.5 + 0.5p - 0.125m}$$

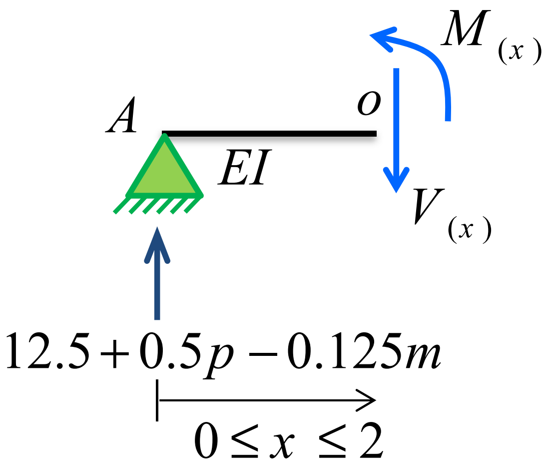
روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



پاسخ مثال 6-

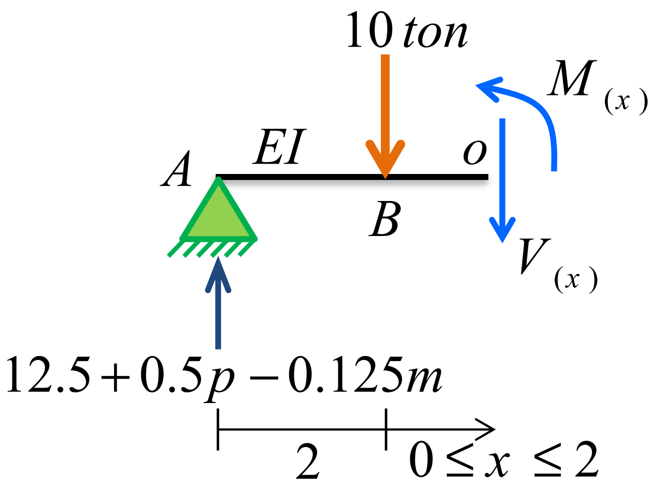
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = (12.5 + 0.5p - 0.125m) \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 12.5x + 0.5px - 0.125mx}$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

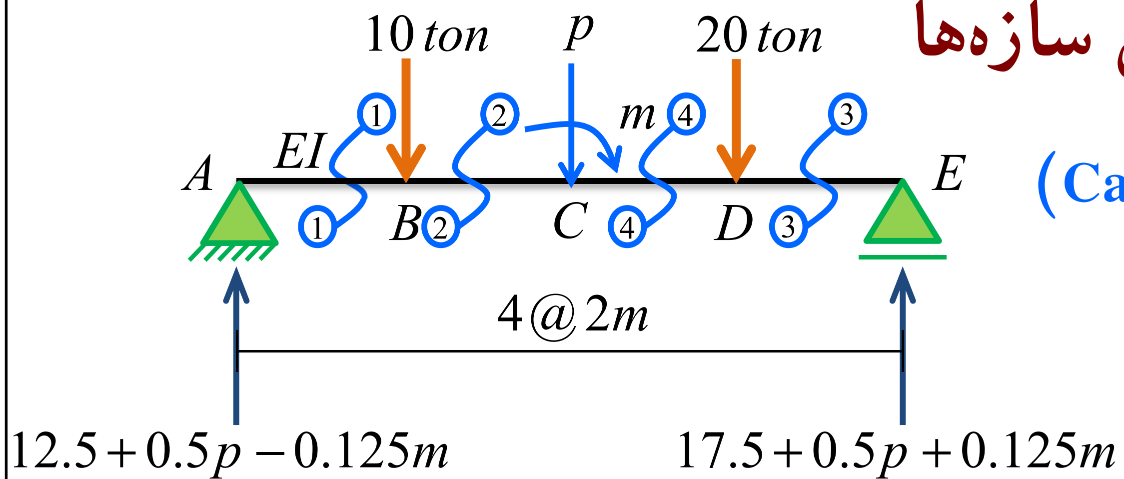


$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 10x - (12.5 + 0.5p - 0.125m)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 2.5x + 0.5px - 0.125mx + p - 0.25m + 25}$$

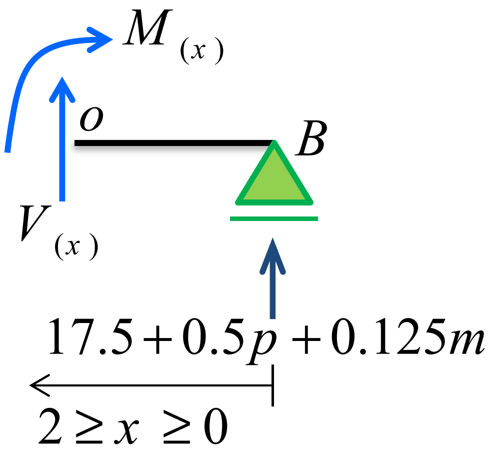
روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



پاسخ مثال 6-

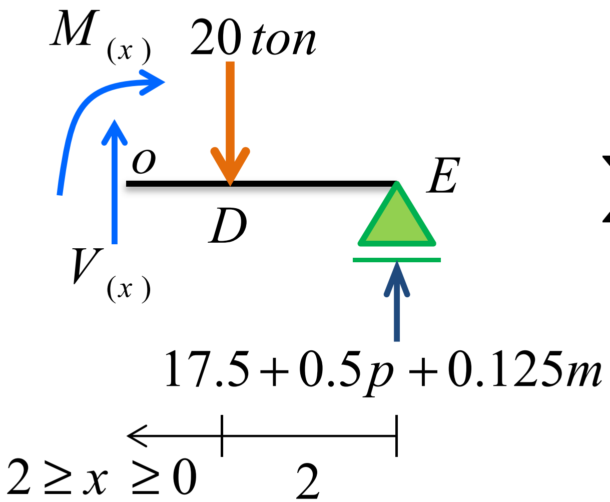
با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} = (17.5 + 0.5p + 0.125m)\cdot x$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 17.5x + 0.5px + 0.125mx}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 4-4 خواهیم داشت:

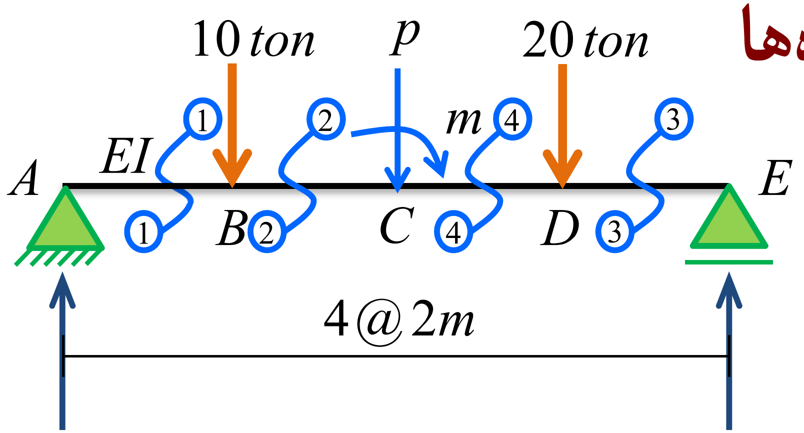


$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} + 20x - (17.5 + 0.5p + 0.125m)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -2.5x + 0.5px + 0.125mx + p + 0.25m + 35}$$

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 6-



محاسبه خیز درگره C :

$$(45)\quad \Rightarrow \quad \Delta_C = \int_0^{\ell} \frac{M_{(x)}}{EI}\frac{\partial M_{(x)}}{\partial p} d_x$$

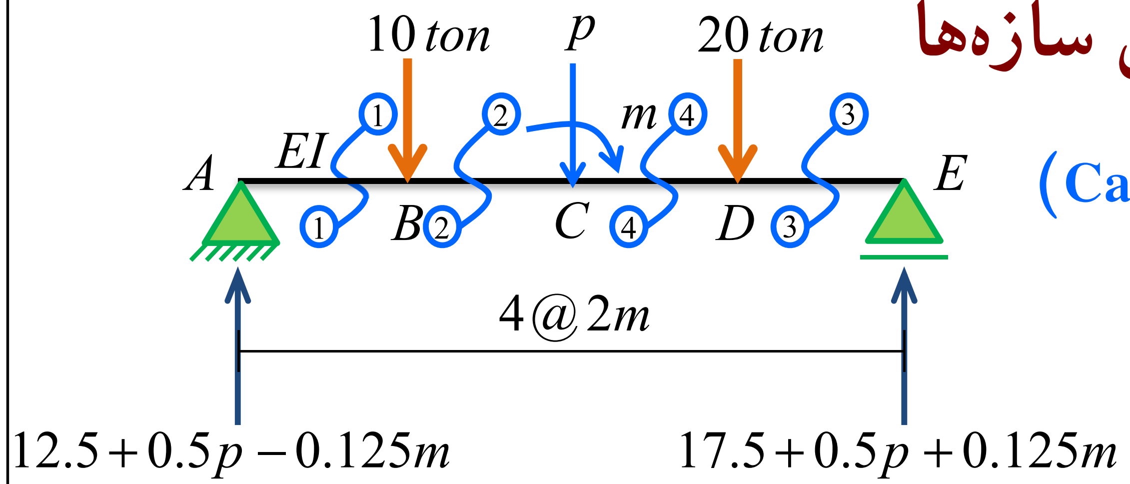
$$= \int_0^2 \frac{12.5x + 0.5px - 0.125mx}{EI}(0.5x)d_x + \int_0^2 \frac{2.5x + 0.5px - 0.125mx + p - 0.25m + 25}{EI}(0.5x+1)d_x$$

$$+ \int_0^2 \frac{17.5x + 0.5px + 0.125mx}{EI}(0.5x)d_x + \int_0^2 \frac{-2.5x + 0.5px + 0.125mx + p + 0.25m + 35}{EI}(0.5x+1)d_x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{2.0833x^3}{EI}\Big]_0^2 + \frac{0.4167x^3 + 7.5x^2 + 25x}{EI}\Big]_0^2 + \frac{2.9167x^3}{EI}\Big]_0^2 + \frac{-0.4167x^3 + 7.5x^2 + 35x}{EI}\Big]_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{16.6664 + 83.3336 + 23.3336 + 96.6664}{EI} = \frac{220}{2000}\times 10^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_C = 11\,(cm)}$$

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



پاسخ مثال 6-

محاسبه شیب در گره C :

$$(46) \quad \Rightarrow \quad \theta_C = \int_0^{\ell} \frac{M_{(x)}}{EI}\frac{\partial M_{(x)}}{\partial m} d_x$$

$$= \int_0^2 \frac{12.5x + 0.5px - 0.125mx}{EI}(-0.125x)d_x + \int_0^2 \frac{2.5x + 0.5px - 0.125mx + p - 0.25m + 25}{EI}(-0.125x - 0.25)d_x$$

$$+ \int_0^2 \frac{17.5x + 0.5px + 0.125mx}{EI}(0.125x)d_x + \int_0^2 \frac{-2.5x + 0.5px + 0.125mx + p + 0.25m + 35}{EI}(0.125x + 0.25)d_x$$

$$\Rightarrow \quad \theta_C = \left.\frac{-0.5208x^3}{EI}\right]_0^2 + \left.\frac{-0.1042x^3 - 1.875x^2 - 6.25x}{EI}\right]_0^2 + \left.\frac{0.7292x^3}{EI}\right]_0^2 + \left.\frac{-0.1042x^3 + 1.875x^2 + 8.75x}{EI}\right]_0^2$$

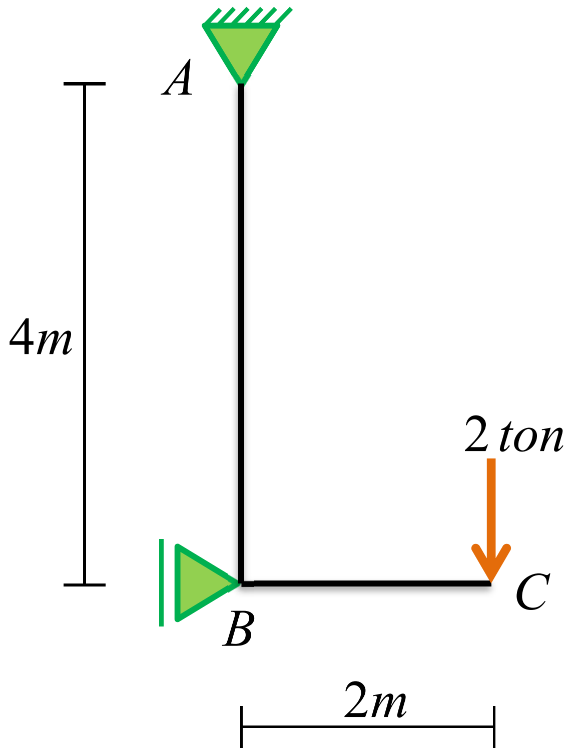
$$\Rightarrow \quad \theta_C = \frac{-4.1664 - 20.8336 + 5.8336 + 24.1664}{EI} = \frac{5}{2000} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_C = 0.0025^{rad}}$$

ETABS File Name: **04-Example-06.EDB**

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

مثال 7– تغییرمکان قائم گره C در قاب نشان داده را محاسبه نمایید.

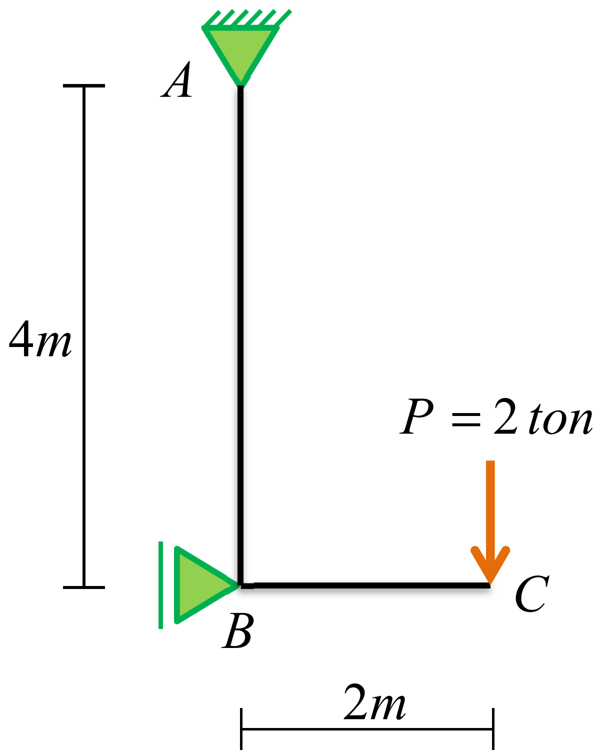
$$EI = 2000\, ton.m^2$$



روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

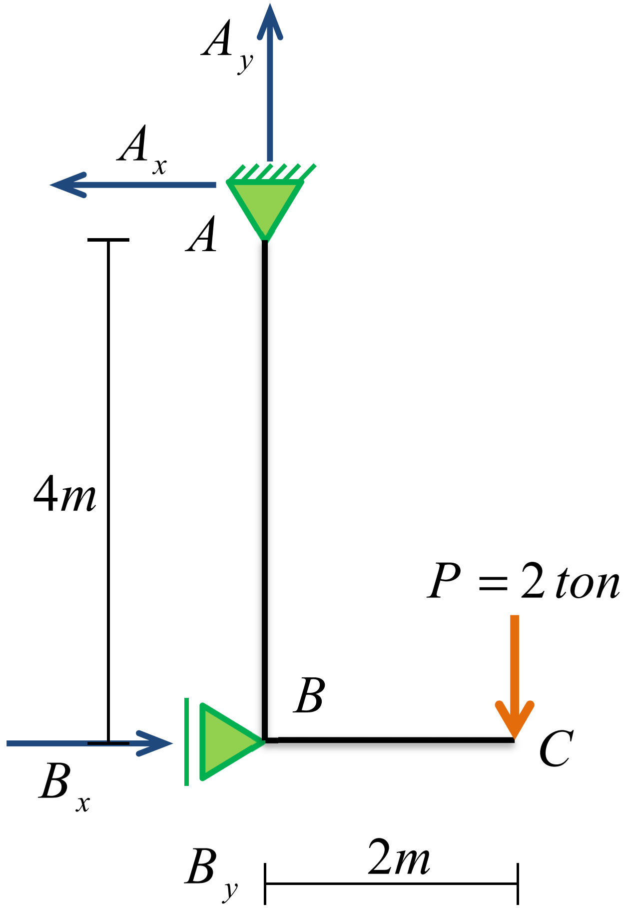
پاسخ مثال 7-



برای تعیین میزان خیز قائم در گره C باید از انرژی نسبت به یک نیرو متمرکز قائم در گره C مشتق جزئی گرفت. برای این منظور ابتدا بار متمرکز قائم وارده در گره C را با مقدار P در نظر می‌گیریم تا با این کار انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه برحسب تابعی از P به دست آید و بتوان از انرژی نسبت به P مشتق جزئی گرفت.

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 7-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

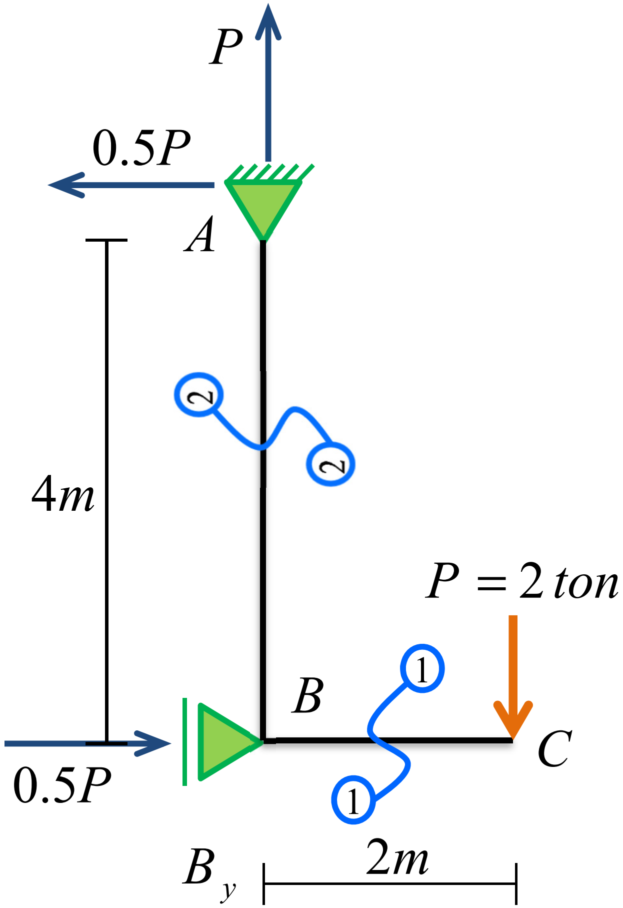
$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; -P\times 2 + A_x \times 4 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_x = 0.5P} \quad (7.1)$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; B_x - A_x = 0 \;\overset{(7.1)}{\Rightarrow}\; \boxed{B_x = 0.5P}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y - P = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_y = P}$$

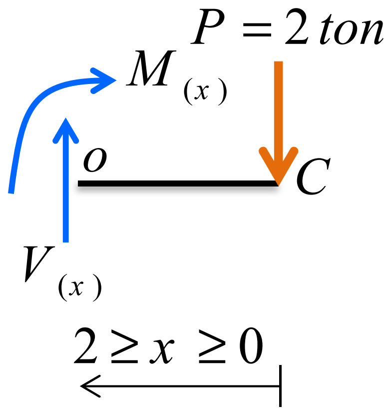
روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



پاسخ مثال 7-

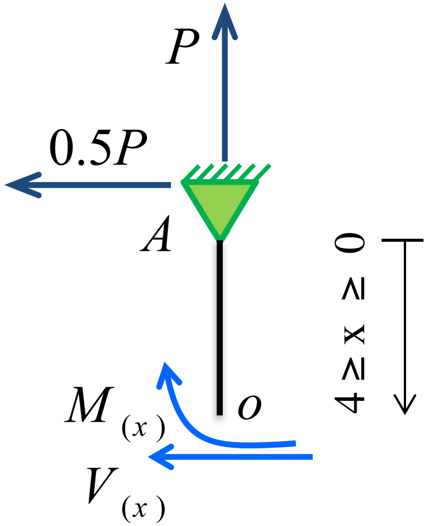
با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - Px = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -Px}$$

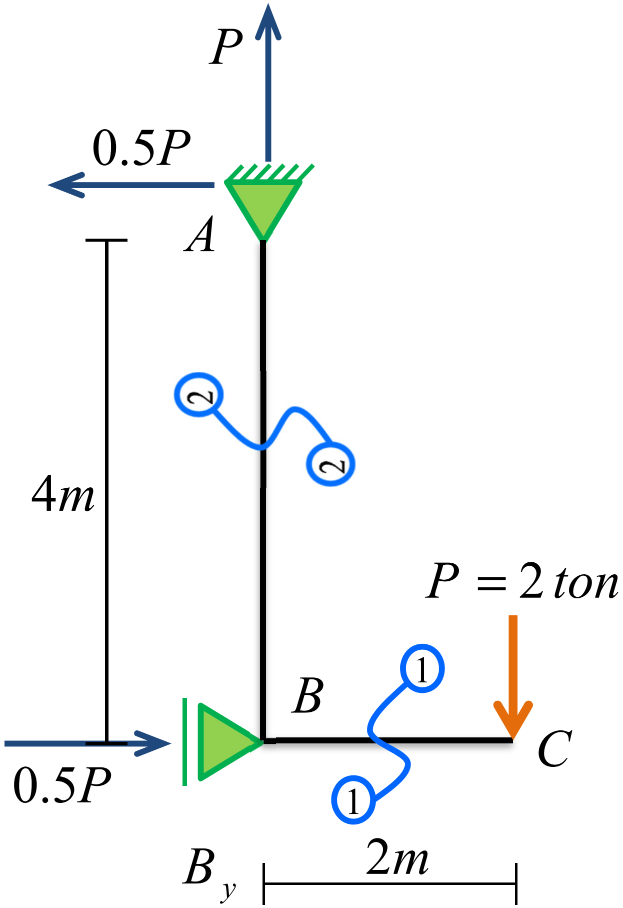
با در نظر گرفتن سمت بالا مقطع 2-2 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 0.5Px = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0.5Px}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)



پاسخ مثال 7-

محاسبه خیز در گره C :

$$= \left.\frac{Px^3}{3EI}\right]_0^2 + \left.\frac{0.25Px^3}{3EI}\right]_0^4$$

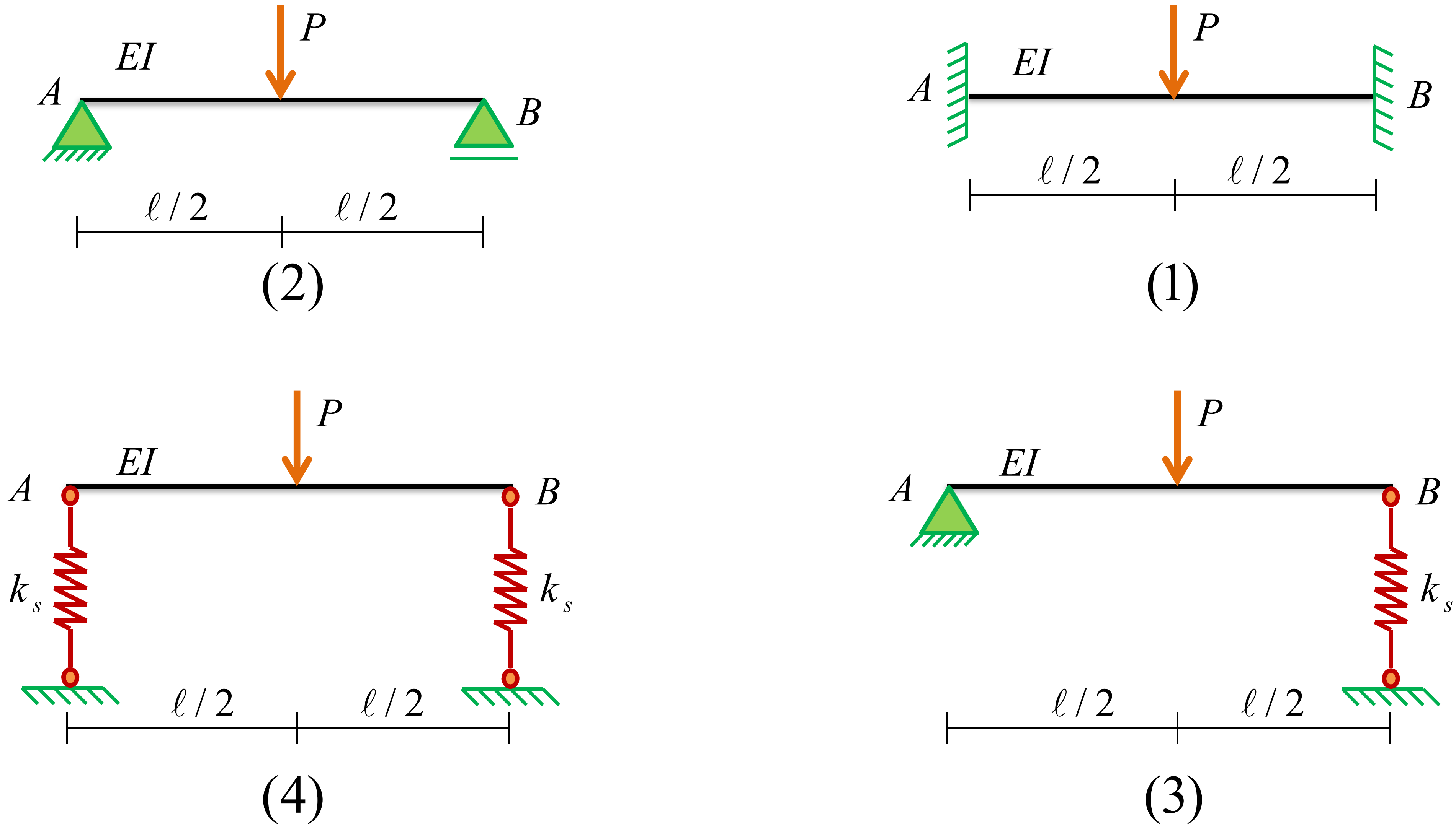
$$\Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{8P + 16P}{3EI} = \frac{8P}{EI} = \frac{8\times 2}{2000}\times 10^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_C = 0.8\,(cm)}$$

ETABS File Name: **04-Example-07.EDB**

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

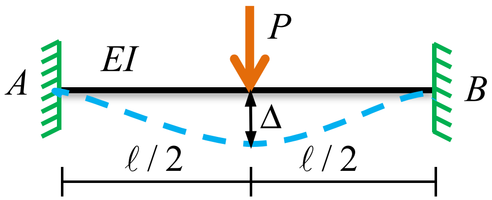
مثال 8- درکدام یک از سازه‌های زیر انرژی بیشتری ذخیره می‌شود؟ بار P در وسط تیر اثر می‌کند و $EI = cte$.



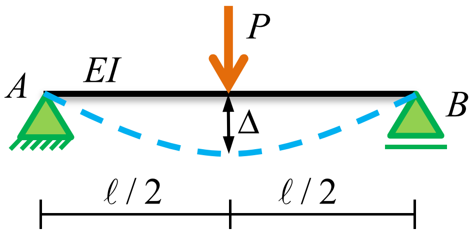
روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

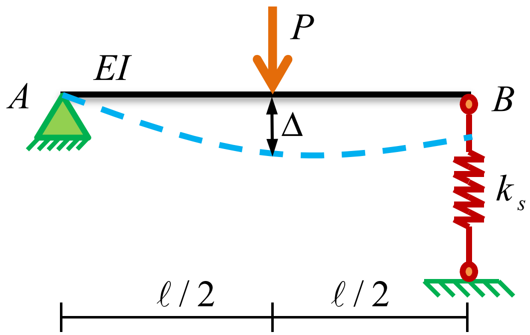
پاسخ مثال 8- .



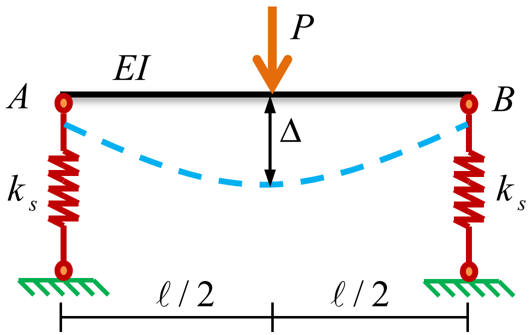
(1)



(2)



(3)

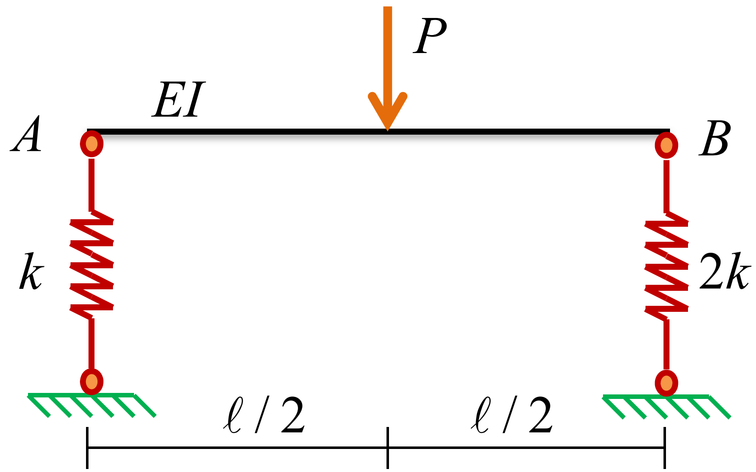


(4)

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

مثال 9- تغییرمکان وسط تیر نشان داده شده را تعیین نمایید:



$P = 1\, ton$

$EI = 200\, ton.m^2$

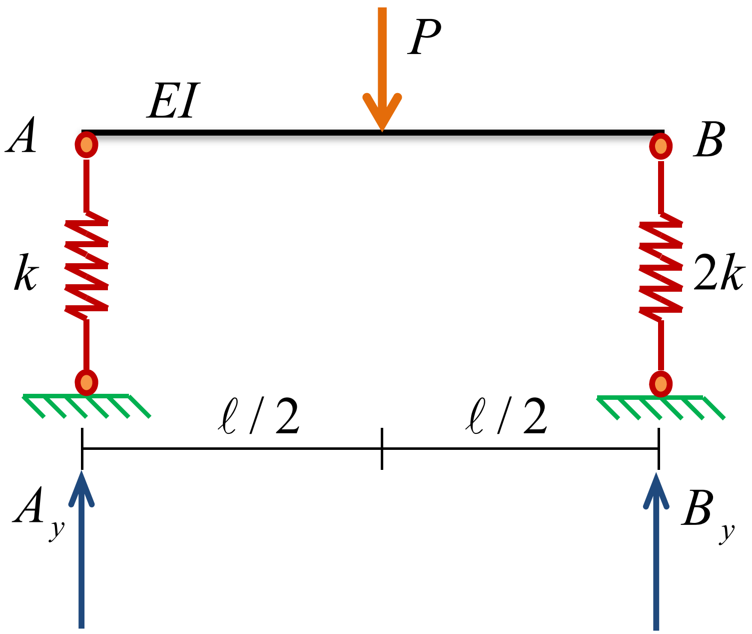
$k = 9.375\, ton/m$

$\ell = 4\, m$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 9-



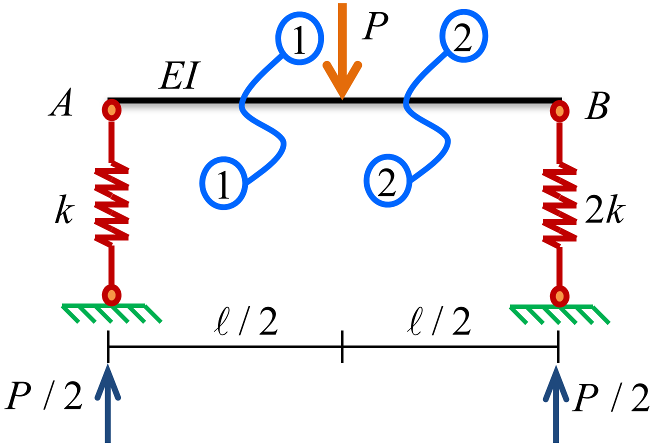
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \ell - P\ell/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = P/2}$$

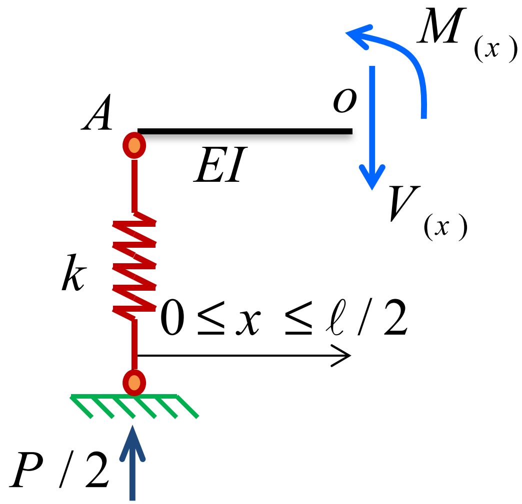
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + P/2 = P \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = P/2}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

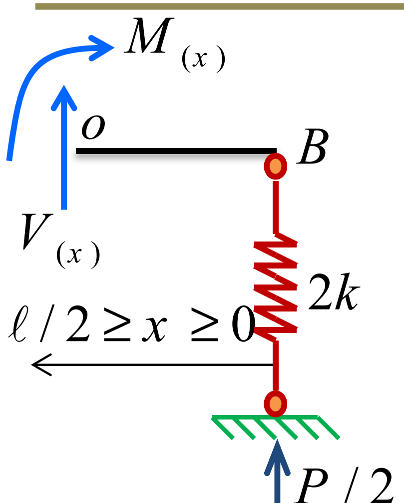


پاسخ مثال 9-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = Px/2}$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = Px/2}$$

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

پاسخ مثال 9-

محاسبه خیز وسط تیر

$$= \frac{P}{4k} + \frac{P}{8k} + \frac{Px^3}{12EI}\Bigg]_0^{\ell/2} + \frac{Px^3}{12EI}\Bigg]_0^{\ell/2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{3P}{8k} + \frac{P\ell^3}{48EI} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{3(1)}{8(9.375)} + \frac{(1)(4)^3}{48(200)}\right)\times 10^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = 4 + 0.67 = 4.67\ cm}$$

ETABS File Name: **04-Example-09.EDB**