دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

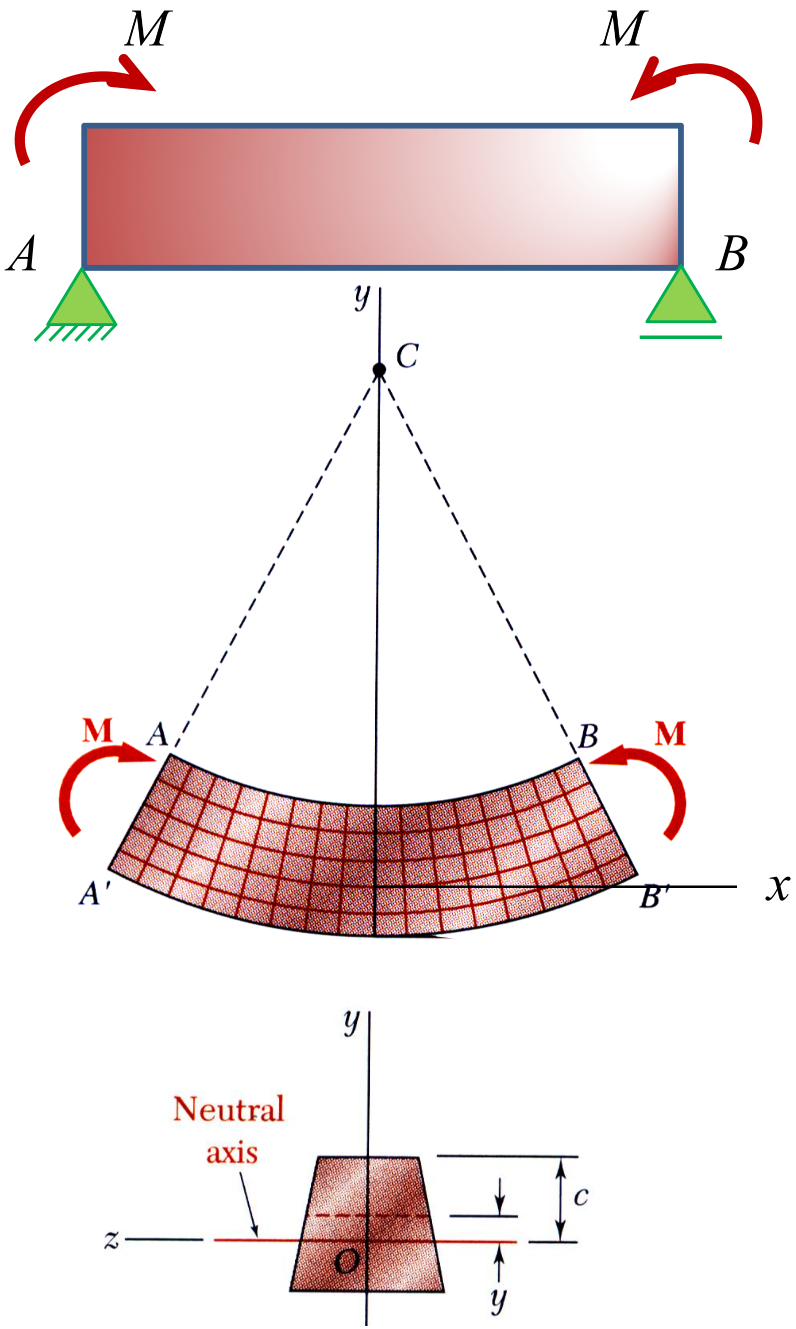
تحلیل سازه‌ها

تغییر شکل در تیرهای معین

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

تغییر شکل در تیرهای معین

خمش خالص:

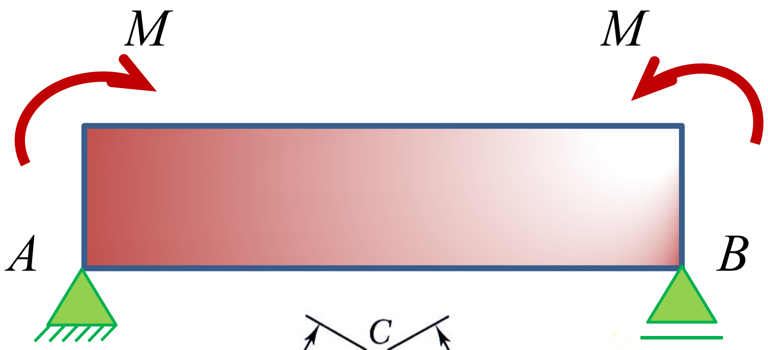


در شکل نشان داده شده یک تیر متقارن (با صفحه تقارن عمود بر محور z) تحت اثر خمش خالص دارد:

- بعد از خمش عضو به صورت متقارن باقی می‌ماند.
- عضو به صورت یکنواخت خم شده و هر تار آن تشکیل یک کمان دایره‌ای می‌دهد.
- صفحه مقطع عرضی که از مرکز کمان عبور می‌کند بعد از خم شدن به صورت صفحه‌ای باقی می‌ماند.
- طول تارهای طولی بالایی و پایینی به ترتیب کم و زیاد می‌شود.
- یک تار خنثی باید وجود داشته باشد به طوریکه طول آن تغییری نمی‌کند.
- تنش‌های ایجاد شده در بالای تارخنثی فشاری و در پایین آن کششی می‌باشند.

تغییر شکل در تیرهای معین

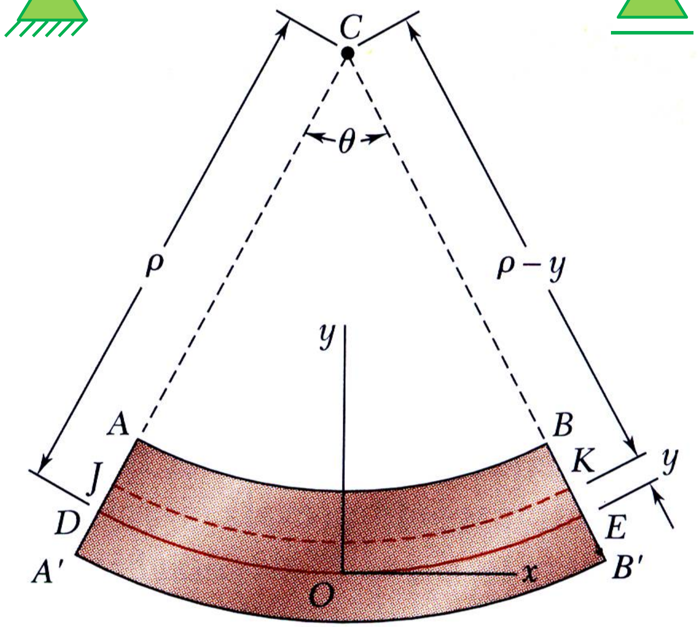
خمش خالص:



طول تار خنثی $\overline{DE}$ در اثر خمش تغییر نمی‌کند و برابر با طول اولیه میله L_1 است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{L_1 = \rho\theta} \qquad (1)$$

ρ : شعاع انحنای تیر در حالت تغییرشکل یافته

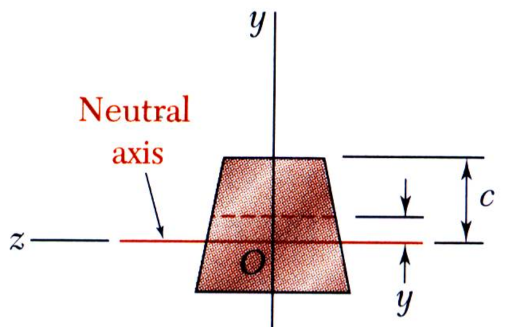


طول ثانویه تیر در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی به صورت زیر است:

$$\boxed{L_2 = (\rho - y)\theta} \qquad (2)$$

مقدار تغییر طول تیر در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی برابر است با:

$$\delta = L_2 - L_1 \overset{(1)\&(2)}{\Rightarrow} \delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta \Rightarrow \boxed{\delta = -y\,\theta} \qquad (3)$$



مقدار کرنش در جهت x در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی برابر است با:

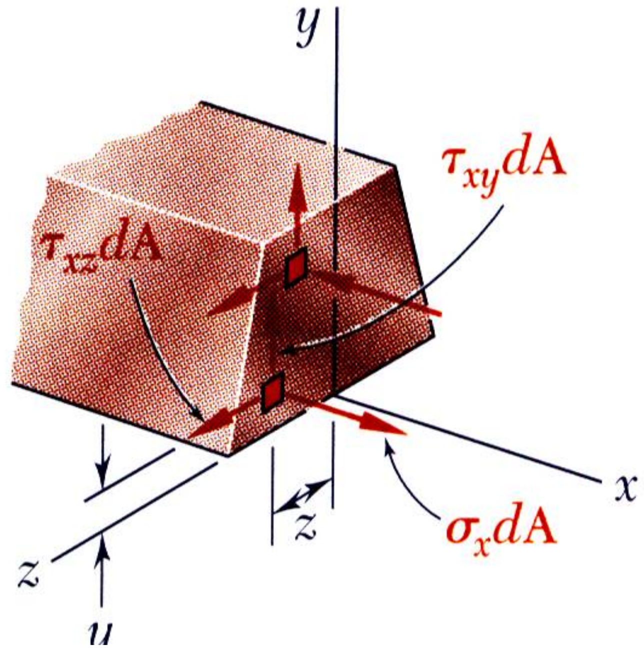
$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L_1} \overset{(1)\&(3)}{\Rightarrow} \varepsilon_x = \frac{-y\,\theta}{\rho\theta} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}} \qquad (4)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

خمش خالص:

به کمک قانون هوک $\sigma = E\,\varepsilon$ مقدار تنش در جهت x در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی برابر است با:

$$Hook\ \ Law:\quad \sigma_x = E\,\varepsilon_x \ \overset{(4)}{\Rightarrow}\ \boxed{\sigma_x = -\frac{y}{\rho}E} \quad (5)$$



تنش نرمال ناشی از لنگر خمشی $M_{(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_{(x)}}{I}y} \qquad (6)$$

$M_{(x)}$: لنگر حول محور z که تابعی از طول تیر x می‌باشد.

I : ممان اینرسی نسبت به محور z.

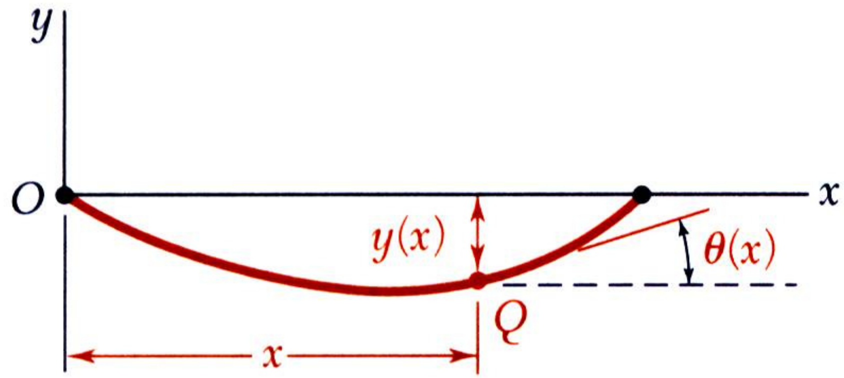
با جایگذاری رابطه (6) در (5) خواهیم داشت:

$$(6) \rightarrow (5) \quad \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI}} \quad (7)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

خمش خالص:

شعاع انحنای منحنی $y(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (8)$$

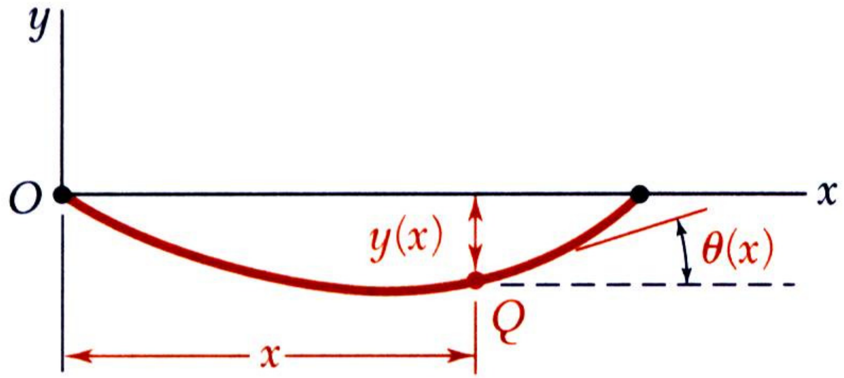
از آنجایی که در تیرها مقادیر تغییر شکل بسیار کوچک است از این رو:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=verys\ mall \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0 \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (9)$$

با جایگذاری رابطه (9) در (7) خواهیم داشت:

$$(9)\rightarrow(7) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_{(x)}}{EI}} \qquad (10)$$

تغییر شکل در تیرهای معین



انتگرال‌گیری مستقیم

شیب ایجاد شده در تیر با انتگرال‌گیری از رابطه (10) به دست می‌آید:

$$(10) \quad \Rightarrow EI\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx=\int M_{(x)}dx \quad \Rightarrow EI\frac{dy}{dx}=\int M_{(x)}dx \quad \Rightarrow \boxed{EI\,\theta_{(x)}=\int_0^x M_{(x)}dx+C_1} \quad (11)$$

خیز ایجاد شده در تیر با انتگرال‌گیری از شیب (رابطه 11) به دست می‌آید:

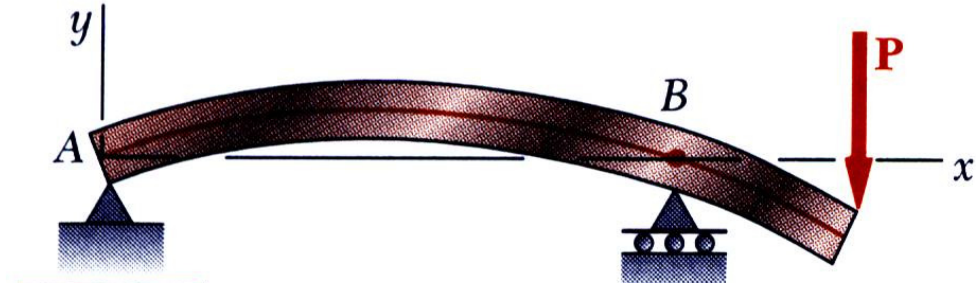
$$(11) \quad \Rightarrow EI\int\theta_{(x)}dx=\int\left(\int_0^x M_{(x)}dx+C_1\right)dx \quad \Rightarrow \boxed{EI\,y_{(x)}=\int_0^x\left(\int_0^x M_{(x)}dx\right)dx+C_1x+C_2} \quad (12)$$

پارامترهای C_1 و C_2 در روابط بالا به کمک احراز شرایط مرزی به دست می‌آید.

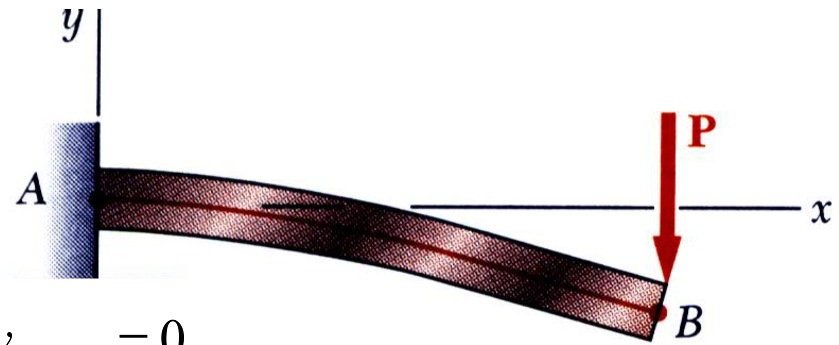
تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

شرایط مرزی:

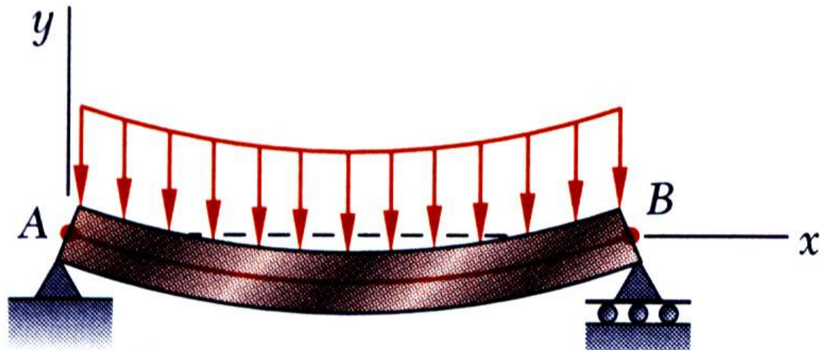


$$y_{(x=0)}=0 \qquad y_{(x=\ell)}=0$$



$$y_{(x=0)}=0$$

$$\theta_{(x=0)}=0$$



$$y_{(x=0)}=0 \qquad \theta_{(x=\ell/2)}=0 \qquad y_{(x=\ell)}=0$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

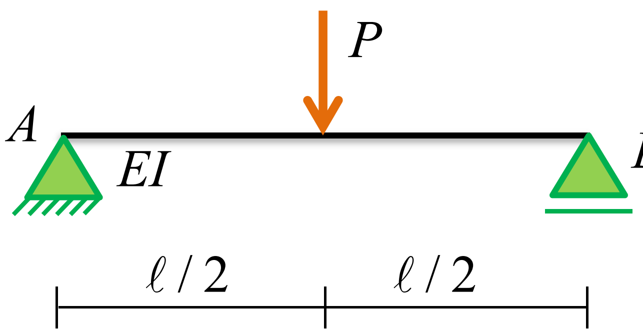
مثال 1- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- معادله شیب در طول تیر. $\theta_{(x)} = ?$

ب- معادله خیز در طول تیر. $y_{(x)} = ?$

ج- مقدار شیب در دو انتهای تیر. $\theta_B = ?$ & $\theta_A = ?$

د- مقدار خیز در وسط تیر. $y_{(x=\ell/2)} = ?$



$P = 4\ ton$

$E = 2\times10^6\ kg/cm^2$

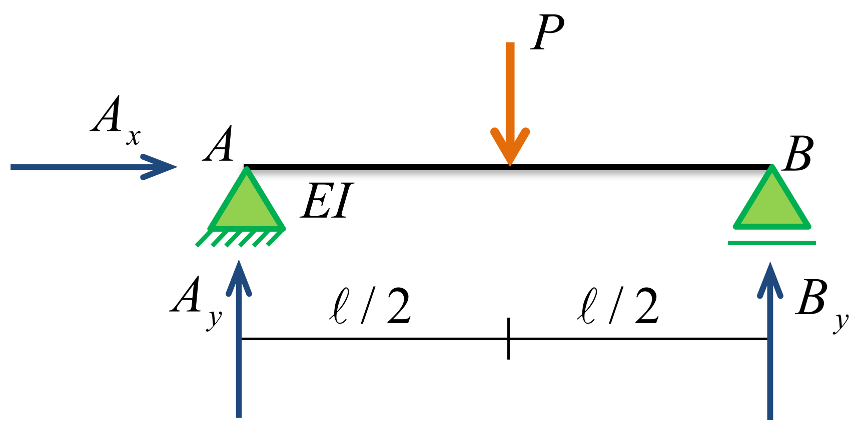
$I = 1000\ cm^4$

$\ell = 6\ m$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

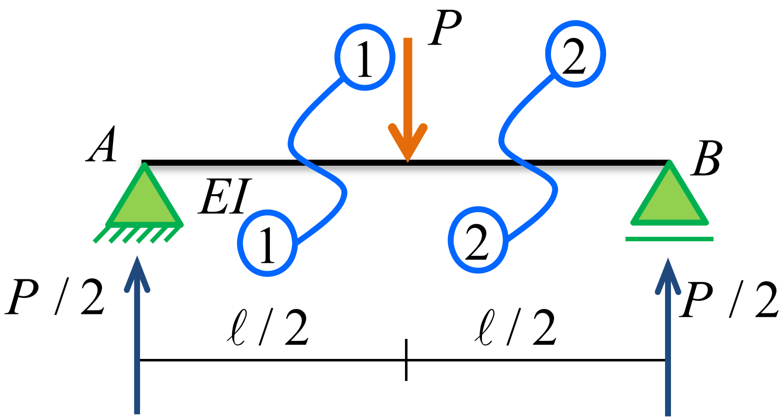
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \ell - P\ell/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = P/2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + P/2 = P \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = P/2}$$

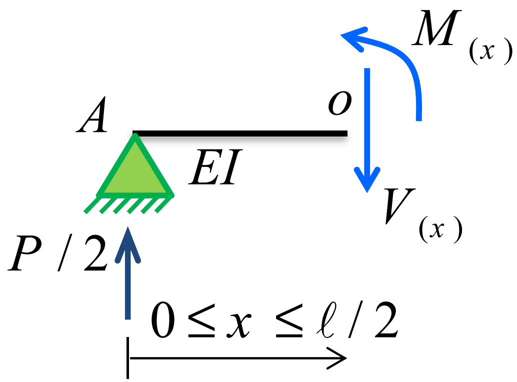
تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-

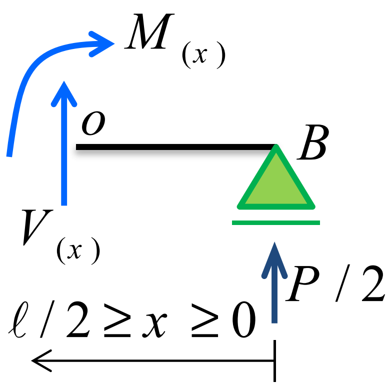


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1–1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = Px/2}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2–2 خواهیم داشت:

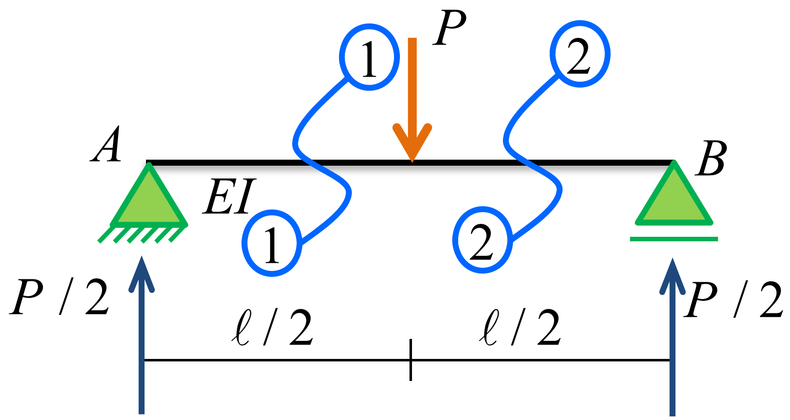


$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = Px/2}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-



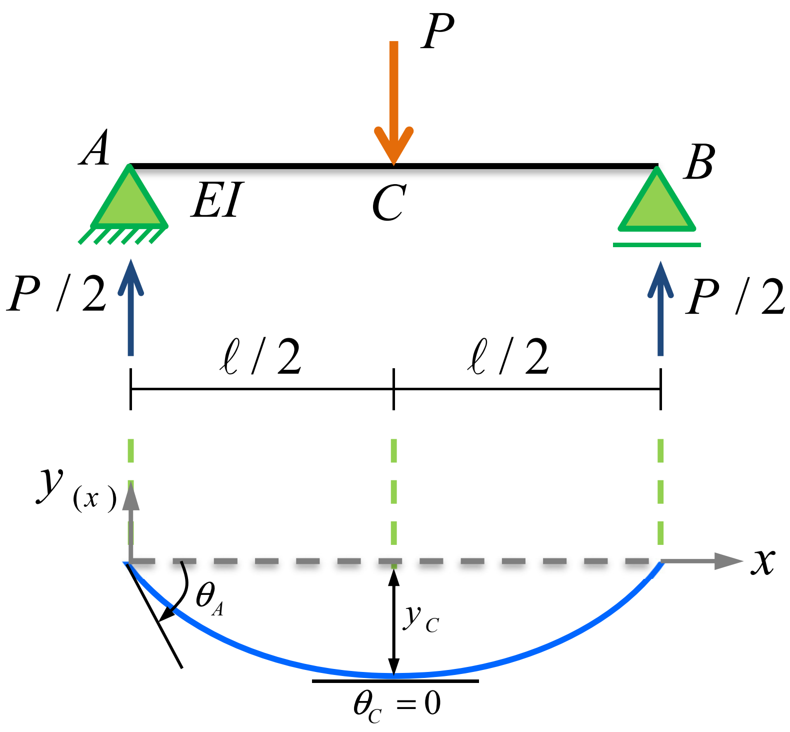
در ناحیه $0 \le x \le \ell/2$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$@\, 0 \le x \le \ell/2 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = Px/2$$

$$\boxed{EI\,\theta_{(x)} = \frac{Px^2}{4} + C_1} \quad (I)$$

$$\boxed{EI\,y_{(x)} = \frac{Px^3}{12} + C_1 x + C_2} \quad (II)$$

تغییر شکل در تیرهای معین



انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-

برای محاسبه ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می شود:

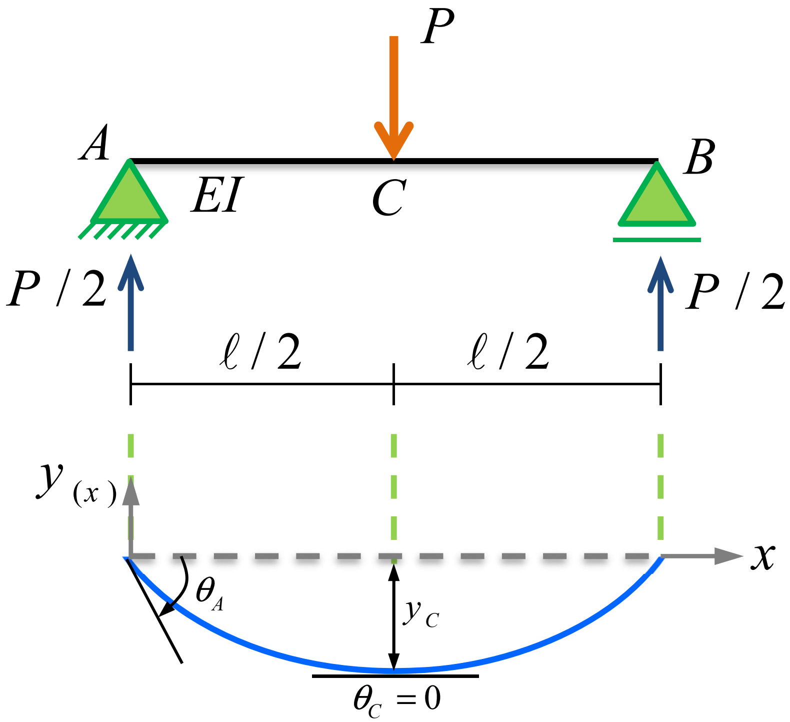
به دلیل تقارن مقدار شیب در وسط تیر صفر است.

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} \quad EI\,\theta_C = \frac{P(\ell/2)^2}{4} + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = -\frac{P\ell^2}{16}} \quad (III)$$

به دلیل وجود تکیه‌گاه در ابتدای تیر مقدار خیز صفر است.

$$\overset{(II)\&(III)}{\Rightarrow} \quad EI\,y_A = \frac{P(0)^3}{12} + \left(-\frac{P\ell^2}{16}\right)(0) + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = 0} \quad (IV)$$

تغییر شکل در تیرهای معین



انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-

با جایگذاری ضرایب C_1 و C_2 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

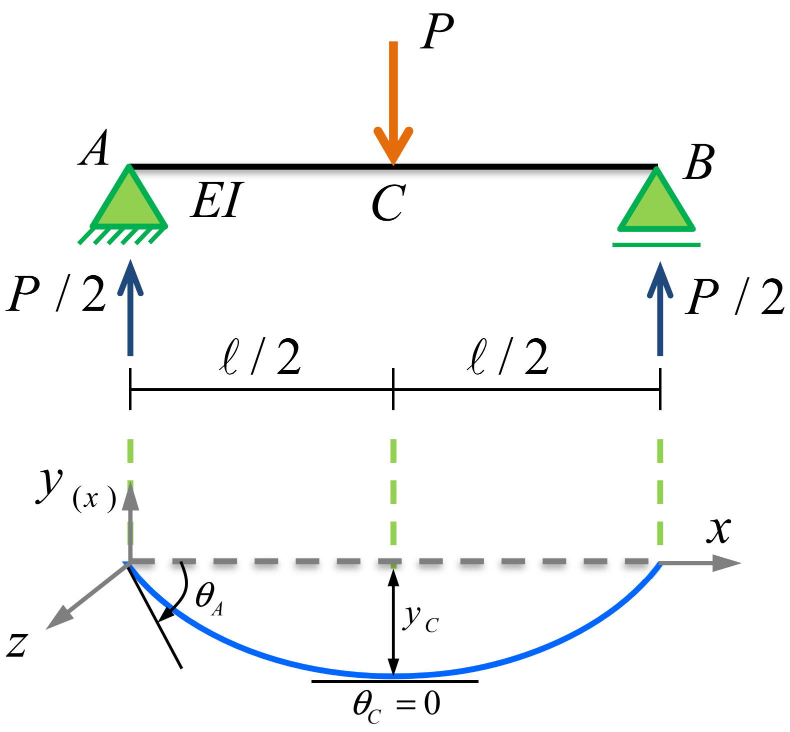
$$(III)\rightarrow(I) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{(x)}=\frac{Px^2}{4EI}-\frac{P\ell^2}{16EI}} \quad (V)$$
$$@\,0\le x\le \ell/2$$

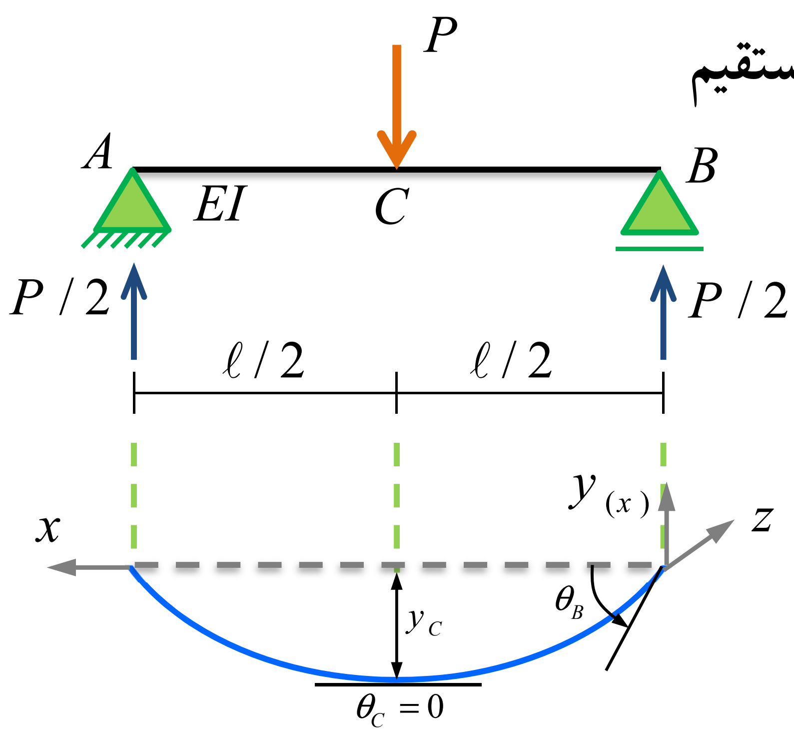
$$(III)\,\&\,(IV)\rightarrow(II) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{(x)}=\frac{P}{12EI}x^3-\frac{P\ell^2}{16EI}x} \quad (VI)$$
$$@\,0\le x\le \ell/2$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-





به دلیل تقارن روابط خیز و شیب در ناحیه مقطع 2-2 نیز به طور مشابه به دست می‌آید و نیازی به محاسبه مجدد نیست. به این نکته توجه شود علامت شیب در ناحیه 2-2 براساس دستگاه مختصات مربوطه خود به دست می‌آید.

$$\ell/2 \geq x \geq 0 @$$

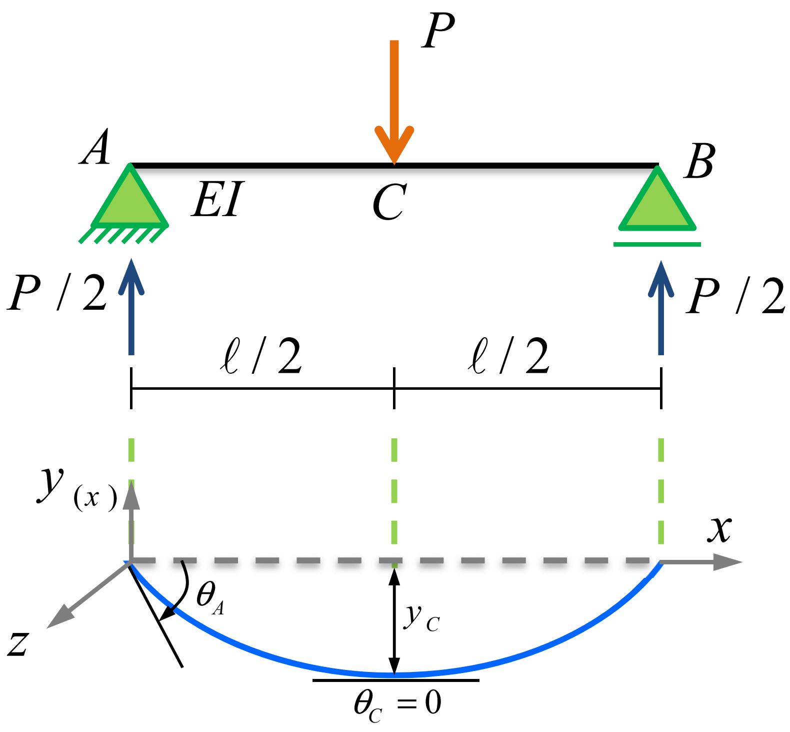
$$\boxed{y_{(x)} = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}x}$$

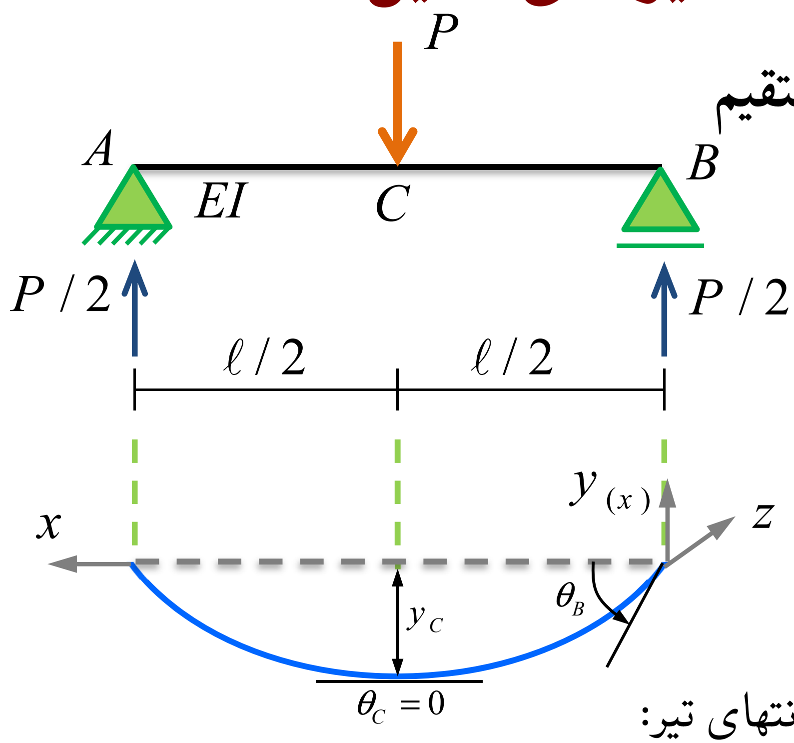
$$\boxed{\theta_{(x)} = \frac{Px^2}{4EI} - \frac{P\ell^2}{16EI}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-





محاسبه شیب در دو انتهای تیر:

$$\overset{(V)}{\Rightarrow} \quad \theta_A = \frac{P(0)^2}{4EI} - \frac{P\ell^2}{16EI} \Rightarrow \boxed{\theta_A = -\frac{P\ell^2}{16EI}}$$

دوران حول منفی محور z

$$\boxed{\theta_B = -\frac{P\ell^2}{16EI}}$$

دوران حول منفی محور z

محاسبه خیز در وسط تیر:

$$\overset{(VI)}{\Rightarrow} \quad y_C = \frac{P}{12EI}(\ell/2)^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}(\ell/2) \Rightarrow \boxed{y_C = -\frac{P\ell^3}{48EI}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 1-

$$\left.\begin{aligned} P &= 4\,ton \\ E &= 2\times10^{6}\ kg/cm^{2} \\ I &= 1000\,cm^{4} \\ \ell &= 6\,m \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$= -\frac{4(6)^{2}}{16(200)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{A} = -0.045^{rad}}$$

$$\boxed{\theta_{B} = \theta_{A} = -0.045^{rad}}$$

$$= -\frac{4(6)^{3}}{48(200)}\times10^{2}\,(cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{C} = -9\,cm}$$

ETABS File Name: **03-Example-01.EDB**

تغییر شکل در تیرهای معین

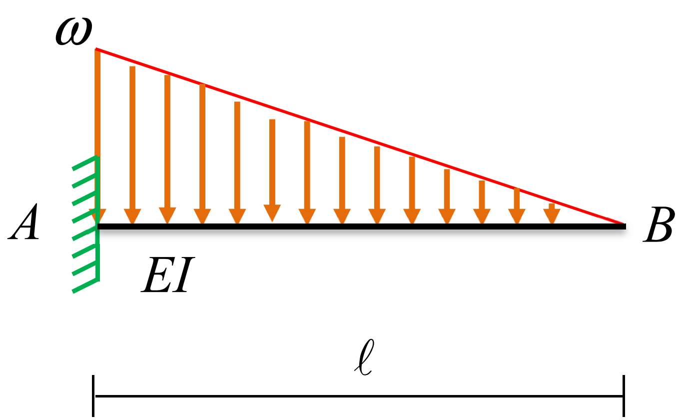
انتگرال‌گیری مستقیم

مثال 2- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- مقدار شیب در انتهای آزاد B. $\theta_B = ?$

ب- معادله خیز در طول تیر. $y_{(x)} = ?$

ج- مقدار خیز در انتهای کنسول. $y_B = ?$

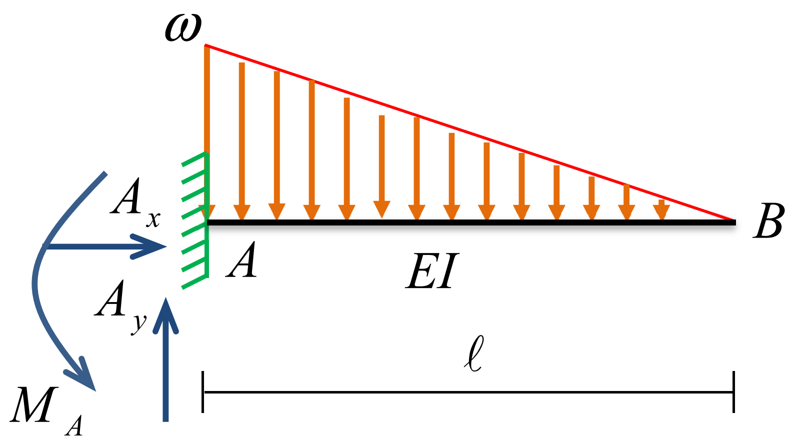


$$\omega = 0.4\ ton/m$$
$$E = 2\times10^6\ kg/cm^2$$
$$I = 1000\ cm^4$$
$$\ell = 6\ m$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 2-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

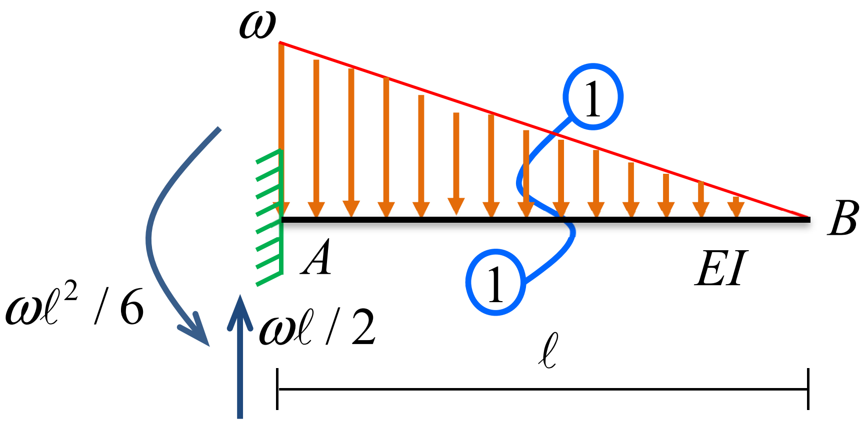
$$\boxed{M_A = \omega \ell^2 / 6}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - \frac{1}{2}\ell\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = \omega\ell / 2}$$

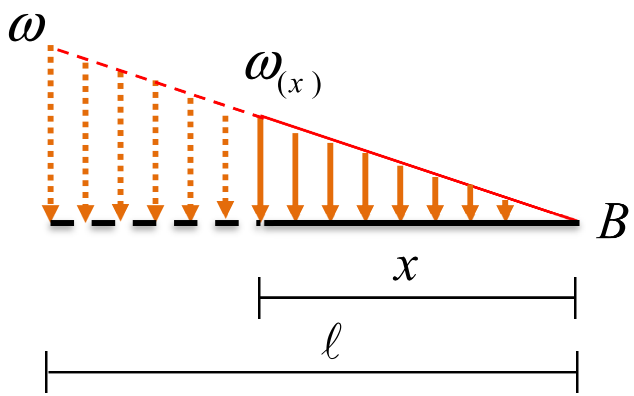
تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

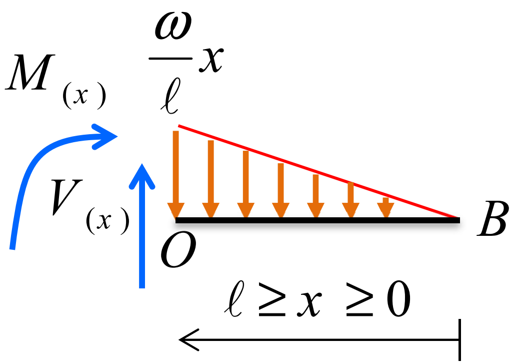
پاسخ مثال 2-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\boxed{\omega_{(x)} = \frac{\omega}{\ell}x}$$

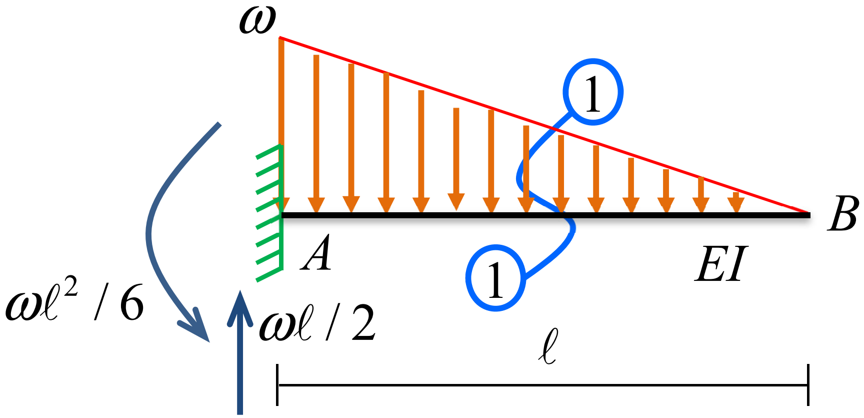


$$\boxed{M_{(x)} = -\frac{\omega x^3}{6\ell}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 2-



در ناحیه $0 \le x \le \ell$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M_{(x)} = -\frac{\omega x^3}{6\ell} \quad \Leftarrow \quad \ell \ge x \ge 0 @$$

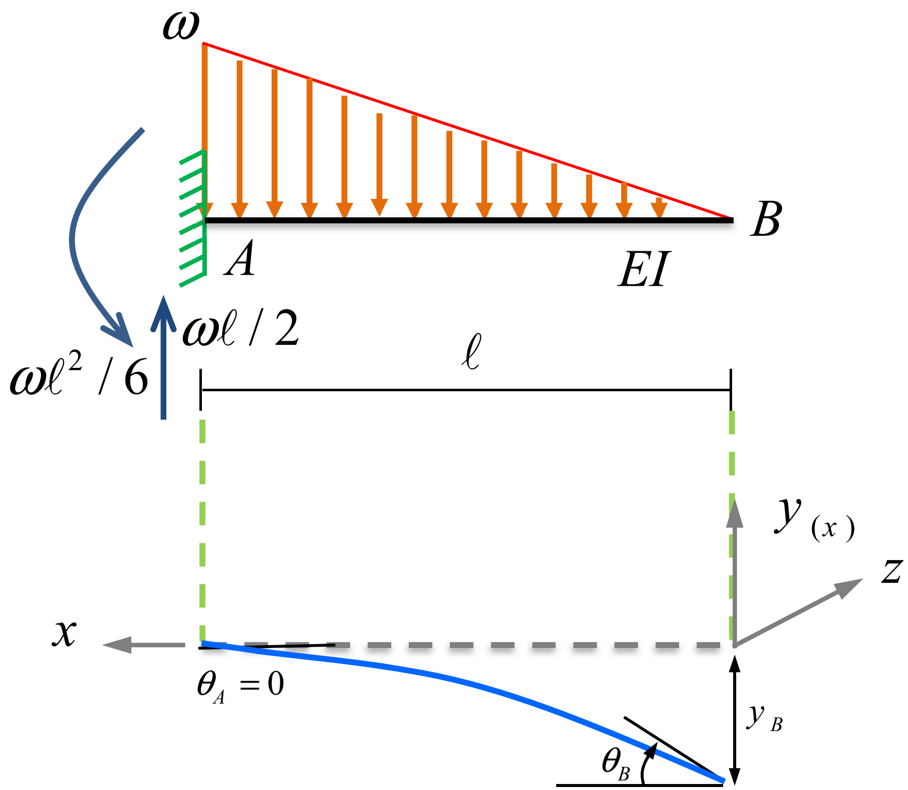
$$\boxed{EI\,\theta_{(x)} = -\frac{\omega x^4}{24\ell} + C_1} \quad (I)$$

$$\boxed{EI\,y_{(x)} = -\frac{\omega x^5}{120\ell} + C_1 x + C_2} \quad (II)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 2-



برای محاسبه ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می شود:

به دلیل وجود تکیه‌گاه گیردار، شیب در گره A برابر با صفر است.

$$\overset{(I)}{\Rightarrow}\quad EI\,\theta_A=-\frac{\omega(\ell)^4}{24\ell}+C_1=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{C_1=\frac{\omega\ell^3}{24}}\qquad(III)$$

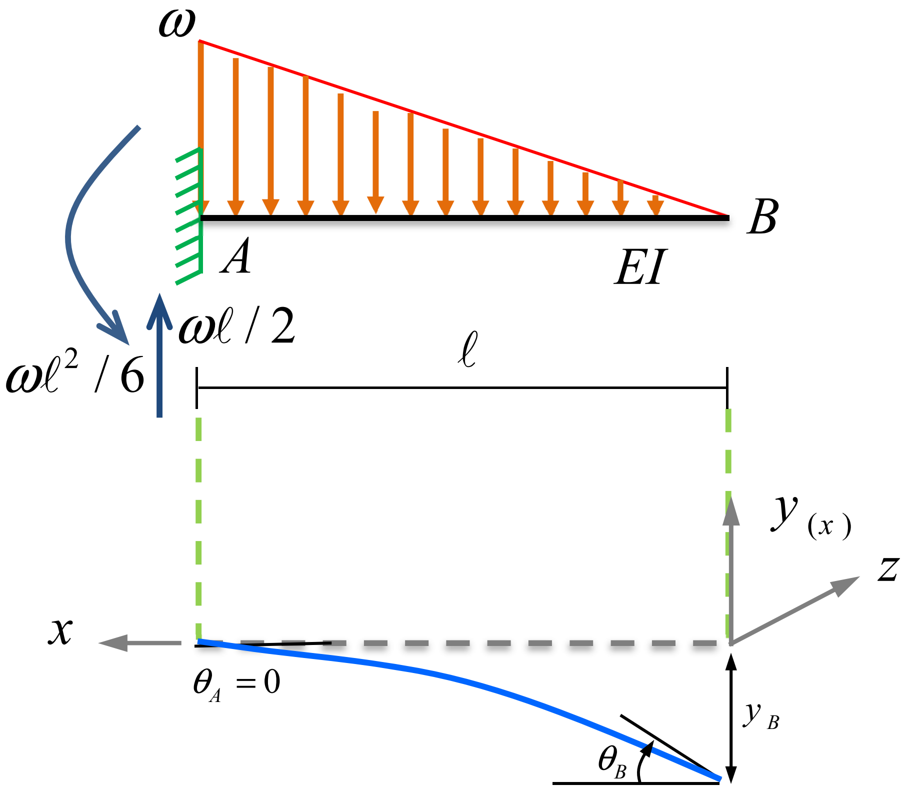
به دلیل وجود تکیه‌گاه در گره A مقدار خیز صفر است.

$$\overset{(II)\&(III)}{\Rightarrow}\quad EI\,y_A=-\frac{\omega(\ell)^5}{120\ell}+\frac{\omega\ell^3}{24}(\ell)+C_2=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{C_2=-\frac{\omega\ell^4}{30}}\qquad(IV)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 2-



با جایگذاری ضرایب C_1 و C_2 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

$$(III)\rightarrow(I) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{(x)}=-\frac{\omega x^4}{24EI\ell}+\frac{\omega\ell^3}{24EI}} \quad (V)$$

$\ell \geq x \geq 0 @$

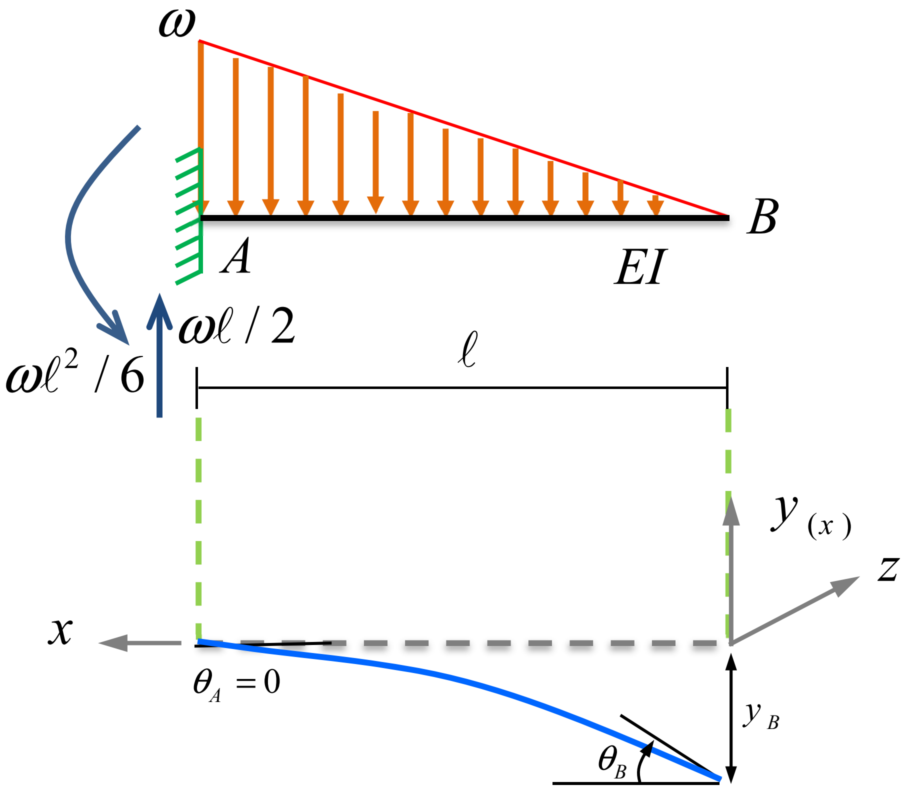
$$(III)\&(IV)\rightarrow(II) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{(x)}=-\frac{\omega x^5}{120EI\ell}+\frac{\omega\ell^3 x}{24EI}-\frac{\omega\ell^4}{30EI}} \quad (VI)$$

$\ell \geq x \geq 0 @$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 2-



محاسبه شیب در انتهای آزاد تیر:

$$\overset{(V)}{\Rightarrow} \quad \theta_B = -\frac{\omega(0)^4}{24EI\,\ell} + \frac{\omega\ell^3}{24EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = \frac{\omega\ell^3}{24EI}}$$

(ساعتگرد)

محاسبه خیز در انتهای آزاد تیر :

$$\overset{(VI)}{\Rightarrow} \quad y_B = -\frac{\omega(0)^5}{120EI\,\ell} + \frac{\omega\ell^3(0)}{24EI} - \frac{\omega\ell^4}{30EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_B = -\frac{\omega\ell^4}{30EI}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 2-

$$\omega = 0.4\ ton/m$$

$$\left.\begin{aligned} E &= 2\times10^6\ kg/cm^2 \\ I &= 1000\ cm^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow EI = 2\times10^6\times1000\ (kg.cm^2)\times10^{-7} \Rightarrow EI = 200\ ton.m^2$$

$$\ell = 6\ m$$

$$= \frac{0.4(6)^3}{24(200)} \Rightarrow \boxed{\theta_B = 0.018^{rad}}$$

$$= -\frac{(0.4)(6)^4}{30(200)}\times10^2(cm) \Rightarrow \boxed{y_B = -8.64\ cm}$$

ETABS File Name: **03-Example-02.EDB**

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

مثال 3- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- معادله خیز در طول تیر. $y_{(x)} = ?$

ب- مقدار خیز ماکزیمم. $y_{\max} = ?$

ج- مقدار شیب در گره A. $\theta_A = ?$

$P = 5\ ton$

$E = 2\times10^6\ kg/cm^2$

$I = 1000\ cm^4$

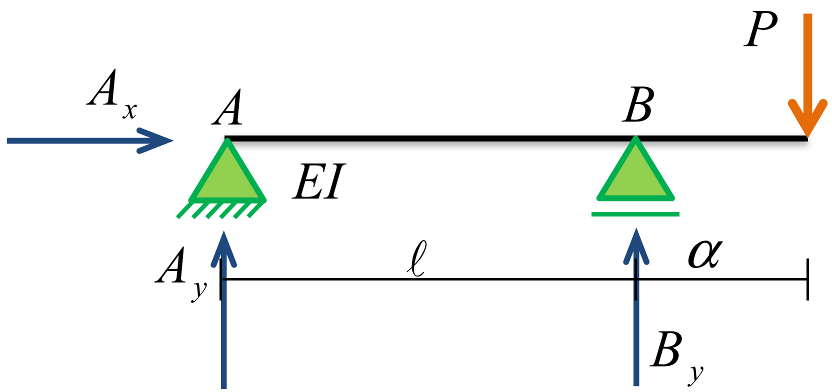
$\ell = 6\ m$

$\alpha = 1m$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



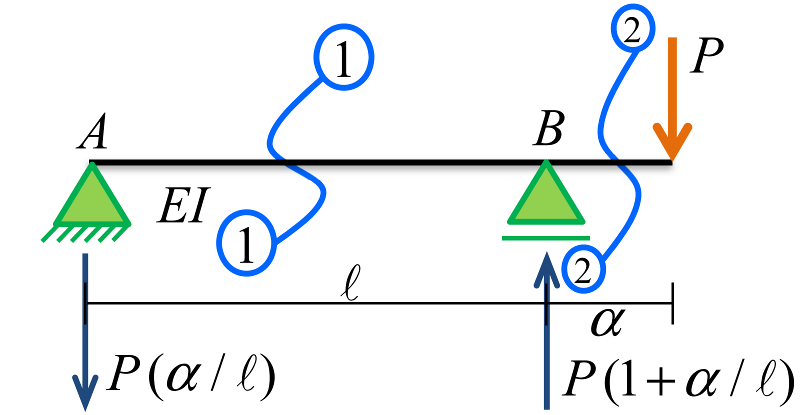
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \ell - P(\ell + \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = P(1 + \frac{\alpha}{\ell})}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + P(1 + \frac{\alpha}{\ell}) = P \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = -\frac{\alpha}{\ell} P}$$

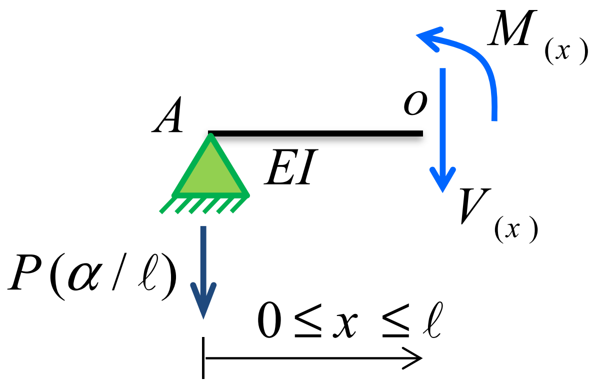
تغییر شکل در تیرهای معین



انتگرال‌گیری مستقیم

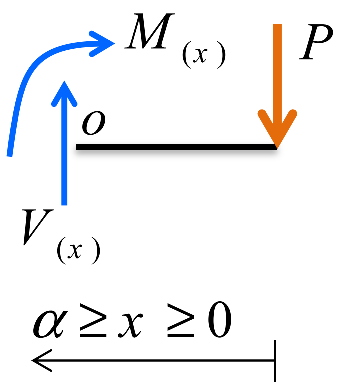
پاسخ مثال 3-

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -P(\alpha/\ell)x}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:

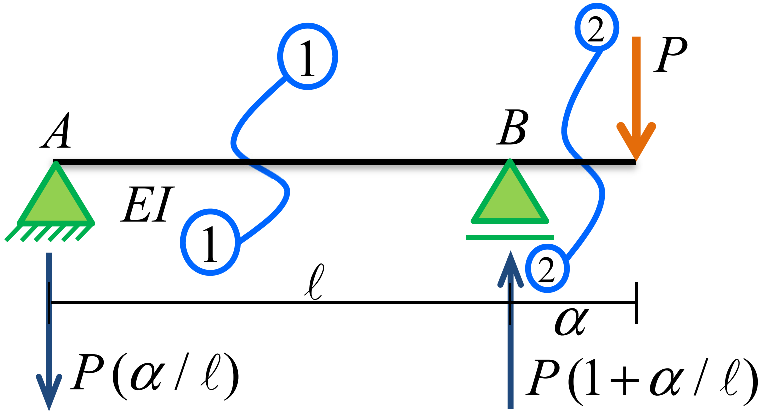


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -Px}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



در ناحیه $0 \le x \le \ell$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$@0 \le x \le \ell \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = -P(\alpha/\ell)x$$

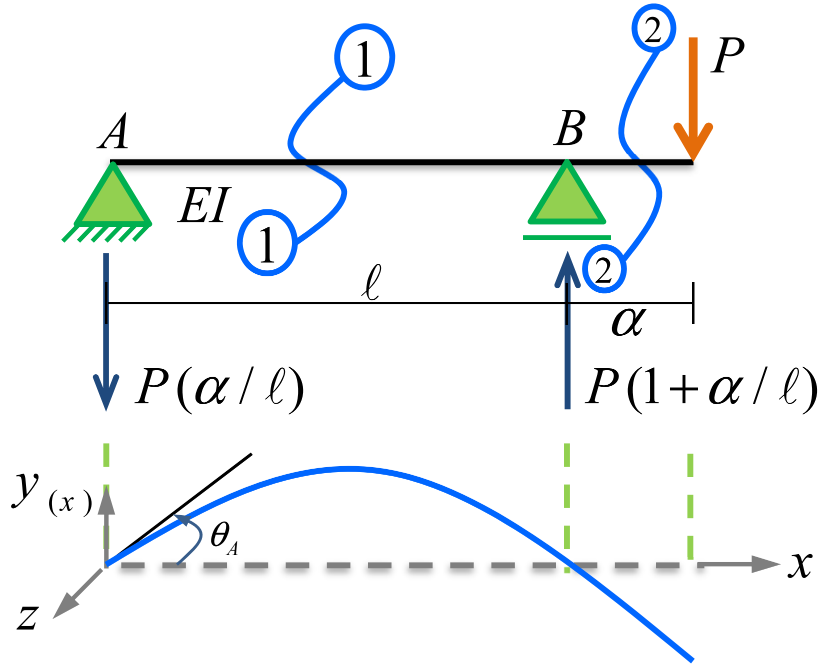
$$\boxed{EI\,\theta_{(x)} = -P(\alpha/\ell)\frac{x^2}{2} + C_1} \quad (3.1)$$

$$\boxed{EI\,y_{(x)} = -P(\alpha/\ell)\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2} \quad (3.2)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



برای محاسبه ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می شود:

به دلیل وجود تکیه‌گاه در نقاط A و B تیر مقدار خیز صفر است.

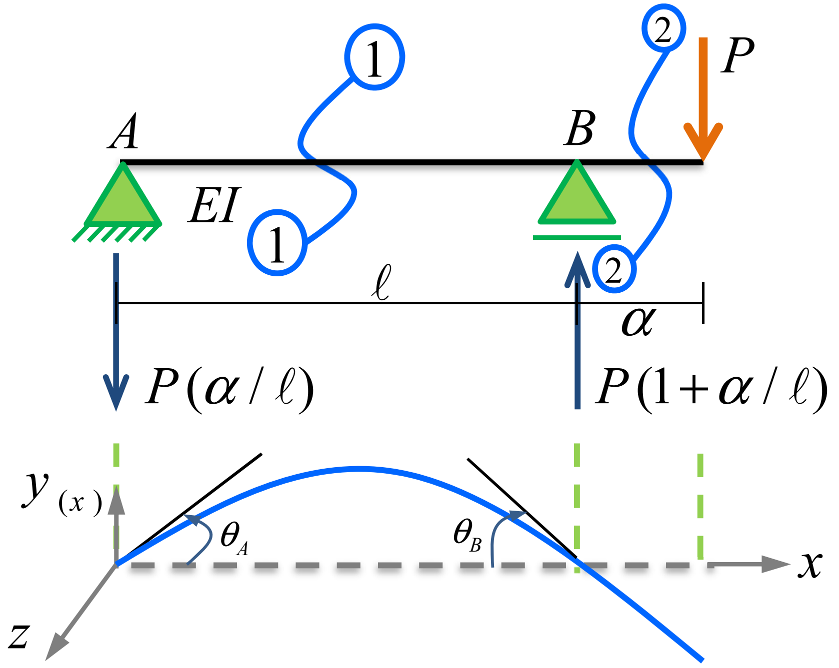
$$\overset{(3.2)}{\Rightarrow} \quad EI(0) = -P(\alpha/\ell)\frac{(0)^3}{6} + C_1(0) + C_2 \quad \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \quad (3.3)$$

$$\overset{(3.2)\&(3.3)}{\Rightarrow} \quad EI(0) = -P(\alpha/\ell)\frac{(\ell)^3}{6} + C_1(\ell) + 0 \quad \Rightarrow \boxed{C_1 = P\alpha\ell/6} \quad (3.4)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



با جایگذاری ضرایب C_1 و C_2 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

$$(3.4)\rightarrow(3.1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{(x)}=-\frac{P\alpha x^2}{2EI\ell}+\frac{P\alpha\ell}{6EI}} \quad (3.5)$$

$$@\,0\leq x\leq \ell$$

$$(3.3)\,\&\,(3.4)\rightarrow(3.2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{(x)}=-\frac{P\alpha x^3}{6EI\ell}+\frac{P\alpha\ell x}{6EI}} \quad (3.6)$$

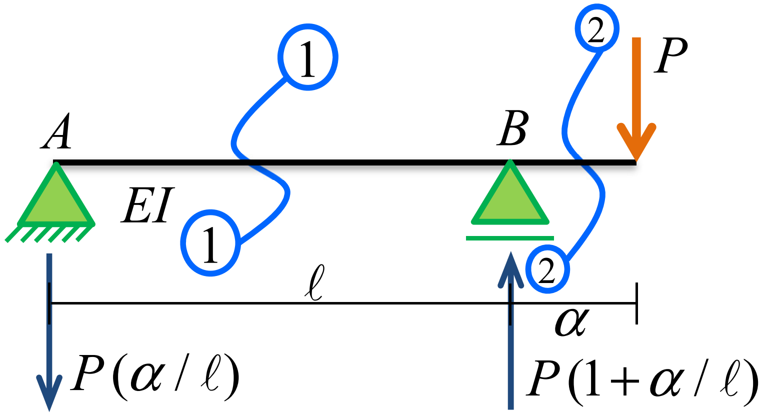
$$@\,0\leq x\leq \ell$$

$$\boxed{\theta_B=-\frac{P\alpha\ell}{3EI}} \quad (I)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



در ناحیه $\alpha \geq x \geq 0$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M_{(x)} = -Px \quad \Leftarrow \quad \alpha \geq x \geq 0 @$$

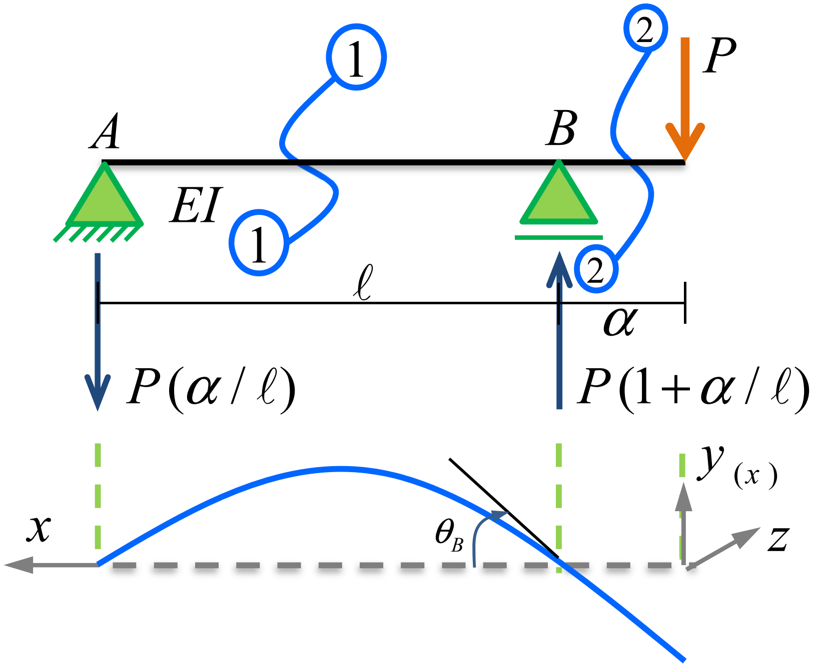
$$\boxed{EI\,\theta_{(x)} = -\frac{Px^2}{2} + C_3} \qquad (3.7)$$

$$\boxed{EI\,y_{(x)} = -\frac{Px^3}{6} + C_3 x + C_4} \qquad (3.8)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



برای محاسبه ضرایب C_3 و C_4 از شرایط مرزی استفاده می شود:

به دلیل وجود تکیه‌گاه در گره B مقدار خیز صفر است.

$$\overset{(3.8)}{\Rightarrow} \quad EI\,y_B = -\frac{P\alpha^3}{6} + C_3\alpha + C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_3\alpha + C_4 = \frac{P\alpha^3}{6}} \quad (3.9)$$

مقدار شیب در گره B در هر دو معادله شیب باید صدق نماید.

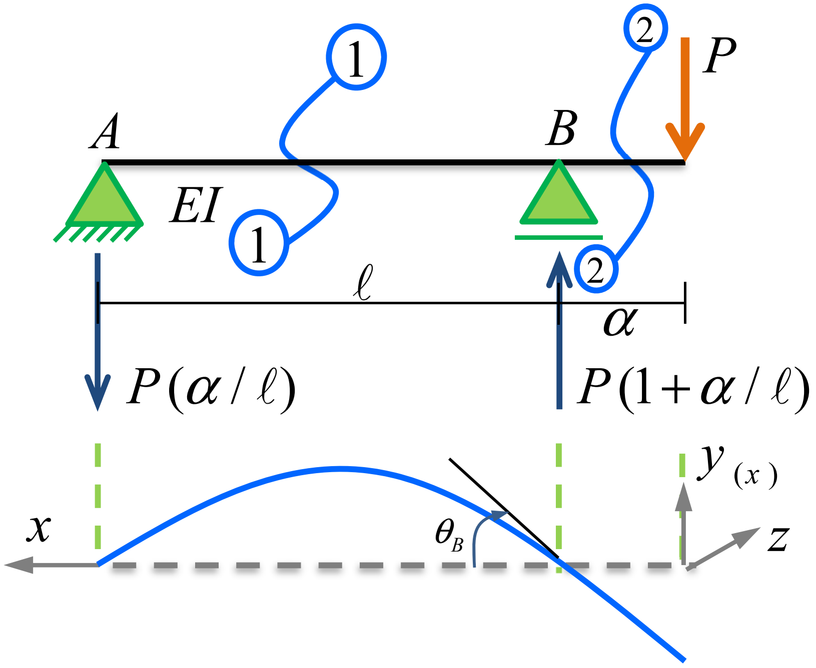
به این نکته دقت شود مقدار شیب در گره B در دستگاه مختصات سمت راست مثبت است (حول مثبت محور z)

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_3 = \frac{P\alpha\ell}{3} + \frac{P\alpha^2}{2}} \quad (3.10)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



$$C_4 = -\frac{P\alpha^2\ell}{3} - \frac{P\alpha^3}{3} \quad (3.11)$$

با جایگذاری ضرایب C_3 و C_4 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

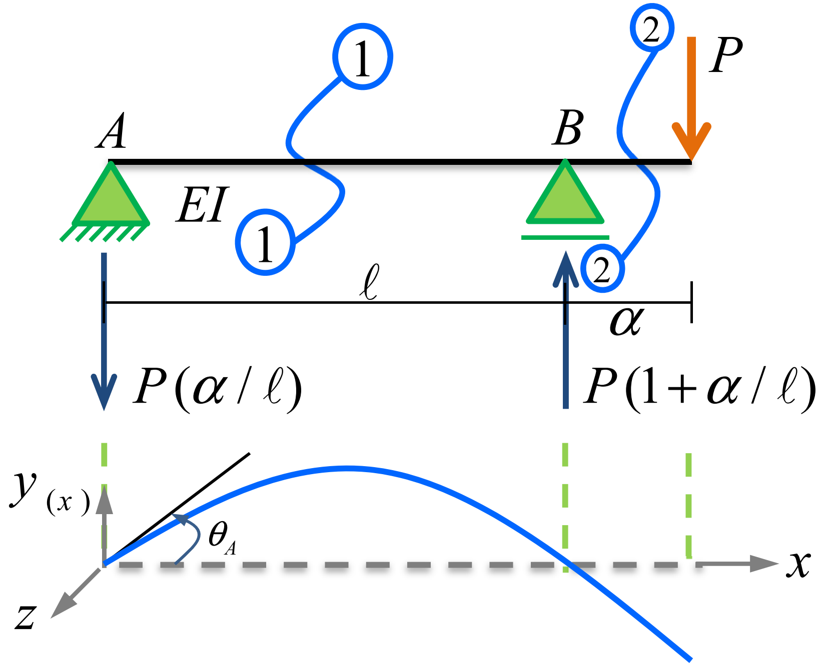
$$(3.10) \rightarrow (3.7) \quad \Rightarrow \quad \theta_{(x)} = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{P\alpha\ell}{3EI} + \frac{P\alpha^2}{2EI} \quad (3.12)$$

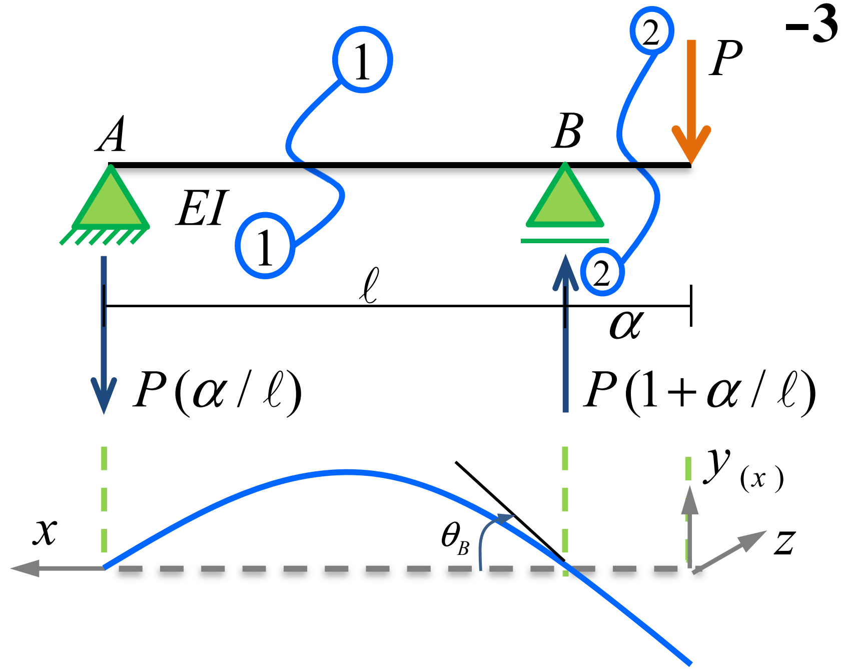
$$(3.10)\,\&\,(3.11) \rightarrow (3.8) \quad \Rightarrow \quad y_{(x)} = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{P\alpha\ell x}{3EI} + \frac{P\alpha^2 x}{2EI} - \frac{P\alpha^2\ell}{3EI} - \frac{P\alpha^3}{3EI} \quad (3.13)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-





$$@0 \le x \le \ell \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = -P(\alpha/\ell)x$$

$$M_{(x)} = -Px \quad \Leftarrow \quad \alpha \ge x \ge 0@$$

$$\boxed{\theta_{(x)} = -\frac{P\alpha x^2}{2EI\,\ell} + \frac{P\alpha\ell}{6EI}} \quad (3.5)$$

$$\boxed{\theta_{(x)} = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{P\alpha\ell}{3EI} + \frac{P\alpha^2}{2EI}} \quad (3.12)$$

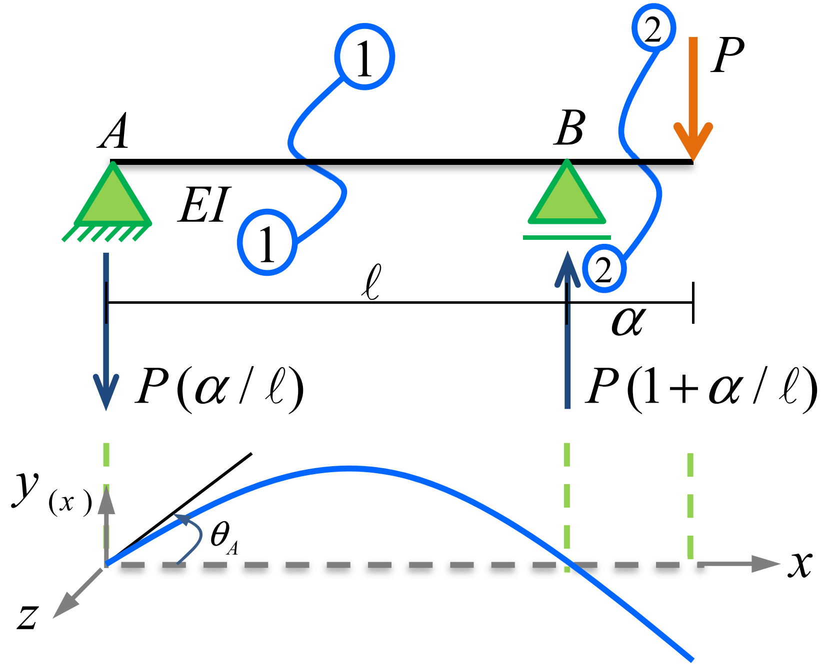
$$\boxed{y_{(x)} = -\frac{P\alpha x^3}{6EI\,\ell} + \frac{P\alpha\ell x}{6EI}} \quad (3.6)$$

$$\boxed{y_{(x)} = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{P\alpha\ell x}{3EI} + \frac{P\alpha^2 x}{2EI} - \frac{P\alpha^2\ell}{3EI} - \frac{P\alpha^3}{3EI}} \quad (3.13)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



$$P = 5\ ton$$

$$E = 2\times10^6\ kg/cm^2$$

$$I = 1000\ cm^4$$

$$\ell = 6\ m$$

$$\alpha = 1m$$

$$@0 \le x \le 6 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = -5(1/6)x \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -\frac{5}{6}x} \qquad (3.14)$$

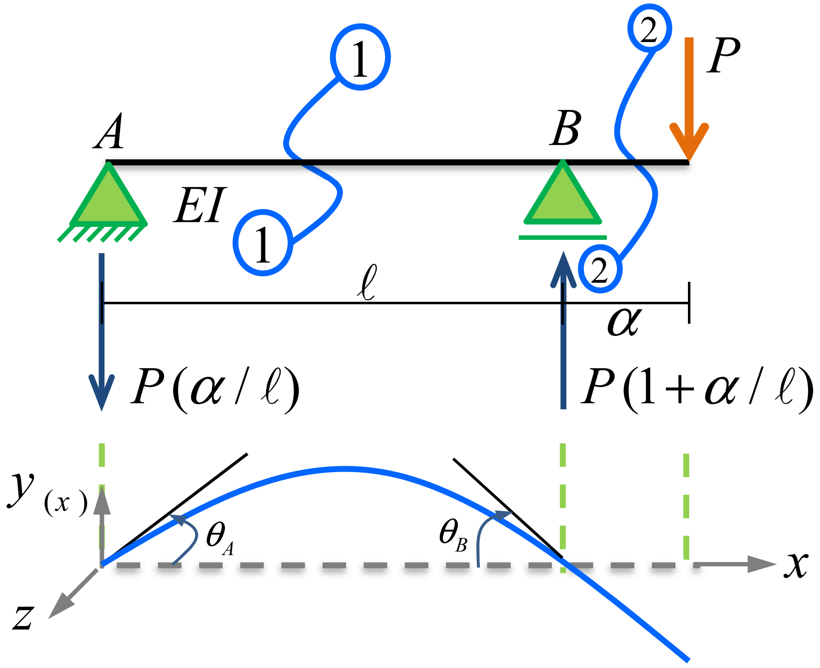
$$(3.5) \quad \Rightarrow \quad \theta_{(x)} = -\frac{(5)(1)x^2}{2(200)(6)} + \frac{(5)(1)(6)}{6(200)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{(x)} = -\frac{x^2}{480} + \frac{1}{40}} \qquad (3.15)$$

$$(3.6) \quad \Rightarrow \quad y_{(x)} = -\frac{(5)(1)x^3}{6(200)(6)} + \frac{(5)(1)(6)x}{6(200)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{(x)} = -\frac{x^3}{1440} + \frac{x}{40}} \qquad (3.16)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



در ناحیه $@0 \le x \le 6$

مقدار شیب در گره A.

$$\Rightarrow \quad \theta_A = -\frac{(0)^2}{480} + \frac{1}{40} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_A = 0.025^{rad}}$$

مقدار شیب در گره B.

$$\Rightarrow \quad \theta_B = -\frac{(6)^2}{480} + \frac{1}{40} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = -0.05^{rad}}$$

در نقطه خیز ماکزیمم مقدار مشتق خیز یعنی شیب (نقطه اکسترمم) برابر با صفر است:

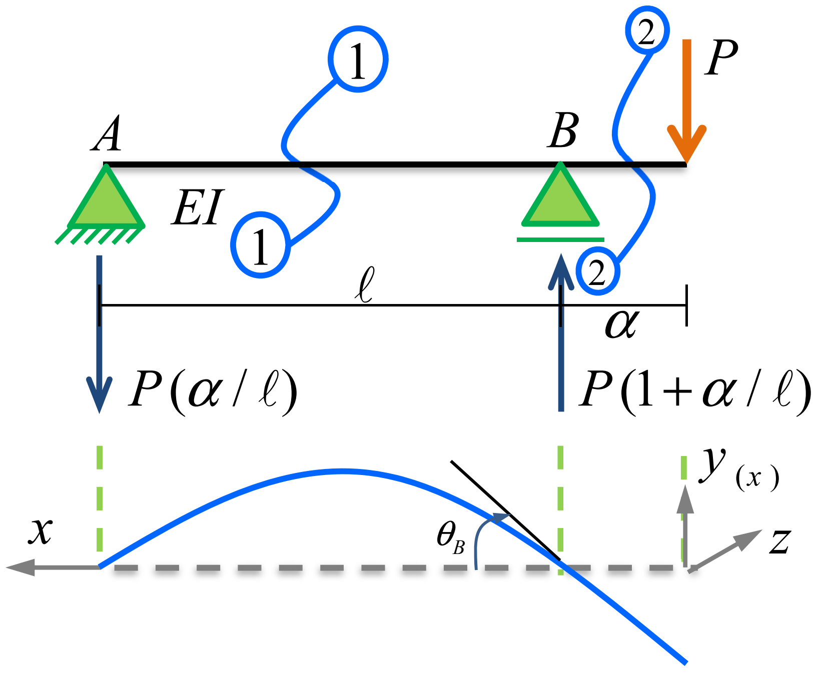
$$\boxed{0 \le x = 2\sqrt{3}\ m \le 6}$$ قابل قبول

$$\boxed{y_{\max 1} = 0.0577\ m}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



$P = 5\ ton$

$E = 2\times10^6\ kg/cm^2$

$I = 1000\ cm^4$

$\ell = 6\ m$

$\alpha = 1m$

$$M_{(x)} = -5x \quad \Leftarrow \quad 1 \ge x \ge 0 @$$

$$(3.12) \quad \Rightarrow \quad \theta_{(x)} = -\frac{5x^2}{2(200)} + \frac{(5)(1)(6)}{3(200)} + \frac{(5)(1)^2}{2(200)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{(x)} = -\frac{x^2}{80} + \frac{1}{16}} \quad (3.17)$$

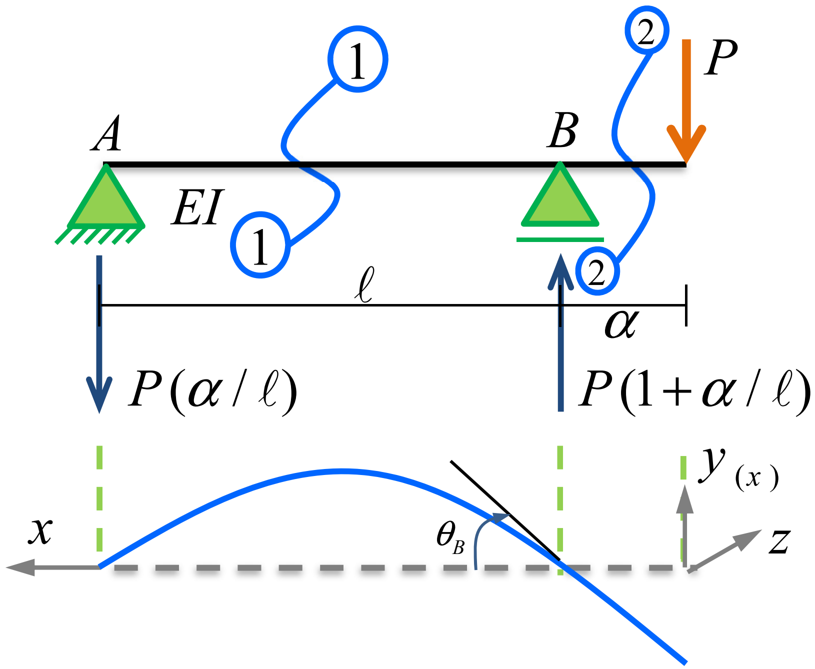
$$(3.13) \Rightarrow y_{(x)} = -\frac{5x^3}{6(200)} + \frac{(5)(1)(6)x}{3(200)} + \frac{(5)(1)^2 x}{2(200)} - \frac{(5)(1)^2(6)}{3(200)} - \frac{(5)(1)^3}{3(200)} \Rightarrow \boxed{y_{(x)} = -\frac{x^3}{240} + \frac{x}{16} - \frac{7}{120}}$$

(3.18)

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



در ناحیه $1 \geq x \geq 0$@

مقدار شیب در گره B.

$$\Rightarrow \theta_B = -\frac{(1)^2}{80} + \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{\theta_B = 0.05^{rad}}$$

در گره خیز ماکزیمم مقدار مشتق خیز یعنی شیب (گره اکسترمم) برابر با صفر است:

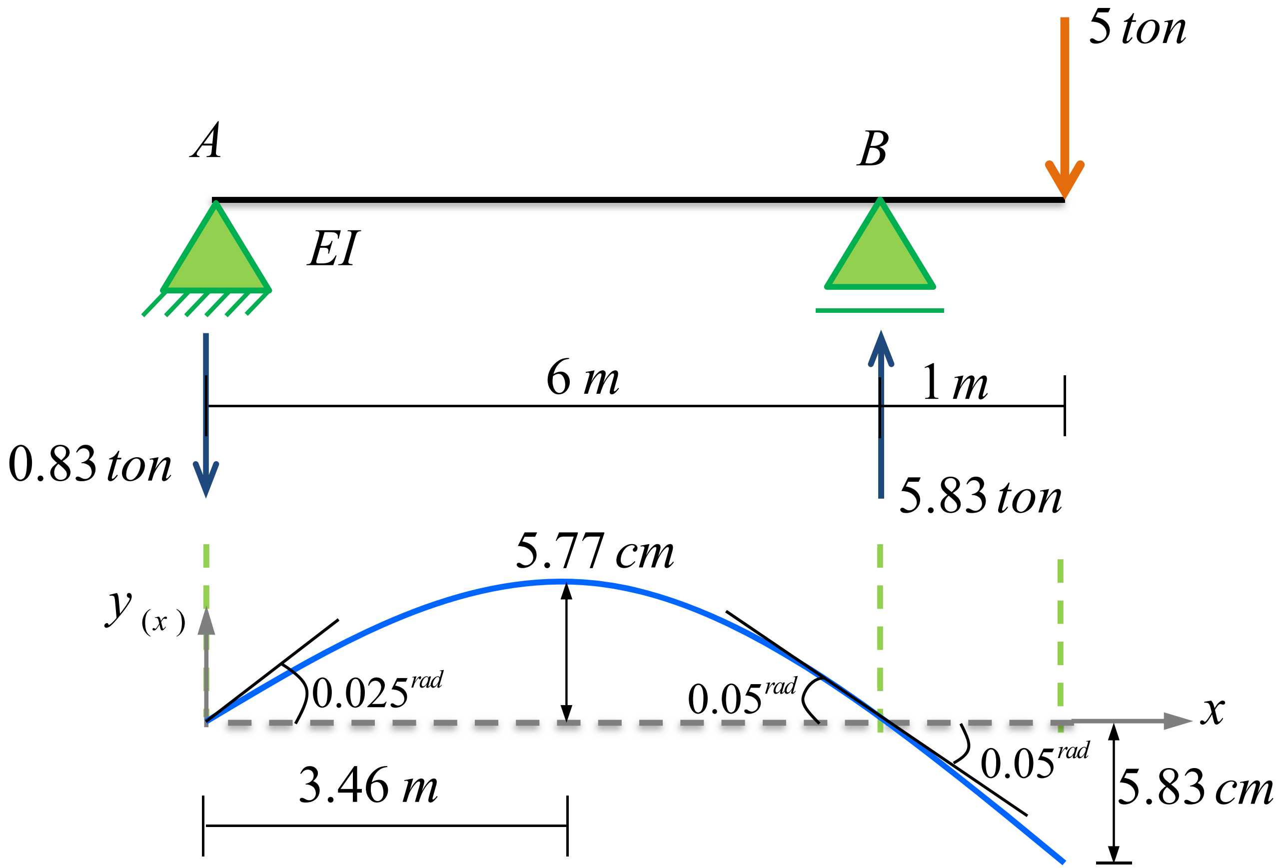
$$\boxed{1 \geq x = \sqrt{5}\ m \geq 0}$$ غیرقابل قبول

$$\Rightarrow y_{\max 2} = -\frac{(0)^3}{240} + \frac{(0)}{16} - \frac{7}{120} \Rightarrow \boxed{y_{\max 2} = -0.0583\ m}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

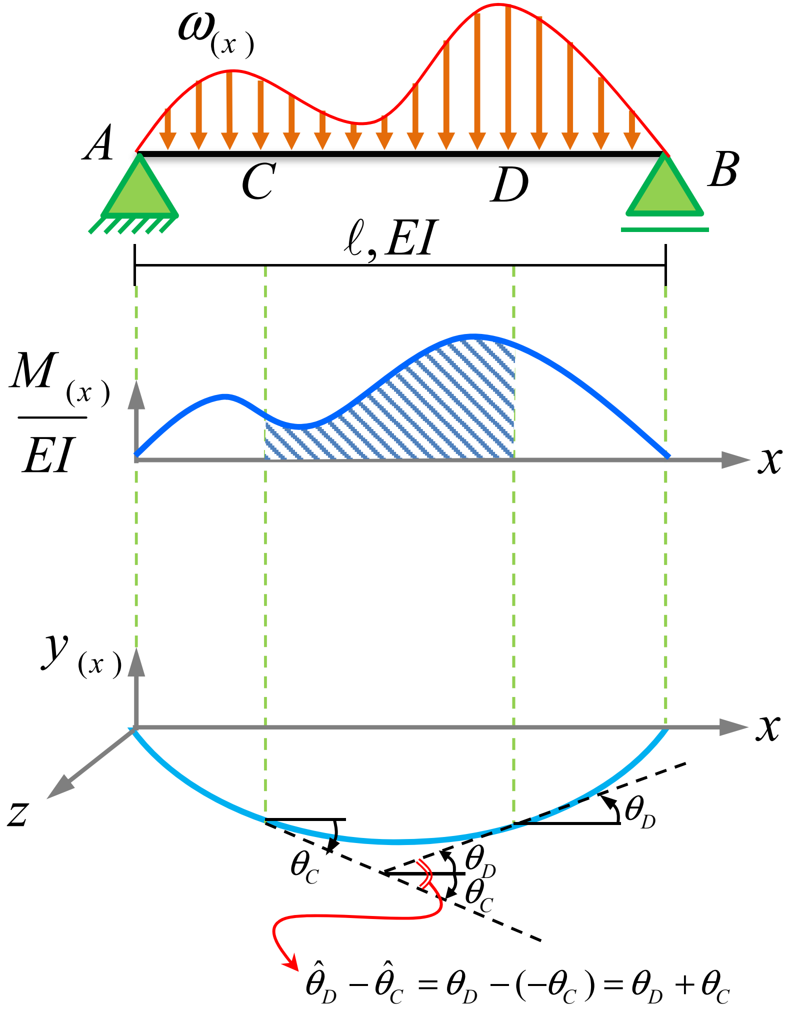
انتگرال‌گیری مستقیم

پاسخ مثال 3-



ETABS File Name: **03-Example-03.EDB**

تغییر شکل در تیرهای معین



روش لنگر سطح

تیر دو سر مفصل نشان داده شده تحت اثر بار گسترده دلخواهی قرار دارد

$$(10): \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{M_{(x)}}{EI} \quad \xRightarrow{\frac{dy}{dx}=\theta_{(x)}}$$

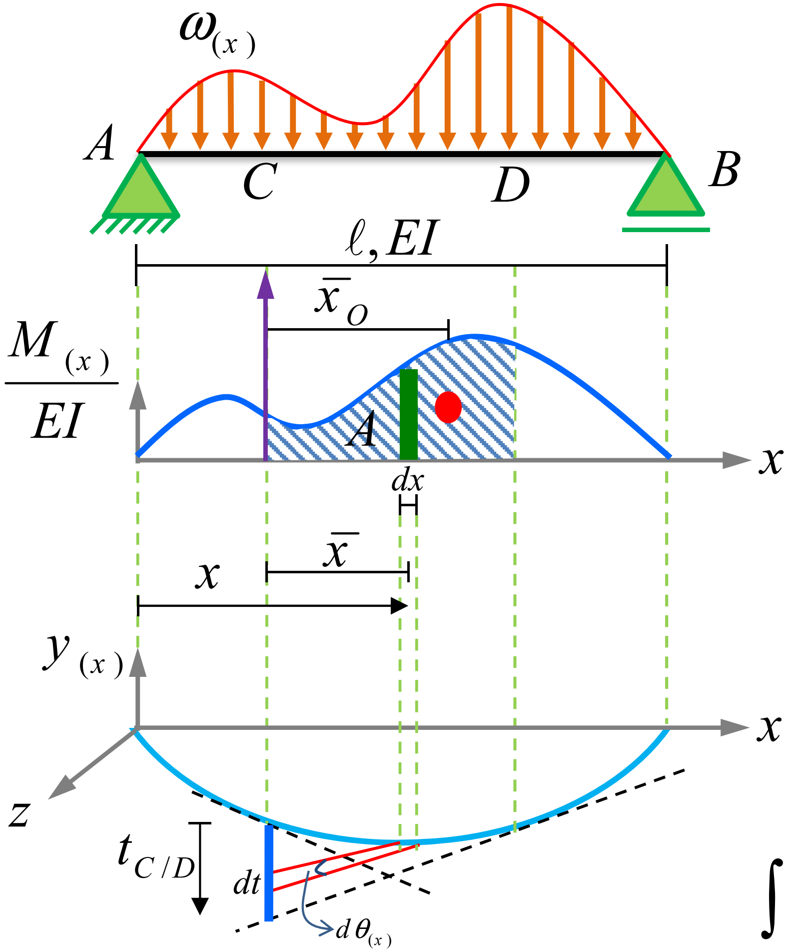
$$\frac{d\theta_{(x)}}{dx} = \frac{M_{(x)}}{EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\theta_{(x)} = \frac{M_{(x)}}{EI}dx} \quad (12)$$

$$(12) \quad \xRightarrow{\int} \quad \int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta_{(x)} = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M_{(x)}}{EI}dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{D/C} = \hat{\theta}_D - \hat{\theta}_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M_{(x)}}{EI}dx} \quad (13)$$

قضیه اول لنگر سطح:

سطح زیر منحنی تغییرات $\frac{M_{(x)}}{EI}$ بین نقاط D و C برابر است با اختلاف شیب بین نقاط D و C

تغییر شکل در تیرهای معین



روش لنگر سطح

تیر دو سر مفصل نشان داده شده تحت اثر بار گسترده دلخواهی قرار دارد

$$dt = \bar{x} \cdot d\theta_{(x)} \overset{(12)}{\Rightarrow} dt = \bar{x} \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \overset{\int}{\Rightarrow}$$

$$\int dt = \int_{x_C}^{x_D} \bar{x} \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \Rightarrow \boxed{t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (14)$$

قضیه دوم لنگر سطح:

گشتاور اول سطح زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ بین نقاط C و D نسبت به محور قائم در گره C برابر است با مقدار فاصله قائم انحراف گره C از خط مماس بر گره D.

$$t_{C/D} = A \times \bar{x}_O$$

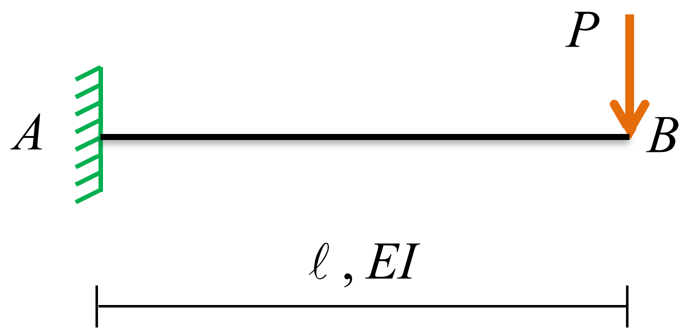
تغییر شکل در تیرهای معین

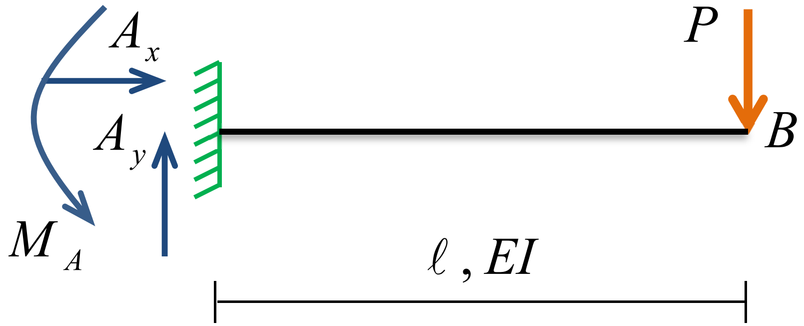
روش لنگر سطح

مثال 4- با استفاده از روش لنگر سطح در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$





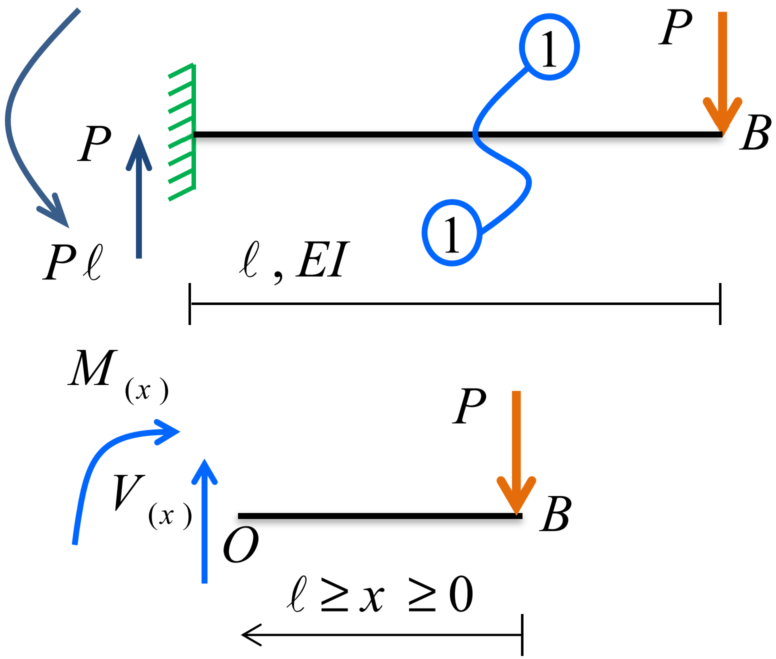
روش لنگر سطح

پاسخ مثال 4-

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0} \qquad \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - P\times\ell = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = P\ell}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - p = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = P}$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:

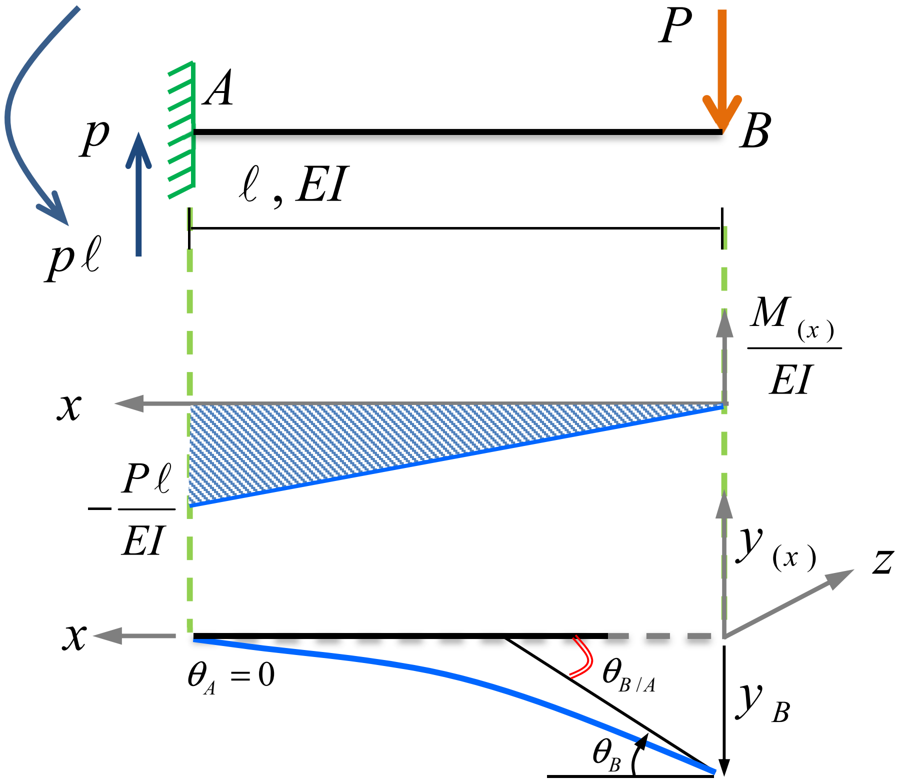
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + P\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -Px} \qquad (4.1)$$

$$\ell \ge x \ge 0$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 4-



برای استفاده از قضیه اول لنگر سطح بهتر آن است دو گره‌ای که انتخاب می‌شود شیب یکی از آن‌ها معلوم باشد تا در رابطه (13) تنها یک مجهول ظاهر شود. به همین منظور، در این مثال گره A به عنوان گره دوم انتخاب می‌شود:

$$\theta_B = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان‌پذیر است. از این رو خواهیم داشت:

$$\theta_B = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

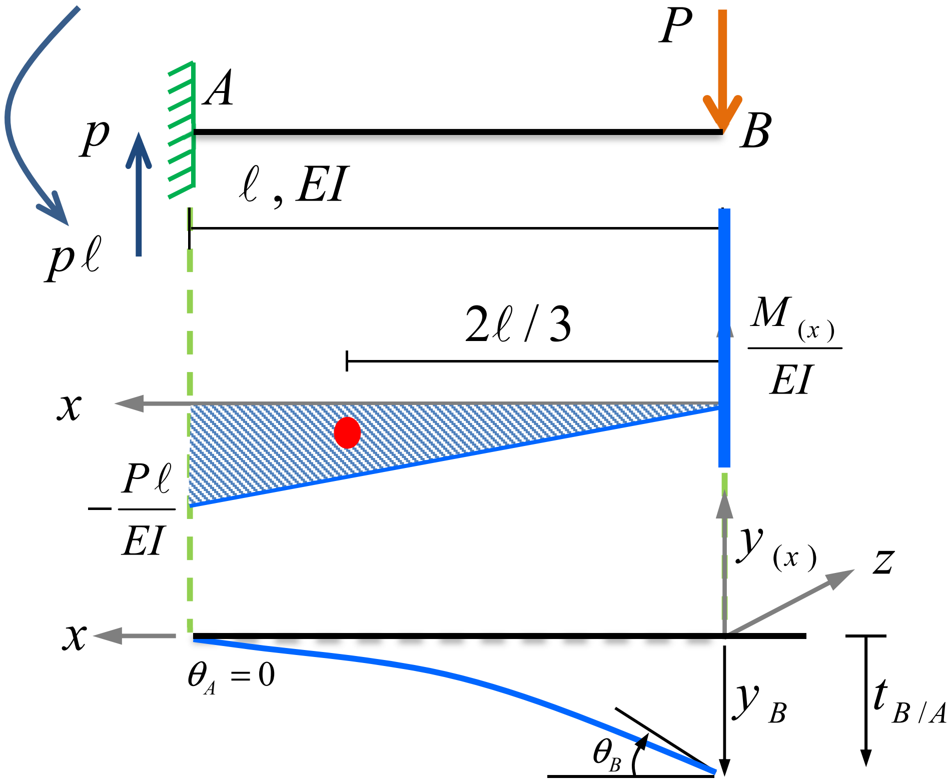
تعریف قضیه اول لنگر سطح

در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می‌شود

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 4-



$$y_B = -\frac{p\ell^3}{3EI}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان‌پذیر است.
از این رو خواهیم داشت:

$$y_B = -\frac{p\ell^3}{3EI}$$

تعریف قضیه دوم لنگر سطح

در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می‌شود

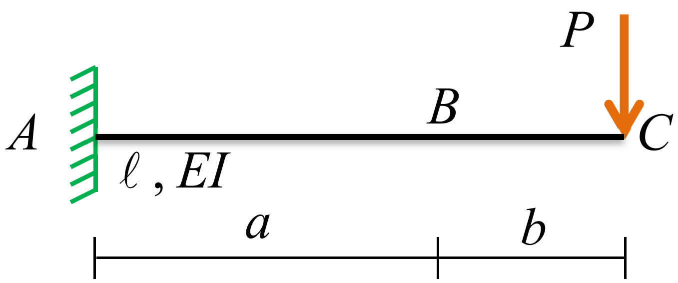
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

مثال 5- با استفاده از روش لنگر سطح در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

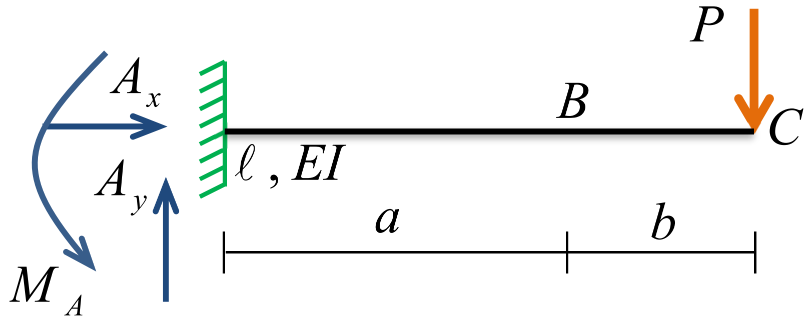
ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 5-

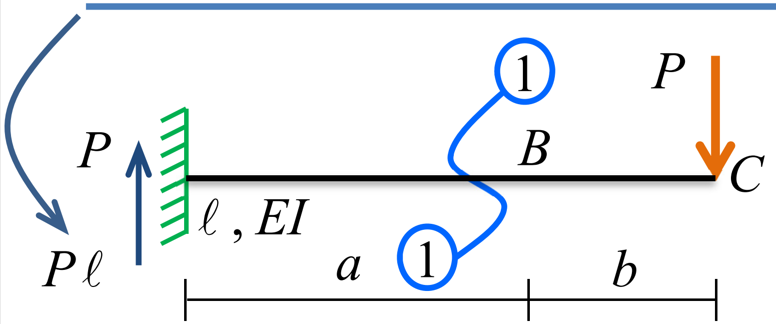


با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

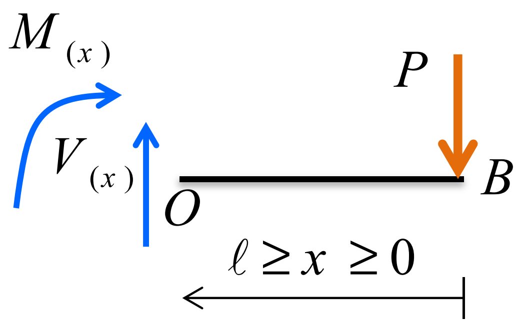
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - P \times \ell = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = P\ell}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - p = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = P}$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



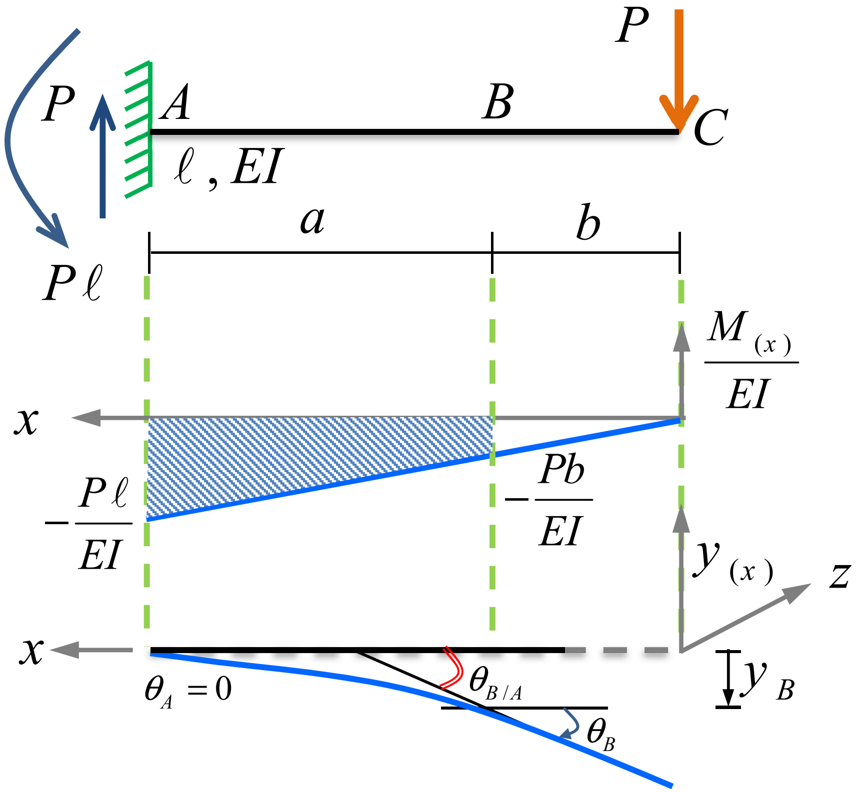
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + P \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -Px} \quad (5.1)$$

$$\ell \ge x \ge 0$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 5-



برای استفاده از قضیه اول لنگر سطح بهتر آن است دو گره‌ای که انتخاب می‌شود شیب یکی از آن‌ها معلوم باشد تا در رابطه (13) تنها یک مجهول ظاهر شود. به همین منظور، در این مثال گره A به عنوان گره دوم انتخاب می‌شود:

$$\boxed{\theta_B = \frac{Pa(\ell+b)}{2EI}}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان‌پذیر است. از این رو خواهیم داشت:

تعریف قضیه اول لنگر سطح

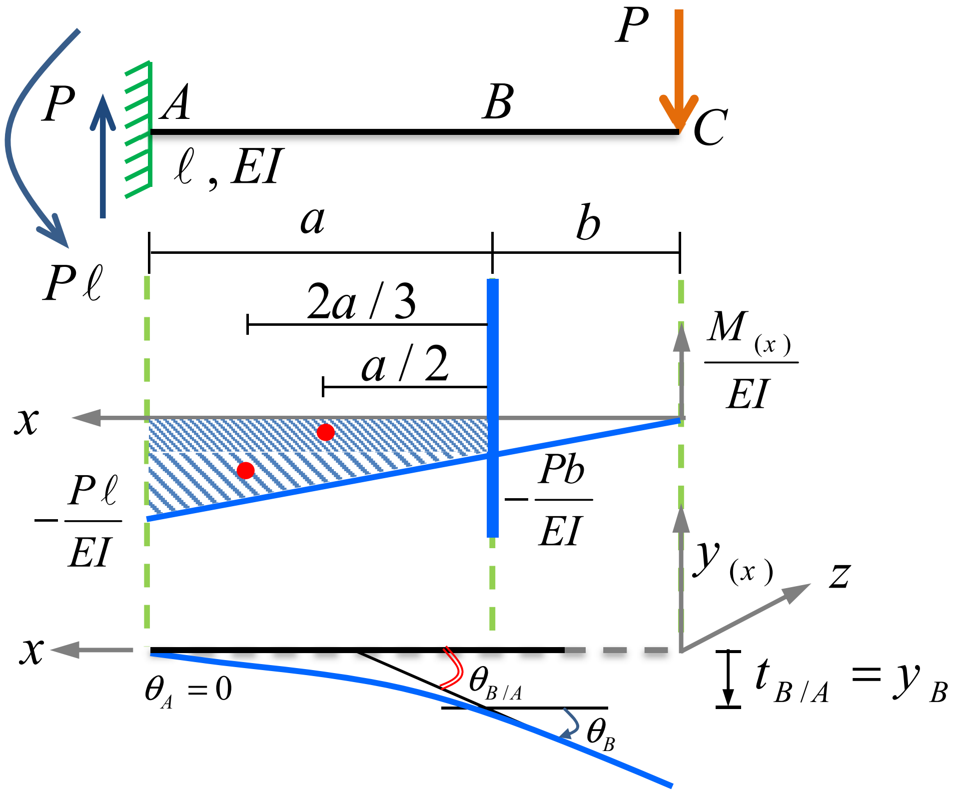
$$\boxed{\theta_B = \frac{Pa(\ell+b)}{2EI}}$$

در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می‌شود

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 5-



$$\boxed{y_B = -\frac{Pa^2(2\ell + b)}{6EI}}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه لنگر سطح زیر نمودار $\dfrac{M_{(x)}}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان‌پذیر است. از این رو خواهیم داشت:

$\Rightarrow$: تعریف قضیه دوم لنگر سطح

$$\boxed{y_B = -\frac{Pa^2(2\ell + b)}{6EI}}$$

در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می‌شود

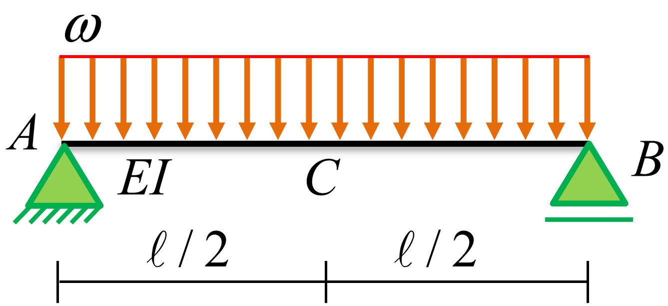
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

مثال 6– با استفاده از روش لنگر سطح در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف– مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$

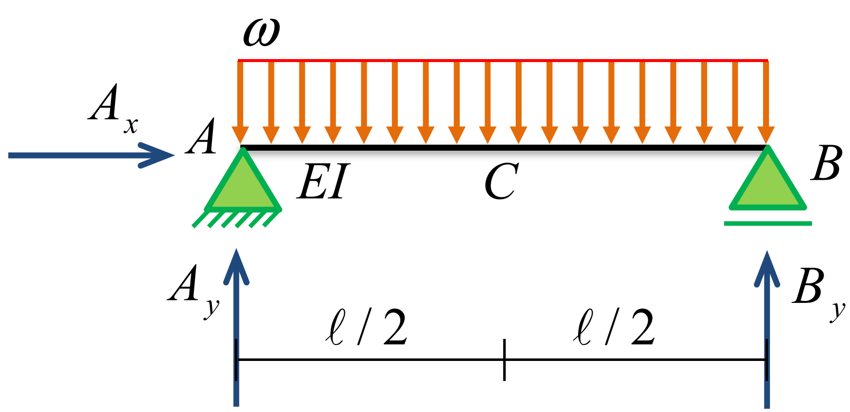
ب– مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 6-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

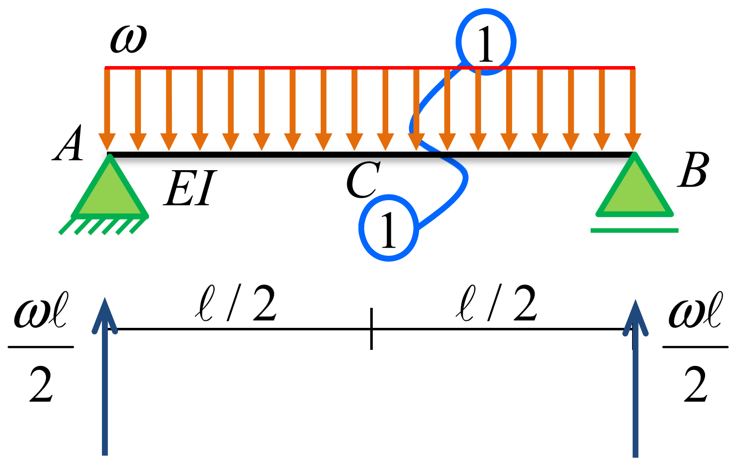
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \ell - (\omega \ell) \ell / 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = \omega \ell / 2}$$

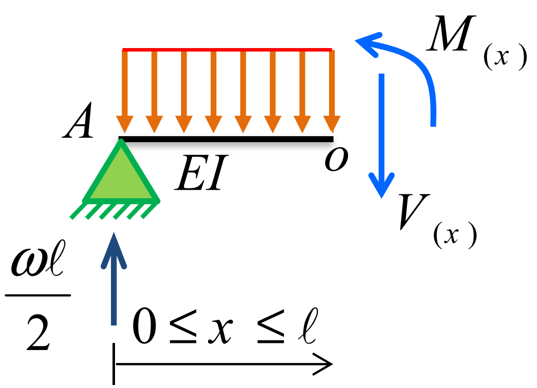
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + \omega \ell / 2 = \omega \ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = \omega \ell / 2}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 6-





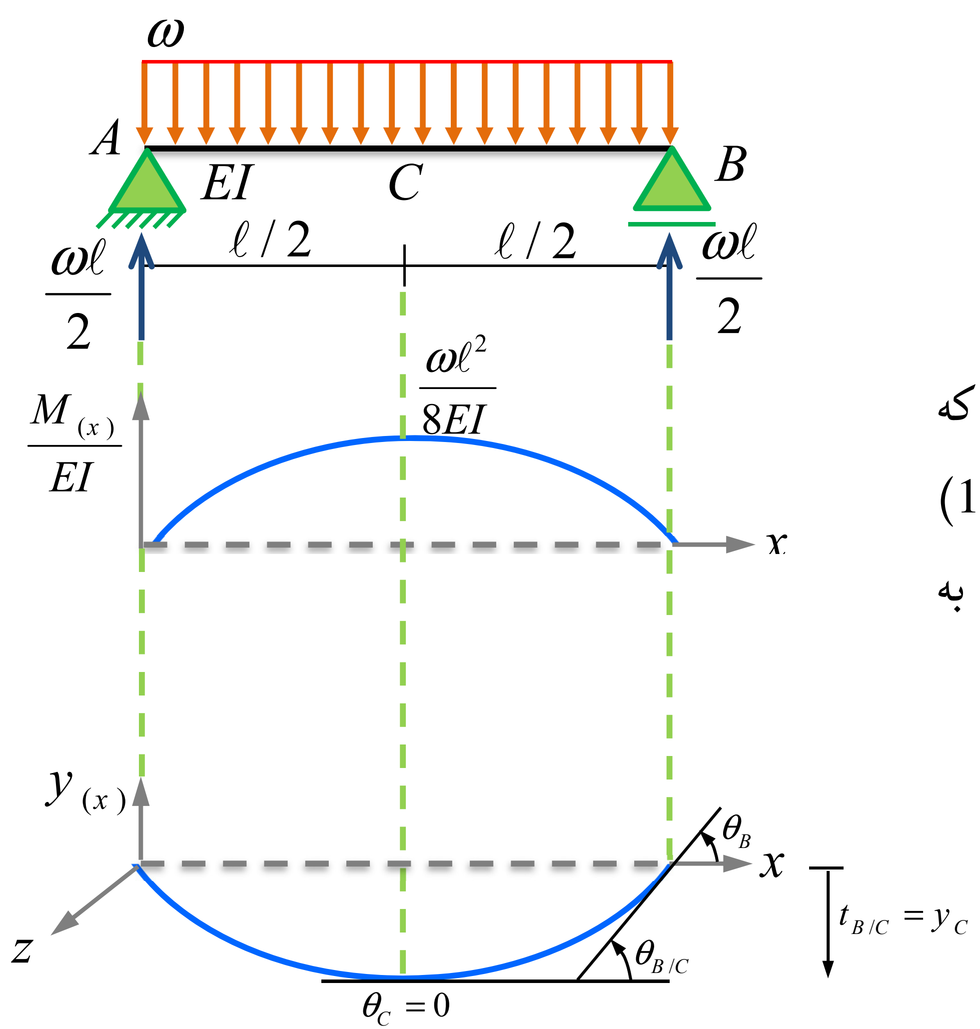
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\boxed{M_{(x)} = -\frac{\omega x^2}{2} + \frac{\omega \ell x}{2}} \quad (6.1)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 6-

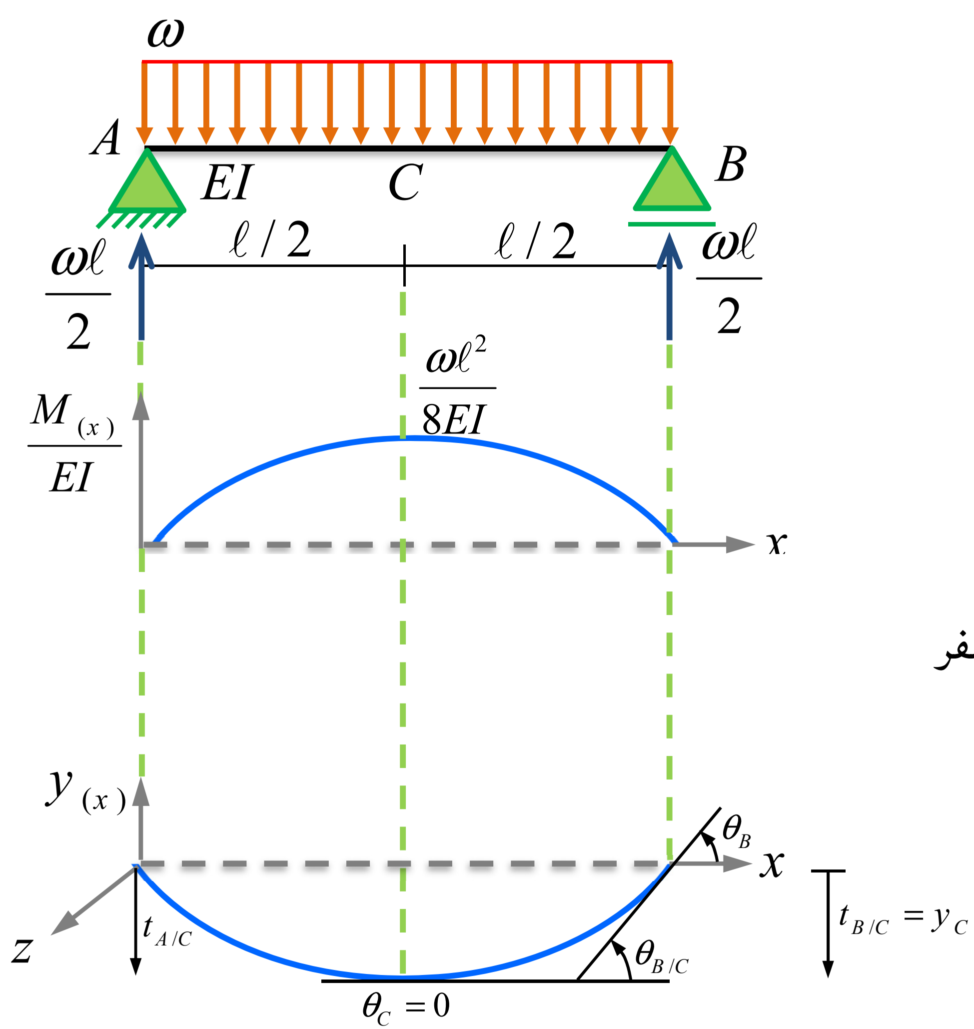


برای استفاده از قضیه اول لنگر سطح بهتر آن است دو گره‌ای که انتخاب می‌شود شیب یکی از آن‌ها معلوم باشد تا در رابطه (13) تنها یک مجهول ظاهر شود. به همین منظور، در این مثال گره C به عنوان گره دوم انتخاب می‌شود:

$$\boxed{\theta_B = \frac{\omega\ell^3}{24EI}}$$

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 6-



همانطور که از شکل پیدا است مقدار $y_C = t_{B/C} = t_{A/C}$

اما از آنجایی که که کران پایین انتگرال گیری در $t_{A/C}$ از صفر شروع می‌شود با محاسبات ساده‌تری مواجه خواهیم شد از این رو:

$$\boxed{y_C = -\frac{5\omega\ell^4}{384EI}}$$

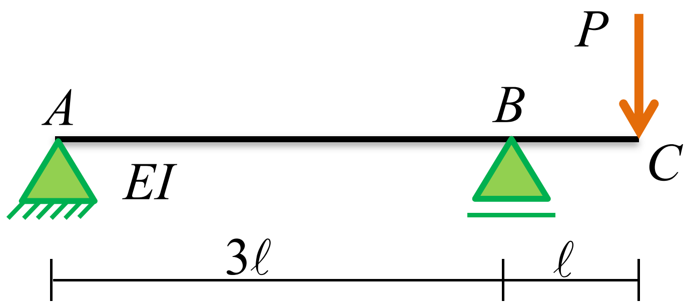
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

مثال 7- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در A. $\theta_A = ?$

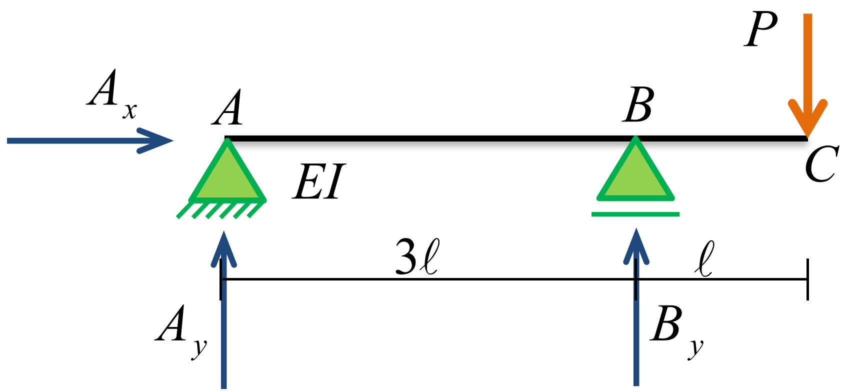
ب- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$



تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 7-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

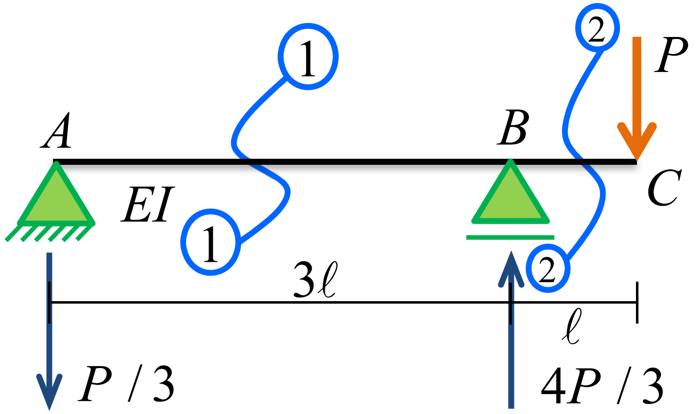
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y(3\ell) - P(3\ell + \ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = \frac{4P}{3}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + \frac{4P}{3} = P \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = -\frac{P}{3}}$$

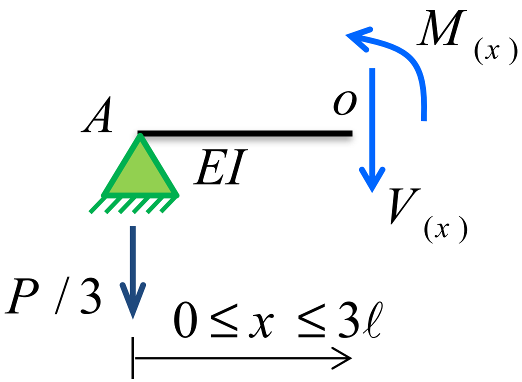
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 7-

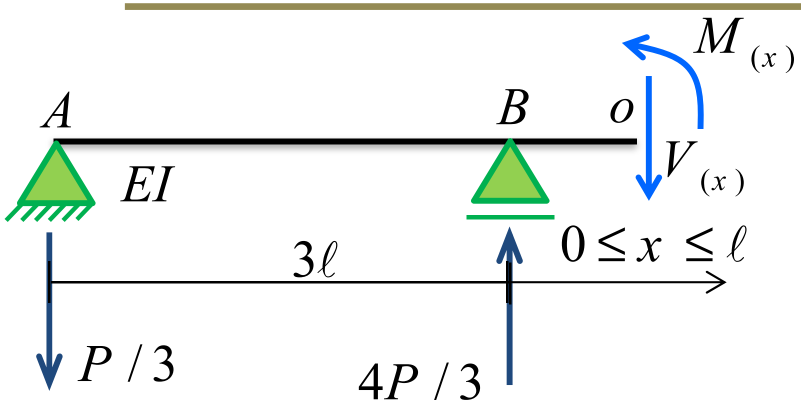


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -Px/3}$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



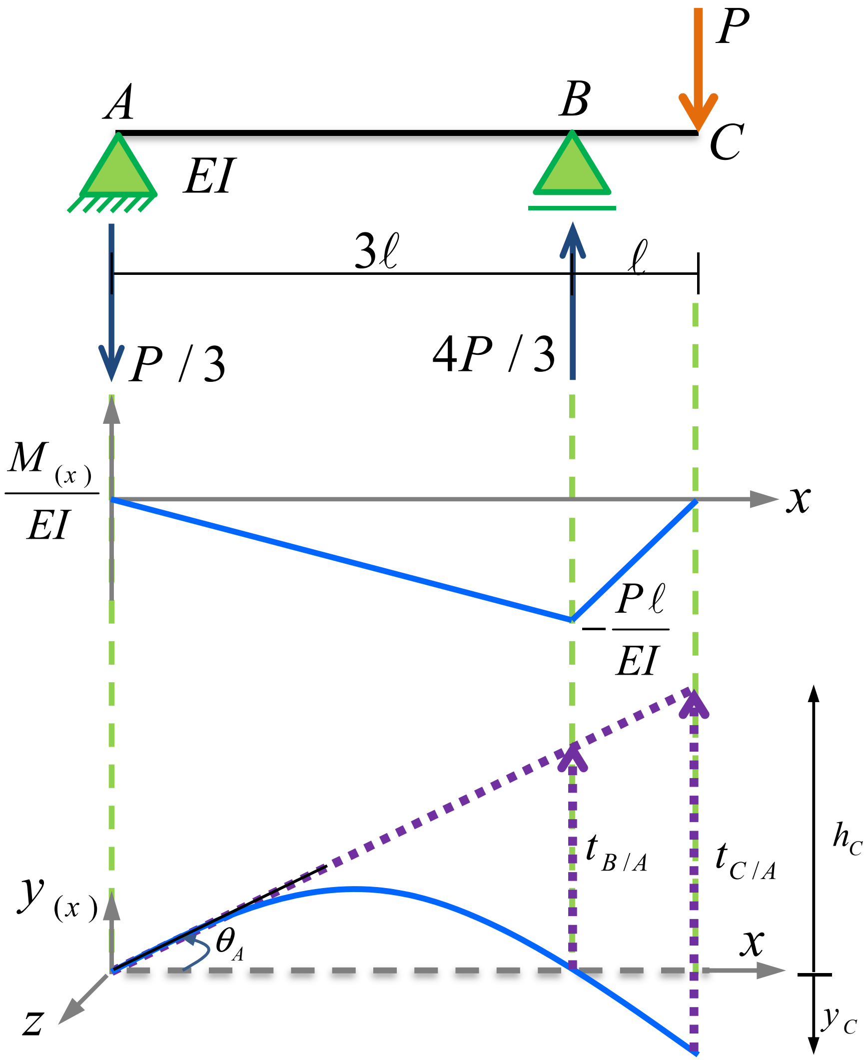
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + (P/3)(3\ell + x) - (4P/3)x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = Px - P\ell}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 7-



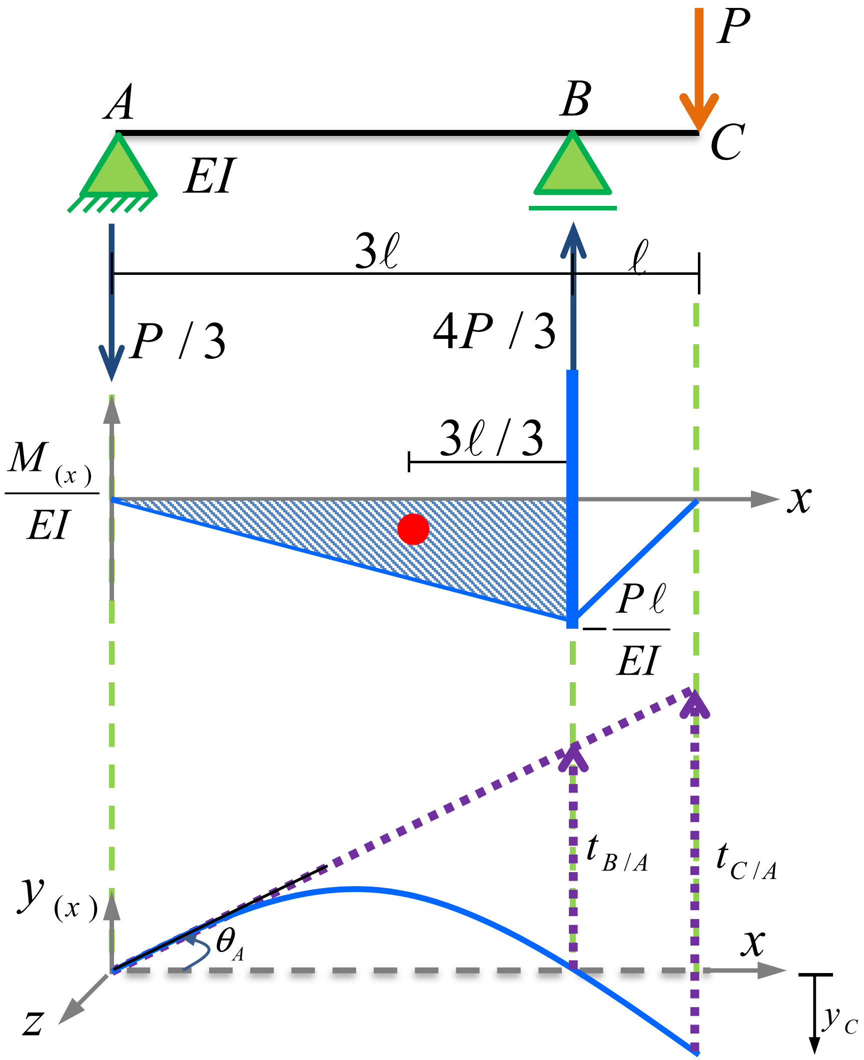
(7.1)

$$\boxed{y_C = \frac{4}{3} t_{B/A} - t_{C/A}} \qquad (7.2)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 7-

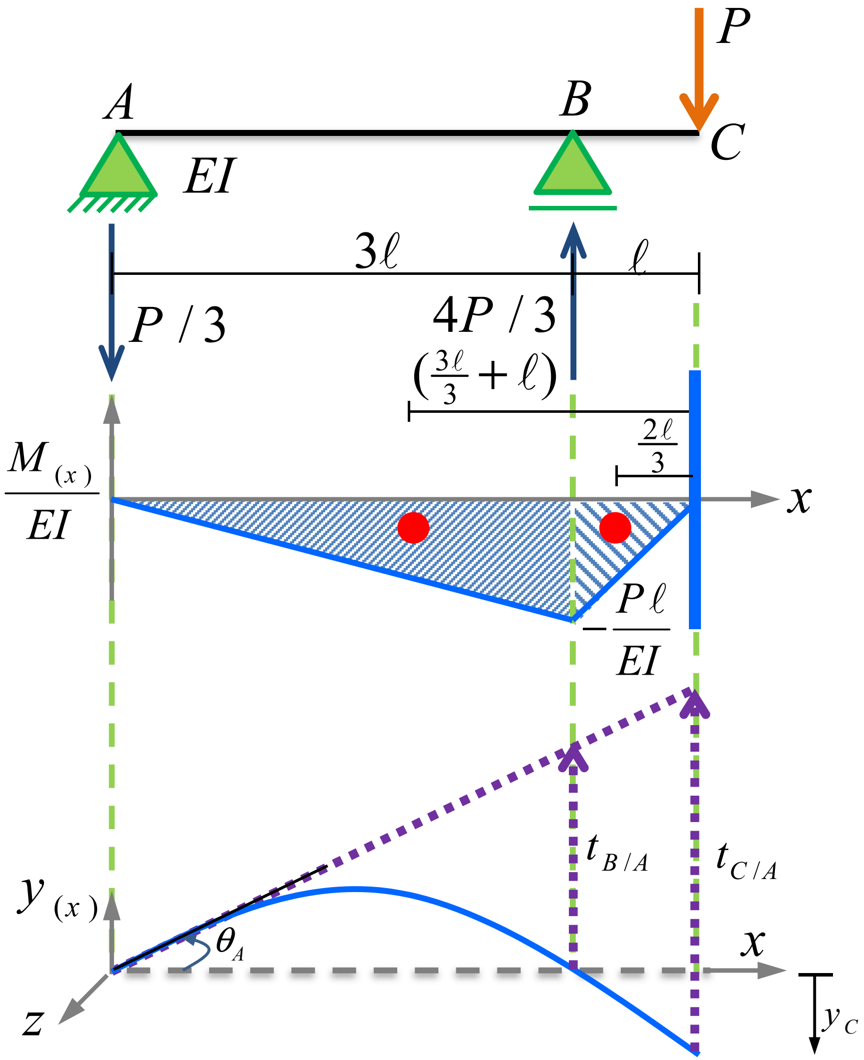


$$\boxed{t_{B/A} = \frac{3P\ell^3}{2EI}} \quad (7.3)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 7-

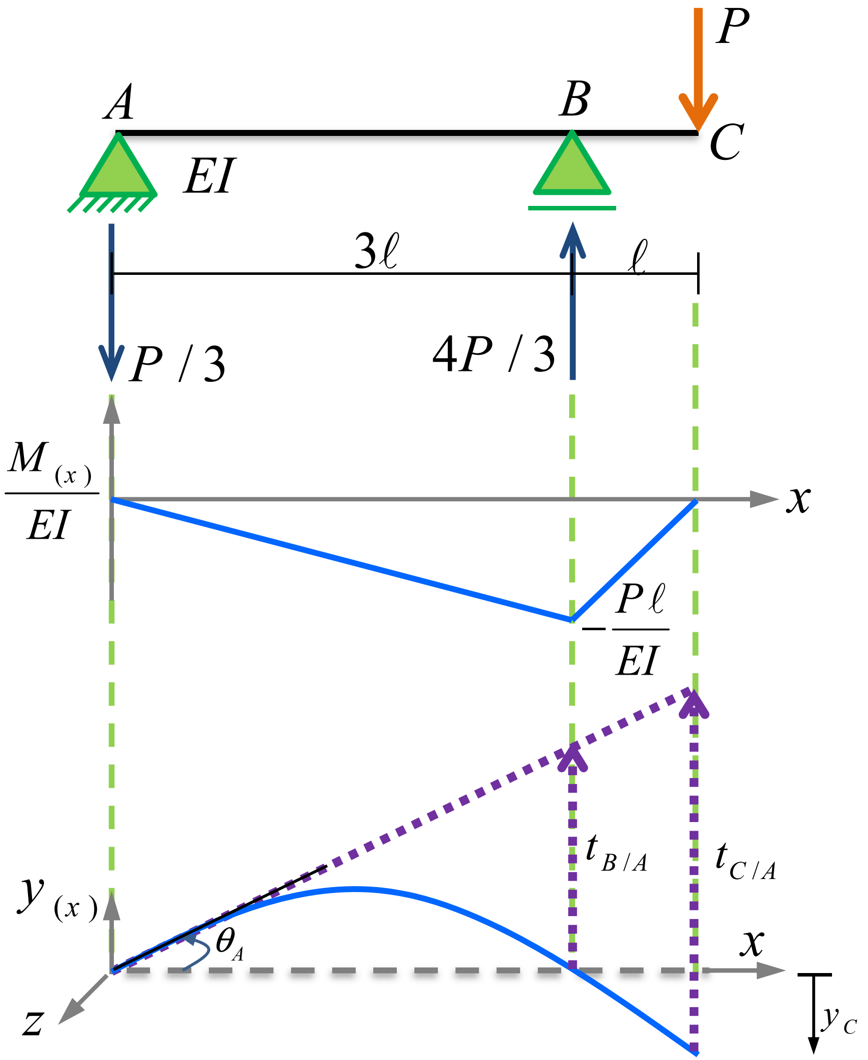


$$\boxed{t_{C/A} = \frac{10P\ell^3}{3EI}} \qquad (7.4)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 7-



$$(7.3)\rightarrow(7.1)\quad\Rightarrow\quad \theta_A=\frac{\left(\dfrac{3P\ell^3}{2EI}\right)}{3\ell}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\theta_A=\frac{P\ell^2}{2EI}}$$

با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، علامت شیب مثبت است.

$$(7.3)\,\&\,(7.4)\rightarrow(7.2)\quad\Rightarrow\quad y_C=\frac{4}{3}\left(\frac{3P\ell^3}{2EI}\right)-\left(\frac{10P\ell^3}{3EI}\right)\quad\Rightarrow\quad \boxed{y_C=-\frac{4P\ell^3}{3EI}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

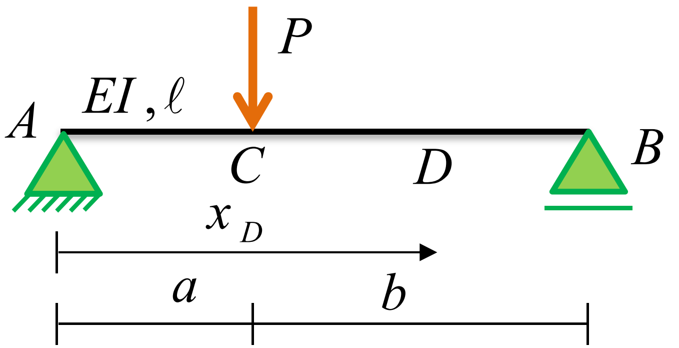
مثال 8- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- مقدار شیب در گره دلخواه D. $\theta_D = ?$

ب- مقدار خیز در گره دلخواه D. $y_D = ?$

پ- مقدار شیب در دو انتهای تیر. $\theta_B = ?$ & $\theta_A = ?$

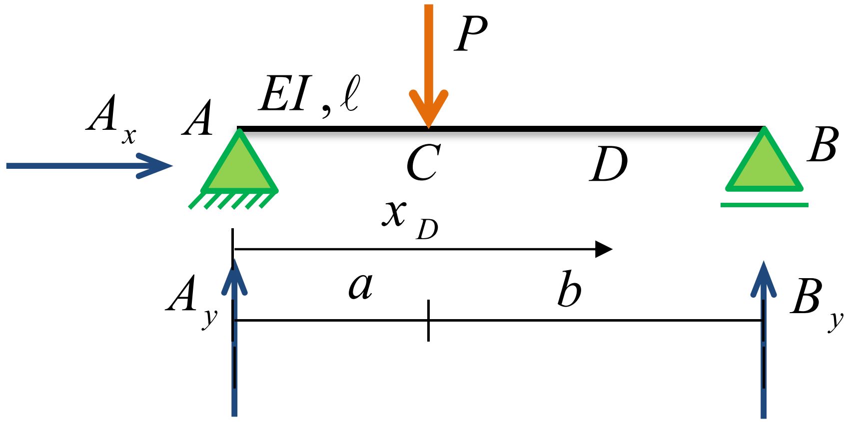
چ- مقدار شیب و خیز در گره C. $y_C = ?$ & $\theta_C = ?$



تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

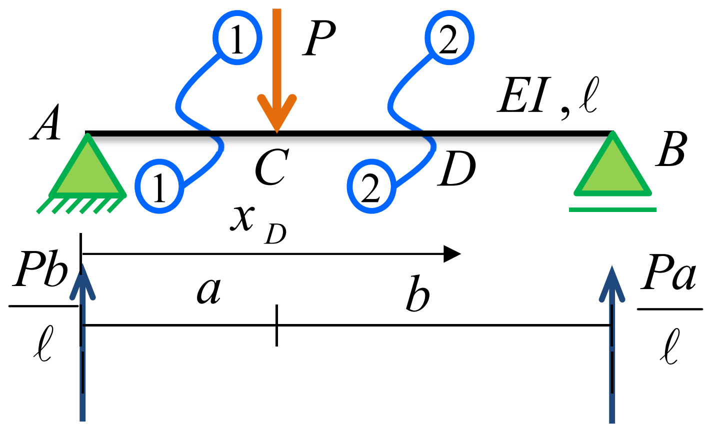
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \ell - Pa = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = \frac{Pa}{\ell}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + Pa/\ell = P \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = \frac{Pb}{\ell}}$$

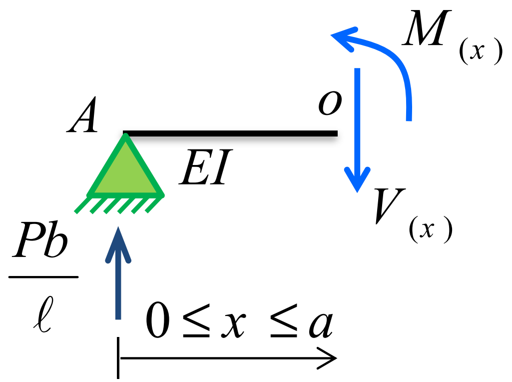
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-

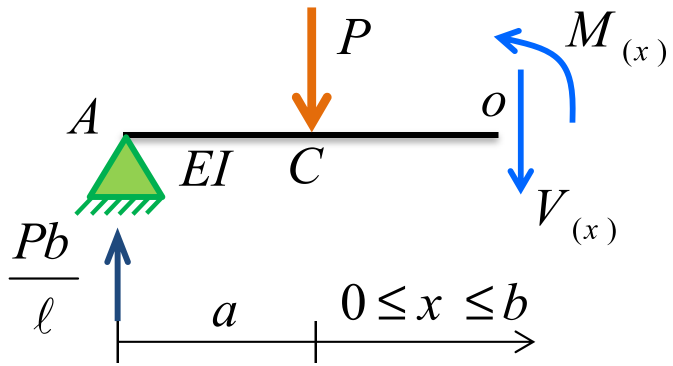


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = \frac{Pbx}{\ell}}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



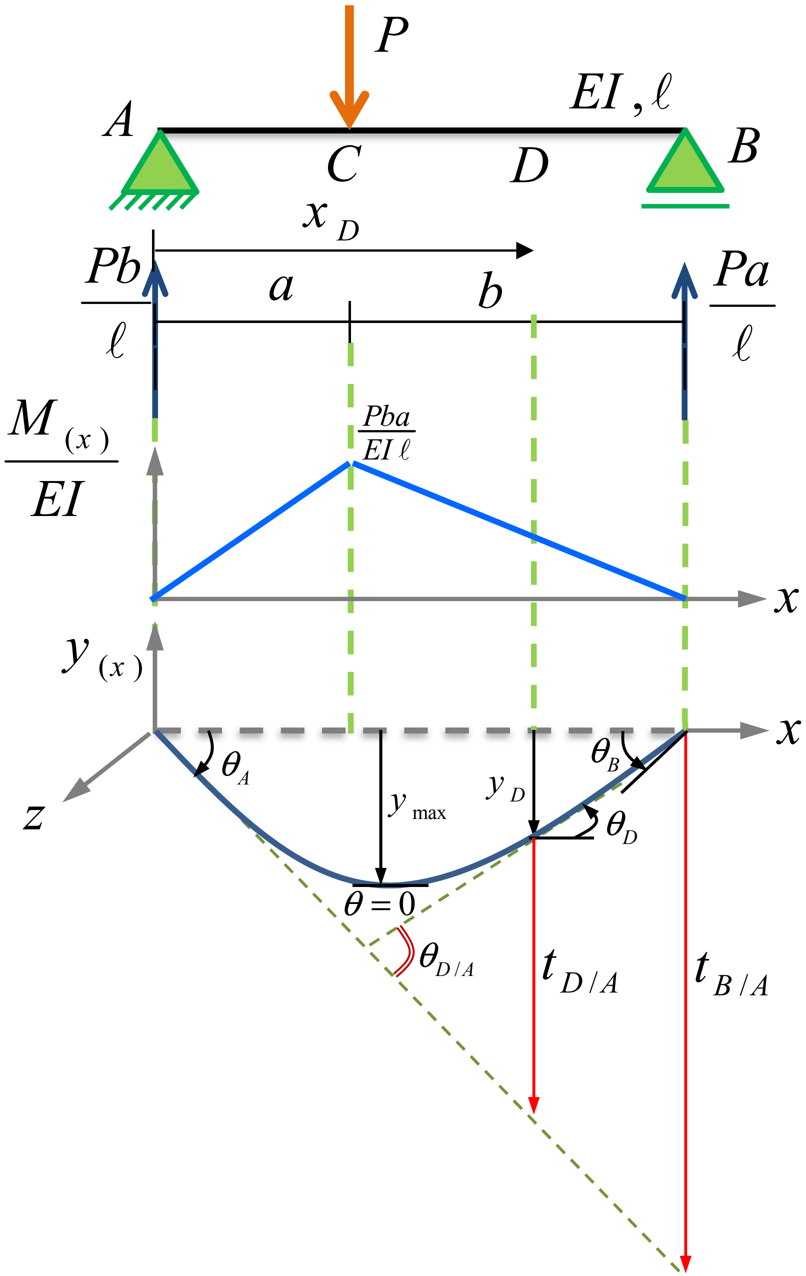
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + Px - \frac{Pb}{\ell}(x+a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -\frac{Pa}{\ell}x + \frac{Pba}{\ell}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-



$$\boxed{\theta_A = \frac{t_{B/A}}{\ell}} \quad (8.1)$$

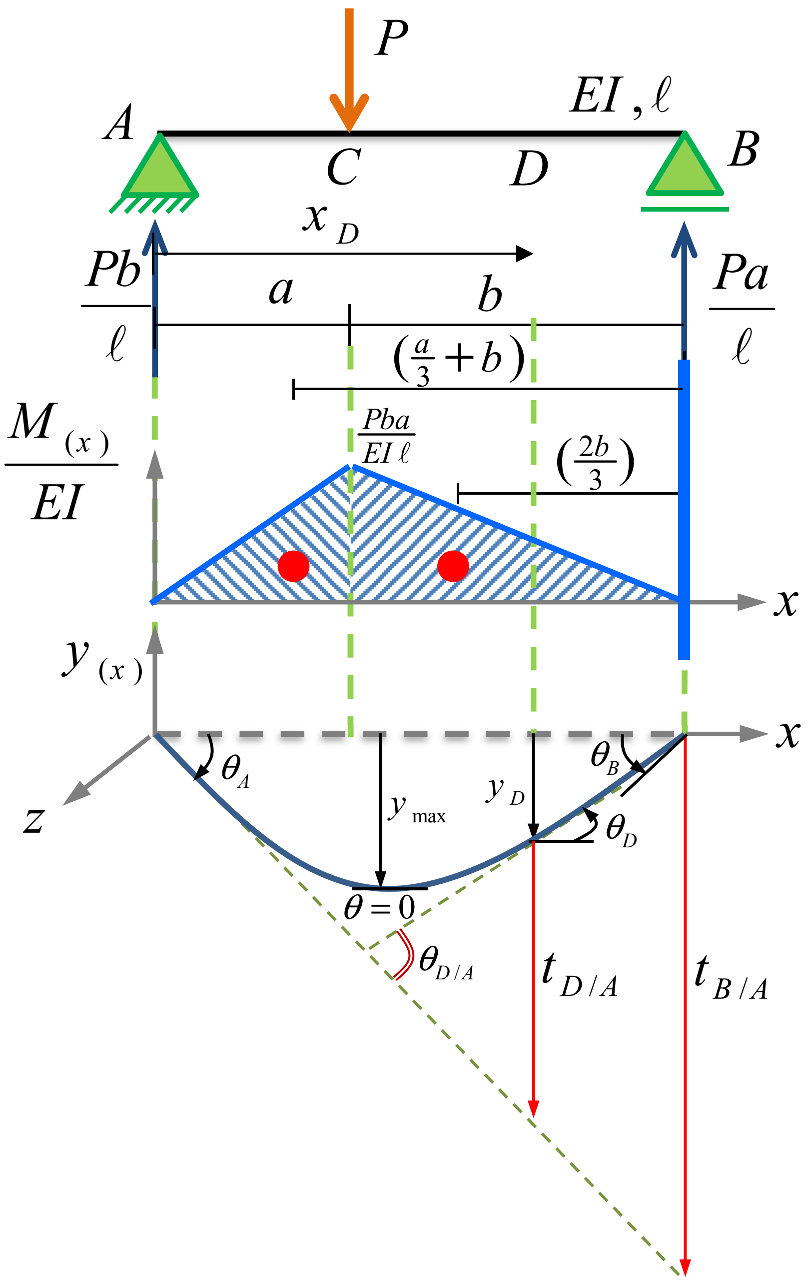
$$\boxed{\theta_D = \theta_{D/A} + \frac{t_{B/A}}{\ell}} \quad (8.2)$$

$$\boxed{y_D = \frac{x_D}{\ell} t_{B/A} - t_{D/A}} \quad (8.3)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-



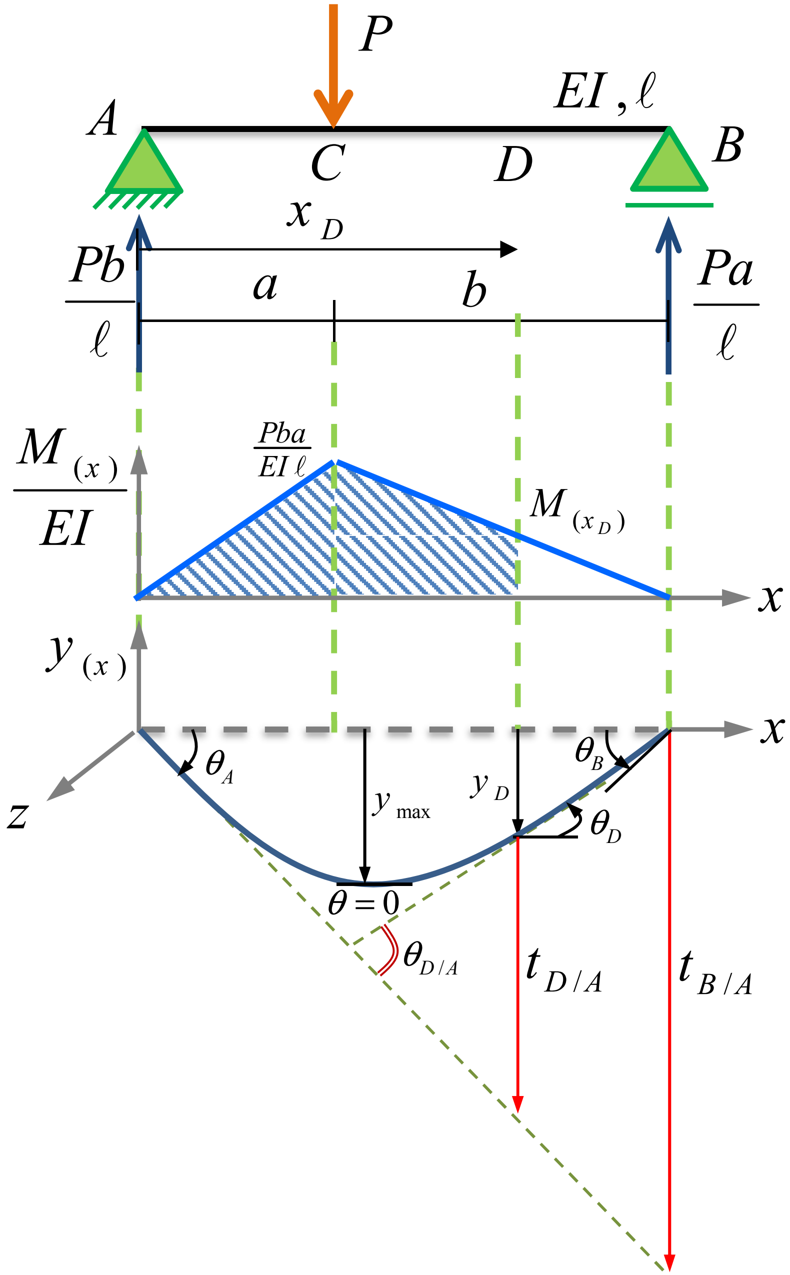
$$\boxed{t_{B/A} = -\frac{Pab(\ell + b)}{6EI}}$$

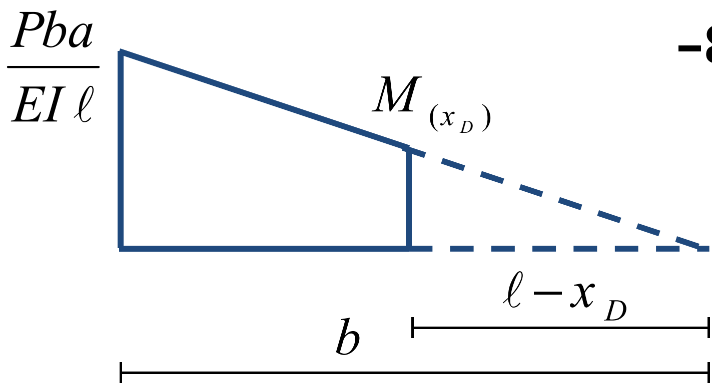
(8.4)

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-





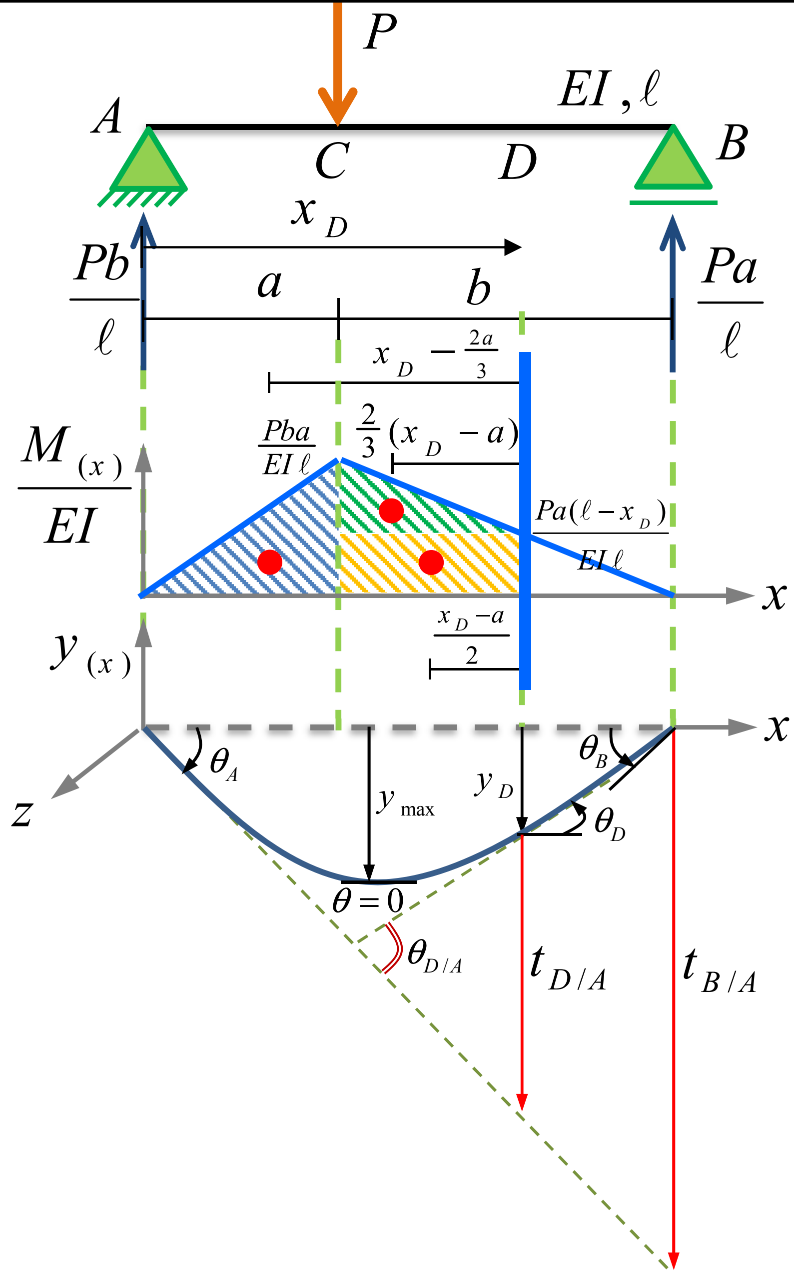
$$M_{(x_D)} = \frac{Pa(\ell - x_D)}{EI\,\ell}$$

$$\theta_{D/A} = \left(\frac{Pba^2}{2EI\,\ell}\right) + \left(\frac{Pa(b+\ell-x_D)(x_D-a)}{2EI\,\ell}\right) \quad (8.5)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-



$$t_{D/A}=\frac{-Pa}{6EI\ell}\left(-x_D^{\,3}+(3a+3b)x_D^{\,2}-(3a^2+3ba)x_D+a^3+ba^2\right) \qquad (8.6)$$

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-

$$(8.4)\rightarrow(8.1)\quad\Rightarrow\quad \theta_A=-\frac{\dfrac{Pab(\ell+b)}{6EI}}{\ell}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\theta_A=-\frac{Pab(\ell+b)}{6EI\,\ell}}$$

$$(8.4)\,\&\,(8.5)\rightarrow(8.2)\quad\Rightarrow\quad \theta_D=\left(\frac{Pba^2}{2EI\,\ell}\right)+\left(\frac{Pa(b+\ell-x_D)(x_D-a)}{2EI\,\ell}\right)+\frac{-\dfrac{Pab(\ell+b)}{6EI}}{\ell}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\theta_D=\left(\frac{Pba^2}{2EI\,\ell}\right)+\frac{Pa}{6EI\,\ell}\left(3(b+\ell-x_D)(x_D-a)-b(\ell+b)\right)}\qquad(8.7)$$

$$(8.4)\,\&\,(8.6)\rightarrow(8.3)$$

$$\Rightarrow\quad y_D=\frac{x_D}{\ell}\left(-\frac{Pab(\ell+b)}{6EI}\right)-\frac{-Pa}{6EI\,\ell}\left(3ax_D^{\ 2}+3bx_D^{\ 2}-3a^2x_D-3bax_D+a^3+ba^2-x_D^{\ 3}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{y_D=-\frac{Pa}{6EI\,\ell}\left(-a^3-ba^2+abx_D+2b^2x_D+3a^2x_D+3bax_D-3ax_D^{\ 2}-3bx_D^{\ 2}+x_D^{\ 3}\right)}\qquad(8.8)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال 8-

$$\overset{(8.7)}{\Rightarrow} \quad \theta_B = \left(\frac{Pba^2}{2EI\,\ell}\right) + \frac{Pa}{6EI\,\ell}\left(3(b+\ell-\ell)(\ell-a) - b(\ell+b)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = \frac{Pba(\ell+a)}{6EI\,\ell}}$$

$$\overset{(8.7)}{\Rightarrow} \quad \theta_C = \left(\frac{Pba^2}{2EI\,\ell}\right) + \frac{Pa}{6EI\,\ell}\left(3(b+\ell-a)(a-a) - b(\ell+b)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_C = \frac{Pba^2}{2EI\,\ell} - \frac{Pab(\ell+b)}{6EI\,\ell}}$$

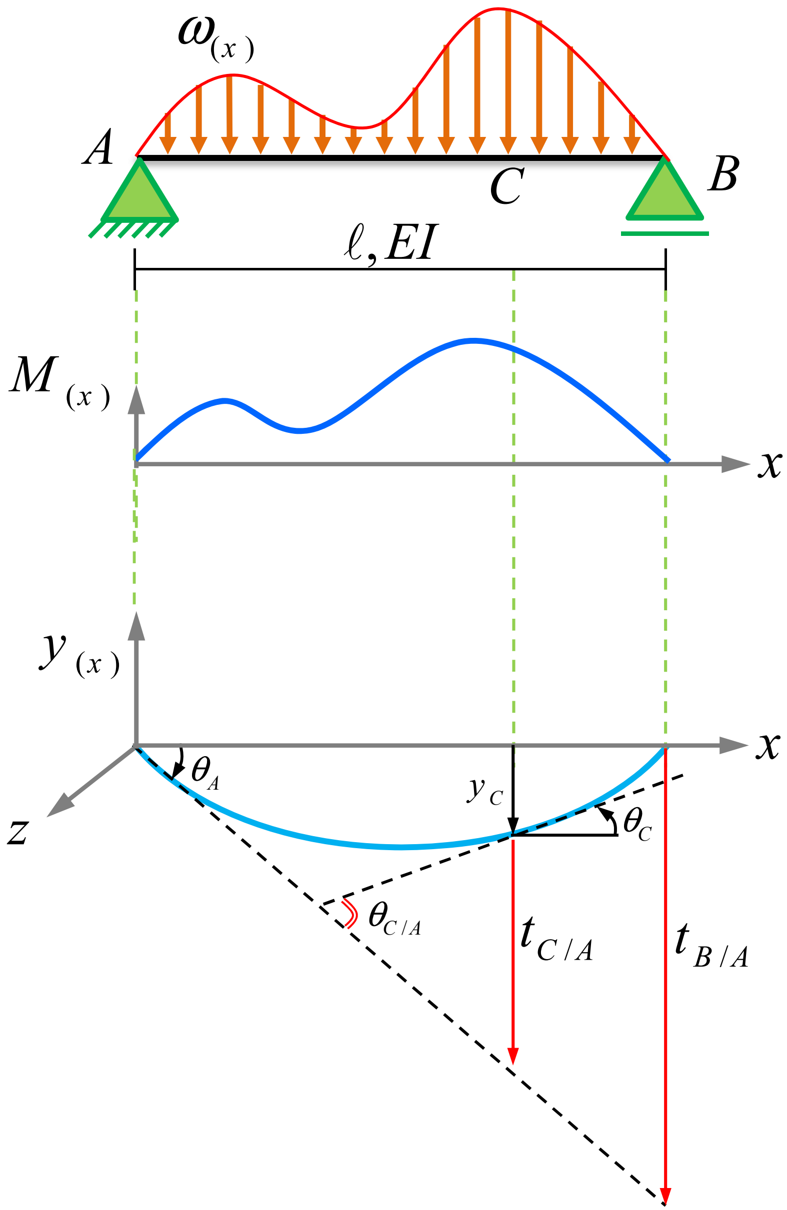
$$\overset{(8.8)}{\Rightarrow} \quad y_C = -\frac{Pa}{6EI\,\ell}\left(-a^3 - ba^2 + ba^2 + 2b^2a + 3a^3 + 3ba^2 - 3a^3 - 3ba^2 + a^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_C = -\frac{Pa^2b^2}{3EI\,\ell}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر نشان داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار تغییرشکل تیر خواهیم داشت:



$$(14) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{B/A} = \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (15)$$

با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، علامت شیب منفی است.

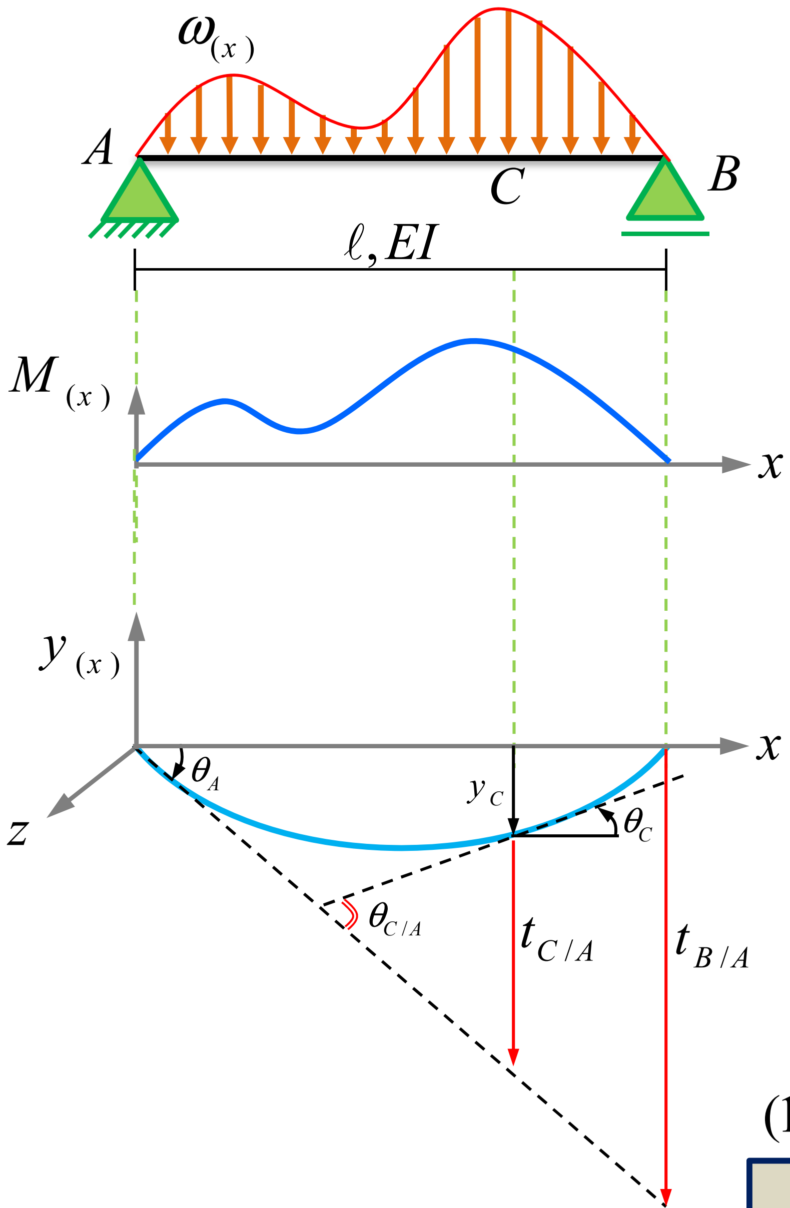
$$\theta_A = \tan^{-1}(\theta_A) = \frac{t_{B/A}}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{\ell}} \quad (16)$$

$$(15) \rightarrow (16) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_A = -\frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (17)$$

$$(13) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{C/A} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (18)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)



$$(13) \quad \Rightarrow \quad \theta_{C/A} = \hat{\theta}_C - \hat{\theta}_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\theta}_C = \theta_{C/A} + \hat{\theta}_A} \quad (19)$$

$$(17)\,\&\,(18) \rightarrow (19) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\theta}_C = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx - \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (20)$$

$$\theta_A = \tan^{-1}(\theta_A) = \frac{y_C + t_{C/A}}{x_C} \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \frac{y_C + t_{C/A}}{x_C} \quad \Rightarrow$$

با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، علامت خیز منفی است.

$$y_C = x_C \theta_A - t_{C/A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_C = -x_C \theta_A + t_{C/A}} \quad (21)$$

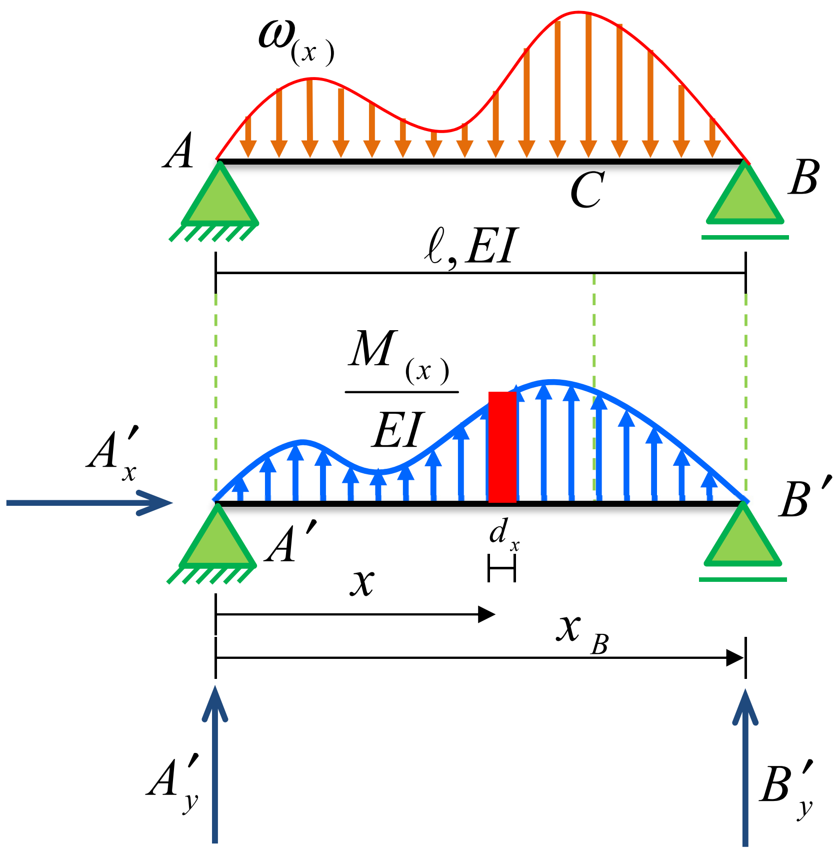
$$(14) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{C/A} = \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (22)$$

$$(17)\,\&\,(22) \rightarrow (21) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y_C = -\frac{x_C}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (23)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)



بار الاستیک: همان نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ است که جهت آن همواره از سمت محور تیر به سمت منحنی لنگر می‌باشد.

تیر مزدوج: تیری که بار الاستیک بر روی آن قرار می گیرد را تیر مزدوج می‌نامند.

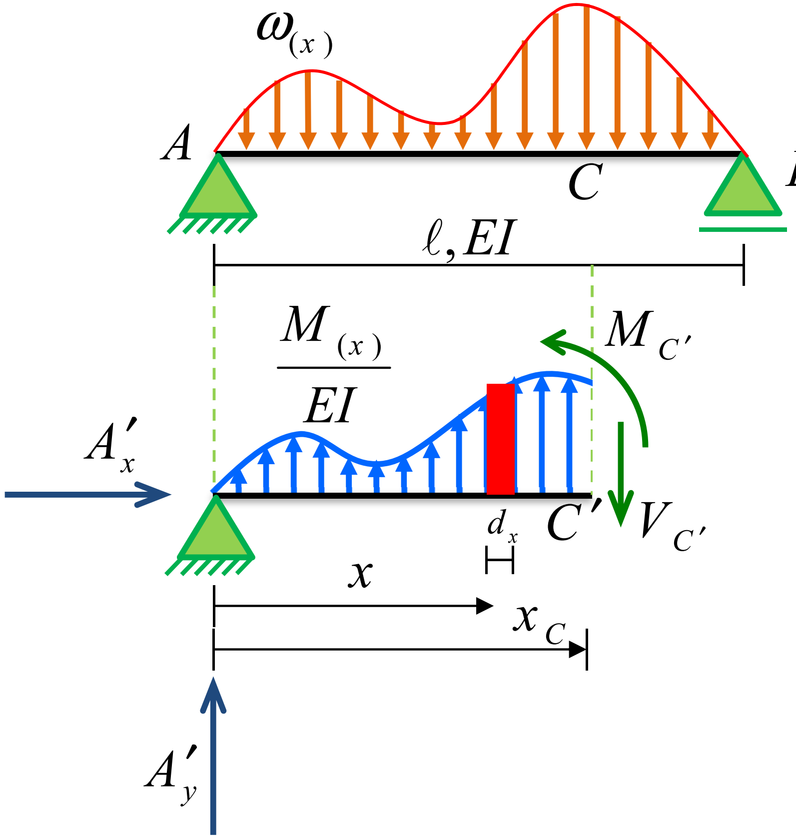
$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -A'_y \ell - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad A'_y = -\frac{1}{\ell} \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx$$

$$\Rightarrow \quad A'_y = \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x_B - x) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A'_y = -\frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (24)$$

تغییر شکل در تیرهای معین



روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A'_y + \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx - V_{C'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_{C'} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx + A'_y$$

$$\overset{(24)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{C'} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx - \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (25)$$

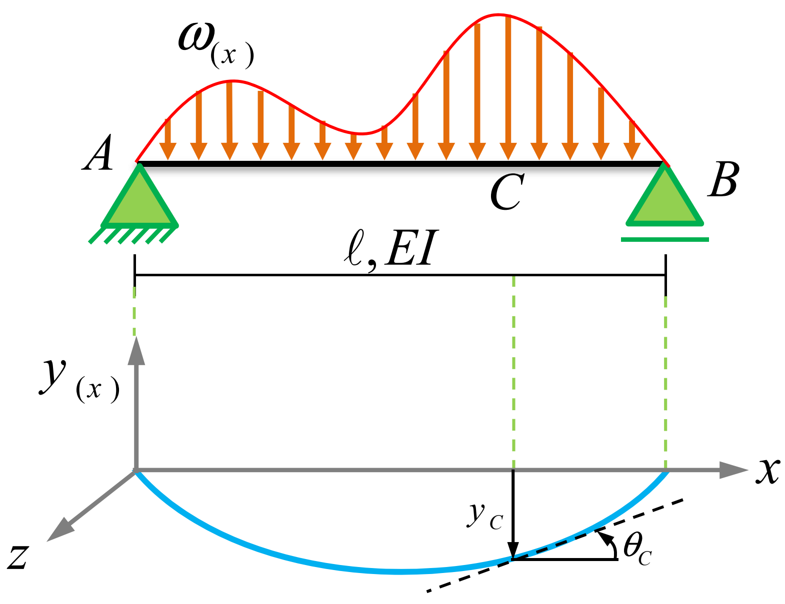
$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-A'_y x_C - \int_{x_A}^{x_C} (x_C - x) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx + M_{C'} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{C'} = A'_y x_C + \int_{x_A}^{x_C} (x_C - x) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx$$

$$\Rightarrow \quad M_{C'} = A'_y x_C - \int_{x_C}^{x_A} (x_C - x) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad \Rightarrow \quad M_{C'} = A'_y x_C + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx$$

$$\overset{(24)}{\Rightarrow} \quad \boxed{M_{C'} = -\frac{x_C}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (26)$$

تغییر شکل در تیرهای معین



روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

$$\hat{\theta}_C = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx - \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (20)$$

$$V_{C'} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx - \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (25)$$

$(20) \& (25) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_C = V_{C'}}$

نیروی برشی در تیر مزدوج معادل شیب در تیر اصلی است.

$$y_C = -\frac{x_C}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (23)$$

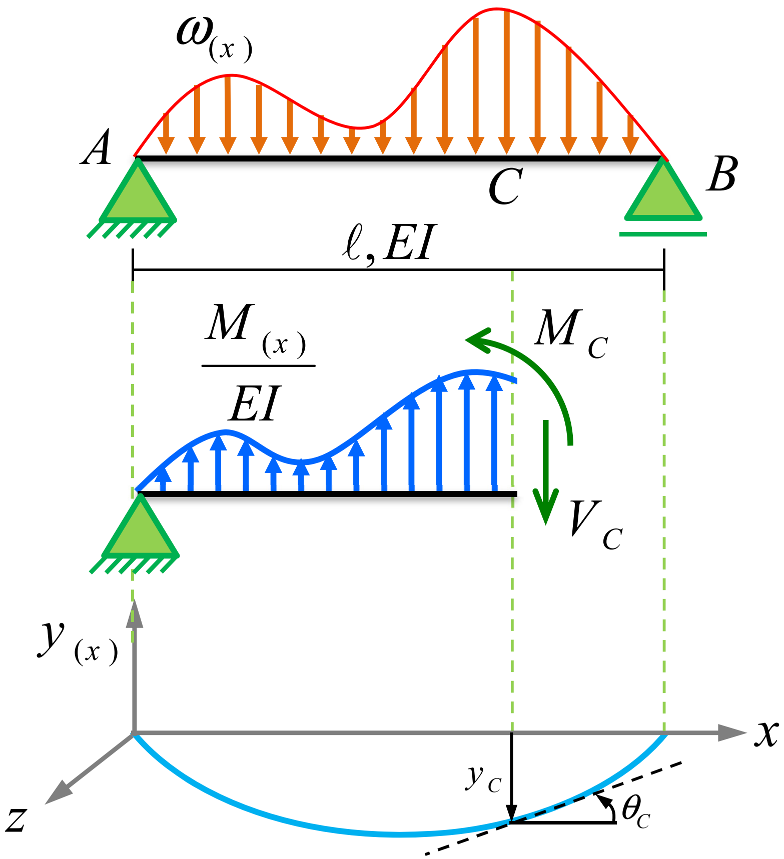
$$M_{C'} = -\frac{x_C}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (26)$$

$(23) \& (26) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_C = M_{C'}}$

لنگر خمشی در تیر مزدوج معادل خیز در تیر اصلی است.

تغییر شکل در تیرهای معین

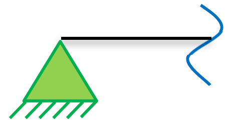
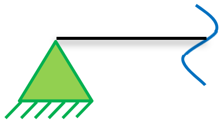
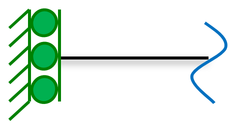
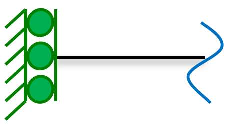
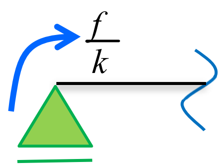
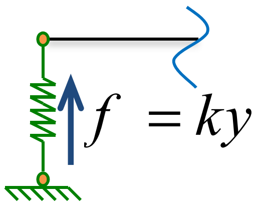
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)



روش تیر مزدوج: در این روش مساله تعیین شیب‌ها و تغییر مکان‌های یک تیر در اثر بارهای وارده (بارهای حقیقی) به مساله تعیین نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی یک تیر مزدوج تحت اثر بار الاستیک تبدیل می‌شود. منظور از بار الاستیک یا ارتجاعی همان نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ است که دیمانسیون آن برابر با L^{-1} می‌باشد. بنابراین باید ترتیب تکیه‌گاه‌ها و اتصالات در تیر مزدوج به گونه‌ای باشد که نیروی برشی و گشتاور خمشی ایجاد شده در آن تیر با شیب و تغییرمکان ایجاد شده در مقاطع مربوطه از تیر حقیقی تطابق کامل داشته باشد.

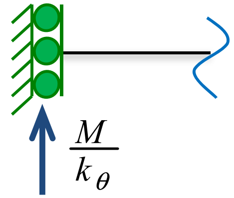
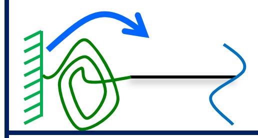
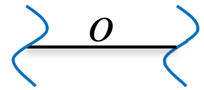
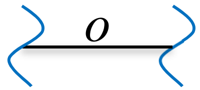
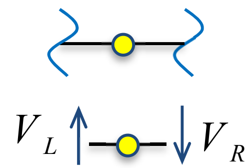
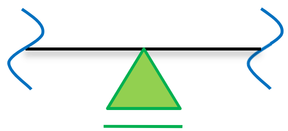
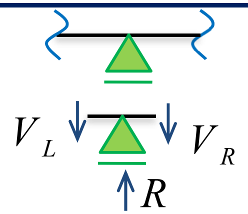
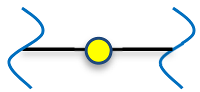
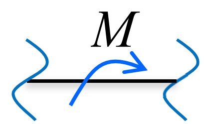
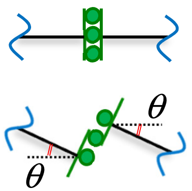
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر مزدوج	شرایط مرزی در تیر مزدوج	شرایط مرزی در تیر حقیقی	تیر حقیقی
	$M=0 \quad V\neq 0$	$y=0 \quad \theta\neq 0$	
	$M=0 \quad V=0$	$y=0 \quad \theta=0$	
	$M\neq 0 \quad V\neq 0$	$y\neq 0 \quad \theta\neq 0$	
	$M\neq 0 \quad V=0$	$y\neq 0 \quad \theta=0$	
	$M=\frac{f}{k} \quad V\neq 0$ جهت لنگر هم جهت با دوران سازه است.	$y=\frac{f}{k} \quad \theta\neq 0$	

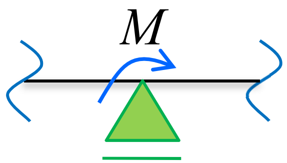
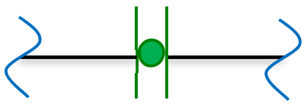
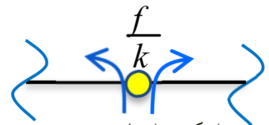
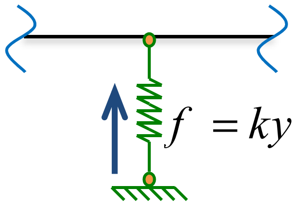
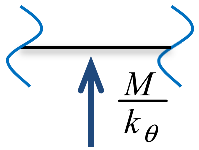
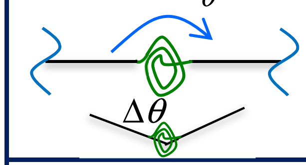
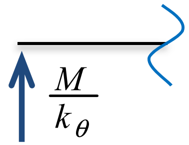
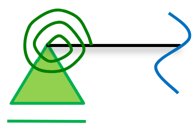
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر مزدوج	شرایط مرزی در تیر مزدوج	شرایط مرزی در تیر حقیقی	تیر حقیقی
	$M \neq 0 \quad V = \frac{M}{k_\theta}$	$y \neq 0 \quad \theta = \frac{M}{k_\theta}$	$M = k_\theta \theta$ 
	$M \neq 0 \quad V \neq 0$	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$	
	$M = 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M = 0 \quad \Delta V = 0$ $(V_L = V_R)$	$y = 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y = 0 \quad \Delta\theta = 0$	
	$M \neq 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M = 0 \quad \Delta V \neq 0$ $(V_L + V_R = R)$	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y = 0 \quad \Delta\theta \neq 0$	
	$M \neq 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M \neq 0 \quad \Delta V = 0$	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y \neq 0 \quad \Delta\theta = 0$	

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر مزدوج	شرایط مرزی در تیر مزدوج	شرایط مرزی در تیر حقیقی	تیر حقیقی
	$M\neq 0 \quad V\neq 0$ $\Delta M\neq 0 \quad \Delta V\neq 0$	$y\neq 0 \quad \theta\neq 0$ $\Delta y\neq 0 \quad \Delta\theta\neq 0$	
 جهت لنگر داخلی هم جهت با دوران سازه است.	$M=\frac{f}{k} \quad V\neq 0$ $\Delta M=0 \quad \Delta V=0$	$y=\frac{f}{k} \quad \theta\neq 0$ $\Delta y=0 \quad \Delta\theta=0$	
	$M\neq 0 \quad V\neq 0$ $\Delta M=0 \quad \Delta V=\frac{M}{k_\theta}$	$y\neq 0 \quad \theta\neq 0$ $\Delta y=0 \quad \Delta\theta=\frac{M}{k_\theta}$	$M=k_\theta\Delta\theta$ 
	$M=0 \quad V=\frac{M}{k_\theta}$	$y=0 \quad \theta=\frac{M}{k_\theta}$	

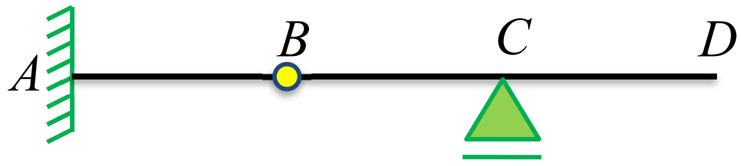
اگر سازه معین باشد مزدوج آن معین خواهد بود.

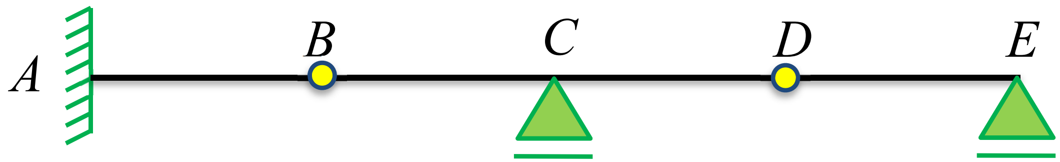
اگر سازه نامعین باشد مزدوج آن ناپایدار خواهد بود. در این حالت خود بارگذاری الاستیک باعث پایداری می‌گردد.

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال 9- مزدوج هریک از تیرهای زیر را رسم نمایید.

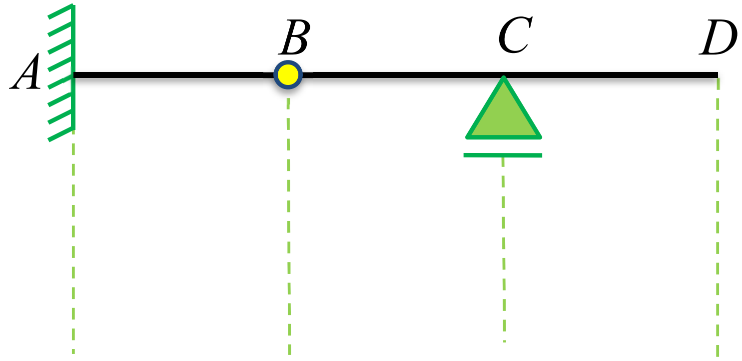


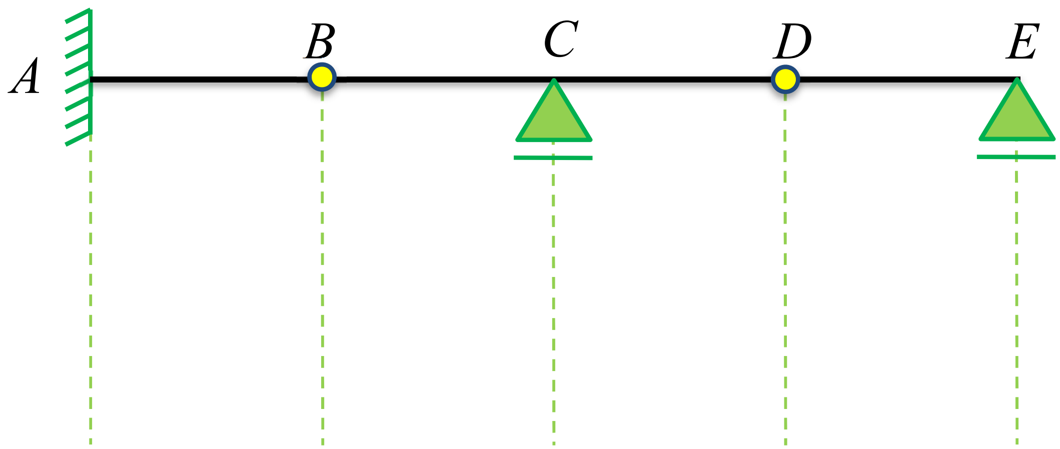


تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 9-





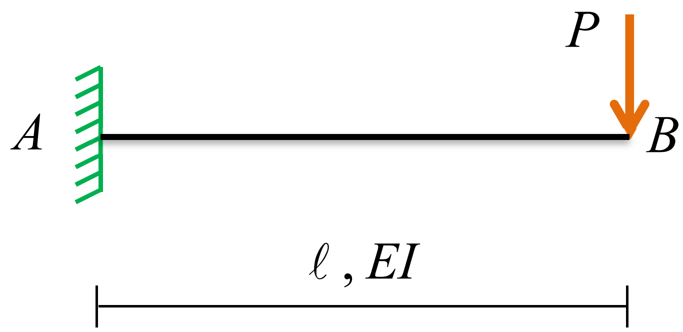
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال 10- با استفاده از روش تیر مزدوج در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

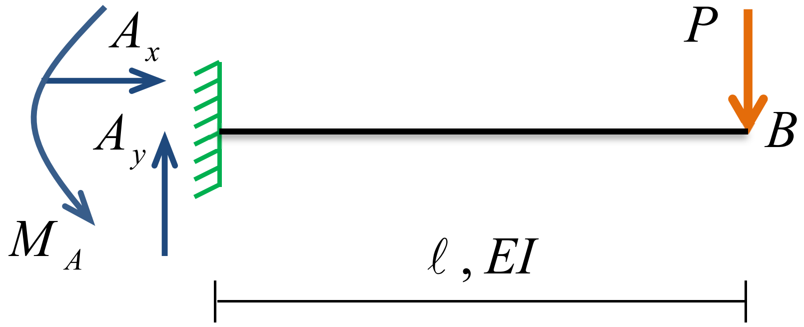
ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

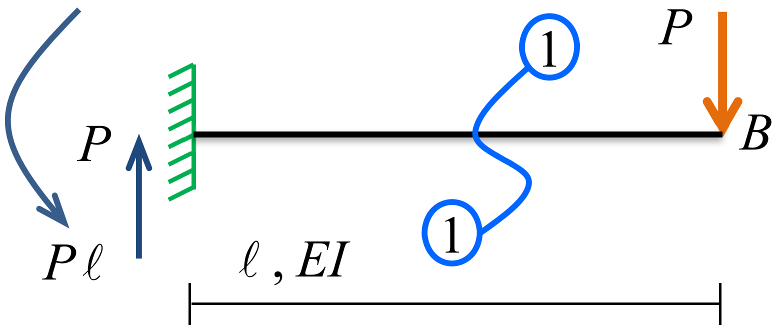
پاسخ مثال 10-

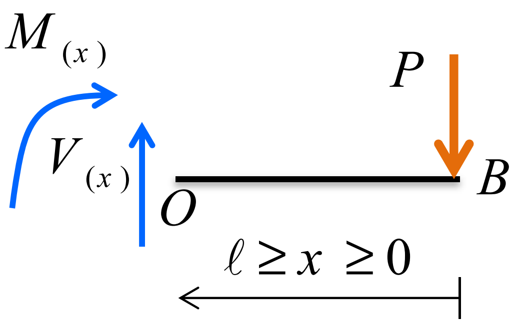


با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_x = 0} \qquad \sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A - P\times\ell = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_A = P\ell}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y - p = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_y = P}$$





با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:

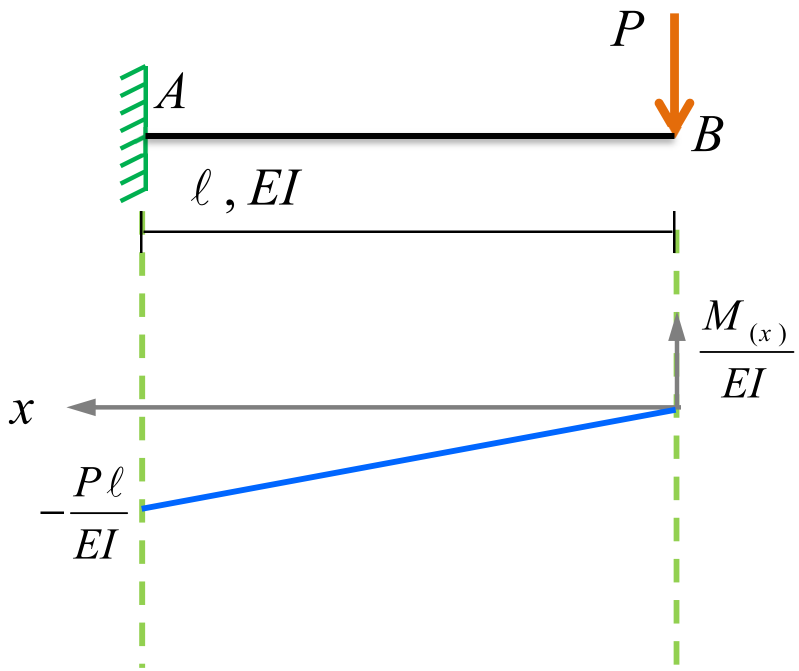
$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} + P\times x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = -Px} \qquad (4.1)$$

$$\ell \geq x \geq 0$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 10-

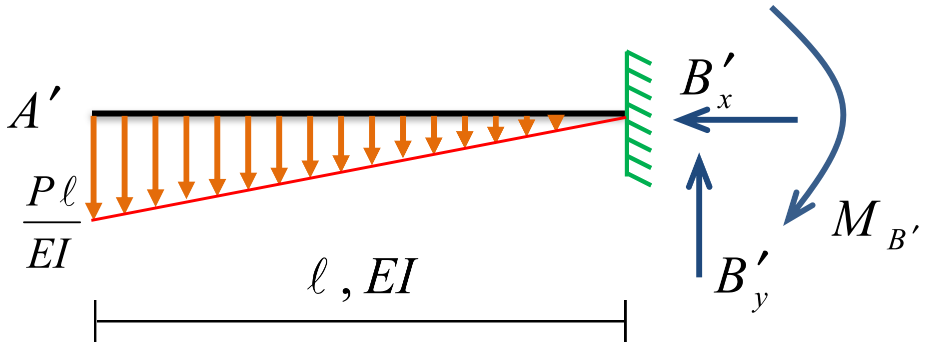


تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 10-

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر مزدوج تعیین می‌گردد:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B'_x = 0}$$

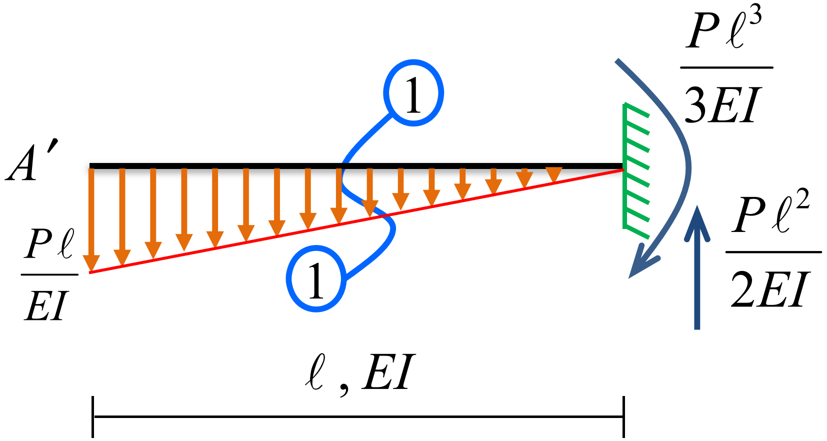
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B'_y - \frac{1}{2} \times \frac{P\ell}{EI} \times \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B'_y = \frac{P\ell^2}{2EI}}$$

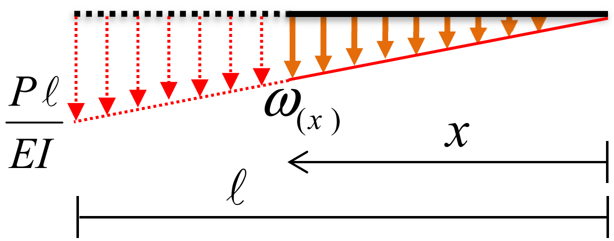
$$\sum M_{B'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{B'} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{P\ell}{EI} \times \ell \right) \times \left(\frac{2\ell}{3} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{B'} = \frac{P\ell^3}{3EI}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

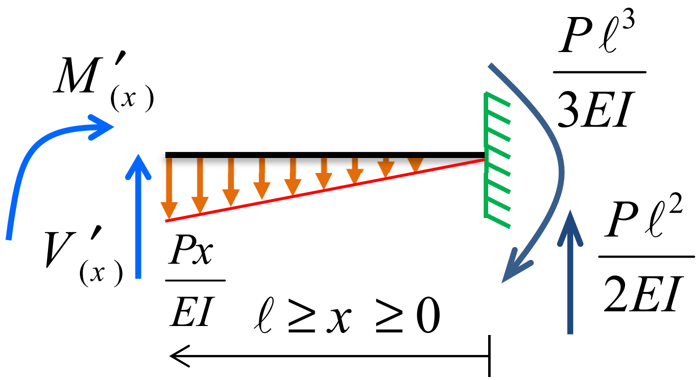
پاسخ مثال 10-





$$\boxed{\omega_{(x)} = \frac{Px}{EI}}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



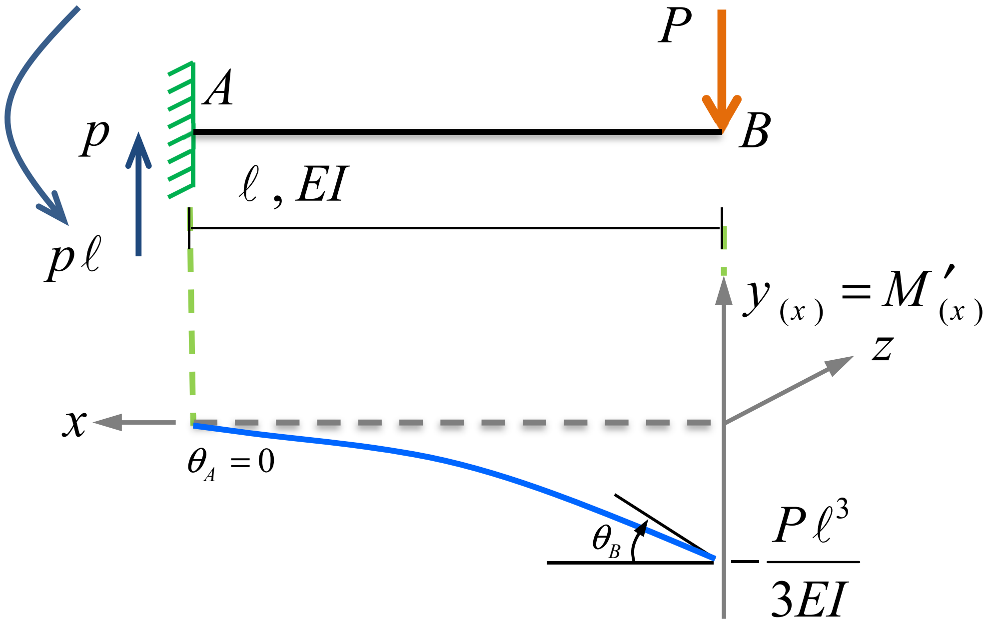
$$\boxed{\underset{\ell \geq x \geq 0}{M'_{(x)}} = \frac{P\ell^2 x}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} - \frac{P\ell^3}{3EI}} \quad (10.1)$$

$$\boxed{\underset{\ell \geq x \geq 0}{V'_{(x)}} = \frac{Px^2}{2EI} - \frac{P\ell^2}{2EI}} \quad (10.2)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 10-



$$\overset{(10.1)}{\Rightarrow} \quad y_B = M'_B = \frac{P\ell^2(0)}{2EI} - \frac{P(0)^3}{6EI} - \frac{P\ell^3}{3EI} \Rightarrow \boxed{y_B = -\frac{P\ell^3}{3EI}}$$

$$\overset{(10.2)}{\Rightarrow} \quad \theta_B = V'_B = \frac{P(0)^2}{2EI} - \frac{P\ell^2}{2EI} \Rightarrow \theta_B = -\frac{P\ell^2}{2EI} \Rightarrow \boxed{\theta_B = \frac{P\ell^2}{2EI}}$$

با توجه به در نظر گرفتن جهت دستگاه مختصات (در نظر گرفتن بخش سمت راست در محاسبه برش و لنگر در تیر مزدوج) علامت شیب یا برش در یک منفی ضرب می‌شود.

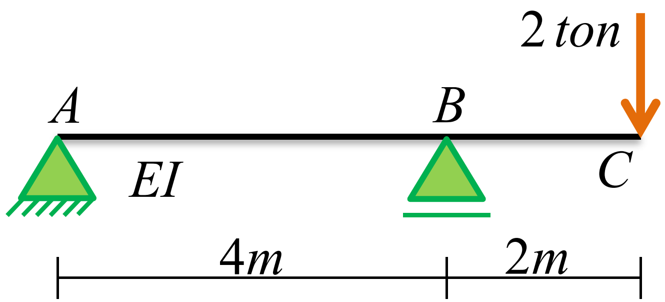
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال 11- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در C. $\theta_C = ?$

ب- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$



$$E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$$

$$I = 10^3\ cm^4$$

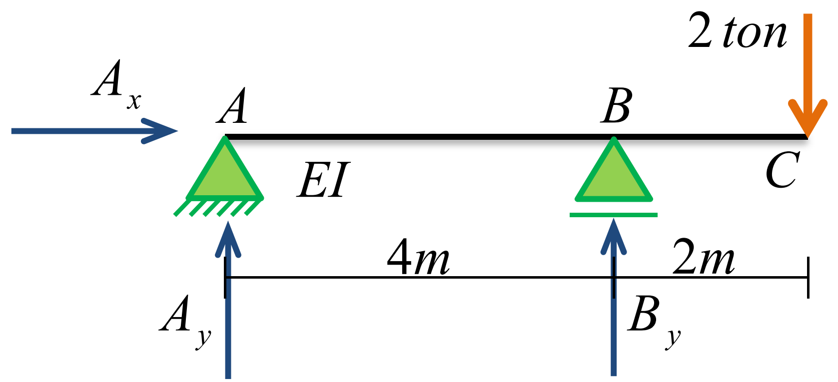
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 11-

$$EI = 2\times10^{6}\left(\frac{kg}{cm^{2}}\right)\times10^{3}\left(cm^{4}\right)=2\times10^{9}\left(kg.cm^{2}\right)\times\left(\frac{ton}{10^{3}kg}\right)\times\left(\frac{m^{2}}{10^{4}cm^{2}}\right)=2\times10^{9}\times10^{-7}\left(ton.m^{2}\right)$$

$$\boxed{EI = 200\,ton.m^{2}}$$



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 0}$$

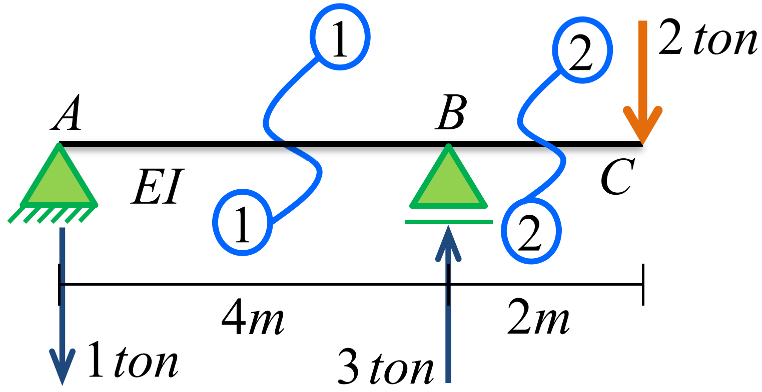
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y\times4-2\times6=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = 3\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y+3=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = -1}$$

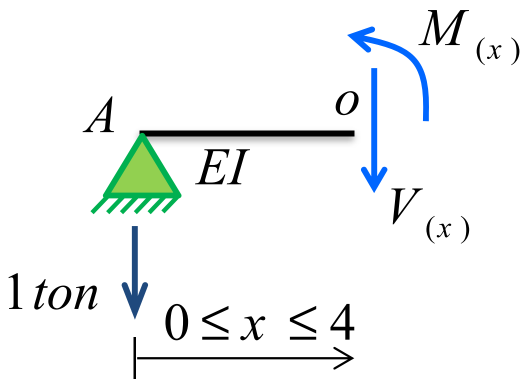
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 11-

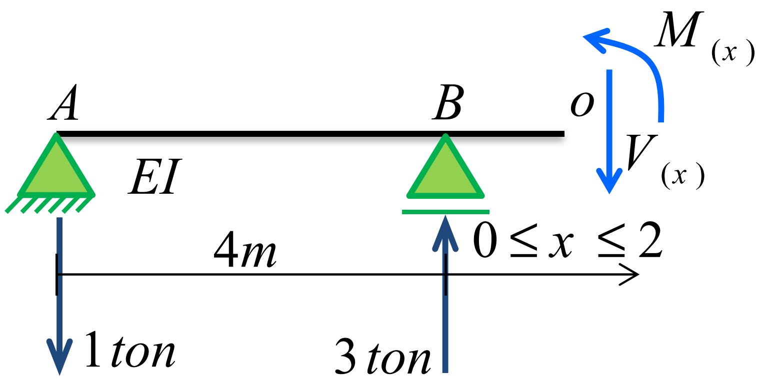


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x}$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



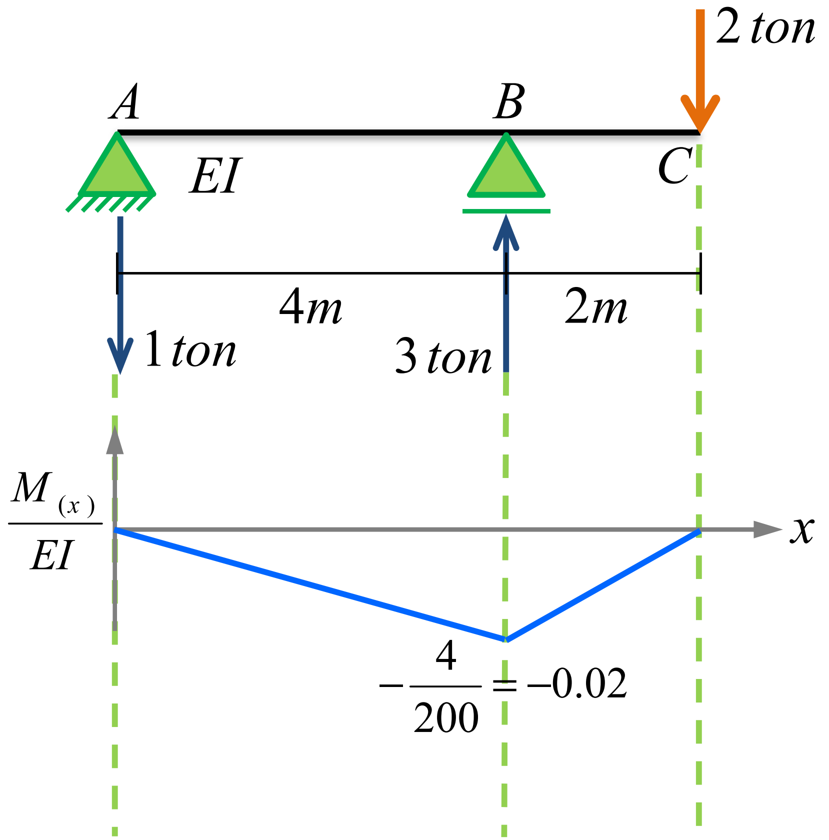
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 1\times(4+x) - 3\times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2x - 4}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 11-

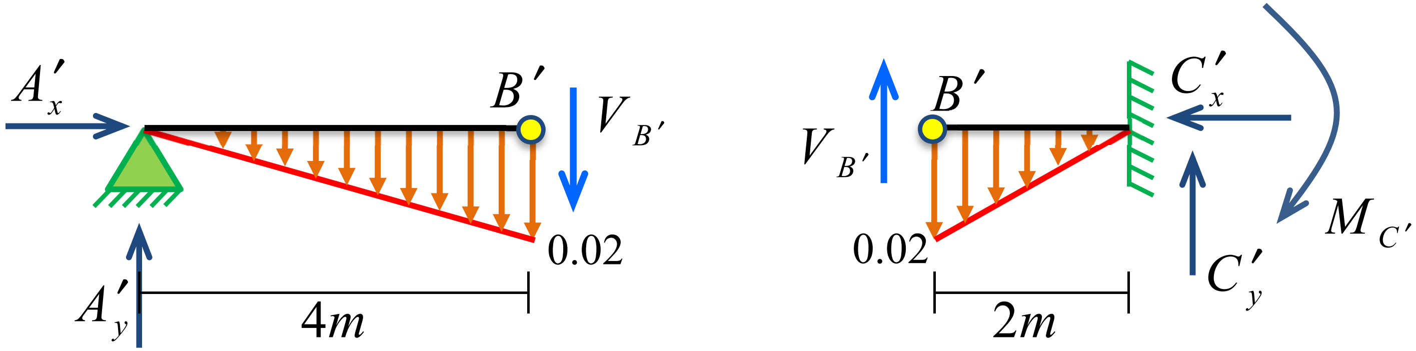


تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 11-

برای آنالیز تیر مزدوج و تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر را از محل مفصل جدا می‌کنیم:



با در نظر گرفتن بخش سمت چپ تیر:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A'_x = 0}$$

$$\boxed{V_{B'} = -\frac{0.08}{3}} \qquad (11.1)$$

$$A'_y - \left(\frac{1}{2}\times 0.02\times 4\right) - \left(-\frac{0.08}{3}\right) = 0$$

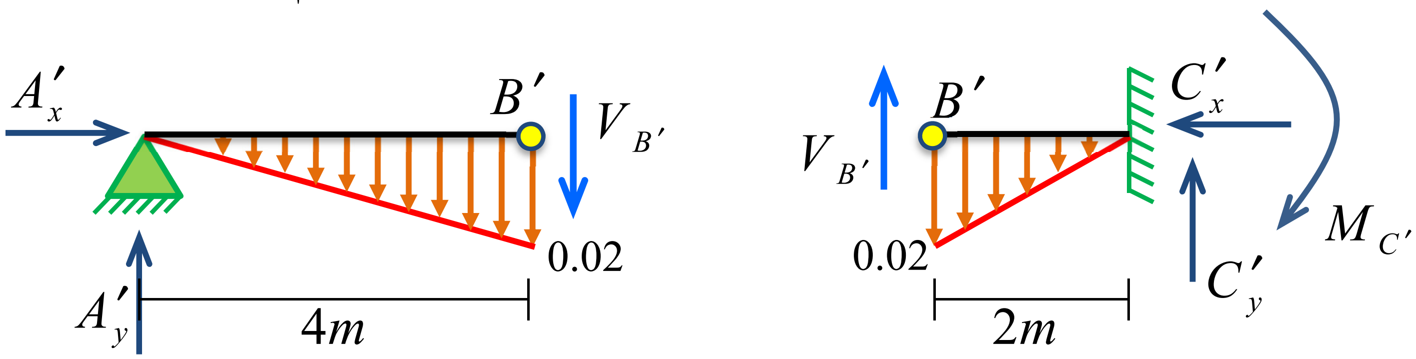
$$\boxed{A'_y = \frac{0.04}{3}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 11-

برای آنالیز تیر مزدوج و تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر را از محل مفصل جدا می‌کنیم:



با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C'_x = 0}$$

$$\overset{(11.1)}{\Rightarrow} \quad -\left(-\frac{0.08}{3}\right)\times 2+\left(\frac{1}{2}\times 0.02\times 2\right)\times\left(\frac{2}{3}\times 2\right)-M_{C'}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{C'}=0.08}$$

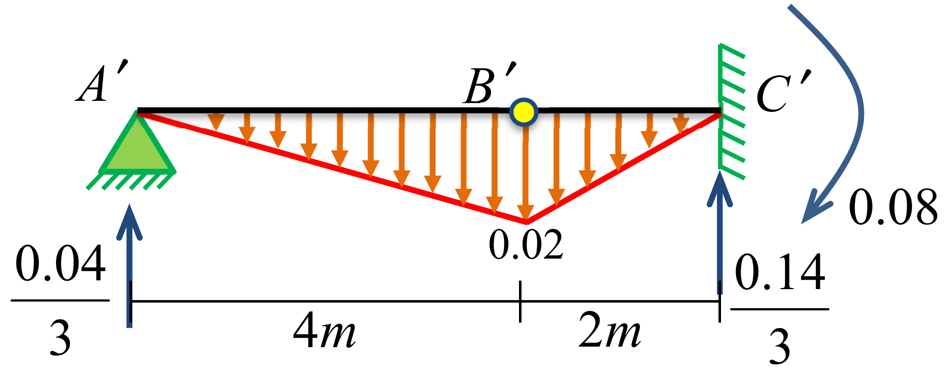
$$C'_y-\left(\frac{1}{2}\times 0.02\times 2\right)+\left(-\frac{0.08}{3}\right)=0$$

$$\boxed{C'_y=\frac{0.14}{3}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

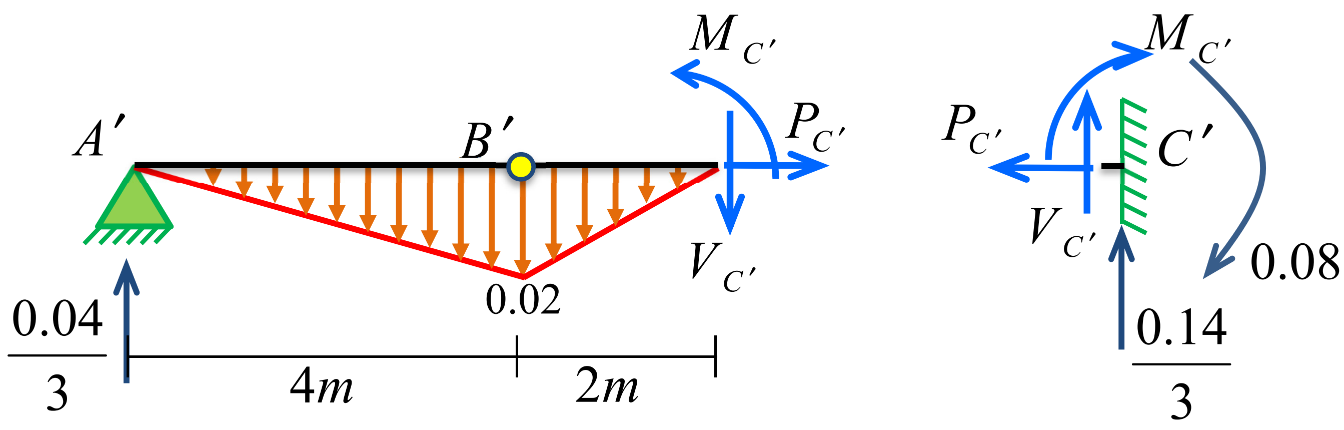
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 11-



عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر مزدوج به صورت روبه رو است:

با مقطع زدن تیر در گره C' مقدار لنگر و برش در این محل به صورت زیر به دست می‌آید:



با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

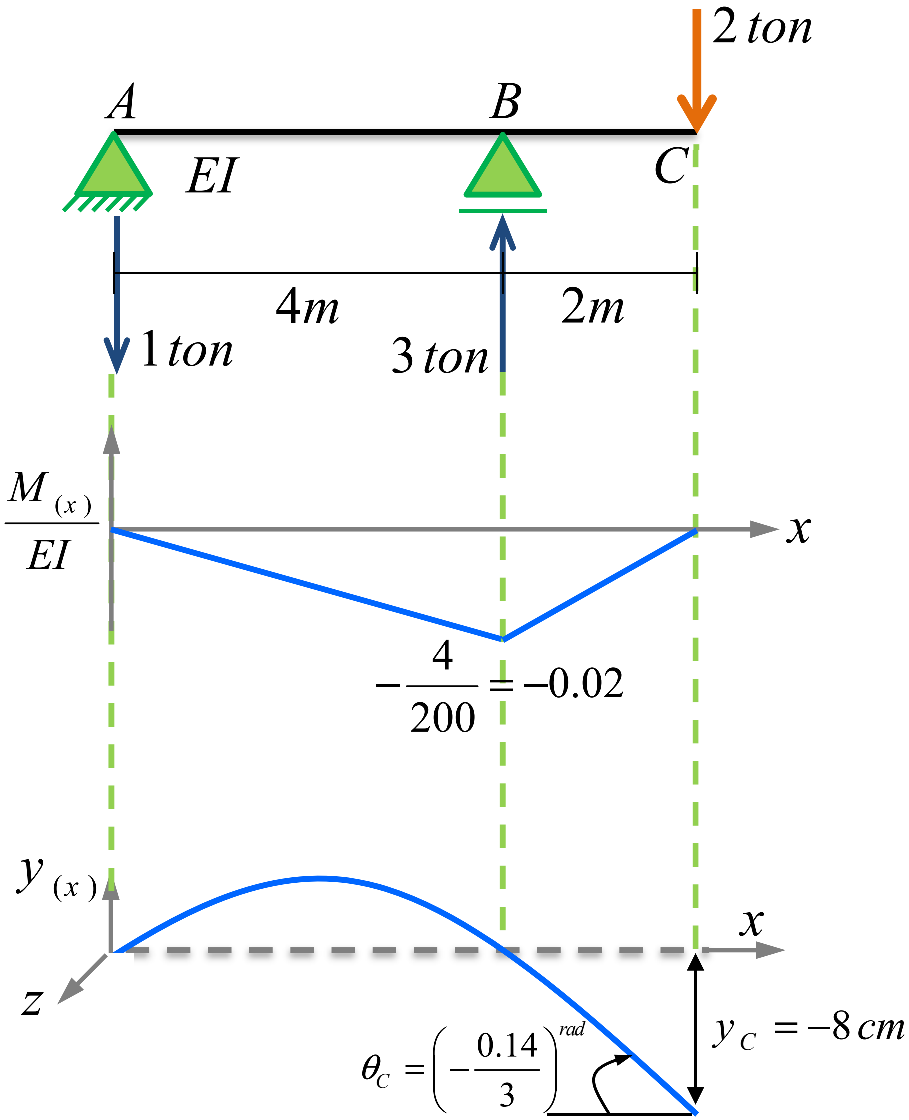
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{C'} + \frac{0.14}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{C'} = \theta_C = \left(-\frac{0.14}{3}\right)^{rad}}$$

$$\sum M_{C'} = 0 \Rightarrow -M_{C'} - 0.08 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{C'} = y_C = -0.08\ m}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 11-



ETABS File Name: **03-Example-11.EDB**

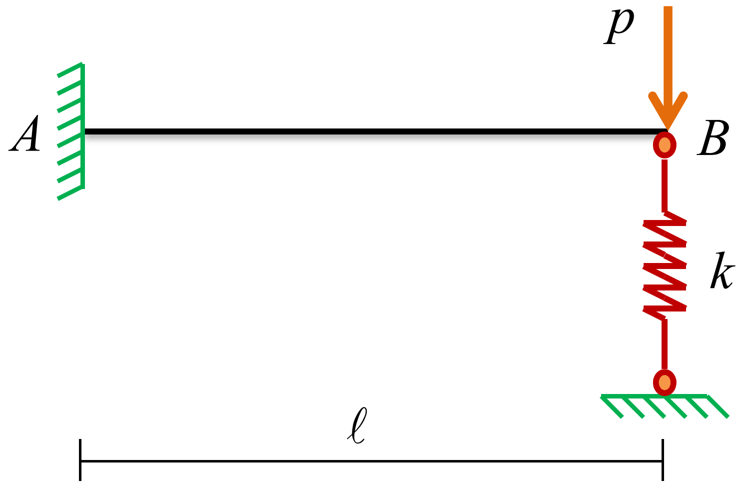
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال 12- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در B. $\theta_B = ?$

ب- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$



$$p = 2\,ton$$

$$\ell = 5\,m$$

$$E = 2\times10^6\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$I = 10^3\ cm^4$$

$$k = 5.2\ \frac{ton}{m}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

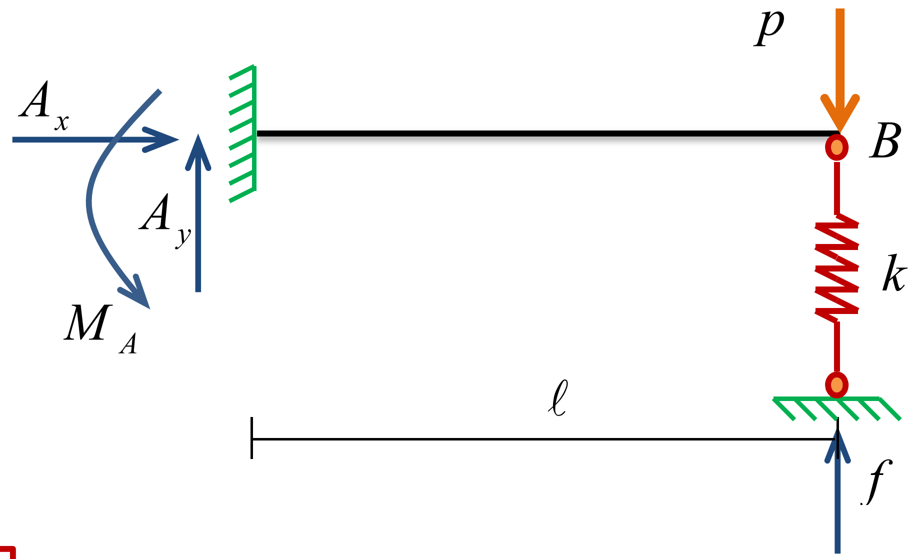
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 12-

$$EI = 2\times10^6\left(\frac{kg}{cm^2}\right)\times10^3\left(cm^4\right)$$

$$= 2\times10^9\left(kg.cm^2\right)\times\left(\frac{ton}{10^3kg}\right)\times\left(\frac{m^2}{10^4cm^2}\right) = 2\times10^9\times10^{-7}\left(ton.m^2\right) \Rightarrow \boxed{EI = 200\,ton.m^2}$$

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی بر حسب نیروی ایجاد شده در فنر تعیین می‌گردد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

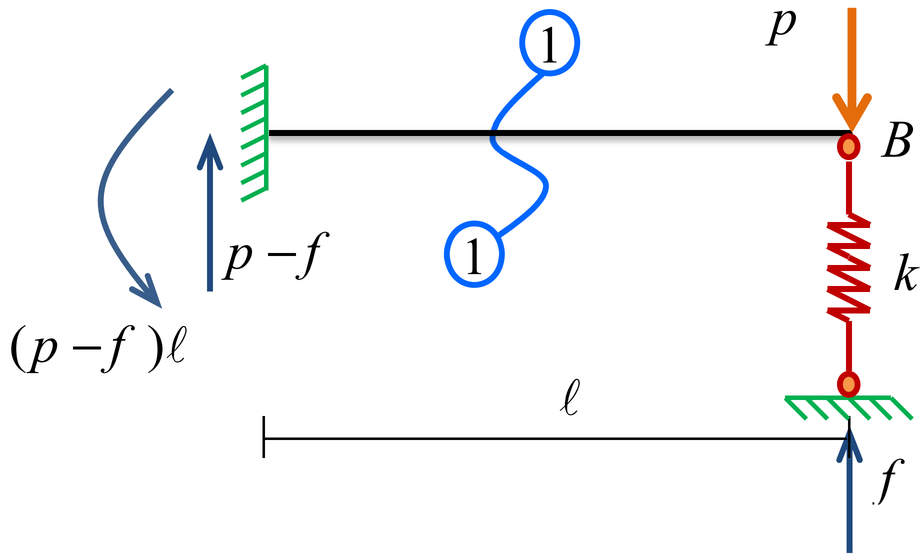
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + f\times\ell - p\times\ell = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = (p-f)\ell}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + f - p = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = p - f}$$

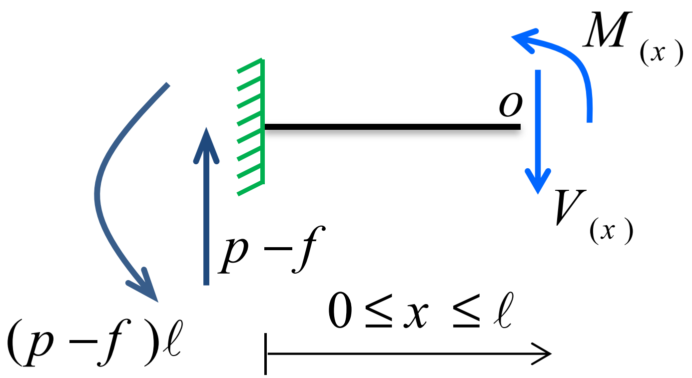
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 12-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

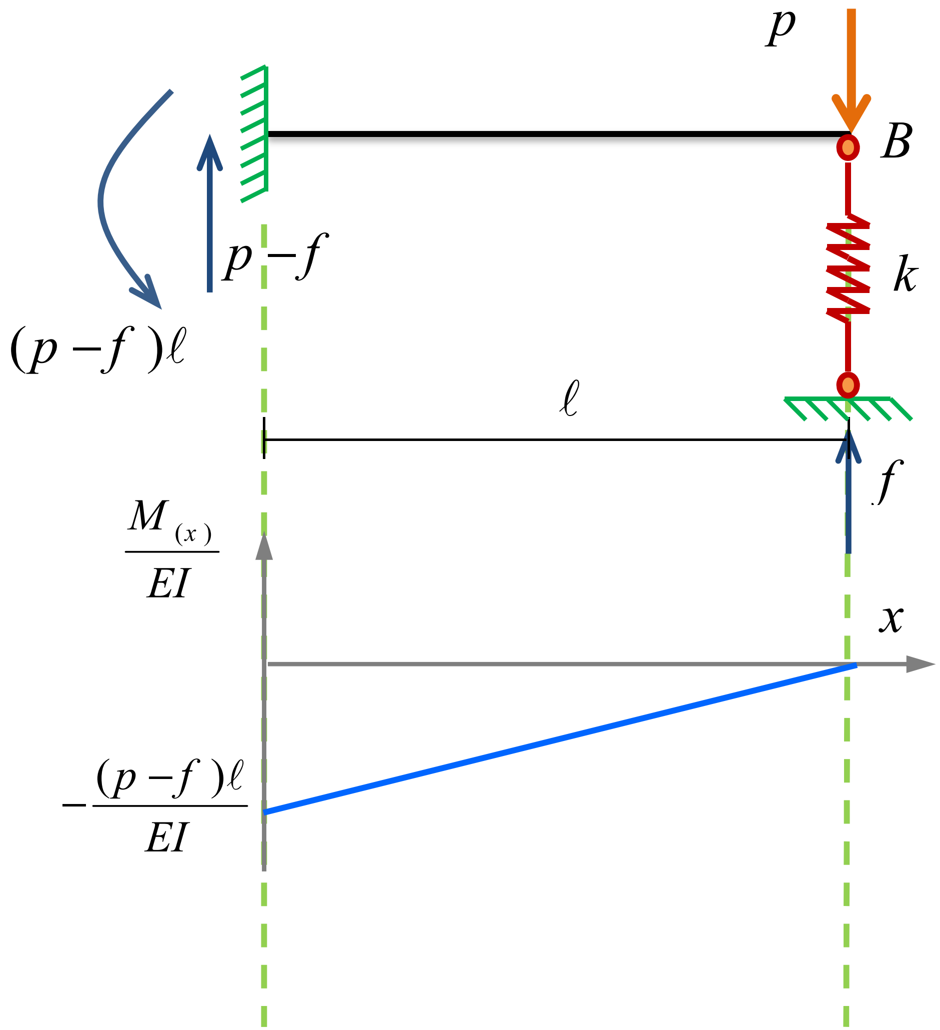


$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + (p-f)\ell - (p-f)\times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = (p-f)(x-\ell)}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

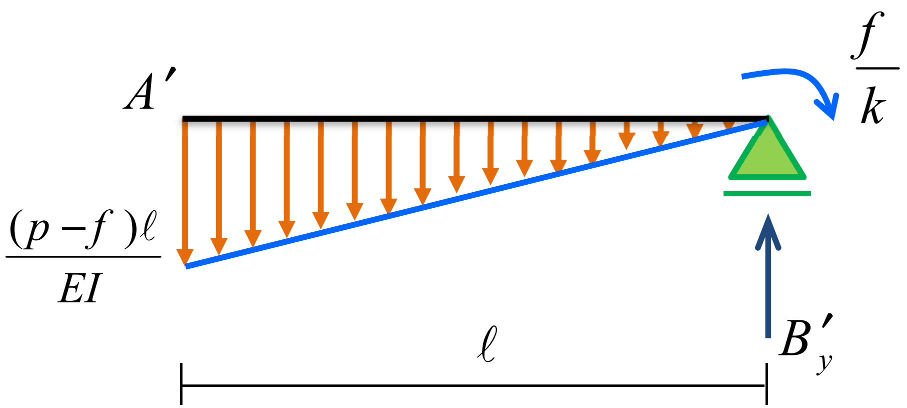
پاسخ مثال 12-



تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 12-



از آنجایی که تیر حقیقی نامعین می‌باشد در نتیجه مزدوج آن ناپایدار است. بنابراین بار الاستیک باید تامین کننده پایداری در تیر مزدوج باشد.

$$\boxed{B'_y = \frac{(p-f)\ell^2}{2EI}}$$

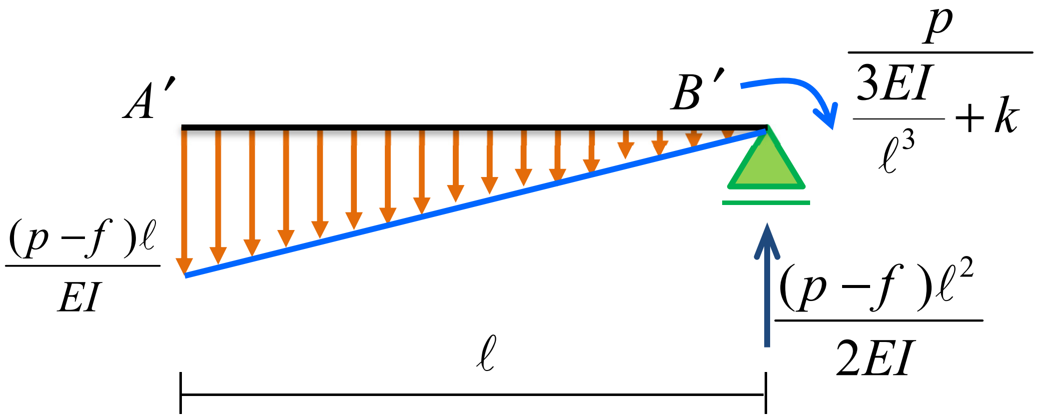
$$\Rightarrow \quad \frac{f}{k} = \frac{(p-f)\ell^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f}{k} = \frac{p\ell^3}{3EI} - \frac{f\ell^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{k}\left(1 - \frac{k\ell^3}{3EI}\right) = \frac{p\ell^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{f}{k} = \frac{p}{\frac{3EI}{\ell^3} + k}} \quad (12.1)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

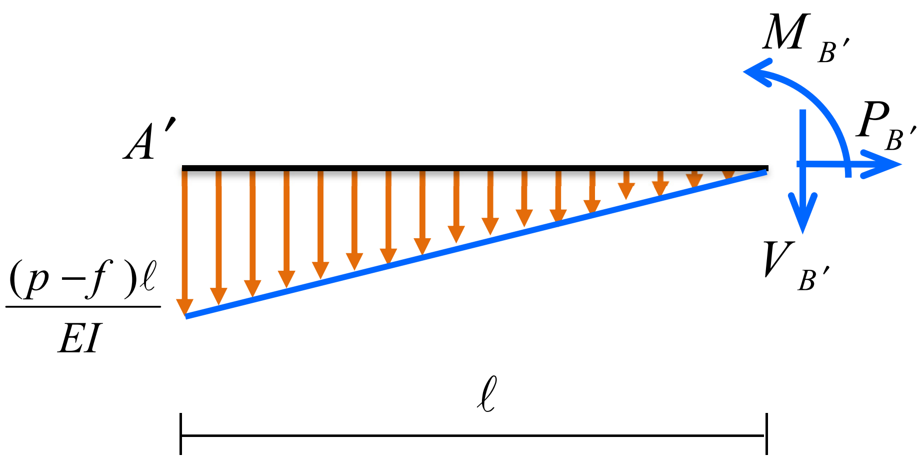
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

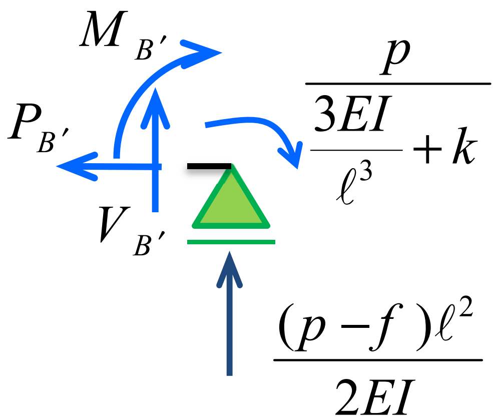
پاسخ مثال 12-



عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر مزدوج به صورت روبه رو است:

با مقطع زدن تیر در گره B' مقدار لنگر و برش در این محل به صورت زیر به دست می‌آید:





با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{B'} + \frac{(p-f)\ell^2}{2EI} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{B'} = \theta_B = -\left(\frac{(p-f)\ell^2}{2EI}\right)^{rad}} \quad (12.2)$$

$$\sum M_{B'} = 0 \;\Rightarrow\; -M_{B'} - \frac{p}{\dfrac{3EI}{\ell^3}+k} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{B'} = y_B = -\frac{p}{\dfrac{3EI}{\ell^3}+k}} \quad (12.3)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 12-

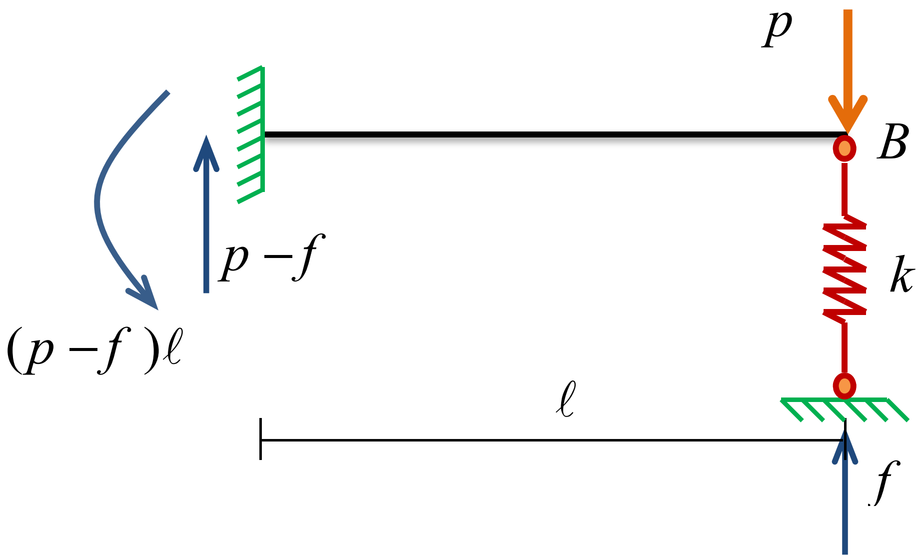
$p = 2\,ton$

$\ell = 5\,m$

$E = 2\times10^{6}\,\dfrac{kg}{cm^{2}}$

$I = 10^{3}\,cm^{4}$

$k = 5.2\,\dfrac{ton}{m}$



$$= \frac{2\times5.2}{\dfrac{3(200)}{(5)^{3}}+5.2} \Rightarrow \boxed{f = 1.04\,ton} \quad (12.4)$$

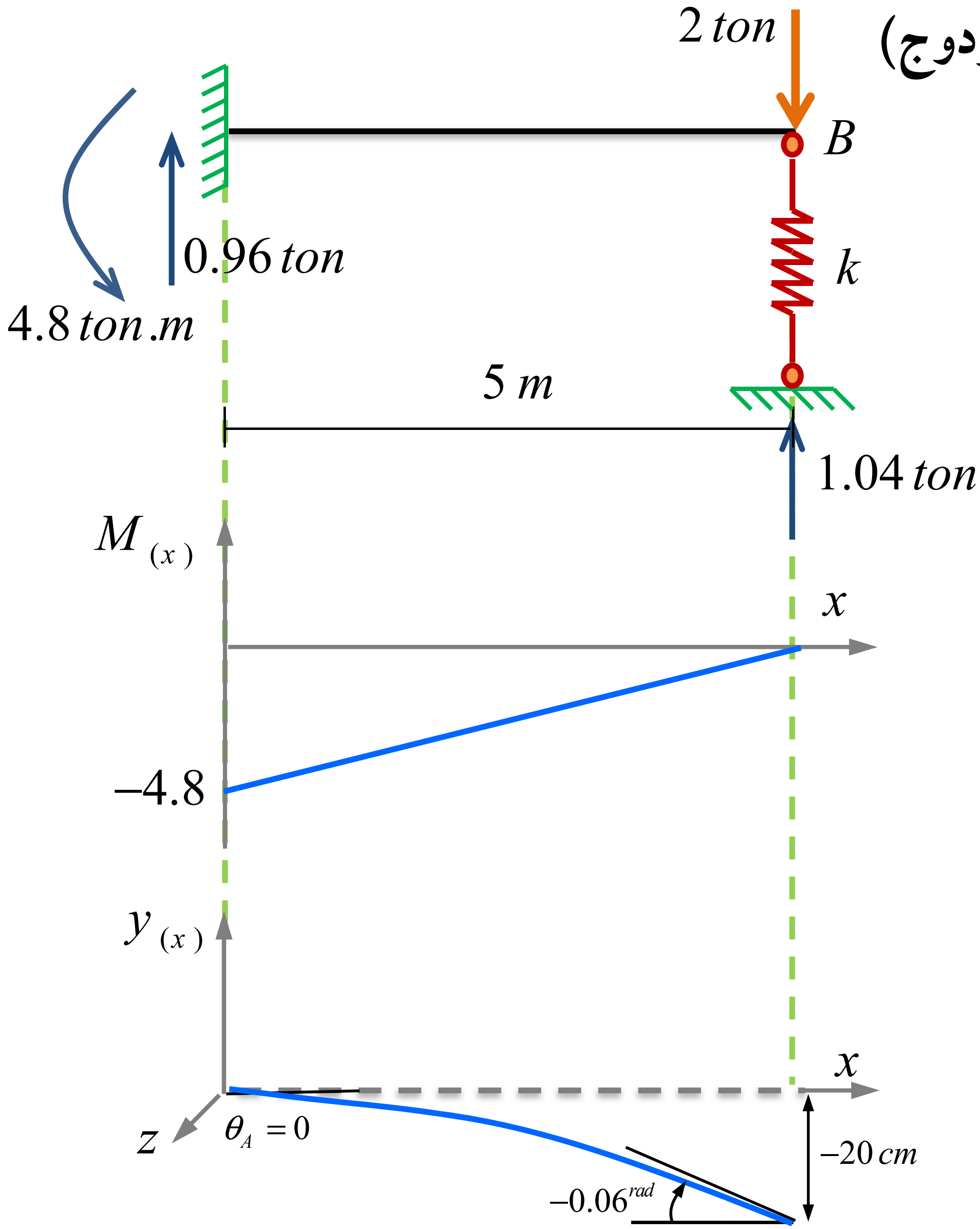
$$(12.2)\,\&\,(12.4) \Rightarrow \theta_B = -\left(\frac{(p-f)\ell^{2}}{2EI}\right)^{rad} = -\left(\frac{(2-1.04)(5)^{2}}{2(200)}\right) \Rightarrow \boxed{\theta_B = -0.06^{rad}}$$

$$(12.3) \Rightarrow y_B = -\frac{p}{\dfrac{3EI}{\ell^{3}}+k} = -\frac{2}{\dfrac{3(200)}{(5)^{3}}+5.2} \Rightarrow \boxed{y_B = -0.2\,m}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 12-



ETABS File Name: **03-Example-12.EDB**

تغییر شکل در تیرهای معین

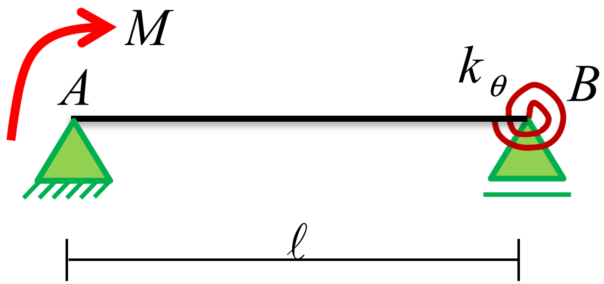
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال 13- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار لنگر در فنر پیچشی. $M_\theta = ?$

ب- مقدار شیب در B. $\theta_B = ?$

.



$$M = 3\ ton.m$$
$$\ell = 5\ m$$
$$E = 2\times10^6\ \frac{kg}{cm^2}$$
$$I = 10^3\ cm^4$$
$$k_\theta = \frac{6EI}{\ell}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

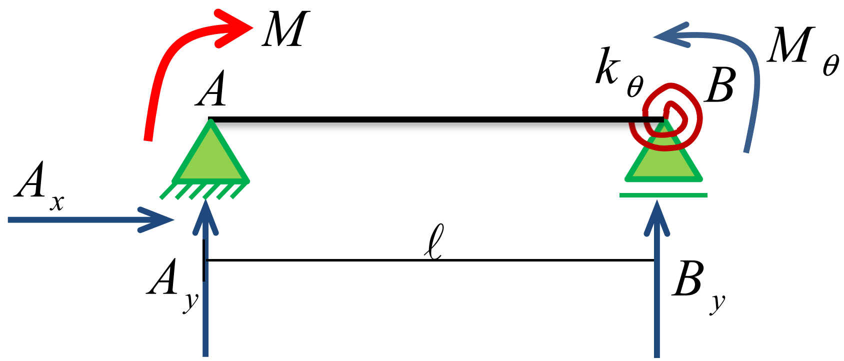
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 13-

$$EI = 2\times10^{6}\left(\frac{kg}{cm^{2}}\right)\times10^{3}\left(cm^{4}\right)$$

$$= 2\times10^{9}\left(kg.cm^{2}\right)\times\left(\frac{ton}{10^{3}kg}\right)\times\left(\frac{m^{2}}{10^{4}cm^{2}}\right) = 2\times10^{9}\times10^{-7}\left(ton.m^{2}\right) \Rightarrow \boxed{EI = 200\,ton.m^{2}}$$

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی بر حسب نیروی ایجاد شده در فنر تعیین می‌گردد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

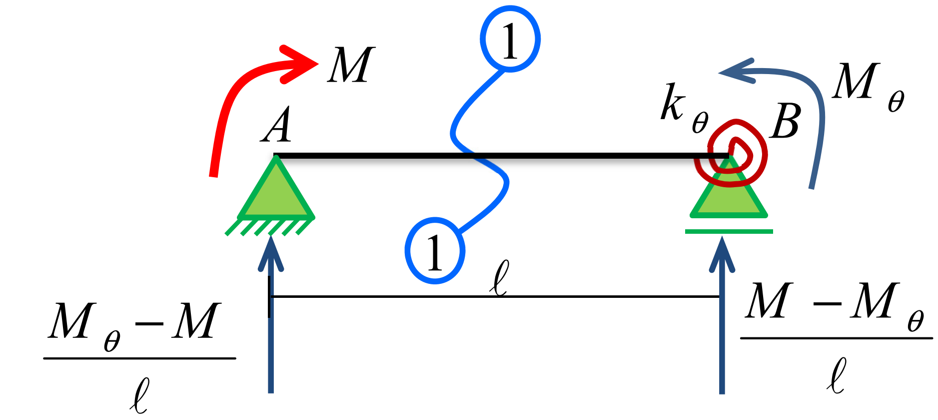
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M - A_y\times\ell + M_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = \frac{M_\theta - M}{\ell}} \quad (13.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0 \overset{(14.1)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = \frac{M - M_\theta}{\ell}} \quad (13.2)$$

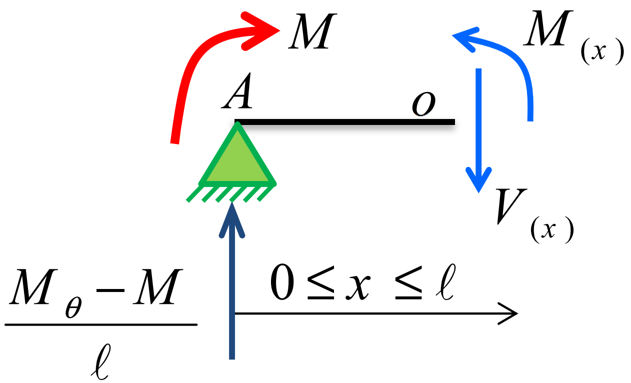
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 13-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

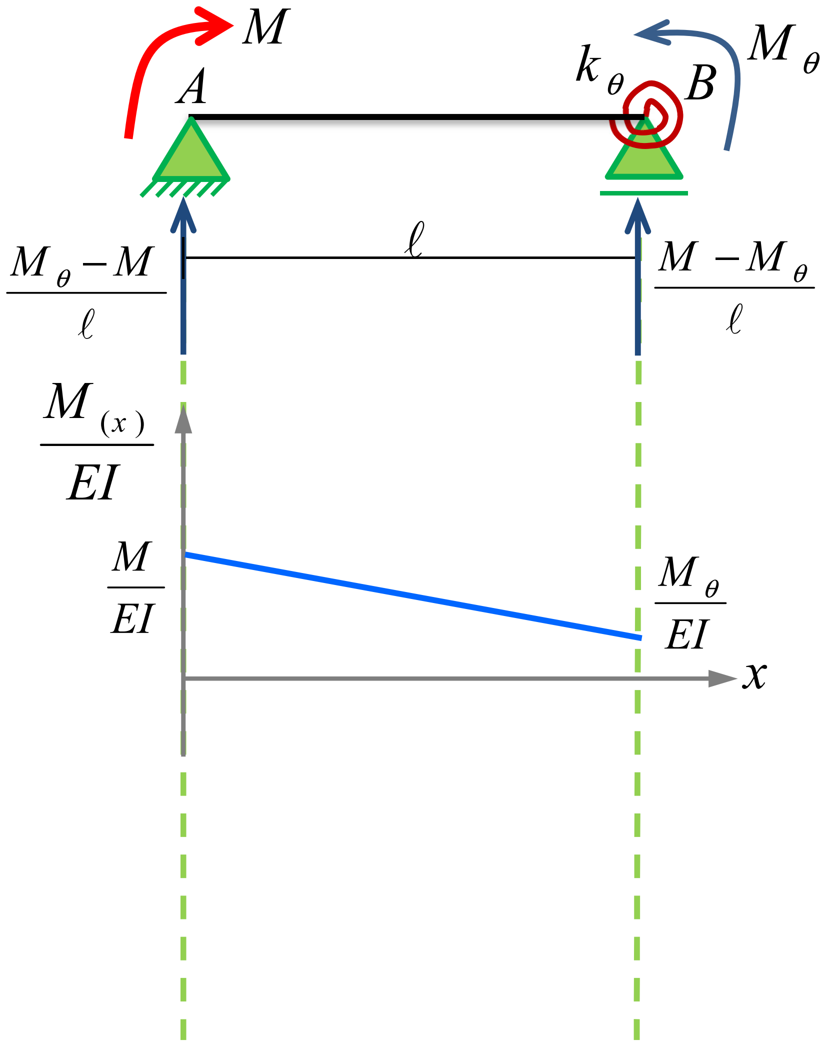


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - M - \frac{M_\theta - M}{\ell}\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = M + \frac{(M_\theta - M)}{\ell}x}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

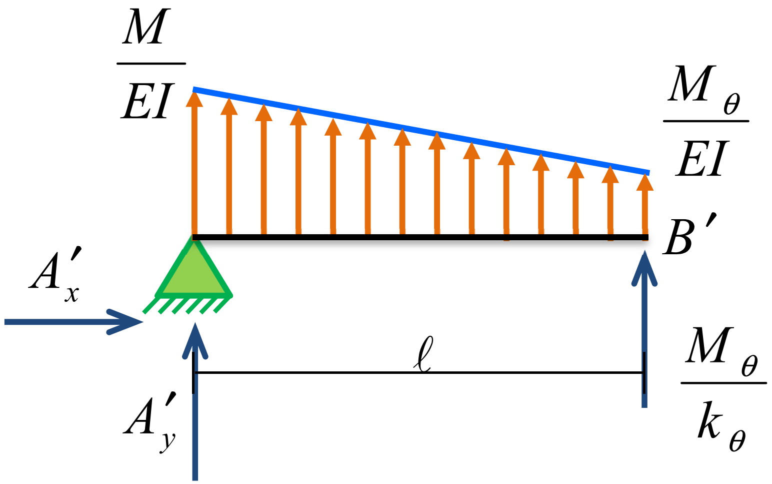
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 13-



روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 13-



از آنجایی که تیر حقیقی نامعین می‌باشد در نتیجه مزدوج آن ناپایدار است. بنابراین بار الاستیک باید تامین کننده پایداری در تیر مزدوج باشد.

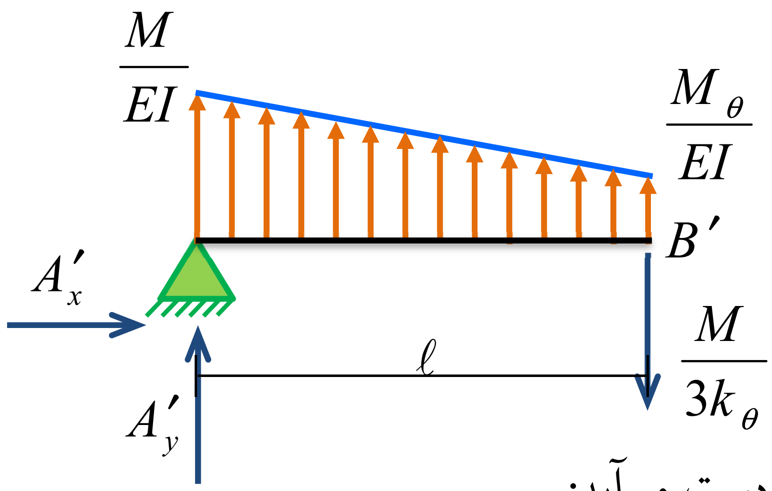
$$\Rightarrow \frac{M_\theta \ell}{k_\theta}+\frac{M_\theta \ell^2}{2EI}+\frac{M\ell^2}{6EI}-\frac{M_\theta \ell^2}{6EI}=0 \quad \xRightarrow{k_\theta=\frac{6EI}{\ell}} \quad \frac{M_\theta \ell}{\left(\frac{6EI}{\ell}\right)}+\frac{M_\theta \ell^2}{2EI}+\frac{M\ell^2}{6EI}-\frac{M_\theta \ell^2}{6EI}=0$$

$$\Rightarrow \frac{3M_\theta \ell^2}{6EI}+\frac{M\ell^2}{6EI}=0 \quad \Rightarrow \boxed{M_\theta=-\frac{M}{3}} \quad (13.3)$$

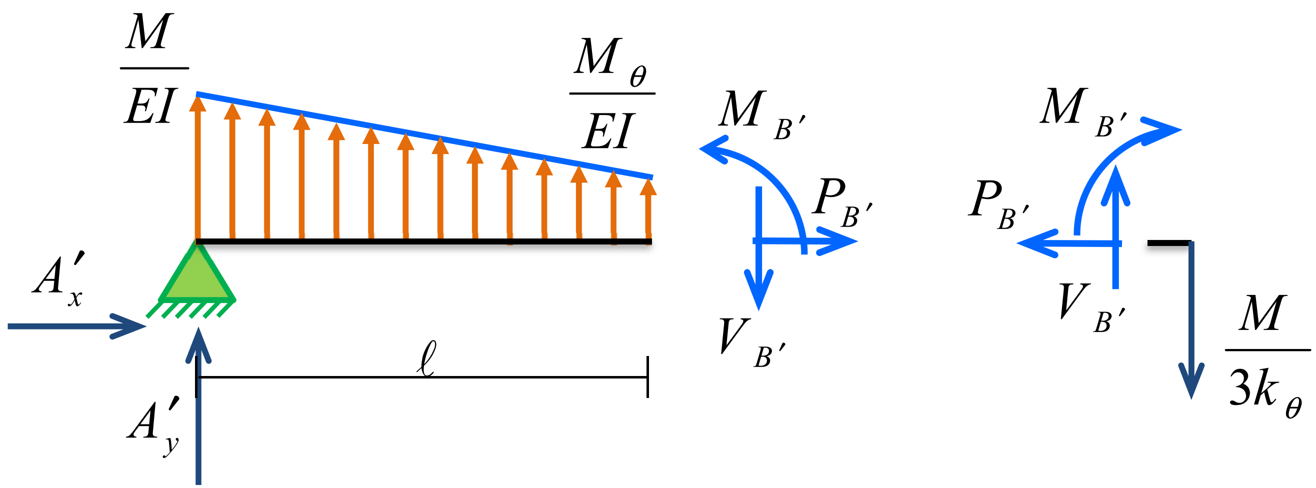
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 13-



با مقطع زدن تیر در گره B' مقدار لنگر و برش در این محل به صورت زیر به دست می‌آید:



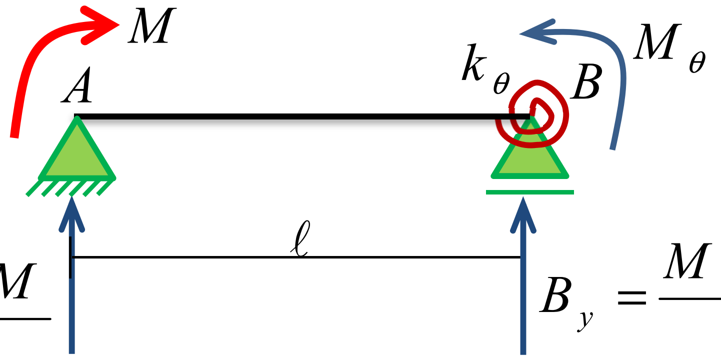
با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{B'} - \frac{M}{3k_\theta} = 0 \quad \xRightarrow{k_\theta = \frac{6EI}{\ell}} \quad \boxed{V_{B'} = \theta_B = \left(\frac{M\ell}{18EI}\right)^{rad}} \qquad (13.4)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 13-



$$A_y = \frac{M_\theta - M}{\ell} \qquad B_y = \frac{M - M_\theta}{\ell}$$

$$M = 3\ ton.m$$

$$\ell = 5\ m$$

$$E = 2\times10^6\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$I = 10^3\ cm^4$$

$$k_\theta = \frac{6EI}{\ell}$$

$$(13.3)\quad \Rightarrow \quad M_\theta = -\frac{M}{3} = -\frac{3}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_\theta = -1\ ton}$$

$$(13.4)\quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{M\ell}{18EI} = \frac{(3)(5)}{18(200)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = 0.00417^{rad}}$$

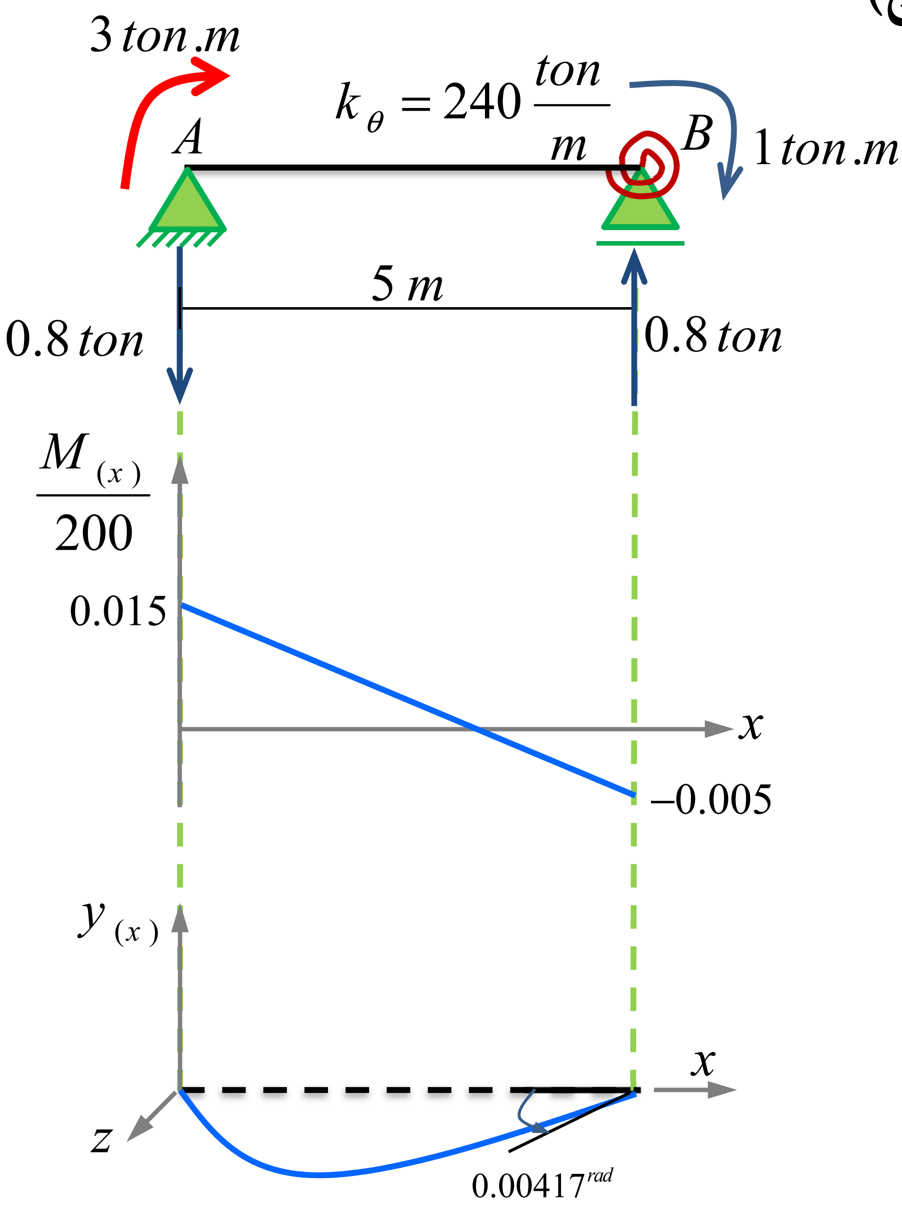
$$(13.1)\quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{M_\theta - M}{\ell} = \frac{-1-3}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = -0.8\ (ton)}$$

$$(13.2)\quad \Rightarrow \quad B_y = \frac{M - M_\theta}{\ell} = \frac{3-(-1)}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = 0.8\ (ton)}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 13-



ETABS File Name: **03-Example-13.EDB**

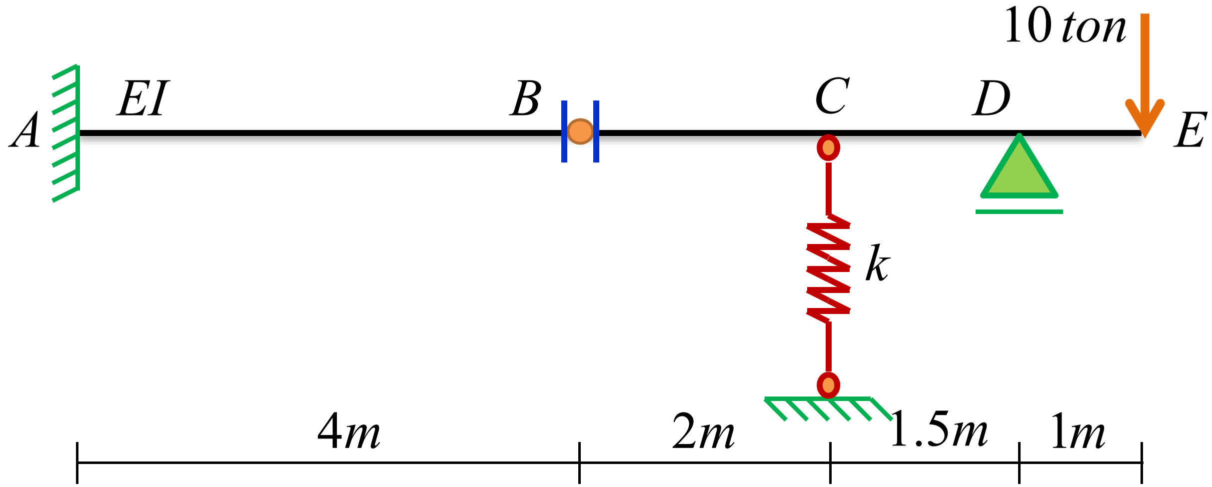
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال 14- تغییرات شیب و خیز را در طول تیر نشان داده شده رسم نمایید.

$$EI = 200\,ton.m^2$$

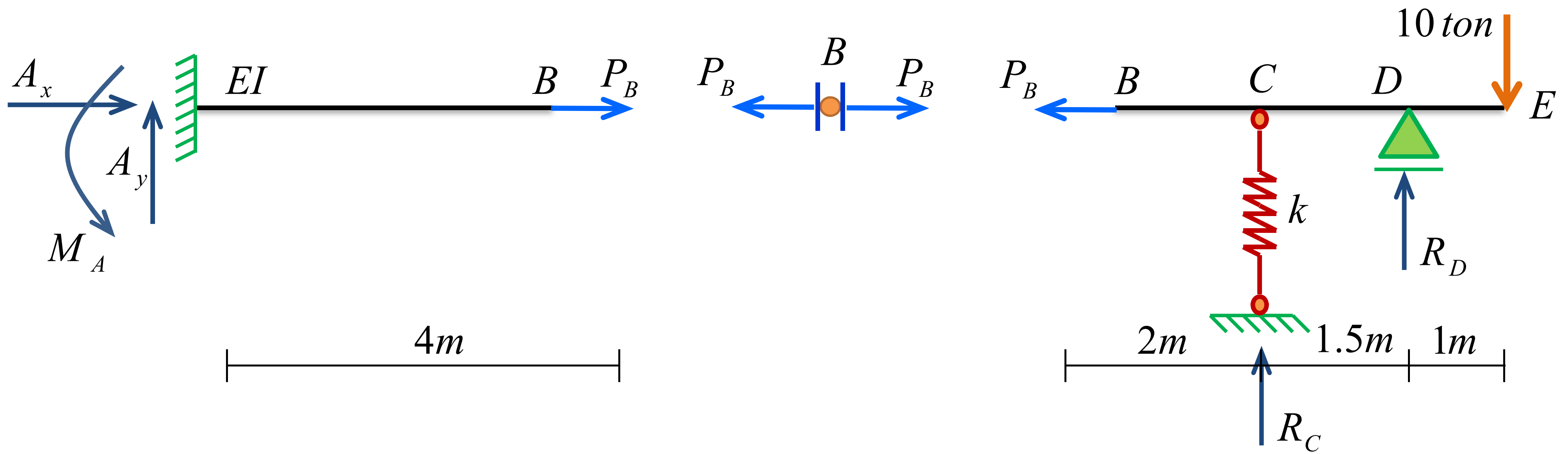
$$k = 200\,\frac{ton}{m}$$



تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14- برای تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر را در اتصال B جدا می‌نماییم:



با در نظر گرفتن سمت راست تیر خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_B = 0} \Rightarrow$$

از آنجایی که نیرویی به بخش AB تیر وارد نمی‌شود در نتیجه کلیه نیروهای داخلی آن و همچنین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه A برابر با صفر است.

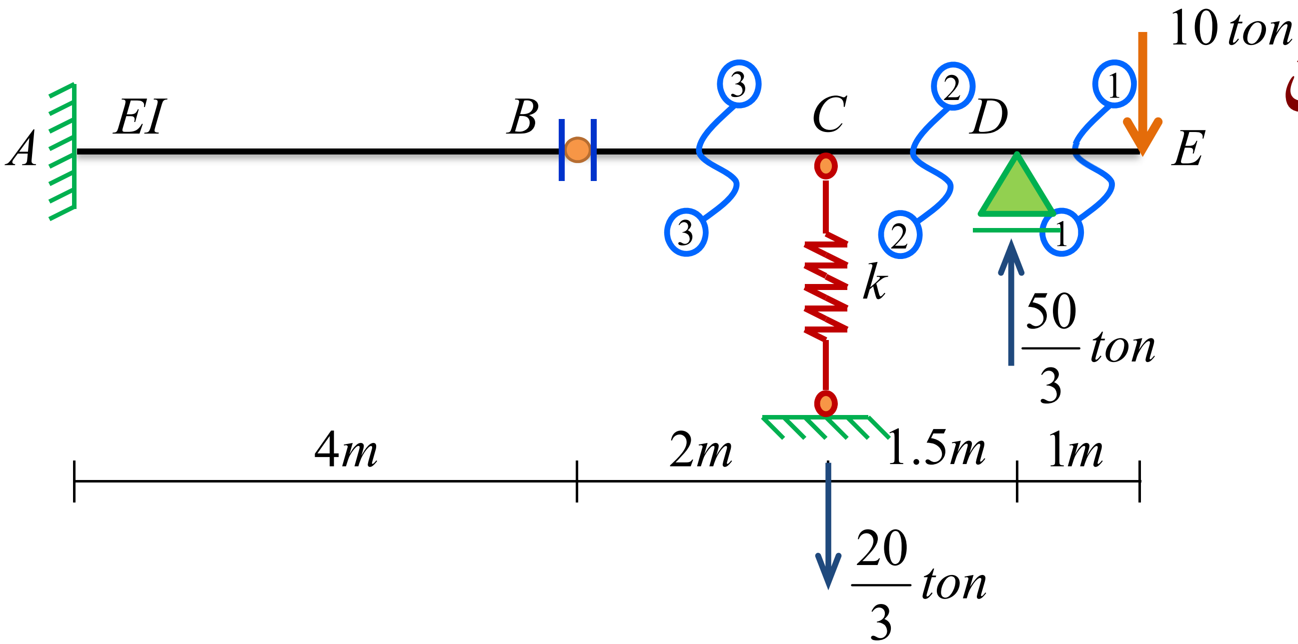
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_D \times 1.5 - 10 \times 2.5 = 0 \Rightarrow \boxed{R_D = \frac{50}{3}} \quad (14.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_D + R_C - 10 = 0 \overset{(14.1)}{\Rightarrow} \boxed{R_C = -\frac{20}{3}}$$

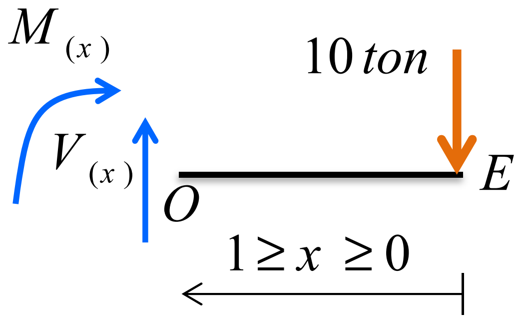
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-

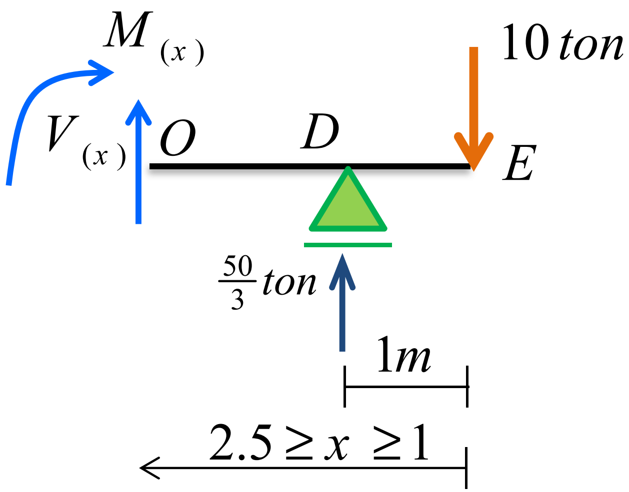


با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 10 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -10x}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:



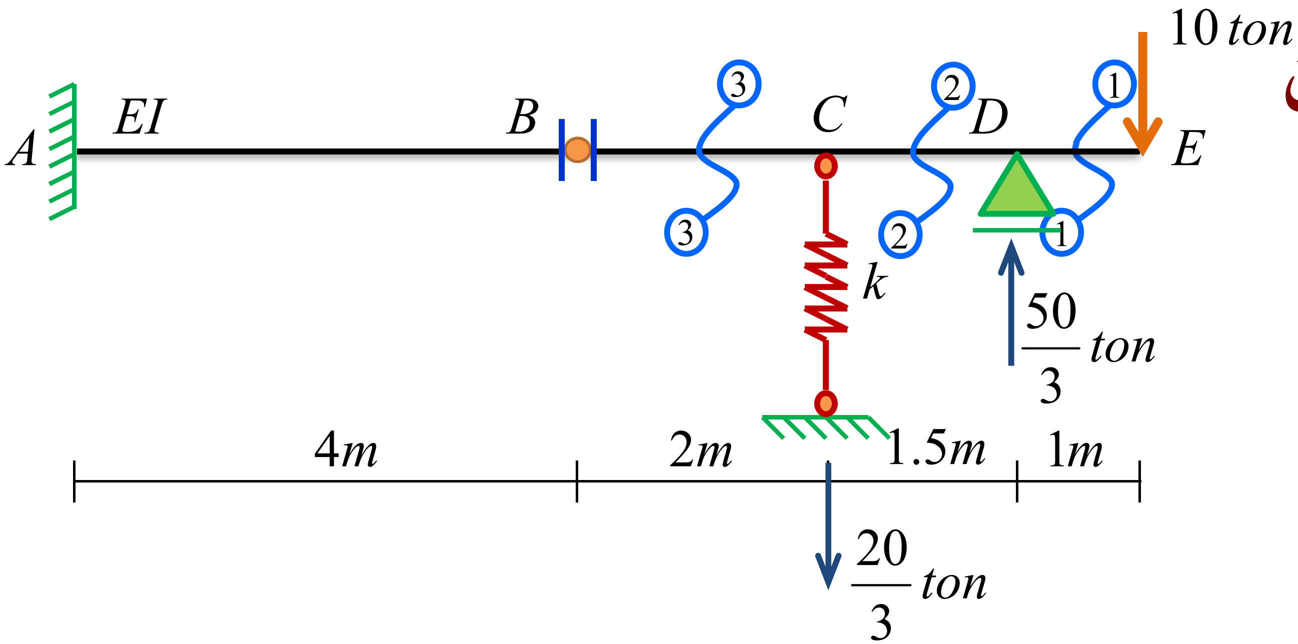
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 10 \times x + \frac{50}{3}(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = \frac{20}{3}x - \frac{50}{3}}$$

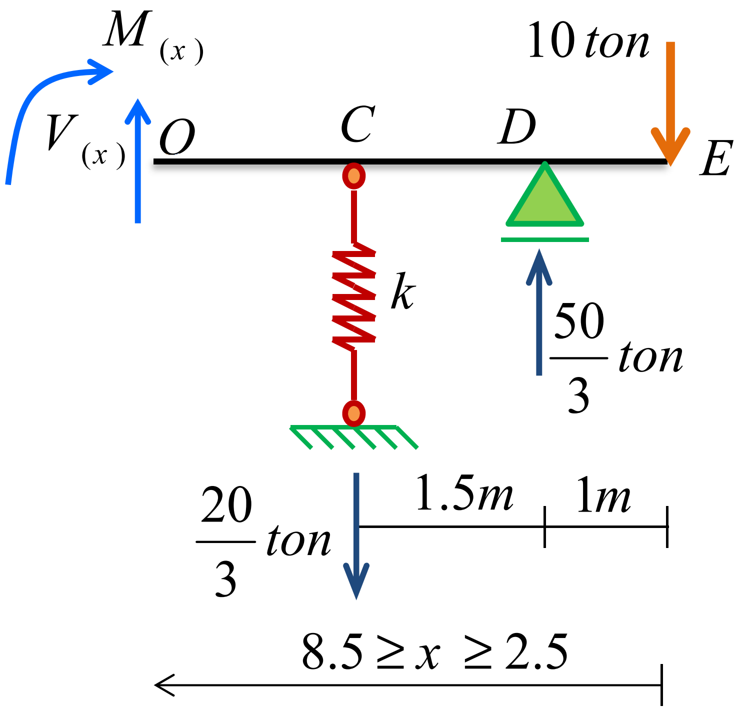
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:



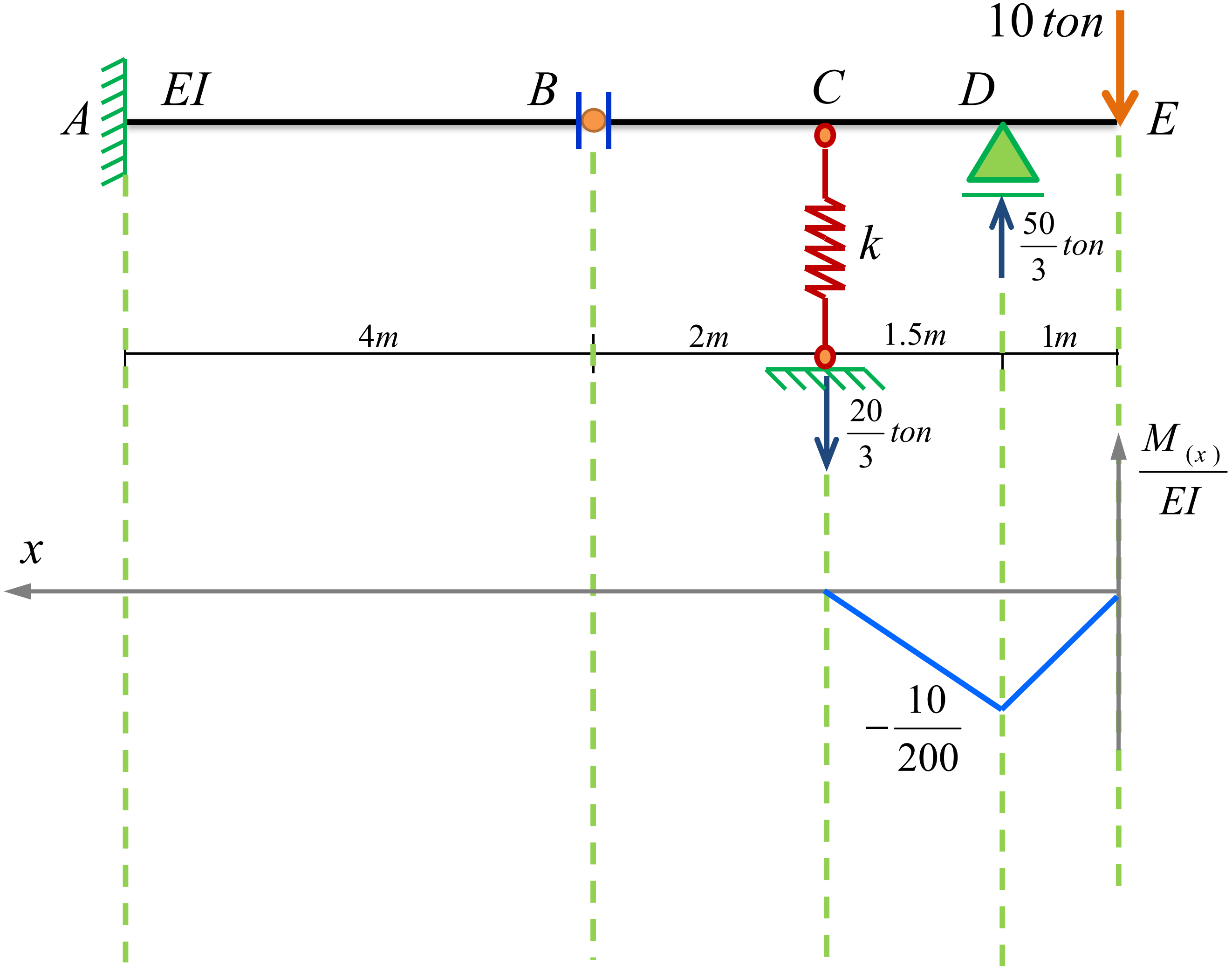
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - \frac{20}{3}(x-2.5) + \frac{50}{3}(x-1) - 10\times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

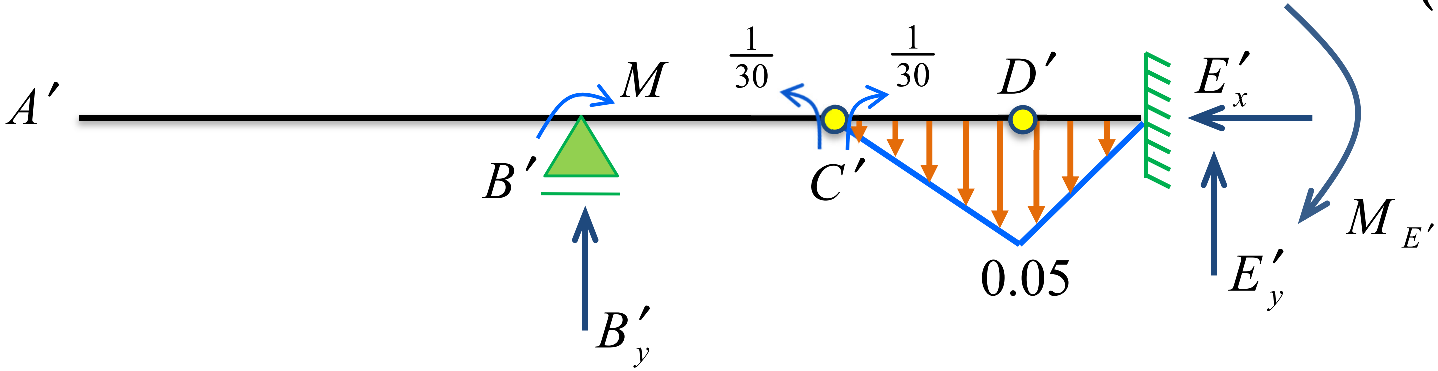
پاسخ مثال 14-



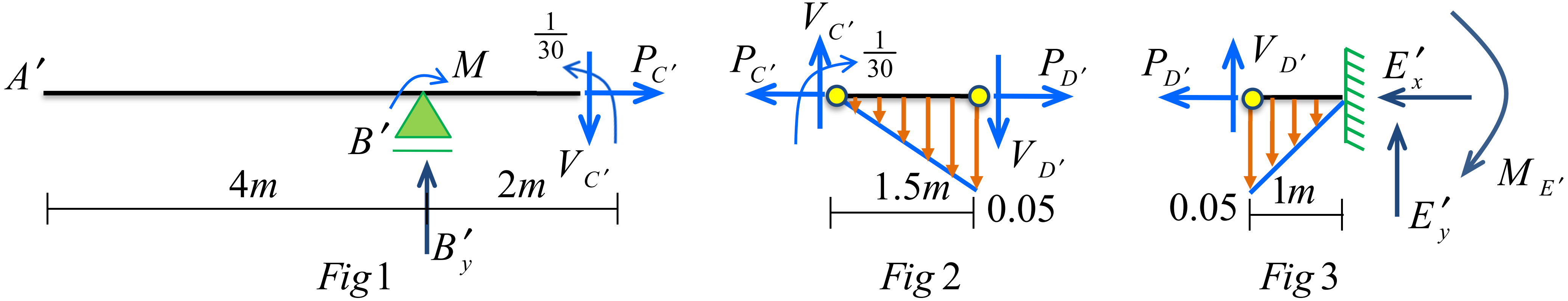
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-



برای آنالیز تیر از ناحیه مفصل‌ها جدا می‌شوند.



$$\boxed{V_{C'} = \theta_C = -\frac{7}{720}}$$

(14.2)

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-

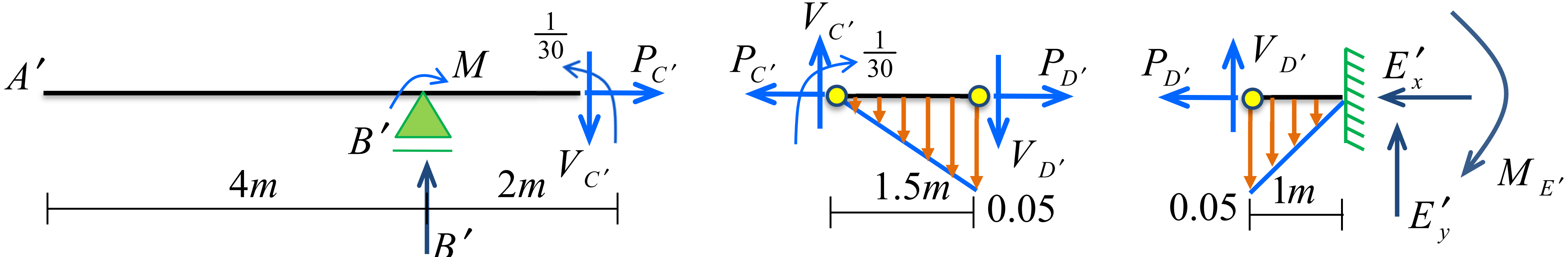


Fig 1　Fig 2　Fig 3

$$\boxed{V_{D'} = \theta_D = -\frac{34}{720}} \quad (14.3)$$

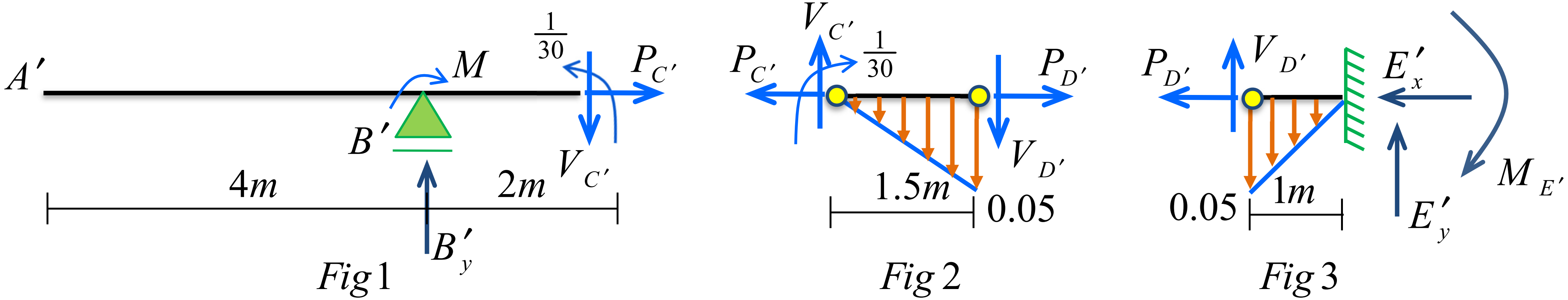
$$\boxed{B'_y = \theta_B = -\frac{7}{720}} \quad (14.4)$$

$$\boxed{M = \frac{19}{360}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-



$$\boxed{E'_y = \theta_E = \frac{13}{180}}$$

$$\boxed{M_{E'} = y_E = \frac{23}{360}}$$

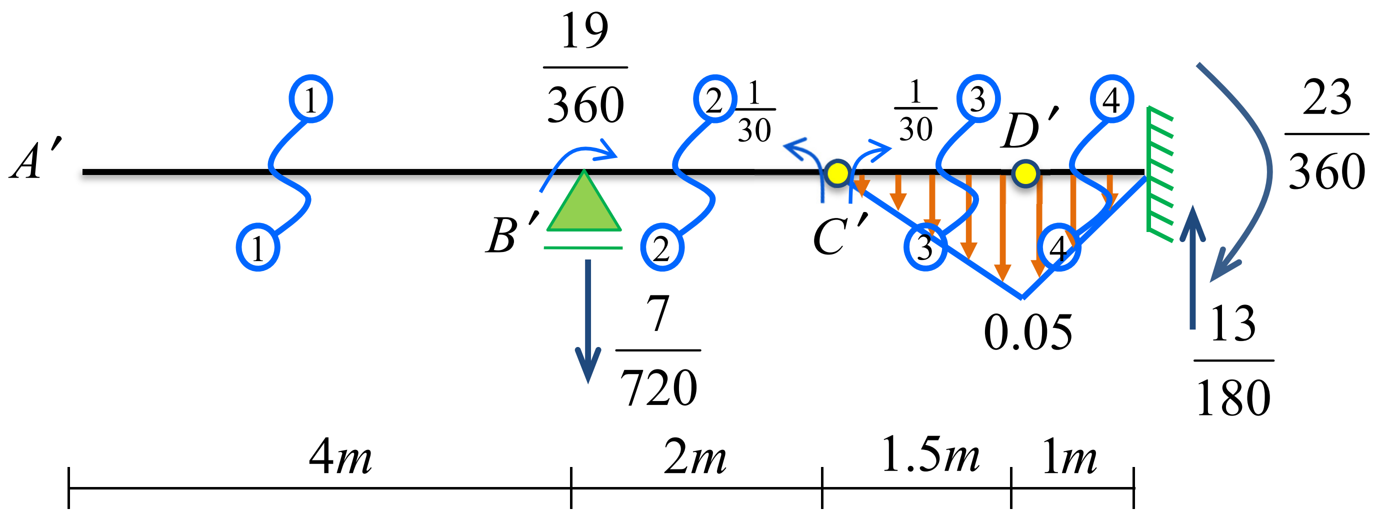
$$Fig\,1,2,3: \quad \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{C'} = P_{D'} = E'_x = 0}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

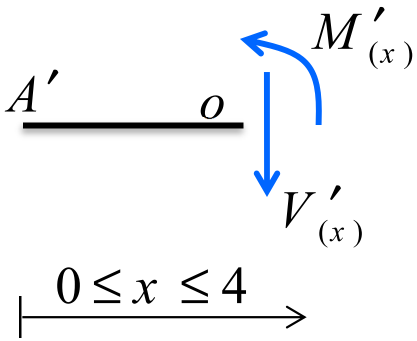
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-

با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر و برش در تیر مزدوج محاسبه می‌گردد:



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V'_{(x)} = \theta_{(x)} = 0}$$

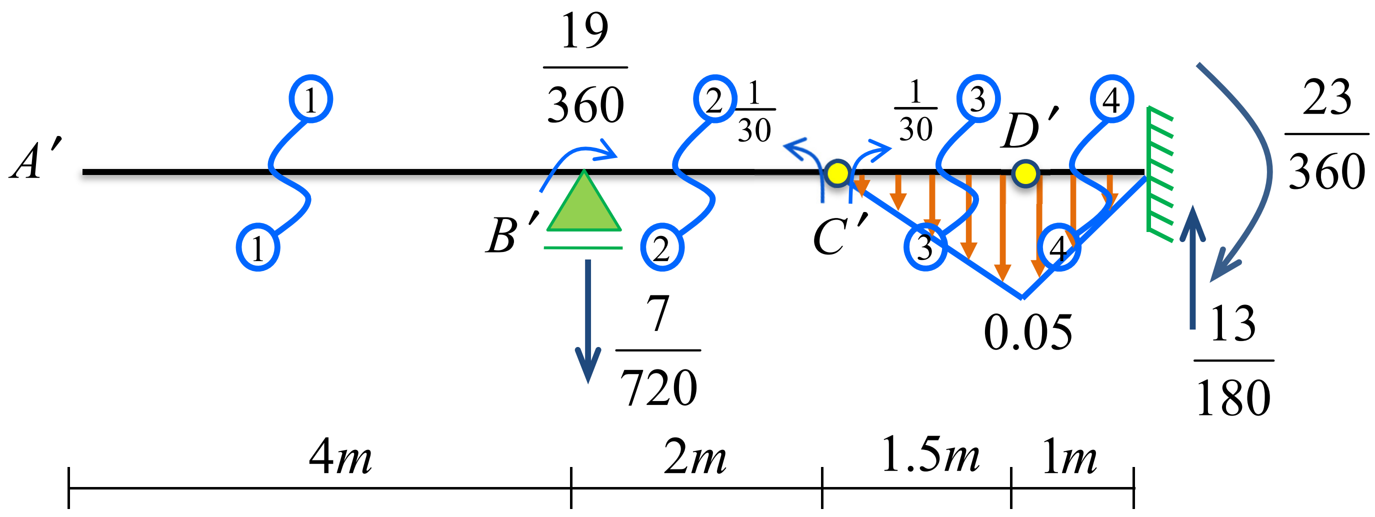
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M'_{(x)} = y_{(x)} = 0}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

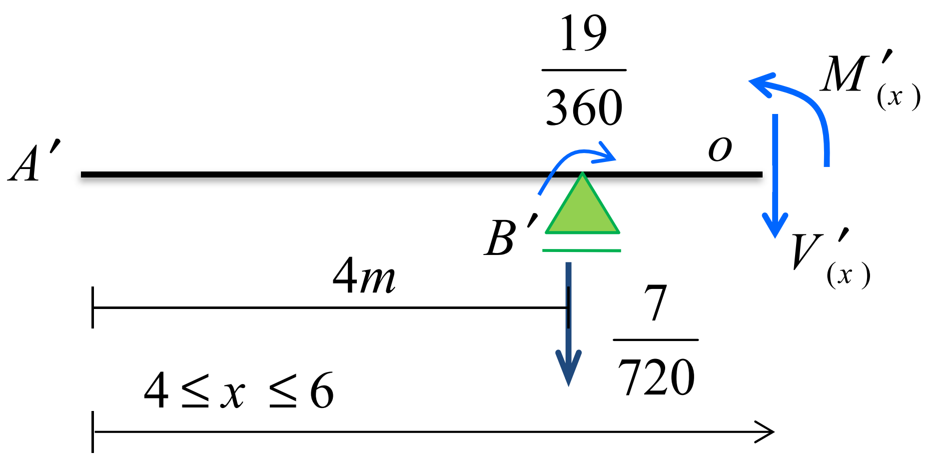
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-

با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر و برش در تیر مزدوج محاسبه می‌گردد:



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V'_{(x)} - \frac{7}{720} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V'_{(x)} = \theta_{(x)} = -9.72\times 10^{-3}}$$

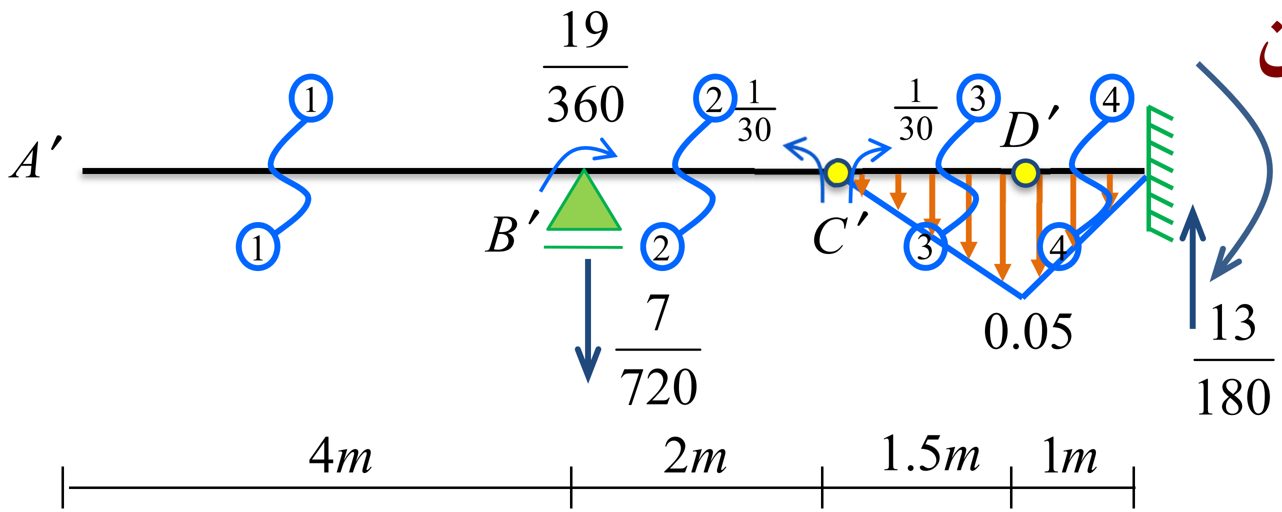
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M'_{(x)} + \frac{7}{720}(x-4) - \frac{19}{360} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M'_{(x)} = y_{(x)} = (-9.72x + 91.67)\times 10^{-3}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

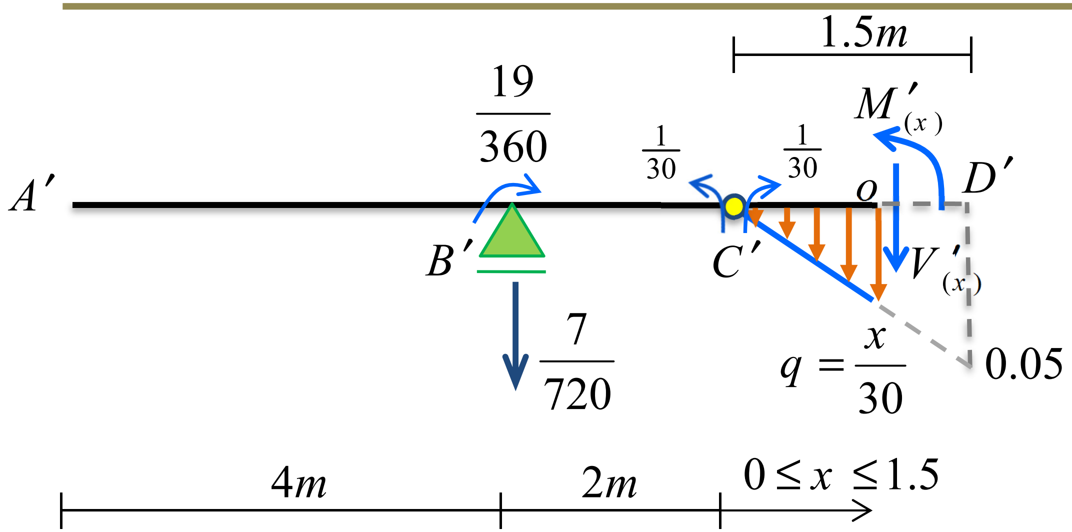
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-



با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر و برش در تیر مزدوج محاسبه می‌گردد:

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:



$$V'_{(x)} = \theta_{(x)} = (-16.67x^2 - 9.72) \times 10^{-3}$$

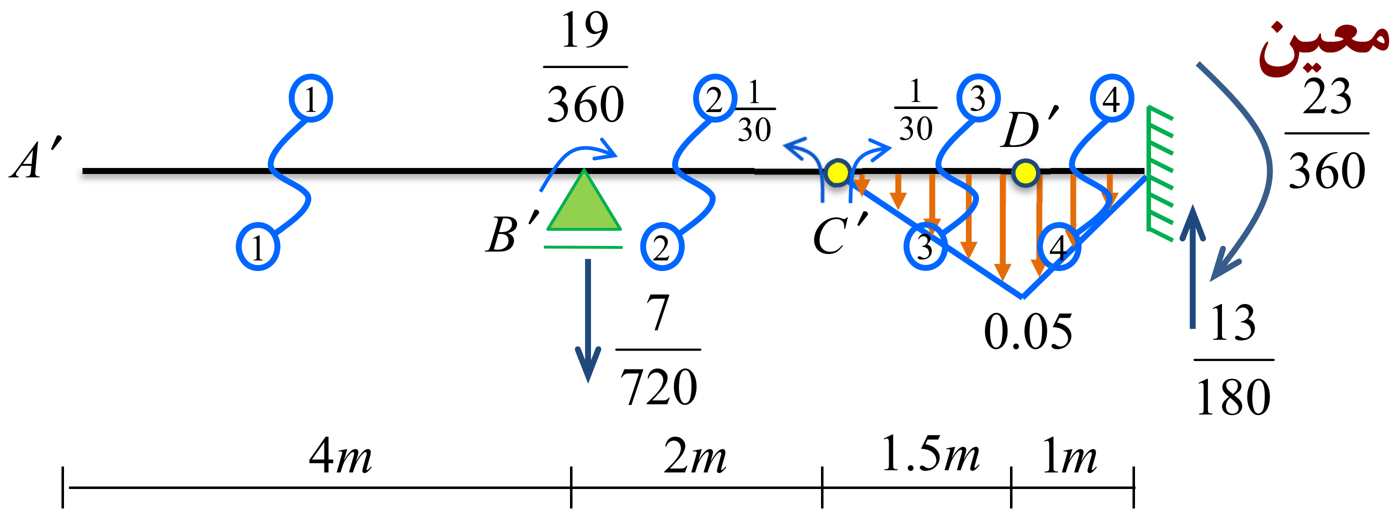
$$M'_{(x)} = y_{(x)} = (-5.56x^3 - 9.72x + 33.33) \times 10^{-3}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

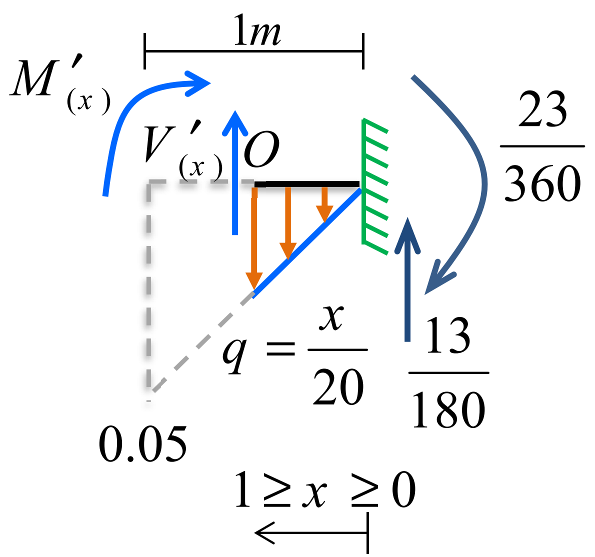
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-

با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر و برش در تیر مزدوج محاسبه می‌گردد:



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 4-4 خواهیم داشت:



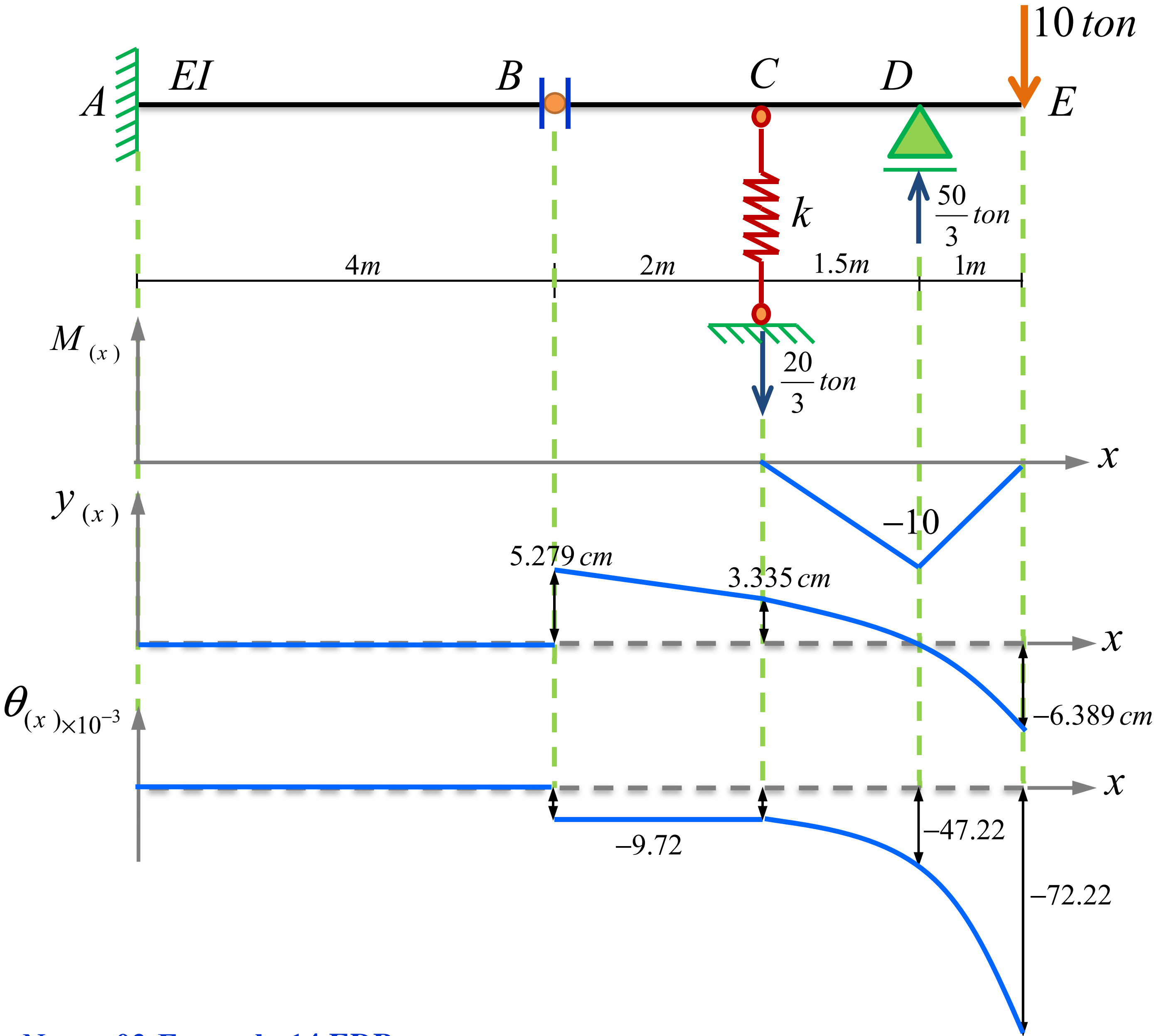
$$\boxed{V'_{(x)} = \theta_{(x)} = (25x^2 - 72.22)\times 10^{-3}}$$

$$\boxed{M'_{(x)} = y_{(x)} = (-8.33x^3 + 72.22x - 63.89)\times 10^{-3}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 14-



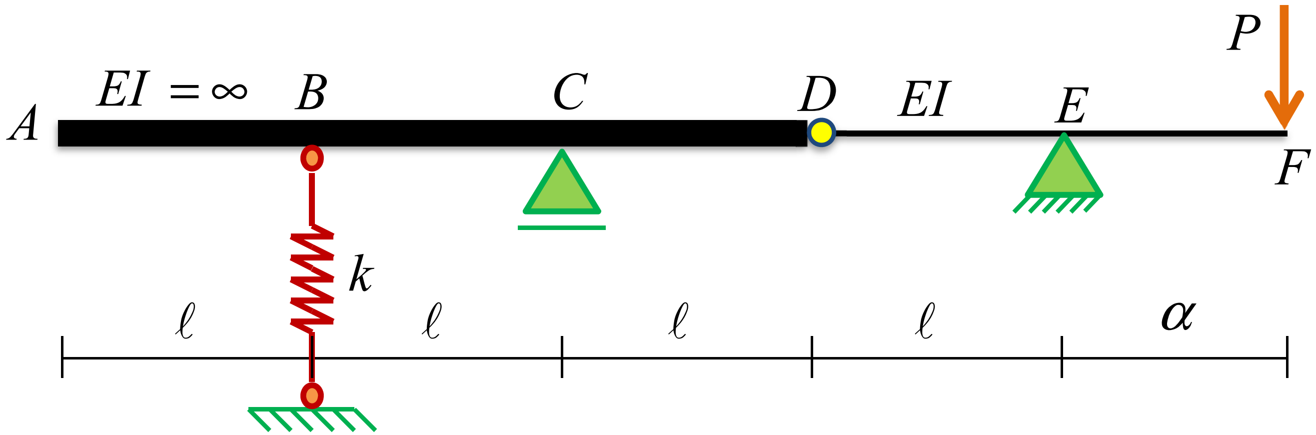
ETABS File Name: **03-Example-14.EDB**

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

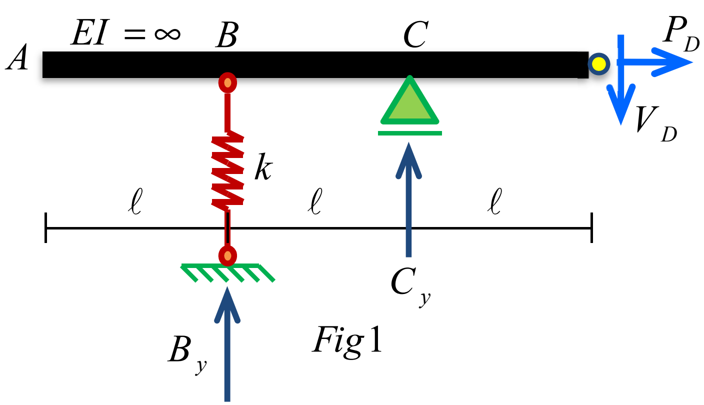
مثال 15- مقدار α را به گونه‌ای تعیین نمایید که خیز در نقاط A و F با هم برابر باشند. تیر AD صلب است.

$$k = \frac{3EI}{\ell^3}$$

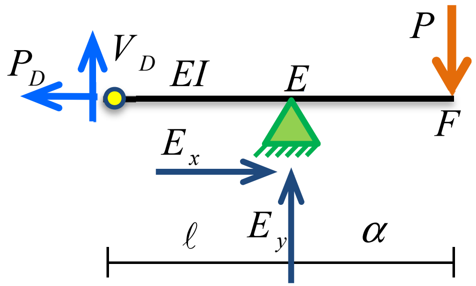


روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 15-



$Fig\,1$



$Fig\,2$

برای تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی

تیر را در اتصال D جدا می‌نماییم:

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$Fig\,1:\ \sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{P_D=0} \overset{Fig\,2}{\Rightarrow} \sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{E_x=0}$$

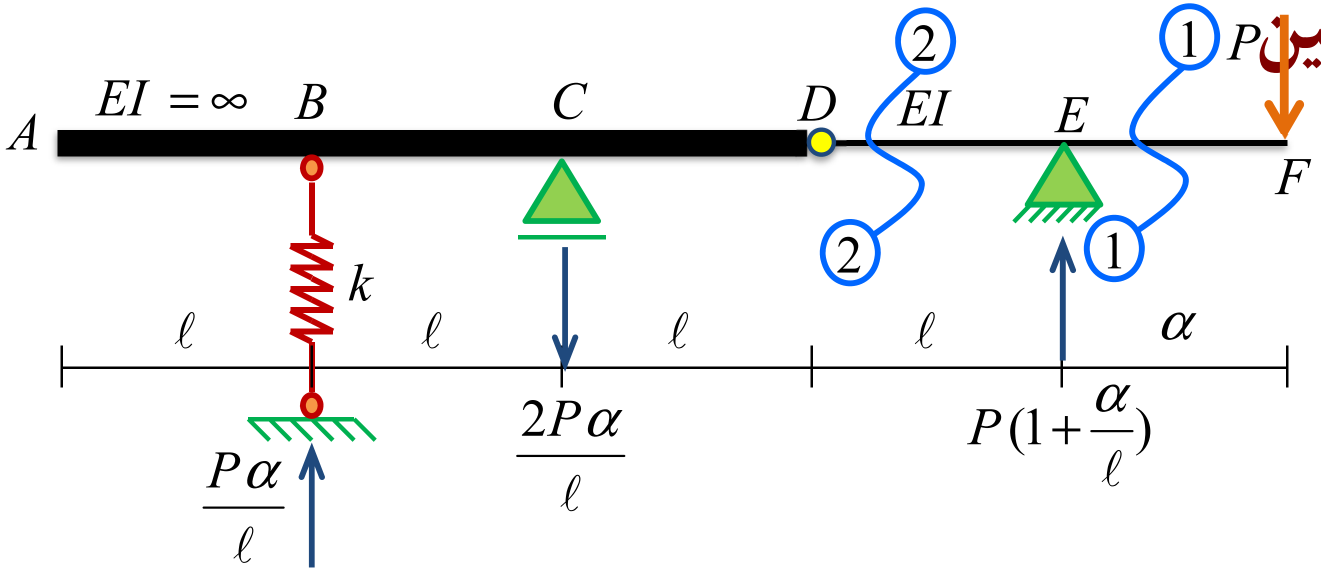
$$Fig\,2:\ \sum M_D=0 \Rightarrow E_y\ell-P(\ell+\alpha)=0 \Rightarrow \boxed{E_y=P(1+\frac{\alpha}{\ell})} \quad (15.1)$$

$$Fig\,2:\ \sum F_y=0 \Rightarrow E_y-P+V_D=0 \overset{(15.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_D=-\frac{P\alpha}{\ell}} \quad (15.2)$$

$$Fig\,1:\ \sum M_B=0 \Rightarrow -V_D\times 2\ell+C_y\times\ell=0 \overset{(15.2)}{\Rightarrow} \boxed{C_y=-\frac{2P\alpha}{\ell}} \quad (15.3)$$

$$Fig\,1:\ \sum F_y=0 \Rightarrow B_y-V_D+C_y=0 \overset{(15.2)\&(15.3)}{\Rightarrow} \boxed{B_y=\frac{P\alpha}{\ell}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

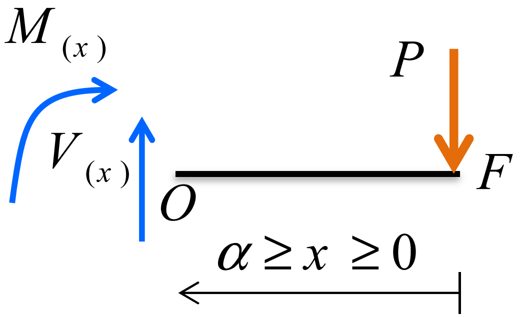


روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 15-

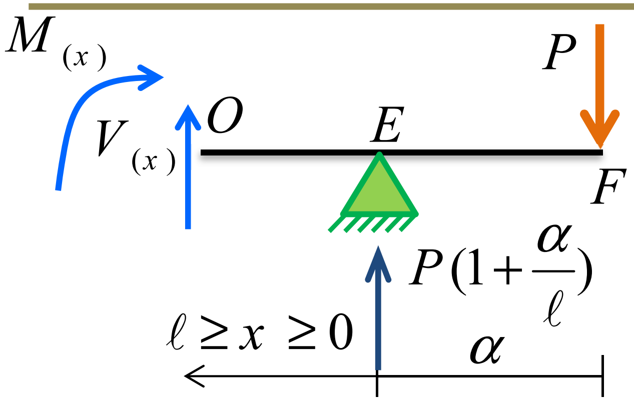
از آنجایی که بخش AD تیر صلب است از این رو در محاسبه بار الاستیک مربوط به این بخش مقدار لنگر به بینهایت تقسیم می‌شود که برابر با صفر خواهد شد. در نتیجه نیازی به محاسبه نمودار لنگر در بخش AD تیر نیست چون نیازی به آن نمی‌باشد.

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - P\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -Px}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:



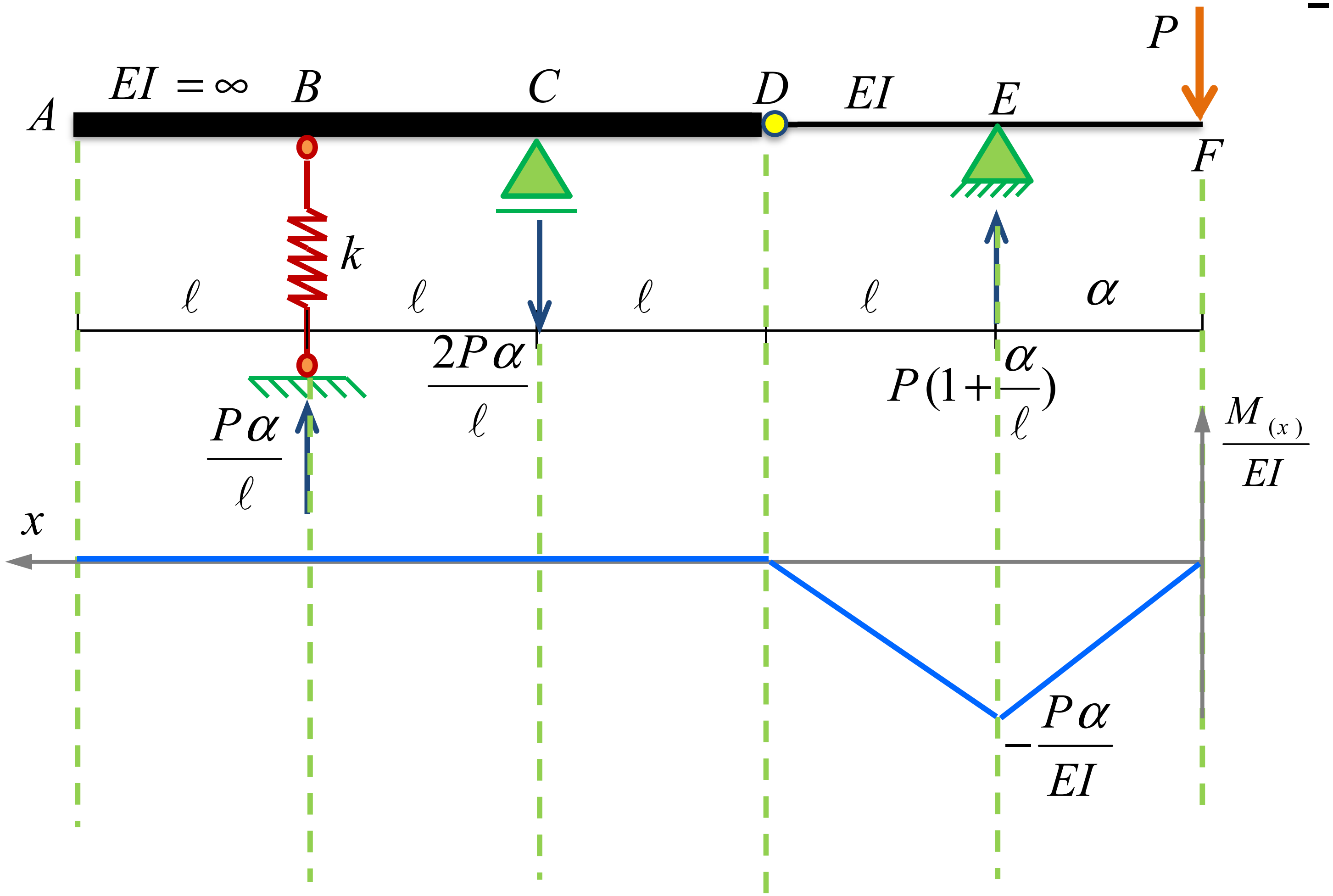
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - P\times(x+\alpha) + P(1+\frac{\alpha}{\ell})\times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = P\alpha\left(\frac{x}{\ell}-1\right)}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

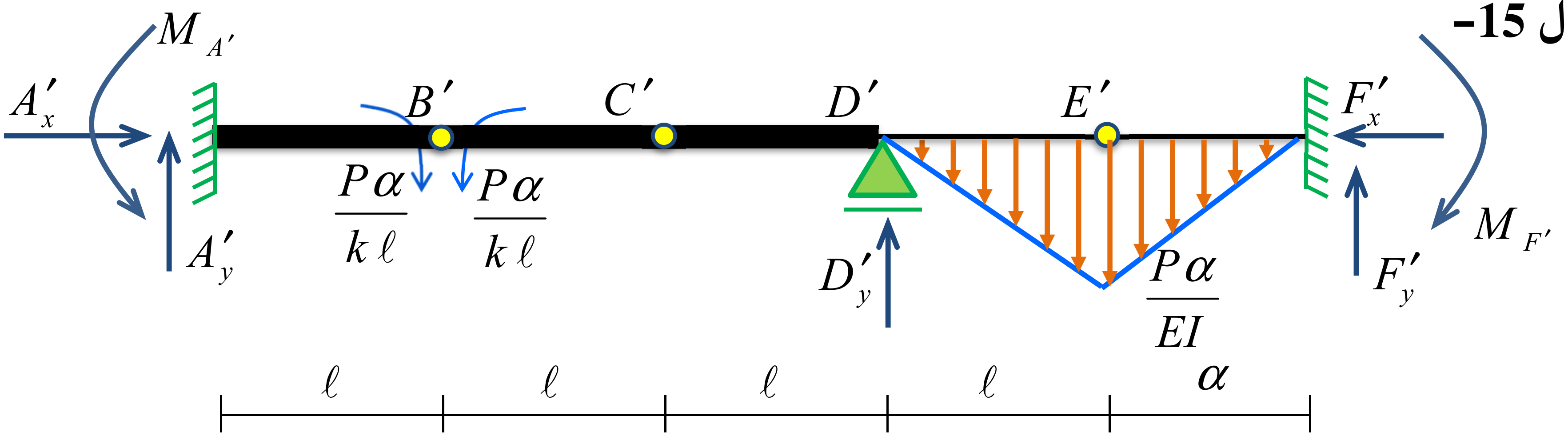
پاسخ مثال 15-



تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 15-



در ادامه هدف تعیین مقادیر لنگر $M_{F'}$ و $M_{A'}$ است. به همین دلیل تیر را از محل مفصل‌ها جدا می‌کنیم:

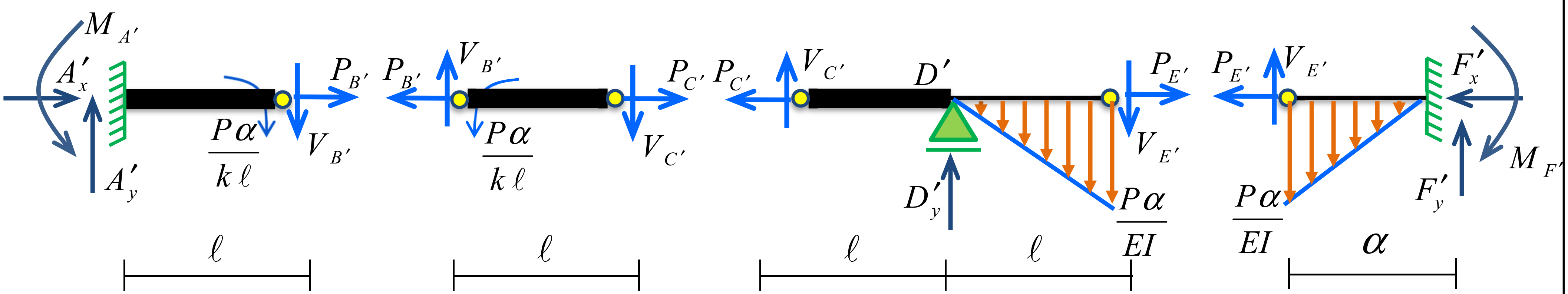
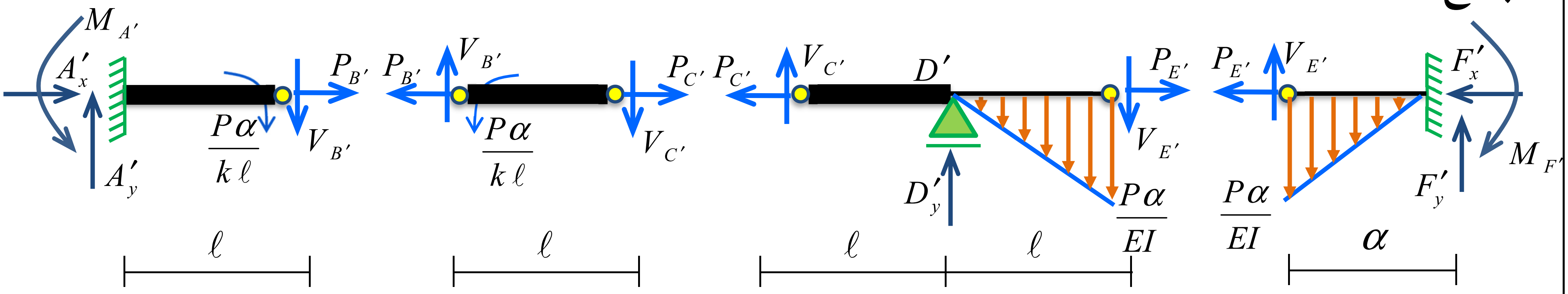


Fig 1 *Fig* 2 *Fig* 3 *Fig* 4

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 15-



$Fig\,1$ $Fig\,2$ $Fig\,3$ $Fig\,4$

$$\boxed{V_{C'} = \frac{P\alpha}{k\ell^2}} \quad (15.4)$$

$$\boxed{V_{B'} = \frac{P\alpha}{k\ell^2}} \quad (15.5)$$

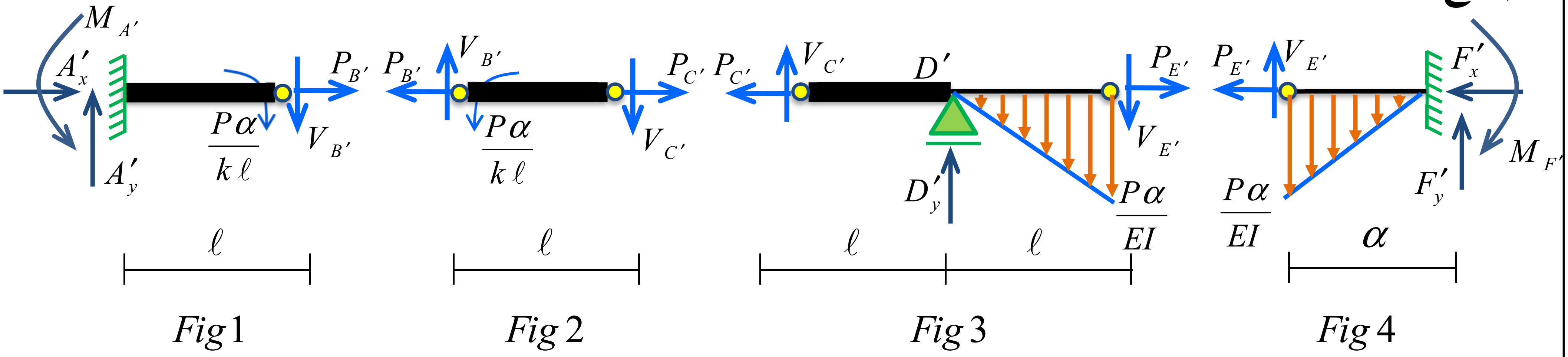
$$\underset{k=\frac{3EI}{\ell^3}}{\overset{(15.5)}{\Longrightarrow}} \quad \boxed{y_A = M_{A'} = \frac{2P\alpha\ell^2}{3EI}} \quad (15.6)$$

$$\underset{k=\frac{3EI}{\ell^3}}{\overset{(15.4)}{\Longrightarrow}} \quad \boxed{V_{E'} = -\frac{2P\alpha\ell}{3EI}} \quad (15.7)$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال 15-



$$\boxed{y_F = M_{F'} = \frac{P\alpha^3}{3EI} + \frac{2P\alpha^2\ell}{3EI}} \quad (15.8)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 + 2\ell\alpha - 2\ell^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{-(2\ell) \pm \sqrt{(2\ell)^2 - 4(1)(-2\ell^2)}}{2(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = (\sqrt{3} - 1)\ell}$$