دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Nonlinear Analysis of Structures

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

هدف در مهندسی سازه $\longleftarrow$ **بررسی تعادل**

– تعادل استاتیکی: قانون اول نیوتن.

– تعادل دینامیکی: قانون دوم نیوتن.

بارهای دینامیکی: بارهایی هستند که با زمان تغییر می‌کنند؛ به طوری که در جرم سرعت و شتاب قابل توجه‌ای ایجاد می‌نمایند.

معادله تعادل دینامیکی:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(t)}\ddot{u}_{(t)} + C_{(t)}\dot{u}_{(t)} + K_{(u,p)}u_{(t)} = R_{(t,u)}}$$

$M_{(t)}$: ماتریس جرم که تابعی از زمان است. (مانند جابجایی آدم‌ها در زلزله– افتادن دیوارها به بیرون در حین زلزله)

با این وجود می‌توان ماتریس جرم را ثابت فرض کرد $\boxed{M_{(t)} \approx M = cte}$

$C_{(t)}$: ماتریس میرایی که تابعی از زمان است. (از بین رفتن اتصالات و خورد شدن مصالح)

$$\boxed{C_{(t)} \approx C_{cte} \quad or \quad C_{(t,u)}}$$

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

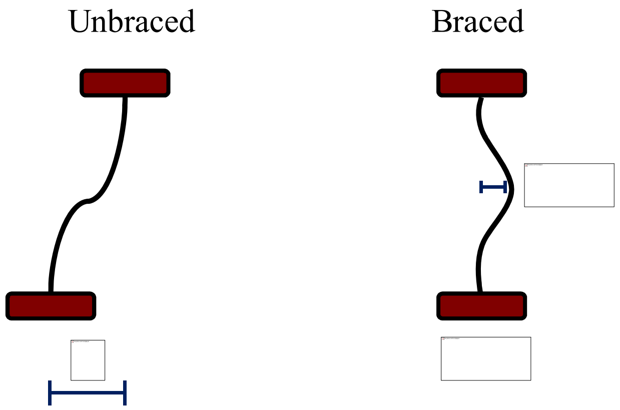
$K_{(u\,,\,p)}$: ماتریس سختی که تابعی از تغییرشکل و نیروهای محوری است.

شامل مباحث:

- غیرخطی مواد (Material Nonlinearity)
- غیرخطی هندسی همان تغییر شکل‌های بزرگ (Kinematic (Geometric) Nonlinearity)
- اثرات نیروی محوری $P-\Delta$ (Axial Effect)

$P-\Delta$ یعنی غیرخطی هندسی اما تغییر شکل کوچک و معادلات تعادل در حالت تغییر شکل یافته در نظر گرفته می‌شود.

اگر ستون با سه گره تعریف شود، دو گره در انتها و یک گره در وسط، و در تحلیل Geometrical Nonlinearity فعال باشد (مقدار تغییر شکل‌ها را قابل توجه فرض کنیم)؛ با بررسی تعادل در حالت تغییر شکل یافته دیگر نیازی به در نظر گرفتن اثر $P-\Delta$ نیست.



تعریف گره وسط در این وضعیت است. با این کار کامپیوتر تشخیص می‌دهد که در وسط ستون تغییر مکان جانبی اتفاق افتاده است.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

$R_{(t\,,\,u)}$: بردار نیروهای خارجی که تابعی از زمان و جابجایی است.

شامل مباحث:

- غیرخطی بار– (Time Effect Nonlinearity-Load Nonlinearity)
- غیرخطی Contact ناشی از شرایط مرزی (Boundary Condition Nonlinearity)

- **مانند بلندشدگی پای ستون**، در این حالت واکنش نداریم وقتی که پای ستون نشست دوباره واکنش داریم.
- **قسمت بالایی دو ساختمان مجاور به همدیگر برخورد کند (Pounding)** در این هنگام در بالای ساختمان عکس‌العمل ایجاد می‌شود و زمانی که به حالت اول برگردد واکنشی نداریم. این مسئله را می‌توان با تعریف دو گره و بررسی جابجایی نسبی دو گره مدل کرد. $if \quad \Delta u \le 0 \quad \Rightarrow \quad Pounding$
- **خاک زیر شالوده فقط نیروهای فشاری را تحمل می‌کند** (نیروی کششی تحمل نمی‌کند) می‌توان از المان GAP استفاده کرد.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

در تحلیل خطی فرضیات زیر را داریم:

- تغییر مکان‌های کوچک (Displacement) – تغییر شکل‌های کوچک (Deformation)
- مواد خطی (رابطه تنش– کرنش خطی)
- شرایط مرزی در زمان بارگذاری ثابت است.

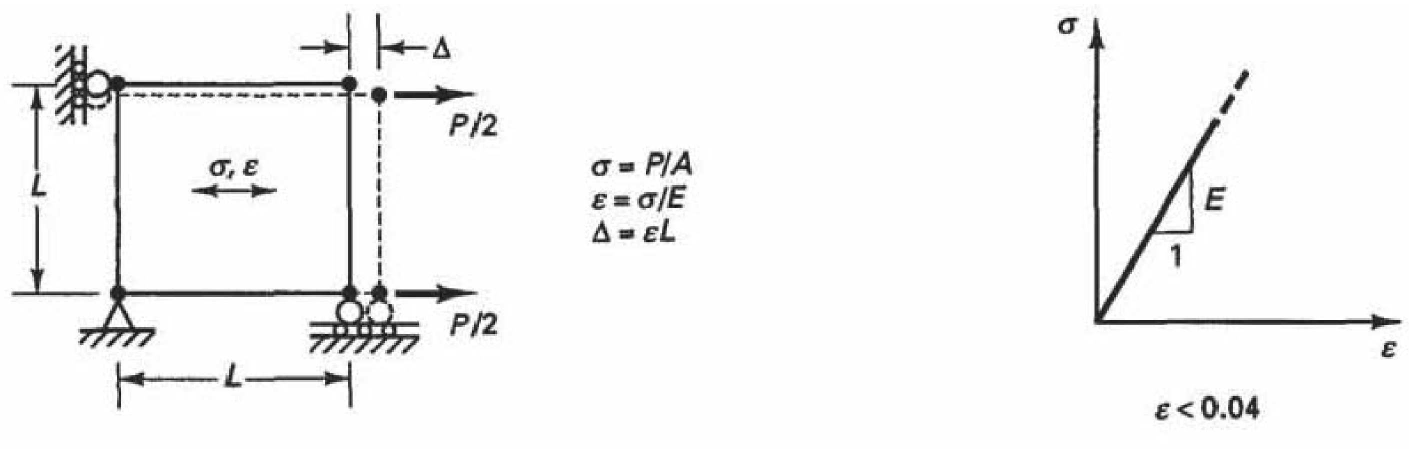
غیرخطی: تغییر شرایط معادله تعادل در طول زمان بارگذاری است

Nonlinearity
- Static: Load Step
- Dynamic: Time Step

یعنی در هر Time Step یک بار باید معادلات تعادل را حل کرد. اگر Time Step برابر با ۱۰ باشد یعنی باید ۱۰ بار معادلات تعادل حل گردد.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

رده بندی تحلیل غیرخطی

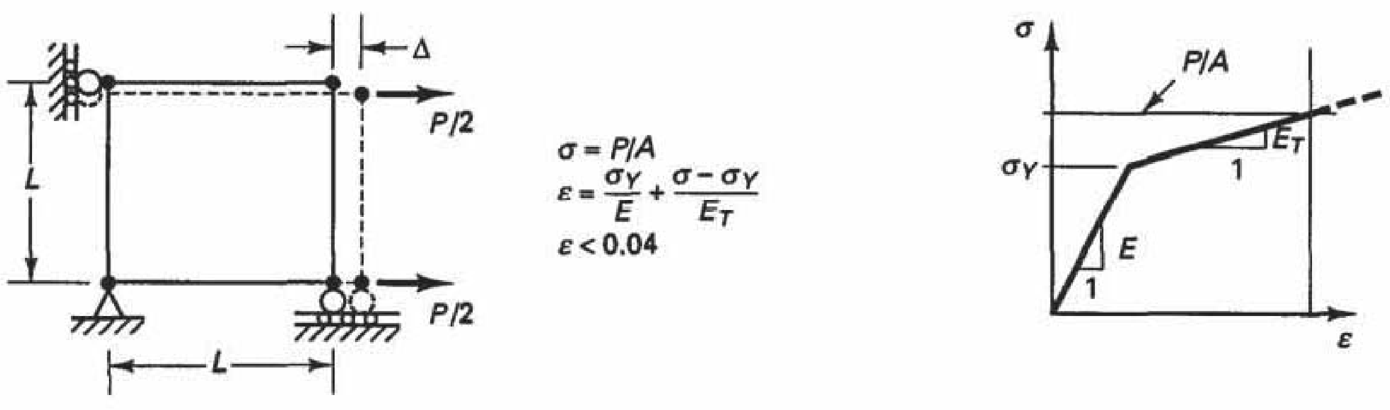


(a) Linear elastic (infinitesimal displacements)

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

رده بندی تحلیل غیرخطی

Type of analysis	**Description**	**Typical formulation used**	**Stress and strain measures**
Materially- nonlinear-only	Infinitesimal displacements and strains; the stress-strain relation is nonlinear	Materially-nonlinear-only (MNO)	Engineering stress and strain

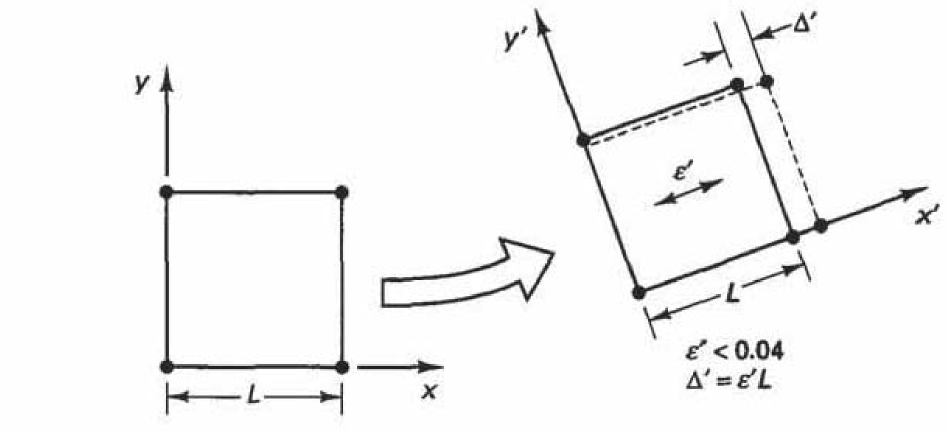


(b) Materially-nonlinear-only (infinitesimal displacements, but nonlinear stress-strain relation)

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

رده بندی تحلیل غیرخطی

Type of analysis	**Description**	**Typical formulation used**	**Stress and strain measures**
Large displacement, large rotation, but small strains	Displacements and rotations of fibers are large, but fiber extensions and angle changes between fibers are small; stress-strain relation may be linear or nonlinear (often is linear)	Total Lagrangian (TL) Updated Lagrangian (UL)	Second Piola-Kirchhoff stress, Green-Lagrange strain Cauchy stress, Almansi strain

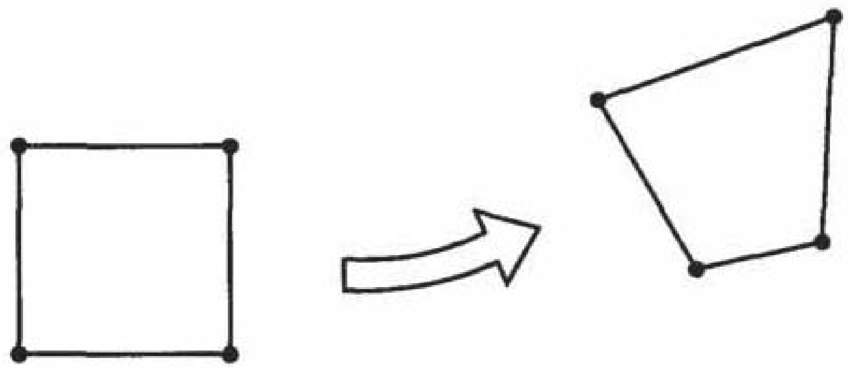


(c) Large displacements and large rotations but small strains. Linear or nonlinear material behavior

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

رده بندی تحلیل غیرخطی

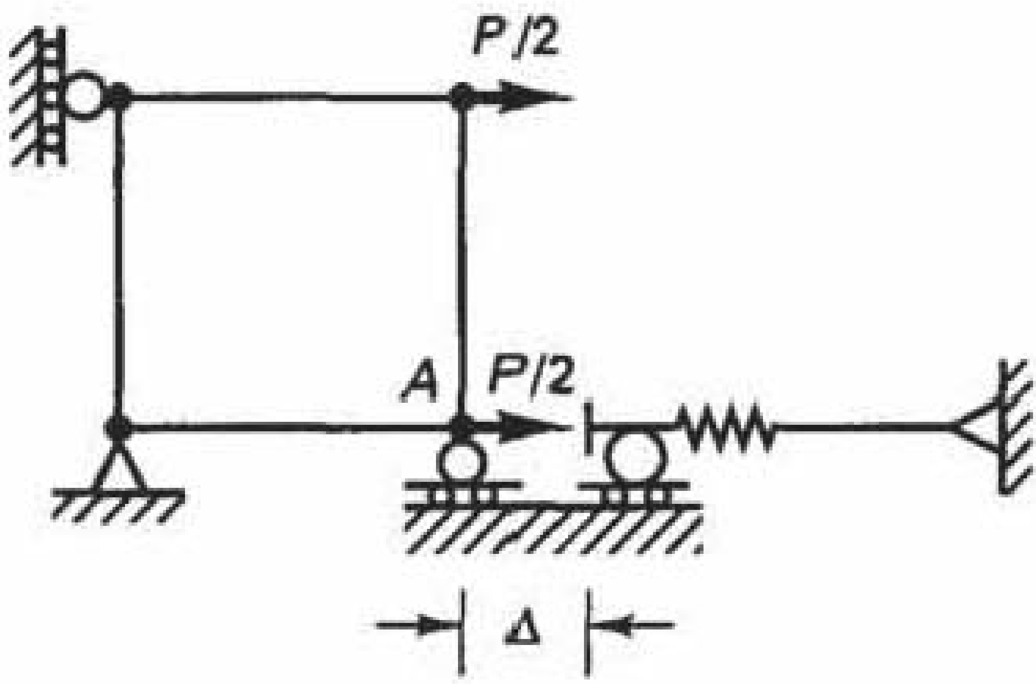
Type of analysis	Description	Typical formulation used	Stress and strain measures
Large displacements, large rotations, and large strains	Fiber extensions and angle changes between fibers are large, fiber displacements and rotations may be also large; the stress-strain relation may be linear or nonlinear(often is nonlinear)	Total Lagrangian (TL) Updated Lagrangian (UL)	Second Piola-Kirchhoff stress, Green-Lagrange strain Cauchy stress, Logarithmic strain



(d) Large displacements, large rotations, and large strains. Linear or nonlinear material bahavior

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

رده بندی تحلیل غیرخطی



(e) Change in boundary condition at displacement Δ

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

در تحلیل غیرخطی تمرکز بر روی حل سیستم معادلات تعادل است که در دو حالت انجام می‌گیرد:

I. استاتیکی- معادلات غیردیفرانسیل- روش‌های عددی برای حل این دستگاه معادلات به کار گرفته می‌شود- با روش صحیح و خطا (حدس اولیه جواب- کنترل معادلات تعادل- پیدا کردن خطا- تصحیح جواب‌ها- و دوباره تکرار مراحل...) Iterative Methods: Newton Raphson

II. دینامیکی- معادلات به صورت دیفرانسیل ($M\ddot{u}$ و $C\dot{u}$) – به کمک یک سری روش‌های عددی این مقادیر بر حسب u معادل سازی می‌شود- معادلات شبیه معادلات استاتیکی غیردیفرانسیلی می‌گردد. به دلیلی آن که بعضی معادلات نسبت به مجهولات خود Decouple یا تجزیه نمی‌شوند (یعنی معادلات با هم دیگر درگیر هستند) مجبور به استفاده از روش‌های عددی هستیم. Newmark – Wilson teta

نکاتی در ارتباط با تحلیل غیرخطی:

1) با یک تحلیل خطی برای حدس اولیه جواب و نیز قضاوت بر روی رفتار غیرخطی استفاده می‌کنیم. نوع تحلیل غیرخطی تعیین می‌شود. مثلا با توجه به تنش تسلیم آیا مواد وارد ناحیه غیرخطی شده است (غیر خطی مواد)- اگر تغییر مکان‌های گره‌ای از مرز ۲۵٪ تا ۳۰٪ افزایش پیدا کرده باشد (غیرخطی هندسی)- کنترل جابجایی بالای ساختمان برای اثر Pounding (غیر خطی Contact). و در نهایت قضاوت بر روی درستی جواب خطی، که آیا بر اساس این مشاهدات و نتایج، آنالیز خطی دقت قابل قبولی دارد یا باید آنالیز غیرخطی را انجام داد.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

2) در یک تحلیل غیرخطی به صورت قدم به قدم گزینه‌های غیرخطی را افزایش می‌دهیم. (غیرخطی مواد، غیرخطی هندسی، غیرخطی Contact ...)

مزایای این کار:

- زمان صرفه جویی می‌شود.
- اگر مسئله واگرایی پیش بیاید می‌توان بر روی آن قضاوت کرد. می‌توان تشخیص داد که واگرایی ناشی از چیست.
- در بحث مهندسی هدف ساده سازی و تا حد امکان دوری از پیچیدگی‌ها است.
- حجم زیاد نتایج دسته‌بندی می‌گردد.
- خطاهایی که در مدل‌سازی وجود دارد را می‌توان پیدا (Trace) کرد.
- افراد محقق با تحلیل غیرخطی خسته و ناامید شده به طوری که ذهن جمع‌بندی خود را از دست می‌دهد (Distraked). با انجام این کار این مورد پیش نمی‌آید.

3) با انجام مراحل قبلی قسمتی از سازه که دارای رفتار غیرخطی است پیدا می‌شود:

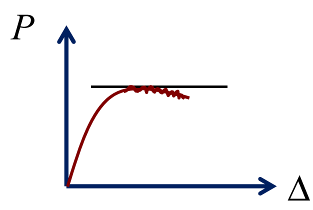
- تمرکز غیرخطی پدیده نامطلوبی است (با تعیین محل غیر خطی، می‌توان غیرخطی را در سازه توزیع کرد).
- با مدل سازی محلی منطقه غیرخطی می‌توانیم در جهت رفع اشکال اقدام کنیم.

در مسائل پیچیده مدیریت عملی به این صورت است که باید قدم به قدم حرکت کرد. (تحلیل خطی استاتیکی- تحلیل خطی دینامیکی- تحلیل غیرخطی استاتیکی- تحلیل غیرخطی دینامیکی)

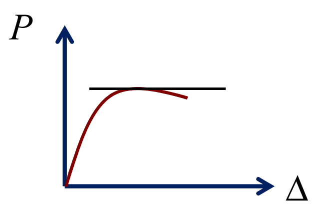
Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

4) راندمان- انتخاب روش غیرخطی تاثیر گذار است بر راندمان یا نه؟ یعنی در یک زمان منطقی به یک همگرایی (پایداری) رسیده و دقت قابل قبول باشد. با افزایش تعداد المان‌ها دقت افزایش پیدا می‌کند. با افزایش تعداد Stepها (Time interval – Load Step – Time Step) می‌توان همگرایی (پایداری) را سرعت بخشید.

در بحث تحلیل‌های دینامیکی مسئله ناپایداری نسبت به حالت استاتیکی مهم‌تر است.



در تحلیل غیرخطی دینامیکی به دلیل تغییرات جزئی نمودار شیب صفر واقعی نیست (مثلا ۰/۰۰۰۰۰۱۲) تشخیص سختی صفر مشکل است و این قسمت را رد می‌کند.



در تحلیل غیرخطی استاتیکی سختی صفر تشخیص داده می‌شود.

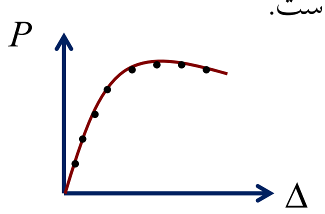
Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

حل معادلات دینامیکی (معادلات دیفرانسیل)

معادلات دینامیک حرکت در دو حالت زیر بررسی می‌گردد:

- آنالیز در حوزه زمانی (Time Domain)- ایجاد قضاوت نمی‌کند ریاضی‌وار است.
- آنالیز در حوزه فرکانسی (Frequency Domain)

آنالیز در حوزه فرکانسی بیشتر در مسائل خطی کاربرد دارد. این روش بسیار قابل فهم‌تر است.



در ابتدای هر Step آنالیز فرکانسی مودها در حالت تغییر شکل یافته انجام می‌شود

- هر یک از آنالیزها به روش Step by Step انجام می‌گیرد. در این روش رفتار غیرخطی سازه را به مجموعه‌ای از رفتارهای خطی تبدیل می‌کند به طوری که استفاده از اصل برهم نهی (Super Position) امکان‌پذیر باشد.
- حتی در مسائل خطی نیز استفاده از روش Step by Step توصیه می‌شود. زیرا باعث می‌شود که بارگذاری اعمال شده بر روی سازه در قدم‌های از پیش مشخص شده انجام گیرد. در پروژه‌های بزرگ این بحث رعایت می‌شود (بارگذاری مرحله به مرحله: تیرریزی، کف سازی، زنده و ...).

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

مواردی که بحث Short Duration مطرح باشد، مانند انفجار، ضربه، زلزله‌های سریع نزدیک گسل، آنالیز Time Domain عملکرد بهتری دارد. چون در آنالیز فرکانسی به روش Step by Step ممکن است Stepها آن‌قدر کوچک نباشد که بتواند انفجار ناگهانی که در زمان خیلی کوچک انجام می‌پذیرد را پوشش دهد.

تمام بحث‌ها بر روی SDOF است؛ که از نتایج آن می‌توان بر روی MDOF بحث کرد.

در MDOF مباحث ریاضی ماتریسی می‌شود؛ اما از نظر مفهوم فرق چندانی ندارد.

در حالت کلی هدف اصلی در یک آنالیز غیرخطی یافتن حالت تعادل (State of Equilibrium) یک سیستم است.

بارهای خارجی (External Load) تابعی از زمان می‌باشند که در دو حالت زیر در نظر گرفته می‌شود:

- دینامیکی (Real)
- استاتیکی (Artificial)

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

سیستم المان محدود (System of Finite Elements)

مساله اصلی در یک تحلیل عمومی عناصر محدود، یافتن حالت تعادل جسم متناظر با بارهای وارده است.

با فرض ${}^{t}R$ به عنوان تراز (Level) بار در زمان t، شرایط تعادل یک سیستم عناصر محدود را که نمایشگر جسم مورد نظر است می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\boxed{{}^{t}R - {}^{t}F = 0}$$

${}^{t}R$: بردار نیروهای نقاط گرهی خارجی بر جسم در هندسه مربوط به زمان t

${}^{t}F$: بردار نیروهای نقاط گرهی متناظر با تنش‌های المان در هندسه مربوط به زمان t

که در آن

$$\boxed{{}^{t}R_I = {}^{t}F = \sum_m \int_{{}^{t}V^{(m)}} {}^{t}B^{(m)^T} . {}^{t}\tau^{(m)} . {}^{t}dV^{(m)}} \qquad \boxed{{}^{t}R = {}^{t}R_B + {}^{t}R_S + {}^{t}R_C}$$

${}^{t}R_B$: نیروهای حجمی المان (Element Body Forces) در حقیقت $M\ddot{u}$ و $C\dot{u}$ را به استاتیکی تبدیل می‌کنیم.

${}^{t}R_S$: نیروهای سطحی المان (Element Surface Forces).

${}^{t}R_C$: نیروهای متمرکز گره‌ای (Nodal Concentrated Loads).

${}^{t}R_I$: تنش های کنونی (Currents Stress) به عنوان تنش های اولیه.

${}^{t}B^{(m)}$: ماتریس جابجایی کرنش (Stress Displacement Matrix) عضو m در زمان t.

${}^{t}\tau^{(m)}$: ماتریس تنش کرنش (Stress Strain Matrix) عضو m در زمان t.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

سیستم المان محدود (System of Finite Elements)

روشن است که در یک تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ عمومی، تنش‌ها و حجم جسم در زمان t مجهول هستند.

رابطه $^{t}R - {}^{t}F = 0$ ، تعادل سیستم در هندسه تغییرشکل یافته کنونی (Current Deformed Geometry) را با درنظر گرفتن تمامی عوامل غیرخطی بیان می‌کند.

- اگر تحلیل غیرخطی برای یک Level معین بار (مثلاً $^{\tau}R$ در زمان τ) مد نظر باشد، در این صورت رابطه $^{t}R - {}^{t}F = 0$ باید حل شده و ارضا گردد. به عبارت دیگر با یک تحلیل تک‌گامی (One-Step Analysis) روبرو هستیم.
- ولی هنگامی که تحلیل شامل شرایط غیر هندسی یا مصالح وابسته به مسیر(Path-dependent) باشد، در این صورت رابطه $^{t}R - {}^{t}F = 0$ در طول زمان مورد نظر از ۰ تا τ باید حل شده و ارضا گردد. بنابراین در این صورت با یک تحلیل نموی گام به گام (Step by Step Incremental Solution) مواجه هستیم.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

سیستم المان محدود (System of Finite Elements)

روش بنیادی در یک تحلیل غیرخطی گام به گام نموی، درنظر گرفتن این فرض است که جواب در زمان گسسته t معلوم است و جواب در زمان گسسته t+ Δt مورد نیاز است که در آن Δt نمو زمانی مناسب انتخابی است.

بنابراین در زمان t+ Δt:

$$\boxed{^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0}$$

جواب در زمان t معلوم است. پس می توان نوشت:

$$\boxed{^{t+\Delta t}F = {}^{t}F + F}$$

بردار F ، نمو در نیروهای نقاط گرهی متناظر با نمو در تغییرمکان ها و تنش ها از زمان t تا t+ Δt است.

$$\boxed{F \approx {}^{t}Ku}$$

بردار F را می توان با استفاده از یک ماتریس سختی مماسی ^{t}K که متناظر با شرایط هندسی و مصالح در زمان t است تقریب سازی نمود.

که در آن

$$\boxed{^{t}K = \frac{\partial\, ^{t}F}{\partial\, ^{t}u}}$$

u: بردار تغییرمکان های نموی نقاط گرهی از زمان t تا t+ Δt است.

بنابراین ماتریس سختی مماسی، متناظر با مشتق نیروهای نقاط گرهی عنصری ^{t}F نسبت به تغییرمکان نقاط گرهی ^{t}u است.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

سیستم المان محدود (System of Finite Elements)

اکنون می توان رابطه زیر را نوشت:

$$^{t+\Delta t}R-(^{t}F+F)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{^{t}Ku={}^{t+\Delta t}R-{}^{t}F}$$

در این معادله با توجه به معلوم بودن ^{t}F ، $^{t+\Delta t}R$ و ^{t}K می توان u را محاسبه کرد و لذا تقریبی برای بردار تغییرمکان در زمان t+ Δt را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\boxed{^{t+\Delta t}u \approx {}^{t}u+u}$$

توجه۱: تغییرمکان های واقعی کامل در زمان t+ Δt آن تغییرمکان‌هایی هستند که متناظر با بارهای وارده $^{t+\Delta t}R$ می‌باشند.

توجه۲: در معادله $^{t+\Delta t}u \approx {}^{t}u+u$ ، تنها تقریبی برای تغییرمکان‌های واقعی در زمان t+ Δt را محاسبه نموده‌ایم.

با یافتن تقریبی برای تغییرمکان‌های واقعی در زمان t+ Δt ($^{t+\Delta t}u$) می توان تقریبی برای تنش‌ها در زمان t+ Δt ($^{t+\Delta t}\tau$) درنتیجه تقریبی برای نیروهای نقاط گرهی متناظر در زمان t+ Δt ($^{t+\Delta t}F$) و سپس انجام محاسبات برای نمو زمانی بعدی را ادامه داد.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

کلیت روش نیوتن رافسون (Newton Raphson Technique)

نکته: با توجه به فرض مورد استفاده در $F\approx{}^{t}Ku$ ، جواب‌های مذکور می‌توانند دارای خطاهای بسیار قابل توجهی باشند و بسته به اندازه گام زمانی(Time Step) یا همان گام بار مورد استفاده (Load Step) می‌تواند در شرایطی خاص ناپایدار باشند.

بنابراین ضروری است از یک راه حل تکراری (تکرار در داخل هر گام بار) استفاده شود تا اینکه جواب‌هایی با دقت کافی حاصل شوند.

روش‌های تکراری (Iteration Methods) که به طور وسیعی در تحلیل‌های غیرخطی عناصر محدود مورد استفاده قرار می‌گیرند، بر اساس تکنیک‌های نیوتن- رافسون (Newton-Raphson Technique) استوارند. تکنیک نیوتن- رافسون در واقع بسطی از تکنیک نموی ساده مورد استفاده در دو قسمت است:

$$\boxed{^{t}Ku={}^{t+\Delta t}R-{}^{t}F} \qquad \boxed{^{t+\Delta t}u \approx {}^{t}u+u}$$

بعد از محاسبه یک نمو در تغییر مکان‌های نقاط گرهی که یک بردار تغییر مکان کلی جدیدی (New total displacement vector) را تعریف می‌کند، می‌توان روش نموی ارائه شده فوق را با استفاده از تغییر مکان‌های کلی کنونی معلوم (Currently known total displacement) به جای تغییر مکان‌ها در زمان t تکرار نمود.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

کلیت روش نیوتن رافسون (Newton Raphson Technique)

معادلات مورد استفاده در روش تکرار شونده نیوتن- رافسون کامل (**Full Newton Raphson Method**)
به ازای i = 1, 2, 3,…

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}\cdot\Delta u^{(i)}={}^{t+\Delta t}R-{}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}}$$

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(i)}={}^{t+\Delta t}u^{(i-1)}+\Delta u^{(i)}}$$

با شرایط اولیه

$$\left\{\begin{array}{l}\boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(0)}={}^{t}u}\\ \boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(0)}={}^{t}K}\\ \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(0)}={}^{t}F}\end{array}\right.$$

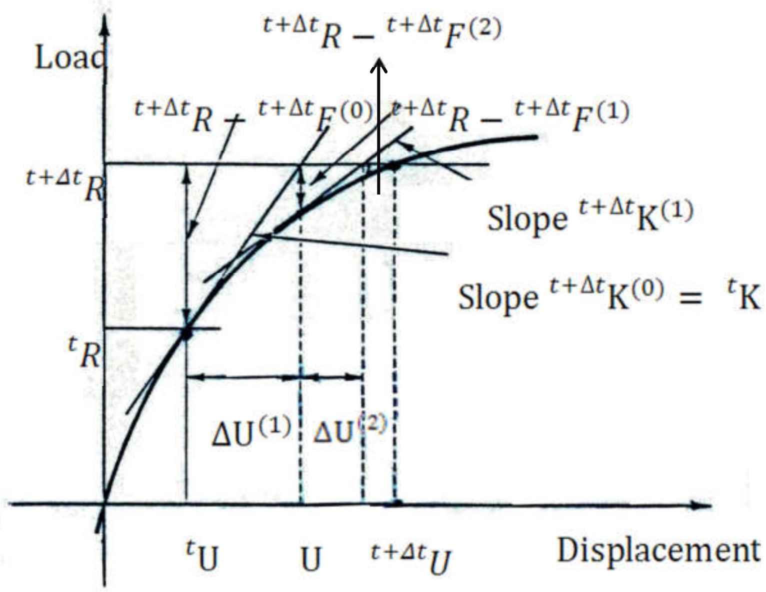
توجه۱: در نخستین تکرار، روابط فوق به صورت معادلات ${}^{t}Ku={}^{t+\Delta t}R-{}^{t}F$ و ${}^{t+\Delta t}u\approx{}^{t}u+u$ در می آیند.

توجه۲: در تکرارهای بعدی، آخرین تخمین تغییرمکان‌های نقاط گرهی برای تعیین تنش‌های عنصری متناظر و بردارهای نیروهای نقاط گرهی متناظر معادله ${}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ و ماتریس سختی مماسی ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

بردار بار نامتعادل (Out-of-balance load vector) متناظر با یک بردار است که هنوز به وسیله تنش‌های المان متعادل نشده است و بنابراین یک نمو در تغییر مکان‌های نقاط گرهی مورد نیاز است. این به هنگام نمودن (Updating) تغییرمکان‌های نقاط گرهی در تکرار باید تا آنجا ادامه یابد که نیروهای نامتعادل و تغییرمکان‌های نموی بسیار کوچک شوند.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

روش تکرار شونده نیوتن- رافسون کامل (**Full Newton Raphson Method**) به صورت شماتیک



در این روش زمان به زمان‌های کوچک Δt یا Time Step تقسیم می‌شود. هر Time Step خود به تقسیمات کوچکتری به نام Iteration تبدیل می‌گردد. هدف در تمایی این تقسیمات این است که رفتار سازه را به خطی تبدیل کنیم (یا نزدیک به خطی کنیم). حال در ابتدای هر Iteration ماتریس سختی سازه ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ تغییر می‌کند؛ و مطابق شرایط سازه (از نظر غیرخطی مواد، هندسی، بار محوری،...) در می‌آید. همچنین شرایط غیرخطی بار، غیرخطی تکیه‌گاهی و مسئله Contact در ابتدای هر Iteration در ${}^{t+\Delta t}R$ کنترل می‌گردد تا مطابق شرایط سازه باشد. تغییر در ماتریس جرم و میرایی نیز می‌تواند در ابتدای Time step کنترل گردد.

کلیت روش نیوتن رافسون (Newton Raphson Technique)

مراحل عملیاتی روش تکرار شونده نیوتن – رافسون کامل

$i=1 \rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} {}^{t+\Delta t}K^{(0)} \cdot \Delta u^{(1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(0)} \\ {}^{t}K \cdot \Delta u^{(1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t}F \end{array}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta u^{(1)}}$ به دست می‌آید.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(1)} = {}^{t+\Delta t}u^{(0)} + \Delta u^{(1)}} \Rightarrow \boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(1)}\ ,\ {}^{t+\Delta t}F^{(1)}}$$

$i=2 \rightarrow$ $\boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(1)} \cdot \Delta u^{(2)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(1)}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta u^{(2)}}$ به دست می‌آید.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(2)} = {}^{t+\Delta t}u^{(1)} + \Delta u^{(2)}} \Rightarrow \boxed{{}^{t+\Delta t}K^{(2)}\ ,\ {}^{t+\Delta t}F^{(2)}}$$

$i=3, \cdots$

کلیت روش نیوتن رافسون (Newton Raphson Technique)

معادلات مورد استفاده در روش نیوتن-رافسون تعدیل یافته (**Modified Newton-Raphson method**) به ازای i = 1, 2, 3,…

در روش تعدیل یافته نیوتن-رافسون(Modified Newton-Raphson method)، یک ماتریس سختی مماسی، صرفاً در ابتدای هر گام بار ایجاد می شود.

$$\boxed{{}^{t}K \cdot \Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}}$$

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)}}$$

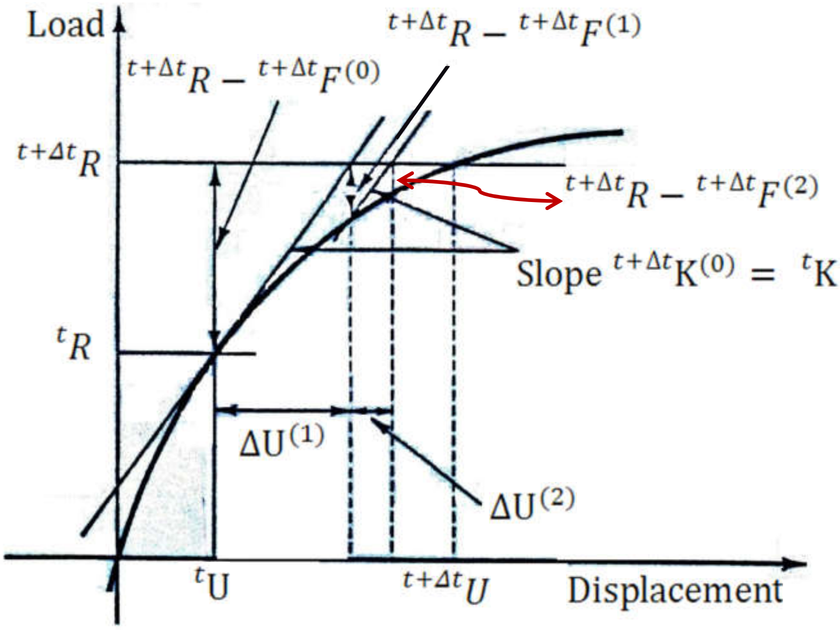
با شرایط اولیه

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(0)} = {}^{t}u} \\ \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^{t}F} \end{array} \right.$$

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

کلیت روش نیوتن رافسون (Newton Raphson Technique)

روش تعدیل یافته نیوتن- رافسون (Modified Newton-Raphson method) به صورت شماتیک



در این روش، سختی در هر Iteration برابر با سختی در ابتدای Time Step فرض می‌شود. فرض بر این است که خصوصیات ماده در Iteration ها و در طول Time Step ثابت (چون شیب خطهای مماس یکسان است) اما هندسه تغییر می‌کند.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

کلیت روش نیوتن رافسون (Newton Raphson Technique)

مراحل عملیاتی روش نیوتن-رافسون تعدیل یافته

$i=1$ →

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^{t}K \cdot \Delta u^{(1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(0)} \\ {}^{t}K \cdot \Delta u^{(1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t}F \end{array}} \Rightarrow \boxed{\Delta u^{(1)}}$$ به دست می‌آید.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(1)} = {}^{t+\Delta t}u^{(0)} + \Delta u^{(1)}} \Rightarrow \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(1)} \, , \, {}^{t}u}$$

$i=2$ →

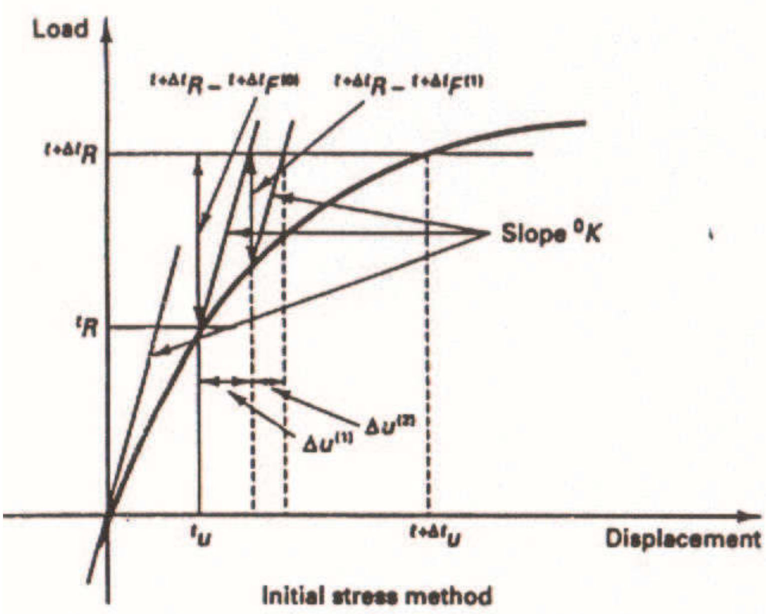
$$\boxed{{}^{t}K \cdot \Delta u^{(2)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(1)}} \Rightarrow \boxed{\Delta u^{(2)}}$$ به دست می‌آید.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}u^{(2)} = {}^{t+\Delta t}u^{(1)} + \Delta u^{(2)}} \Rightarrow \boxed{{}^{t+\Delta t}F^{(2)}}$$

$i=3, \cdots$

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

روش تنش اولیه (Initial Stress Method) به صورت شماتیک



در این روش، سختی در هر Iteration برابر با سختی در حالت اولیه فرض می‌شود. فرض بر این است که خصوصیات ماده در طول Iteration ها ثابت اما هندسه تغییر می‌کند. مانند محاسبات مربوط به کمانش یا $P-\Delta$ که مواد وارد منطقه غیرخطی نمی‌شود (Small Defromation داریم) ولی تعادل در حالت تغییرشکل یافته نوشته می‌شود. Small Displacement ناچیز است و تاثیر چندانی ندارد به جز یک مورد و آن هم $P-\Delta$ است که پایداری و تعادل به شدت به آن وابسطه است.

غیرخطی هندسی	Small Displacement	اثر آن کم فقط در $P-\Delta$ اثر آن زیاد می‌شود.
	Large Displacement	اثر آن زیاد

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

کلیت روش نیوتن رافسون (Newton Raphson Technique)

لازم به ذکر است که استفاده از روش های تکراری، ایجاب می کند که معیارهای همگرایی مناسبی (Appropriate Convergence Criteria) اختیار شوند.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \le e}$$

اگر معیارهای غیرمناسبی اتخاذ شوند، در این صورت دو اتفاق می‌تواند بیفتد:

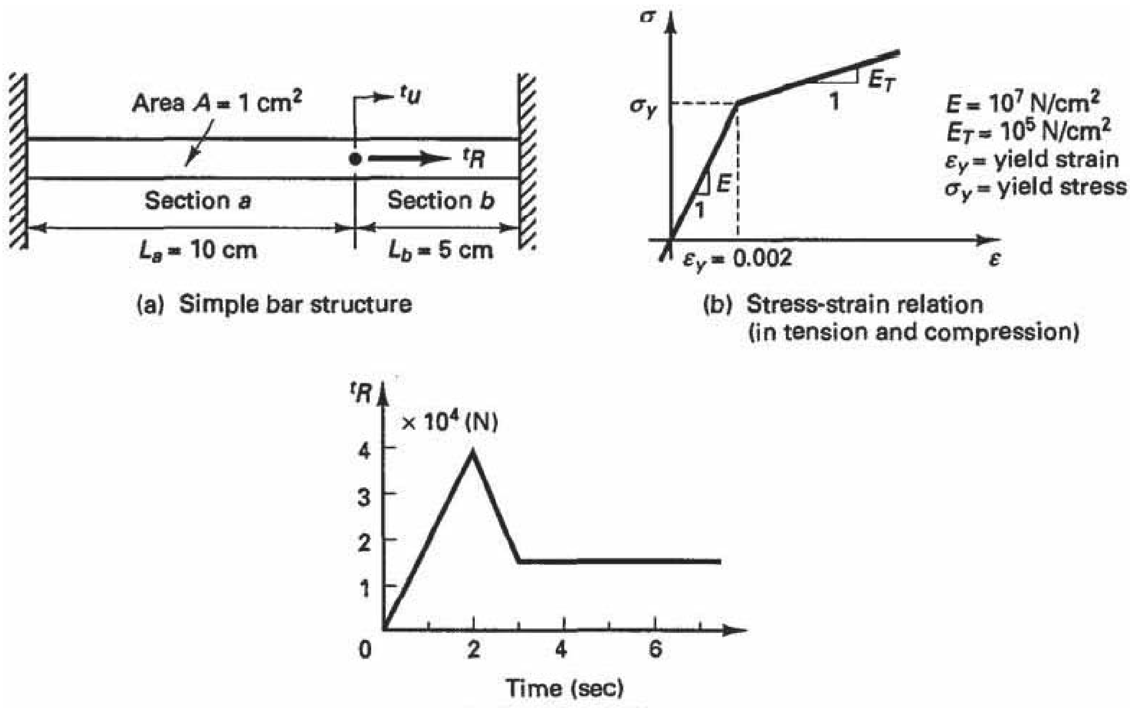
الف)تکرار قبل از رسیدن به دقت حل مورد نیاز پایان پذیرد.
معیار همگرایی سست (Loose Convergence Criteria)

ب) تکرار بعد از رسیدن به دقت حل مورد نیاز ادامه یابد.
معیار همگرایی سخت (Stiff Convergence Criteria)

روش تکرار شونده نیوتن – رافسون کامل، از نظر زمان بر سایر روش‌ها برتری دارد. و انتخاب Iteration ها بین ۱۰ تا ۲۰ عدد خوبی است.

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

مثال ۱– میله‌ای که در انتهای خود گیردار می‌باشد، به گونه‌ای که در شکل (a) نشان داده شده است، تحت اثر یک بار محوری قرار دارد. رابطه تنش–کرنش و منحنی بار–زمان به ترتیب در شکل‌های (b) و (c) ارائه شده‌اند. با فرض این که تغییر مکان‌ها و کرنش‌ها کوچک‌اند و بار نیز به آهستگی وارد می‌شود، تغییر مکان در نقطه اعمال بار را محاسبه نمایید.



(a) Simple bar structure

(b) Stress-strain relation (in tension and compression)

(c) Load variation

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

پاسخ مثال ۱– از آن جا که بار به آهستگی وارد می‌شود و تغییر مکان‌ها و کرنش‌ها کوچک‌اند، از این رو پاسخ میله را با استفاده از یک تحلیل ایستایی و با در نظر گرفتن صرف غیرخطی‌های مصالح محاسبه می‌کنیم. در این صورت برای بخش‌های a و b میله روابط کرنش زیر را داریم:

و روابط تعادل عبارتند از

و روابط مشخصه تحت شرایط بارگذاری و باربرداری مورد نظر به صورت زیر می‌باشند:

پاسخ مثال ۱–

(۱) هر دو بخش a و b در ناحیه الاستیک قرار دارند.

در مرحله آغازین اعمال بار هر دو مقطع a و b در ناحیه الاستیک هستند در این صورت با استفاده از روابط (a) تا (c) خواهیم داشت

با جایگذاری مقادیر داده شده در صورت سوال نتایج زیر حاصل می‌شوند:

و

پاسخ مثال ۱–

(۲) بخش a در ناحیه الاستیک و بخش b در ناحیه پلاستیک قرار دارند. (چون تنش بخش b بزرگتر است زودتر وارد ناحیه پلاستیک می‌شود)

بخش b میله در زمان t^* هنگامی که از روابط (d) استفاده می‌کنیم، پلاستیک می‌شود:

باری که بعد از آن حالت پلاستیک شروع می‌شود

بنابراین بعد از آن داریم:

پاسخ مثال ۱-

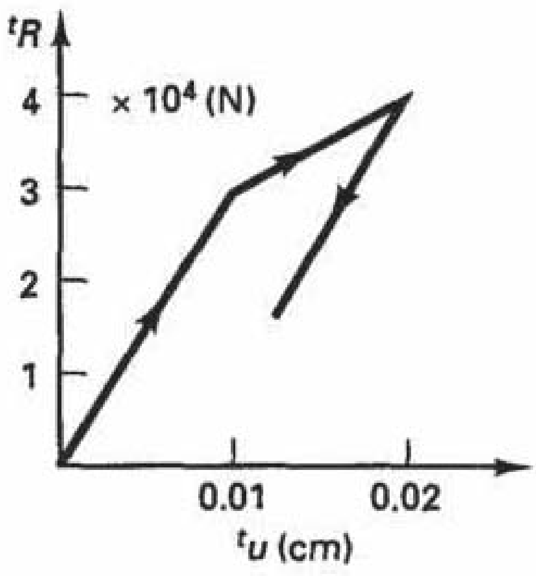
بنابراین با استفاده از رابطه (e) به ازای $t \geq t^*$ داریم:

توجه: زمانی که ${}^{t}\sigma_a = \sigma_y$ یا ${}^{t}R = 4.02\times10^4\ (N)$ می‌باشند، بخش a میله پلاستیک می‌شود. از آنجا که بار به این مقدار نمی‌رسد (شکل (c) ماکزیمم بار برابر با ${}^{t}R = 4.00\times10^4\ (N)$) بخش a میله در سرتاسر تاریخچه پاسخ الاستیک باقی می‌ماند.

پاسخ مثال ۱-

(۳) در هنگام بار برداری هر دو بخش میله به طور الاستیک عمل می‌کنند.

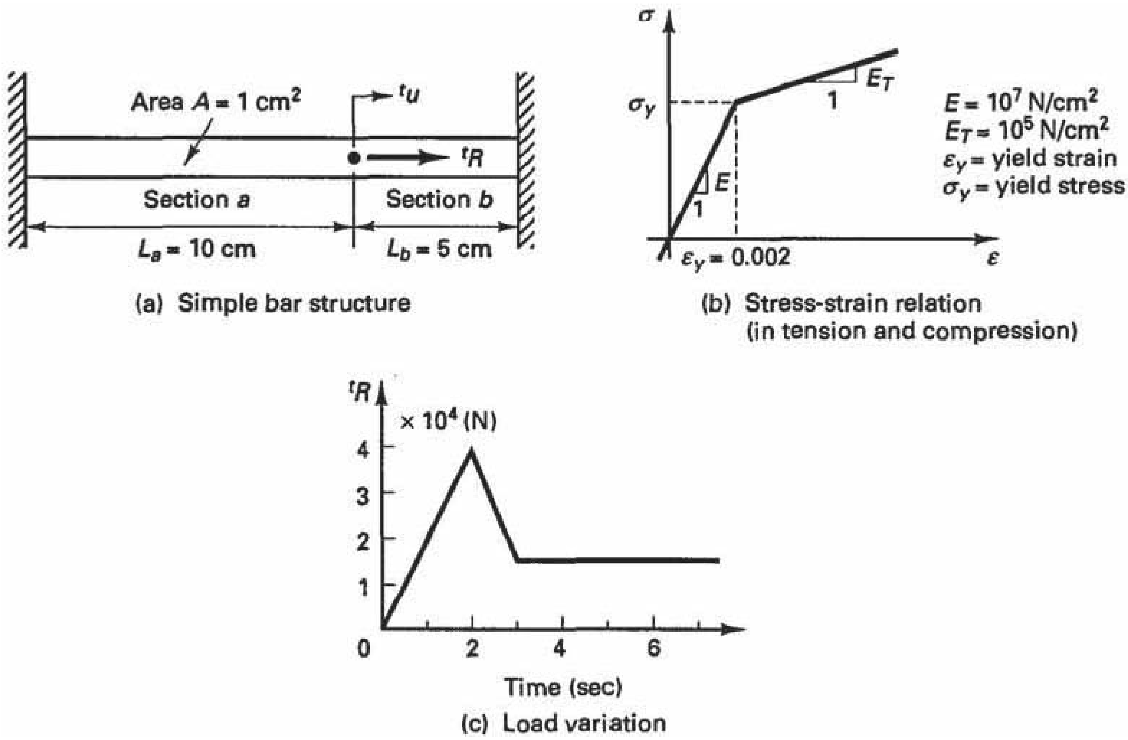
پاسخ محاسبه شده در شکل زیر آمده است.



(d) Calculated response

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

مثال۲– پاسخ میله مورد نظر در مثال (۱) را با استفاده از روش Modified Newton Raphson Iteration محاسبه نمایید. برای رسیدن به ماکزیمم بار وارده از دو Load Step مساوی استفاده شود.



Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

پاسخ مثال۲–

در روش Modified Newton Raphson Iteration از روابط زیر استفاده می‌شود.

با شرایط اولیه

که در این روابط

پاسخ مثال۲-

برای قسمت الاستیک داریم:

برای قسمت پلاستیک داریم:

و کرنش در هر دو قسمت عبارتند از :

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

پاسخ مثال۲-

در اولین Load Step داریم: $t=0$ ، $\Delta t=1$ و $t+\Delta t=1$ بنابرین کاربرد روابط (a) تا (d) نتایج زیر را به دست می‌دهد.

پاسخ مثال۲-

بنابراین همگرایی در یک تکرار حاصل می‌شود.

پاسخ مثال۲-

در دومین Load Step داریم: $t = 1$ ، $\Delta t = 1$ و $t + \Delta t = 2$ بنابرین کاربرد روابط (a) تا (d) نتایج زیر را به دست می‌دهد.

پاسخ مثال۲-

$i = 2$

$$^{2}u^{(2)} = {}^{2}u^{(1)} + \Delta u^{(2)} = 1.3333\times10^{-2} + 2.2\times10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{^{2}u^{(2)} = 1.5533\times10^{-2}\ (cm)}$$

$$^{2}\varepsilon_a{}^{(2)} = \frac{^{2}u^{(2)}}{L_a} = \frac{1.5533\times10^{-2}}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{^{2}\varepsilon_a{}^{(2)} = 1.5533\times10^{-3} < \varepsilon_y = 0.002 \quad \text{section } a \text{ is Elastic}}$$

$$^{2}\varepsilon_b{}^{(2)} = \frac{^{2}u^{(2)}}{L_b} = \frac{1.5533\times10^{-2}}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{^{2}\varepsilon_b{}^{(2)} = 3.1066\times10^{-3} > \varepsilon_y = 0.002 \quad \text{section } b \text{ is Plastic}}$$

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

پاسخ مثال۲-

$$^{2}F_a{}^{(2)} = EA\ {}^{2}\varepsilon_a{}^{(2)} = 10^{7}(1)\,(1.5533\times10^{-3}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{^{2}F_a{}^{(2)} = 1.5533\times10^{4}\ (N)}$$

$$^{2}F_b{}^{(2)} = A[E_T(\,^{2}\varepsilon_b{}^{(2)} - \varepsilon_y) + \sigma_y] = (1)[10^{5}(\,3.1066\times10^{-3} - 0.002) + 2\times10^{4}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{^{2}F_b{}^{(2)} = 2.0111\times10^{4}\ (N)}$$

$$(^{1}K_a + {}^{1}K_b)\cdot\Delta u^{(3)} = {}^{2}R - {}^{2}F_a{}^{(3)} - {}^{2}F_b{}^{(3)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u^{(3)} = \frac{(4\times10^{4}) - (1.5533\times10^{4}) - (2.0111\times10^{4})}{2\times10^{7}(1/10 + 1/5)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta u^{(3)} = 1.4521\times10^{-3}\ (cm)}$$

روش مذکور تکرار می‌شود و نتایج تکرارهای پی در پی در جدول زیر ارائه می‌گردد:

i	$\Delta u^{(i)}\ (cm)$	$^{2}u^{(i)}\ (cm)$
3	1.4521×10^{-3}	1.6985×10^{-2}
4	9.5832×10^{-4}	1.7944×10^{-2}
5	6.3249×10^{-4}	1.8576×10^{-2}
6	4.1744×10^{-4}	1.8994×10^{-2}
7	2.7551×10^{-4}	1.9269×10^{-2}

^{2}u

Introduction to Nonlinear Dynamic Analysis

تمرین– پاسخ میله مورد نظر در مثال (۱) را با استفاده از روش Full Newton Raphson Iteration محاسبه نمایید.
برای رسیدن به ماکزیمم بار وارده از چهار Load Step مساوی استفاده شود.