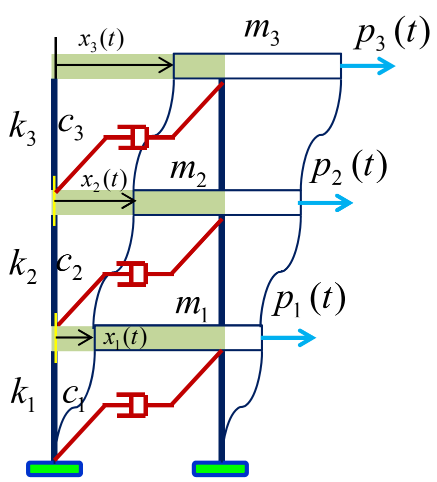
Structural Control

Optimal Stiffness Distribution

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

Stiffness Based Control

❑ هدف و مبانی محاسبات



هدف از توزیع سختی بهینه یک سازه آن است که سختی اعضای سازه را آنچنان انتخاب کنیم که پاسخ سازه در یک محدوده دلخواه قرار گیرد.

به عنوان مثال می‌توان سختی اعضای یک سازه را آن‌چنان تعیین کرد که سازه در مود اصلی خود با دامنه‌ی محدودی ارتعاش نماید. در حقیقت با این دیدگاه برخلاف حالت‌های متعارف مسائل دینامیک سازه‌ها، پاسخ سازه به دلخواه انتخاب می‌شود و براساس آن سختی سازه تعیین می‌گردد. در سیستم‌های MDOF که مود اصلی ارتعاش مستقل از میرایی است مسئله مقادیر ویژه را می‌توان به صورت روبه رو نوشت:

$$\boxed{[\mathbf{k}]\{\varphi\} = \omega^2 [\mathbf{m}]\{\varphi\}} \qquad (1)$$

$[\mathbf{k}]$: ماتریس سختی $\{\varphi\}$: بردار مودال

$[\mathbf{m}]$: ماتریس جرم ω : فرکانس

❑ هدف و مبانی محاسبات

در درس دینامیک سازه‌ها از رابطه (۱) برای به دست آوردن بردارهای مودال و فرکانس‌های سازه استفاده می‌شود. اما در بحث کنترل سازه‌ها، ابتدا یک بردار مودال دلخواه $\{\boldsymbol{\varphi}\}^*$ (معمولا براساس مود اصلی ارتعاش) انتخاب می‌گردد و براساس آن اعضای ماتریس سختی به دست می‌آید.

بدیهی است که این کار امکان‌پذیر می‌باشد به علت آن‌که به تعداد اجزای اصلی تشکیل دهنده ماتریس سختی $(k_1\ ,k_2\ ,k_3\ ,\cdots ,k_n)$ رابطه وجود دارد. برای این منظور کافیست اجزای ماتریس سختی را در یک بردار $\{\mathbf{k}_s\}$ جمع‌آوری کنیم و معادله (۱) را به صورتی بنویسیم که بتوان از آن بردار $\{\mathbf{k}_s\}$ را استخراج کرد.

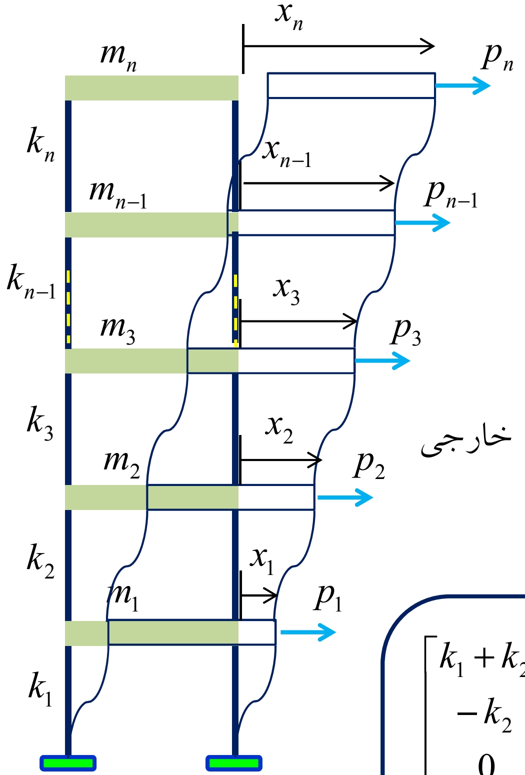
خواهیم دید که می‌توان روابط فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\{\mathbf{p}'\}=[\mathbf{k}']\{\boldsymbol{\varphi}\}} \qquad (2)$$

با مشخص بودن $\{\boldsymbol{\varphi}\}$ و $\{\boldsymbol{\omega}\}$ پارامترهای $\{\mathbf{p}'\}$ و $[\mathbf{k}']$ به دست می‌آیند.

رابطه (۲) مشابه رابطه $F=k.x$ در استاتیک است. که در صورت مشخص بودن F و x پارامتر k قابل محاسبه می‌باشد. با این تفاوت که در این حالت رابطه به صورت ماتریسی است.

❑ توزیع سختی قاب برشی در حالت استاتیکی



در حالت استاتیکی برای یک قاب برشی n طبقه رابطه نیرو تغییر شکل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{[\mathbf{k}]_{n\times n}\{\mathbf{x}\}_{n\times 1}=\{\mathbf{p}\}_{n\times 1}} \qquad (3)$$

که در آن

$[\mathbf{k}]_{n\times n}$: ماتریس سختی، $\{\mathbf{x}\}_{n\times 1}$: بردار جابجایی و $\{\mathbf{p}\}_{n\times 1}$: بردار نیروی خارجی

رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

❑توزیع سختی قاب برشی در حالت استاتیکی

با فرض معلوم بودن بردار نیرو و بردار جابجایی، هدف تعیین پارمترهای سختی طبقات در ماتریس سختی است. برای این منظور رابطه (۴) به گونه‌ای بازنویسی می‌گردد که ماتریس سختی به صورت بردار سختی ظاهر شود. با بسط رابطه (۴) خواهیم داشت:

$$(4)\Rightarrow\begin{cases}(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=p_1\\-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-k_3x_3=p_2\\-k_3x_2+(k_3+k_4)x_3-k_4x_4=p_3\\\vdots\\-k_{n-1}x_{n-2}+(k_{n-1}+k_n)x_{n-1}-k_nx_n=p_{n-1}\\-k_nx_{n-1}+k_nx_n=p_n\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x_1k_1+(x_1-x_2)k_2=p_1\\(x_2-x_1)k_2+(x_2-x_3)k_3=p_2\\(x_3-x_2)k_3+(x_3-x_4)k_4=p_3\\\vdots\\(x_{n-1}-x_{n-2})k_{n-1}+(x_{n-1}-x_n)k_n=p_{n-1}\\(x_n-x_{n-1})k_n=p_n\end{cases}}\quad(5)$$

❑توزیع سختی قاب برشی در حالت استاتیکی

فرمت ماتریسی رابطه (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\begin{bmatrix}x_1 & x_1-x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & x_2-x_1 & x_2-x_3 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & x_3-x_2 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-x_{n-2} & x_{n-1}-x_n\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n-x_{n-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\\vdots\\k_{n-1}\\k_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\\vdots\\p_{n-1}\\p_n\end{Bmatrix}}\quad(6)$$

با فرض

$$[\mathbf{S}]=\begin{bmatrix}x_1 & x_1-x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & x_2-x_1 & x_2-x_3 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & x_3-x_2 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-x_{n-2} & x_{n-1}-x_n\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n-x_{n-1}\end{bmatrix},\quad \{\mathbf{k_s}\}=\begin{Bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\\vdots\\k_{n-1}\\k_n\end{Bmatrix}$$

❑ توزیع سختی قاب برشی در حالت استاتیکی

رابطه (۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{[\mathbf{S}]_{n\times n}\{\mathbf{k}_s\}_{n\times 1}=\{\mathbf{p}\}_{n\times 1}} \qquad (7)$$

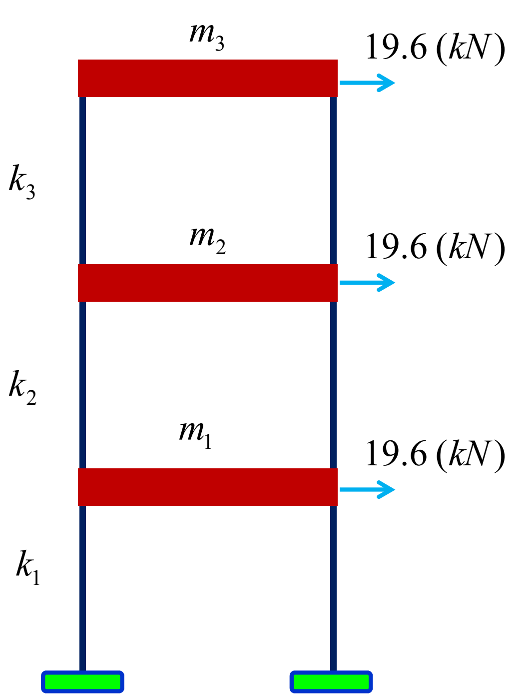
که در آن درایه‌های ماتریس $[\mathbf{S}]$ به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &S_{(1,1)}=x_1 \\ &S_{(i,i)}=x_i-x_{i-1} \\ &S_{(i,i+1)}=x_i-x_{i+1} \\ &S_{(i,j)}=0 \qquad if \quad j\neq i,i+1 \end{aligned} \qquad (8)$$

با حل رابطه (۷) بردار سختی طبقات $\{\mathbf{k}_s\}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\{\mathbf{k}_s\}_{n\times 1}=[\mathbf{S}]^{-1}_{n\times n}\{\mathbf{p}\}_{n\times 1}} \qquad (9)$$

❑ توزیع سختی قاب برشی در حالت استاتیکی



مثال ۱- **یک** ساختمان سه طبقه فولادی مطابق شکل تحت اثر بار استاتیکی قرار دارد. مطلوب است تعیین سختی طبقات به گونه‌ای که بردار جابجایی طبقات به صورت زیر به دست آید:

$$\{\mathbf{x}\}=\begin{Bmatrix}0.025\\0.050\\0.075\end{Bmatrix} \quad (m)$$

❑توزیع سختی قاب برشی در حالت استاتیکی

Matlab Code (L02Example01.m)

پاسخ مثال ۱-

$$\Rightarrow \boxed{[\mathbf{S}]=\begin{bmatrix} 0.025 & -0.025 & 0 \\ 0 & 0.025 & -0.025 \\ 0 & 0 & 0.025 \end{bmatrix}}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.025 & -0.025 & 0 \\ 0 & 0.025 & -0.025 \\ 0 & 0 & 0.025 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 19.6 \\ 19.6 \\ 19.6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\{\mathbf{k}_s\}=\begin{Bmatrix} 2352 \\ 1568 \\ 784 \end{Bmatrix} \quad (kN\ /\ m)}$$

❑توزیع سختی قاب برشی در حالت دینامیکی

توزیع سختی قاب برشی در حالت دینامیکی برای زمانی است که ما بخواهیم به فرض مثال مود اول شکل دلخواه مد نظر ما را داشته باشد؛ که به این حالت **کنترل مودهای ارتعاشی** گفته می‌شود.

با انتخاب شکل مود دلخواه $\{\varphi^*\}$ متناظر با یک فرکانس خاص رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[\mathbf{k}]\{\varphi\}=\omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi\} \overset{\{\varphi\}=\{\varphi^*\}}{\Rightarrow} [\mathbf{k}]\{\varphi^*\}=\omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi^*\} \Rightarrow \boxed{[\mathbf{k}]\{\varphi\}^*=\{\mathbf{p}'\}} \quad (10)$$

که در آن

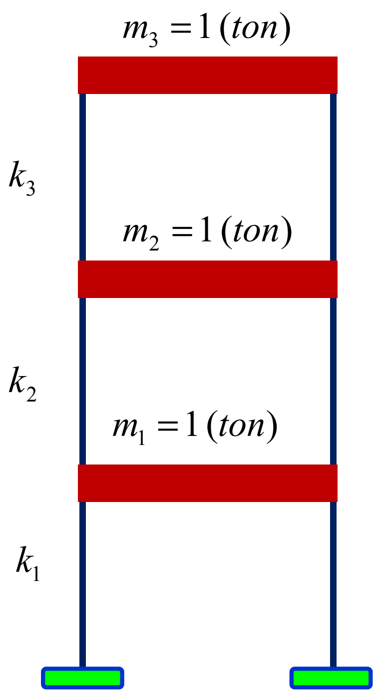
$$\boxed{\{\mathbf{p}'\}=\omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi^*\}} \quad (11)$$

مشابه با حالت استاتیکی برای تعیین پارمترهای سختی طبقات رابطه (۱۰) به گونه‌ای بازنویسی می‌گردد که ماتریس سختی $[\mathbf{k}]$ به صورت بردار سختی طبقات $\{\mathbf{k}_s\}$ ظاهر شود.

$$(10) \quad \Rightarrow \boxed{[\mathbf{S}]_{n\times n}\{\mathbf{k}_s\}_{n\times 1}=\{\mathbf{p}'\}_{n\times 1}} \quad (12)$$

$$(12) \quad \Rightarrow \boxed{\{\mathbf{k}_s\}_{n\times 1}=[\mathbf{S}]^{-1}_{n\times n}\{\mathbf{p}'\}_{n\times 1}} \quad (13)$$

❑توزیع سختی قاب برشی در حالت دینامیکی



مثال ۲– شکل روبه رو ساختمان سه طبقه فولادی را نشان می‌دهد. سختی طبقات را به گونه‌ای تعیین نمایید که شکل مود ارتعاشی در فرکانس $\omega = 1\,(rad/\sec)$ به صورت زیر باشد:

$$\{\varphi^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Stiffness Based Control

❑توزیع سختی قاب برشی در حالت دینامیکی

پاسخ مثال ۲–

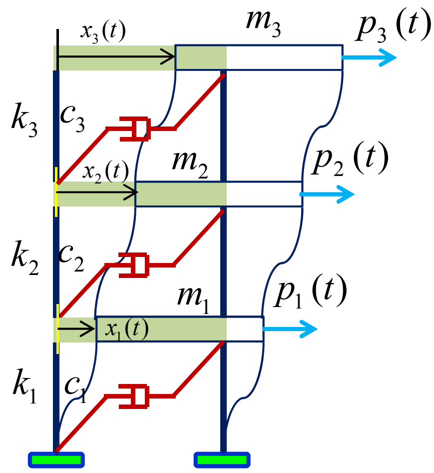
$$\Rightarrow \boxed{[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}$$

$$= (1)^2 \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\{\mathbf{p}'\} = \begin{Bmatrix} \frac{1000}{3} \\ \frac{2000}{3} \\ 1000 \end{Bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{1000}{3} \\ \frac{2000}{3} \\ 1000 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\{\mathbf{k_s}\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (kN/m)}$$

Matlab Code (L02Example02.m)

❑ توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی



در این روش ابتدا با معرفی مختصات تعمیم یافته و خاصیت تعامد مودها معادلات دیفرانسیل حرکت را منفرد می‌کنیم. معادله حرکت سیستم MDOF با میرایی تحت اثر نیروی خارجی به صورت زیر است:

$$\boxed{[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{x}}(t)\}+[\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{x}}(t)\}+[\mathbf{k}]\{\mathbf{x}(t)\}=\{\mathbf{p}(t)\}} \quad (14)$$

که در آن

$[\mathbf{c}]$: ماتریس میرایی

با تعریف مختصات تعمیم‌یافته $\quad (15) \quad \boxed{\{\mathbf{x}(t)\}=[\mathbf{\Phi}]\{\mathbf{y}(t)\}}$ $\quad [\mathbf{\Phi}]$: ماتریس مودال

معادله حرکت در مختصات تعمیم یافته به صورت زیر تشکیل می‌گردد

$$\boxed{[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{y}}(t)\}+[\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{y}}(t)\}+[\mathbf{K}]\{\mathbf{y}(t)\}=\{\mathbf{P}(t)\}} \quad (16)$$

که در آن

$$\boxed{[\mathbf{K}]=[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{k}][\mathbf{\Phi}] \qquad [\mathbf{M}]=[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{m}][\mathbf{\Phi}] \qquad [\mathbf{C}]=[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{c}][\mathbf{\Phi}] \qquad \{\mathbf{P}(t)\}=[\mathbf{\Phi}]^T\{\mathbf{p}(t)\}} \quad (17)$$

❑ توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

با در نظر گرفتن مود دلخواه i اُم $\{\varphi^*\}_i$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\{\mathbf{x}(t)\}_i=\{\varphi^*\}_i\, y(t)} \quad (18) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M_i\,\ddot{y}(t)+C_i\dot{y}(t)+K_i y(t)=P_i(t)} \quad (19)$$

که در آن

$$\boxed{\begin{array}{llll} M_i=\{\varphi^*\}_i^T[\mathbf{m}]\{\varphi^*\}_i & (1) & K_i=\{\varphi^*\}_i^T[\mathbf{k}]\{\varphi^*\}_i=\omega_i^2 M_i & (3) \\ C_i=\{\varphi^*\}_i^T[\mathbf{c}]\{\varphi^*\}_i=2\xi\omega_i M_i & (2) & P_i(t)=\{\varphi^*\}_i^T\{\mathbf{p}(t)\} & (4) \end{array}} \quad (20)$$

با فرض آن که نیروی خارجی سینوسی باشد

$$\{\mathbf{p}(t)\}=\{\mathbf{p_0}\}\sin(\overline{\omega}t) \overset{(20)}{\Rightarrow} P_i(t)=\{\varphi^*\}_i^T\{\mathbf{p_0}\}\sin(\overline{\omega}t) \Rightarrow \boxed{P_i(t)=P_0\sin(\overline{\omega}t)} \quad (21)$$

که در آن

$$\boxed{P_0=\{\varphi^*\}_i^T\{\mathbf{p_0}\}} \quad (22)$$

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

در حالت SDOF :

کنترل براساس شتاب مجاز $$D_{2allow} = \frac{\ddot{x}_{allow}}{p_0 / m}$$

کنترل براساس جابجایی مجاز $$\overline{D}_{2allow} = \frac{m\overline{\omega}^2}{p_0} x_{allow}$$

در حالت MDOF برای هریک از روابط منفرد روابطی مشابه با روابط فوق نوشت:

کنترل براساس شتاب مجاز $$\boxed{D_{2allow} = \frac{\ddot{y}_{allow}}{P_0 / M_i}} \quad (23)$$

کنترل براساس جابجایی مجاز $$\boxed{\overline{D}_{2allow} = \frac{M_i\overline{\omega}^2}{P_0} y_{allow}} \quad (24)$$

که در آن

y_{allow}: جابجایی مجاز مودال $\ddot{y}_{allow}$: شتاب مجاز مودال

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

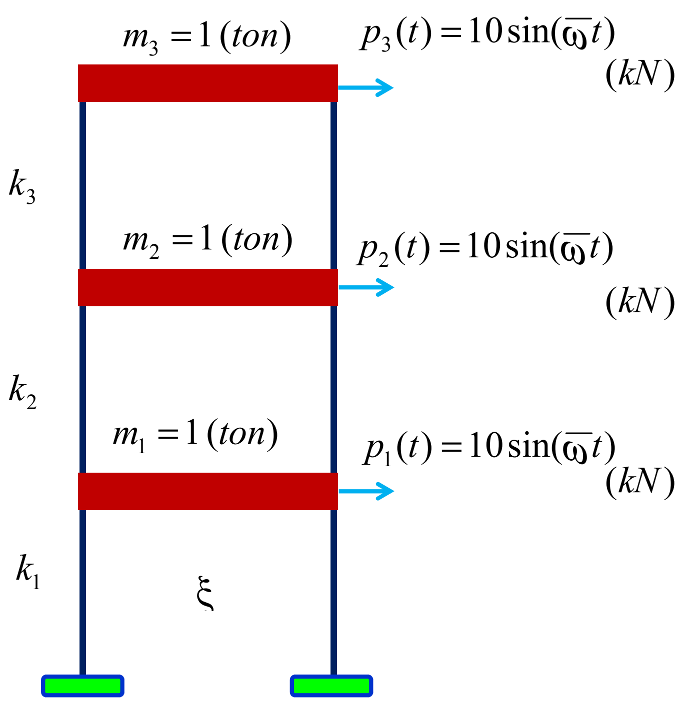
مثال ۳- شکل روبه رو ساختمان سه طبقه فولادی را نشان می‌دهد. سختی طبقات را در سه حالت زیر به گونه‌ای تعیین نمایید که با انتخاب شکل مود ارتعاشی دلخواه $\{\varphi^*\}$ جابجایی مجاز طبقه سوم برابر با $x_{3_{allow}} = 10\ cm$ شود.

1) $\overline{\omega} = 2\pi \quad , \quad \xi = 0$

2) $\overline{\omega} = 4\pi \quad , \quad \xi = 0$

3) $\overline{\omega} = 4\pi \quad , \quad \xi = 5\%$

$$\{\varphi^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$



❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳-

$$x_3^* = y_{allow} = 0.1\,(m)$$

$$\{\mathbf{p_0}\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad (kN)$$

$$M^* = 1555.67\,(kg)$$

$$P_0 = 20\,(kN)$$

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 1) $\bar{\omega} = 2\pi \quad , \quad \xi = 0$

$$\bar{D}_{2allow} = 0.307$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \beta \le 0.485$$

$$K^* \ge 261.41 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 1) $\bar{\omega} = 2\pi$, $\xi = 0$

مود انتخابی $\{\varphi^*\}$ باید در رابطه (۱) $[\mathbf{k}]\{\varphi^*\} = \omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi^*\}$ نیز صدق کند:

$$\boxed{\omega = 12.963}$$

$$\Rightarrow \boxed{[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\{\mathbf{p}'\} = \begin{Bmatrix} 56.017 \\ 112.03 \\ 168.05 \end{Bmatrix} \times 10^3 \quad (N)}$$

$$\boxed{\{\mathbf{k_s}\} = \begin{Bmatrix} 1008.3 \\ 840.25 \\ 504.15 \end{Bmatrix} \quad (kN/m)}$$

Stiffness Based Control

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 2) $\bar{\omega} = 4\pi$, $\xi = 0$

$$\boxed{\bar{D}_{2allow} = 1.228}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 < \beta \le 0.742 \\ 2.319 \le \beta < \infty \end{matrix}} \quad \begin{matrix} (I.a) \\ (I.b) \end{matrix}$$

$$\boxed{K^* \ge K_1^* = 445.64 \left(\frac{kN}{m}\right)}$$

$$\boxed{K^* \le K_2^* = 45.64 \left(\frac{kN}{m}\right)}$$

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 2) $\bar{\omega}=4\pi$, $\xi=0$

مود انتخابی $\{\varphi^*\}$ باید در رابطه (۱) $[\mathbf{k}]\{\varphi^*\}=\omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi^*\}$ نیز صدق کند:

$$\boxed{\omega=5.417}$$

$$[S]=\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_1-\phi_2 & 0\\ 0 & \phi_2-\phi_1 & \phi_2-\phi_3\\ 0 & 0 & \phi_3-\phi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-1\\ 0 & 0 & 1-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow \boxed{[S]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}}$$

$$(11)\quad\Rightarrow\quad \{\mathbf{p}'\}=\omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi\}^*=(5.417)^2\begin{bmatrix}1000 & 0 & 0\\ 0 & 1000 & 0\\ 0 & 0 & 1000\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 1\end{Bmatrix}\Rightarrow \boxed{\{\mathbf{p}'\}=\begin{Bmatrix}9.78\\ 19.56\\ 29.34\end{Bmatrix}\times10^3\quad (N)}$$

$$(13)\quad\Rightarrow\quad \{\mathbf{k}_s\}=[\mathbf{S}]^{-1}\{\mathbf{p}'\}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}9.78\times10^3\\ 19.56\times10^3\\ 29.34\times10^3\end{Bmatrix}\times10^{-3}\Rightarrow \boxed{\{\mathbf{k}_s\}=\begin{Bmatrix}176.05\\ 146.71\\ 88.027\end{Bmatrix}\quad (kN/m)}$$

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 3) $\bar{\omega}=4\pi$, $\xi=0.05$

$$\boxed{\bar{D}_{2allow}=1.228}$$

$$(21.L2):\quad \beta_{1,2}=\left[\frac{1-2\xi^{*2}\pm\sqrt{(1-2\xi^{*2})^2-1+\left(\dfrac{1}{\bar{D}_{2allow}}\right)^2}}{1-\left(\dfrac{1}{\bar{D}_{2allow}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\begin{matrix}0<\beta\le 0.745\\ 2.312\le\beta<\infty\end{matrix}}\quad \begin{matrix}(I.a)\\ (I.b)\end{matrix}$$

$$\boxed{K^*\le K_2^*=45.926\left(\frac{kN}{m}\right)}$$

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 3) $\overline{\omega} = 4\pi$, $\xi = 0.05$

مود انتخابی $\{\varphi^*\}$ باید در رابطه (۱) $[\mathbf{k}]\{\varphi^*\} = \omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi^*\}$ نیز صدق کند:

$$\boxed{\omega = 5.4336}$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_1-\phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2-\phi_1 & \phi_2-\phi_3 \\ 0 & 0 & \phi_3-\phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}$$

$$(11) \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{p}'\} = \omega^2[\mathbf{m}]\{\varphi\}^* = (5.4336)^2 \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\{\mathbf{p}'\} = \begin{Bmatrix} 9.8412 \\ 19.682 \\ 29.524 \end{Bmatrix} \times 10^3 \quad (N)}$$

$$(13) \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{k}_s\} = [\mathbf{S}]^{-1}\{\mathbf{p}'\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 9.8412\times10^3 \\ 19.682\times10^3 \\ 29.524\times10^3 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\{\mathbf{k}_s\} = \begin{Bmatrix} 177.14 \\ 147.62 \\ 88.571 \end{Bmatrix} \quad (kN/m)}$$

❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 3) $\overline{\omega} = 4\pi$, $\xi = 0.05$

$$\boxed{C^* = 845.22 \quad (N.\sec/m)}$$

$$\frac{20\times10^3}{45.926\times10^3}\left[(1-(2.312)^2)^2 + (2(0.05)(2.312))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

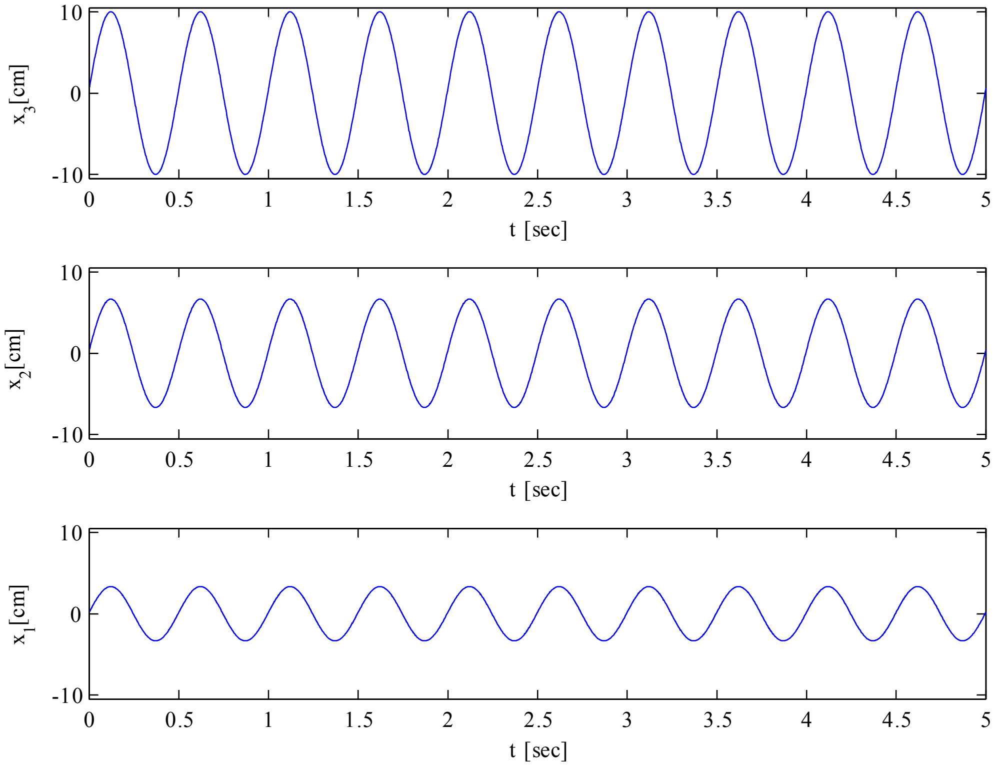
$$\Rightarrow \boxed{\rho = 0.1 \quad (m)}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2(0.05)(2.312)}{1-(2.312)^2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = -0.05313^{rad}}$$

$$\boxed{y(t) = 0.1\sin(4\pi t + 0.05313)}$$

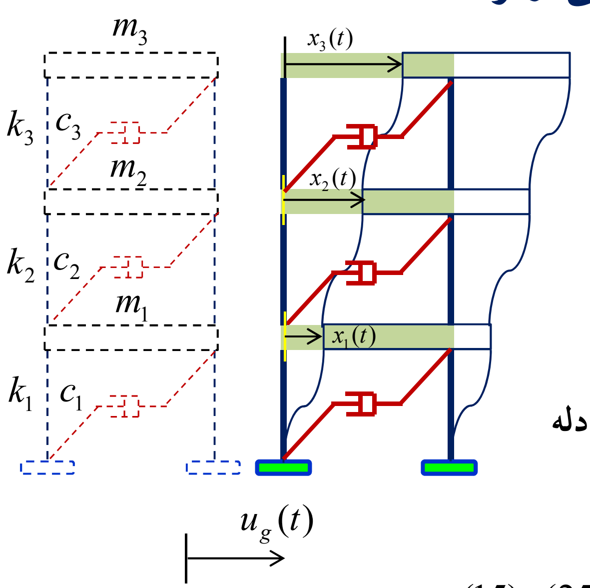
❑توزیع سختی با روش مودال- نیروی خارجی تناوبی

پاسخ مثال ۳- 3) $\overline{\omega} = 4\pi$, $\xi = 0.05$



Matlab Code (L02Example03.m)

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله



معادله حرکت سیستم MDOF با میرایی تحت اثر زلزله به صورت زیر است:

$$\boxed{[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{x}}(t)\}+[\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{x}}(t)\}+[\mathbf{k}]\{\mathbf{x}(t)\}=-[\mathbf{m}]\{\mathbf{L}\}\ddot{u}_g(t)} \quad (25)$$

$\ddot{u}_g(t)$: شتاب زمین $\{L\}_{n\times 1}$: بردار واحد

با جایگذاری مختصات تعمیم‌یافته از رابطه (۱۵) در رابط (۲۵) **معادله حرکت در مختصات تعمیم** یافته به دست می‌آید:

$$(15),(25) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{y}}(t)\}+[\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{y}}(t)\}+[\mathbf{K}]\{\mathbf{y}(t)\}=-\{\mathbf{P}_e(t)\}} \quad (26)$$

که در آن $\{\mathbf{P}_e(t)\}$ بردار نیروی زلزله در مختصات تعمیم یافته است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\begin{gathered}\{\mathbf{P}_e(t)\}=\{\mathbf{\Gamma}\}\ddot{u}_g(t)\\ \{\mathbf{\Gamma}\}=[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{m}]\{\mathbf{L}\}\end{gathered}} \quad (27)$$

$\{\Gamma\}$: **بردار مشارکت (Participation Vector)**

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

با در نظر گرفتن مود دلخواه i اُم $\{\varphi^*\}_i$ خواهیم داشت:

$$\{\mathbf{x}(t)\}_i = \{\varphi^*\}_i\, y(t) \qquad (18)$$

$$(18) \Rightarrow \boxed{M_i\, \ddot{y}(t) + C_i \dot{y}(t) + K_i y(t) = P_{ei}(t)} \qquad (28)$$

که در آن

$$\boxed{P_{ei}(t) = \Gamma_i\, \ddot{u}_g(t) \quad , \quad \Gamma_i = \{\varphi^*\}_i^T [\mathbf{m}]\{\mathbf{L}\}} \qquad (29)$$

Γ_i: ضریب مشارکت (Participation Factor)

$$(28),(29) \Rightarrow \boxed{M_i\, \ddot{y}(t) + C_i \dot{y}(t) + K_i y(t) = \Gamma_i\, \ddot{u}_g(t)} \qquad (30)$$

$$(30) \overset{\div M_i}{\Rightarrow} \boxed{\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_i \dot{y}(t) + \omega_i^2 y(t) = \frac{\Gamma_i}{M_i}\ddot{u}_g(t)} \qquad (31) \qquad (20.1):\ M_i = \{\varphi\}_i^T [\mathbf{m}]\{\varphi\}_i$$

رابطه (۳۱) یک معادله حرکت SDOF می‌باشد.

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ معادله (۳۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{y_i(t) = \frac{\Gamma_i}{M_i} Q_i(t)} \qquad (32)$$

که در آن

$$\boxed{Q_i(t) = \frac{-1}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{u}_g(t) e^{-\xi\omega_i (t-\tau)} Sin[\omega_{Di}(t-\tau)] \cdot d\tau} \qquad (33) \qquad \omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1-\xi^2}$$

$Q_i(t)$: از جنس جابجایی است و مقدار ماکزیمم آن همان جابجایی طیفی Sd می‌باشد.

$y_{i\max}$: جابجایی ماکزیمم مود i اُم در مختصات تعمیم یافته

$$(32) \Rightarrow \boxed{y_{i\max} = \frac{\Gamma_i}{M_i} S_{di}} \qquad (34)$$

با استفاده از رابطه بین شتاب طیفی و جاجایی طیفی، رابطه (۳۴) را می‌توان برحسب شتاب طیفی بیان نمود:

$$S_d = \frac{S_a}{\omega^2} \Rightarrow y_{i\max} = \frac{\Gamma_i}{\omega_i^2 M_i} S_{ai} \Rightarrow \boxed{y_{i\max} = \frac{T_i^2}{4\pi^2} \times \frac{\Gamma_i}{M_i} S_{ai}} \qquad (35)$$

❑ توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

اگر y^* به عنوان مقدار مجاز برای $y_{i\max}$ معرفی شود پریود به صورت زیر به دست می‌آید:

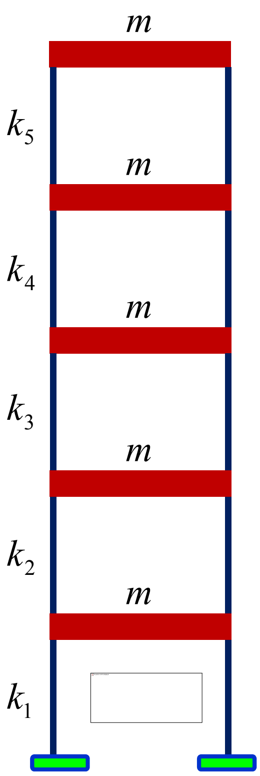
$$y_{i\max} = y^* \overset{(35)}{\Rightarrow} \boxed{T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\Gamma_i}{M_i y^*} S_{ai}}}} \quad (36)$$

همانطور که پیداست در رابطه (۳۶)، T_i تابعی از S_{ai} می‌باشد. این در حالی است که برای تعیین S_{ai} باید T_i در دسترس باشد. بنابراین باید نمودار S_{ai} برحسب T_i را براساس رابطه (۳۶) با نمودار طیف شتاب- زمان تناوب همزمان رسم کرده، نقطه تلاقی همان طراحی مورد نظر است.

$$(36) \Rightarrow \boxed{S_{ai} = \frac{M_i y^*}{\Gamma_i} \frac{4\pi^2}{T_i^2}} \quad (37)$$

رابطه (۳۷) یک معادله درجه ۲ است که باید بر روی نمودار طیف شتاب- زمان تناوب رسم شود.

❑ توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله



مثال ۴- یک ساختمان ۵ طبقه تحت اثر زلزله Elcentro قرار می‌گیرد. سختی طبقات را به گونه‌ای تعیین نمایید که با انتخاب شکل مود ارتعاشی دلخواه $\{\varphi^*\}$ جابجایی مجاز طبقه پنجم برابر با $x_{5_{allow}} = 10\ cm$ شود.

$$m = 1000 \quad (kg) \qquad \{\varphi^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-

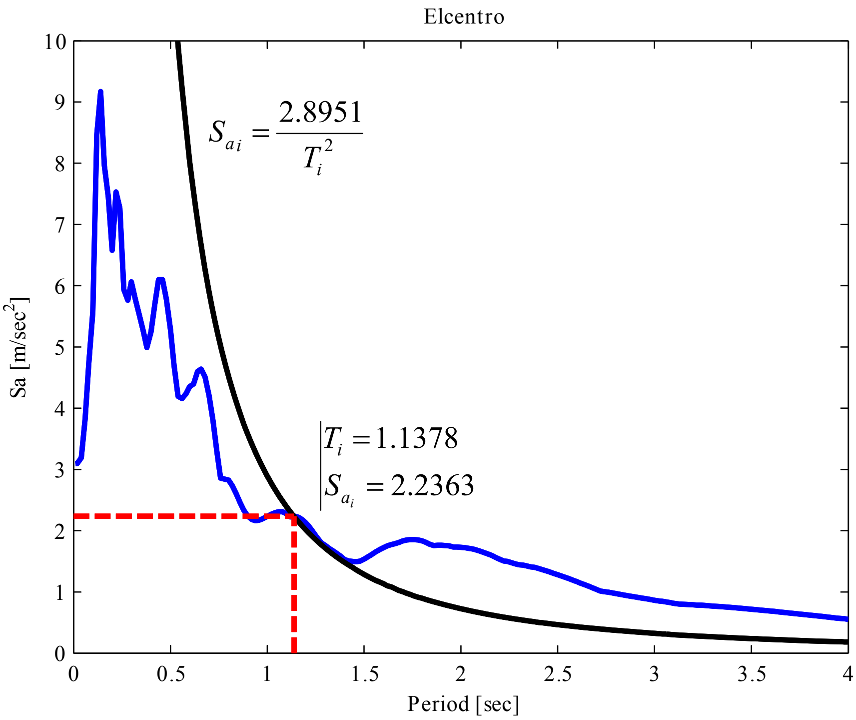
$$\boxed{M^{*}=2200\ (kg)}$$

$$=\begin{Bmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{Bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}1000&0&0&0&0\\0&1000&0&0&0\\0&0&1000&0&0\\0&0&0&1000&0\\0&0&0&0&1000\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{\Gamma^{*}=3000}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1^{*}=\frac{1}{5}y_{allow}\\ x_2^{*}=\frac{2}{5}y_{allow}\\ x_3^{*}=\frac{3}{5}y_{allow}\\ x_4^{*}=\frac{4}{5}y_{allow}\\ x_5^{*}=y_{allow}\end{cases}\xrightarrow{x_5^{*}=0.1\,(m)}\boxed{x_5^{*}=y_{allow}=0.1\,(m)}$$

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-



نمودار طیف پاسخ شتاب زلزله **Elcentro**

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-

$$\boxed{\omega_i = 5.52\ (rad / \sec)}$$

مود انتخابی $\{\varphi^*\}$ باید در رابطه (۱) $[\mathbf{k}]\{\varphi^*\} = \omega^2 [\mathbf{m}]\{\varphi^*\}$ نیز صدق کند:

$$\Rightarrow \boxed{[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}}$$

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-

$$(5.52)^2 \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\mathbf{p}'\}^T = \{6.10 \quad 12.20 \quad 18.30 \quad 24.40 \quad 30.49\} \times 10^3 \quad (N)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 6.10\times10^3 \\ 12.20\times10^3 \\ 18.30\times10^3 \\ 24.40\times10^3 \\ 30.49\times10^3 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\mathbf{k}_s\}^T = \{457.42 \quad 426.93 \quad 365.94 \quad 274.45 \quad 152.47\} \quad (kN / m)}$$

❑ توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-

$$\{k_s\} \Rightarrow [k]=\begin{bmatrix} 884.35 & -426.93 & 0 & 0 & 0 \\ -426.93 & 792.86 & -365.94 & 0 & 0 \\ 0 & -365.94 & 640.39 & -274.45 & 0 \\ 0 & 0 & -274.45 & 426.93 & -152.47 \\ 0 & 0 & 0 & -152.47 & 152.47 \end{bmatrix}\times 10^3$$

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} \boxed{0.2} & -0.46 & 1.33 & -5.6 & 42 \\ 0.4 & -0.76 & 1.33 & -0.4 & -48 \\ 0.6 & -0.73 & -0.33 & 6.6 & 27 \\ 0.8 & -0.2 & -2 & -4.6 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix} \boxed{5.52} \\ 13.53 \\ 21.39 \\ 29.22 \\ 37.04 \end{Bmatrix} \qquad \{T\}=\begin{Bmatrix} \boxed{1.1378} \\ 0.4645 \\ 0.2937 \\ 0.2150 \\ 0.1696 \end{Bmatrix}$$

❑ توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-

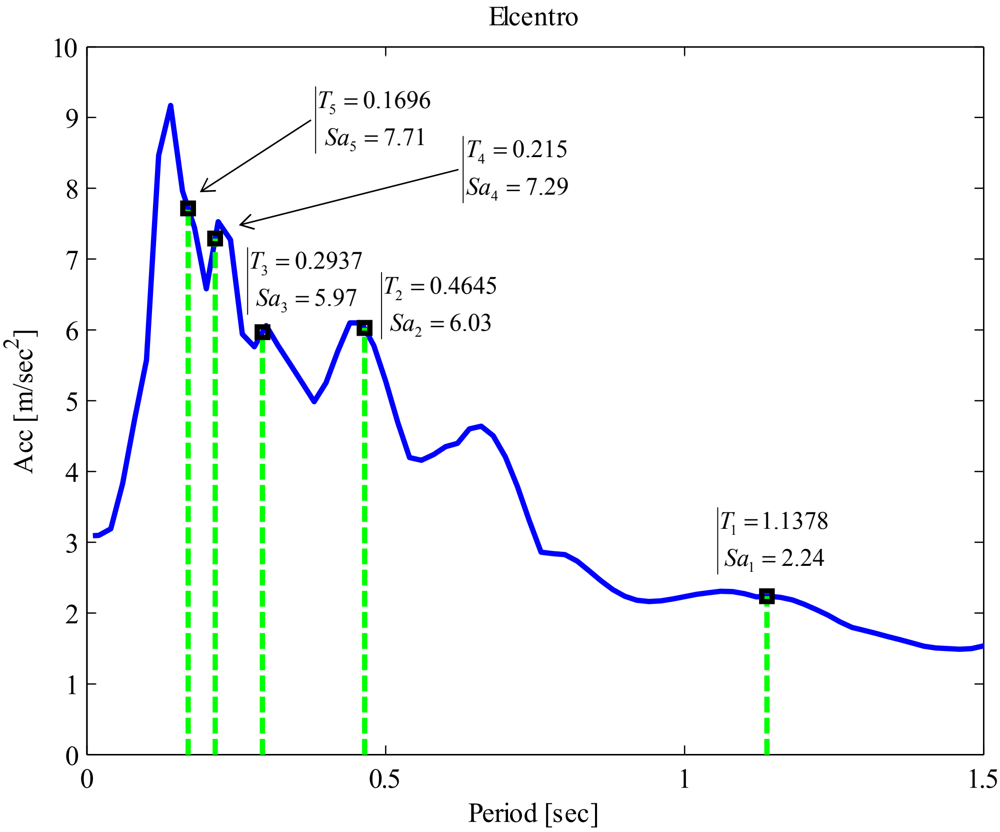
$$[M]=[\Phi]^T[m][\Phi] \Rightarrow [M]=\begin{bmatrix} \boxed{2200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2383.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8666.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 97240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4862000 \end{bmatrix}$$

$$\{\Gamma\}=[\Phi]^T[m]\{L\}= \Rightarrow \{\Gamma\}^T=\{\boxed{3000} \quad -1166.7 \quad 1333.3 \quad -3000 \quad 14000\}$$

$$MPMR=\{81.82 \quad 11.42 \quad 4.10 \quad 1.85 \quad 0.81\}\,(\%)$$

❑ توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-



نمودار طیف پاسخ شتاب زلزله **Elcentro**

❑ توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-

$$\{\mathbf{V}\}_{\max} = \{9.15 \quad 3.44 \quad 1.22 \quad 0.67 \quad 0.31\}\ (kN)$$

$$[\mathbf{f}] = \begin{bmatrix} 0.61 & 1.38 & 1.22 & 1.26 & 0.93 \\ 1.22 & 2.26 & 1.22 & 0.09 & -1.06 \\ 1.83 & 2.16 & -0.31 & -1.48 & 0.60 \\ 2.44 & 0.59 & -1.84 & 1.03 & -0.18 \\ 3.05 & -2.95 & 0.92 & -0.22 & 0.02 \end{bmatrix} (kN)$$

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 2 & 0.75 & 0.27 & 0.15 & 0.07 \\ 4 & 1.23 & 0.27 & 0.01 & -0.08 \\ 6 & 1.18 & -0.07 & -0.17 & 0.04 \\ 8 & 0.32 & -0.40 & 0.12 & -0.01 \\ 10 & -1.61 & 0.20 & -0.03 & 0 \end{bmatrix} (cm)$$

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-

ترکیب اثر مودها براساس روش SRSS

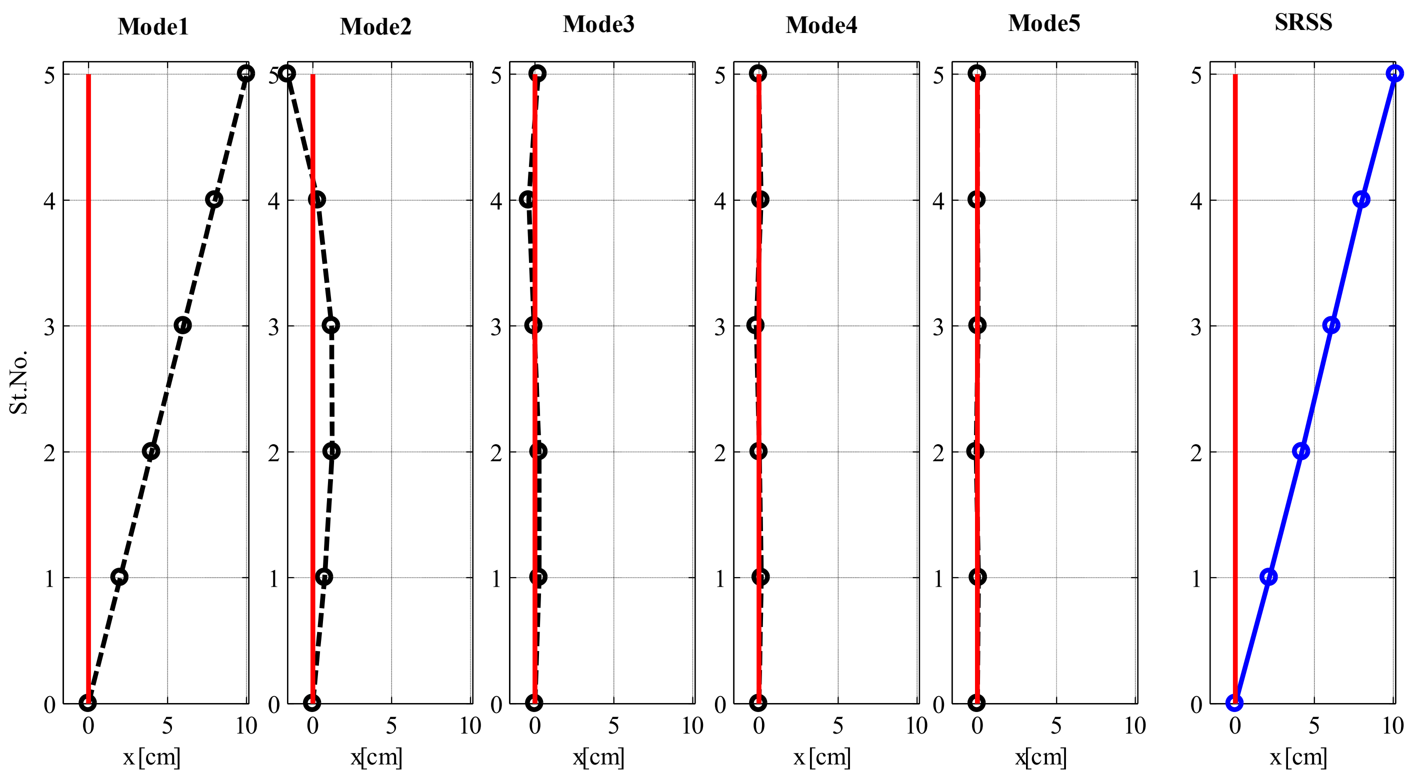
$$\{\mathbf{x}\}^T = \{2.16 \quad 4.19 \quad 6.12 \quad 8.01 \quad 10.13\} \quad (cm)$$

$$\{\mathbf{f}\}^T = \{2.49 \quad 3.04 \quad 3.26 \quad 3.28 \quad 4.35\} \quad (kN)$$

$$V_{\max} = 9.88 \quad (kN)$$

❑توزیع سختی با روش طیفی- نیروی خارجی زلزله

پاسخ مثال ۴-



Matlab Code (L02Example04.m)