دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

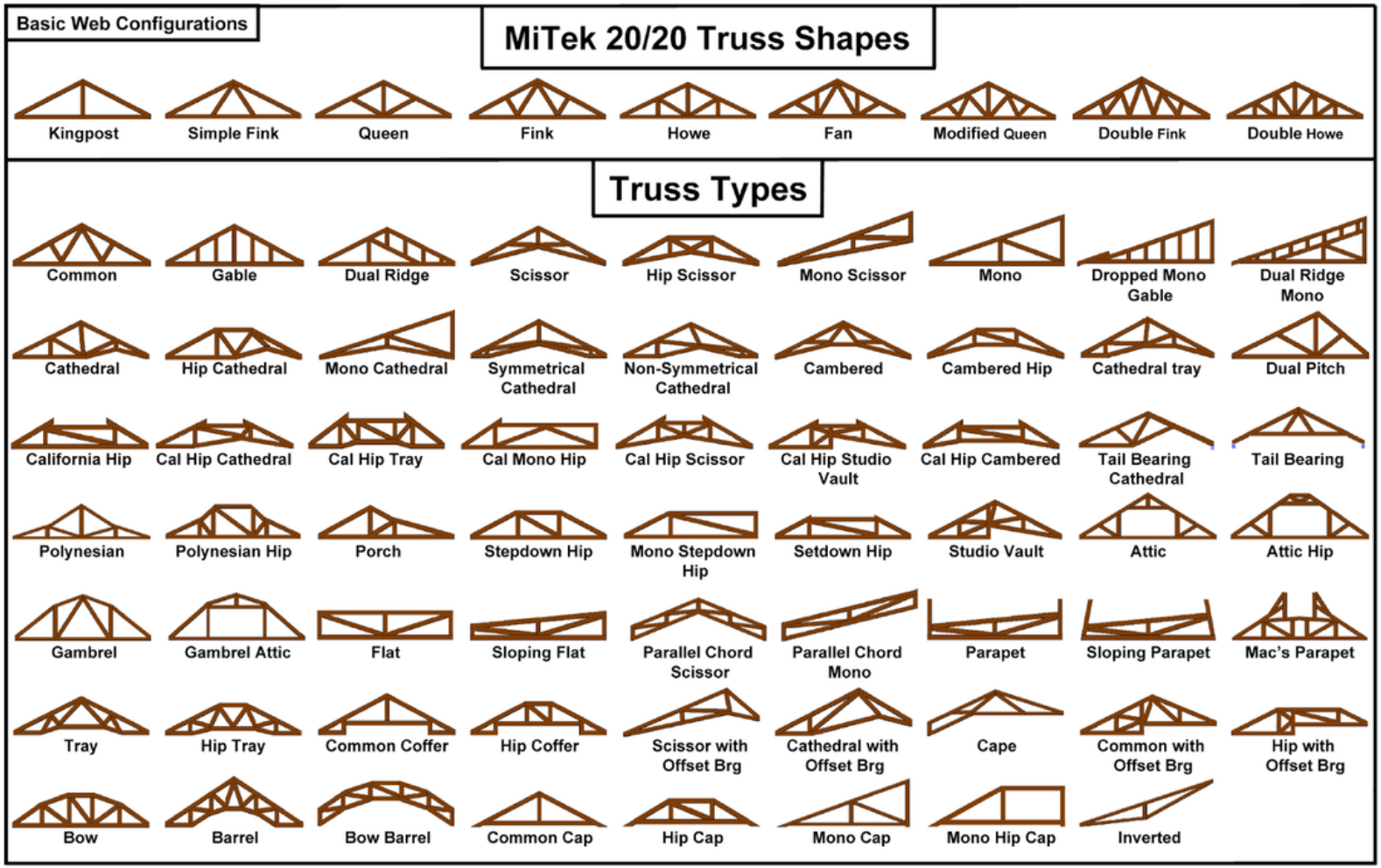
خرپا (Truss)

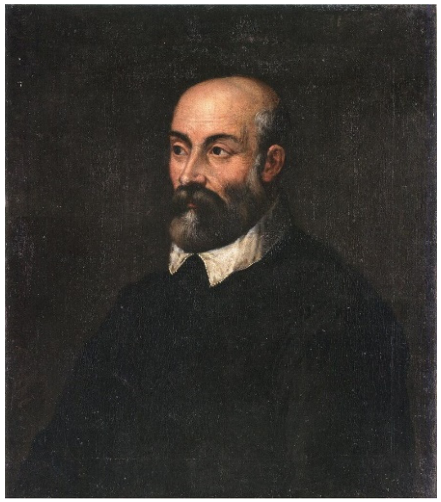
تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

خرپا (Truss)

خرپا (Truss):

خرپا مجموعه‌ای از اعضای خطی و مستقیم است که توسط مفصل به یکدیگر متصل می‌شوند. معمار ایتالیایی به نام آندره پلادیو اولین کسی است که خرپا را ابداع نموده است.



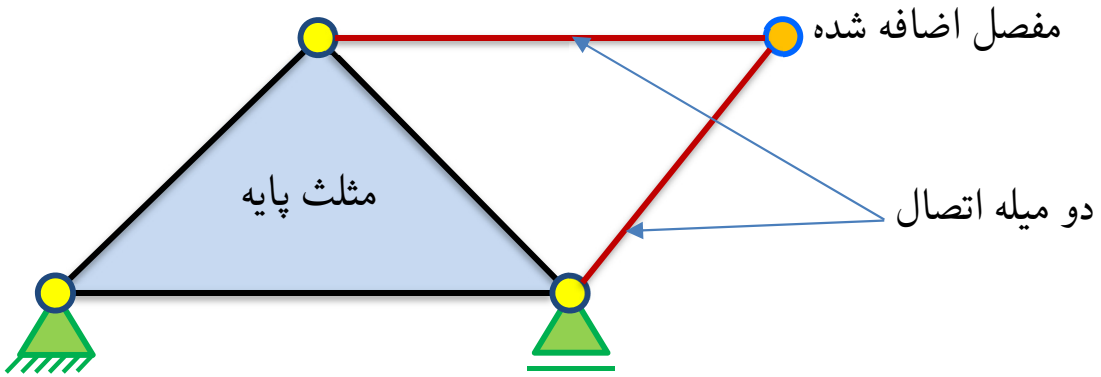


Andrea Palladio
Born: 30 November 1508
Died: 19 August 1580 (aged 71)
Nationality: Italian
Occupation: Architect

خرپا (Truss)

انواع خرپا:

1- خرپای ساده (Simple Truss): از یک مثلث پایه شامل سه عضو و سه مفصل شروع شده و به ازای اضافه کردن هر مفصل به خرپا حداقل دو میله اتصال موجود است. خرپای ساده از نظر داخلی پایدار است.



شرط لازم اما نه کافی برای خرپای ساده رابطه زیر است:

$$\frac{m-3}{2} \in N$$

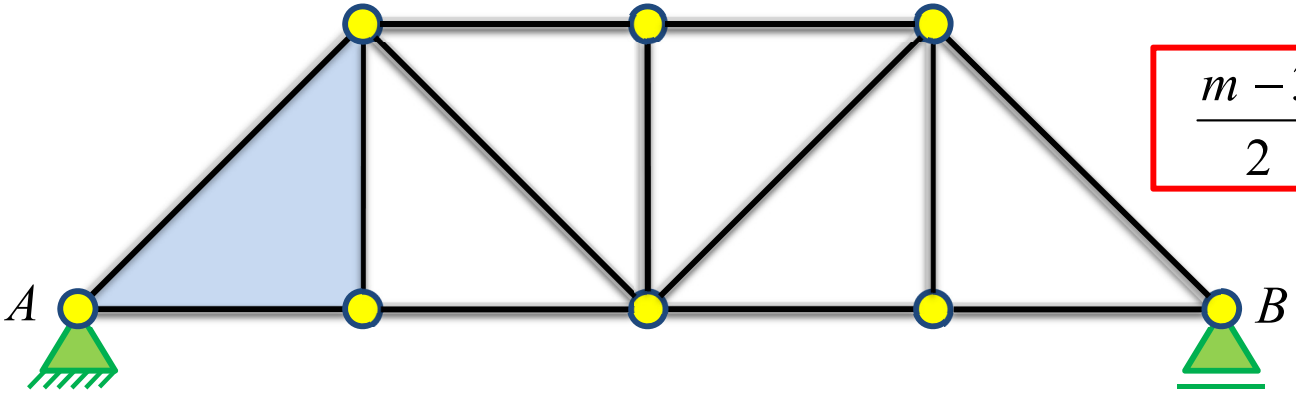
m : تعداد اعضا

N : اعداد طبیعی

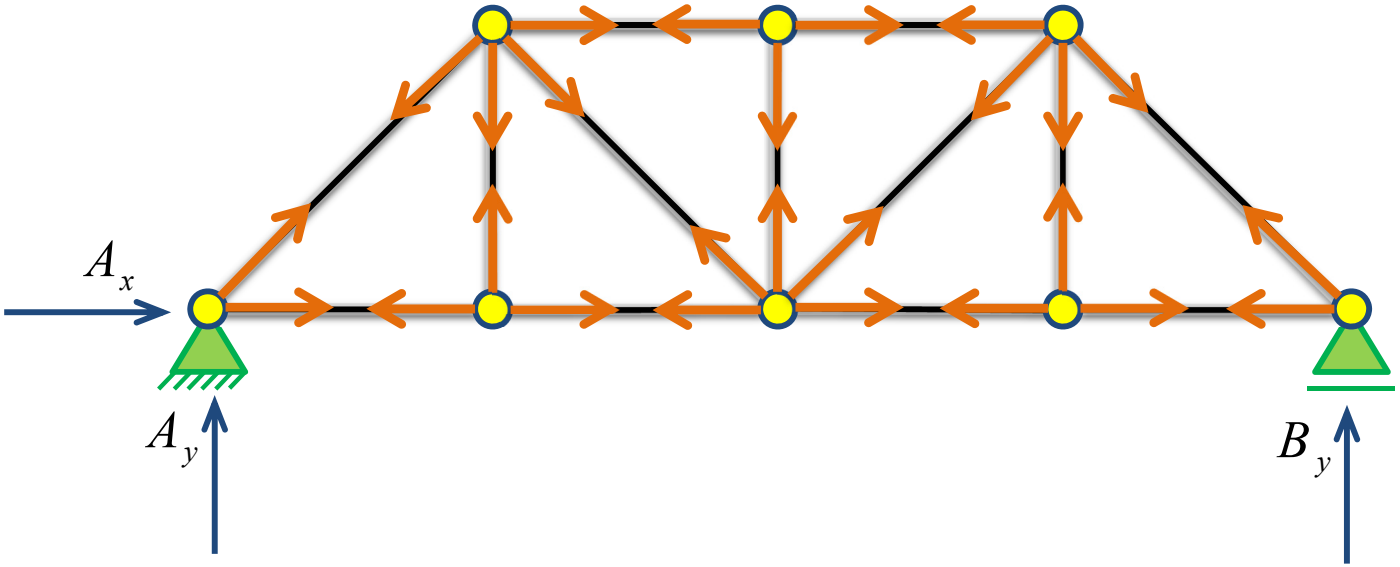
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

1- خرپای ساده (Simple Truss):



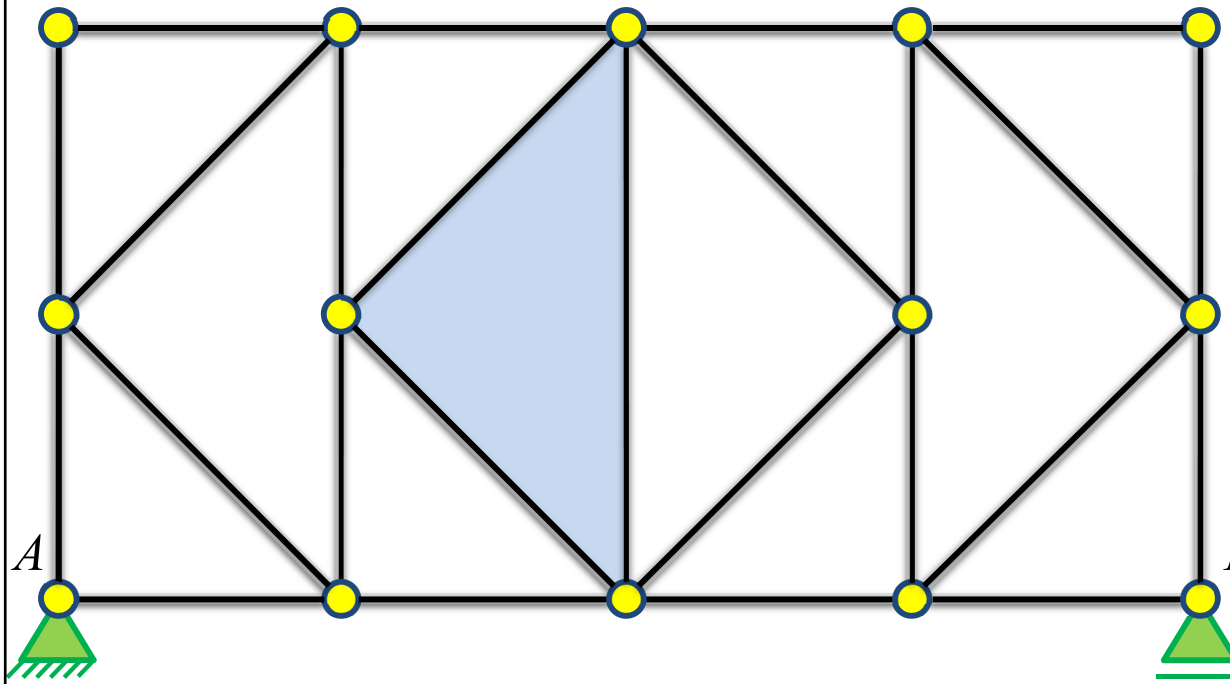
$$\frac{m-3}{2}=\frac{13-3}{2}=5\in N$$



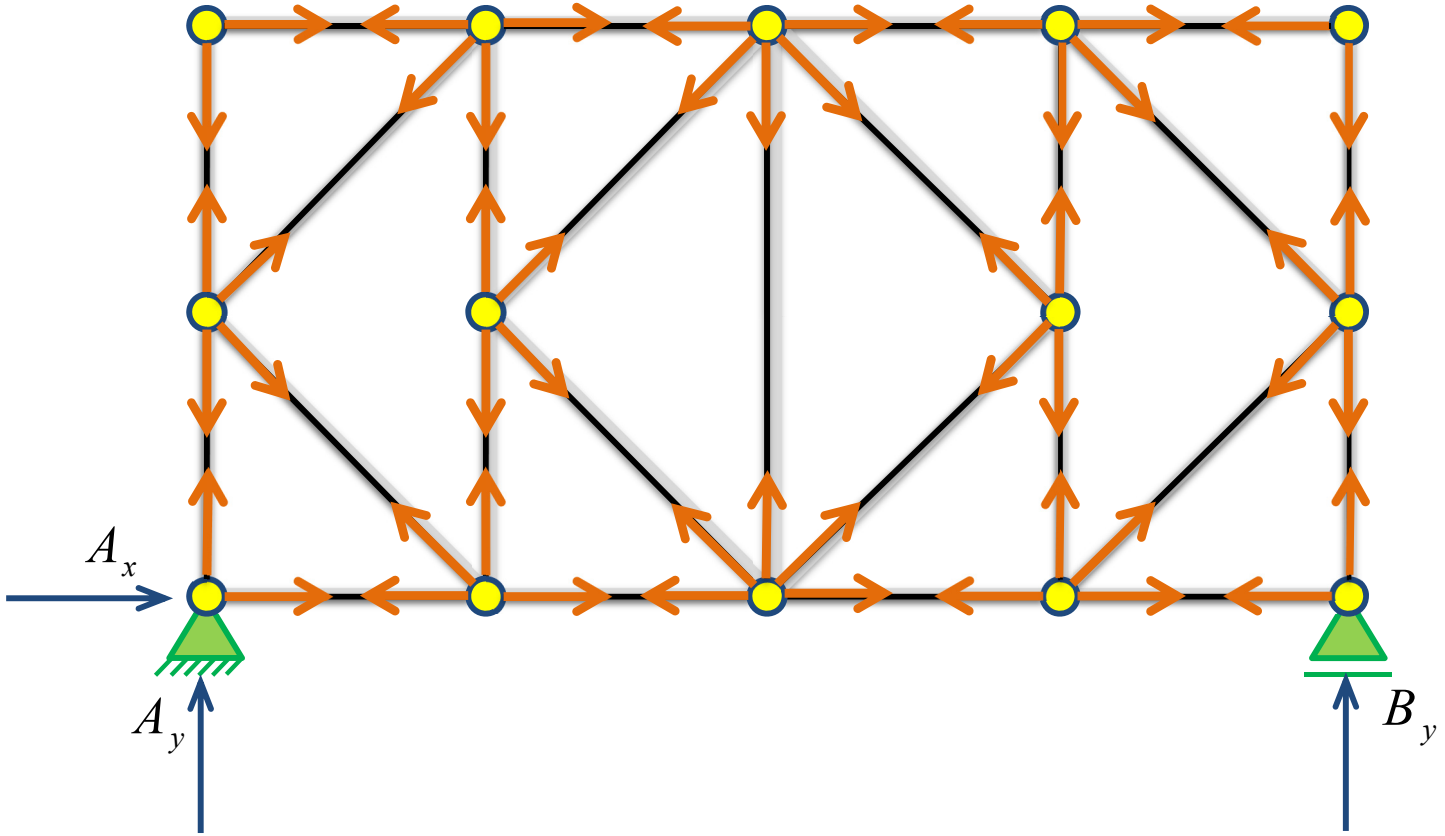
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

1- خرپای ساده (Simple Truss):



$$\frac{m-3}{2}=\frac{25-3}{2}=11\in N$$

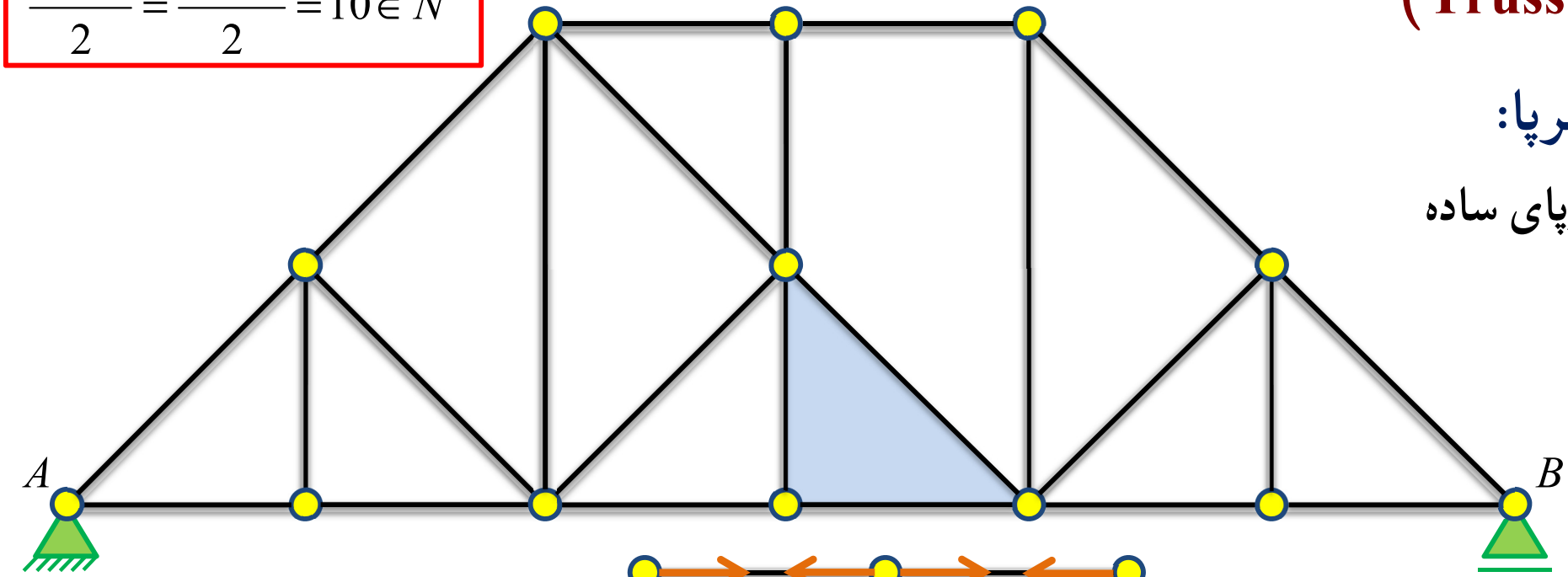


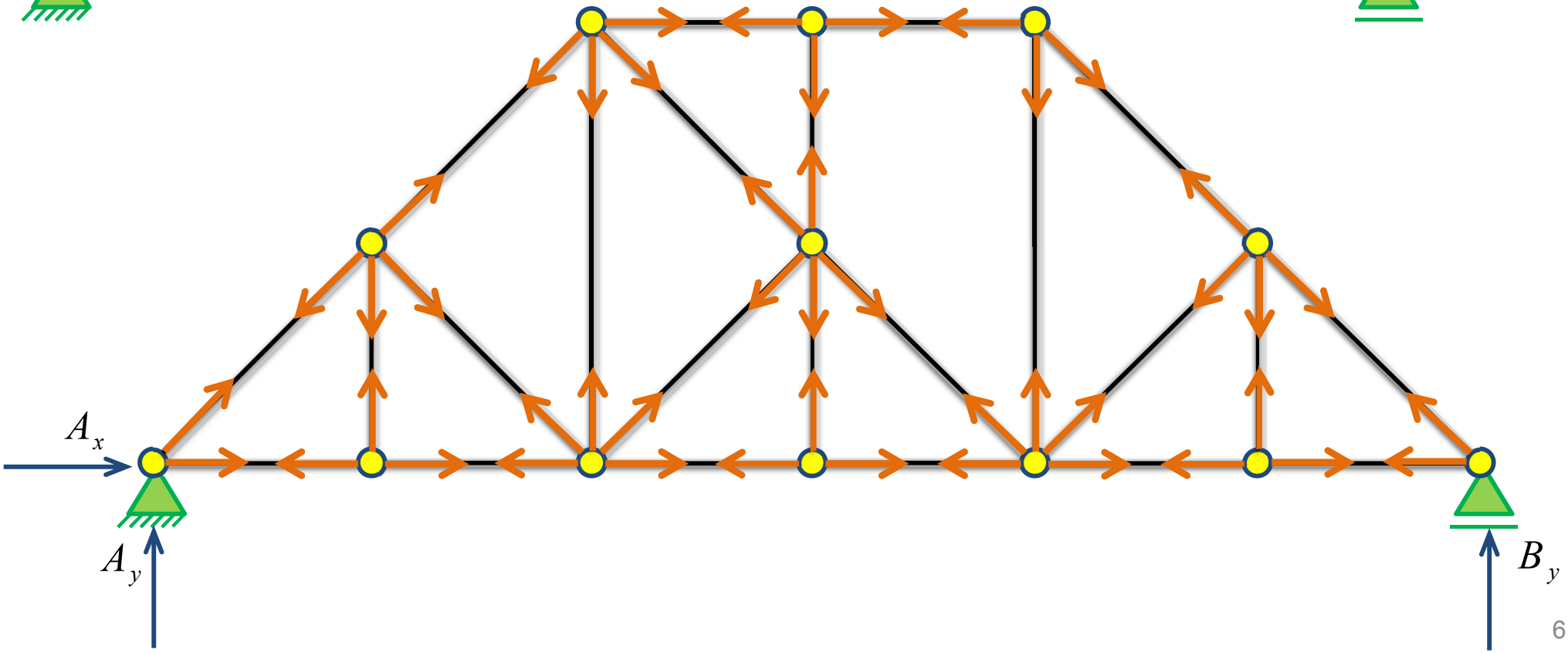
خرپا (Truss)

$$\frac{m-3}{2}=\frac{23-3}{2}=10\in N$$

انواع خرپا:

1- خرپای ساده



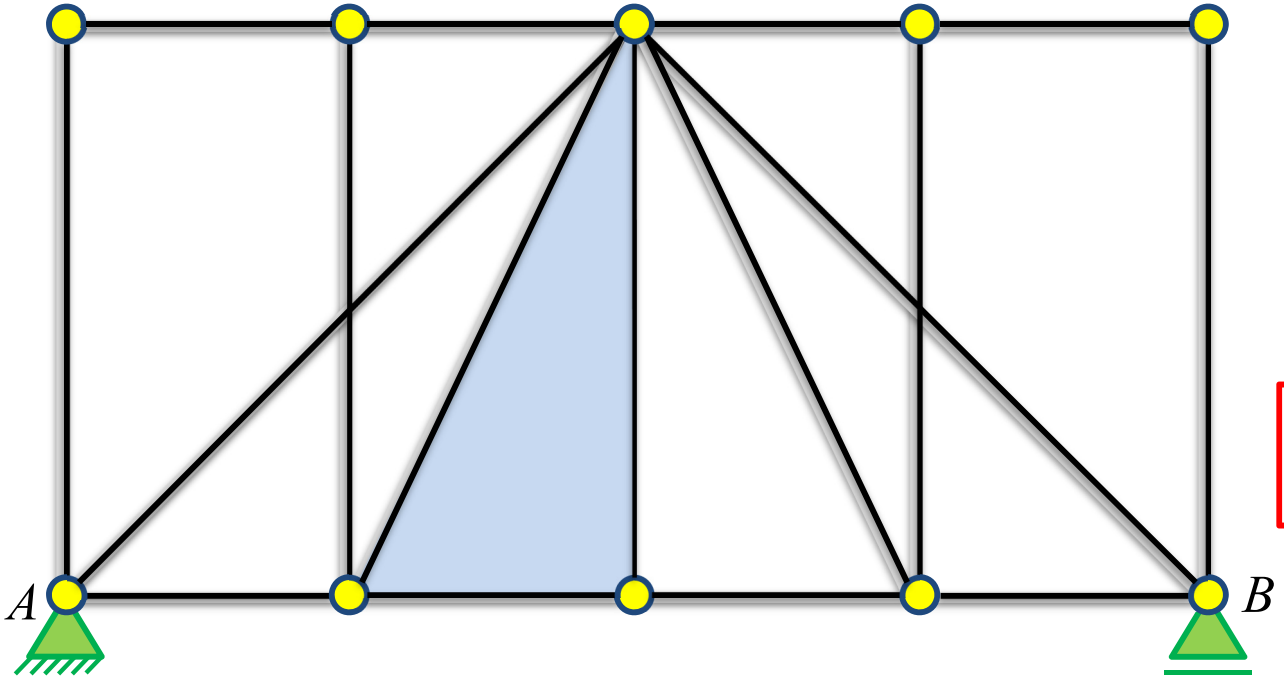


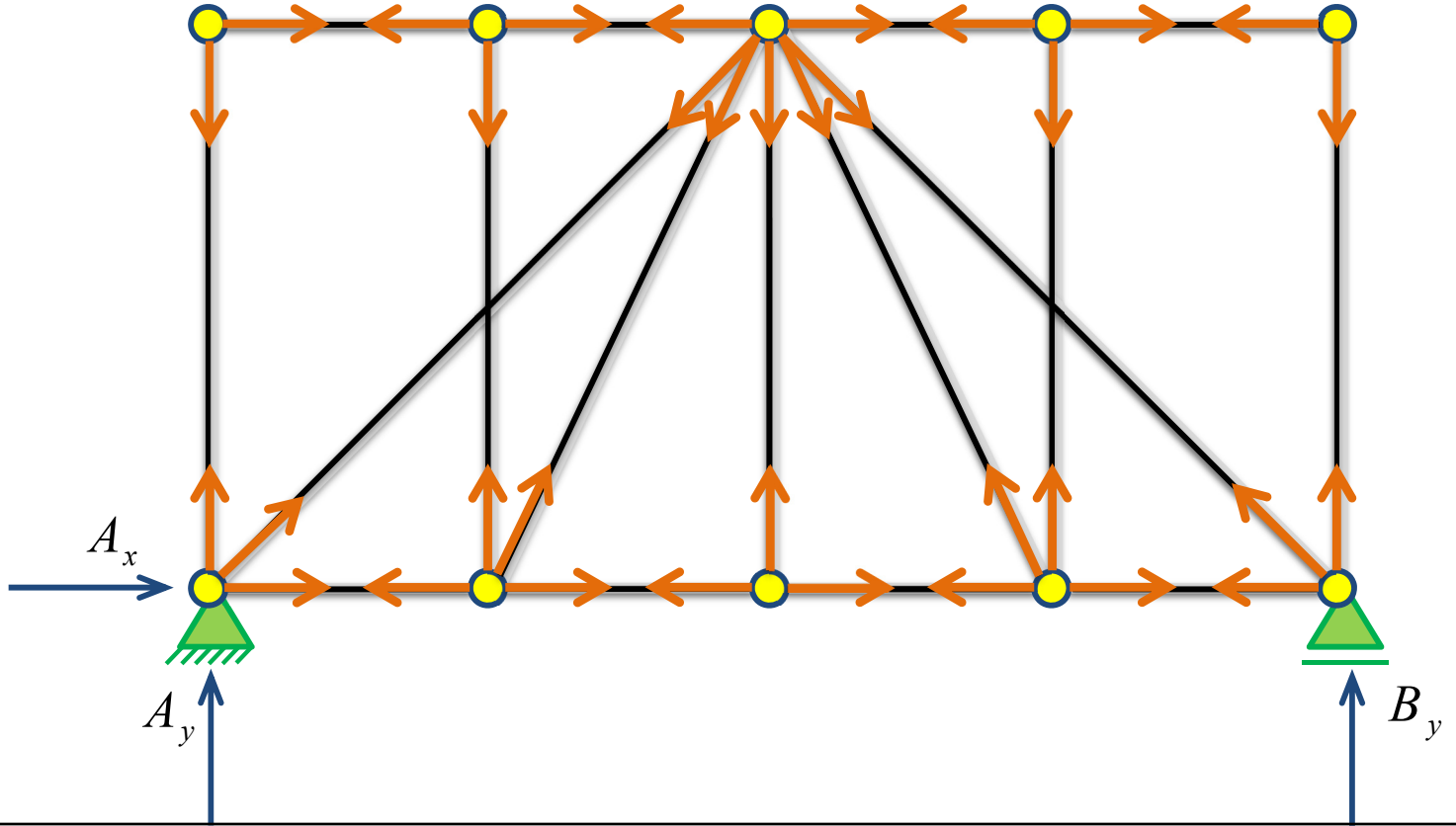
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

1- خرپای ساده (Simple Truss):

$$\frac{m-3}{2}=\frac{17-3}{2}=7\in N$$

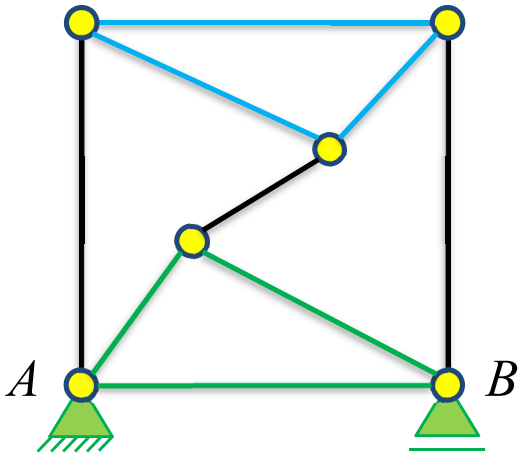


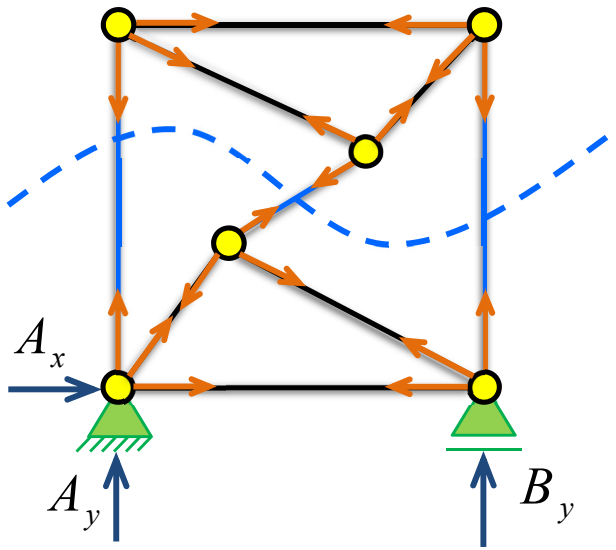


خرپا (Truss)

انواع خرپا:

1- خرپای مرکب (Compound Truss): خرپایی است که از اتصال دو یا چند خرپای ساده تشکیل شده است. پایداری خرپای مرکب بستگی به اتصال خرپاهای ساده به یکدیگر دارد.





کافی نیست

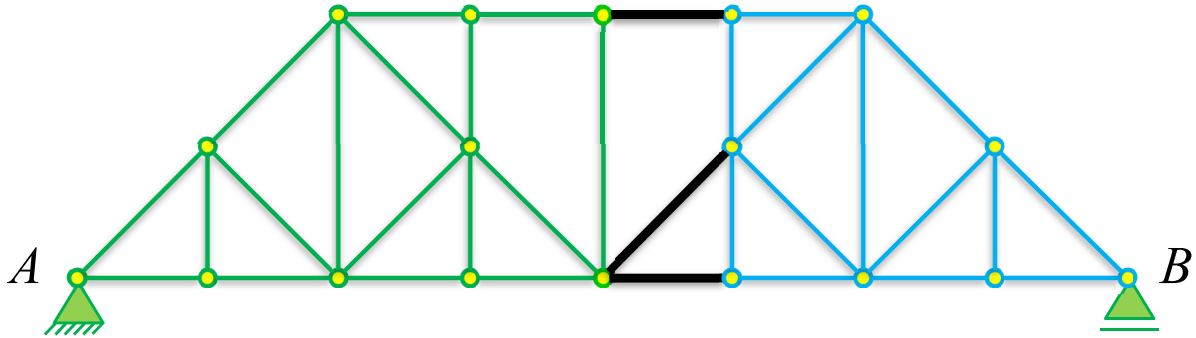
$$\frac{m-3}{2}=\frac{9-3}{2}=3\in N$$

ترکیب دو خرپای ساده با استفاده
از سه میله غیرموازی و غیرمتقارب

خرپا (Truss)

انواع خرپا:

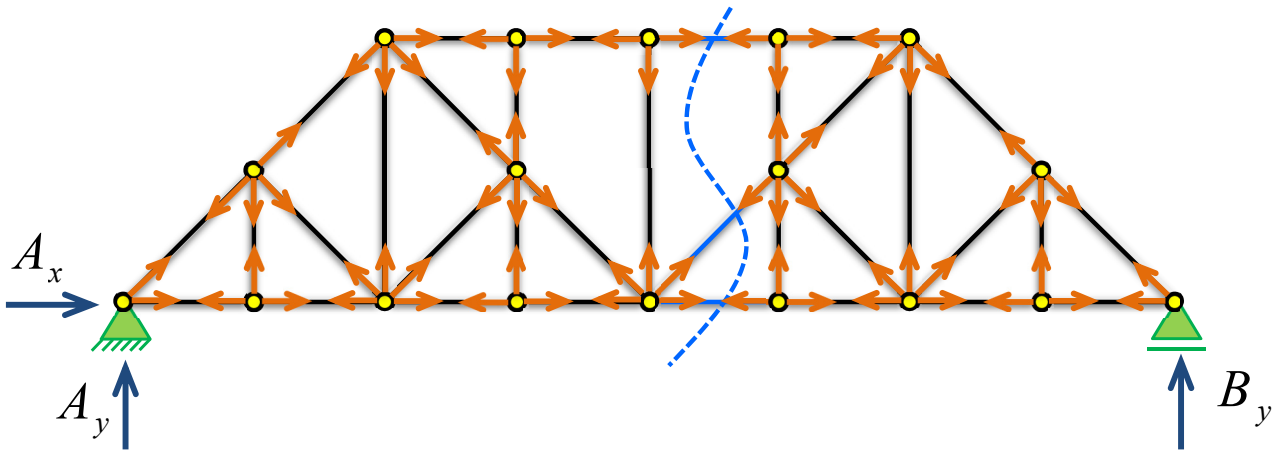
1- خرپای مرکب (Compound Truss):



ترکیب دو خرپای ساده با استفاده از سه میله غیرموازی و غیرمتقارب

$$\frac{m-3}{2}=\frac{33-3}{2}=15\in N$$

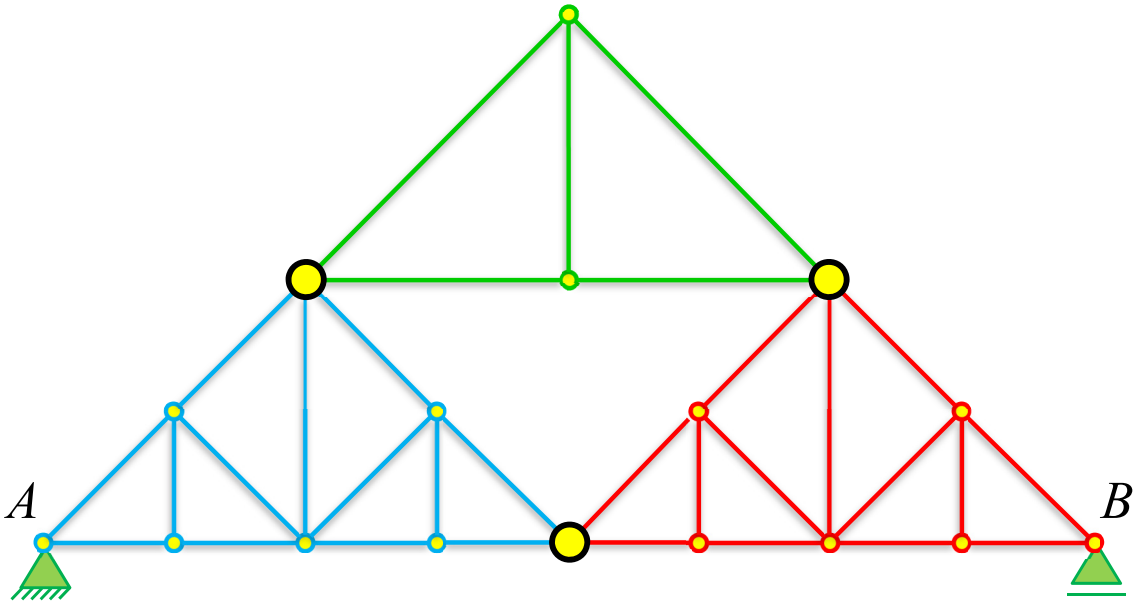
کافی نیست



خرپا (Truss)

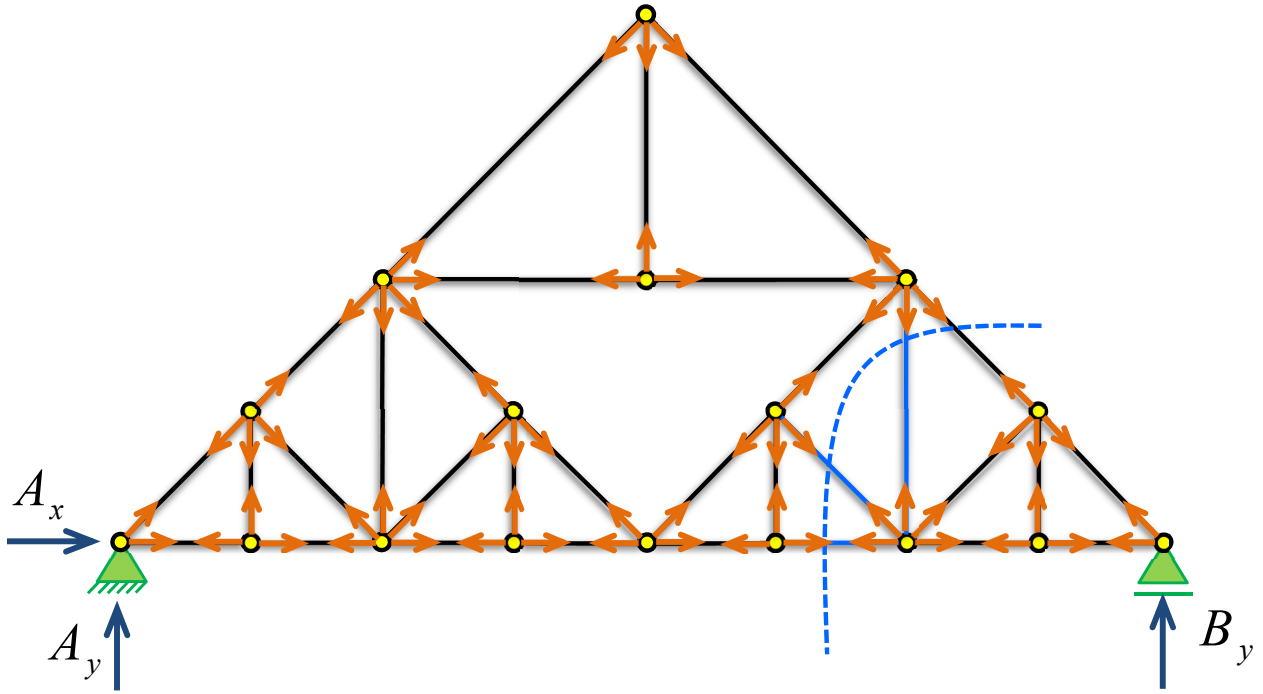
انواع خرپا:

1- خرپای مرکب



کافی نیست $\frac{m-3}{2}=\frac{31-3}{2}=14\in N$

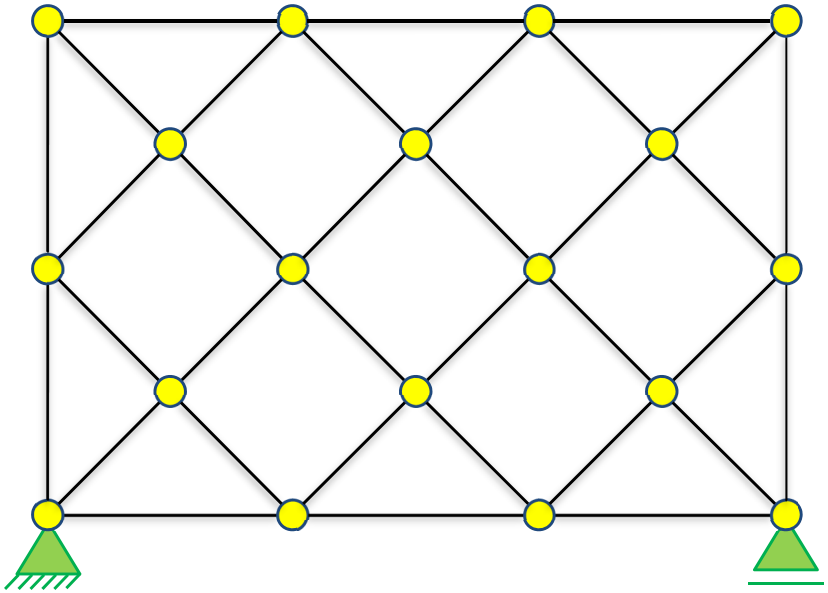
ترکیب سه خرپای ساده به کمک سه مفصل که راستای آن‌ها بر روی یک خط راست قرار ندارد.



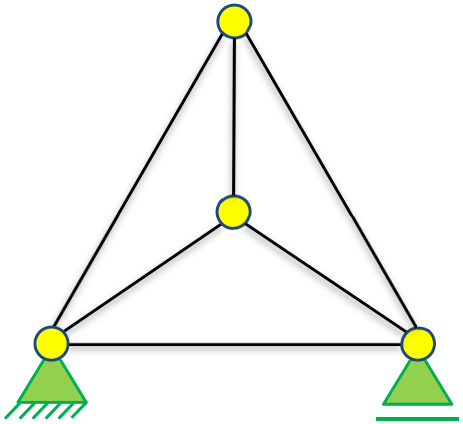
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

1- خرپای پیچیده (بغرنج یا مبهم) (Complex Truss): خرپایی است که نه ساده است و نه مرکب. آنالیز این نوع خرپا به کمک روش گره امکان‌پذیر نمی‌باشد. اصولا بحث پایداری این نوع خرپاها به صورت سیستماتیک امکان‌پذیر نمی‌باشد.



$$\frac{m-3}{2}=\frac{34-3}{2}=15.5\notin N$$

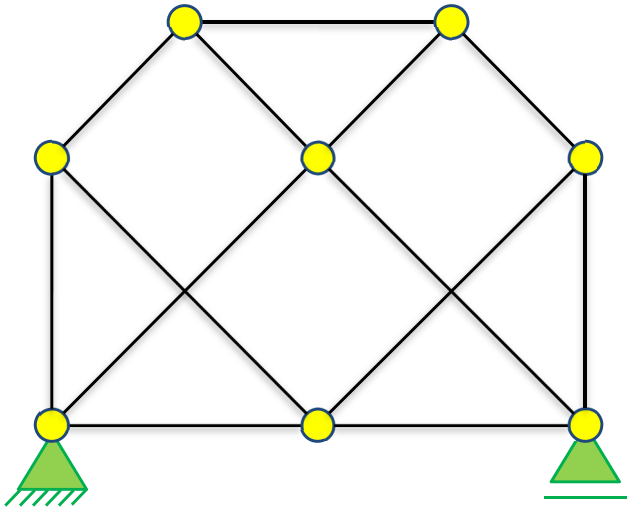


$$\frac{m-3}{2}=\frac{6-3}{2}=1.5\notin N$$

خرپا (Truss)

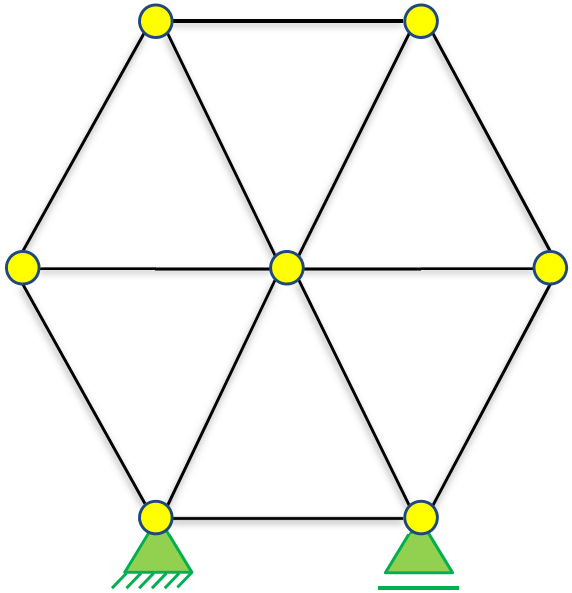
انواع خرپا:

1- خرپای پیچیده (بغرنج یا مبهم) (Complex Truss):



$$\frac{m-3}{2}=\frac{13-3}{2}=5\in N$$

کافی نیست. خرپا ساده نمی‌باشد چرا که هیچ مثلث پایه‌ای در این خرپا وجود ندارد. همچنین خرپا مرکب هم نمی‌باشد.



$$\frac{m-3}{2}=\frac{12-3}{2}=4.5\notin N$$

خرپا (Truss)

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

1- روش مقایسه تعداد معادلات و مجهولات (در فصل قبل اشاره شده است).

2- روش کلاسیک (در فصل قبل اشاره شده است).

3- روش آزمون بار صفر.

خرپا (Truss)

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

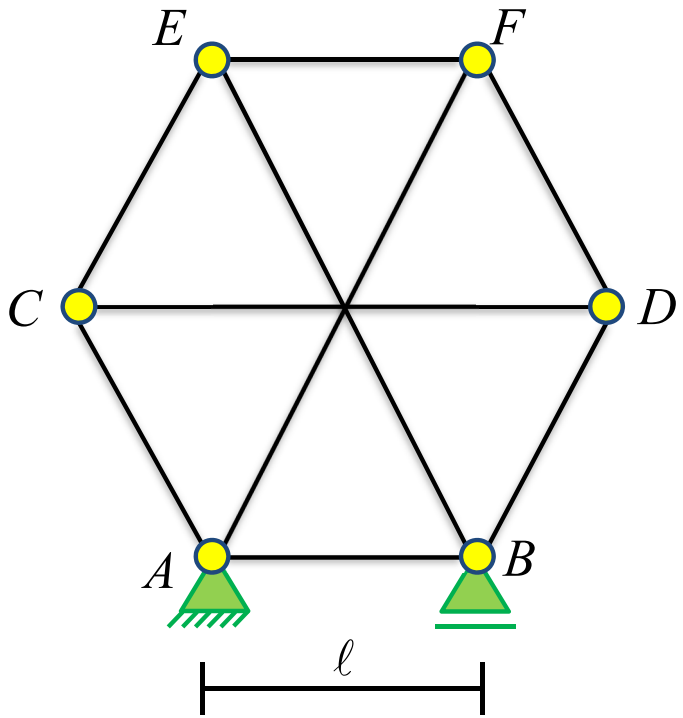
می‌دانیم که اگر خرپایی تحت اثر بارخارجی قرار نگیرد نیروی داخلی در آن ایجاد نمی‌شود و نیروی همه اعضای آن صفر است. حال فرض می‌کنیم در خرپایی که بارگذاری خارجی ندارد نیروی یکی از اعضا را متغیر و برابر با P در نظر می‌گیریم. در ادامه اگر با تحلیل گره به گره خرپا به معادله P=0 رسیدیم نتیجه می‌شود که خرپا پایدار است. در غیر این صورت، یعنی اگر نیروی هر یک از اعضا تابعی از P به دست آمد آن گاه خرپا ناپایدار است؛ زیرا مقدار P می‌تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد.

خرپا (Truss)

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

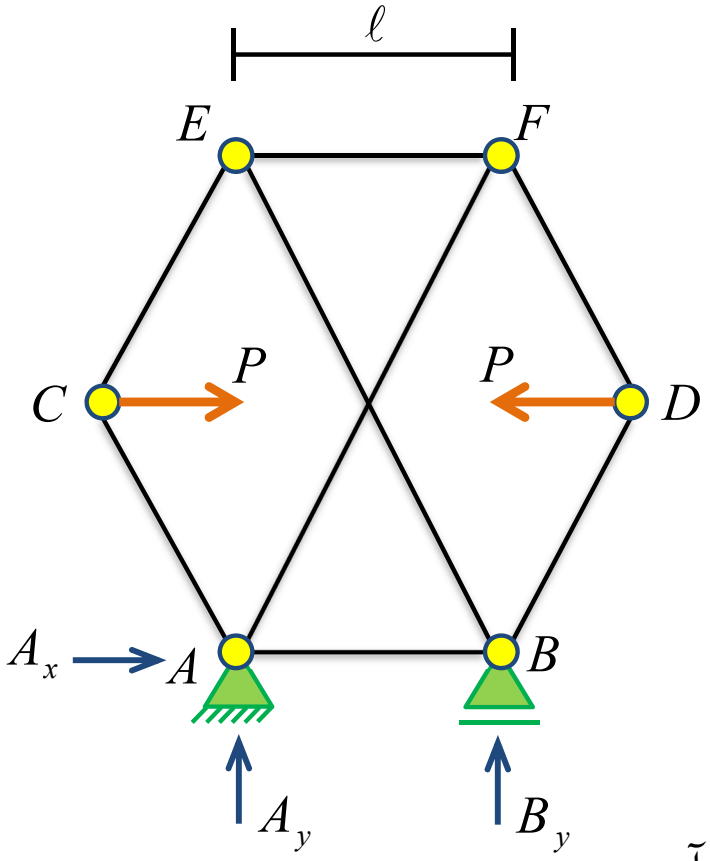
مثال 1- پایداری خرپای نشان داده را بررسی نمایید. تمامی زوایای خرپا برابر با 60° است.



خرپا (Truss)

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:



حل مثال 1- فرض می شود در حالت بدون بارگذاری خارجی نیروی داخلی عضوی CD برابر با P است.

با نوشتن معادلات تعادل عکس‌العمل های تکیه گاهی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x + P - P = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \ell + P\ell\sin(60) - P\ell\sin(60) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{B_y = 0}$$

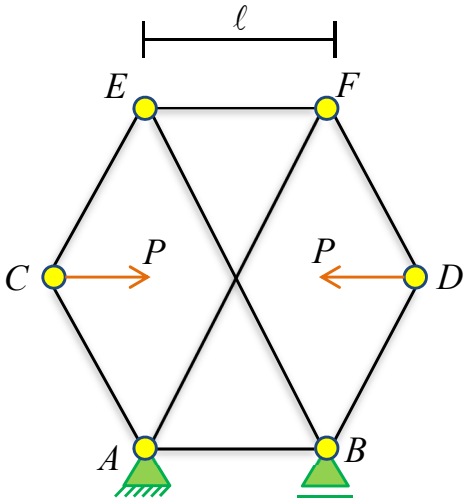
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y = 0 \quad \Rightarrow \boxed{A_y = 0}$$

خرپا (Truss)

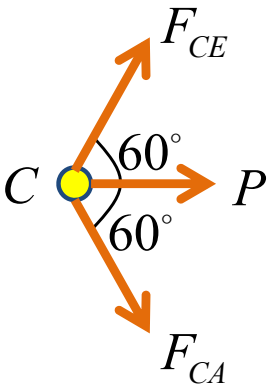
روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

حل مثال 1-



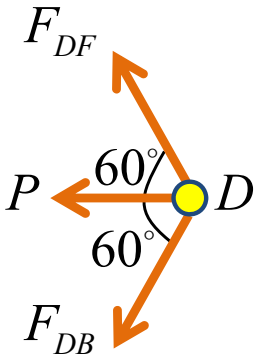
با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_{CE}\sin(60) - F_{CA}\sin(60) = 0 \;\Rightarrow\; F_{CE} = F_{CA} \\ \sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; P + F_{CE}\cos(60) + F_{CA}\cos(60) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{CE} = F_{CA} = -P}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_{DF}\sin(60) - F_{DB}\sin(60) = 0 \;\Rightarrow\; F_{DF} = F_{DB} \\ \sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -P - F_{DF}\cos(60) - F_{DB}\cos(60) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

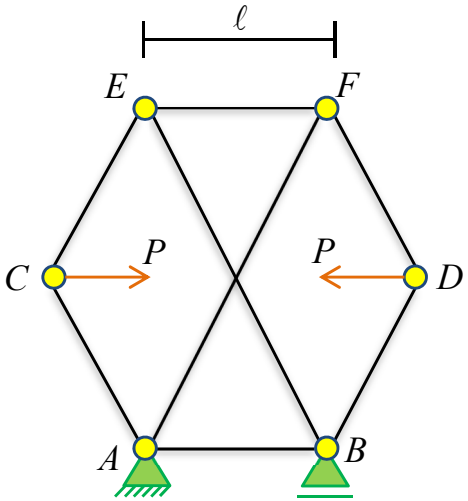
$$\boxed{F_{DF} = F_{DB} = -P}$$

خرپا (Truss)

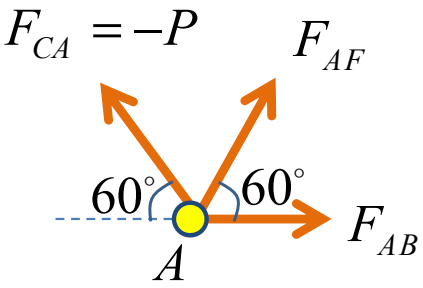
روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

حل مثال 1-



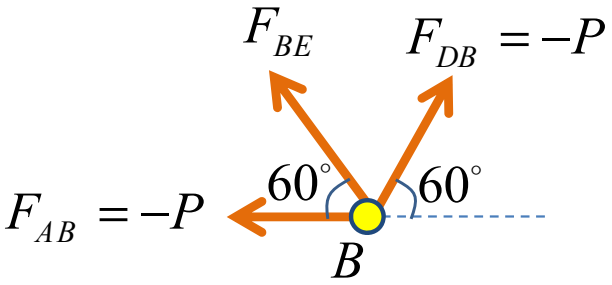
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +(-P)\sin(60)+F_{AF}\sin(60)=0 \Rightarrow \boxed{F_{AF}=P}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -(-P)\cos(60)+F_{AF}\cos(60)+F_{AB}=0 \Rightarrow \boxed{F_{AB}=-P}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



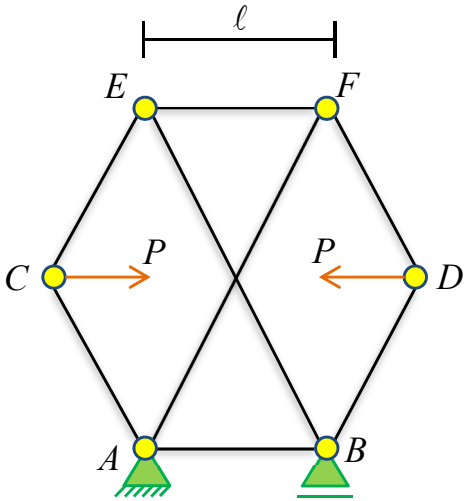
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +(-P)\sin(60)+F_{BE}\sin(60)=0 \Rightarrow \boxed{F_{BE}=P}$$

خرپا (Truss)

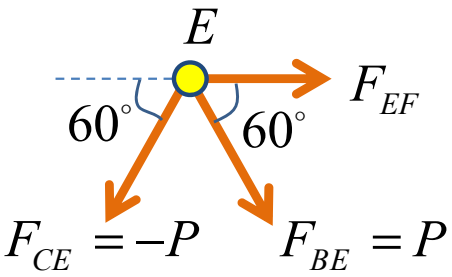
روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

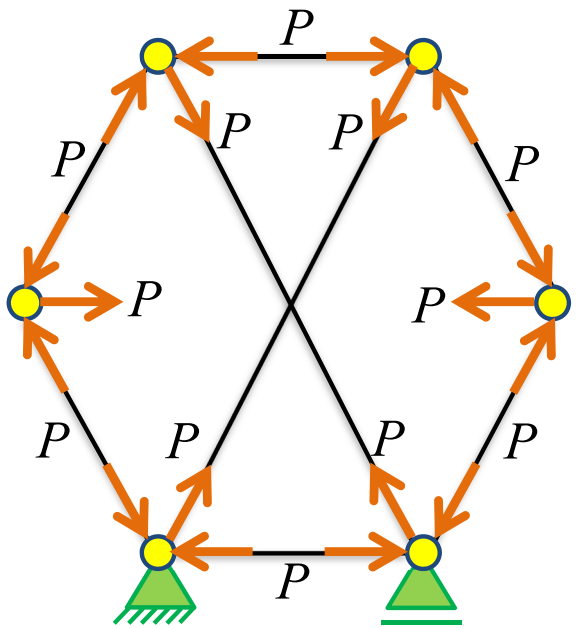
حل مثال 1-



با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -(-P)\cos(60) + P\cos(60) + F_{EF} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{EF} = -P}$$



$$\Rightarrow \quad P \neq 0$$

خرپا ناپایدار است.

خرپا (Truss)

آنالیز خرپا:

فرضیات:

1- اتصال کلیه اعضا به یکدیگر به صورت مفصلی است.

2- اعضای خرپا از عضوهای مستقیم تشکیل شده است.

3- تغییرشکل‌های ایجاد شده در اعضای خرپا ناشی از بارهای وارده ناچیز بوده به طوری که هندسه اولیه خرپا ملاک آنالیز است.

4- نیروهای وارد بر خرپا همگی در محل مفصل اثر می‌کنند.

(با توجه به مفروضات بالا، هر عضو خرپا یک عضو دو نیرویی است که به منظور تعادل این عضو، دو نیرو در راستای عضو به صورت فشاری یا کششی بر عضو اثر می‌کند.)

خرپا (Truss)

آنالیز خرپا:

انواع روش‌های آنالیز:

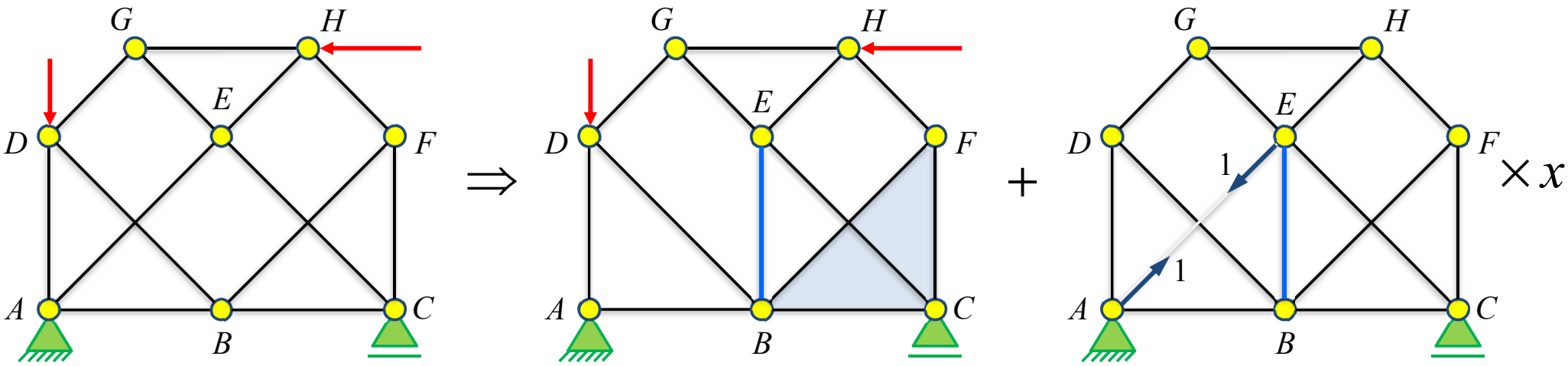
1- **روش تعادل گره:** این روش مناسب برای تعیین نیروی کلیه اعضای خرپا در خرپاهای ساده و مرکب است.

2- **روش مقطع زدن:** این روش مناسب برای تعیین نیروی تعداد خاصی از اعضای خرپا در خرپاهای ساده، مرکب و مبهم است.

3- **روش هنبرگ:** این روش مناسب برای تعیین نیروی کلیه اعضای خرپا در خرپاهای مبهم و مرکب است. در این روش به صورت فرضی یک یا تعدادی از اعضای خرپا را به گونه‌ای جابجا می‌کنیم که خرپای تبدیل یافته اولا پایدار و دوما قابل آنالیز باشد. سپس براساس اصل برهم نهی باید اثر اعضای جابجا شده به صورت مجزا لحاظ شود.

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:



F_{2ij}: نیروهای داخلی در اعضای خرپای ساده ناشی از نیروی داخلی عضو جابجا شده.

توجه: به جای نیروی عضو جابجا شده نیرویی برابر با واحد قرار می‌دهیم؛ چون مقدار واقعی آن را نمی‌دانیم نتایج در x ضرب شده است.

F_{1ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای ساده ناشی از بارگذاری خارجی

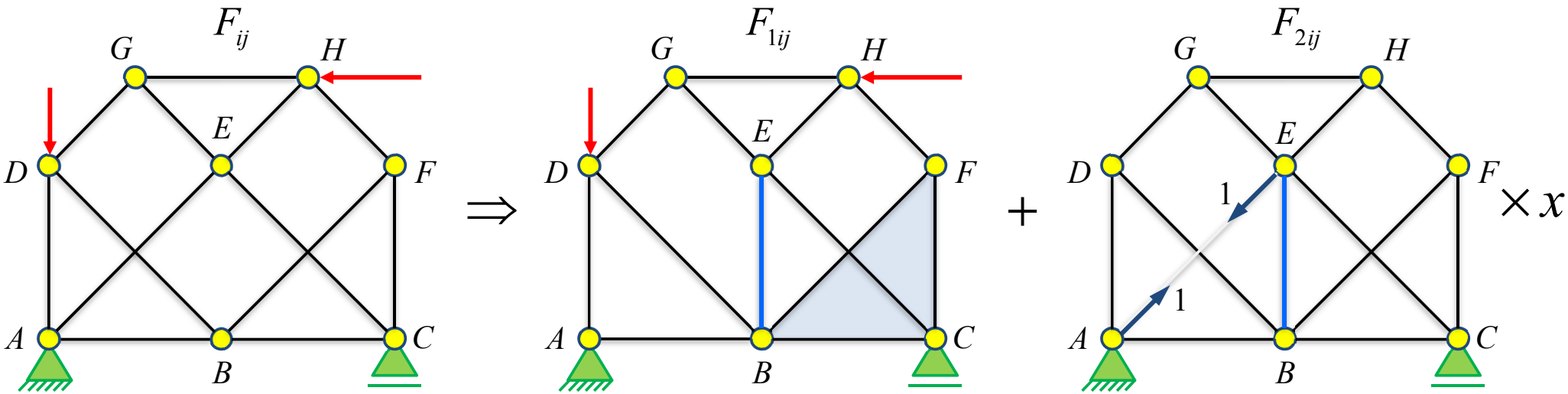
با جابجا شدن یک عضو، یک مثلث پایه در خرپا می‌توان پیدا کرد. پس خرپای مبهم تبدیل به یک خرپای ساده شد.

F_{ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای اولیه (مبهم)

$$\frac{m-3}{2}=\frac{13-3}{2}=5\in N$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:



با استفاده از اصل برهم نهی خواهیم داشت:

$$F_{ij} = F_{1ij} + x \cdot F_{2ij} \quad (1)$$

از آنجایی که عضو BE در سازه اصلی وجود ندارد بنابراین باید نیروی آن صفر باشد. با نوشتن معادله (1) برای عضو BE نتیجه می‌شود:

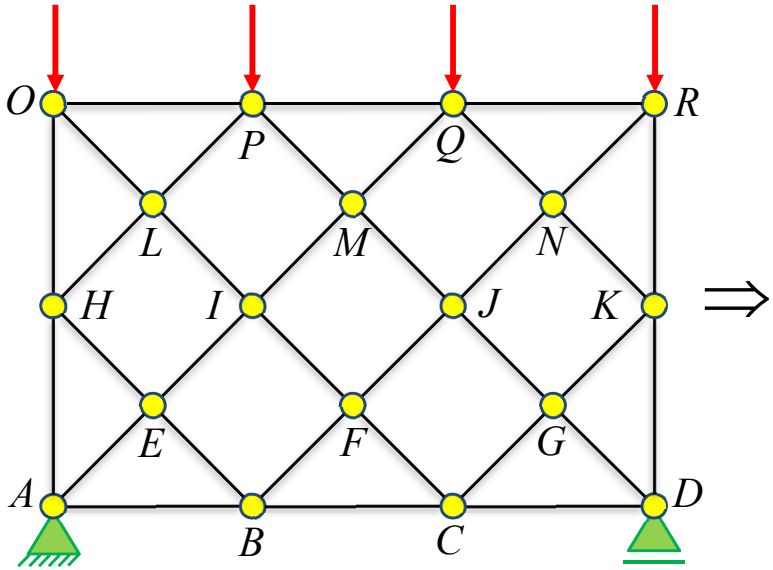
$$F_{BE} = F_{1BE} + x \cdot F_{2BE} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{F_{1BE}}{F_{2BE}} \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (2) در (1) نیروی کلیه اعضای خرپای مبهم تعیین می‌گردد:

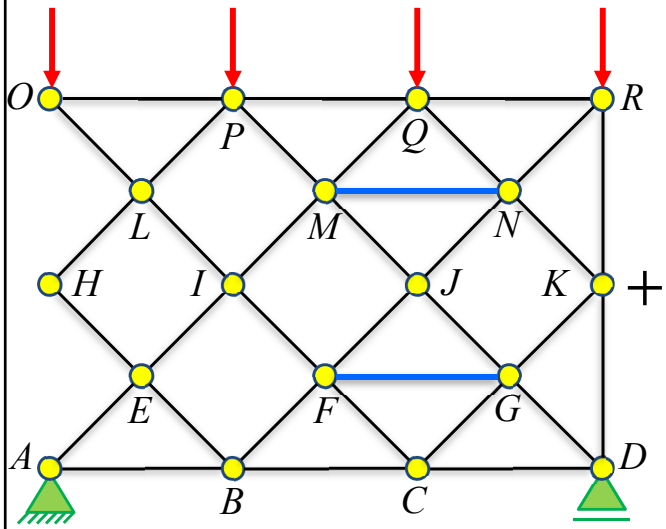
$$(2) \rightarrow (1) \qquad F_{ij} = F_{1ij} - \left(\frac{F_{1BE}}{F_{2BE}}\right) F_{2ij} \quad (3)$$

خرپا (Truss)

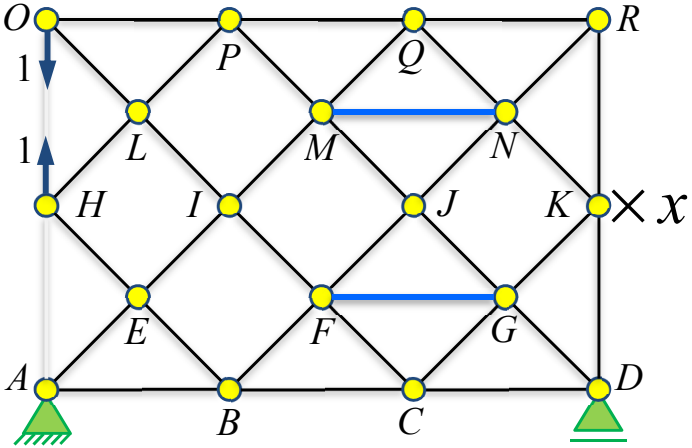
روش هنبرگ:



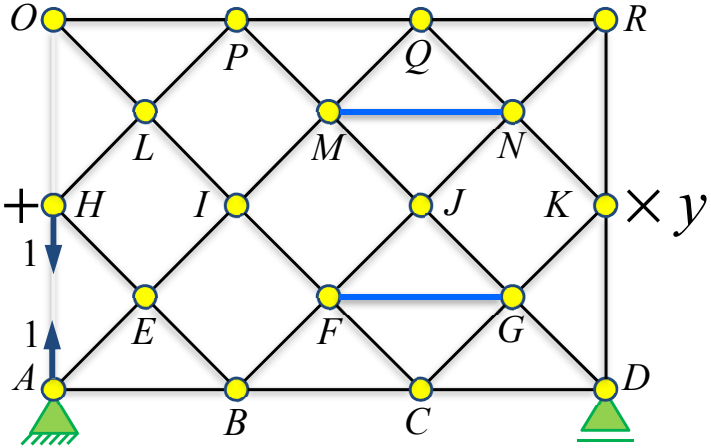
F_{ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای اولیه (مبهم)



F_{1ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای تغییریافته ناشی از بارگذاری خارجی



F_{2ij}: نیروهای داخلی در اعضای خرپای تغییریافته ناشی از نیروی داخلی عضو جابجا شده OH.

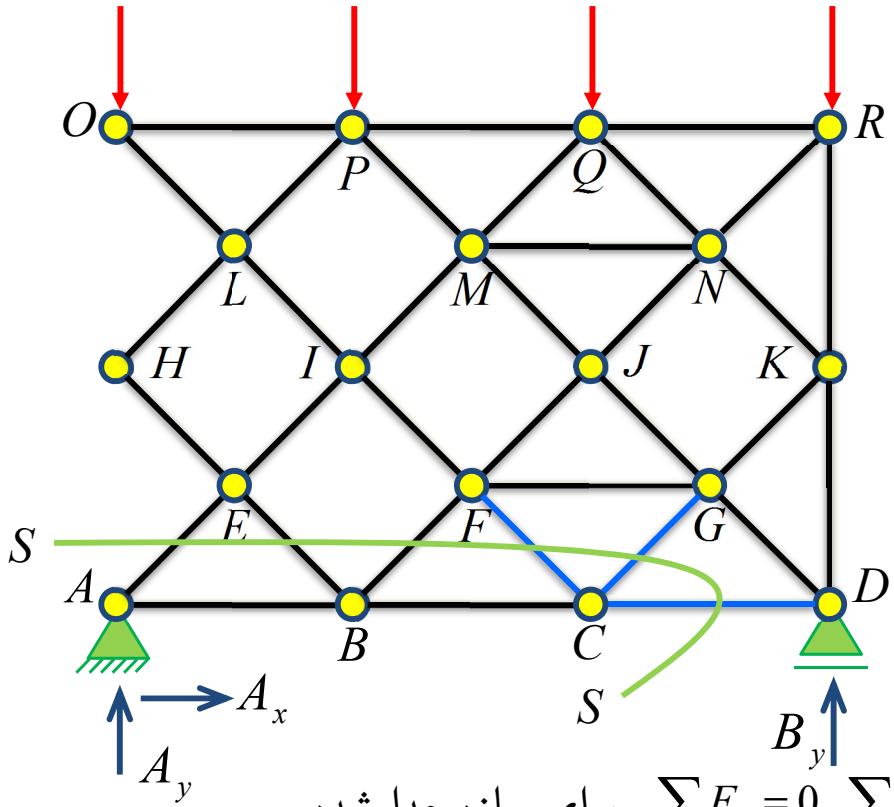


F_{3ij}: نیروهای داخلی در اعضای خرپای تغییریافته ناشی از نیروی داخلی عضو جابجا شده AH.

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

با نوشتن سه معادله تعادل $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$ برای کل خرپا.



با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره O.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره H.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره A.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره L.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره E.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره P.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره I.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره B.

با ایجاد مقطع S-S و نوشتن سه معادله تعادل $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$ برای سازه جدا شده.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره D.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره K.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره F.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره M.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره G.

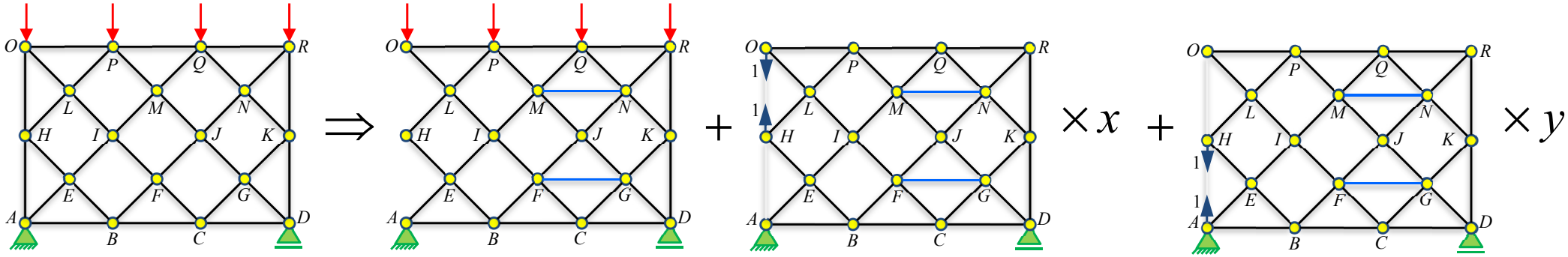
با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره N.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره J.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره R.

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:



F_{ij} F_{1ij} F_{2ij} F_{3ij}

با استفاده از اصل برهم نهی خواهیم داشت:

$$F_{ij} = F_{1ij} + x \cdot F_{2ij} + y \cdot F_{3ij} \quad (4)$$

از آنجایی که عضوهای MNو FG در سازه اصلی وجود ندارند بنابراین باید نیروی آن‌ها صفر باشد. با نوشتن معادله (4) برای این دو عضو نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} F_{MN} &= F_{1MN} + x \cdot F_{2MN} + y \cdot F_{3MN} = 0 \\ F_{FG} &= F_{1FG} + x \cdot F_{2FG} + y \cdot F_{3FG} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

با نوشتن رابطه (5) به صورت ماتریسی خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} F_{2MN} & F_{3MN} \\ F_{2FG} & F_{3FG} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{1MN} \\ -F_{1FG} \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

با حل رابطه (6) مجهولات x و y به دست می‌آید:

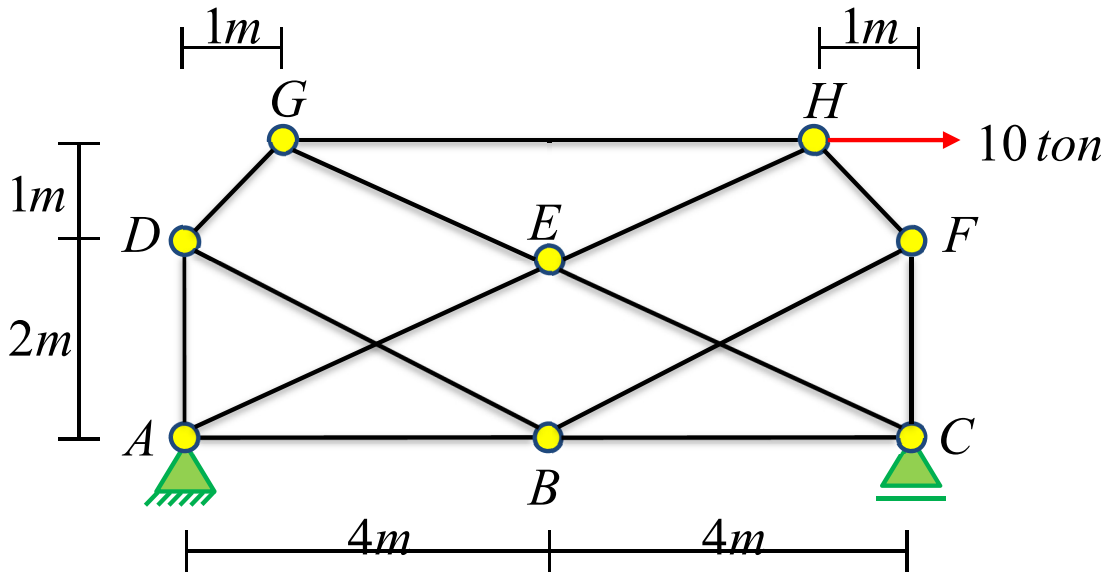
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2MN} & F_{3MN} \\ F_{2FG} & F_{3FG} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -F_{1MN} \\ -F_{1FG} \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

با مشخص شدن مجهولات و جایگذاری آن‌ها در رابطه (4) نیروی کلیه اعضای خرپای مبهم تعیین می‌گردد.

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

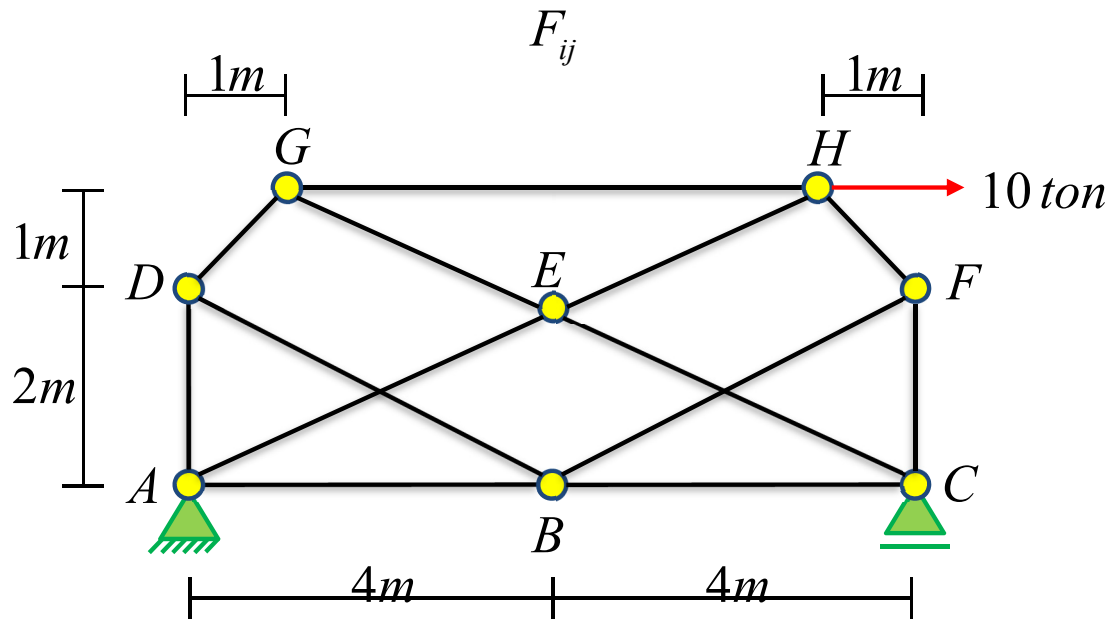
مثال 2- خرپای نشان داده شده را آنالیز نمایید.

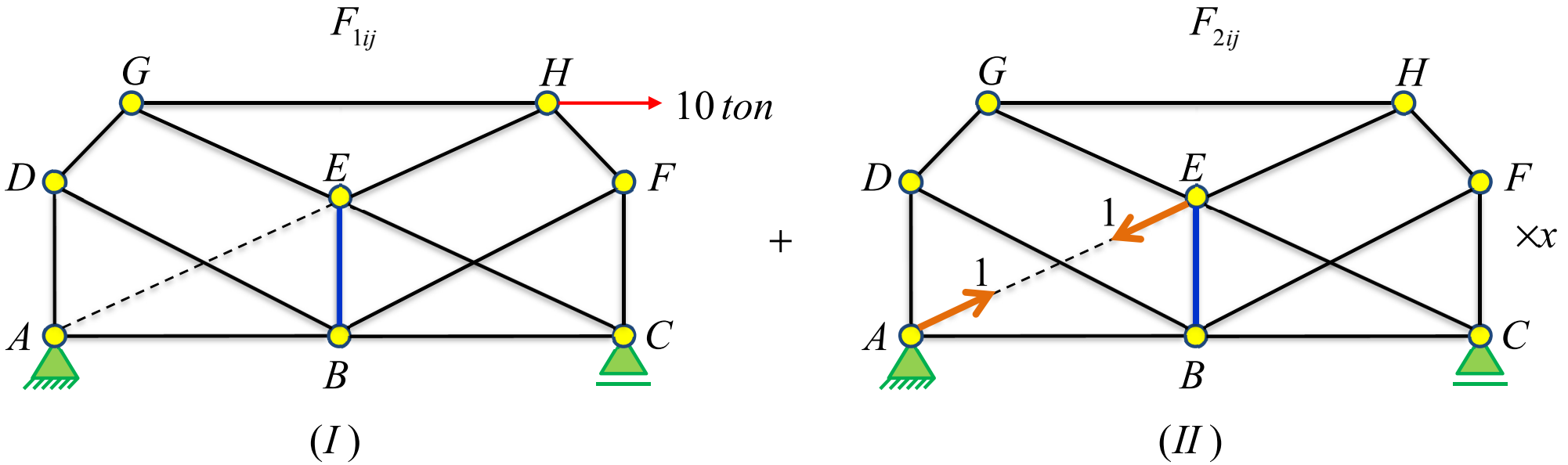


خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2-

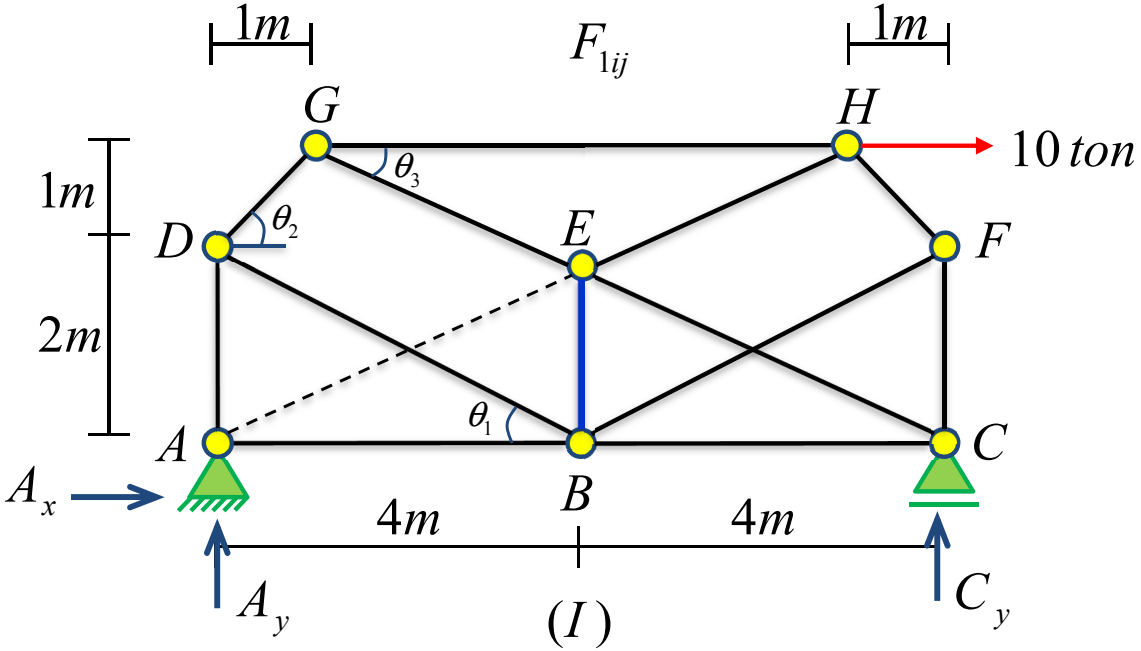




خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow A_x+10=0 \Rightarrow \boxed{A_x=-10\,ton}$$

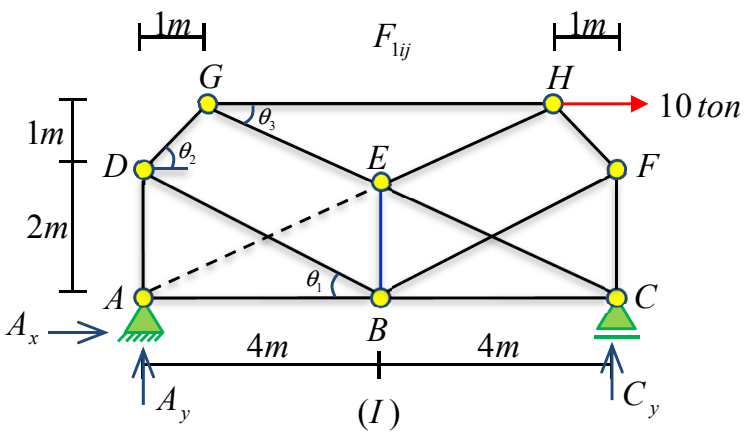
$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow C_y\times 8-10\times 3=0 \Rightarrow \boxed{C_y=3.75\,ton}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+3.75=0 \Rightarrow \boxed{A_y=-3.75\,ton}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (I)

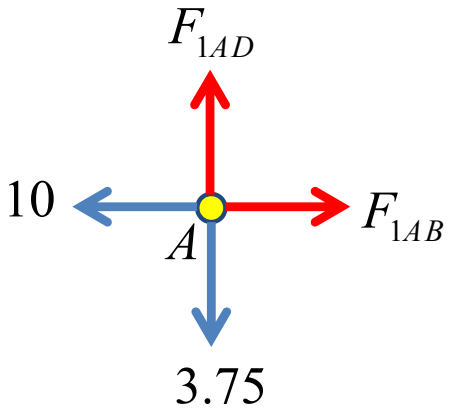


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

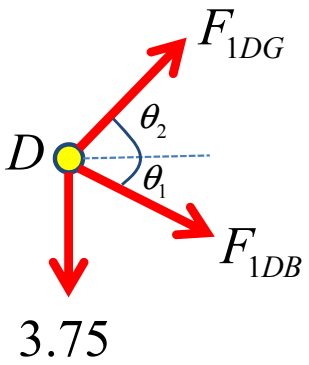
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow -10+F_{1AB}=0 \Rightarrow \boxed{F_{1AB}=10\,ton}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow -3.75+F_{1AD}=0 \Rightarrow \boxed{F_{1AD}=3.75\,ton}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{1DB}\frac{4}{\sqrt{20}}+F_{1DG}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

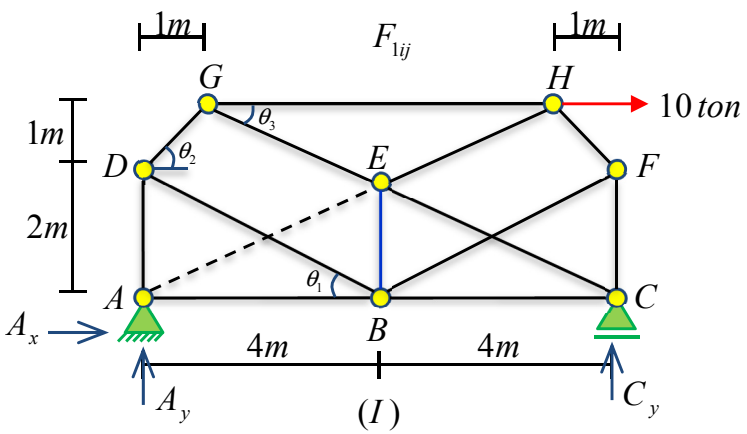
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -3.75-F_{1DB}\frac{2}{\sqrt{20}}+F_{1DG}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}F_{1DB}=-2.795\,ton\\ F_{1DG}=3.536\,ton\end{cases}}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (I)

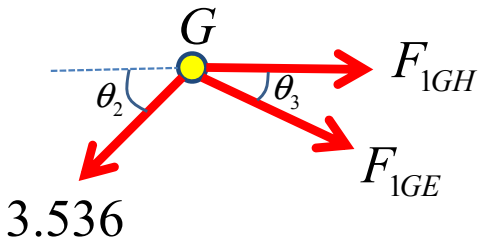


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:

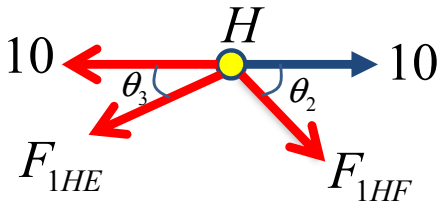


$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{1GH}+F_{1GE}\frac{3}{\sqrt{10}}-3.536\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow -3.536\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{1GE}\frac{1}{\sqrt{10}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1GE}=-7.906\,ton \\ F_{1GH}=10\,ton \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow -10+10-F_{1HE}\frac{3}{\sqrt{10}}+F_{1HF}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

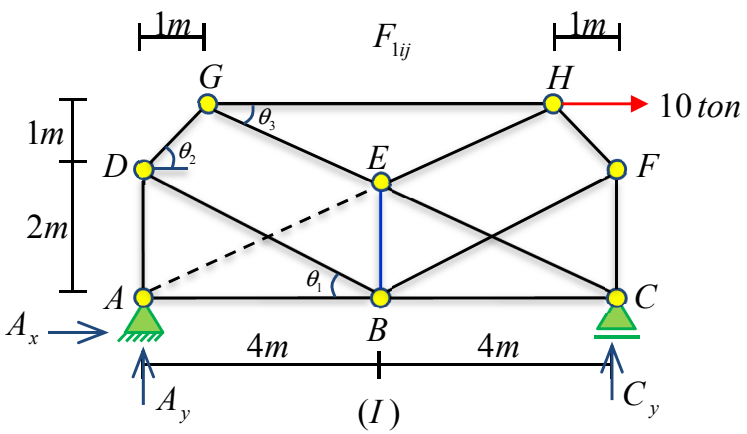
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -F_{1HE}\frac{1}{\sqrt{10}}-F_{1HF}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1HE}=0 \\ F_{1HF}=0 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (I)

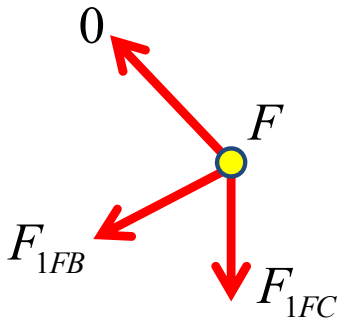


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

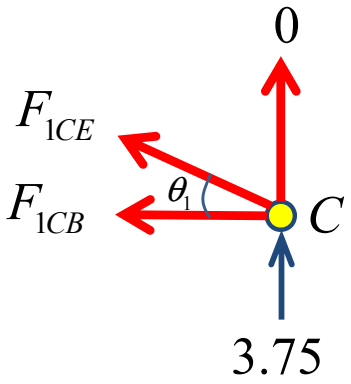
$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:



اعضای صفر نیرویی $\Rightarrow$ $\begin{cases} F_{1FB}=0 \\ F_{1FC}=0 \end{cases}$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{1CB}-F_{1CE}\frac{4}{\sqrt{20}}=0$$

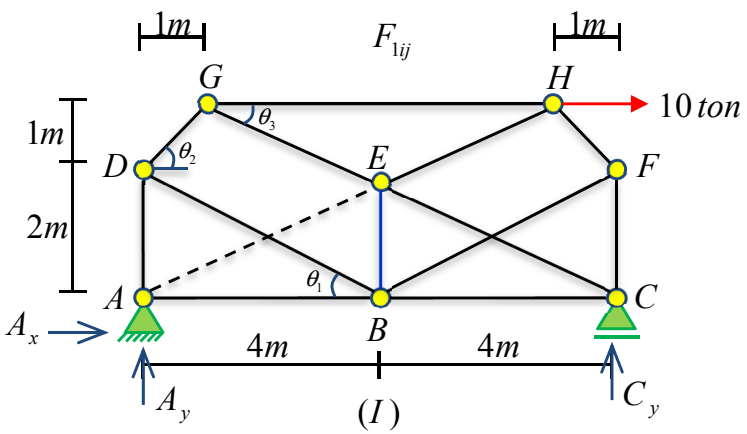
$$\sum F_y=0 \Rightarrow 3.75+F_{1CE}\frac{2}{\sqrt{20}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1CE}=-8.385\,ton \\ F_{1CB}=7.5\,ton \end{cases}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (I)

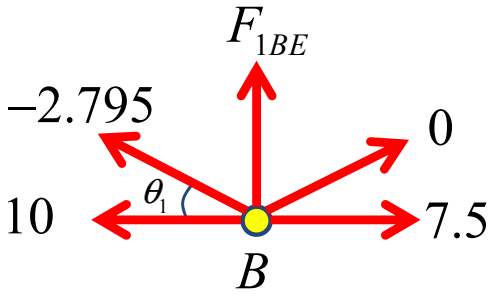


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

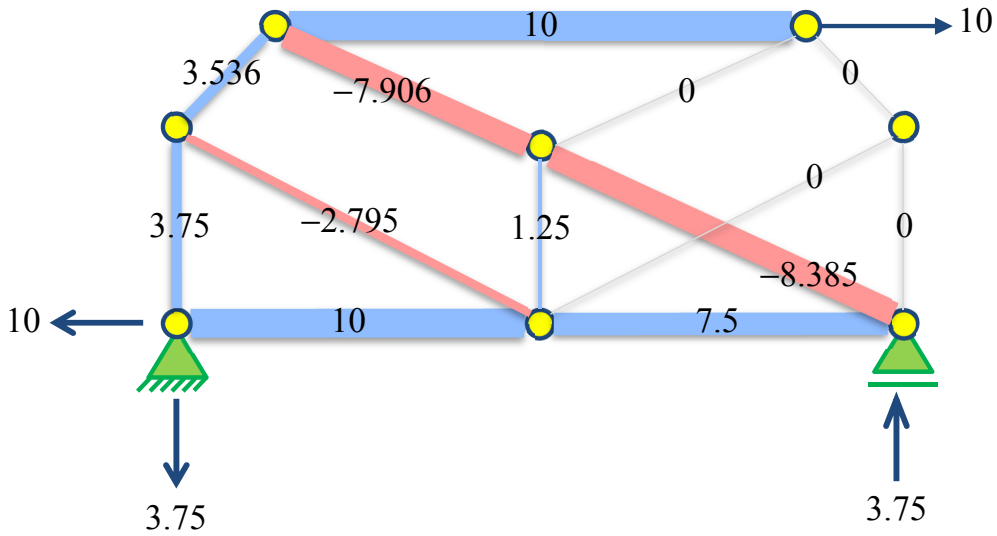
$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



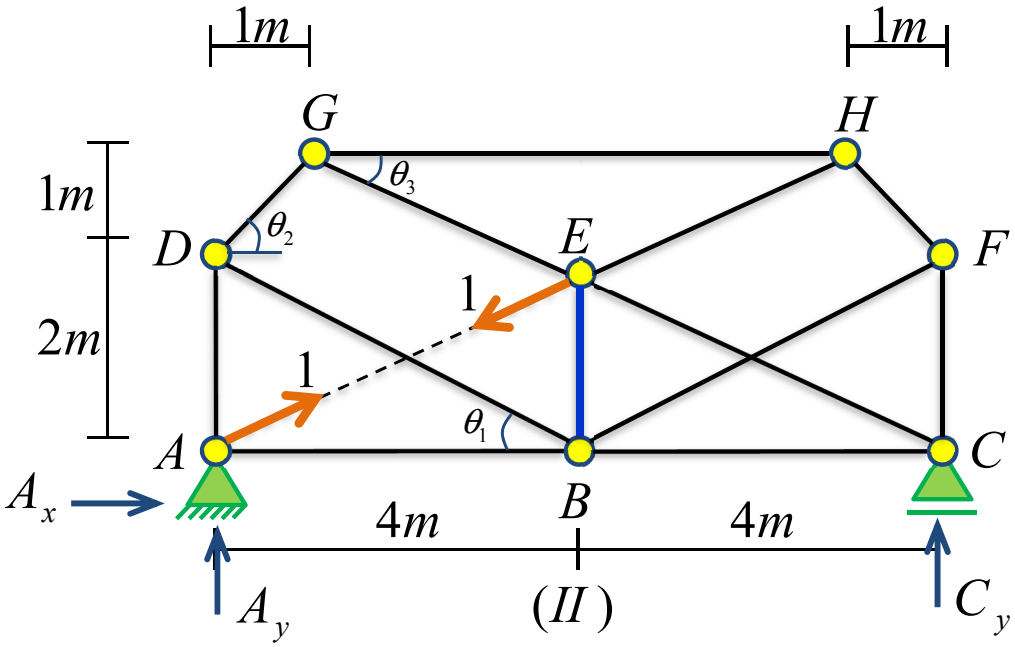
$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; F_{1BE}+(-2.795)\frac{2}{\sqrt{20}}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{F_{1BE}=1.25\,ton}$$



خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}} \quad , \quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow A_x+1\cos(\theta_1)-1\cos(\theta_1)=0 \Rightarrow \boxed{A_x=0}$$

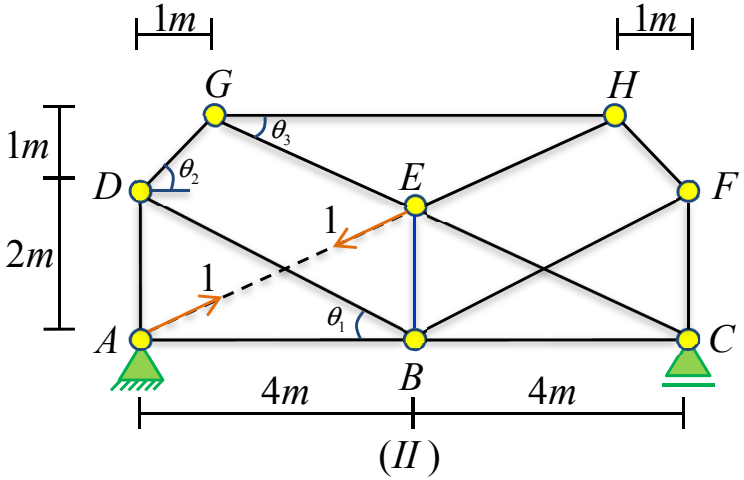
$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow C_y\times 8=0 \Rightarrow \boxed{C_y=0}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+1\sin(\theta_1)-1\sin(\theta_1)=0 \Rightarrow \boxed{A_y=0}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (II)

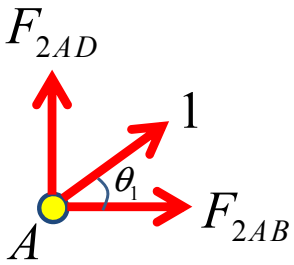


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

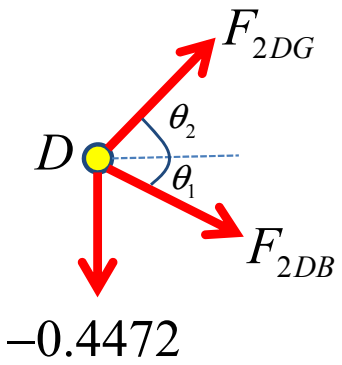
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{2AB}+1\times\frac{4}{\sqrt{20}}=0 \Rightarrow \boxed{F_{2AB}=-0.8944\,ton}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{2AD}+1\times\frac{2}{\sqrt{20}}=0 \Rightarrow \boxed{F_{2AD}=-0.4472\,ton}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{2DB}\frac{4}{\sqrt{20}}+F_{2DG}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

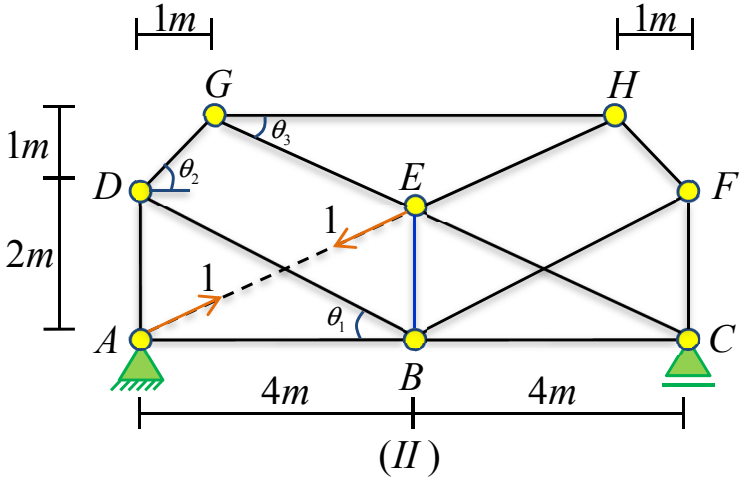
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -0.4472-F_{2DB}\frac{2}{\sqrt{20}}+F_{2DG}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}F_{2DB}=0.3333\,ton\\ F_{2DG}=-0.4216\,ton\end{cases}}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (II)

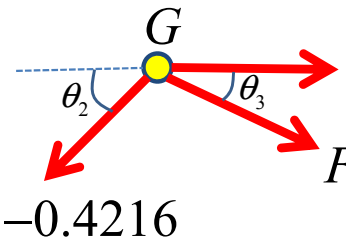


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:

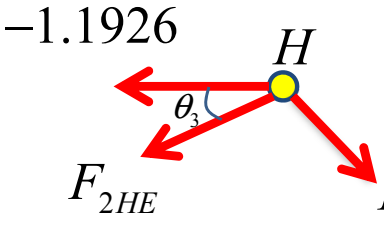


$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{2GH}+F_{2GE}\frac{3}{\sqrt{10}}-(-0.4216)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow -(-0.4216)\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{2GE}\frac{1}{\sqrt{10}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2GE}=0.9428 \\ F_{2GH}=-1.1926 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow -(-1.1926)-F_{2HE}\frac{3}{\sqrt{10}}+F_{2HF}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

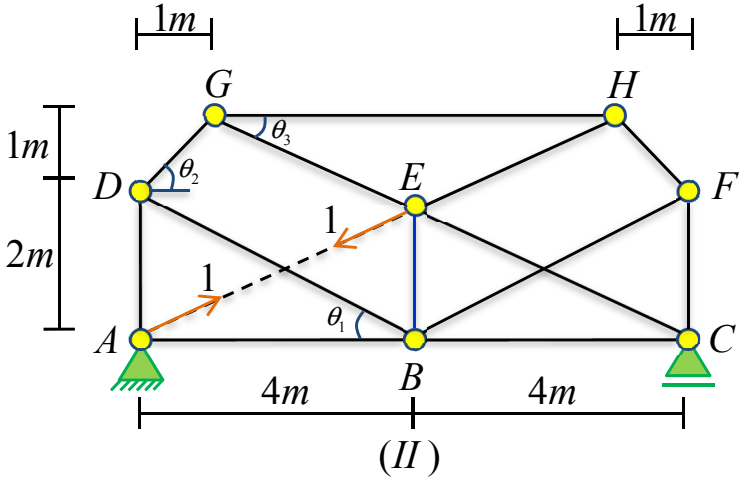
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -F_{2HE}\frac{1}{\sqrt{10}}-F_{2HF}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2HE}=0.9428 \\ F_{2HF}=-0.4216 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (II)

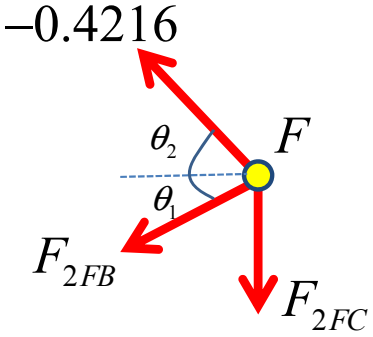


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:

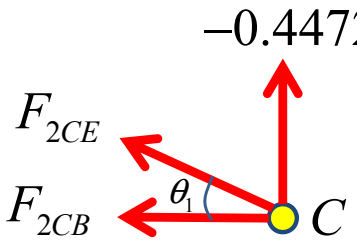


$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{2FB}\frac{4}{\sqrt{20}}-(-0.4216)\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow -F_{2FC}-F_{2FB}\frac{2}{\sqrt{20}}+(-0.4216)\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2FB}=0.3333 \\ F_{2FC}=-0.4472 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{2CB}-F_{2CE}\frac{4}{\sqrt{20}}=0$$

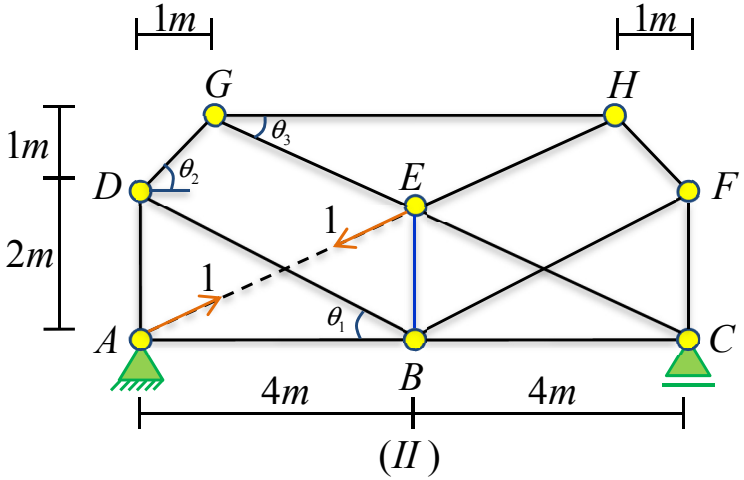
$$\sum F_y=0 \Rightarrow (-0.4472)+F_{2CE}\frac{2}{\sqrt{20}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2CE}=1 \\ F_{2CB}=-0.8944 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2- آنالیز سازه شماره (II)

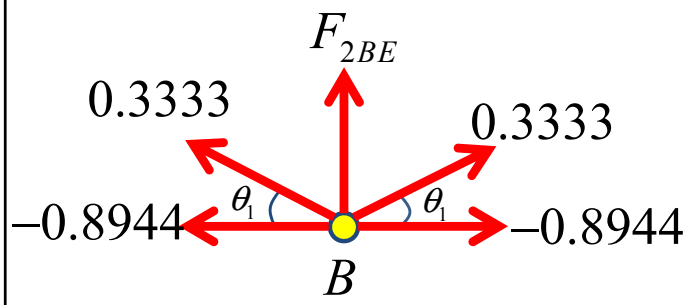


$$\sin(\theta_1)=\frac{2}{\sqrt{20}}\quad,\quad \cos(\theta_1)=\frac{4}{\sqrt{20}}$$

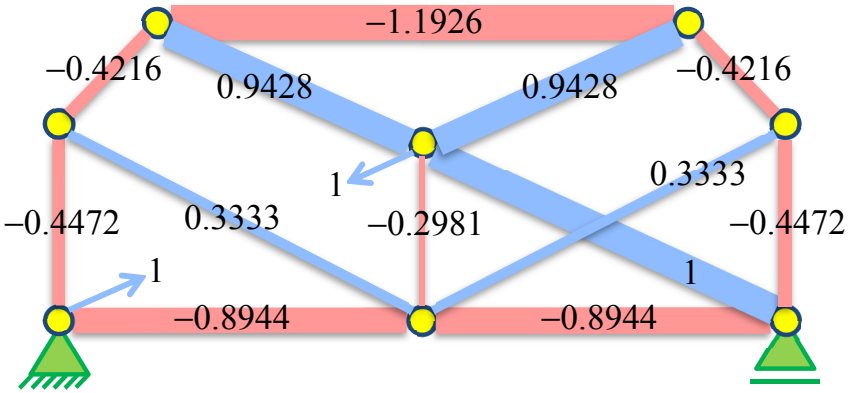
$$\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3)=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad,\quad \cos(\theta_3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; F_{2BE}+2(0.3333)\frac{2}{\sqrt{20}}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{F_{2BE}=-0.2981}$$



خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

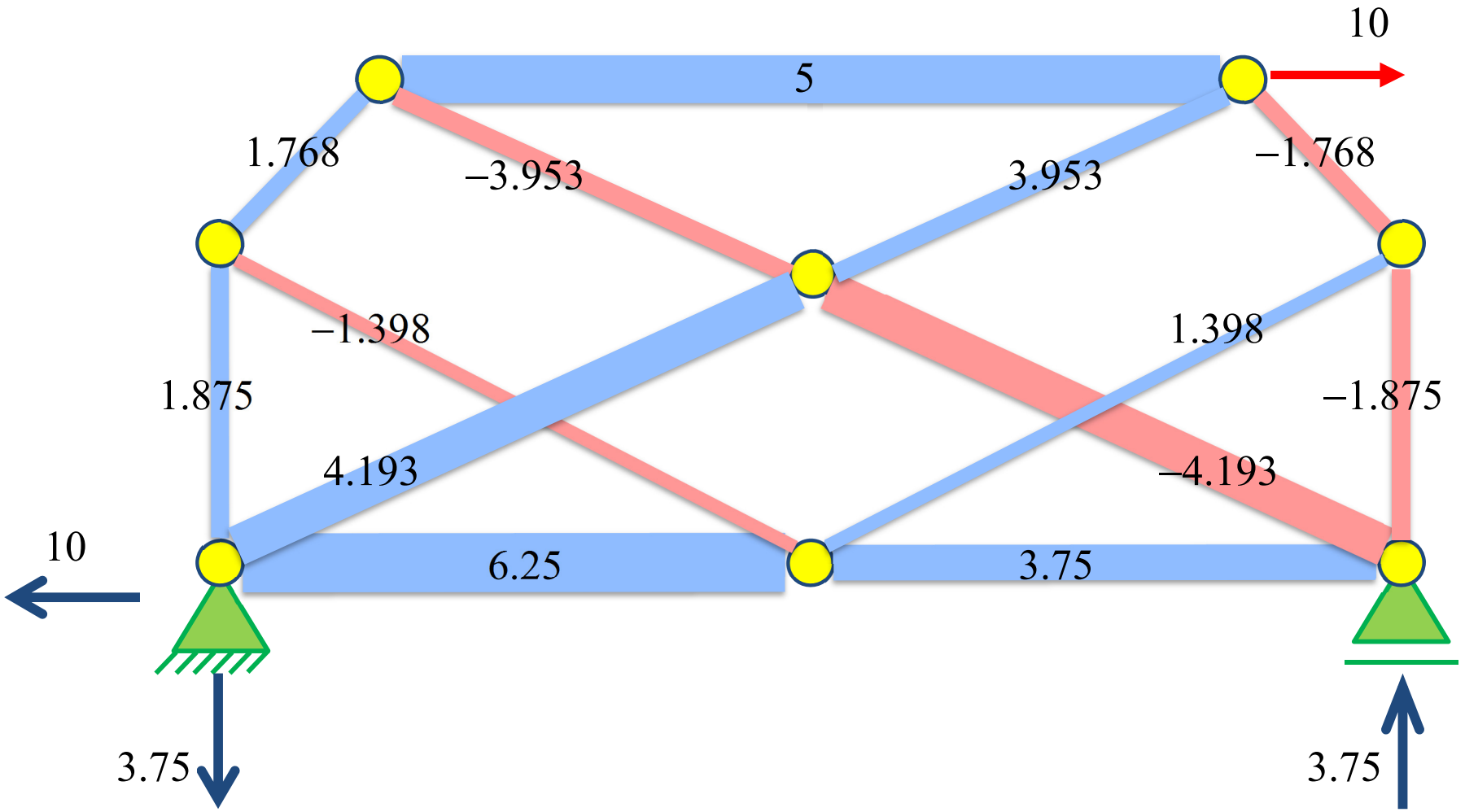
حل مثال 2-

Member	$F_{1ij}\ (ton)$	$F_{2ij}\ (ton)$	$F_{ij}\ (ton) = F_{1ij} + 4.193F_{2ij}$
AB	10	-0.8944	6.250
AD	3.75	-0.4472	1.875
DB	-2.795	0.3333	-1.398
DG	3.536	-0.4216	1.768
GE	-7.906	0.9428	-3.953
GH	10	-1.1926	5
HE	0	0.9428	3.953
HF	0	-0.4216	-1.768
FB	0	0.3333	1.398
FC	0	-0.4472	-1.875
CE	-8.385	1	-4.193
CB	7.5	-0.8944	3.750

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

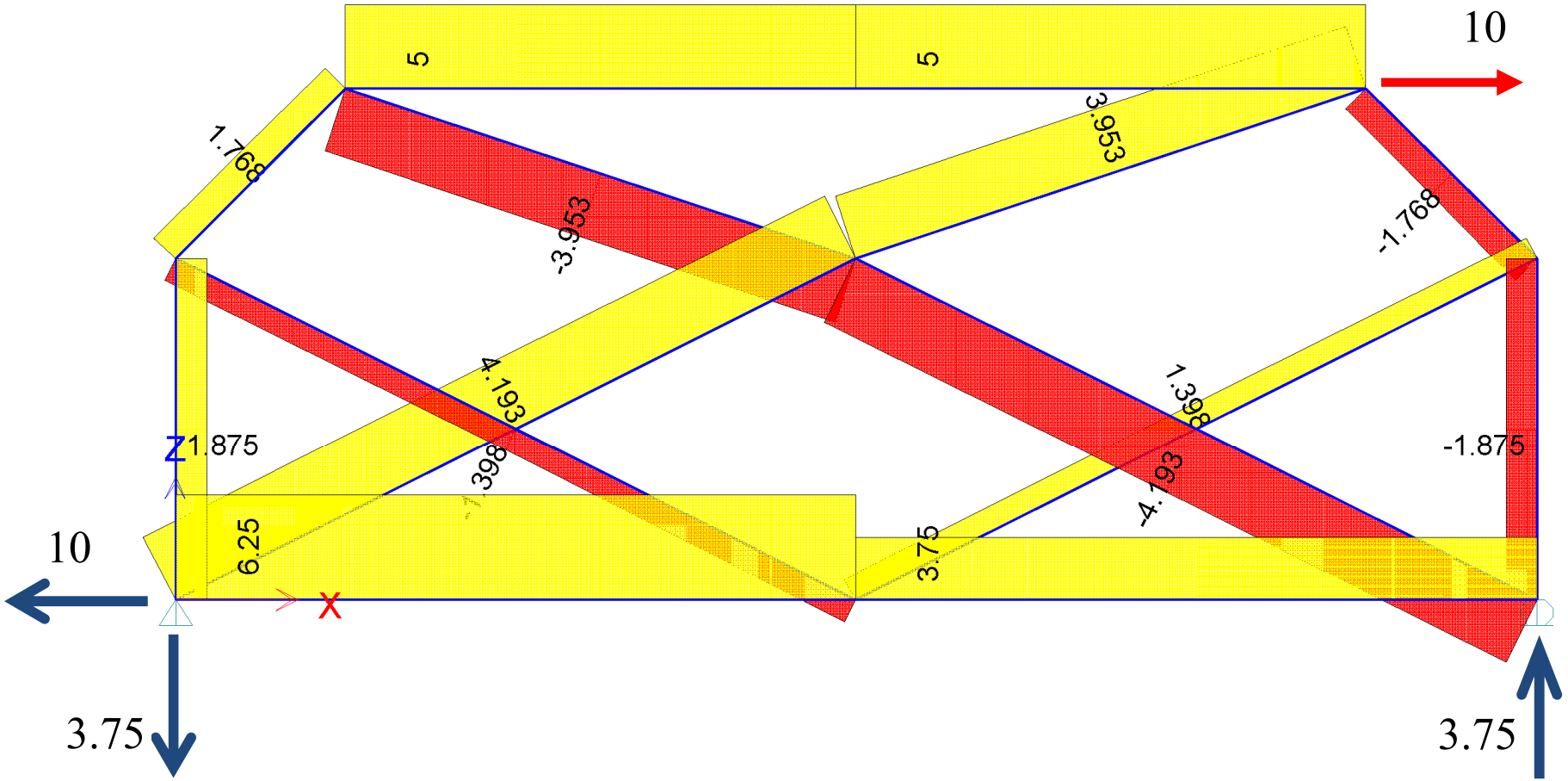
حل مثال 2-



خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 2-

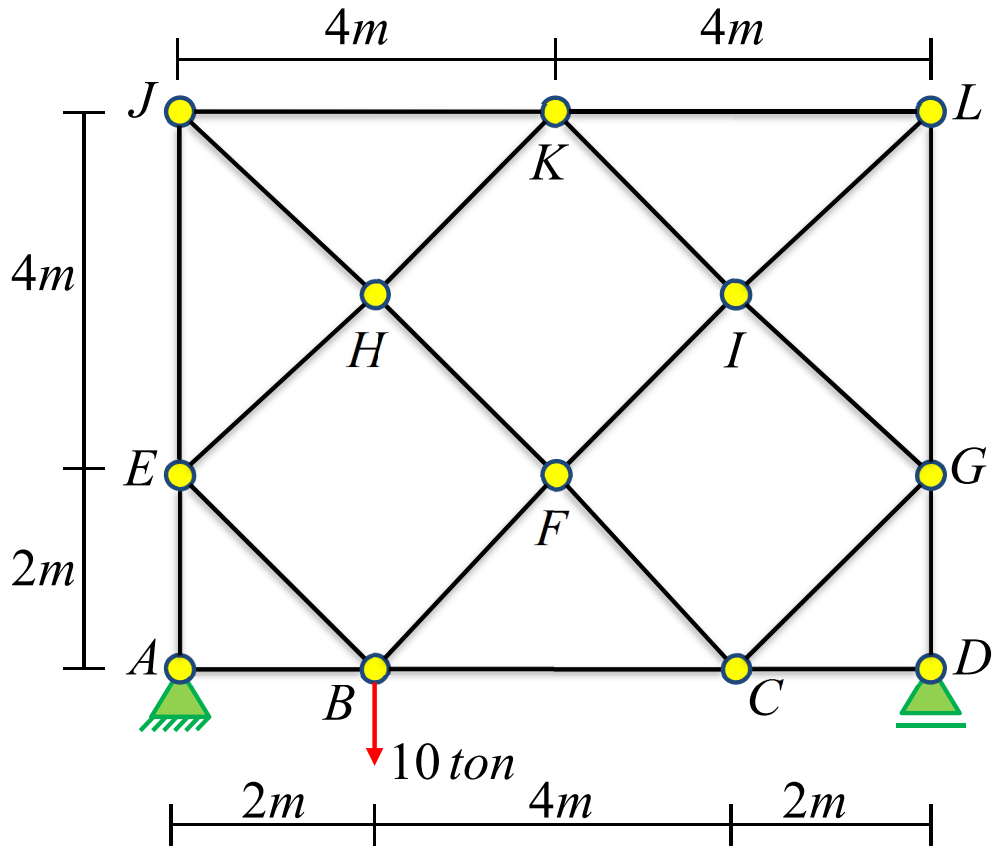


ETABS File Name: **02-Example-02.EDB**

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

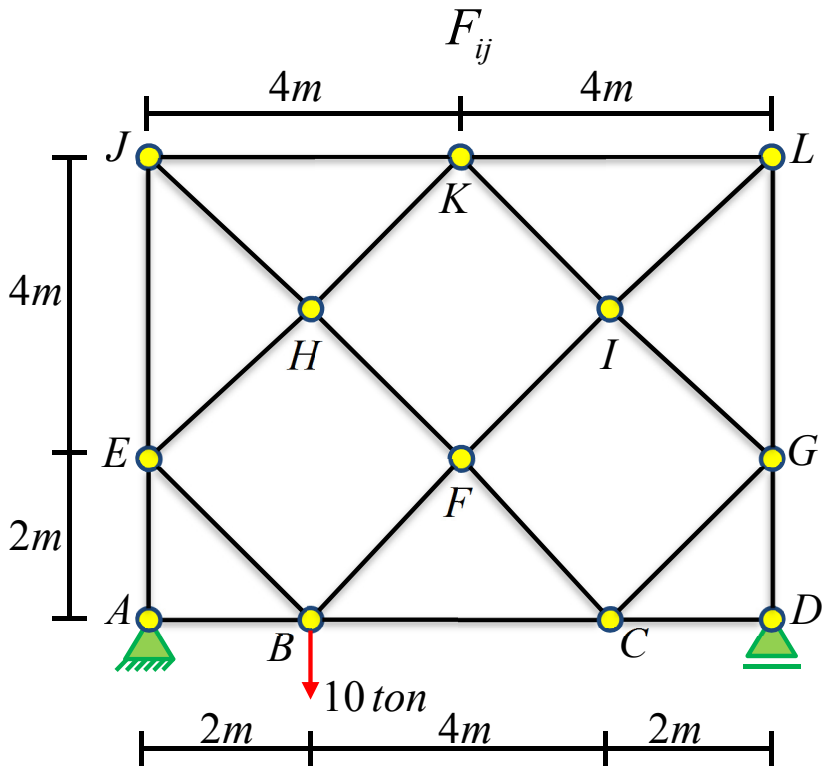
مثال 3- خرپای نشان داده شده را آنالیز نمایید.

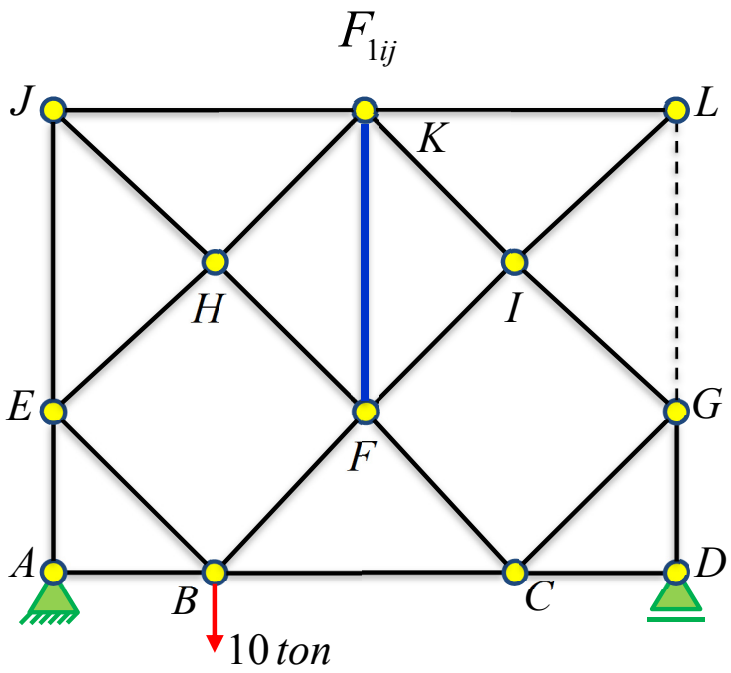


خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

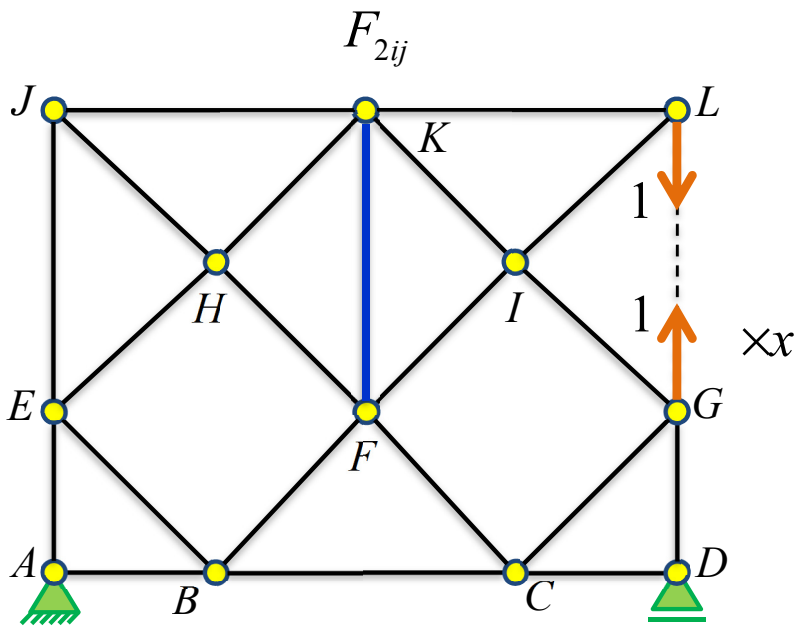
حل مثال 3-





(I)

+

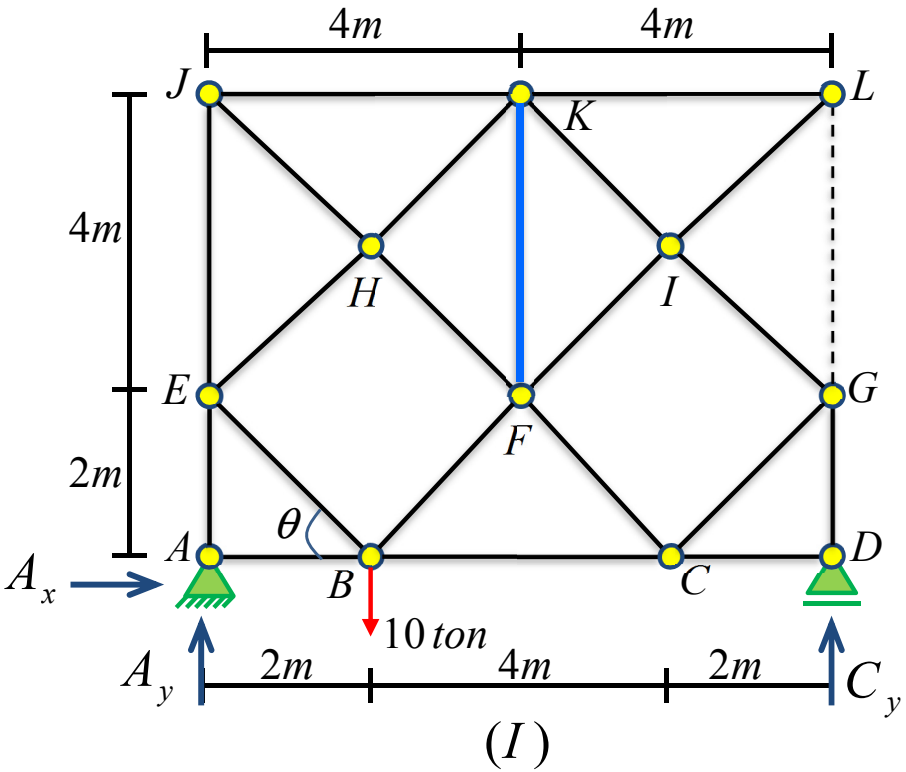


(II)

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (I)



(I)

$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{A_x=0}$$

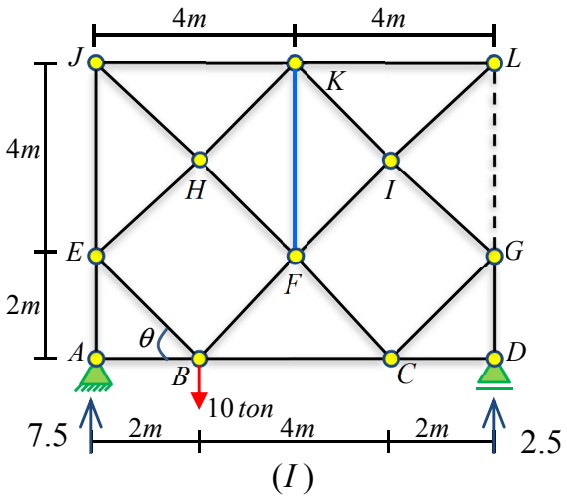
$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow C_y\times 8-10\times 2=0 \Rightarrow \boxed{C_y=2.5\,ton}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+2.5-10=0 \Rightarrow \boxed{A_y=7.5\,ton}$$

خرپا (Truss)

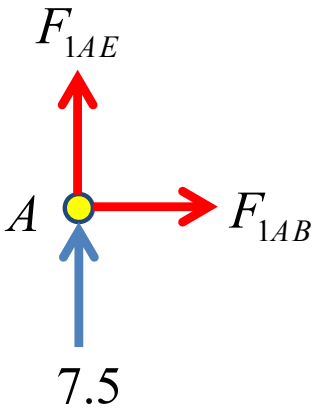
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

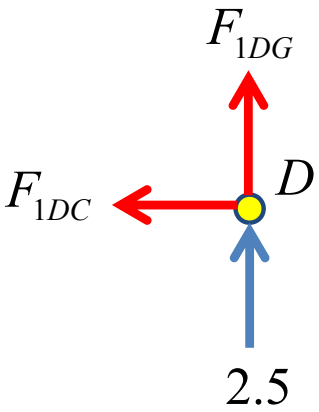
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{F_{1AB}=0}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow 7.5+F_{1AE}=0 \Rightarrow \boxed{F_{1AE}=-7.5\,ton}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



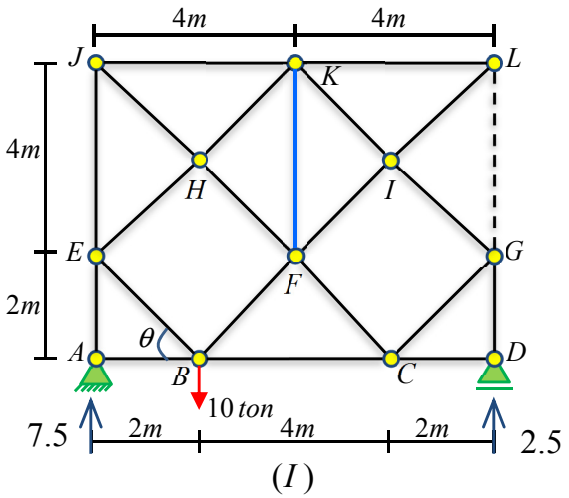
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{F_{1DC}=0}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow 2.5+F_{1DG}=0 \Rightarrow \boxed{F_{1DG}=-2.5}$$

خرپا (Truss)

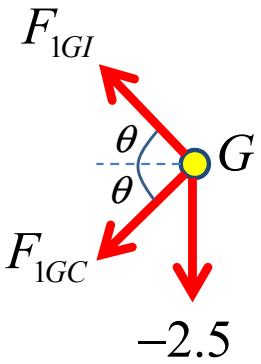
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:

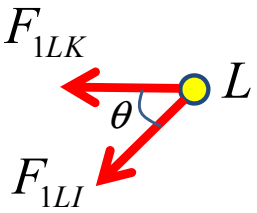


$$\sum F_x=0 \quad\Rightarrow\quad -F_{1GC}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{1GI}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \quad\Rightarrow\quad F_{1GI}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{1GC}\frac{1}{\sqrt{2}}-(-2.5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1GI}=-1.7678 \\ F_{1GC}=1.7678 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره L خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0$$
$$\sum F_y=0$$

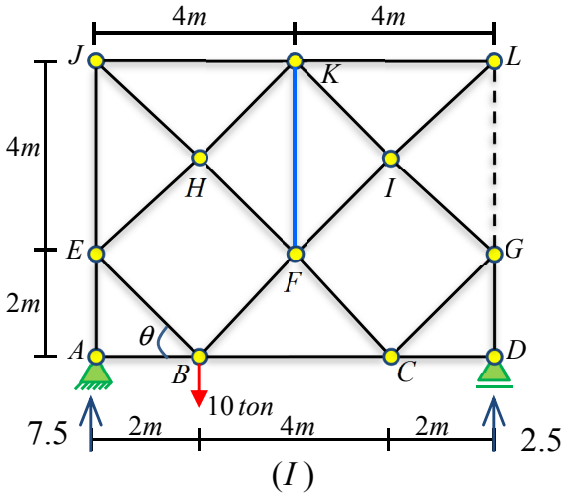
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1LK}=0 \\ F_{1LI}=0 \end{cases}$$

(اعضای صفر نیرویی)

خرپا (Truss)

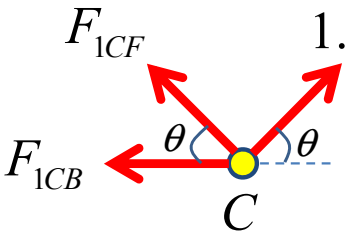
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:

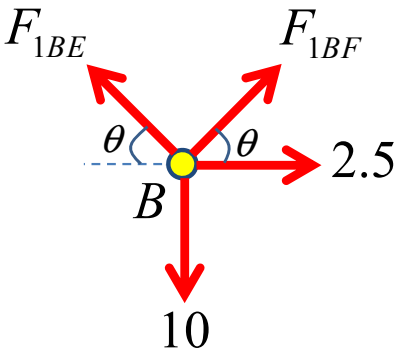


$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{1CB}-F_{1CF}\frac{1}{\sqrt{2}}+1.7678\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{1CF}\frac{1}{\sqrt{2}}+1.7678\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1CF}=-1.7678 \\ F_{1CB}=2.5 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow 2.5+F_{1BF}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{1BE}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

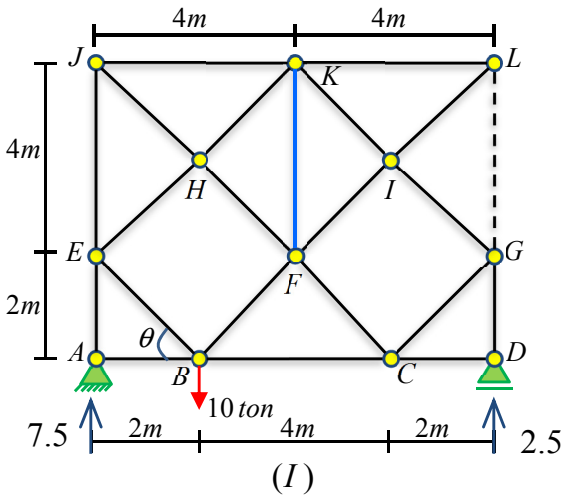
$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{1BE}\frac{1}{\sqrt{2}}+F_{1BF}\frac{1}{\sqrt{2}}-10=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1BF}=5.3033 \\ F_{1BE}=8.8388 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

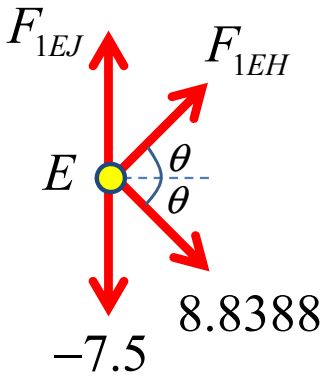
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:

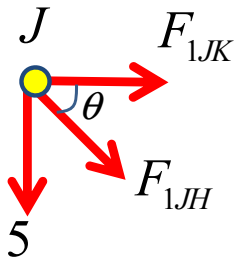


$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{1EH}\frac{1}{\sqrt{2}}+8.8388\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{1EJ}+F_{1EH}\frac{1}{\sqrt{2}}-8.8388\frac{1}{\sqrt{2}}-(-7.5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1EH}=-8.8388 \\ F_{1EJ}=5 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره J خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{1JK}+F_{1JH}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

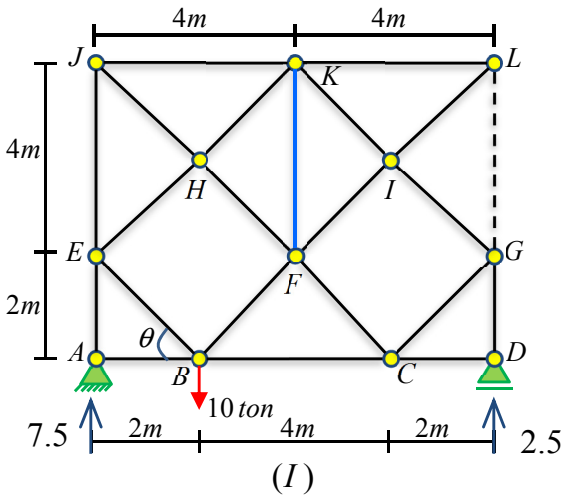
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -F_{1JH}\frac{1}{\sqrt{2}}-5=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1JH}=-7.0711 \\ F_{1JK}=5 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

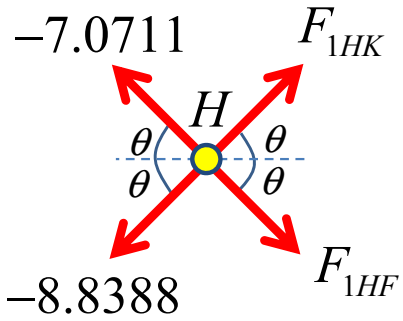
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

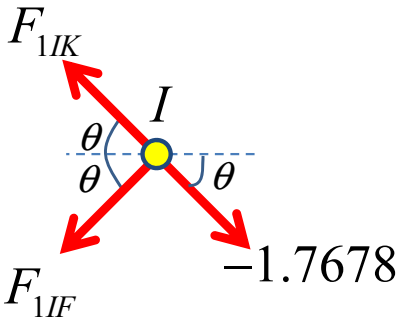
با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0 \Rightarrow \begin{cases} F_{1HK}=-8.8388 \\ F_{1HF}=-7.0711 \end{cases}$$

(گره چهار نیرویی با اعضای هم راستا)

با نوشتن معادلات تعادل در گره I خواهیم داشت:



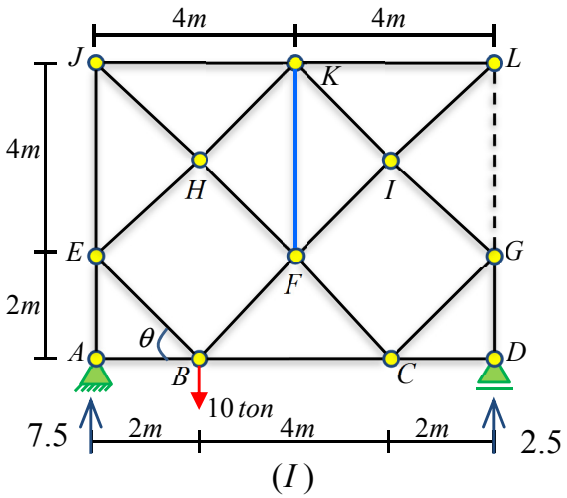
$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0 \Rightarrow \begin{cases} F_{1IF}=0 \\ F_{1IK}=-1.7678 \end{cases}$$

(گره سه نیرویی با اعضای هم راستا)

خرپا (Truss)

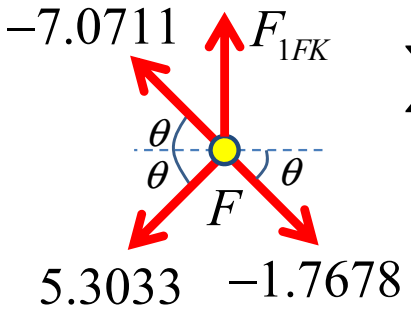
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (I)



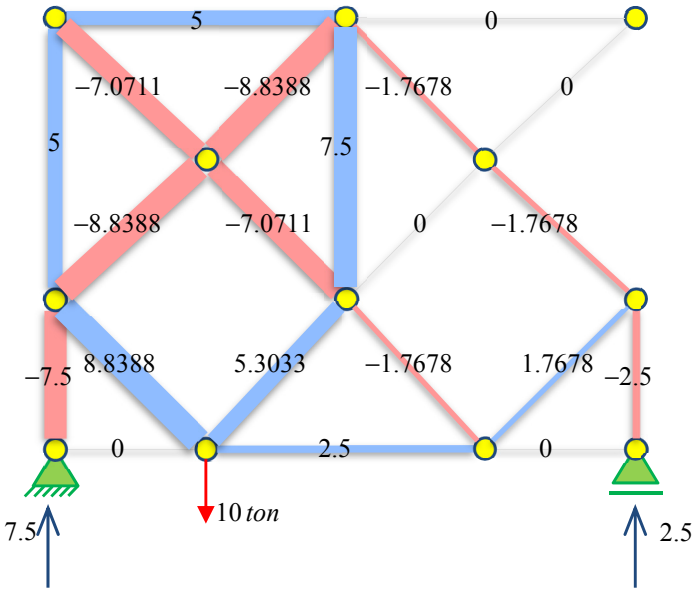
$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:



$$\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad F_{1FK}+(-7.0711)\frac{1}{\sqrt{2}}-(5.3033)\frac{1}{\sqrt{2}}-(-1.7678)\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

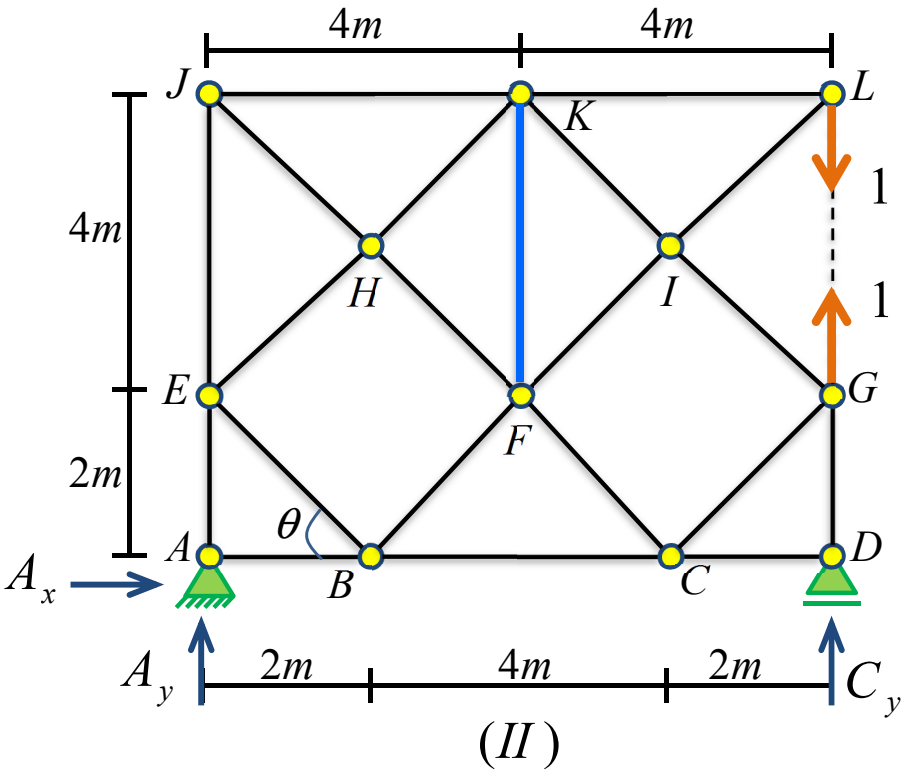
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{1FK}=7.5}$$



خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{A_x=0}$$

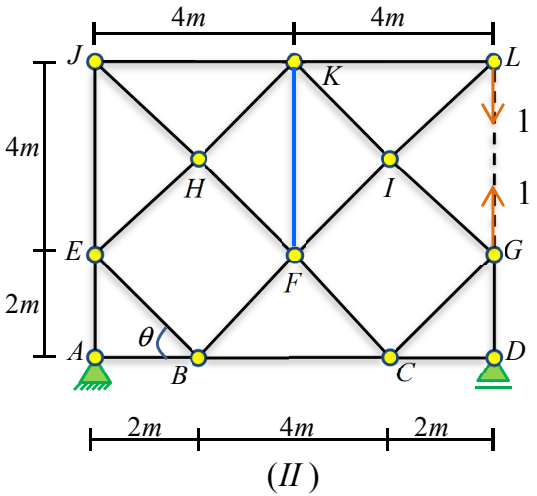
$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow C_y\times 8-1\times 8+1\times 8=0 \Rightarrow \boxed{C_y=0}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+1-1=0 \Rightarrow \boxed{A_y=0}$$

خرپا (Truss)

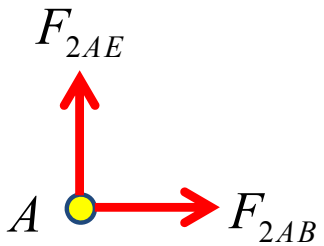
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

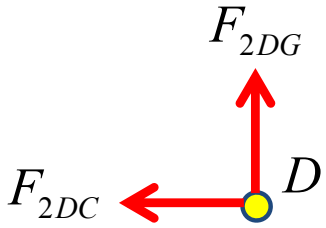
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{F_{2AB}=0}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \boxed{F_{2AE}=0}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



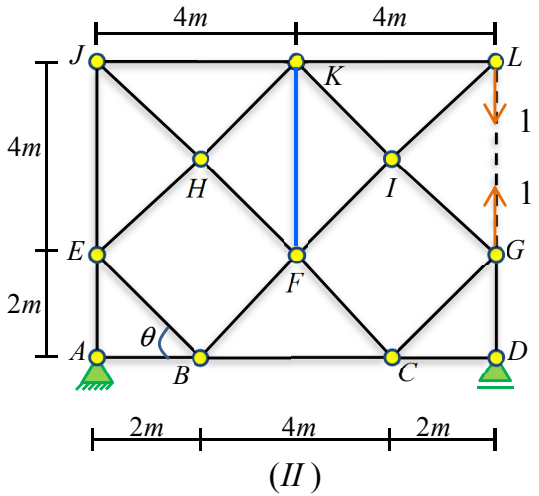
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{F_{2DC}=0}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow \boxed{F_{2DG}=0}$$

خرپا (Truss)

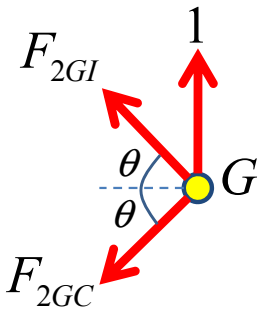
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:

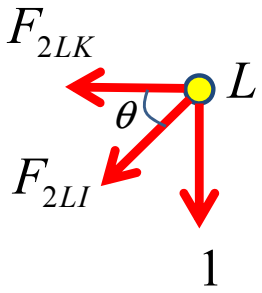


$$\sum F_x=0 \quad\Rightarrow\quad -F_{2GC}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{2GI}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \quad\Rightarrow\quad F_{2GI}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{2GC}\frac{1}{\sqrt{2}}+1=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2GI}=-0.7071 \\ F_{2GC}=0.7071 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره L خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \quad\Rightarrow\quad -F_{2LK}-F_{2LI}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

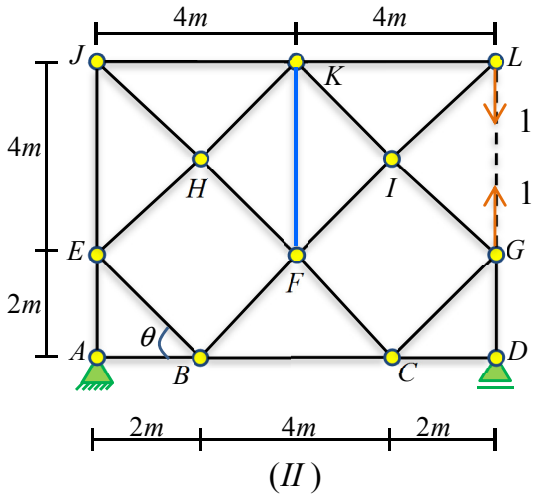
$$\sum F_y=0 \quad\Rightarrow\quad -F_{2LI}\frac{1}{\sqrt{2}}-1=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2LK}=1 \\ F_{2LI}=-1.4142 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

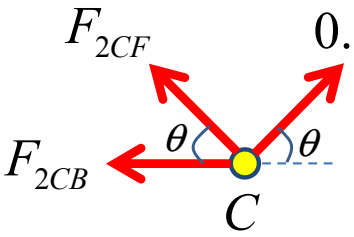
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:

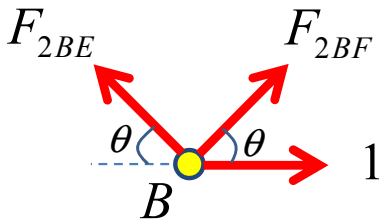


$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{2CB}-F_{2CF}\frac{1}{\sqrt{2}}+0.7071\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{2CF}\frac{1}{\sqrt{2}}+0.7071\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2CF}=-0.7071 \\ F_{2CB}=1 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow 1+F_{2BF}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{2BE}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

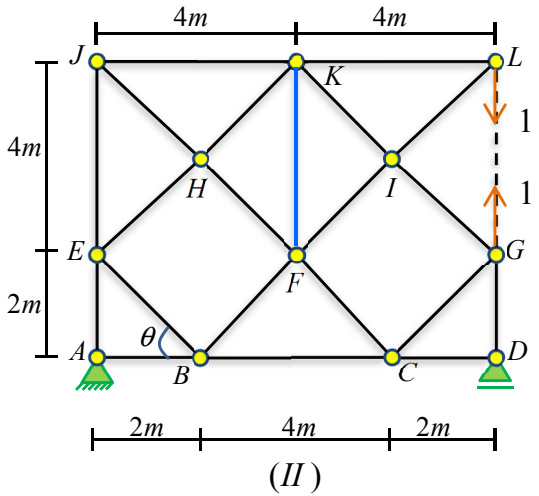
$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{2BE}\frac{1}{\sqrt{2}}+F_{2BF}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2BF}=-0.7071 \\ F_{2BE}=0.7071 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

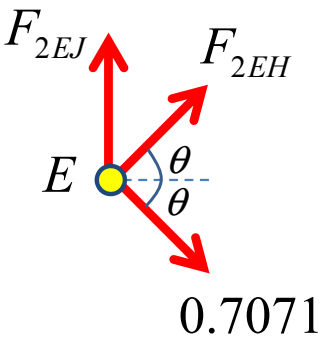
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:

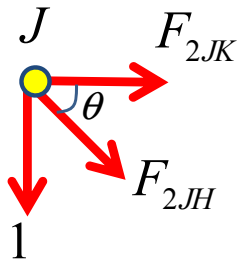


$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{2EH}\frac{1}{\sqrt{2}}+0.7071\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{2EJ}+F_{2EH}\frac{1}{\sqrt{2}}-0.7071\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2EH}=-0.7071 \\ F_{2EJ}=1 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره J خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{2JK}+F_{2JH}\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

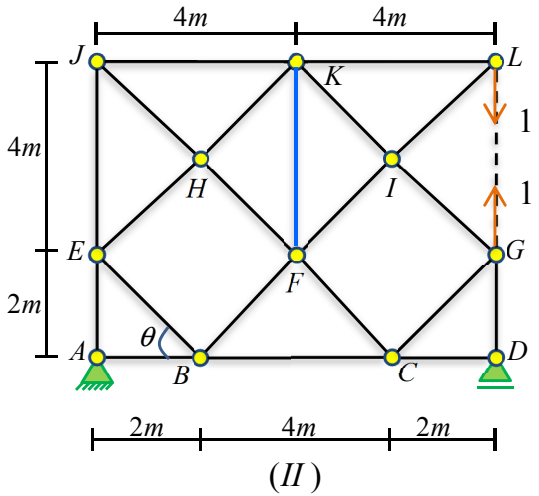
$$\sum F_y=0 \Rightarrow -F_{2JH}\frac{1}{\sqrt{2}}-1=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2JH}=-1.4142 \\ F_{2JK}=1 \end{cases}$$

خرپا (Truss)

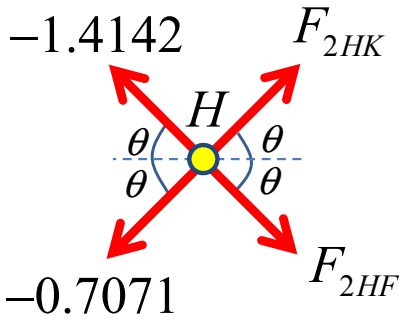
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

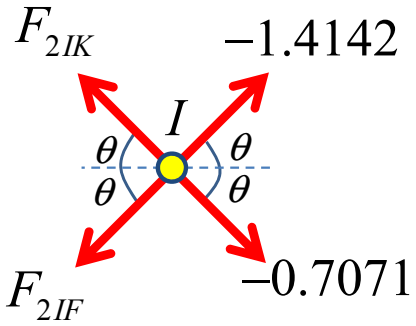
با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0 \Rightarrow \begin{cases} F_{2HK}=-0.7071 \\ F_{2HF}=-1.4142 \end{cases}$$

(گره چهار نیرویی با اعضای هم راستا)

با نوشتن معادلات تعادل در گره I خواهیم داشت:



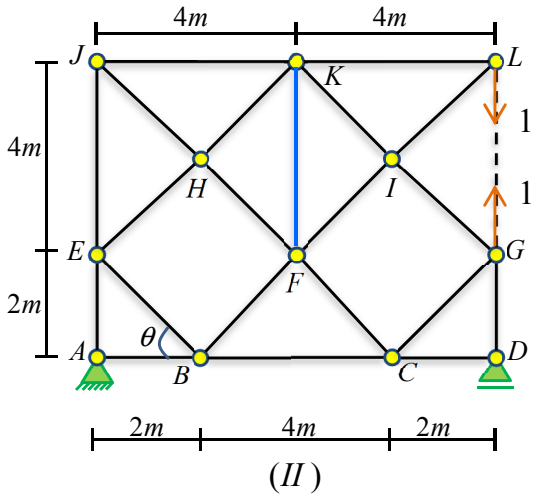
$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0 \Rightarrow \begin{cases} F_{2IF}=-1.4142 \\ F_{2IK}=-0.7071 \end{cases}$$

(گره چهار نیرویی با اعضای هم راستا)

خرپا (Truss)

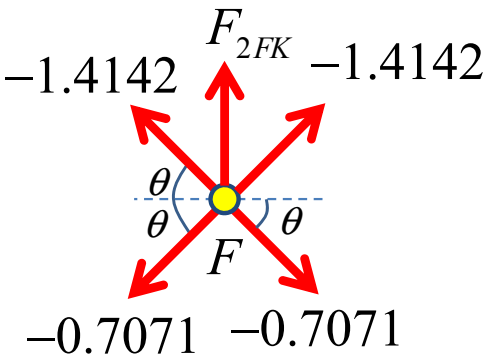
روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه شماره (II)



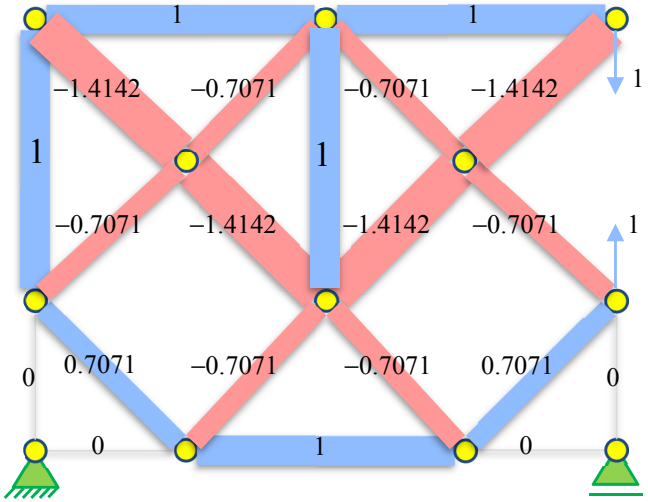
$$\sin(\theta)=\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:



$$\sum F_y=0 \quad\Rightarrow\quad F_{2FK}+2(-1.4142)\frac{1}{\sqrt{2}}-2(-0.7071)\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{2FK}=1}$$



خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 3- آنالیز سازه

Member	$F_{1ij}\ (ton)$	$F_{2ij}\ (ton)$	$F_{ij}\ (ton) = F_{1ij} - 7.5F_{2ij}$
AB	0	0	0
AE	-7.5	0	-7.5
DC	0	0	0
DG	-2.5	0	-2.5
GI	-1.7678	-0.7071	3.5355
GC	1.7678	0.7071	-3.5355
LK	0	1	-7.5
LI	0	-1.4142	10.6066
CF	-1.7678	-0.7071	3.5355
CB	2.5	1	-5

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

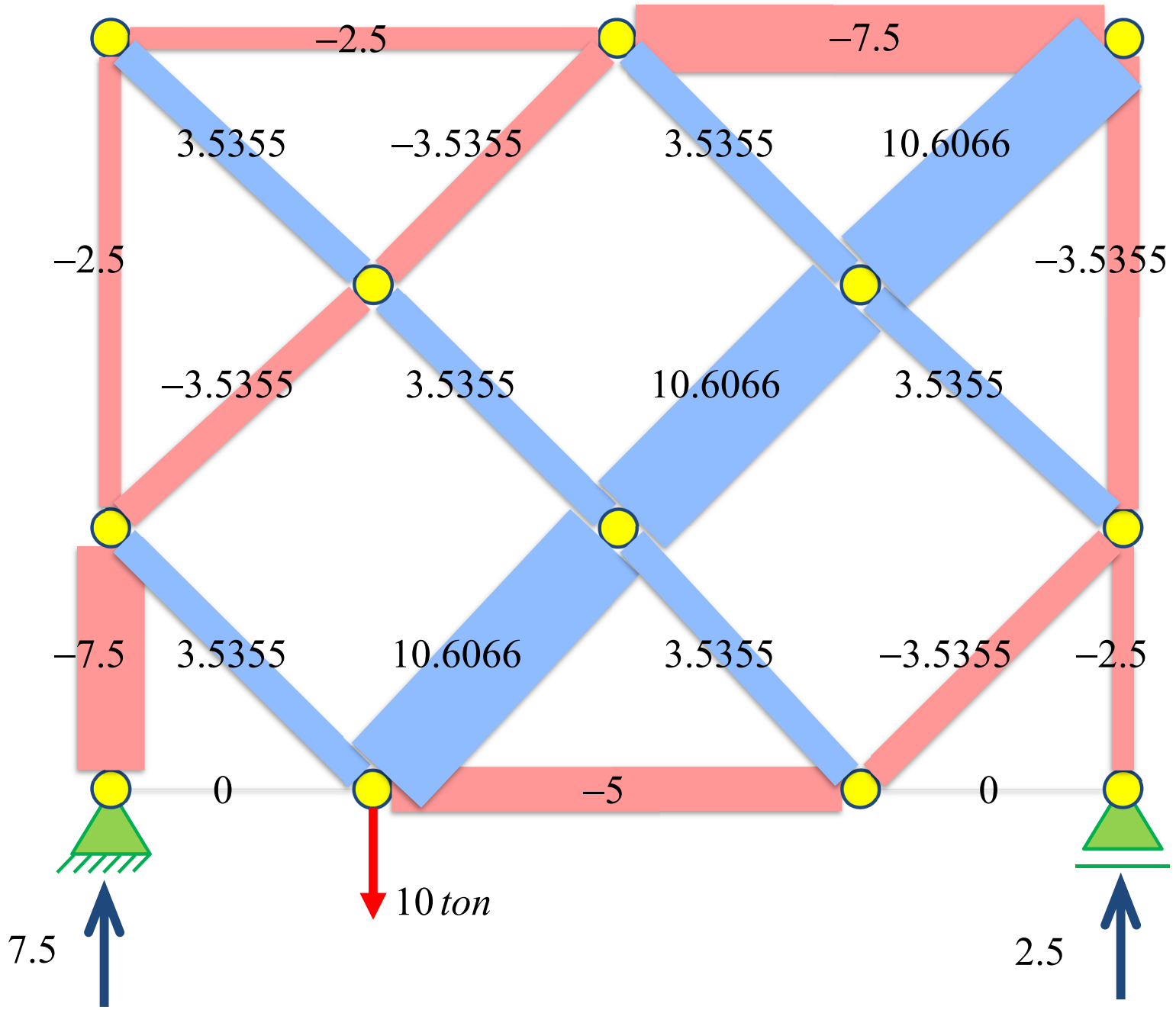
حل مثال 3- آنالیز سازه

Member	$F_{1ij}\ (ton)$	$F_{2ij}\ (ton)$	$F_{ij}\ (ton) = F_{1ij} - 7.5F_{2ij}$
BF	5.3033	-0.7071	10.6066
BE	8.8388	0.7071	3.5355
EH	-8.8388	-0.7071	-3.5355
EJ	5	1	-2.5
JH	-7.0711	-1.4142	3.5355
JK	5	1	-2.5
HK	-8.8388	-0.7071	-3.5355
HF	-7.0711	-1.4142	3.5355
IF	0	-1.4142	10.6066
IK	-1.7678	-0.7071	3.5355

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

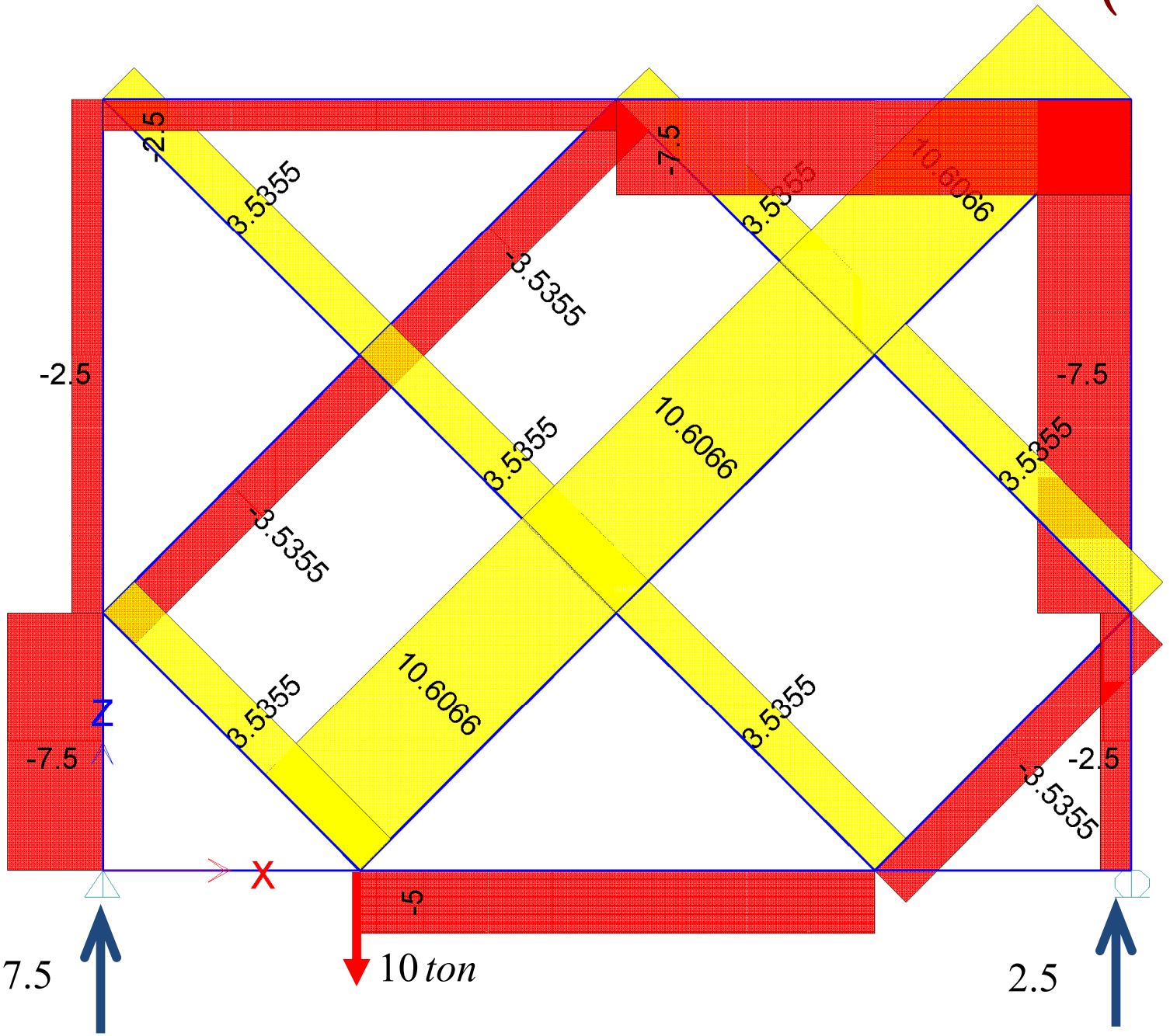
حل مثال 3-



خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال 3-



ETABS File Name: **02-Example-03.EDB**