Structural Control

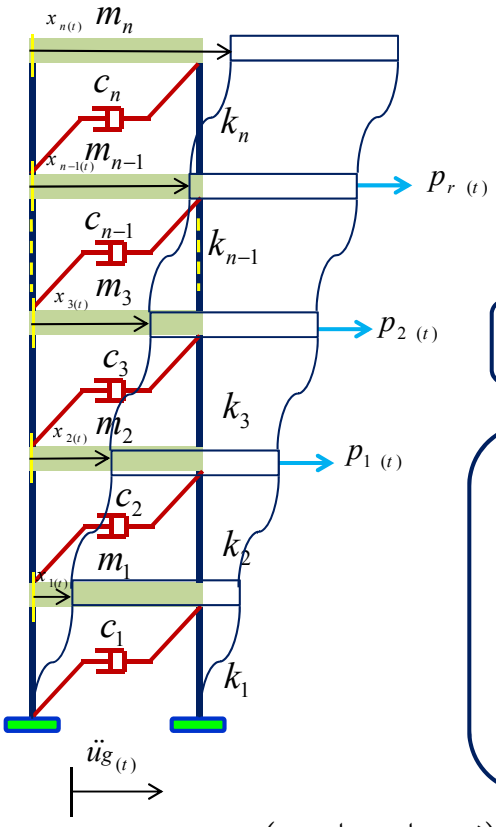
Equations of motion in state space form

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

در قاب n درجه آزاد نشان داده شده در صورتی که جابجایی و سرعت هر طبقه در هر لحظه در دسترس باشد؛ می‌توان با کمک آن‌ها و نیروهای خاص جواب سیستم را در هر لحظه‌ای دیگر تعیین کرد. بنابراین در مجموع تعداد حداقل $2n$ پارامتر برای تعیین حالات قاب لازم است. معادله حرکت سازه n درجه آزاد تحت اثر بار خارجی و تحریک زمین به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{k}\mathbf{x}_{(t)} = -\mathbf{m}\mathbf{L}\ddot{u}g_{(t)} + \mathbf{B}_\mathbf{r}\mathbf{p}_{(t)} \qquad (1)$$

که در آن

$$\mathbf{p}_{(t)} = \{p_{1(t)} \quad p_{2(t)} \quad \cdots \quad p_{r(t)}\}^T \in \mathbb{R}^r$$

$$\mathbf{L} = \{1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\}^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \mathbf{x}_{(t)} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{B}_\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$$

$$\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \ddot{\mathbf{x}}_{(t)} \in \mathbb{R}^n \quad \ddot{u}g_{(t)} \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

$\mathbf{B}_\mathbf{r}$: موقعیت قرارگیری نیروهای خارجی r : تعداد ورودی‌ها (نیروهای خارجی) سیستم

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

می‌توان معادله حرکت را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} &= \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{(t)} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x}_{(t)} - \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} - \mathbf{L}\ddot{u}g_{(t)} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_r\mathbf{p}_{(t)}\end{aligned} \qquad (3)$$

فرم ماتریسی معادله (۳) به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{(t)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}_{(t)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r} \\ -\mathbf{L} & \mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_r\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}g_{(t)} \\ \mathbf{p}_{(t)}\end{Bmatrix} \qquad (4)$$

که در آن

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad (5)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

با تعریف بردار حالت $\mathbf{q}$ به صورت زیر:

$$\mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix}\mathbf{x}_{(t)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)}\end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \qquad (6)$$

معادله (۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)} \qquad (7)$$

(8)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r} \\ -\mathbf{L} & \mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_r\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times(r+1)} \qquad \mathbf{U}_{(t)} = \begin{Bmatrix}\ddot{u}g_{(t)} \\ \mathbf{p}_{(t)}\end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1)}$$

$\mathbf{A}$: ماتریس سیستم

$\mathbf{B}$: ماتریس موقعیت مکانی نیروهای خارجی (ورودی) سیستم

$\mathbf{U}_{(t)}$: بردار نیروهای خارجی (ورودی) سیستم

❑معادلات حرکت در فضای حالت

با حل معادله (۷) و تعیین بردار حالت **q**، می‌توان خروجی سیستم $\mathbf{y}_{(t)} \in \mathbb{R}^m$ به صورت زیر به دست می‌آید:

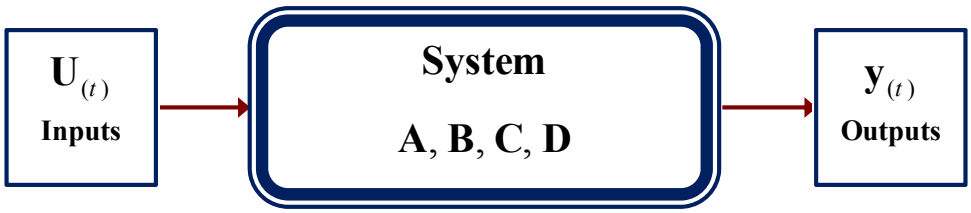
$$\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \qquad (9)$$

(10)

خروجی شتاب	خروجی سرعت	خروجی جابجایی
$\mathbf{C} = \left[-\mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} \quad -\mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\right] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$	$\mathbf{C} = \left[\mathbf{O}_{m\times n} \quad \mathbf{c}_s\right] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$	$\mathbf{C} = \left[\mathbf{c}_s \quad \mathbf{O}_{m\times n}\right] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$
$\mathbf{D} = \left[-\mathbf{c}_s\mathbf{L} \quad \mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_r\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$

$\mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^{m\times n}$: ماتریس موقعیت قرارگیری حسگرهای (خروجی‌های) سیستم

m : تعداد حسگرها (خروجی‌های) سیستم



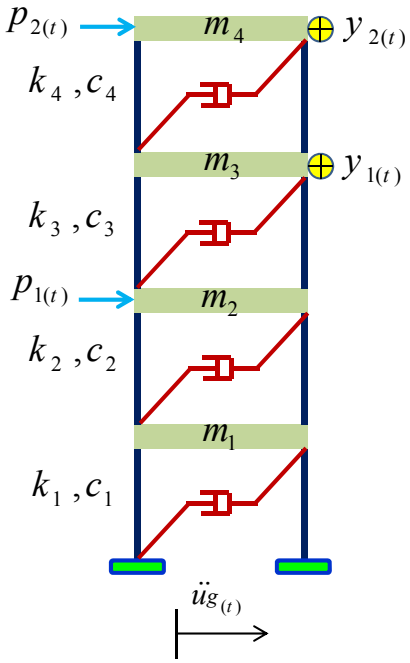
❑معادلات حرکت در فضای حالت

مثال ۱– معادله حرکت سازه نشان داده شده را در فضای حالت بنویسید.

الف– خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

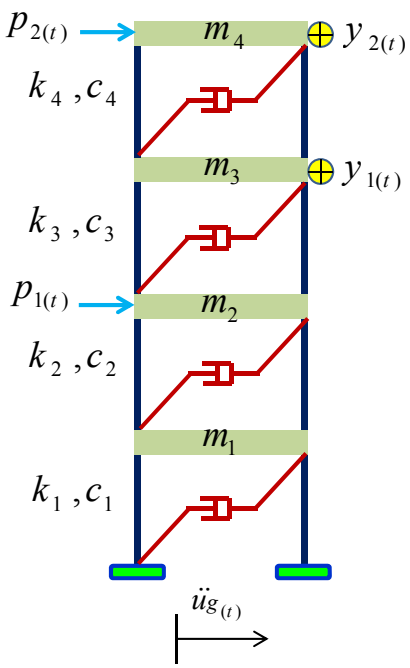
ب– خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

ج– خروجی سیستم شتاب می‌باشد.



❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۱-



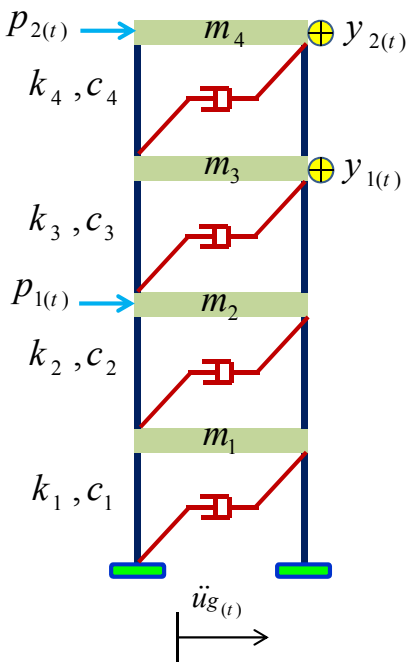
$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۱-



$$\mathbf{B_r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۱-

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۱-

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۱-

الف- خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

$$\mathbf{C}=\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۱-

ب- خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

$$\mathbf{C}=\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$(10)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{D}=\left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right]\quad\Rightarrow\quad\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۱-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

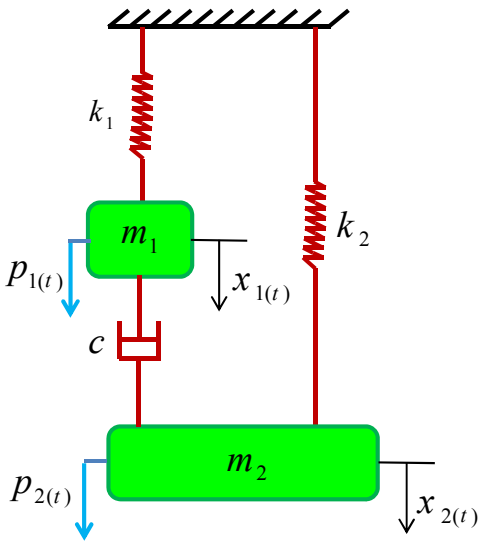
پاسخ مثال ۱-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3+k_4}{m_3} & \frac{k_4}{m_3} & 0 & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{c_3+c_4}{m_3} & \frac{c_4}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{k_4}{m_4} & -\frac{k_4}{m_4} & 0 & 0 & \frac{c_4}{m_4} & -\frac{c_4}{m_4} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ x_{3(t)} \\ x_{4(t)} \\ \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \\ \dot{x}_{3(t)} \\ \dot{x}_{4(t)} \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{m_4} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \ddot{ug}_{(t)} \\ p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{3(t)} \\ \ddot{x}_{4(t)} \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت



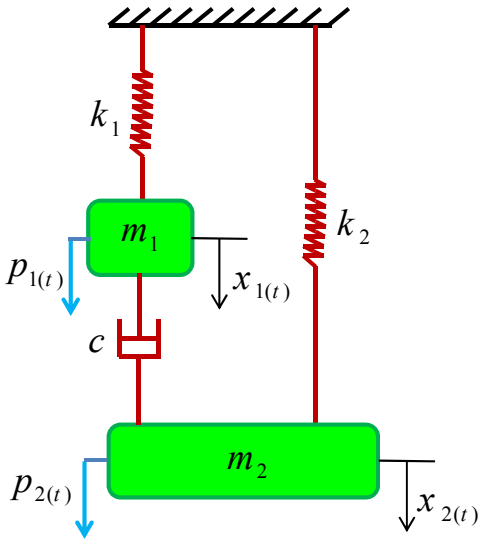
مثال ۲- معادله حرکت سازه نشان داده شده را در فضای حالت بنویسید.

الف- خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

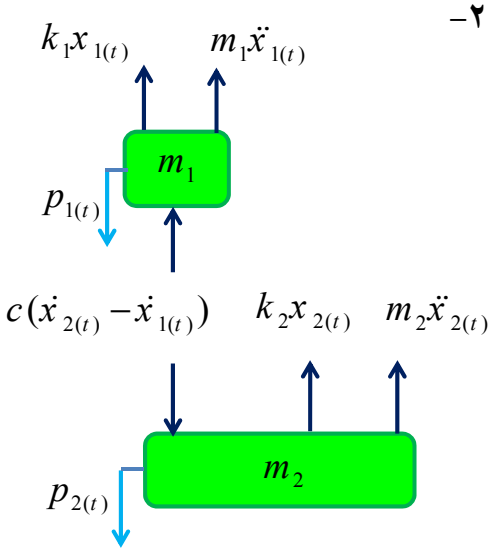
ب- خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

❑معادلات حرکت در فضای حالت



پاسخ مثال ۲-



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{1(t)} \\ \ddot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -c & c \\ c & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۲-

با تعریف پارامترهای زیر

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{(t)}=\begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} -c & c \\ c & -c \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}}_{(t)}=\begin{Bmatrix} \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{U}_{(t)}=\begin{Bmatrix} p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{x}}_{(t)}=\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{1(t)} \\ \ddot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

معادله حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{k}\mathbf{x}_{(t)}=\mathbf{U}_{(t)}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۲-

$$\Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{(t)} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2\times 2} & \mathbf{I}_{2\times 2} \\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{(t)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2\times 2} \\ \mathbf{m}^{-1} \end{bmatrix}\mathbf{U}_{(t)}$$

با تعریف بردار حالت به صورت زیر:

$$\mathbf{q}_{(t)}=\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{(t)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{(t)} \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۲-

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۲-

الف- خروجی سیستم جابجایی می‌باشد.

$$(10) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = [\mathbf{O}_{2\times 2}] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ \hdashline \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix}}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۲-

ب- خروجی سیستم سرعت می‌باشد.

$$(10) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = [\mathbf{O}_{2\times 2}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۲-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

❑معادلات حرکت در فضای حالت

پاسخ مثال ۲-

ج- خروجی سیستم شتاب می‌باشد.

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{k_1}{m_1} & 0 & \frac{c}{m_1} & -\frac{c}{m_1} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c}{m_2} & \frac{c}{m_2} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{1(t)} \\ \ddot{x}_{2(t)} \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

معادله (۷) در حالت ارتعاش آزاد با فرض $\mathbf{U}_{(t)} = 0$ به صورت زیر است:

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} \qquad (11)$$

ابتدا معادله (۱۱) را در حالت اسکالر بررسی می‌نماییم:

$$\dot{q}_{(t)} = \alpha q_{(t)} \qquad (12)$$

جواب معادله (۱۲) را می‌توان به صورت چند جمله‌ای زیر نوشت:

$$q_{(t)} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots + b_j t^j + \cdots \qquad (12.1)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

$$q_{(t)} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots + b_j t^j + \cdots \quad (12.1)$$

$$@t = 0 \overset{(12.1)}{\Rightarrow} b_0 = q_{(0)}$$

$$(12) \Rightarrow \dot{q}_{(t)} = \alpha q_{(t)} \Rightarrow$$

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + j b_j t^{j-1} + \cdots = \alpha b_0 + \alpha b_1 t + \alpha b_2 t^2 + \alpha b_3 t^3 + \cdots + \alpha b_j t^j + \cdots$$

$$\begin{aligned}
&b_1 = \alpha b_0 \overset{b_0 = q_{(0)}}{\Rightarrow} \boxed{b_1 = \alpha q_{(0)}} \\
&2b_2 = \alpha b_1 \overset{b_1 = \alpha q_{(0)}}{\Rightarrow} \boxed{b_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 q_{(0)}} \\
&3b_3 = \alpha b_2 \overset{b_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 q_{(0)}}{\Rightarrow} \boxed{b_3 = \frac{1}{3!}\alpha^3 q_{(0)}} \\
&\vdots \\
&j b_j = \alpha b_{j-1} \overset{b_{j-1} = \frac{1}{(j-1)!}\alpha^{(j-1)} q_{(0)}}{\Rightarrow} \boxed{b_j = \frac{1}{j!}\alpha^j q_{(0)}}
\end{aligned} \quad (12.2)$$

EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

با جایگذاری روابط (۱۲.۲) در رابطه (۱۲.۱) می‌توان جواب معادله (۱۲) را به صورت چند جمله‌ای زیر نوشت:

$$q_{(t)} = \left(1 + \alpha t + \frac{1}{2!}\alpha^2 t^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{j!}\alpha^j t^j + \cdots\right) q_{(0)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\alpha^j t^j\right) q_{(0)} \quad (13)$$

$$or$$

$$q_{(t)} = e^{\alpha t} q_{(0)}$$

جواب معادله حرکت در فضای حالت، معادله (۱۱)، را می‌توان به طور مشابه به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{q}_{(t)} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j t^j + \cdots\right) \mathbf{q}_{(0)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j t^j\right) \mathbf{q}_{(0)} \quad (14)$$

$$or$$

$$\mathbf{q}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{q}_{(0)} \qquad e^{\mathbf{A}t}: \text{ ماتریس نمایی}$$

که در آن

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j t^j + \cdots = \mathbf{T}_{(t)} \quad (15)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

پارامتر $e^{\mathbf{A}t}$ را ماتریس تبدیل $\mathbf{T}_{(t)}$ در فضای حالت می‌نامیم. زیرا این ماتریس بردار حالت در زمان t_0 را به بردار حالت در لحظه t تبدیل می‌کند. بنابراین رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{(t)} &= \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} \\ \mathbf{T}_{(t)} &= e^{\mathbf{A}t}\end{aligned} \qquad (16)$$

روش‌های مختلفی برای محاسبه ماتریس تبدیل (Transform Matrix) $\mathbf{T}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t}$ وجود دارد:

۱- بسط دادن

۲- قطری کردن

۳- تبدیل لاپلاس

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

۱- روش بسط دادن:

به کمک رابطه (۱۵) ماتریس تبدیل (Transform Matrix) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$(15) \Rightarrow \mathbf{T}_{(t)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j t^j \qquad (17)$$

این روش به دلیل حجم بالای محاسبات و طولانی بودن، کمتر مورد استفاده قرار گرفته است.

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

۲- روش قطری کردن:

هنگامی که ماتریس سیستم $\mathbf{A}$ دارای مقادیر ویژه متمایز (معکوس پذیر) باشد می‌توان معادلات حرکت در فضای حالت را به صورت قطری درآورد.

$$\begin{aligned} &\text{eig}(\mathbf{A}) = [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Psi}] \\ &(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\boldsymbol{\Psi}_i = \mathbf{0} \\ &\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$\boldsymbol{\lambda}$: مقادیر ویژه (Eigen values) ماتریس سیستم (به صورت مختلط)

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$: بردارهای ویژه (Eigen vectors) ماتریس سیستم

با معرفی بردار حالت تعمیم‌یافته $\mathbf{z}_{(t)} \in \mathbb{R}^{2n}$ به کمک رابطه زیر می‌توان معادله حرکت در فضای حالت را که هم‌بسته می‌باشند از هم جدا نمود:

$$\mathbf{q}_{(t)} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_{(t)} \quad (19)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

۲- روش قطری کردن:

با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$(19) \rightarrow (7) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)} \quad (20)$$

با پیش‌ضرب طرفین رابطه (۲۰) در $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$

$$(20) \quad \overset{\times\boldsymbol{\Psi}^{-1}}{\Rightarrow} \quad \dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}_{(t)} + \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)} \quad (21)$$

با تعریف پارامترهای زیر

$$\bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad \bar{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{B} \quad (22)$$

رابطه (۲۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(22) \rightarrow (21) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_{(t)} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{U}_{(t)} \quad (23)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

۲- روش قطری کردن:

با حل معادله (۲۳) و تعیین بردار حالت $\mathbf{Z}$، می‌توان خروجی سیستم $\mathbf{y}_{(t)} \in \mathbb{R}^m$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{y}_{(t)} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)} \qquad (24)$$

که در آن

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi} \qquad (25)$$

(26)

خروجی شتاب	خروجی سرعت	خروجی جابجایی
$\bar{\mathbf{C}} = \left[-\mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} \quad -\mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\right]\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[-\mathbf{c}_s\mathbf{L} \quad \mathbf{c}_s\mathbf{m}^{-1}\mathbf{B}_r\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\bar{\mathbf{C}} = \left[\mathbf{O}_{m\times n} \quad \mathbf{c}_s\right]\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$	$\bar{\mathbf{C}} = \left[\mathbf{c}_s \quad \mathbf{O}_{m\times n}\right]\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ $\mathbf{D} = \left[\mathbf{O}_{m\times(r+1)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times(r+1)}$

$\mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^{m\times n}$: ماتریس موقعیت قرارگیری حسگرهای (خروجی‌های) سیستم

m : تعداد حسگرها (خروجی‌های) سیستم

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

۲- روش قطری کردن:

مثال ۳- معادلات حرکت زیر را به صورت قطری بنویسید:

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{q}_{(t)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}\mathbf{u}_{(t)}$$
$$\mathbf{y}_{(t)} = \{3 \quad 1\}\mathbf{q}_{(t)}$$

حل مثال ۳-

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

۲- روش قطری کردن:

حل مثال ۳-

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$(18) \Rightarrow \left(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Psi}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & -1 \\ 5 & -4-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \overset{\lambda_2=-3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\psi_{12} - \psi_{22} = 0 \\ 5\psi_{12} - \psi_{22} = 0 \end{cases} \overset{if\ \psi_{22}=1}{\Rightarrow} \boldsymbol{\Psi}_2 = \begin{Bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت

۲- روش قطری کردن:

حل مثال ۳-

$$= \begin{bmatrix} 1.25 & -0.25 \\ -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.25 & -0.25 \\ -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{B}} = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 2.5 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 3 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{C}} = \begin{Bmatrix} 4 & 1.6 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z}_{(t)} + \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 2.5 \end{Bmatrix} \mathbf{u}_{(t)}$$

$$\mathbf{y}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 4 & 1.6 \end{Bmatrix} \mathbf{z}_{(t)}$$

Matlab Code (L01Example03.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

رابطه (۲۳) معادله فضای حالات در مختصات تعمیم یافته در حالت ارتعاش آزاد به صورت زیر است:

$$(23) \quad \overset{\mathbf{U}_{(t)}=0}{\Rightarrow} \quad \boxed{\dot{\mathbf{z}}_{(t)} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_{(t)}} \quad (27)$$

رابطه (۲۷) را بسط می‌دهیم:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_{1(t)} \\ \dot{z}_{2(t)} \\ \dot{z}_{3(t)} \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1(t)} \\ z_{2(t)} \\ z_{3(t)} \\ \vdots \\ z_{2n(t)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dot{z}_{1(t)} = \lambda_1 z_{1(t)} \\ \dot{z}_{2(t)} = \lambda_2 z_{2(t)} \\ \dot{z}_{3(t)} = \lambda_3 z_{3(t)} \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n(t)} = \lambda_{2n} z_{2n(t)} \end{array}} \quad (28)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

مشابه با رابطه (۱۲) که پاسخ آن در رابطه (۱۳) آمده بود پاسخ معادلات (۲۸) نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(28) \Rightarrow \begin{array}{c} \dot{z}_{1(t)} = \lambda_1 z_{1(t)} \\ \dot{z}_{2(t)} = \lambda_2 z_{2(t)} \\ \dot{z}_{3(t)} = \lambda_3 z_{3(t)} \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n(t)} = \lambda_{2n} z_{2n(t)} \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} z_{1(t)} = e^{\lambda_1 t} z_{1(0)} \\ z_{2(t)} = e^{\lambda_2 t} z_{2(0)} \\ z_{3(t)} = e^{\lambda_3 t} z_{3(0)} \\ \vdots \\ z_{2n(t)} = e^{\lambda_{2n} t} z_{2n(0)} \end{array}} \quad (29)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

فرم ماتریسی رابطه (۲۹) به صورت مقابل است:

$$\begin{Bmatrix} z_{1(t)} \\ z_{2(t)} \\ z_{3(t)} \\ \vdots \\ z_{2n(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{2n} t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1(0)} \\ z_{2(0)} \\ z_{3(0)} \\ \vdots \\ z_{2n(0)} \end{Bmatrix} \qquad (30)$$

که می‌توان رابطه (۳۰) را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{z}_{(t)} = e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{z}_{(0)}$$

$$e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{2n} t} \end{bmatrix} \qquad (31)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

با جایگذاری رابطه (۳۱) در رابطه (۱۹) بردار حالت به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$(19) \rightarrow (31) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_{(t)} = \boldsymbol{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{z}_{(0)} \qquad (32)$$

همچنین بردار حالت اولیه در مختصات تعمیم یافته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(19) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}_{(0)} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{q}_{(0)} \qquad (33)$$

با جایگذاری رابطه (۳۳) در رابطه (۳۲) بردار حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(33) \rightarrow (32) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_{(t)} = \boldsymbol{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}t}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{q}_{(0)} \qquad (34)$$

با مقایسه رابطه (۳۴) با رابطه (۱۶) می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس تبدیل را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\mathbf{T}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t} = \boldsymbol{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}t}\boldsymbol{\Psi}^{-1} \qquad (35)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

می‌توان ماتریس بردارهای ویژه سیستم را به صورت زیر نشان داد:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \psi_{1,3} & \cdots & \psi_{1,2n} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \psi_{2,3} & \cdots & \psi_{2,2n} \\ \psi_{3,1} & \psi_{3,2} & \psi_{3,3} & \cdots & \psi_{3,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{2n,1} & \psi_{2n,2} & \psi_{2n,3} & \cdots & \psi_{2n,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \cdots & \psi_{2n} \end{bmatrix} \quad (36)$$

به طور مشابه:

$$\bar{\Psi} = \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{1,1} & \bar{\psi}_{1,2} & \bar{\psi}_{1,3} & \cdots & \bar{\psi}_{1,2n} \\ \bar{\psi}_{2,1} & \bar{\psi}_{2,2} & \bar{\psi}_{2,3} & \cdots & \bar{\psi}_{2,2n} \\ \bar{\psi}_{3,1} & \bar{\psi}_{3,2} & \bar{\psi}_{3,3} & \cdots & \bar{\psi}_{3,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\psi}_{2n,1} & \bar{\psi}_{2n,2} & \bar{\psi}_{2n,3} & \cdots & \bar{\psi}_{2n,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 & \cdots & \bar{\psi}_{2n} \end{bmatrix} \quad (37)$$

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

با جایگذاری روابط (۳۶) و (۳۷) در رابطه (۳۴) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} q_{1(t)} \\ q_{2(t)} \\ q_{3(t)} \\ \vdots \\ q_{2n(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \cdots & \psi_{2n} \end{bmatrix} e^{\bar{A}t} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 & \cdots & \bar{\psi}_{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{1(0)} \\ q_{2(0)} \\ q_{3(0)} \\ \vdots \\ q_{2n(0)} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

رابطه (۳۸) را می توان به صورت ساده شده مقابل نوشت:

$$q_{i(t)} = \sum_{j=1}^{2n} \psi_i^T e^{\bar{A}t} \bar{\psi}_j^T q_{j(0)} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, 2n) \quad (39)$$

از آنجا که مقادیر ویژه ماتریس سیستم به صورت مختلط است از این رو بردار حالت به دست آمده در رابطه (۳۴) یا (۳۹) به صورت مختلط است. اما به این نکته باید توجه کرد که بخش موهومی آن تقریبا برابر با صفر است (بسیار ناچیز است).

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

مثال ۴- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مربوطه را به روش قطری کردن محاسبه نمایید.

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{y}_{(t)} = \{1 \quad 1\} \mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Matlab Code (L01Example04.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

پاسخ مثال ۴-

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن: پاسخ مثال ۴-

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن: پاسخ مثال ۴-

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\Rightarrow e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 - 0.5e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 - 0.5e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 2 - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{Bmatrix}$$

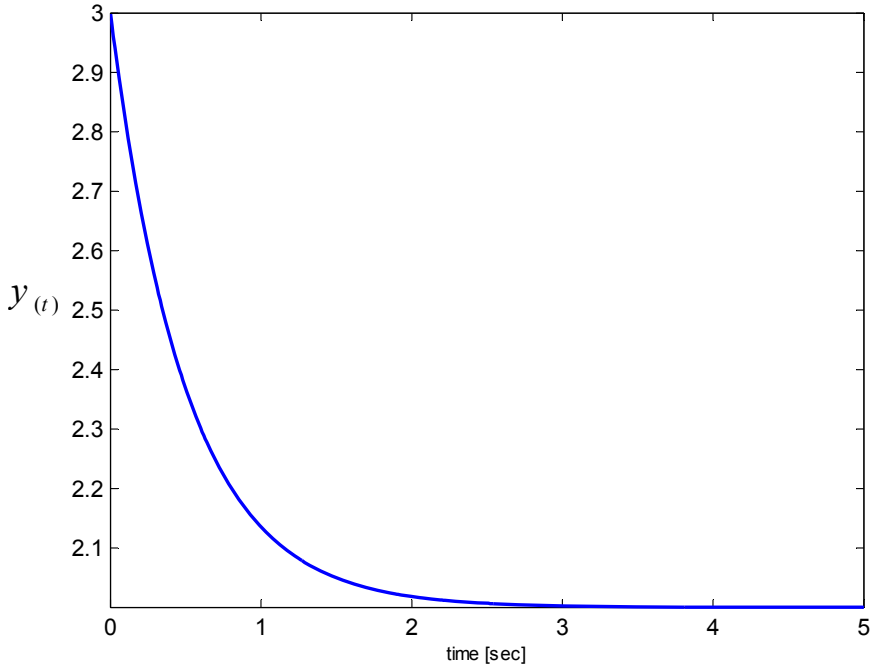
$$= \{1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 2 - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}_{(t)} = 2 + e^{-2t}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

پاسخ مثال ۴-



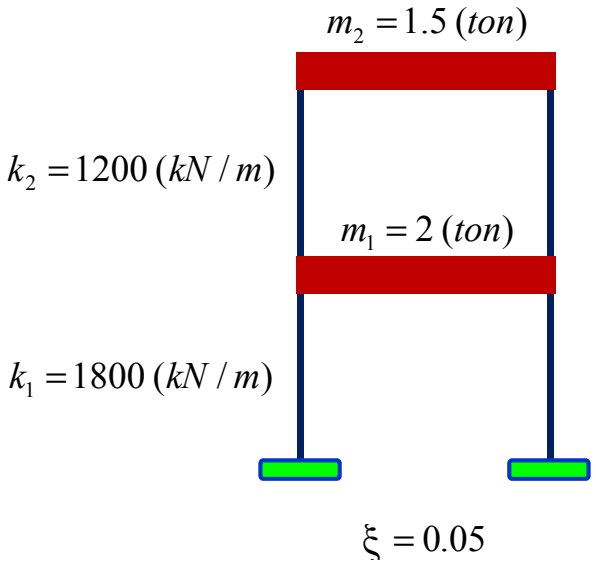
پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مورد نظر

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

مثال ۵- پاسخ ارتعاش آزاد سازه نشان داده شده در شکل زیر را با توجه به شرایط اولیه آن به دست آورید.



$$\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.015 \end{Bmatrix} \quad (m) \qquad \{\dot{x}_0\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{Bmatrix} \quad (m/s)$$

Matlab Code (L01Example05.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

پاسخ مثال ۵-

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\times 10^{3}(kg)\quad,\quad \mathbf{k}=\begin{bmatrix}3 & -1.2\\ -1.2 & 1.2\end{bmatrix}\times 10^{6}\ (N/m)$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}7.4294 & -1.8981\\ -1.8981 & 3.9113\end{bmatrix}\times 10^{3}\ (N.\sec/m)$$

(8) $\Rightarrow$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1500 & 600 & -3.7147 & 0.94903\\ 800 & -800 & 1.2654 & -2.6075\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{D}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_{(0)}=\begin{Bmatrix}0.01\\ 0.015\\ 0.02\\ 0.04\end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

(18) $\Rightarrow$

پاسخ مثال ۵-

$$\mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix}0.0016038+0.032036i & 0.0016038-0.032036i & -0.0013778-0.027522i & -0.0013778+0.027522i\\ -0.0011392-0.022756i & -0.0011392+0.022756i & -0.0025862-0.051659i & -0.0025862+0.051659i\\ -1.4078-6.7489e\text{-}017i & -1.4078+6.7489e\text{-}017i & 0.53276+2.3618e\text{-}017i & 0.53276-2.3618e\text{-}017i\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}^{-1}=\begin{bmatrix}-4.5223e\text{-}016-11.323i & 1.3288e\text{-}016+6.0322i & -0.25766-0.012899i & 0.13727+0.0068722i\\ -4.5169e\text{-}016+11.323i & 1.2292e\text{-}016-6.0322i & -0.25766+0.012899i & 0.13727-0.0068722i\\ 4.5655e\text{-}016+4.9878i & -1.2235e\text{-}016+7.0216i & 0.25766+0.012899i & 0.36273+0.018159i\\ 4.5243e\text{-}016-4.9878i & -1.2631e\text{-}016-7.0216i & 0.25766-0.012899i & 0.36273-0.018159i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\lambda}=\begin{bmatrix}-2.1944+43.834i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2.1944-43.834i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.96668+19.309i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.96668-19.309i\end{bmatrix}$$

(31) $\Rightarrow$

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}-2.1944+43.834i & -2.4425e\text{-}015+3.5527e\text{-}015i & 1.5506e\text{-}016+1.8031e\text{-}015i & 5.1107e\text{-}016-5.3558e\text{-}015i\\ -2.4425e\text{-}015-3.5527e\text{-}015i & -2.1944-43.834i & 4.0005e\text{-}016+3.5794e\text{-}015i & 4.4038e\text{-}017-2.6708e\text{-}017i\\ -1.6912e\text{-}015+2.2541e\text{-}015i & 1.4692e\text{-}015-2.2541e\text{-}015i & -0.96668+19.309i & 4.0523e\text{-}015+8.8818e\text{-}015i\\ 1.1361e\text{-}015+3.5863e\text{-}015i & -1.3582e\text{-}015-3.5863e\text{-}015i & 4.1633e\text{-}015-1.4211e\text{-}014i & -0.96668-19.309i\end{bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

پاسخ مثال ۵-

$$\begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \times \begin{Bmatrix} (0.7286+0.0256i)e^{(-2.1944-43.834i)t} + (0.7286-0.0256i)e^{(-2.1944+43.834i)t} \cdots \\ (-0.5175-0.0182i)e^{(-2.1944-43.834i)t} + (-0.5175+0.0182i)e^{(-2.1944+43.834i)t} \cdots \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdots + (4.2714+0.7563i)e^{(-0.96668-19.309i)t} + (4.2714-0.7563i)e^{(-0.96668+19.309i)t} \\ \cdots + (8.0175+1.4197i)e^{(-0.96668-19.309i)t} + (8.0175-1.4197i)e^{(-0.96668+19.309i)t} \end{matrix} \Bigg\}$$

$x_{1(t)}\ (m)$	$x_{2(t)}\ (m)$
0.01 + 6.734e-020i	0.015 +1.7981e-021i
0.0092508 -1.8962e-018i	0.014958 -2.8526e-018i
0.0067062 -1.1808e-018i	0.013095 - 7.1598e-019i
0.0034458 -6.1331e-018i	0.0092929 -2.7129e-018i
0.00044817 + 4.1383e-018i	0.0038356 -9.8454e-019i
-0.0018651 -1.5658e-020i	-0.0024218 +6.0487e-020i
-0.0036266 + 3.312e-019i	-0.0082288 +1.2375e-018i
-0.0051409 +1.0236e-017i	-0.012379 +9.9275e-018i
-0.006453 +9.3868e-018i	-0.014152 +2.7512e-017i
-0.0071993 -9.9935e-018i	-0.013511 -1.8296e-017i
-0.0068376 -7.3011e-018i	-0.010963 -2.0032e-017i
-0.0050706 +4.4621e-018i	-0.0072288 +1.2197e-020i
-0.0021452 +2.3571e-018i	-0.0029377 +1.0535e-017i
0.0011886 -7.6363e-019i	0.0014679 - 2.544e-018i
0.0040296 -5.8655e-018i	0.0056317 -1.5466e-017i
⋮	⋮

همان‌طور که مشاهده می‌شود پاسخ‌های به دست آمده به صورت مختلط می‌باشند. اما مقادیر بخش موهومی پاسخ‌ها بسیار ناچیز و تقریبا برابر با صفر است.

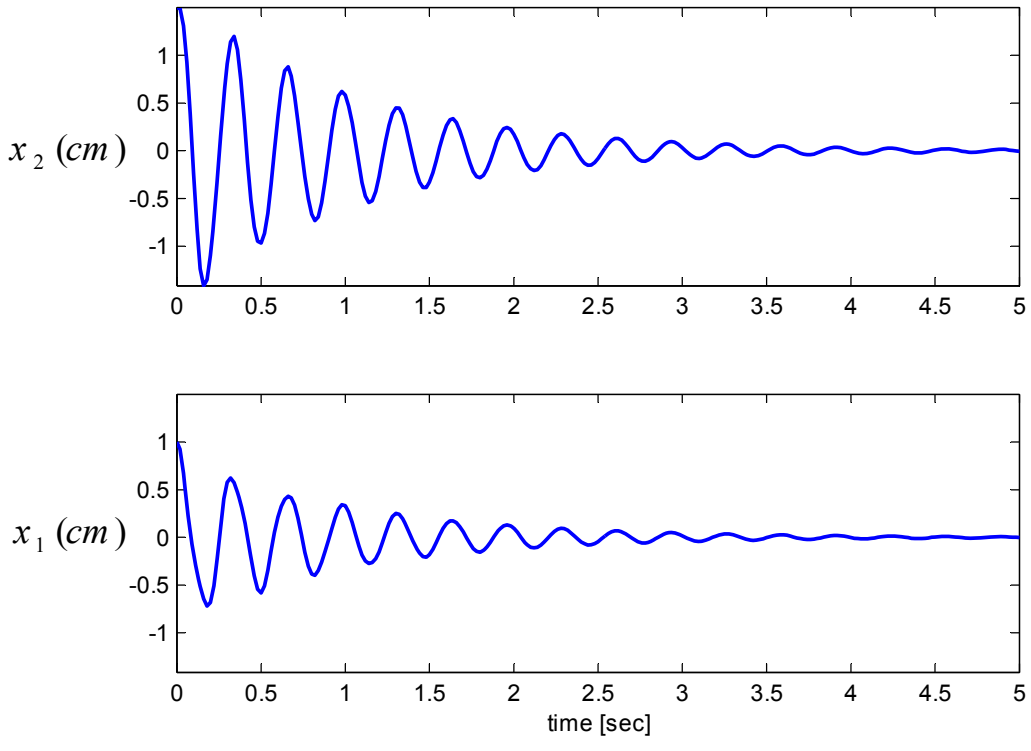
EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش قطری کردن:

پاسخ مثال ۵-



پاسخ ارتعاش آزاد سازه دو طبقه با میرایی

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۳- روش تبدیل لاپلاس:

با روش تبدیل لاپلاس نیز می‌توان جواب سیستمی که معادلات حرکت آن در فضای حالت نوشته شده است را به دست آورد:

تعریف: $F_{(s)}=L(f_{(t)})$ تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ است که به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$F_{(s)}=L(f_{(t)})=\int_0^{\infty}e^{-st}f_{(t)}dt \qquad (40)$$

تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس $f_{(t)}=L^{-1}(F_{(s)})$ دارای خاصیت خطی است

$$\begin{aligned}L[\alpha f_{1(t)}+bf_{2(t)}]&=\alpha F_{1(s)}+bF_{2(s)}\\ L^{-1}[\alpha F_{1(s)}+bF_{2(s)}]&=\alpha f_{1(t)}+bf_{2(t)}\end{aligned} \qquad (41)$$

تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم در جدول زیر آمده است:

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۳- روش تبدیل لاپلاس:

تابع $f_{(t)}$ در فضای زمانی	تابع $F_{(s)}$ تبدیل لاپلاس در فضای s
α	$\frac{\alpha}{s}\quad (s>0)$
αt^{n}	$\frac{\alpha n!}{s^{n+1}}\quad (s>0)\quad ,\quad n=$ عدد صحیح
$\beta e^{\alpha t}$	$\frac{\beta}{s-\alpha}\quad (s>\alpha)$
$\beta\sin(\alpha t)$	$\frac{\beta\alpha}{s^2+\alpha^2}\quad (s>0)$
$\beta\cos(\alpha t)$	$\frac{\beta s}{s^2+\alpha^2}\quad (s>0)$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۳- روش تبدیل لاپلاس:

تابع $f_{(t)}$ در فضای زمانی	تابع تبدیل لاپلاس $F_{(s)}$ در فضای s
$\dot{f}_{(t)}$	$sF_{(s)} - f_{(0)}$
$\ddot{f}_{(t)}$	$s^2F_{(s)} - sf_{(0)} - \dot{f}_{(0)}$
$\int_0^t f_{(\tau)} d\tau$	$\frac{1}{s}F_{(s)}$
$e^{\alpha t} f_{(t)}$	$F_{(s-\alpha)}$
$-t^n f_{(t)}$	$F^{(n)}_{(s)}$

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۳- روش تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس معادله فضای حالت- ارتعاش آزاد در رابطه (۱۱) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(11): \quad \dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} \quad \overset{L}{\Rightarrow} \quad \boxed{L(\dot{\mathbf{q}}_{(t)}) = L(\mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)})} \quad (42)$$

با حل رابطه (۴۲) خواهیم داشت:

$$(42) \quad \Rightarrow \quad s\mathbf{Q}_{(s)} - \mathbf{q}_{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{(s)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q}_{(s)} = \mathbf{q}_{(0)}} \quad (43)$$

چنانچه طرفین رابطه (۴۳) را در $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ضرب کنیم:

$$(43) \quad \overset{\times(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{Q}_{(s)} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}_{(0)}} \quad (44)$$

اگر از طرفین رابطه (۴۴) معکوس تبدیل لاپلاس بگیریم بردار حالت $\mathbf{q}_{(t)}$ به دست می‌آید:

$$(44) \quad \overset{\times L^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = L^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{q}_{(0)}} \quad (45)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۳- روش تبدیل لاپلاس:

رابطه (۴۵) را می‌توان به صورت دیگری نوشت که در آن تابع تبدیل به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)}$$
$$\mathbf{T}_{(t)} = L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] \qquad (46)$$

بنابراین برای پیدا کردن جواب در فضای حالت، $\mathbf{q}_{(t)}$، لازم است ابتدا ماتریس انتقال را محاسبه نمود. برای این منظور باید $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$را اول تعیین کرده و سپس از تمامی عناصر آن معکوس تبدیل لاپلاس گرفته شود.

با توجه به رابطه (۱۶) می‌توان نشان داد که:

$$\mathbf{T}_{(t)} = L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] = e^{\mathbf{A}t} \qquad (47)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش تبدیل لاپلاس :

مثال ۶- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مربوطه را به روش تبدیل لاپلاس محاسبه نمایید.

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{y}_{(t)} = \{1 \quad 1\}\mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Matlab Code (L01Example06.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش تبدیل لاپلاس :

پاسخ مثال ۶-

$$= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش تبدیل لاپلاس :

پاسخ مثال ۶-

$$\boxed{\mathbf{T}_{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5-0.5e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 2-e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{Bmatrix}}$$

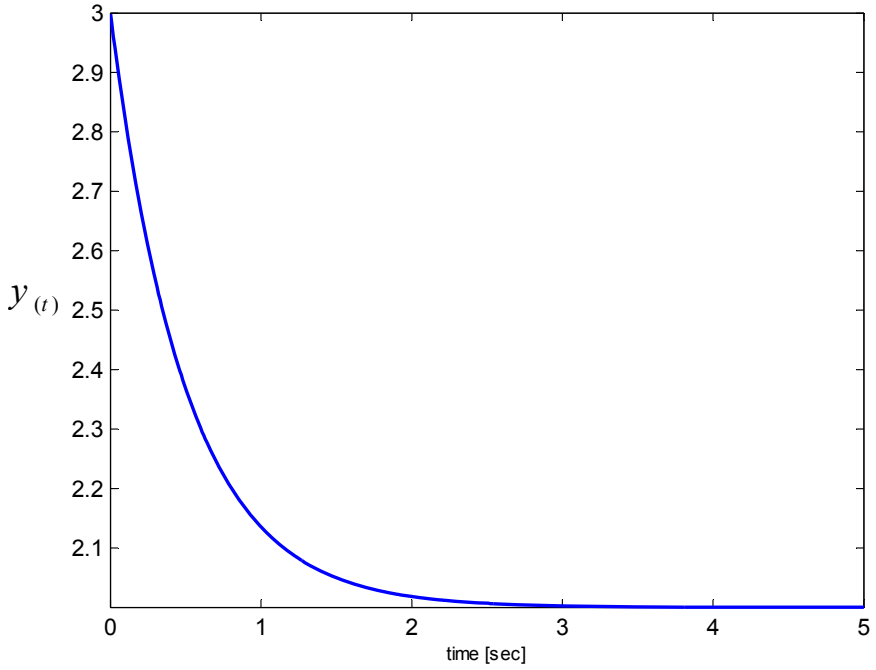
$$= \{1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 2-e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{y}_{(t)} = 2+e^{-2t}}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش آزاد

۲- روش تبدیل لاپلاس :

پاسخ مثال ۶-



پاسخ ارتعاش آزاد سیستم مورد نظر

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

معادله (۷) در حالت اسکالر در لحظه τ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{q}_{(\tau)} = \alpha q_{(\tau)} + b u_{(\tau)} \quad (48)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{-\alpha\tau}$ خواهیم داشت:

$$(48) \xrightarrow{\times e^{-\alpha\tau}} \Rightarrow \boxed{e^{-\alpha\tau}\dot{q}_{(\tau)} - e^{-\alpha\tau}\alpha q_{(\tau)} = e^{-\alpha\tau} b u_{(\tau)}} \quad (49)$$

سمت چپ رابطه (۴۹) تعریف مشتق $e^{-\alpha\tau} q_{(\tau)}$ است. بنابراین:

$$(49) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\tau}(e^{-\alpha\tau} q_{(\tau)}) = e^{-\alpha\tau} b u_{(\tau)}} \quad (50)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

اگر از طرفین رابطه (۵۰) از بازه ۰ تا t انتگرال‌گیری نماییم در این صورت خواهیم داشت:

$$(50) \xrightarrow{\int_0^t} \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau}(e^{-\alpha\tau}q_{(\tau)})\right)d\tau = \int_0^t e^{-\alpha\tau}bu_{(\tau)}d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-\alpha t}q_{(t)} = q_{(0)} + \int_0^t e^{-\alpha\tau}bu_{(\tau)}d\tau} \quad (51)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{\alpha t}$ خواهیم داشت:

$$(51) \xrightarrow{\times e^{\alpha t}} \boxed{q_{(t)} = e^{\alpha t}q_{(0)} + e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha\tau}bu_{(\tau)}d\tau} \quad (52)$$

پاسخ ناشی از ارتعاش آزاد

پاسخ ناشی از تحریک ورودی

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

حال معادله (۷) در حالت برداری در لحظه τ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}}_{(\tau)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(\tau)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}} \quad (53)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{-\mathbf{A}\tau}$ خواهیم داشت:

$$(53) \xrightarrow{\times e^{-\mathbf{A}\tau}} \boxed{e^{-\mathbf{A}\tau}\dot{\mathbf{q}}_{(\tau)} - e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{A}\mathbf{q}_{(\tau)} = e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}} \quad (54)$$

سمت چپ رابطه (۵۴) تعریف مشتق $e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{q}_{(\tau)}$ است. بنابراین:

$$(54) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\tau}(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{q}_{(\tau)}) = e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}} \quad (55)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

اگر از طرفین رابطه (۵۵) از بازه ۰ تا t انتگرال‌گیری نماییم در این صورت خواهیم داشت:

$$(55) \xrightarrow{\int_0^t} \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau}(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{q}_{(\tau)}) \right) d\tau = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)} d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)} d\tau} \quad (56)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $e^{\mathbf{A}t}$ خواهیم داشت:

$$(56) \xrightarrow{\times e^{\mathbf{A}t}} \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)} d\tau} \quad (57)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

از رابطه (۳۵) می‌توان نتیجه گرفت:

$$(35): \quad \mathbf{T}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{\Psi}^{-1} \xrightarrow{@time=(t-\tau)} \boxed{\mathbf{T}_{(t-\tau)} = e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)}\mathbf{\Psi}^{-1}} \quad (58)$$

با جایگذاری روابط (۳۵) و (۵۸) در رابطه (۵۷) خواهیم داشت:

$$(35)\,\&\,(58) \rightarrow (57) \quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t \mathbf{\Psi} e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)} d\tau} \quad (59)$$

شکل دیگر رابطه (۵۹) براساس تعریف تابع تبدیل در رابطه (۳۵) به صورت زیر است:

$$(35)\,\&\,(58) \quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t \mathbf{T}_{(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)} d\tau} \quad (60)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

مثال ۷- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ سیستم مربوطه را به روش محتوای زمانی در دو حالت زیر محاسبه نمایید: الف- $u_{(t)}=1$ ب- $u_{(t)}=20e^{-t}\sin(-10t)$

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\mathbf{q}_{(t)}+\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}u_{(t)}$$

فرض می‌شود:

$$\mathbf{y}_{(t)}=\{1 \quad 1\}\mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)}=\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- الف

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1=\begin{Bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{21}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\ 1\end{Bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- الف

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- الف

$$\Rightarrow e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_{(t)} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_{(t-\tau)} = \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- الف

$$\mathbf{q}_{(t)} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} (1) d\tau$$

$$\mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-t} \end{Bmatrix}$$

$$= \{1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-t} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}_{(t)} = \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

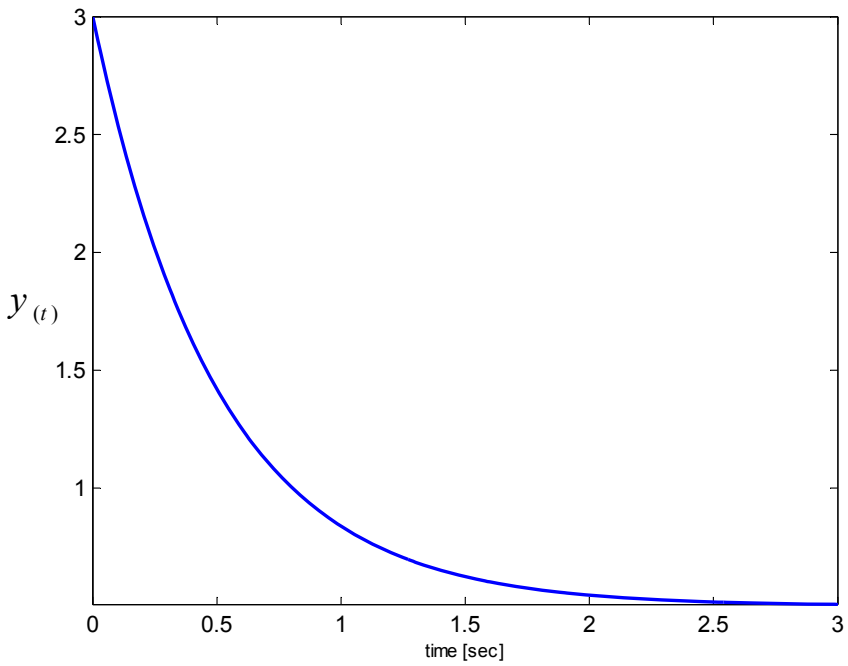
EOM in state space form

❑ معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- الف



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $u_{(t)} = 1$

Matlab Code (L01Example07a.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- ب

$$(60) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} + \int_0^t \mathbf{T}_{(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(\tau)}d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{q}_{(t)} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} (20e^{-t}\sin(-10t))d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{q}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 2e^{-t} - \frac{103}{101}e^{-2t} + \frac{2}{101}e^{-t}\cos(10t) + \frac{20}{101}e^{-t}\sin(10t) \\ \frac{206}{101}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{198}{101}e^{-t}\cos(10t) - \frac{40}{101}e^{-t}\sin(10t) \end{Bmatrix}$$

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- ب

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} = \{1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 2e^{-t} - \frac{103}{101}e^{-2t} + \frac{2}{101}e^{-t}\cos(10t) + \frac{20}{101}e^{-t}\sin(10t) \\ \frac{206}{101}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{198}{101}e^{-t}\cos(10t) - \frac{40}{101}e^{-t}\sin(10t) \end{Bmatrix}$$

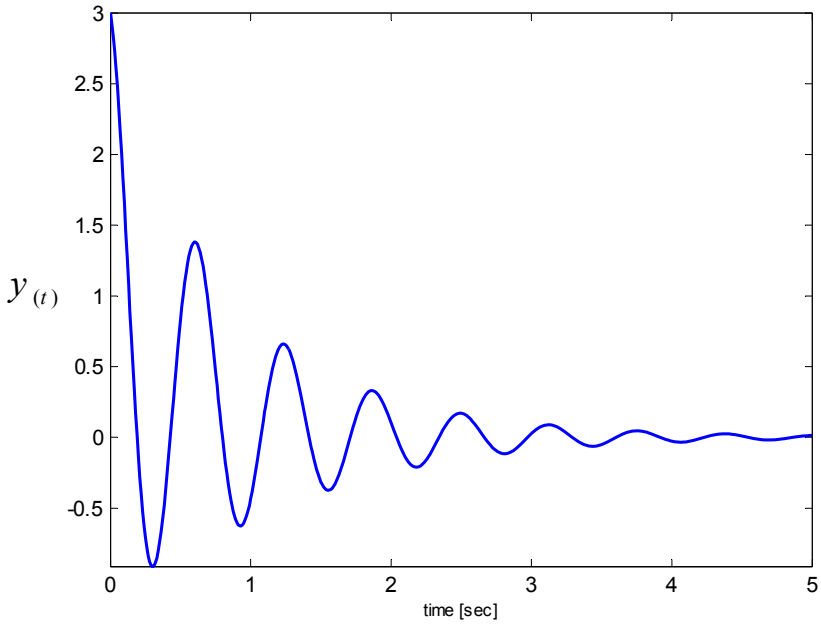
$$\Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \frac{103}{101}e^{-2t} + \frac{200}{101}e^{-t}\cos(10t) - \frac{20}{101}e^{-t}\sin(10t)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۷- ب



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $u_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$

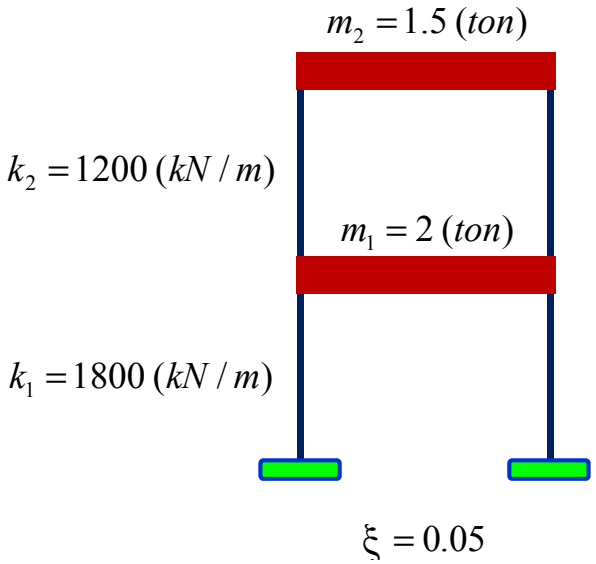
Matlab Code (L01Example07b.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

مثال ۸- پاسخ سازه نشان داده شده تحت اثر تحریک پایه $u_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$ را به دست آورید.



$$\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.015 \end{Bmatrix} \quad (m) \qquad \{\dot{x}_0\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{Bmatrix} \quad (m/s)$$

Matlab Code (L01Example08.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۸-

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\times 10^{3}(kg)\quad,\quad \mathbf{k}=\begin{bmatrix}3 & -1.2\\ -1.2 & 1.2\end{bmatrix}\times 10^{6}\ (N/m)$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}7.4294 & -1.8981\\ -1.8981 & 3.9113\end{bmatrix}\times 10^{3}\ (N.\sec/m)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1500 & 600 & -3.7147 & 0.94903\\ 800 & -800 & 1.2654 & -2.6075\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{B}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ -1\end{Bmatrix}\quad,\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{D}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_{(0)}=\begin{Bmatrix}0.01\\ 0.015\\ 0.02\\ 0.04\end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۸-

$$\mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix}0.0016038+0.032036i & 0.0016038-0.032036i & -0.0013778-0.027522i & -0.0013778+0.027522i\\ -0.0011392-0.022756i & -0.0011392+0.022756i & -0.0025862-0.051659i & -0.0025862+0.051659i\\ -1.4078-6.7489e{-}017i & -1.4078+6.7489e{-}017i & 0.53276+2.3618e{-}017i & 0.53276-2.3618e{-}017i\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Psi}^{-1}=\begin{bmatrix}-4.5223e{-}016-11.323i & 1.3288e{-}016+6.0322i & -0.25766-0.012899i & 0.13727+0.0068722i\\ -4.5169e{-}016+11.323i & 1.2292e{-}016-6.0322i & -0.25766+0.012899i & 0.13727-0.0068722i\\ 4.5655e{-}016+4.9878i & -1.2235e{-}016+7.0216i & 0.25766+0.012899i & 0.36273+0.018159i\\ 4.5243e{-}016-4.9878i & -1.2631e{-}016-7.0216i & 0.25766-0.012899i & 0.36273-0.018159i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\lambda}=\begin{bmatrix}-2.1944+43.834i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2.1944-43.834i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.96668+19.309i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.96668-19.309i\end{bmatrix}$$

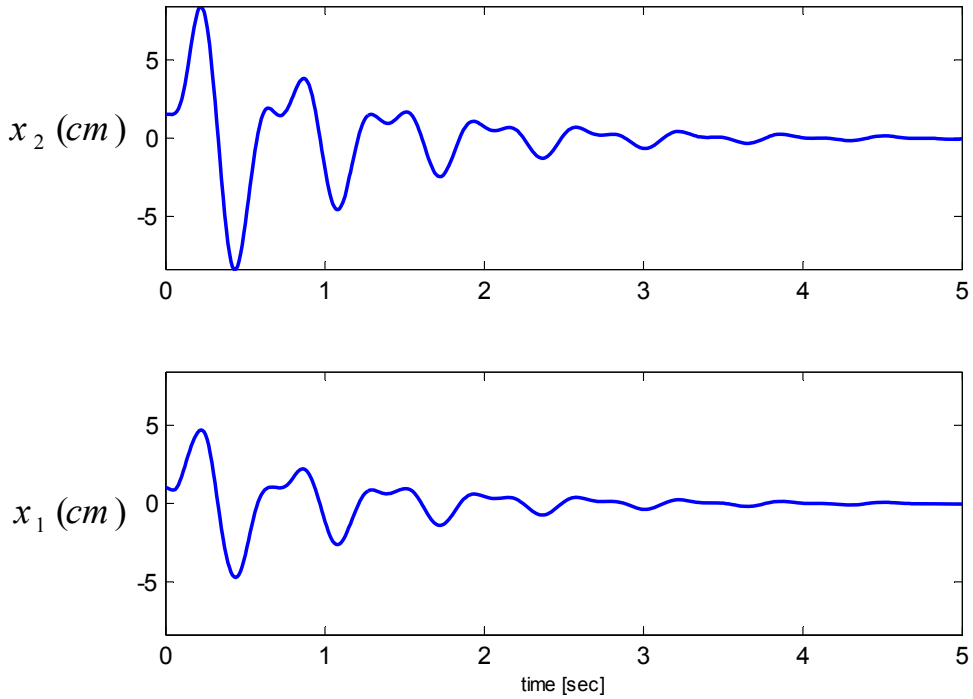
$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}-2.1944+43.834i & -2.4425e{-}015+3.5527e{-}015i & 1.5506e{-}016+1.8031e{-}015i & 5.1107e{-}016-5.3558e{-}015i\\ -2.4425e{-}015-3.5527e{-}015i & -2.1944-43.834i & 4.0005e{-}016+3.5794e{-}015i & 4.4038e{-}017-2.6708e{-}017i\\ -1.6912e{-}015+2.2541e{-}015i & 1.4692e{-}015-2.2541e{-}015i & -0.96668+19.309i & 4.0523e{-}015+8.8818e{-}015i\\ 1.1361e{-}015+3.5863e{-}015i & -1.3582e{-}015-3.5863e{-}015i & 4.1633e{-}015-1.4211e{-}014i & -0.96668-19.309i\end{bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

الف- روش محتوای زمانی (Time Domain Method)

پاسخ مثال ۸-



پاسخ ارتعاش آزاد سازه دو طبقه با میرایی تحت اثر تحریک پایه

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

معادله (۷) در حالت اسکالر در لحظه t در زیر آمده است:

$$\dot{q}_{(t)} = \alpha q_{(t)} + b u_{(t)} \qquad (61)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر طرفین رابطه (۶۱) خواهیم داشت:

$$(61) \overset{L}{\Rightarrow} L(\dot{q}_{(t)}) = L(\alpha q_{(t)}) + L(b u_{(t)}) \qquad (62)$$

با حل رابطه (۶۲) خواهیم داشت:

$$(62) \Rightarrow s Q_{(s)} - q_{(0)} = \alpha Q_{(s)} + b U_{(s)} \Rightarrow Q_{(s)} = \frac{q_{(0)}}{s-\alpha} + \frac{b U_{(s)}}{s-\alpha} \qquad (63)$$

اگر از رابطه (۶۳) معکوس لاپلاس گرفته شود، مقدار $q_{(t)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(63) \overset{L^{-1}}{\Rightarrow} q_{(t)} = L^{-1}\left(\frac{q_{(0)}}{s-\alpha}\right) + L^{-1}\left(\frac{b U_{(s)}}{s-\alpha}\right) \qquad (64)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

با اعمال تبدیل لاپلاس بر طرفین رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$(7): \quad \dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)} \quad \overset{L}{\Rightarrow} \quad \boxed{L(\dot{\mathbf{q}}_{(t)}) = L(\mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)}) + L(\mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)})} \qquad (65)$$

با حل رابطه (۶۵) خواهیم داشت:

$$(65) \quad \Rightarrow \quad s\mathbf{Q}_{(s)} - \mathbf{q}_{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{(s)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q}_{(s)} = \mathbf{q}_{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}} \qquad (66)$$

طرفین رابطه (۶۶) را در $(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$(66) \quad \overset{(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{Q}_{(s)} = (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}_{(0)} + (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}} \qquad (67)$$

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

با اعمال معکوس تبدیل لاپلاس بر طرفین رابطه (۶۷) خواهیم داشت:

$$(67) \quad \overset{L^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = L^{-1}\left((s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)\mathbf{q}_{(0)} + L^{-1}\left((s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)} \qquad (68)$$

با جایگذاری رابطه (۴۶) در رابطه (۶۸) نتیجه می‌شود:

$$(46) \rightarrow (68) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{q}_{(t)} = \mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)} + L^{-1}\left((s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)} \qquad (69)$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

مثال ۹- معادله فضای حالت یک سیستم در زیر آمده است. پاسخ سیستم مربوطه را به روش محتوای فرکانسی در دو حالت زیر محاسبه نمایید: الف- $u_{(t)} = 1$ ب- $u_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{q}_{(t)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} u_{(t)}$$

فرض می‌شود:

$$\mathbf{y}_{(t)} = \{1 \quad 1\}\mathbf{q}_{(t)} \quad , \quad \mathbf{q}_{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Matlab Code (L01Example09.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-الف

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C} = \{1 \quad 1\} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{D} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-الف

برای آنکه بتوان به راحتی معکوس لاپلاس ماتریس $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ را محاسبه نمود درایه‌های آن را به صورت $\frac{\beta}{s-\alpha}$ می‌نویسیم. برای این منظور خواهیم داشت:

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2}\\ \frac{-2}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

	α	b	$c=b-\alpha$	$d=2\alpha-b$
1	0	1	1	−1
−2	0	−2	−2	2
s	1	0	−1	2

$$\Rightarrow (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

EOM in state space form

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-الف

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_{(t)}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{1}{s}\right)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{s(s+1)}-\frac{1}{s(s+2)}\\ -\frac{1}{s(s+1)}+\frac{2}{s(s+2)}\end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-الف

$$\Rightarrow \boxed{(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2s}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{2(s+2)}\\ \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\end{Bmatrix}}$$

$$=L^{-1}\left(\begin{Bmatrix}\frac{1}{2s}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{2(s+2)}\\ \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\end{Bmatrix}\right)\Rightarrow \boxed{L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{Bmatrix}}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-الف

$$\boxed{\mathbf{q}_{(t)}=\begin{Bmatrix}3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ -3e^{-t}+5e^{-2t}\end{Bmatrix}}$$

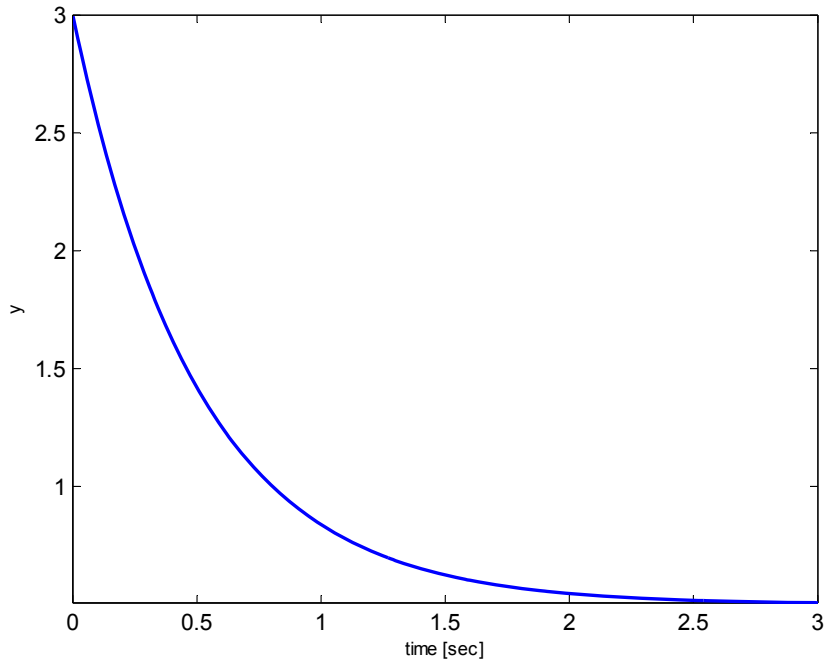
$$\boxed{\mathbf{y}_{(t)}=\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-الف



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $u_{(t)} = 1$

Matlab Code (L01Example09a.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-ب

$$(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U_{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(-\frac{200}{(s+1)^2+100} \right)$$

$$\Rightarrow \quad (s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U_{(s)} = \begin{Bmatrix} -\frac{200}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)} \\ -\frac{200s}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)} \end{Bmatrix}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-ب

$$L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)=L^{-1}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{200}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)}\\ -\dfrac{200s}{\left((s+1)^2+100\right)(s^2+3s+2)}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\quad L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{200}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\dfrac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)+10\sin(10t)\right)\\ -\dfrac{400}{101}e^{-2t}+2e^{-t}+\dfrac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)-\dfrac{20}{99}\sin(10t)\right)\end{array}\right\}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-ب

$$(69)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{q}_{(t)}=\mathbf{T}_{(t)}\mathbf{q}_{(0)}+L^{-1}\left((s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{(s)}\right)=$$

$$\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{200}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\dfrac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)+10\sin(10t)\right)\\ -\dfrac{400}{101}e^{-2t}+2e^{-t}+\dfrac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)-\dfrac{20}{99}\sin(10t)\right)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{q}_{(t)}=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{103}{101}e^{-2t}+2e^{-t}+\dfrac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)+10\sin(10t)\right)\\ \dfrac{206}{101}e^{-2t}-2e^{-t}+\dfrac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t)-\dfrac{20}{99}\sin(10t)\right)\end{array}\right\}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-ب

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} = \{1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} -\frac{103}{101}e^{-2t} + 2e^{-t} + \frac{2}{101}e^{-t}\left(\cos(10t) + 10\sin(10t)\right) \\ \frac{206}{101}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{198}{101}e^{-t}\left(\cos(10t) - \frac{20}{99}\sin(10t)\right) \end{Bmatrix}$$

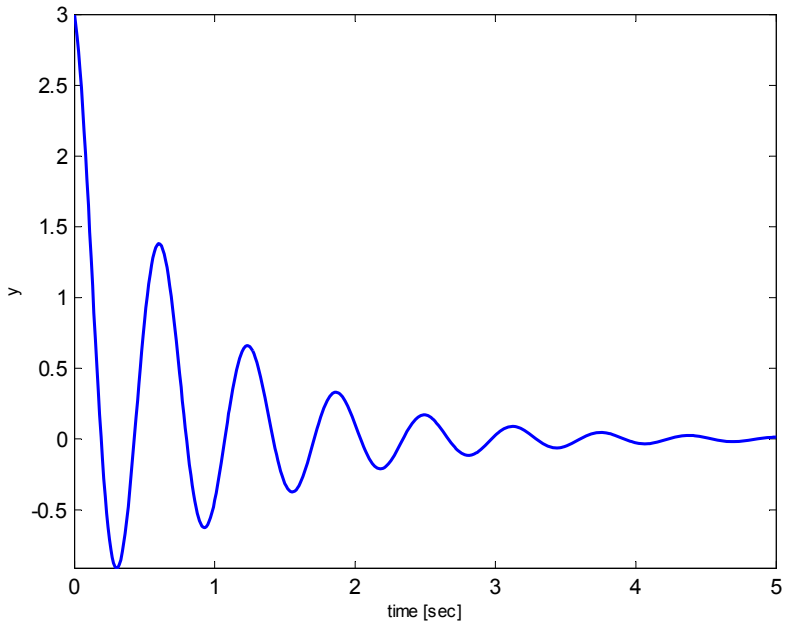
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{y}_{(t)} = \frac{103}{101}e^{-2t} + \frac{200}{101}e^{-t}\cos(10t) - \frac{20}{101}e^{-t}\sin(10t)}$$

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت- ارتعاش اجباری

ب- روش محتوای فرکانسی (Frequency Domain Method)

حل مثال ۹-ب



پاسخ ارتعاش اجباری سیستم مورد نظر تحت اثر $\mathrm{u}_{(t)} = 20e^{-t}\sin(-10t)$

Matlab Code (L01Example09b.m)

❑معادلات حرکت در فضای حالت

حل معادلات حرکت در فضای حالت– در MATLAB

دستور lsim در MATLAB تاریخچه زمانی پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی را تحت اثر ورودی دلخواه شبیه سازه می‌کند. خروجی این دستور همان y یا بردار خروجی سیستم است.

$$\dot{\mathbf{q}}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{(t)}$$

$$\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{C}\mathbf{q}_{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{U}_{(t)}$$

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$
$$\mathbf{y}_{(t)} = \text{lsim}(\text{sys}, \mathbf{U}_{(t)}, t, \mathbf{q}_{(0)})$$

حل معادله حرکت در فضای حالت
به کمک نرم‌افزار MATLAB

کاوه کرمی

دانشیار سازه دانشگاه کردستان، دانشکده مهندسی، گروه عمران

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

الف- حوضه پیوسته زمانی

معادله دینامیک حرکت یک سیستم n درجه آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = -\mathbf{m}\ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{m}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{k}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی با ابعاد $n\times n$ می‌باشند. پاسخ‌های دینامیکی سازه شامل جابجایی، سرعت و شتاب به ترتیب با بردارهای $\mathbf{x}$، $\dot{\mathbf{x}}$ و $\ddot{\mathbf{x}}$ با ابعاد $n\times 1$ نشان داده شده است. سازه تحت اثر شتاب پایه $\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}$ با ابعاد 1×1 قرار می‌گیرد. بردار ℓ با ابعاد $n\times 1$ بردار تاثیر شتاب زمین در جرم‌های سازه است. رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} - \ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\end{aligned} \qquad (۲)$$

فرم ماتریسی رابطه (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}1\times 1} \qquad (۳)$$

در رابطه بالا ماتریس‌های $\mathbf{O}$ و $\mathbf{I}$ به ترتیب ماتریس‌های صفر و واحد می‌باشند. با تعریف پارامترهای زیر

$$\mathbf{A}_{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad \mathbf{B}_{\mathbf{c}} = \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad (۴)$$

می توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A_c q} + \mathbf{B_c}\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{g}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C q} + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{g} \qquad (۵)$$

معادله (۵) را معادله حرکت سیستم در فضای حالت[1] و در حوضه زمانی پیوسته[2] می‌نمایند. یکی از ویژگی‌های مهم فضای حالت آن است که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۱) را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۵) تبدیل می‌کند. ماتریس $\mathbf{A_c}$ با ابعاد $2n \times 2n$ ماتریس سیستم نام دارد؛ زیرا شامل ویژگی‌های سیستم از جمله سختی و میرایی است. همچنین ماتریس‌های $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به ترتیب با ابعاد $2n \times 1$، $m \times 2n$ و $m \times 1$ ماتریس‌های تشکیل دهنده فضای حالت است. بردار $\mathbf{y}$ با ابعاد $m \times 1$ خروجی سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به نوع خروجی سیستم ماتریس‌های $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

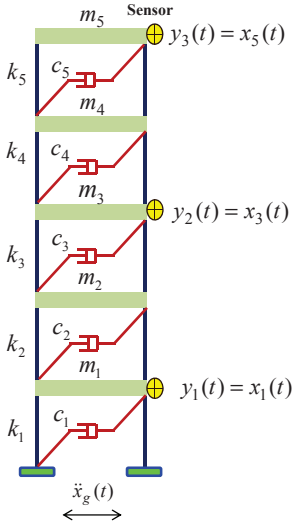
خروجی جابجایی	خروجی سرعت	خروجی شتاب
$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_S} & \mathbf{O}_{m\times n} \end{bmatrix}$ $\mathbf{D} = \mathbf{O}_{m\times 1}$	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m\times n} & \mathbf{C_S} \end{bmatrix}$ $\mathbf{D} = \mathbf{O}_{m\times 1}$	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C_S m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{C_S m}^{-1}\mathbf{c} \end{bmatrix}$ $\mathbf{D} = -\mathbf{C_S}\ell$

(۶)

ماتریس $\mathbf{C_S}$ با ابعاد $m \times n$ محل نصب حسگرها را مشخص می‌کند. معادله حرکت به فرم معادله (۵) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAg.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور مثال زیر در نظر گرفته می‌شود.

مثال: شکل (۱) یک ساختمان پنج طبقه را نشان می‌دهد؛ که مشخصات سازه‌ای آن در جدول (۱) آمده است. در این ساختمان از سه عدد حسگر برای اندازه‌گیری خروجی‌های مربوط به جابجایی طبقات اول، سوم و پنجم استفاده شده است.

[1] State Space
[2] Continues Time Domain



شکل ۱. ساختمان پنج طبقه

جدول ۱

پارامترهای سازه‌ای ساختمان پنج طبقه

St. No	Mass (ton)	Stiffness (kN/m)
1	12	**22000**
2	12	**20000**
3	12	**17800**
4	11	**16000**
5	10	**14300**

$\xi = 5\%$

ورودی‌های این برنامه که کاربر باید آن را وارد نماید شامل موارد زیر است:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Xg=xlsread('ElCentro.xls', 'Accelerograph', 'B3:B1562');
out='acc';
m=diag([12 12 12 11 10])*1e3;
k0=[22e3 20e3 17.8e3 16e3 14.3e3]*1e3;
xi=0.05;
st0=0.02;
st=0.01;
mv=[1 3 5];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

که در آن Xg شتاب زلزله El-Centro می‌باشد که معمولا بر حسب $g=9.807\ m/s^2$ مقیاس شده است و توسط دستور xlsread از فایل Excel تحت عنوان 'ElCentro.xls' خوانده می‌شود. Out نوع خروجی سیستم را نشان می‌دهد که می‌توان از 'dis'، 'vel' و 'acc' به ترتیب برای نمایش خروجی‌های جابجایی، سرعت و شتاب سیستم استفاده کرد. m ماتریس جرم طبقات است که با استفاده از دستور diag به صورت قطری تشکیل می‌گردد. k0 بردار سختی طبقات است. xi ضریب میرایی سیستم را مشخص می‌کند. st0 برابر با گام زمانی شتاب نگاشت مورد استفاده است. اگر بخواهیم از گام زمانی کوچکتر یا بزرگتری استفاده کنیم توسط st تعیین می‌گردد. mv بردار مکان خروجی‌ها (محل نصب حسگرها) در درجات آزادی مربوطه را نشان می‌دهد.

مدت زمان زلزله T ، بردار زمان t و تعداد طبقات n نیز با استفاده از دستور زیر محاسبه می‌شود:

```
T=(length(Xg)-1)*st0;
t=0:st:T;
n=length (m);
```

در دستور زیر به کمک تابع XG درون‌یابی انجام گرفته و شتاب زلزله در هر گام زمانی st تعیین می‌گردد؛ و نهایتا در شتاب $g=9.807\ m/s^2$ نیز ضرب شده است.

```
xg(1:((T/st)+1))=0;
for i=1:length(xg)
    xg(i)=XG(Xg,st0,(i-1)*st)*9.807;
end
```

با استفاده از تابع‌های StiffnessMatrix و DampingMatrix به ترتیب ماتریس‌های سختی و میرایی تشکیل می‌شود.

```
k=StiffnessMatrix(k0);
c=DampingMatrix(m ,k,xi);
```

تابع StiffnessMatrix ماتریس سختی را بر اساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{cases} \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i + k_{i+1} & i \neq n_m \\ \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i & i = n_m \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = -k_{Max(i,j)} & |i-j| = 1 \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $\mathrm{K}_{(i,j)}$ نشان دهنده (i,j)اُمین درایه ماتریس سختی می‌باشد. همچنین k_i سختی طبقه iاُم است. تابع DampingMatrix نیز ماتریس میرایی را براساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi} \\ &\mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi} = 2\xi\boldsymbol{\omega}\mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = 2\xi \left(\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}^{-1} \end{aligned} \qquad (۸)$$

که در رابطه بالا، $\mathbf{\Phi}$ و $\boldsymbol{\omega}$ به ترتیب ماتریس اشکال مودی و ماتریس فرکانس سیستم می‌باشند. پارامتر ξ ضریب میرایی سیستم است.

تابع StateSpaceAg ماتریس‌های $\mathbf{A_c}$، $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را با توجه به نوع خروجی out تشکیل می‌دهد.

```
[Ac,Bc,C,D]=StateSpaceAg(m,k,c,mv,out);
```

دستور SS سیستم sysc را در فضای حالت و در فضای پیوسته زمانی تشکیل می‌دهد

```
sysc=ss(Ac,Bc,C,D);
```

به طوری که

Ac=sysc.a
Bc=sysc.b
C=sysc.c
D=sysc.d

دستور زیر شرایط اولیه (بردار حالت اولیه که شامل جابجایی اولیه و سرعت اولیه است) مسئله را تعیین می‌کند:

```
q0(1:2*n,1)=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت سیستم در فضای حالت محاسبه می‌گردد:

```
[y]=lsim(sysc,xg,t,q0);
```

دستور lsim تاریخچه زمانی پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی را تحت اثر یک ورودی دلخواه شبیه سازه می‌کند. خروجی این دستور همان y یا بردار خروجی سیستم است.

پاسخ سازه در حالتی که خروجی جابجایی باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'dis')==1
    LB=min(min(y*100));
    UB=max(max(y*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
        end
        ylabel('dis[cm]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

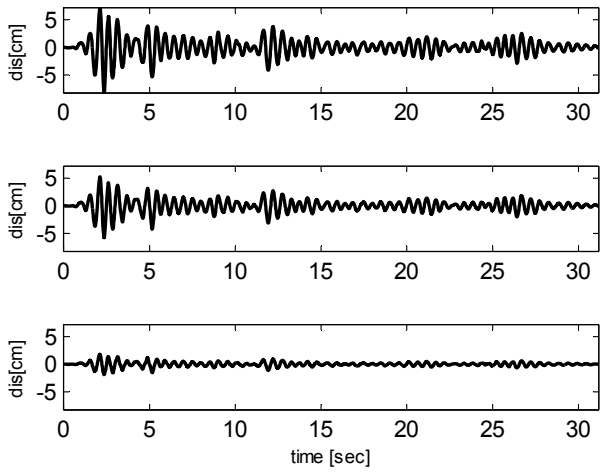
پاسخ سازه در حالتی که خروجی سرعت باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'vel')==1
    LB=min(min(y*100));
    UB=max(max(y*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
        end
        ylabel('vel[cm/s]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

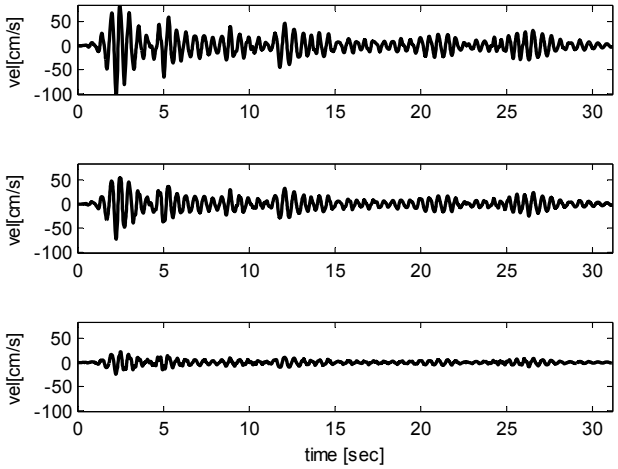
پاسخ سازه در حالتی که خروجی شتاب باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'acc')==1
    LB=min(min(y/9.807));
    UB=max(max(y/9.807));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y(:,length(mv)-i+1)/9.807,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
        end
        ylabel('acc[g]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

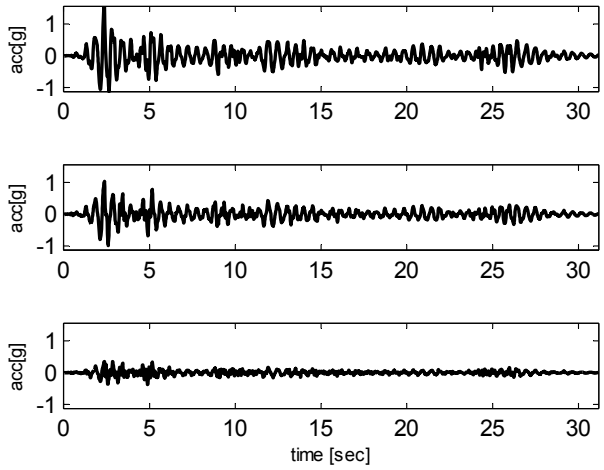
پاسخ‌های سازه به صورت زیر می باشد:



شکل۲. تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



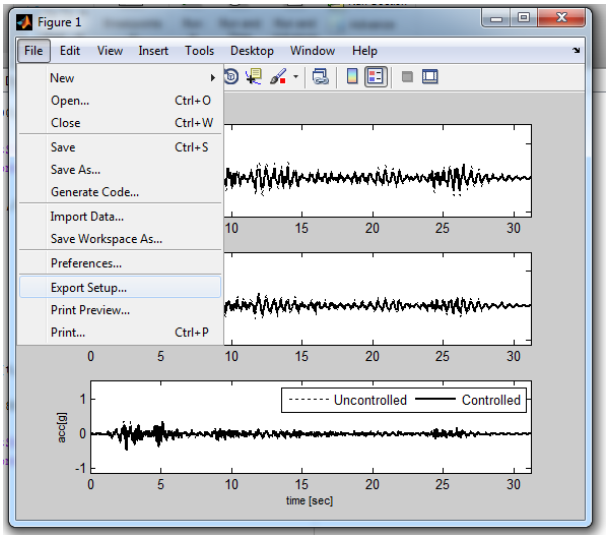
شکل۳. تاریخچه زمانی پاسخ سرعت در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



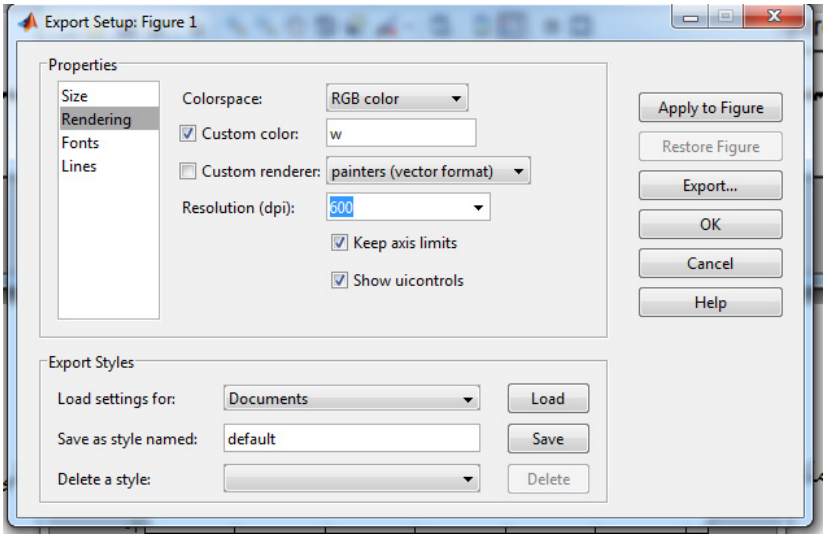
شکل۴. تاریخچه زمانی پاسخ شتاب در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.

برای ذخیره نمودن شکل‌های خروجی Matlab با کیفیت بالا از روش زیر عمل می‌کنیم:

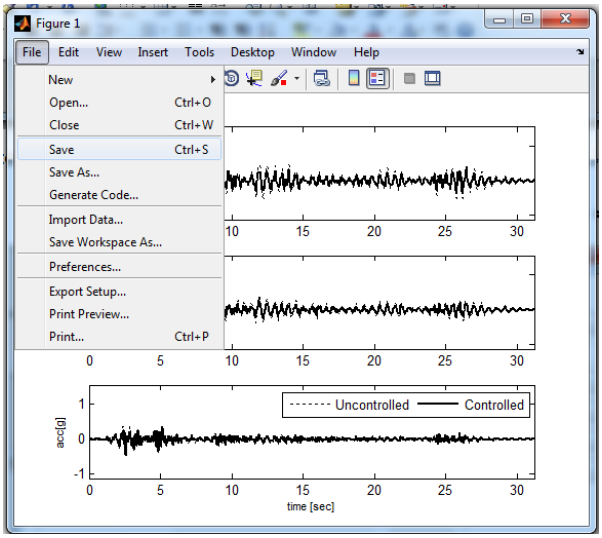
از منوی File گزینه Export Setup انتخاب شود.



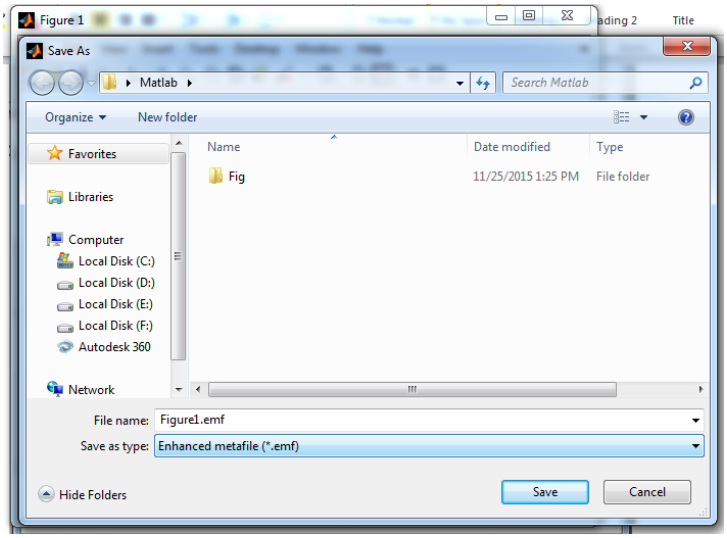
سپس Rendering انتخاب شده و Resolution (dpi) را بر روی 600 تنظیم می‌کنیم. سپس Apply to Figure را کلیک کرده و با زدن دکمه OK از پنجره خارج می‌شویم.



از منوی File گزینه Save انتخاب شود.



در قسمت Save as type فرمت Enhanced metafile (*.emf) انتخاب گردد و دکمه Save را کلیک نمایید.



ب- حوضه گسسته زمانی

معادله (۵) در فضای گسسته زمانی به صورت زیر است

$$\mathbf{q}(i+1) = \mathbf{A}\mathbf{q}(i) + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}(i)$$
$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{C}\mathbf{q}(i) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}(i) \qquad (۹)$$

اندیس i شماره گام زمانی را نشان می‌دهد. ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب ماتریس سیستم و ماتریس مکان ورودی در حوضه گسسته زمانی می‌باشند و از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^i \cdot \Delta t^i}{i!} \right)$$
$$\mathbf{B} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta \tau} d\tau \, \mathbf{B}_c = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^i \cdot \Delta t^{i+1}}{(i+1)i!} \right) \mathbf{B}_c \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا Δt گام زمانی است و برابر با گام زمانی شتاب نگاشت زلزله می‌باشد.

معادله حرکت به فرم معادله (۹) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgd.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور همان مثال قبلی در نظر گرفته می‌شود. مراحل کار تا تعریف سیستم در فضای حالت در حوضه پیوسته زمانی مشابه برنامه 'DynamicResponseAg.m' است. در ادامه با استفاده از دستور c2d سیستم از حوضه پیوسته زمانی sysc تبدیل به سیستم در حوضه گسسته زمانی sysd می‌شود (رابطه ۱۰).

```
sysd=c2d(sysc,st);
```

به طوری که

```
A=sysd.a;
B=sysd.b;
```

ابعاد بردار حالت و خروجی به صورت زیر تعریف می‌شود

```
q(1:2*n,1:length(xg))=0;
y(1:length(mv),1:length(xg))=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت در فضای حالت و در حوضه زمانی پیوسته (رابطه ۱۲) برای هر گام زمانی محاسبه شده و پاسخ‌های سیستم محاسبه می‌گردد.

```
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q(:,i+1)=A*q(:,i)+B*xg(i);
    end
    y(:,i)=C*q(:,i)+D*xg(i);
end

y=y';
```

به طور مشابه با توجه به نوع خروجی می توان پاسخ‌های سیستم را نیز رسم نمود.

حل معادله حرکت در فضای حالت
به کمک نرم‌افزار MATLAB

کاوه کرمی

دانشیار سازه دانشگاه کردستان، دانشکده مهندسی، گروه عمران

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

الف- حوضه پیوسته زمانی

معادله دینامیک حرکت یک سیستم n درجه آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = -\mathbf{m}\ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}} \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{m}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{k}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی با ابعاد $n\times n$ می‌باشند. پاسخ‌های دینامیکی سازه شامل جابجایی، سرعت و شتاب به ترتیب با بردارهای $\mathbf{x}$، $\dot{\mathbf{x}}$ و $\ddot{\mathbf{x}}$ با ابعاد $n\times 1$ نشان داده شده است. سازه تحت اثر شتاب پایه $\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}$ با ابعاد 1×1 قرار می‌گیرد. بردار ℓ با ابعاد $n\times 1$ بردار تاثیر شتاب زمین در جرم‌های سازه است. همچنین نیروی کنترل $\mathbf{u}_{\mathbf{c}}$ با ابعاد $r\times 1$ نیز به سازه اعمال می‌شود. ماتریس $\mathbf{B}_{\mathbf{u}}$ با ابعاد $n\times r$ محل درجات آزادی که نیروهای کنترل در آن‌ها وارد می‌گردد را نشان می‌دهد. ماتریس $\boldsymbol{\Gamma}$ با ابعاد $n\times n$ اندرکنش نیروهای کنترل در طبقات است. رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} - \ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}}\end{aligned} \qquad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

فرم ماتریسی رابطه (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r}\\ -\ell & \mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\end{bmatrix}_{2n\times(r+1)}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\\ \mathbf{u}_{\mathbf{c}}\end{Bmatrix}_{(r+1)\times 1} \qquad (۳)$$

در رابطه بالا ماتریس‌های $\mathbf{O}$ و $\mathbf{I}$ به ترتیب ماتریس‌های صفر و واحد می‌باشند. با تعریف پارامترهای زیر

$$\mathbf{A_c}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad \mathbf{B_c}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r}\\ -\ell & \mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\end{bmatrix}_{2n\times(r+1)} \qquad \mathbf{q}=\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad \mathbf{u}=\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\\ \mathbf{u_c}\end{Bmatrix}_{(r+1)\times 1} \qquad (۴)$$

می توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}&=\mathbf{A_c}\mathbf{q}+\mathbf{B_c}\mathbf{u}\\ \mathbf{y}&=\mathbf{C}\mathbf{q}+\mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned} \qquad (۵)$$

معادله (۵) را معادله حرکت سیستم در فضای حالت[1] و در حوضه زمانی پیوسته[2] می‌نمایند. یکی از ویژگی‌های مهم فضای حالت آن است که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۱) را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۵) تبدیل می‌کند. ماتریس $\mathbf{A_c}$ با ابعاد $2n\times 2n$ ماتریس سیستم نام دارد؛ زیرا شامل ویژگی‌های سیستم از جمله سختی و میرایی است. همچنین ماتریس‌های $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به ترتیب با ابعاد $2n\times(r+1)$، $m\times 2n$ و $m\times(r+1)$ ماتریس‌های تشکیل دهنده فضای حالت است. بردار $\mathbf{y}$ با ابعاد $m\times 1$ خروجی سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به نوع خروجی سیستم ماتریس‌های $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

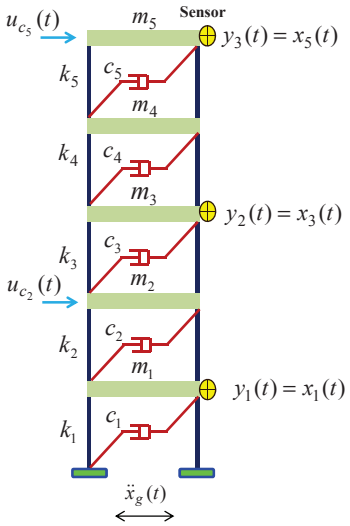
خروجی جابجایی	خروجی سرعت	خروجی شتاب
$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C_S} & \mathbf{O}_{m\times n}\end{bmatrix}$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times(r+1)}$	$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{m\times n} & \mathbf{C_S}\end{bmatrix}$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times(r+1)}$	$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}$ $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C_S}\ell & \mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\end{bmatrix}$

(۶)

ماتریس $\mathbf{C_S}$ با ابعاد $m\times n$ محل نصب حسگرها را مشخص می‌کند. معادله حرکت به فرم معادله (۵) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgUc.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور مثال زیر در نظر گرفته می‌شود.

[1] State Space
[2] Continues Time Domain

مثال: شکل (۱) یک ساختمان پنج طبقه را نشان می‌دهد؛ که مشخصات سازه‌ای آن در جدول (۱) آمده است. در این ساختمان از سه عدد حسگر برای اندازه‌گیری خروجی‌های مربوط به جابجایی طبقات اول، سوم و پنجم استفاده شده است. همچنین در طبقات دوم و پنجم نیروهای کنترلی به سازه اعمال می‌گردد. نیروی کنترل در طبقات برابر با شتاب زلزله ضرب در جرم آن طبقه است.



شکل ۱. ساختمان پنج طبقه

جدول ۱

پارامترهای سازه‌ای ساختمان پنج طبقه

St. No	Mass (ton)	Stiffness (kN/m)
1	12	**22000**
2	12	**20000**
3	12	**17800**
4	11	**16000**
5	10	**14300**

$\xi = 5\%$

ورودی‌های این برنامه که کاربر باید آن را وارد نماید شامل موارد زیر است:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Xg=xlsread('ElCentro.xls', 'Accelerograph', 'B3:B1562');
out='acc';
m=diag([12 12 12 11 10])*1e3;
k0=[22e3 20e3 17.8e3 16e3 14.3e3]*1e3;
xi=0.05;
st0=0.02;
st=0.01;
mv=[1 3 5];
rv=[2 5];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

که در آن Xg شتاب زلزله El-Centro می‌باشد که معمولا بر حسب $g=9.807\ m/s^2$ مقیاس شده است و توسط دستور xlsread از فایل Excel تحت عنوان 'ElCentro.xls' خوانده می‌شود. Out نوع خروجی سیستم را نشان می‌دهد که می‌توان از 'dis'، 'vel' و 'acc' به ترتیب برای نمایش خروجی‌های جابجایی، سرعت و شتاب سیستم استفاده کرد. m ماتریس جرم طبقات است که با استفاده از دستور diag به صورت قطری تشکیل می‌گردد. k0 بردار سختی طبقات است. xi ضریب میرایی سیستم را مشخص می‌کند. st0 برابر با گام زمانی شتاب نگاشت مورد استفاده است. اگر بخواهیم از گام زمانی کوچکتر یا بزرگتری استفاده کنیم توسط st تعیین می‌گردد. mv و rv به ترتیب بردار مکان خروجی‌ها (محل نصب حسگرها) و مکان ورودی‌ها (محل اعمال نیروی‌های کنترل) در درجات آزادی مربوطه را نشان می‌دهد.

مدت زمان زلزله T ، بردار زمان t و تعداد طبقات n نیز با استفاده از دستور زیر محاسبه می‌شود:

```
T=(length(Xg)-1)*st0;
t=0:st:T;
n=length (m);
```

در دستور زیر به کمک تابع XG درون‌یابی انجام گرفته و شتاب زلزله در هر گام زمانی st تعیین می‌گردد؛ و نهایتا در شتاب g=9.807 m/s^2 نیز ضرب شده است.

```
xg(1:((T/st)+1))=0;
for i=1:length(xg)
    xg(i)=XG(Xg,st0,(i-1)*st)*9.807;
end
```

با استفاده از تابع‌های StiffnessMatrix و DampingMatrix به ترتیب ماتریس‌های سختی و میرایی تشکیل می‌شود.

```
k=StiffnessMatrix(k0);
c=DampingMatrix(m ,k,xi);
```

تابع StiffnessMatrix ماتریس سختی را بر اساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{cases} \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i + k_{i+1} & i \neq n_m \\ \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i & i = n_m \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = -k_{Max(i,j)} & |i-j| = 1 \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $\mathrm{K}_{(i,j)}$ نشان دهنده (i,j)اُمین درایه ماتریس سختی می‌باشد. همچنین k_i سختی طبقه iاُم است. تابع DampingMatrix نیز ماتریس میرایی را براساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi} \\ &\mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi} = 2\xi \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = 2\xi \left(\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}^{-1} \end{aligned} \qquad (۸)$$

که در رابطه بالا، $\mathbf{\Phi}$ و $\boldsymbol{\omega}$ به ترتیب ماتریس اشکال مودی و ماتریس فرکانس سیستم می‌باشند. پارامتر ξ ضریب میرایی سیستم است. نیروهای کنترل نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
uc(1:length(rv),1:length(xg))=0;
for i=1:length(rv)
    uc(i,:)=m(rv(i),rv(i))*xg;
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

تابع StateSpaceAgUc ماتریس‌های $\mathbf{A_c}$، $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را با توجه به نوع خروجی out تشکیل می‌دهد.

```
[Ac,Bc,C,D]=StateSpaceAgUc(m,k,c,rv,mv,out);
```

دستور SS سیستم sysc را در فضای حالت و در فضای پیوسته زمانی تشکیل می‌دهد

```
sysc=ss(Ac,Bc,C,D);
```

به طوری که

```
Ac=sysc.a
Bc=sysc.b
C=sysc.c
D=sysc.d
```

دستور زیر شرایط اولیه (بردار حالت اولیه که شامل جابجایی اولیه و سرعت اولیه است) مسئله را تعیین می‌کند:

```
q0(1:2*n,1)=0;
```

با استفاده از دستور زیر ماتریس **u** تشکیل و معادلات حرکت سیستم در فضای حالت محاسبه می‌گردد:

```
u(1,:)=xg;
u(2:length(rv)+1,:)=uc;
[y]=lsim(sysc,u,t,q0);
```

دستور lsim تاریخچه زمانی پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی را تحت اثر یک ورودی دلخواه شبیه سازه می‌کند. خروجی این دستور همان y یا بردار خروجی سیستم است. برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
u(2:length(rv)+1,:)=0;
[y0]=lsim(sysc,u,t,q0);
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی جابجایی باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'dis')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('dis[cm]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

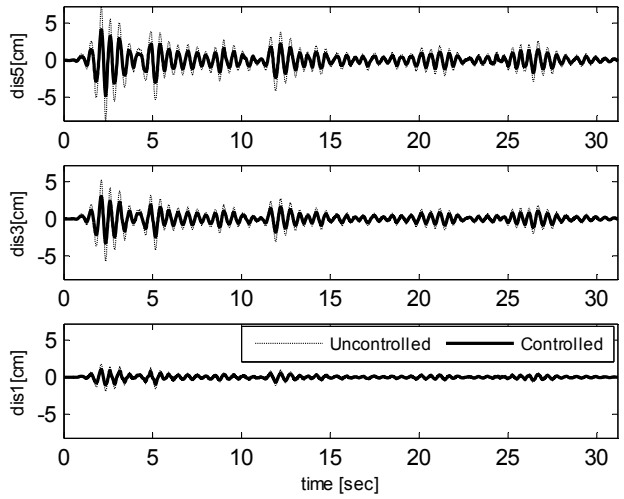
پاسخ سازه در حالتی که خروجی سرعت باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'vel')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('vel[cm/s]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

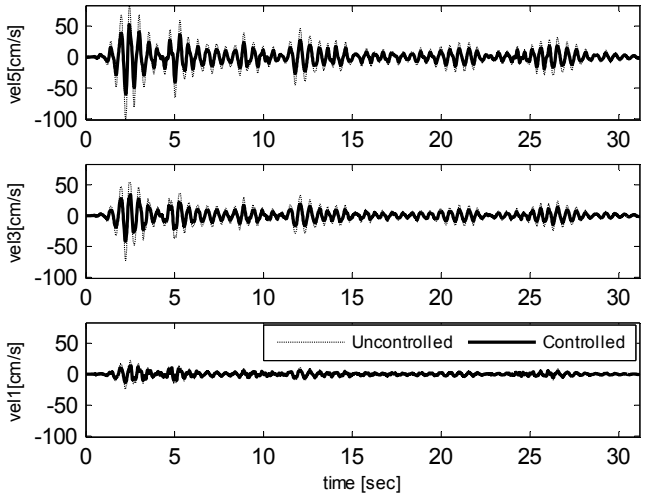
پاسخ سازه در حالتی که خروجی شتاب باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'acc')==1
    LB=min(min(y0/9.807));
    UB=max(max(y0/9.807));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)/9.807,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)/9.807,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('acc[g]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

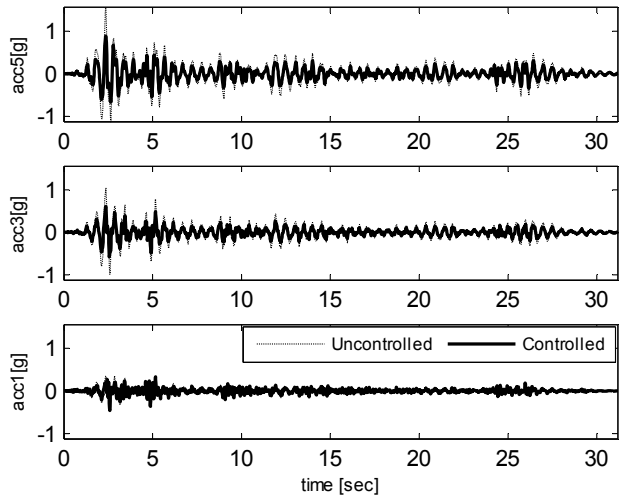
پاسخ‌های سازه به صورت زیر می باشد:



شکل۲. تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



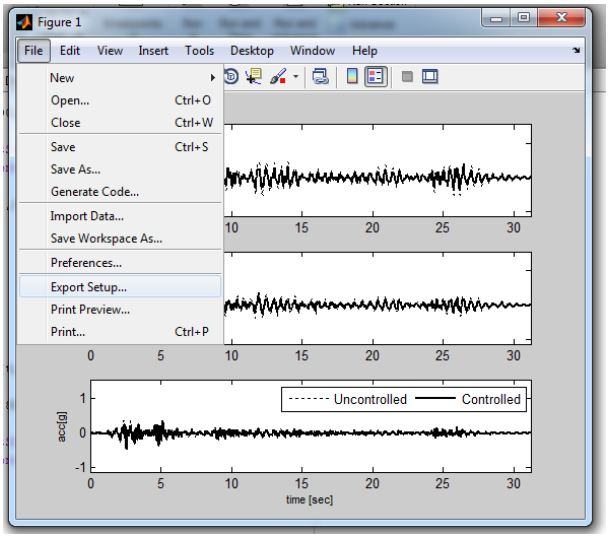
شکل۳. تاریخچه زمانی پاسخ سرعت در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



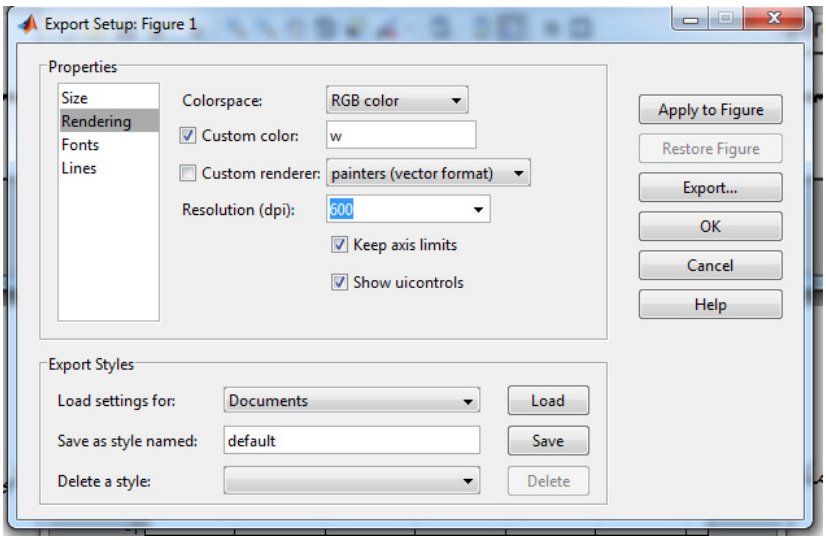
شکل۴. تاریخچه زمانی پاسخ شتاب در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.

برای ذخیره نمودن شکل‌های خروجی Matlab با کیفیت بالا از روش زیر عمل می‌کنیم:

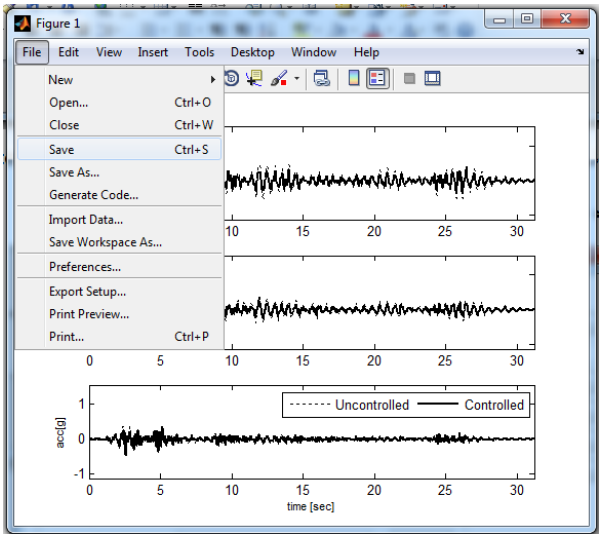
از منوی File گزینه Export Setup انتخاب شود.



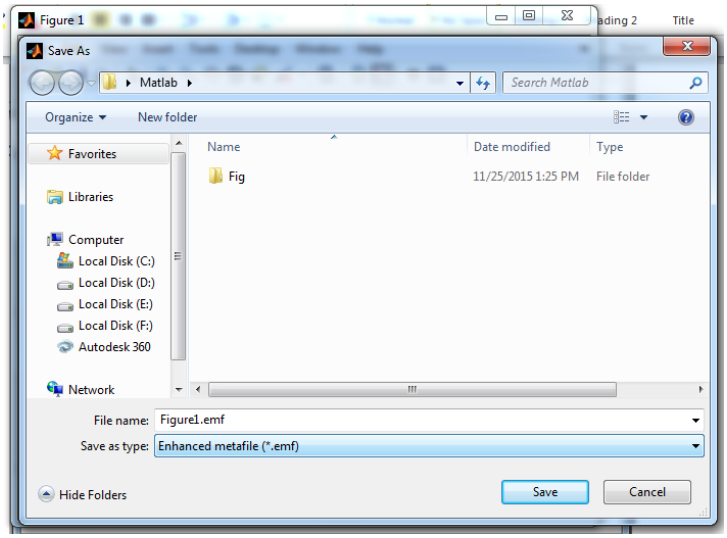
سپس Rendering انتخاب شده و Resolution (dpi) را بر روی 600 تنظیم می‌کنیم. سپس Apply to Figure را کلیک کرده و با زدن دکمه OK از پنجره خارج می‌شویم.



از منوی File گزینه Save انتخاب شود.



در قسمت Save as type فرمت Enhanced metafile (*.emf) انتخاب گردد و دکمه Save را کلیک نمایید.



ب- حوضه گسسته زمانی

معادله (۵) در فضای گسسته زمانی به صورت زیر است

$$\mathbf{q}(i+1) = \mathbf{A}\mathbf{q}(i) + \mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$
$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{C}\mathbf{q}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(i) \qquad (۹)$$

اندیس i شماره گام زمانی را نشان می‌دهد. ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب ماتریس سیستم و ماتریس مکان ورودی در حوضه گسسته زمانی می‌باشند و از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^i \cdot \Delta t^i}{i!} \right)$$
$$\mathbf{B} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta \tau} d\tau \, \mathbf{B}_c = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^i \cdot \Delta t^{i+1}}{(i+1)i!} \right) \mathbf{B}_c \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا Δt گام زمانی است و برابر با گام زمانی شتاب نگاشت زلزله می‌باشد.

معادله حرکت به فرم معادله (۹) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgUcd.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور همان مثال قبلی در نظر گرفته می‌شود. مراحل کار تا تعریف سیستم در فضای حالت در حوضه پیوسته زمانی مشابه برنامه 'DynamicResponseAgUc.m' است. در ادامه با استفاده از دستور c2d سیستم از حوضه پیوسته زمانی sysc تبدیل به سیستم در حوضه گسسته زمانی sysd می‌شود (رابطه ۱۰).

```
sysd=c2d(sysc,st);
```

به طوری که

```
A=sysd.a;
B=sysd.b;
```

ابعاد بردار حالت و خروجی به صورت زیر تعریف می‌شود

```
q(1:2*n,1:length(xg))=0;
y(1:length(mv),1:length(xg))=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت در فضای حالت و در حوضه زمانی پیوسته (رابطه ۱۲) برای هر گام زمانی محاسبه شده و پاسخ‌های سیستم محاسبه می‌گردد.

```
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q(:,i+1)=A*q(:,i)+B*u(:,i);
    end
    y(:,i)=C*q(:,i)+D*u(:,i);
end

y=y';
```

در اینجا نیز مشابه با حالت قبل، برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
u(2:length(rv)+1,:)=0;
q0(1:2*n,1:length(xg))=0;
y0(1:length(mv),1:length(xg))=0;
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q0(:,i+1)=A*q0(:,i)+B*u(:,i);
    end
    y0(:,i)=C*q0(:,i)+D*u(:,i);
end

y0=y0';
```

به طور مشابه با توجه به نوع خروجی می توان پاسخ‌های سیستم را نیز رسم نمود.

حل معادله حرکت در فضای حالت
به کمک نرم‌افزار MATLAB

کاوه کرمی

دانشیار سازه دانشگاه کردستان، دانشکده مهندسی، گروه عمران

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

الف- حوضه پیوسته زمانی

معادله دینامیک حرکت یک سیستم n درجه آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = -\mathbf{m}\ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}} \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{m}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{k}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی با ابعاد $n\times n$ می‌باشند. پاسخ‌های دینامیکی سازه شامل جابجایی، سرعت و شتاب به ترتیب با بردارهای $\mathbf{x}$، $\dot{\mathbf{x}}$ و $\ddot{\mathbf{x}}$ با ابعاد $n\times 1$ نشان داده شده است. سازه تحت اثر شتاب پایه $\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}$ با ابعاد 1×1 قرار می‌گیرد. بردار ℓ با ابعاد $n\times 1$ بردار تاثیر شتاب زمین در جرم‌های سازه است. همچنین نیروی کنترل $\mathbf{u}_{\mathbf{c}}$ با ابعاد $r\times 1$ نیز به سازه اعمال می‌شود. ماتریس $\mathbf{B}_{\mathbf{u}}$ با ابعاد $n\times r$ محل درجات آزادی که نیروهای کنترل در آن‌ها وارد می‌گردد را نشان می‌دهد. ماتریس $\mathbf{\Gamma}$ با ابعاد $n\times n$ اندرکنش نیروهای کنترل در طبقات است. رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} - \ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}}\end{aligned} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

فرم ماتریسی رابطه (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r}\\ -\ell & \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\end{bmatrix}_{2n\times(r+1)}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\\ \mathbf{u}_{\mathbf{c}}\end{Bmatrix}_{(r+1)\times 1} \qquad (۳)$$

در رابطه بالا ماتریس‌های $\mathbf{O}$ و $\mathbf{I}$ به ترتیب ماتریس‌های صفر و واحد می‌باشند. با تعریف پارامترهای زیر

$$\mathbf{A_c}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad \mathbf{B_c}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1} & \mathbf{O}_{n\times r}\\ -\ell & \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma B_u}\end{bmatrix}_{2n\times(r+1)} \qquad \mathbf{q}=\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad \mathbf{u}=\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\\ \mathbf{u_c}\end{Bmatrix}_{(r+1)\times 1} \qquad (۴)$$

می توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}&=\mathbf{A_c q}+\mathbf{B_c u}\\ \mathbf{y}&=\mathbf{C q}+\mathbf{D u}\end{aligned} \qquad (۵)$$

معادله (۵) را معادله حرکت سیستم در فضای حالت[1] و در حوضه زمانی پیوسته[2] می‌نماند. یکی از ویژگی‌های مهم فضای حالت آن است که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۱) را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۵) تبدیل می‌کند. ماتریس $\mathbf{A_c}$ با ابعاد $2n\times 2n$ ماتریس سیستم نام دارد؛ زیرا شامل ویژگی‌های سیستم از جمله سختی و میرایی است. همچنین ماتریس‌های $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به ترتیب با ابعاد $2n\times(r+1)$، $m\times 2n$ و $m\times(r+1)$ ماتریس‌های تشکیل دهنده فضای حالت است. بردار $\mathbf{y}$ با ابعاد $m\times 1$ خروجی سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به نوع خروجی سیستم ماتریس‌های $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

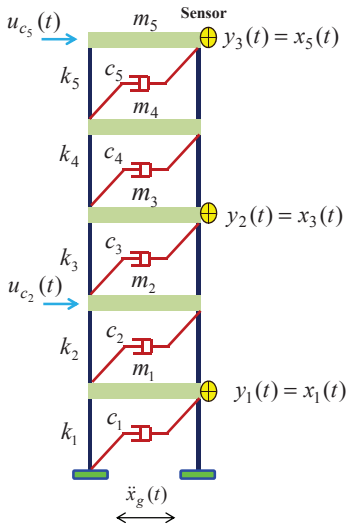
خروجی جابجایی	خروجی سرعت	خروجی شتاب
$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C_S} & \mathbf{O}_{m\times n}\end{bmatrix}$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times(r+1)}$	$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{m\times n} & \mathbf{C_S}\end{bmatrix}$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times(r+1)}$	$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}$ $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C_S}\ell & \mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma B_u}\end{bmatrix}$

(۶)

ماتریس $\mathbf{C_S}$ با ابعاد $m\times n$ محل نصب حسگرها را مشخص می‌کند. معادله حرکت به فرم معادله (۵) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgUc.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور مثال زیر در نظر گرفته می‌شود.

[1] State Space
[2] Continues Time Domain

مثال: شکل (۱) یک ساختمان پنج طبقه را نشان می‌دهد؛ که مشخصات سازه‌ای آن در جدول (۱) آمده است. در این ساختمان از سه عدد حسگر برای اندازه‌گیری خروجی‌های مربوط به جابجایی طبقات اول، سوم و پنجم استفاده شده است. همچنین در طبقات دوم و پنجم نیروهای کنترلی به سازه اعمال می‌گردد. نیروی کنترل در طبقات برابر با شتاب زلزله ضرب در جرم آن طبقه است.



شکل ۱. ساختمان پنج طبقه

جدول ۱

پارامترهای سازه‌ای ساختمان پنج طبقه

St. No	Mass (ton)	Stiffness (kN/m)
1	12	**22000**
2	12	**20000**
3	12	**17800**
4	11	**16000**
5	10	**14300**

$\xi = 5\%$

ورودی‌های این برنامه که کاربر باید آن را وارد نماید شامل موارد زیر است:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Xg=xlsread('ElCentro.xls', 'Accelerograph', 'B3:B1562');
out='acc';
m=diag([12 12 12 11 10])*1e3;
k0=[22e3 20e3 17.8e3 16e3 14.3e3]*1e3;
xi=0.05;
st0=0.02;
st=0.01;
mv=[1 3 5];
rv=[2 5];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

که در آن Xg شتاب زلزله El-Centro می‌باشد که معمولا بر حسب $g=9.807\ m/s^2$ مقیاس شده است و توسط دستور xlsread از فایل Excel تحت عنوان 'ElCentro.xls' خوانده می‌شود. Out نوع خروجی سیستم را نشان می‌دهد که می‌توان از 'dis'، 'vel' و 'acc' به ترتیب برای نمایش خروجی‌های جابجایی، سرعت و شتاب سیستم استفاده کرد. m ماتریس جرم طبقات است که با استفاده از دستور diag به صورت قطری تشکیل می‌گردد. k0 بردار سختی طبقات است. xi ضریب میرایی سیستم را مشخص می‌کند. st0 برابر با گام زمانی شتاب نگاشت مورد استفاده است. اگر بخواهیم از گام زمانی کوچکتر یا بزرگتری استفاده کنیم توسط st تعیین می‌گردد. mv و rv به ترتیب بردار مکان خروجی‌ها (محل نصب حسگرها) و مکان ورودی‌ها (محل اعمال نیروی‌های کنترل) در درجات آزادی مربوطه را نشان می‌دهد.

مدت زمان زلزله T ، بردار زمان t و تعداد طبقات n نیز با استفاده از دستور زیر محاسبه می‌شود:

```
T=(length(Xg)-1)*st0;
t=0:st:T;
n=length (m);
```

در دستور زیر به کمک تابع XG درون‌یابی انجام گرفته و شتاب زلزله در هر گام زمانی st تعیین می‌گردد؛ و نهایتا در شتاب $g=9.807\ m/s^2$ نیز ضرب شده است.

```
xg(1:((T/st)+1))=0;
for i=1:length(xg)
    xg(i)=XG(Xg,st0,(i-1)*st)*9.807;
end
```

با استفاده از تابع‌های StiffnessMatrix و DampingMatrix به ترتیب ماتریس‌های سختی و میرایی تشکیل می‌شود.

```
k=StiffnessMatrix(k0);
c=DampingMatrix(m ,k,xi);
```

تابع StiffnessMatrix ماتریس سختی را بر اساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{cases} \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i + k_{i+1} & i \neq n_m \\ \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i & i = n_m \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = -k_{Max(i,j)} & |i-j| = 1 \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $\mathrm{K}_{(i,j)}$ نشان دهنده (i,j)اُمین درایه ماتریس سختی می‌باشد. همچنین k_i سختی طبقه iاُم است. تابع DampingMatrix نیز ماتریس میرایی را براساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi} \\ &\mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi} = 2\xi\boldsymbol{\omega}\mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = 2\xi \left(\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}^{-1} \end{aligned} \qquad (۸)$$

که در رابطه بالا، $\mathbf{\Phi}$ و $\boldsymbol{\omega}$ به ترتیب ماتریس اشکال مودی و ماتریس فرکانس سیستم می‌باشند. پارامتر ξ ضریب میرایی سیستم است. نیروهای کنترل نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
uc(1:length(rv),1:length(xg))=0;
for i=1:length(rv)
    uc(i,:)=m(rv(i),rv(i))*xg;
```

```
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

تابع StateSpaceAgUc ماتریس‌های $\mathbf{A_c}$، $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را با توجه به نوع خروجی out تشکیل می‌دهد.

```
[Ac,Bc,C,D]=StateSpaceAgUc(m,k,c,rv,mv,out);
```

دستور SS سیستم sysc را در فضای حالت و در فضای پیوسته زمانی تشکیل می‌دهد

```
sysc=ss(Ac,Bc,C,D);
```

به طوری که

Ac=sysc.a
Bc=sysc.b
C=sysc.c
D=sysc.d

دستور زیر شرایط اولیه (بردار حالت اولیه که شامل جابجایی اولیه و سرعت اولیه است) مسئله را تعیین می‌کند:

```
q0(1:2*n,1)=0;
```

با استفاده از دستور زیر ماتریس **u** تشکیل و معادلات حرکت سیستم در فضای حالت محاسبه می‌گردد:

```
u(1,:)=xg;
u(2:length(rv)+1,:)=uc;
[y]=lsim(sysc,u,t,q0);
```

دستور lsim تاریخچه زمانی پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی را تحت اثر یک ورودی دلخواه شبیه سازه می‌کند. خروجی این دستور همان y یا بردار خروجی سیستم است. برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
u(2:length(rv)+1,:)=0;
[y0]=lsim(sysc,u,t,q0);
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی جابجایی باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'dis')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('dis[cm]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی سرعت باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

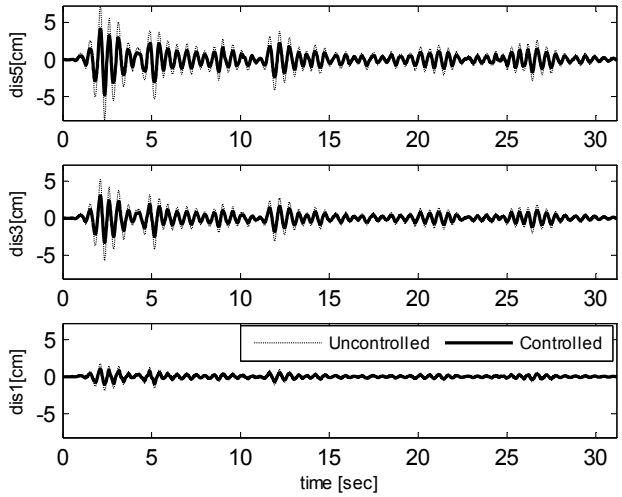
```
if strcmp(out,'vel')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('vel[cm/s]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی شتاب باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

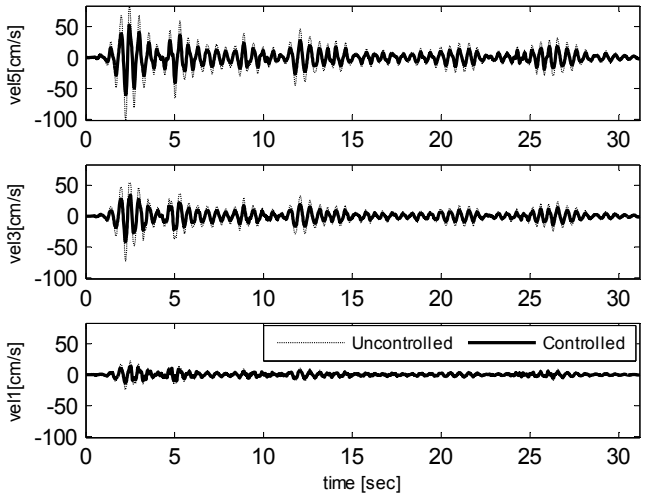
```
if strcmp(out,'acc')==1
    LB=min(min(y0/9.807));
    UB=max(max(y0/9.807));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)/9.807,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)/9.807,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('acc[g]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
```

```
    end
end
```

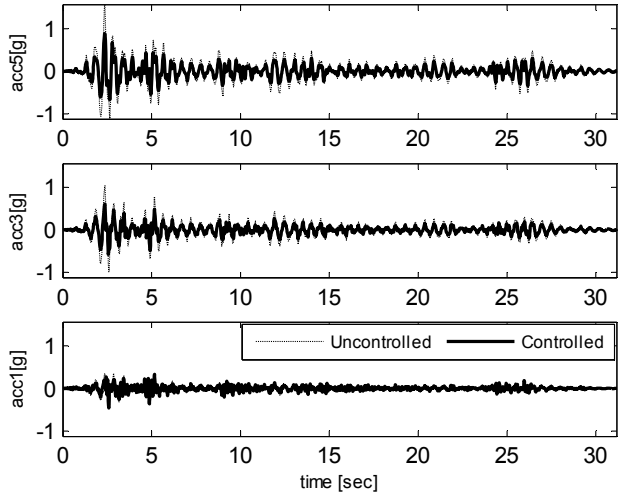
پاسخ‌های سازه به صورت زیر می باشد:



شکل۲. تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



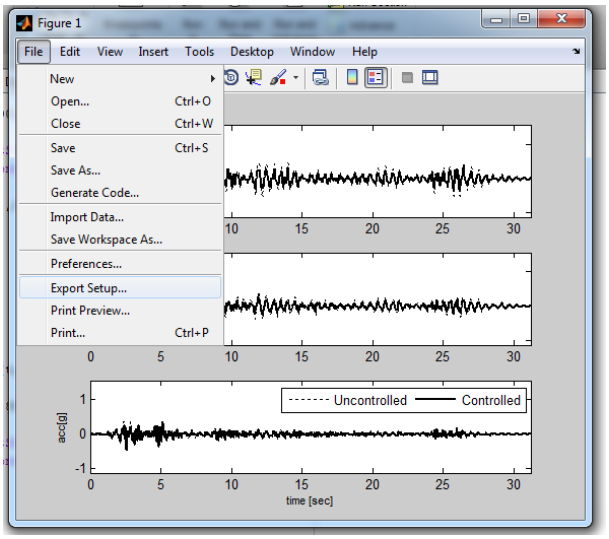
شکل۳. تاریخچه زمانی پاسخ سرعت در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



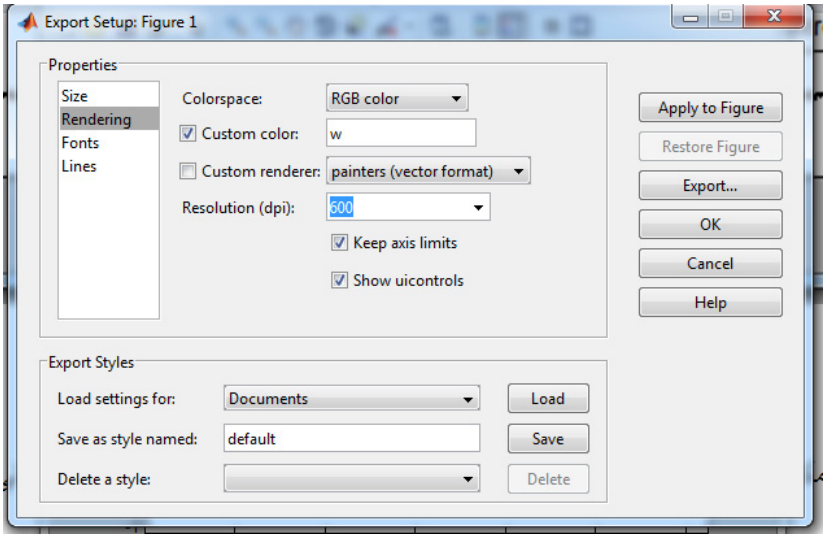
شکل۴. تاریخچه زمانی پاسخ شتاب در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.

برای ذخیره نمودن شکل‌های خروجی Matlab با کیفیت بالا از روش زیر عمل می‌کنیم:

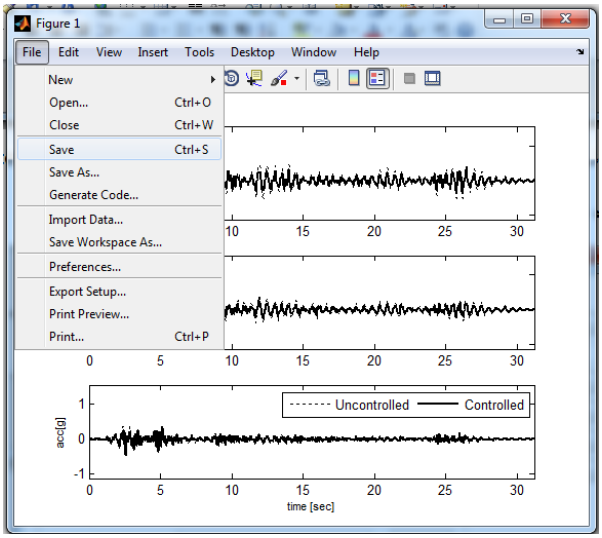
از منوی File گزینه Export Setup انتخاب شود.



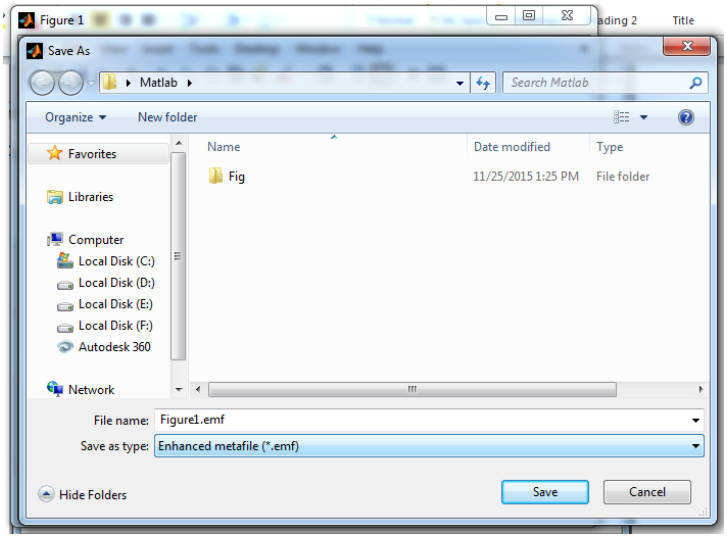
سپس Rendering انتخاب شده و Resolution (dpi) را بر روی 600 تنظیم می‌کنیم. سپس Apply to Figure را کلیک کرده و با زدن دکمه OK از پنجره خارج می‌شویم.



از منوی File گزینه Save انتخاب شود.



در قسمت Save as type فرمت Enhanced metafile (*.emf) انتخاب گردد و دکمه Save را کلیک نمایید.



ب- حوضه گسسته زمانی

معادله (۵) در فضای گسسته زمانی به صورت زیر است

$$\mathbf{q}(i+1) = \mathbf{A}\mathbf{q}(i) + \mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$
$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{C}\mathbf{q}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(i) \qquad (۹)$$

اندیس i شماره گام زمانی را نشان می‌دهد. ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب ماتریس سیستم و ماتریس مکان ورودی در حوضه گسسته زمانی می‌باشند و از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^i \cdot \Delta t^i}{i!} \right)$$
$$\mathbf{B} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta \tau} d\tau \, \mathbf{B}_c = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^i \cdot \Delta t^{i+1}}{(i+1)i!} \right) \mathbf{B}_c \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا Δt گام زمانی است و برابر با گام زمانی شتاب نگاشت زلزله می‌باشد.

معادله حرکت به فرم معادله (۹) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgUcd.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور همان مثال قبلی در نظر گرفته می‌شود. مراحل کار تا تعریف سیستم در فضای حالت در حوضه پیوسته زمانی مشابه برنامه 'DynamicResponseAgUc.m' است. در ادامه با استفاده از دستور c2d سیستم از حوضه پیوسته زمانی sysc تبدیل به سیستم در حوضه گسسته زمانی sysd می‌شود (رابطه ۱۰).

```
sysd=c2d(sysc,st);
```

به طوری که

```
A=sysd.a;
B=sysd.b;
```

ابعاد بردار حالت و خروجی به صورت زیر تعریف می‌شود

```
q(1:2*n,1:length(xg))=0;
y(1:length(mv),1:length(xg))=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت در فضای حالت و در حوضه زمانی پیوسته (رابطه ۱۲) برای هر گام زمانی محاسبه شده و پاسخ‌های سیستم محاسبه می‌گردد.

```
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q(:,i+1)=A*q(:,i)+B*u(:,i);
    end
    y(:,i)=C*q(:,i)+D*u(:,i);
end

y=y';
```

در اینجا نیز مشابه با حالت قبل، برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
u(2:length(rv)+1,:)=0;
q0(1:2*n,1:length(xg))=0;
y0(1:length(mv),1:length(xg))=0;
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q0(:,i+1)=A*q0(:,i)+B*u(:,i);
    end
    y0(:,i)=C*q0(:,i)+D*u(:,i);
end

y0=y0';
```

به طور مشابه با توجه به نوع خروجی می توان پاسخ‌های سیستم را نیز رسم نمود.

حل معادله حرکت در فضای حالت
به کمک نرم‌افزار MATLAB

کاوه کرمی

دانشیار سازه دانشگاه کردستان، دانشکده مهندسی، گروه عمران

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

الف- حوضه پیوسته زمانی

معادله دینامیک حرکت یک سیستم n درجه آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = -\mathbf{m}\ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}} \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{m}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{k}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی با ابعاد $n\times n$ می‌باشند. پاسخ‌های دینامیکی سازه شامل جابجایی، سرعت و شتاب به ترتیب با بردارهای $\mathbf{x}$، $\dot{\mathbf{x}}$ و $\ddot{\mathbf{x}}$ با ابعاد $n\times 1$ نشان داده شده است. سازه تحت اثر شتاب پایه $\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}$ با ابعاد 1×1 قرار می‌گیرد. بردار ℓ با ابعاد $n\times 1$ بردار تاثیر شتاب زمین در جرم‌های سازه است. همچنین نیروی کنترل $\mathbf{u}_{\mathbf{c}}$ با ابعاد $r\times 1$ نیز به سازه اعمال می‌شود. ماتریس $\mathbf{B}_{\mathbf{u}}$ با ابعاد $n\times r$ محل درجات آزادی که نیروهای کنترل در آن‌ها وارد می‌گردد را نشان می‌دهد. ماتریس $\mathbf{\Gamma}$ با ابعاد $n\times n$ اندرکنش نیروهای کنترل در طبقات است. رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} - \ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}}\end{aligned} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

فرم ماتریسی رابطه (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times r}\\ \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\end{bmatrix}_{2n\times r}\mathbf{u}_{\mathbf{c}} \qquad (۳)$$

در رابطه بالا ماتریس‌های $\mathbf{O}$ و $\mathbf{I}$ به ترتیب ماتریس‌های صفر و واحد می‌باشند. فرض می‌شود که بردار نیروی کنترل $\mathbf{u_c}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{u_c} = \mathbf{G}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{G_k} & \mathbf{G_c}\end{bmatrix}_{r\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad (۴)$$

که در آن ماتریس $\mathbf{G}$ با ابعاد $r\times 2n$ ماتریس بهره[1] نام دارد. ماتریس‌های $\mathbf{G_k}$ و $\mathbf{G_c}$ با ابعاد $r\times n$ از جنس ماتریس‌های سختی و میرایی می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n}\\ \mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_k} & \mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_c}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad (۵)$$

در نتیجه می‌توان رابطه (۵) به صورت زیر ساده نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_k}) & -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_c})\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} \qquad (۶)$$

با تعریف پارامترهای زیر

$$\mathbf{A_c} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_k}) & -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_c})\end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad \mathbf{B_c} = \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad (۷)$$

می توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A_c}\mathbf{q} + \mathbf{B_c}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\end{aligned} \qquad (۸)$$

معادله (۸) را معادله حرکت سیستم در فضای حالت[2] و در حوضه زمانی پیوسته[3] می‌نماند. یکی از ویژگی‌های مهم فضای حالت آن است که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۱) را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۸) تبدیل می‌کند. ماتریس $\mathbf{A_c}$ با ابعاد $2n\times 2n$ ماتریس سیستم نام دارد؛ زیرا شامل ویژگی‌های سیستم از جمله سختی و میرایی است. همچنین ماتریس‌های $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به ترتیب با ابعاد $2n\times 1$، $m\times 2n$ و $m\times 1$ ماتریس‌های تشکیل دهنده فضای حالت است. بردار $\mathbf{y}$ با ابعاد $m\times 1$ خروجی سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به نوع خروجی سیستم ماتریس‌های $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

[1] Gain Matrix
[2] State Space
[3] Continues Time Domain

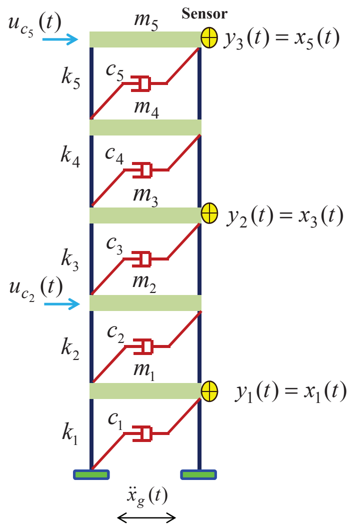
خروجی جابجایی	خروجی سرعت	خروجی شتاب
$\mathbf{C}=[\mathbf{C_S}\quad \mathbf{O}_{m\times n}]$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times 1}$	$\mathbf{C}=[\mathbf{O}_{m\times n}\quad \mathbf{C_S}]$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times 1}$	$\mathbf{C}=\left[-\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{k}-\Gamma\mathbf{B_u}\mathbf{G_k})\quad -\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{c}-\Gamma\mathbf{B_u}\mathbf{G_c})\right]$ $\mathbf{D}=-\mathbf{C_S}\ell$

(۹)

ماتریس $\mathbf{C_S}$ با ابعاد $m\times n$ محل نصب حسگرها را مشخص می‌کند. معادله حرکت به فرم معادله (۸) را می‌توان با استفاده از برنامه ‘DynamicResponseAgUcG.m’ در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور مثال زیر در نظر گرفته می‌شود.

مثال: شکل (۱) یک ساختمان پنج طبقه را نشان می‌دهد؛ که مشخصات سازه‌ای آن در جدول (۱) آمده است. در این ساختمان از سه عدد حسگر برای اندازه‌گیری خروجی‌های مربوط به جابجایی طبقات اول، سوم و پنجم استفاده شده است. همچنین در طبقات دوم و پنجم نیروهای کنترلی به سازه اعمال می‌گردد. ضریب بهره مربوط به نیروهای کنترل در طبقات دوم و سوم به صورت زیر است.

$$\mathbf{G_k}=\begin{bmatrix}0 & -0.1k_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.15k_5\end{bmatrix}_{2\times 5}\qquad \mathbf{G_c}=\begin{bmatrix}0 & -c_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5\end{bmatrix}_{2\times 5}$$



شکل ۱. ساختمان پنج طبقه

جدول ۱

پارامترهای سازه‌ای ساختمان پنج طبقه

St. No	Mass (ton)	Stiffness (kN/m)
1	12	22000
2	12	20000
3	12	17800
4	11	16000
5	10	14300

$\xi = 5\%$

ورودی‌های این برنامه که کاربر باید آن را وارد نماید شامل موارد زیر است:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Xg=xlsread('ElCentro.xls', 'Accelerograph', 'B3:B1562');
out='acc';
m=diag([12 12 12 11 10])*1e3;
k0=[22e3 20e3 17.8e3 16e3 14.3e3]*1e3;
xi=0.05;
st0=0.02;
st=0.01;
mv=[1 3 5];
rv=[2 5];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

که در آن Xg شتاب زلزله El-Centro می‌باشد که معمولا بر حسب $g=9.807\ m/s^2$ مقیاس شده است و توسط دستور xlsread از فایل Excel تحت عنوان 'ElCentro.xls' خوانده می‌شود. Out نوع خروجی سیستم را نشان می‌دهد که می‌توان از 'dis'، 'vel' و 'acc' به ترتیب برای نمایش خروجی‌های جابجایی، سرعت و شتاب سیستم استفاده کرد. m ماتریس جرم طبقات است که با استفاده از دستور diag به صورت قطری تشکیل می‌گردد. k0 بردار سختی طبقات است. xi ضریب میرایی سیستم را مشخص می‌کند. st0 برابر با گام زمانی شتاب نگاشت مورد استفاده است. اگر بخواهیم از گام زمانی کوچکتر یا بزرگتری استفاده کنیم توسط st تعیین می‌گردد. mv و rv به ترتیب بردار مکان خروجی‌ها (محل نصب حسگرها) و مکان ورودی‌ها (محل اعمال نیروی‌های کنترل) در درجات آزادی مربوطه را نشان می‌دهد.

مدت زمان زلزله T ، بردار زمان t و تعداد طبقات n نیز با استفاده از دستور زیر محاسبه می‌شود:

```
T=(length(Xg)-1)*st0;
t=0:st:T;
n=length (m);
```

در دستور زیر به کمک تابع XG درون‌یابی انجام گرفته و شتاب زلزله در هر گام زمانی st تعیین می‌گردد؛ و نهایتا در شتاب $g=9.807\ m/s^2$ نیز ضرب شده است.

```
xg(1:((T/st)+1))=0;
for i=1:length(xg)
    xg(i)=XG(Xg,st0,(i-1)*st)*9.807;
end
```

با استفاده از تابع‌های StiffnessMatrix و DampingMatrix به ترتیب ماتریس‌های سختی و میرایی تشکیل می‌شود.

```
k=StiffnessMatrix(k0);
c=DampingMatrix(m ,k,xi);
```

تابع StiffnessMatrix ماتریس سختی را بر اساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{cases} \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i + k_{i+1} & i \neq n_m \\ \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i & i = n_m \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = -k_{Max(i,j)} & |i-j| = 1 \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\mathrm{K}_{(i,j)}$ نشان دهنده (i,j)اُمین درایه ماتریس سختی می‌باشد. همچنین k_i سختی طبقه iاُم است. تابع DampingMatrix نیز ماتریس میرایی را براساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi} \\ &\mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi} = 2\xi \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = 2\xi \left(\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}^{-1} \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که در رابطه بالا، $\mathbf{\Phi}$ و $\boldsymbol{\omega}$ به ترتیب ماتریس اشکال مودی و ماتریس فرکانس سیستم می‌باشند. پارامتر ξ ضریب میرایی سیستم است. ماتریس‌های Gk و Gc نیز باید کاربر آن را مشخص نماید.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Gk=zeros(length(rv),n);
Gk(1,2)=-0.1*k0(2);
Gk(2,5)=-0.15*k0(5);
Gc=zeros(length(rv),n);
Gc(1,2)=-1*(-c(1,2));
Gc(2,5)=-1*c(5,5);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

تابع StateSpaceAgUcG ماتریس‌های $\mathbf{A_c}$، $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را با توجه به نوع خروجی out تشکیل می‌دهد.

```
[Ac,Bc,C,D]=StateSpaceAgUcG(m,k,c,Gk,Gc,rv,mv,out);
```

دستور SS سیستم sysc را در فضای حالت و در فضای پیوسته زمانی تشکیل می‌دهد

```
sysc=ss(Ac,Bc,C,D);
```

به طوری که

Ac=sysc.a
Bc=sysc.b
C=sysc.c
D=sysc.d

دستور زیر شرایط اولیه (بردار حالت اولیه که شامل جابجایی اولیه و سرعت اولیه است) مسئله را تعیین می‌کند:

```
q0(1:2*n,1)=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت سیستم در فضای حالت محاسبه می‌گردد:

```
[y]=lsim(sysc,xg,t,q0);
```

دستور lsim تاریخچه زمانی پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی را تحت اثر یک ورودی دلخواه شبیه سازه می‌کند. خروجی این دستور همان y یا بردار خروجی سیستم است. برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
Gk0=zeros(length(rv),n);
Gc0=zeros(length(rv),n);
```

```
[Ac0,Bc0,C0,D0]=StateSpaceAgUcG(m,k,c,Gk0,Gc0,rv,mv,out);
sysc0=ss(Ac0,Bc0,C0,D0);
[y0]=lsim(sysc0,xg,t,q0);
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی جابجایی باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'dis')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('dis[cm]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی سرعت باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

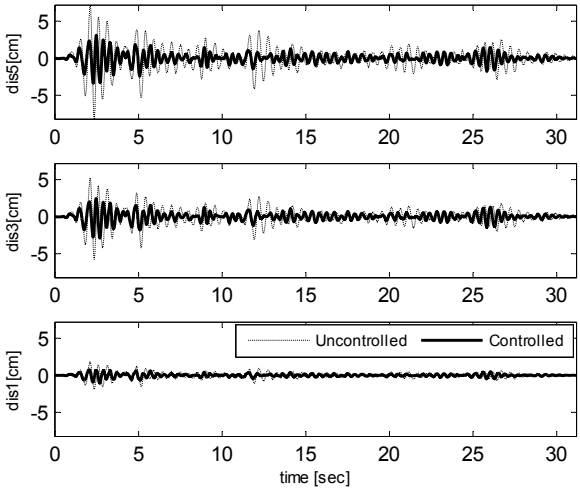
```
if strcmp(out,'vel')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('vel[cm/s]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی شتاب باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

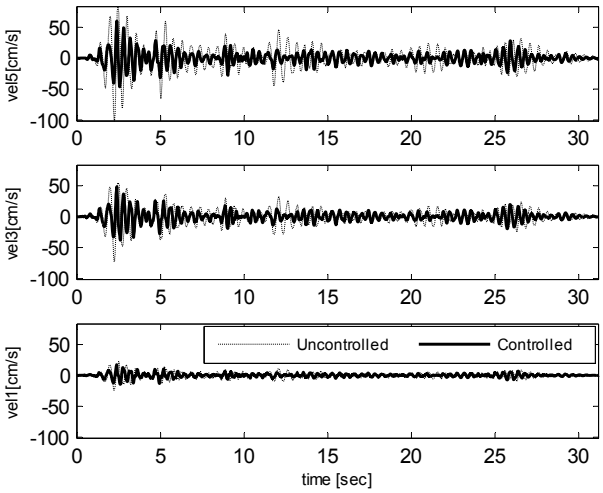
```
if strcmp(out,'acc')==1
    LB=min(min(y0/9.807));
    UB=max(max(y0/9.807));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)/9.807,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)/9.807,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
```

```
        end
        ylabel('acc[g]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

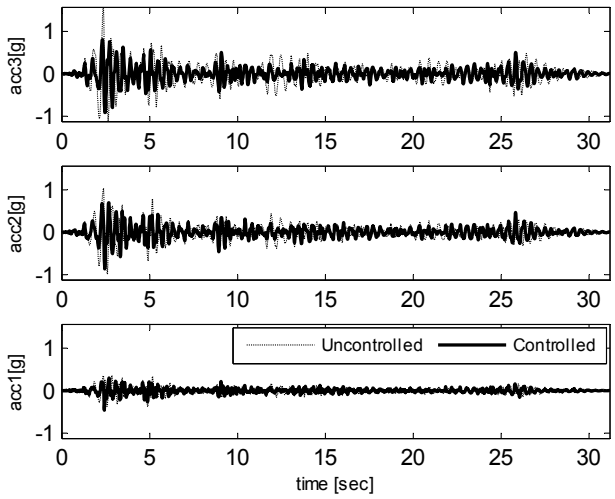
پاسخ‌های سازه به صورت زیر می باشد:



شکل۲. تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



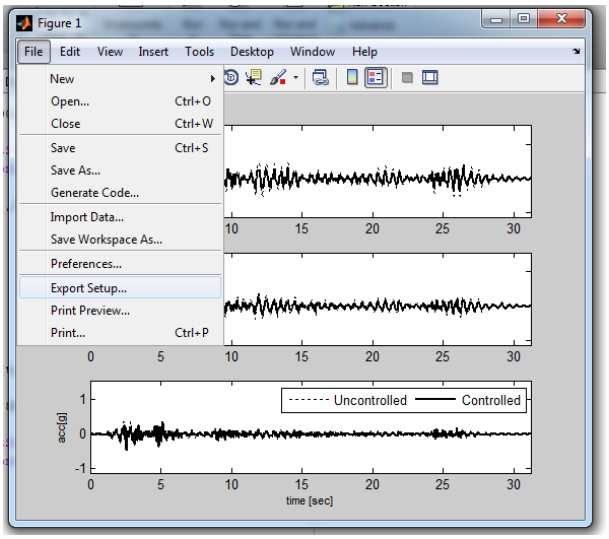
شکل۳. تاریخچه زمانی پاسخ سرعت در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



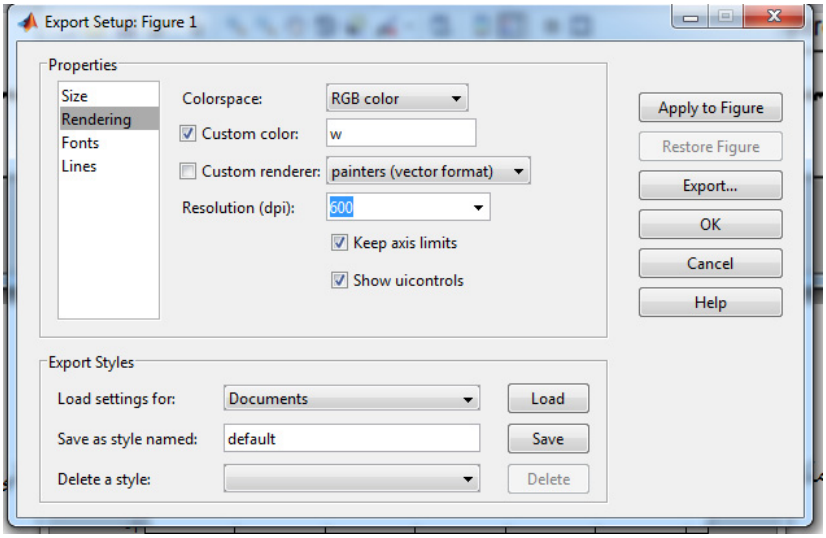
شکل۴. تاریخچه زمانی پاسخ شتاب در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.

برای ذخیره نمودن شکل‌های خروجی Matlab با کیفیت بالا از روش زیر عمل می‌کنیم:

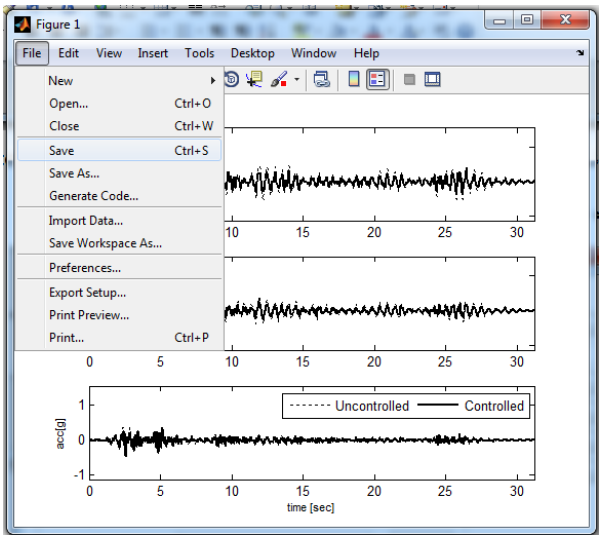
از منوی File گزینه Export Setup انتخاب شود.



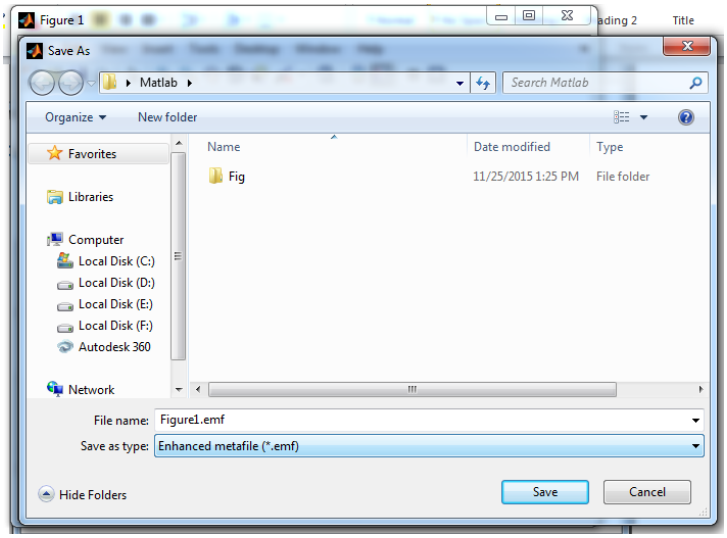
سپس Rendering انتخاب شده و Resolution (dpi) را بر روی 600 تنظیم می‌کنیم. سپس Apply to Figure را کلیک کرده و با زدن دکمه OK از پنجره خارج می‌شویم.



از منوی File گزینه Save انتخاب شود.



در قسمت Save as type فرمت Enhanced metafile (*.emf) انتخاب گردد و دکمه Save را کلیک نمایید.



ب- حوضه گسسته زمانی

معادله (۸) در فضای گسسته زمانی به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(i+1) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(i) + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}(i)\\ \mathbf{y}(i) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(i) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}(i)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

اندیس i شماره گام زمانی را نشان می‌دهد. ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب ماتریس سیستم و ماتریس مکان ورودی در حوضه گسسته زمانی می‌باشند و از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^{i} \cdot \Delta t^{i}}{i!}\right)\\ \mathbf{B} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta\tau} d\tau\, \mathbf{B}_c = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^{i} \cdot \Delta t^{i+1}}{(i+1)i!}\right) \mathbf{B}_c\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در رابطه بالا Δt گام زمانی است و برابر با گام زمانی شتاب نگاشت زلزله می‌باشد.

معادله حرکت به فرم معادله (۱۲) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgUcGd.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور همان مثال قبلی در نظر گرفته می‌شود. مراحل کار تا تعریف سیستم در فضای حالت در حوضه پیوسته زمانی مشابه برنامه 'DynamicResponseAgUcG.m' است. در ادامه با استفاده از دستور c2d سیستم از حوضه پیوسته زمانی sysc تبدیل به سیستم در حوضه گسسته زمانی sysd می‌شود (رابطه ۱۳).

```
sysd=c2d(sysc,st);
```

به طوری که

```
A=sysd.a;
B=sysd.b;
```

ابعاد بردار حالت و خروجی به صورت زیر تعریف می‌شود

```
q(1:2*n,1:length(xg))=0;
y(1:length(mv),1:length(xg))=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت در فضای حالت و در حوضه زمانی پیوسته (رابطه ۱۲) برای هر گام زمانی محاسبه شده و پاسخ‌های سیستم محاسبه می‌گردد.

```
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q(:,i+1)=A*q(:,i)+B*xg(i);
    end
    y(:,i)=C*q(:,i)+D*xg(i);
end

y=y';
```

در اینجا نیز مشابه با حالت قبل، برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
Gk0=zeros(length(rv),n);
Gc0=zeros(length(rv),n);
[Ac0,Bc0,C0,D0]=StateSpaceAgUcG(m,k,c,Gk0,Gc0,rv,mv,out);
sysc0=ss(Ac0,Bc0,C0,D0);
sysd0=c2d(sysc0,st);
A0=sysd0.a;
B0=sysd0.b;


q0(1:2*n,1:length(xg))=0;
y0(1:length(mv),1:length(xg))=0;
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q0(:,i+1)=A0*q0(:,i)+B0*xg(i);
    end
    y0(:,i)=C*q0(:,i)+D*xg(i);
end

y0=y0';
```

به طور مشابه با توجه به نوع خروجی می توان پاسخ‌های سیستم را نیز رسم نمود.

حل معادله حرکت در فضای حالت
به کمک نرم‌افزار MATLAB

کاوه کرمی

دانشیار سازه دانشگاه کردستان، دانشکده مهندسی، گروه عمران

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

الف- حوضه پیوسته زمانی

معادله دینامیک حرکت یک سیستم n درجه آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = -\mathbf{m}\ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}} \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{m}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{k}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی با ابعاد $n\times n$ می‌باشند. پاسخ‌های دینامیکی سازه شامل جابجایی، سرعت و شتاب به ترتیب با بردارهای $\mathbf{x}$، $\dot{\mathbf{x}}$ و $\ddot{\mathbf{x}}$ با ابعاد $n\times 1$ نشان داده شده است. سازه تحت اثر شتاب پایه $\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}$ با ابعاد 1×1 قرار می‌گیرد. بردار ℓ با ابعاد $n\times 1$ بردار تاثیر شتاب زمین در جرم‌های سازه است. همچنین نیروی کنترل $\mathbf{u}_{\mathbf{c}}$ با ابعاد $r\times 1$ نیز به سازه اعمال می‌شود. ماتریس $\mathbf{B}_{\mathbf{u}}$ با ابعاد $n\times r$ محل درجات آزادی که نیروهای کنترل در آن‌ها وارد می‌گردد را نشان می‌دهد. ماتریس $\mathbf{\Gamma}$ با ابعاد $n\times n$ اندرکنش نیروهای کنترل در طبقات است. رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} - \ell\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{c}}\end{aligned} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

فرم ماتریسی رابطه (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times r}\\ \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}_{\mathbf{u}}\end{bmatrix}_{2n\times r}\mathbf{u}_{\mathbf{c}} \qquad (۳)$$

در رابطه بالا ماتریس‌های $\mathbf{O}$ و $\mathbf{I}$ به ترتیب ماتریس‌های صفر و واحد می‌باشند. فرض می‌شود که بردار نیروی کنترل $\mathbf{u_c}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{u_c} = \mathbf{G}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{G_k} & \mathbf{G_c}\end{bmatrix}_{r\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad (۴)$$

که در آن ماتریس $\mathbf{G}$ با ابعاد $r\times 2n$ ماتریس بهره[1] نام دارد. ماتریس‌های $\mathbf{G_k}$ و $\mathbf{G_c}$ با ابعاد $r\times n$ از جنس ماتریس‌های سختی و میرایی می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{O}_{n\times n}\\ \mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_k} & \mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_c}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad (۵)$$

در نتیجه می‌توان رابطه (۵) به صورت زیر ساده نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_k}) & -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_c})\end{bmatrix}_{2n\times 2n}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} + \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}} \qquad (۶)$$

با تعریف پارامترهای زیر

$$\mathbf{A_c} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n}\\ -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_k}) & -\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B_u}\mathbf{G_c})\end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad \mathbf{B_c} = \begin{Bmatrix}\mathbf{O}_{n\times 1}\\ -\ell\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}_{2n\times 1} \qquad (۷)$$

می توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A_c}\mathbf{q} + \mathbf{B_c}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}\end{aligned} \qquad (۸)$$

معادله (۸) را معادله حرکت سیستم در فضای حالت[2] و در حوضه زمانی پیوسته[3] می‌نماند. یکی از ویژگی‌های مهم فضای حالت آن است که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۱) را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن با ضرایب ثابت (رابطه ۸) تبدیل می‌کند. ماتریس $\mathbf{A_c}$ با ابعاد $2n\times 2n$ ماتریس سیستم نام دارد؛ زیرا شامل ویژگی‌های سیستم از جمله سختی و میرایی است. همچنین ماتریس‌های $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به ترتیب با ابعاد $2n\times 1$، $m\times 2n$ و $m\times 1$ ماتریس‌های تشکیل دهنده فضای حالت است. بردار $\mathbf{y}$ با ابعاد $m\times 1$ خروجی سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به نوع خروجی سیستم ماتریس‌های $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

[1] Gain Matrix
[2] State Space
[3] Continues Time Domain

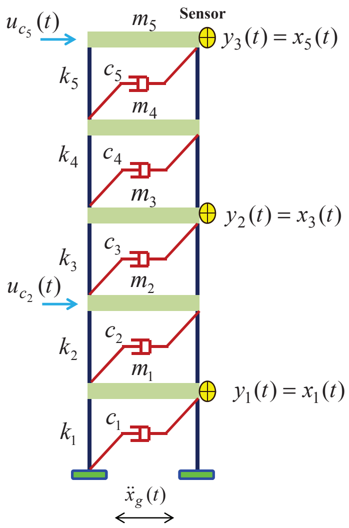
خروجی جابجایی	خروجی سرعت	خروجی شتاب
$\mathbf{C}=[\mathbf{C_S}\quad \mathbf{O}_{m\times n}]$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times 1}$	$\mathbf{C}=[\mathbf{O}_{m\times n}\quad \mathbf{C_S}]$ $\mathbf{D}=\mathbf{O}_{m\times 1}$	$\mathbf{C}=\left[-\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{k}-\Gamma\mathbf{B_u}\mathbf{G_k})\quad -\mathbf{C_S}\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{c}-\Gamma\mathbf{B_u}\mathbf{G_c})\right]$ $\mathbf{D}=-\mathbf{C_S}\ell$

(۹)

ماتریس $\mathbf{C_S}$ با ابعاد $m\times n$ محل نصب حسگرها را مشخص می‌کند. معادله حرکت به فرم معادله (۸) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgUcG.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور مثال زیر در نظر گرفته می‌شود.

مثال: شکل (۱) یک ساختمان پنج طبقه را نشان می‌دهد؛ که مشخصات سازه‌ای آن در جدول (۱) آمده است. در این ساختمان از سه عدد حسگر برای اندازه‌گیری خروجی‌های مربوط به جابجایی طبقات اول، سوم و پنجم استفاده شده است. همچنین در طبقات دوم و پنجم نیروهای کنترلی به سازه اعمال می‌گردد. ضریب بهره مربوط به نیروهای کنترل در طبقات دوم و سوم به صورت زیر است.

$$\mathbf{G_k}=\begin{bmatrix}0 & -0.1k_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.15k_5\end{bmatrix}_{2\times 5}\qquad \mathbf{G_c}=\begin{bmatrix}0 & -c_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5\end{bmatrix}_{2\times 5}$$



شکل ۱. ساختمان پنج طبقه

جدول ۱

پارامترهای سازه‌ای ساختمان پنج طبقه

St. No	Mass (ton)	Stiffness (kN/m)
1	12	22000
2	12	20000
3	12	17800
4	11	16000
5	10	14300

$\xi=5\%$

ورودی‌های این برنامه که کاربر باید آن را وارد نماید شامل موارد زیر است:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Xg=xlsread('ElCentro.xls', 'Accelerograph', 'B3:B1562');
out='acc';
m=diag([12 12 12 11 10])*1e3;
k0=[22e3 20e3 17.8e3 16e3 14.3e3]*1e3;
xi=0.05;
st0=0.02;
st=0.01;
mv=[1 3 5];
rv=[2 5];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

که در آن Xg شتاب زلزله El-Centro می‌باشد که معمولا بر حسب $g=9.807\ m/s^2$ مقیاس شده است و توسط دستور xlsread از فایل Excel تحت عنوان 'ElCentro.xls' خوانده می‌شود. Out نوع خروجی سیستم را نشان می‌دهد که می‌توان از 'dis'، 'vel' و 'acc' به ترتیب برای نمایش خروجی‌های جابجایی، سرعت و شتاب سیستم استفاده کرد. m ماتریس جرم طبقات است که با استفاده از دستور diag به صورت قطری تشکیل می‌گردد. k0 بردار سختی طبقات است. xi ضریب میرایی سیستم را مشخص می‌کند. st0 برابر با گام زمانی شتاب نگاشت مورد استفاده است. اگر بخواهیم از گام زمانی کوچکتر یا بزرگتری استفاده کنیم توسط st تعیین می‌گردد. mv و rv به ترتیب بردار مکان خروجی‌ها (محل نصب حسگرها) و مکان ورودی‌ها (محل اعمال نیروی‌های کنترل) در درجات آزادی مربوطه را نشان می‌دهد.

مدت زمان زلزله T ، بردار زمان t و تعداد طبقات n نیز با استفاده از دستور زیر محاسبه می‌شود:

```
T=(length(Xg)-1)*st0;
t=0:st:T;
n=length (m);
```

در دستور زیر به کمک تابع XG درون‌یابی انجام گرفته و شتاب زلزله در هر گام زمانی st تعیین می‌گردد؛ و نهایتا در شتاب $g=9.807\ m/s^2$ نیز ضرب شده است.

```
xg(1:((T/st)+1))=0;
for i=1:length(xg)
    xg(i)=XG(Xg,st0,(i-1)*st)*9.807;
end
```

با استفاده از تابع‌های StiffnessMatrix و DampingMatrix به ترتیب ماتریس‌های سختی و میرایی تشکیل می‌شود.

```
k=StiffnessMatrix(k0);
c=DampingMatrix(m ,k,xi);
```

تابع StiffnessMatrix ماتریس سختی را بر اساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{cases} \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i + k_{i+1} & i \neq n_m \\ \mathrm{K}_{(i,i)} = k_i & i = n_m \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = -k_{Max(i,j)} & |i-j| = 1 \\ \mathrm{K}_{(i,j)} = 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\mathrm{K}_{(i,j)}$ نشان دهنده (i,j)اُمین درایه ماتریس سختی می‌باشد. همچنین k_i سختی طبقه iاُم است. تابع DampingMatrix نیز ماتریس میرایی را براساس رابطه زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi} \\ &\mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi} = 2\xi \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = 2\xi \left(\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}^{-1} \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که در رابطه بالا، $\mathbf{\Phi}$ و $\boldsymbol{\omega}$ به ترتیب ماتریس اشکال مودی و ماتریس فرکانس سیستم می‌باشند. پارامتر ξ ضریب میرایی سیستم است. ماتریس‌های Gk و Gc نیز باید کاربر آن را مشخص نماید.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Gk=zeros(length(rv),n);
Gk(1,2)=-0.1*k0(2);
Gk(2,5)=-0.15*k0(5);
Gc=zeros(length(rv),n);
Gc(1,2)=-1*(-c(1,2));
Gc(2,5)=-1*c(5,5);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

تابع StateSpaceAgUcG ماتریس‌های $\mathbf{A_c}$، $\mathbf{B_c}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را با توجه به نوع خروجی out تشکیل می‌دهد.

```
[Ac,Bc,C,D]=StateSpaceAgUcG(m,k,c,Gk,Gc,rv,mv,out);
```

دستور SS سیستم sysc را در فضای حالت و در فضای پیوسته زمانی تشکیل می‌دهد

```
sysc=ss(Ac,Bc,C,D);
```

به طوری که

Ac=sysc.a
Bc=sysc.b
C=sysc.c
D=sysc.d

دستور زیر شرایط اولیه (بردار حالت اولیه که شامل جابجایی اولیه و سرعت اولیه است) مسئله را تعیین می‌کند:

```
q0(1:2*n,1)=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت سیستم در فضای حالت محاسبه می‌گردد:

```
[y]=lsim(sysc,xg,t,q0);
```

دستور lsim تاریخچه زمانی پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی را تحت اثر یک ورودی دلخواه شبیه سازه می‌کند. خروجی این دستور همان y یا بردار خروجی سیستم است. برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
Gk0=zeros(length(rv),n);
Gc0=zeros(length(rv),n);
```

```
[Ac0,Bc0,C0,D0]=StateSpaceAgUcG(m,k,c,Gk0,Gc0,rv,mv,out);
sysc0=ss(Ac0,Bc0,C0,D0);
[y0]=lsim(sysc0,xg,t,q0);
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی جابجایی باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

```
if strcmp(out,'dis')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('dis[cm]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی سرعت باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

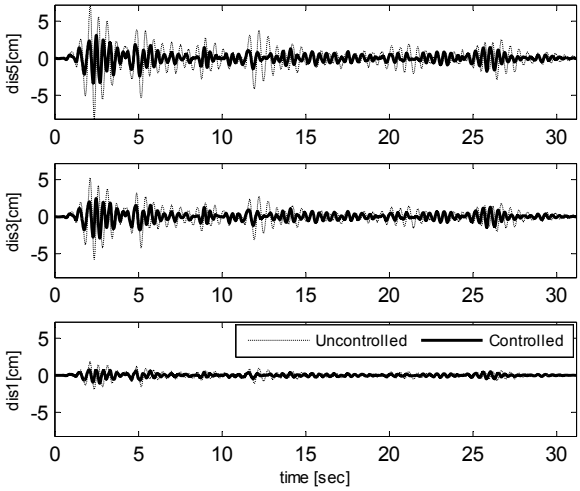
```
if strcmp(out,'vel')==1
    LB=min(min(y0*100));
    UB=max(max(y0*100));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)*100,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)*100,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
        end
        ylabel('vel[cm/s]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

پاسخ سازه در حالتی که خروجی شتاب باشد با استفاده از دستور زیر رسم می‌گردد:

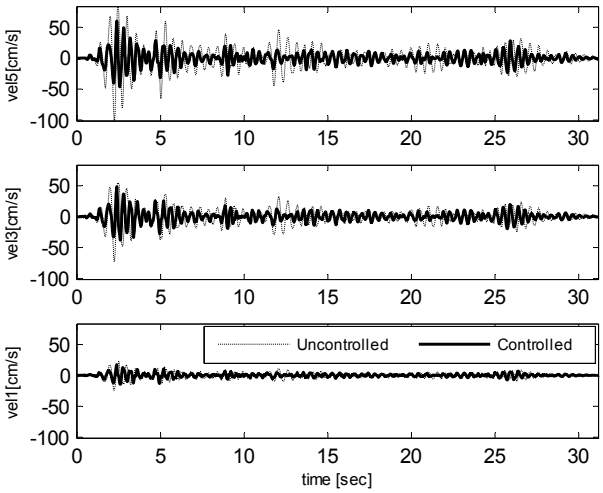
```
if strcmp(out,'acc')==1
    LB=min(min(y0/9.807));
    UB=max(max(y0/9.807));
    for i=1:length(mv)
        subplot(length(mv),1,i),plot(t,y0(:,length(mv)-i+1)/9.807,':k')
        hold on
        plot(t,y(:,length(mv)-i+1)/9.807,'k','linewidth',1.5)
        if i==length(mv)
            xlabel('time [sec]','FontSize',8)
            legend('Uncontrolled','Controlled','orientation','horizontal')
```

```
        end
        ylabel('acc[g]','FontSize',8)
        axis([0 T LB UB])
    end
end
```

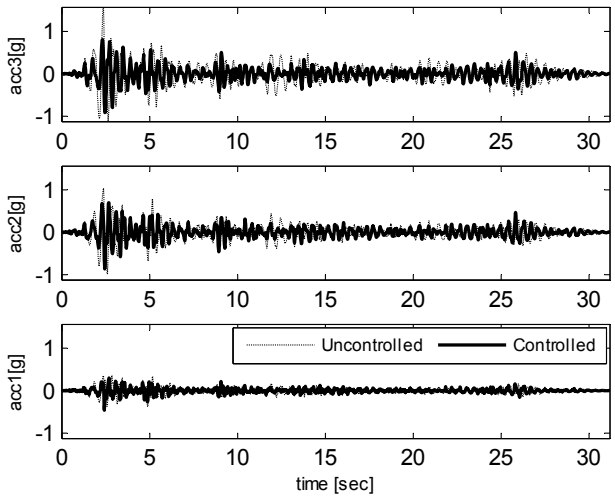
پاسخ‌های سازه به صورت زیر می باشد:



شکل۲. تاریخچه زمانی پاسخ جابجایی در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



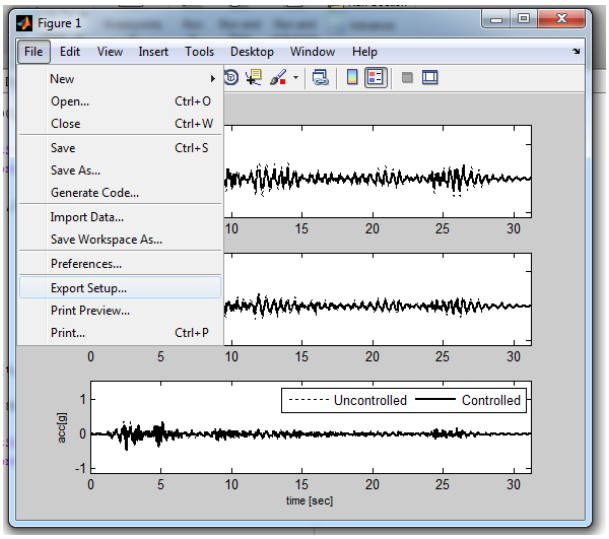
شکل۳. تاریخچه زمانی پاسخ سرعت در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.



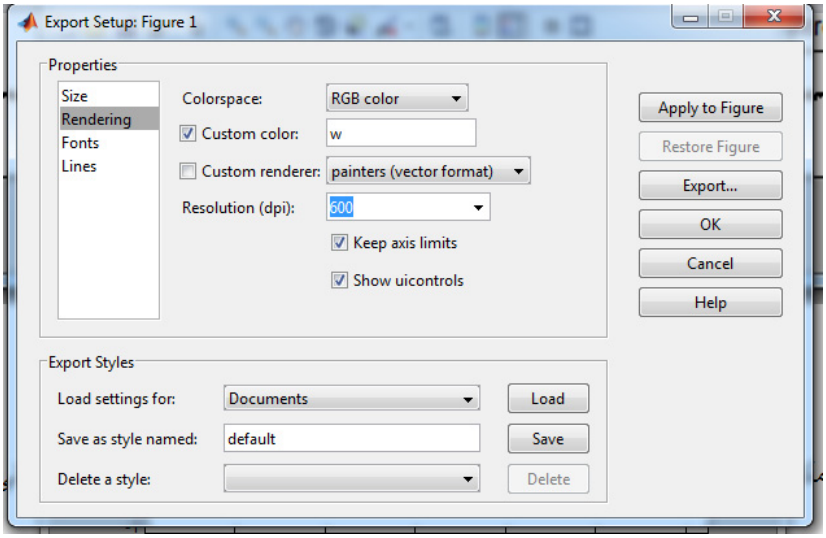
شکل۴. تاریخچه زمانی پاسخ شتاب در طبقات اول، سوم و پنجم در ازه پنج طبقه تحت اثر زلزله El-Centro.

برای ذخیره نمودن شکل‌های خروجی Matlab با کیفیت بالا از روش زیر عمل می‌کنیم:

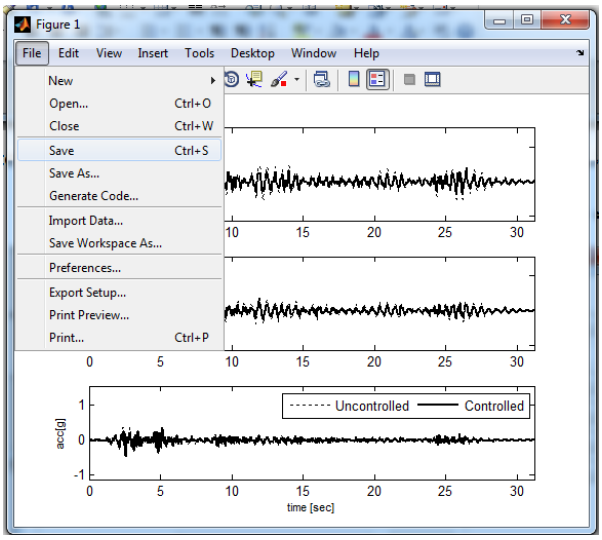
از منوی File گزینه Export Setup انتخاب شود.



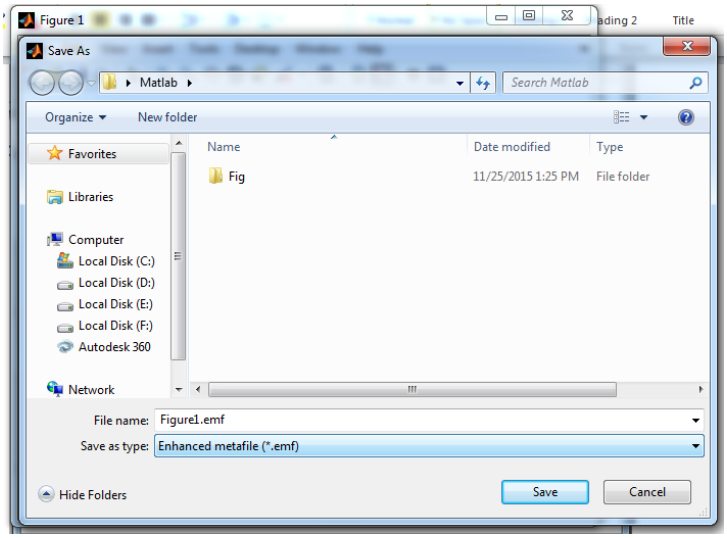
سپس Rendering انتخاب شده و Resolution (dpi) را بر روی 600 تنظیم می‌کنیم. سپس Apply to Figure را کلیک کرده و با زدن دکمه OK از پنجره خارج می‌شویم.



از منوی File گزینه Save انتخاب شود.



در قسمت Save as type فرمت Enhanced metafile (*.emf) انتخاب گردد و دکمه Save را کلیک نمایید.



ب- حوضه گسسته زمانی

معادله (۸) در فضای گسسته زمانی به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(i+1) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(i) + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}(i)\\ \mathbf{y}(i) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(i) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{g}}(i)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

اندیس i شماره گام زمانی را نشان می‌دهد. ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب ماتریس سیستم و ماتریس مکان ورودی در حوضه گسسته زمانی می‌باشند و از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^{i} \cdot \Delta t^{i}}{i!}\right)\\ \mathbf{B} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \cdot \Delta\tau} d\tau\, \mathbf{B}_c = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}_c{}^{i} \cdot \Delta t^{i+1}}{(i+1)i!}\right) \mathbf{B}_c\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در رابطه بالا Δt گام زمانی است و برابر با گام زمانی شتاب نگاشت زلزله می‌باشد.

معادله حرکت به فرم معادله (۱۲) را می‌توان با استفاده از برنامه 'DynamicResponseAgUcGd.m' در محیط MATLAB حل کرد. برای این منظور همان مثال قبلی در نظر گرفته می‌شود. مراحل کار تا تعریف سیستم در فضای حالت در حوضه پیوسته زمانی مشابه برنامه 'DynamicResponseAgUcG.m' است. در ادامه با استفاده از دستور c2d سیستم از حوضه پیوسته زمانی sysc تبدیل به سیستم در حوضه گسسته زمانی sysd می‌شود (رابطه ۱۳).

```
sysd=c2d(sysc,st);
```

به طوری که

```
A=sysd.a;
B=sysd.b;
```

ابعاد بردار حالت و خروجی به صورت زیر تعریف می‌شود

```
q(1:2*n,1:length(xg))=0;
y(1:length(mv),1:length(xg))=0;
```

با استفاده از دستور زیر معادلات حرکت در فضای حالت و در حوضه زمانی پیوسته (رابطه ۱۲) برای هر گام زمانی محاسبه شده و پاسخ‌های سیستم محاسبه می‌گردد.

```
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q(:,i+1)=A*q(:,i)+B*xg(i);
    end
    y(:,i)=C*q(:,i)+D*xg(i);
end

y=y';
```

در اینجا نیز مشابه با حالت قبل، برای مقایسه سازه کنترل شده با سازه کنترل نشده باید پاسخ سازه را در حالتی که نیروی کنترل صفر است (حالت بدون کنترل) y0 نیز تعیین کرد.

```
Gk0=zeros(length(rv),n);
Gc0=zeros(length(rv),n);
[Ac0,Bc0,C0,D0]=StateSpaceAgUcG(m,k,c,Gk0,Gc0,rv,mv,out);
sysc0=ss(Ac0,Bc0,C0,D0);
sysd0=c2d(sysc0,st);
A0=sysd0.a;
B0=sysd0.b;


q0(1:2*n,1:length(xg))=0;
y0(1:length(mv),1:length(xg))=0;
for i=1:length(xg)
    if i<length(xg)
        q0(:,i+1)=A0*q0(:,i)+B0*xg(i);
    end
    y0(:,i)=C*q0(:,i)+D*xg(i);
end

y0=y0';
```

به طور مشابه با توجه به نوع خروجی می توان پاسخ‌های سیستم را نیز رسم نمود.