روش المان محدود

سازه‌های متقارن سه بُعدی

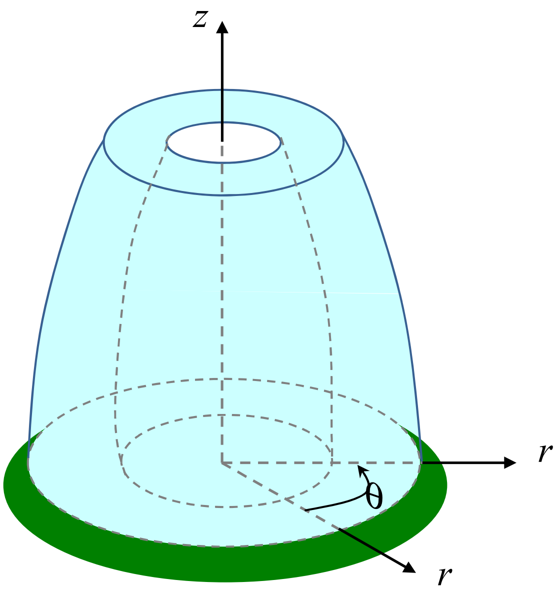
(3D-Axisymmetric Structures)

تهیه کننده: کاوه کرمی

دانشیار مهندسی سازه

https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

سازه‌های متقارن سه بُعدی



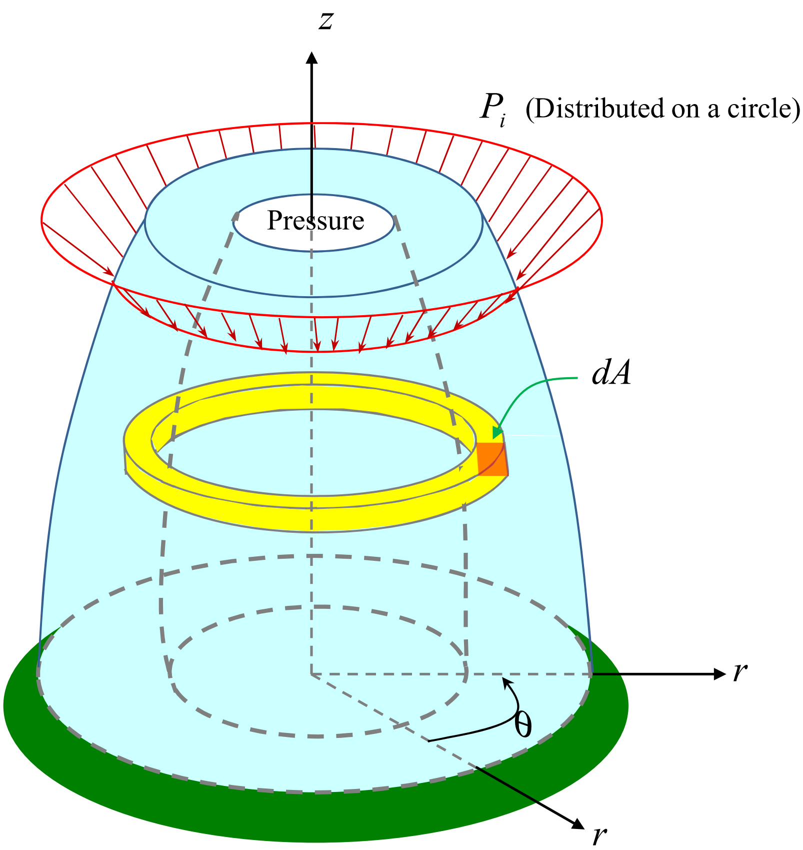
مقدمه (Introduction)

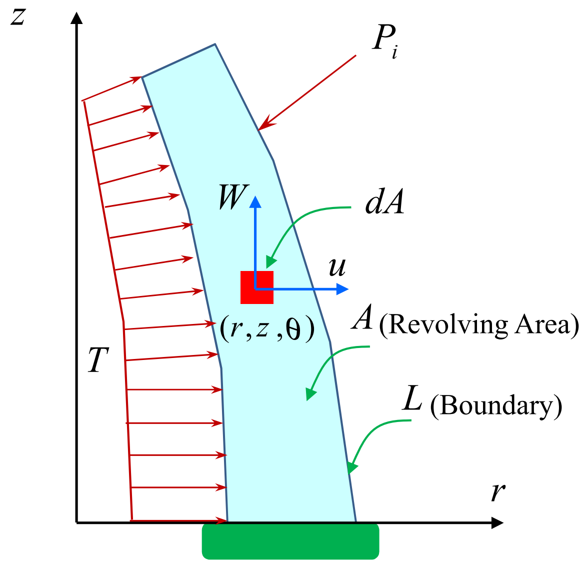
اجسام سه بعدی دارای محور متقارن محوری یا اجسام دورانی که تحت بارگذاری متقارن محوری قرار دارند را می‌توان به مسائل ساده دو بعدی کاهش داد. به دلیل تقارن کامل حول محور z، تمام تغییر شکل‌ها و تنش‌ها مستقل از زاویه چرخش θ هستند. بنابراین، می‌توان به این مسئله به عنوان یک مسئله دو بعدی در صفحه rz که روی ناحیه دوران تعریف شده است، نگاه کرد. نیروهای گرانشی را می‌توان در صورت اعمال در جهت z در نظر گرفت. اجسام چرخان مانند چرخ لنگر یا چرخ طیار (Flywheel) که دارای گشتاور لختی بالایی هستند و در برابر تغییر سرعت دورانی مقاومت می‌کنند را می‌توان با وارد کردن نیروهای گریز از مرکز بر حسب نیروی حجمی تحلیل کرد.

سازه‌های متقارن سه بُعدی

فرمول‌بندی در حالت تقارن محوری (Axisymmetric Formulation)

جسم سه بُعدی نشان داده شده با محور تقارن مستقیم تحت اثر فشار داخلی و نیروی متمرکز متقارن قرار دارد.



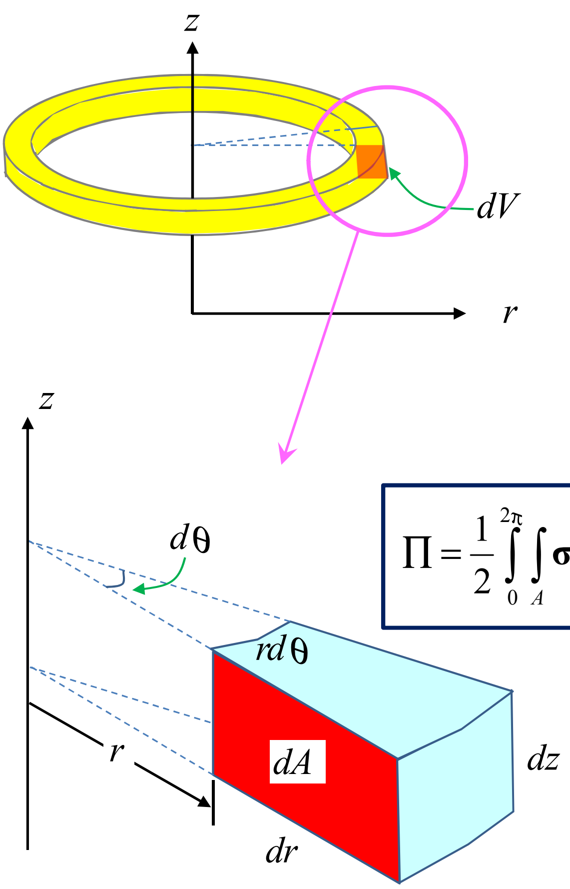


سازه‌های متقارن سه بُعدی

فرمول‌بندی در حالت تقارن محوری (Axisymmetric Formulation)

یک جز دیفرانسیلی حجمی از المان را جدا کرده و بررسی قرار می‌دهیم

حجم جز دیفرانسیلی به صورت زیر به دست می‌آید:



$$dV = dr \times dz \times r d\theta \overset{dA = drdz}{\Rightarrow} \boxed{dV = r\, d\theta\, dA} \qquad (1)$$

با در نظر گرفتن جز دیفرانسیلی حجمی، انرژی پتانسیل کل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, r d_A d_\theta - \int_0^{2\pi}\int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f}\, r d_A d_\theta - \int_0^{2\pi}\int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T}\, r d_\ell d_\theta - \sum_i \mathbf{u}^T{}_i \mathbf{P}_i} \qquad (2)$$

در رابطه (2) مقدار $r\, d_\ell\, d_\theta$ برابر با مساحت پیرامونی جز دیفرانسیلی می‌باشد

سازه‌های متقارن سه بُعدی

فرمول‌بندی در حالت تقارن محوری (Axisymmetric Formulation)

از آنجایی که در رابطه (2) تمام متغیرها مستقل از θ می‌باشند در نتیجه خواهیم داشت:

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = 2\pi\left(\frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, r d_A - \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f}\, r d_A - \int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T}\, r d_\ell\right) - \sum_i \mathbf{u}^T{}_i \mathbf{P}_i} \quad (3)$$

که در آن

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ بردار جابجایی نقطه به مختصات (r, z, θ)

$$\boxed{\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u\,(r,z) \\ w\,(r,z) \end{Bmatrix}} \quad (4)$$

$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$ بردار نیروی واحد حجم

$$\boxed{\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix}} \quad (5)$$

$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^2$ بردار نیروی واحد سطح

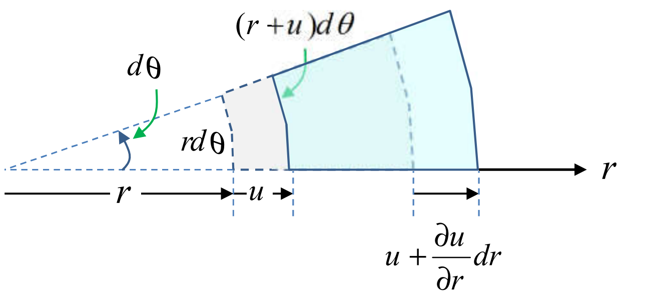
$$\boxed{\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_r \\ T_z \end{Bmatrix}} \quad (6)$$

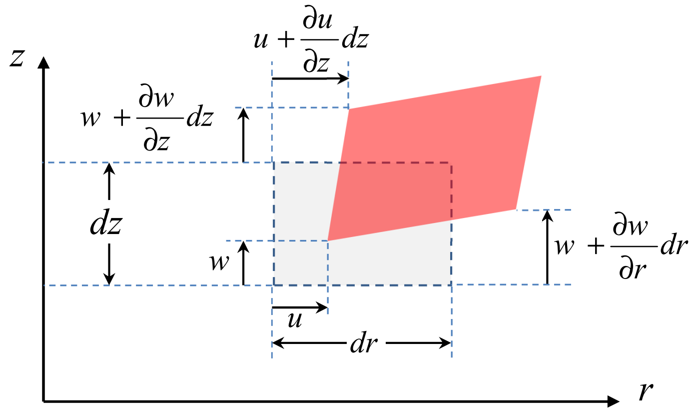
$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ بردار نیروی متمرکز

$$\boxed{\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_r \\ P_z \end{Bmatrix}} \quad (7)$$

سازه‌های متقارن سه بُعدی

فرمول‌بندی در حالت تقارن محوری (Axisymmetric Formulation)





با بررسی تغییر شکل جز دیفرانسیلی المان می‌توان رابطه کرنش $\boldsymbol{\varepsilon}$ و $\mathbf{u}$ جابجایی را نوشت:

$$\boxed{\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}} \quad (8)$$

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial r}dr\right) - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}} \quad (9)$$

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right) - w}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}} \quad (10)$$

$$\boxed{\gamma_{rz} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) - u}{dz} + \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial r}dr\right) - w}{dr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}} \quad (11)$$

سازه‌های متقارن سه بُعدی

فرمول‌بندی در حالت تقارن محوری (Axisymmetric Formulation)

با استفاده از روابط (8) تا (11) بردار کرنش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^4 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{u}{r} \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

در این حالت بردار تنش نیز برابر است با:

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^4 = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} \qquad (13)$$

سازه‌های متقارن سه بُعدی

فرمول‌بندی در حالت تقارن محوری (Axisymmetric Formulation)

فرم ماتریسی رابطه تنش و کرنش به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (14)$$

که در آن $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ با انتخاب درایه مناسب از ماتریس مصالح در حالت سه بعدی در فصل اول به دست می‌آید:

$$(L01-15) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0 & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} \\ \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & 1 & 0 & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} & 0 \\ \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

فرمول‌بندی در حالت تقارن محوری (Axisymmetric Formulation)

در حالت فرمول بندی گالرکین، یا کار مجازی خواهیم داشت:

$$\boxed{2\pi \int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Phi}) r d_A - 2\pi \int_A \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}\, r d_A - 2\pi \int_L \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{T}\, r d_\ell - \sum_i \boldsymbol{\Phi}_i^T = 0} \quad (16)$$

که در آن

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^2 = \begin{Bmatrix} \phi_r(r,z) \\ \phi_z(r,z) \end{Bmatrix}} \quad (17)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Phi}) \in \mathbb{R}^4 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_r}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \phi_z}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi_r}{\partial z} + \dfrac{\partial \phi_z}{\partial r} \\ \dfrac{\phi_r}{r} \end{Bmatrix}} \quad (18)$$

To be Updated…