دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

روش المان محدود

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی کرنش ثابت
(CST: Constant Strain Triangles)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

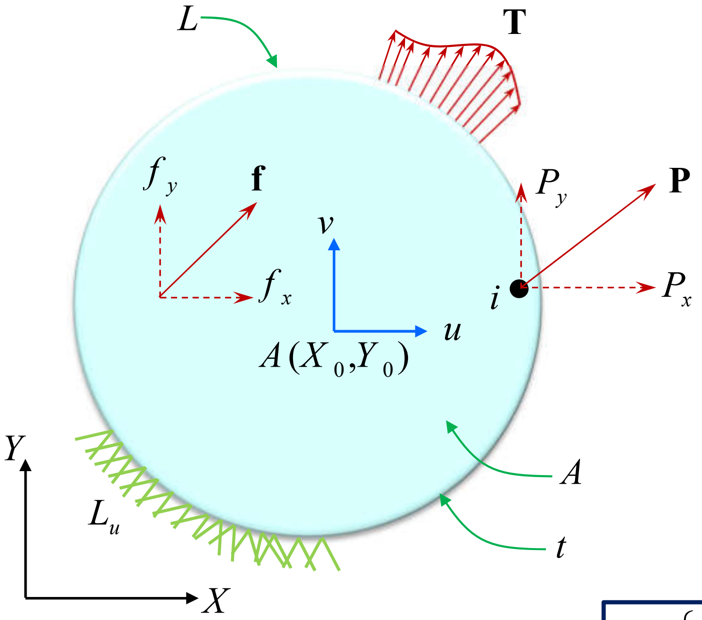
مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

مقدمه (Introduction)

شکل مقابل یک دیاگرام دو بُعدی جسم آزاد است.

A: مساحت جسم L: طول کل ناحیه مرزی

t: ضخامت جسم L_u: طول تکیه‌گاه



دیاگرام دو بُعدی جسم آزاد

$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ بردار جابجایی نقطه A به مختصات $(X_0\,,Y_0)$ به صورت زیر است:

$$\boxed{\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}u\,(X\,,Y\,)\\ v\,(X\,,Y\,)\end{Bmatrix}} \quad (1)$$

$\mathbf{f}\in\mathbb{R}^2$ بردار نیروی واحد حجم برابر است با:

$$\boxed{\mathbf{f}=\begin{Bmatrix}f_x\\ f_y\end{Bmatrix}} \quad (2)$$

$\mathbf{T}\in\mathbb{R}^2$ بردار نیروی واحد سطح برابر است با:

$$\boxed{\mathbf{T}=\begin{Bmatrix}T_x\\ T_y\end{Bmatrix}} \quad (3)$$

$\mathbf{P}\in\mathbb{R}^2$ بردار نیروی متمرکز برابر است با:

$$\boxed{\mathbf{P}=\begin{Bmatrix}P_x\\ P_y\end{Bmatrix}} \quad (4)$$

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

مقدمه (Introduction)

بردار تنش و کرنش به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{R}^3=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}}\quad(5)\qquad\qquad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{R}^3=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}}\quad(6)$$

با فرض تغییرشکل‌های کوچک، بردار کرنش برحسب جابجایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{R}^3=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u\,(X,Y)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v\,(X,Y)}{\partial y}\\ \left(\dfrac{\partial u\,(X,Y)}{\partial y}+\dfrac{\partial v\,(X,Y)}{\partial x}\right)\end{Bmatrix}}\quad(7)$$

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

مقدمه (Introduction)

روابط تنش کرنش در حالت دو بعدی به فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}}\quad(8)$$

$\mathbf{D}\in\mathbb{R}^{3\times3}$: ماتریس مصالح (متقارن)

ماتریس مصالح در حالت تنش صفحه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

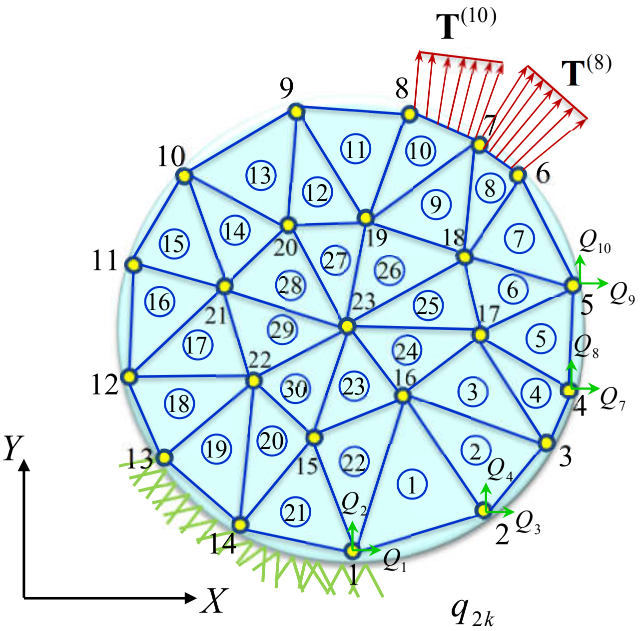
$$\boxed{\mathbf{D}=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1&\upsilon&0\\ \upsilon&1&0\\ 0&0&0.5(1-\upsilon)\end{bmatrix}}\quad(9)$$

ماتریس مصالح در حالت کرنش صفحه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\mathbf{D}=\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix}1-\upsilon&\upsilon&0\\ \upsilon&1-\upsilon&0\\ 0&0&0.5(1-2\upsilon)\end{bmatrix}}\quad(10)$$

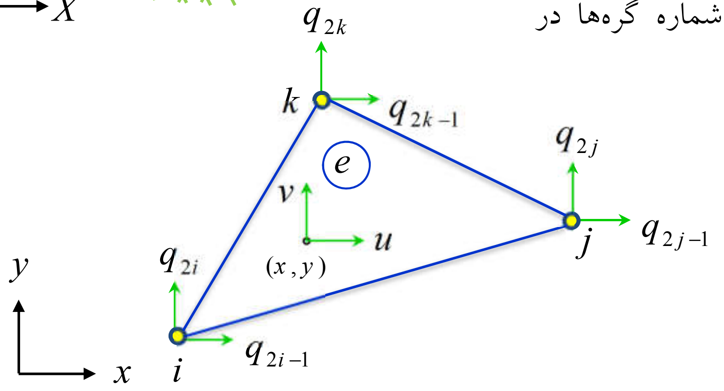
مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مدل‌سازی المان محدود (Finite Element Modeling)



ناحیه دو بعدی به مثلث‌های با اضلاع مستقیم تقسیم می‌گردد. نقاطی که گوشه‌های مثلث‌ها به هم می‌رسند، گره نامیده می‌شوند و هر مثلثی که از سه گره و سه ضلع تشکیل شده است، یک المان نامیده می‌شود. المان‌ها کل ناحیه را به جز یک ناحیه کوچک در نواحی مرزی پر می‌کنند. این ناحیه پر نشده برای مرزهای منحنی شکل وجود دارد و می‌توان آن را با انتخاب المان‌های کوچک‌تر یا المان‌هایی با مرزهای منحنی شکل کاهش داد.

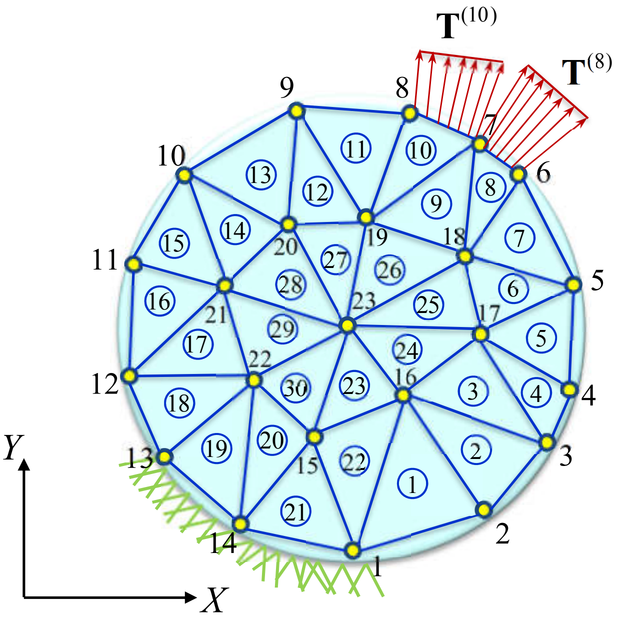
معمولا برای جلوگیری از ایجاد مساحت منفی شماره گره‌ها در المان مثلثی در جهت پاد ساعتگرد خوانده می‌شود.



در المان مثلثی CST جابجایی گرهی در مختصات کلی می‌تواند همان جابجایی گرهی در مختصات محلی باشد.

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مدل‌سازی المان محدود (Finite Element Modeling)



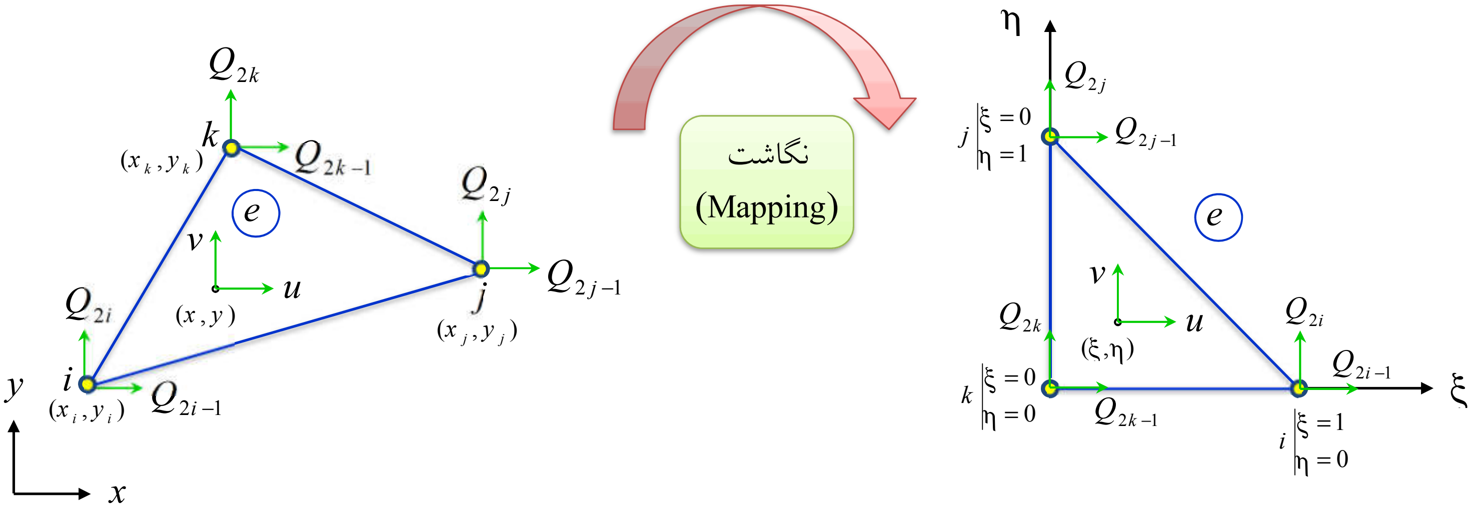
Element Connectivity

Element No.	Node No. i	j	k
1	1	2	16
2	2	3	16
⋮	⋮	⋮	⋮
14	21	20	10
⋮	⋮	⋮	⋮
30	15	23	22

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

توابع شکل (Shape Functions)

به منظور تسهیل در بررسی المان‌ها، به وسیله یک نگاشت مختصات کلی به مختصات طبیعی انتقال می‌یابد. ما از این سیستم مختصات در تعریف توابع شکل استفاده می‌کنیم که در درونیابی میدان جابجایی استفاده می شود.



رابطه بین مختصات کلی و طبیعی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$x = x_{ik}\xi + x_{jk}\eta + x_k \quad , \quad y = y_{ik}\xi + y_{jk}\eta + y_k \qquad (11)$$

که در آن

$$x_{ab} = x_a - x_b \quad , \quad y_{ab} = y_a - y_b \qquad (12)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

توابع شکل (Shape Functions)

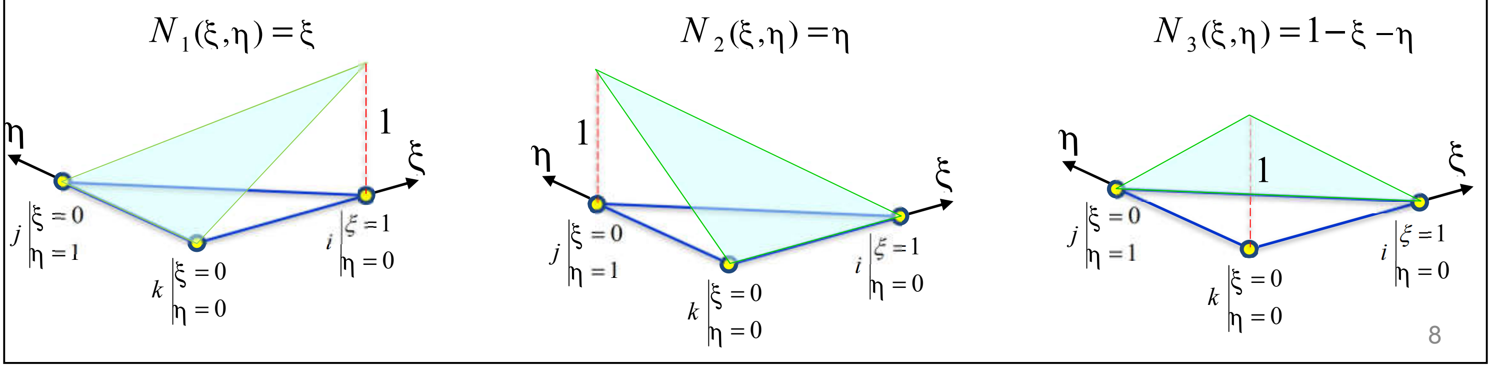
توابع شکل در المان مثلثی CST به صور خطی بر روی المان تغییر می‌کند. توابع شکل در مختصات طبیعی برای المان مثلثی CST به صورت زیر می‌باشد:

$$N_1(\xi,\eta) = \xi \quad , \quad N_2(\xi,\eta) = \eta \quad , \quad N_3(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta \qquad (13)$$

همان‌طور که پیشتر در فصل سوم اشاره شد بنابراین مجموع توابع شکل در کل المان برابر با واحد است:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \qquad (14)$$

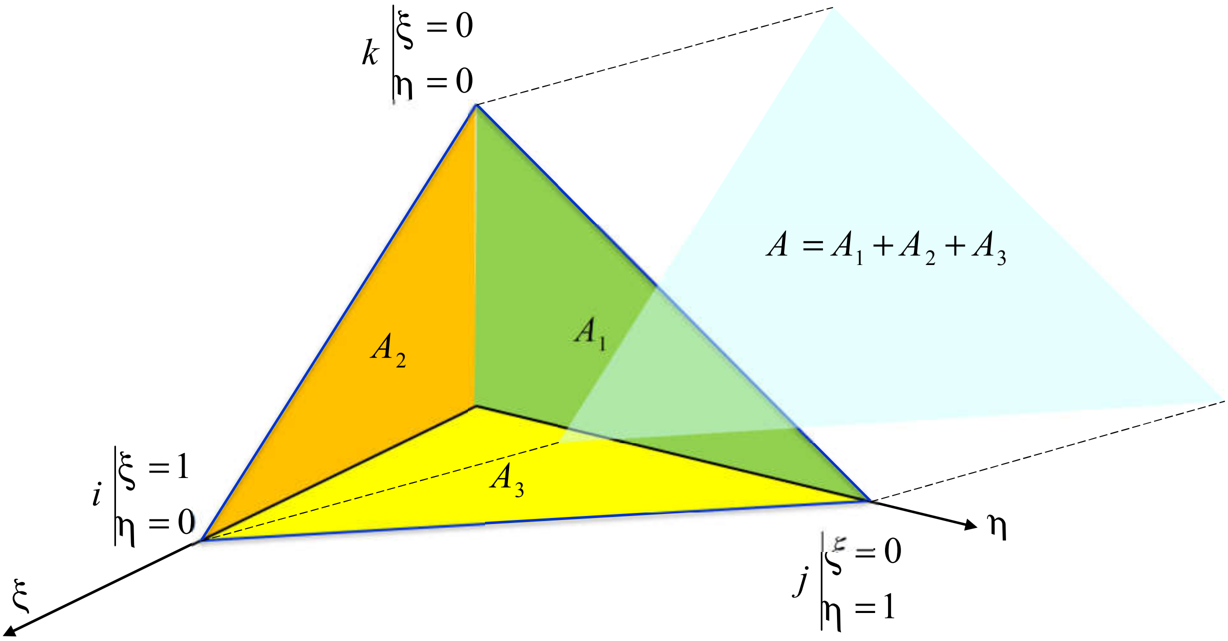
نمودار توابع شکل به صورت زیر رسم می‌شود:


$N_1(\xi,\eta) = \xi$ $N_2(\xi,\eta) = \eta$ $N_3(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

توابع شکل (Shape Functions)

توابع شکل را می‌توان برحسب مساحت مثلث‌ها نشان داد:



$$\boxed{N_1(\xi,\eta) = \frac{A_1}{A} \quad , \quad N_2(\xi,\eta) = \frac{A_2}{A} \quad , \quad N_3(\xi,\eta) = \frac{A_3}{A}} \quad (15)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

با استفاده از توابع شکل، جابجایی خطی نقاط موجود بر روی المان براساس جابجایی‌های گرهی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\begin{aligned} u_{(\xi,\eta)} &= N_1 Q_{2i-1} + N_2 Q_{2j-1} + N_3 Q_{2k-1} \\ v_{(\xi,\eta)} &= N_1 Q_{2i} + N_2 Q_{2j} + N_3 Q_{2k} \end{aligned}} \quad (16)$$

فرم ماتریسی رابطه (16) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{u}_{(\xi,\eta)} = \mathbf{N}\mathbf{Q}^e} \quad (17)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{u}_{(\xi,\eta)} \in \mathbb{R}^2 = \begin{Bmatrix} u_{(\xi,\eta)} \\ v_{(\xi,\eta)} \end{Bmatrix}} \quad (18)$$

$$\boxed{\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{2\times6} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}} \quad (19)$$

$$\boxed{\mathbf{Q}^e \in \mathbb{R}^6 = \begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \\ Q_{2k-1} \\ Q_{2k} \end{Bmatrix}} \quad (20)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

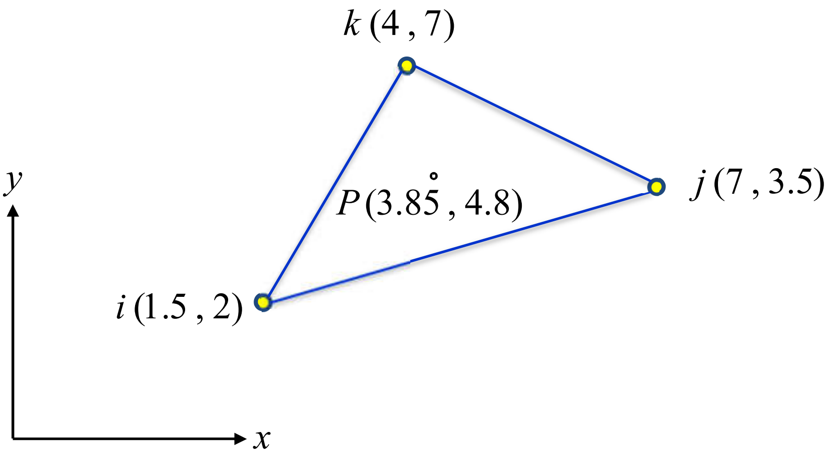
از آنجایی که در فرمول‌بندی المان محدود ایزوپارامتریک (Isoperimetric Finite Element) ماتریس‌های تبدیل خواص مکانیکی و هندسی یکسان می‌باشند در نتیجه خواهیم داشت .

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}} \qquad (21)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

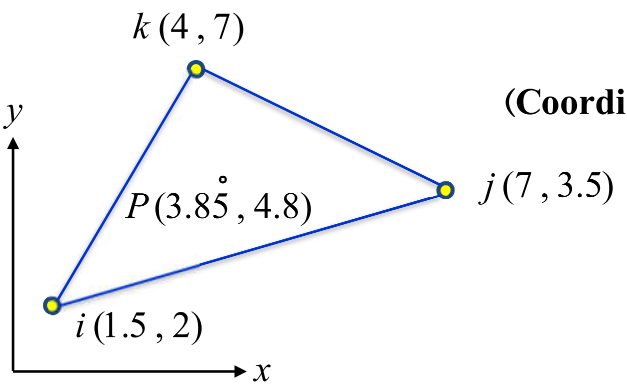
مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

مثال ۱- مقادیر توابع شکل را در نقطه P در المان مثلثی نشان داده شده محاسبه نمایید.



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)



پاسخ مثال ۱-

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3.85 = -2.5\xi + 3\eta + 4 \\ 4.8 = -5\xi - 3.5\eta + 7 \end{matrix} \quad \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \xi = 0.3 \\ \eta = 0.2 \end{matrix}} \quad (1.1)$$

$$(1.1) \rightarrow (13) \quad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{matrix} N_1(\xi,\eta) = 0.3 \\ N_2(\xi,\eta) = 0.2 \\ N_3(\xi,\eta) = 0.5 \end{matrix}} \quad (1.2)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

با جایگذاری مقادیر توابع شکل (13) در رابطه (16) جابجایی خطی نقاط موجود بر روی المان از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$(13) \rightarrow (16) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} u_{(\xi,\eta)} = (Q_{2i-1} - Q_{2k-1})\xi + (Q_{2j-1} - Q_{2k-1})\eta + Q_{2k-1} \\ v_{(\xi,\eta)} = (Q_{2i} - Q_{2k})\xi + (Q_{2j} - Q_{2k})\eta + Q_{2k} \end{matrix}} \quad (22)$$

با مشتق‌گیری از روابط (22) نسبت به ξ و η خواهیم داشت:

$$(22) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = Q_{2i-1} - Q_{2k-1} = Q_{(2i-1)(2k-1)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = Q_{2j-1} - Q_{2k-1} = Q_{(2j-1)(2k-1)} \end{matrix}} \quad (23) \qquad \boxed{\begin{matrix} \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = Q_{2i} - Q_{2k} = Q_{(2i)(2k)} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = Q_{2j} - Q_{2k} = Q_{(2j)(2k)} \end{matrix}} \quad (24)$$

با مشتق‌گیری از روابط (11) نسبت به ξ و η خواهیم داشت:

$$(11) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = x_{ik} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} = x_{jk} \end{matrix}} \quad (25) \qquad (11) \quad \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = y_{ik} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = y_{jk} \end{matrix}} \quad (26)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

مشتق‌های u و v نسبت به ξ و η را می‌توان به صورت مشتق‌های جزئی زنجیری به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial u}{\partial \eta}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}&\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta}&\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix}}\qquad(27)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \xi}&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial v}{\partial \eta}&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}&\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta}&\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{Bmatrix}}\qquad(28)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

ماتریس ضرایب به وجود آمده در روابط (27) و (28) به ماتریس تبدیل ژاکوبین (Jacobian Transformation Matrix) معروف است:

$$\boxed{\mathbf{J}\in\mathbb{R}^{2\times 2}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}&\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta}&\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}}\qquad(29)$$

با جایگذاری رابطه (29) در روابط (27) و (28) نتیجه می‌شود:

$$(29)\rightarrow(27)\quad\Rightarrow\boxed{\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\end{Bmatrix}}\quad(30)\qquad(29)\rightarrow(28)\quad\Rightarrow\boxed{\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{Bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta}\end{Bmatrix}}\quad(31)$$

مسائل دو بُعدی– المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

با جایگذاری روابط (25) و (26) در رابطه (29) معکوس ماتریس تبدیل ژاکوبین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(25)\,\&\,(26)\rightarrow(29)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{J}=\begin{bmatrix} x_{ik} & y_{ik}\\ x_{jk} & y_{jk}\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{J}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{bmatrix} y_{jk} & -y_{ik}\\ -x_{jk} & x_{ik}\end{bmatrix}}\quad(32)$$

می‌توان اثبات کرد که مقدار دترمینان ماتریس تبدیل ژاکوبین دو برابر مساحت سطح المان می‌باشد:

$$\boxed{\begin{aligned}\det(\mathbf{J})&=x_{ik}y_{jk}-x_{jk}y_{ik}\\ A_e&=\frac{1}{2}\left|\det(\mathbf{J})\right|\end{aligned}}\qquad(33)$$

بسیاری از برنامه‌های کامپیوتری از دترمینان ماتریس تبدیل ژاکوبین برای محاسبه مساحت مثلث استفاده می‌کنند.

مسائل دو بُعدی– المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

با جایگذاری روابط (23) و (32) در رابطه (30) نتیجه می‌شود:

$$(23)\,\&\,(32)\rightarrow(30)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{Bmatrix} y_{jk}Q_{(2i-1)(2k-1)}-y_{ik}Q_{(2j-1)(2k-1)}\\ -x_{jk}Q_{(2i-1)(2k-1)}+x_{ik}Q_{(2j-1)(2k-1)}\end{Bmatrix}}\quad(34)$$

همچنین به طور مشابه با جایگذاری روابط (24) و (32) در رابطه (31) نتیجه می‌شود:

$$(24)\,\&\,(32)\rightarrow(31)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{Bmatrix} y_{jk}Q_{(2i)(2k)}-y_{ik}Q_{(2j)(2k)}\\ -x_{jk}Q_{(2i)(2k)}+x_{ik}Q_{(2j)(2k)}\end{Bmatrix}}\quad(35)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

حال با جایگذاری روابط (34) و (35) در رابطه (7) بردار کرنش در سطح المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(34)\ \&\ (35) \rightarrow (7) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^e \in \mathbb{R}^3 = \frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{Bmatrix} y_{jk}Q_{(2i-1)(2k-1)} - y_{ik}Q_{(2j-1)(2k-1)} \\ -x_{jk}Q_{(2i)(2k)} + x_{ik}Q_{(2j)(2k)} \\ -x_{jk}Q_{(2i-1)(2k-1)} + x_{ik}Q_{(2j-1)(2k-1)} + y_{jk}Q_{(2i)(2k)} - y_{ik}Q_{(2j)(2k)} \end{Bmatrix}} \quad (36)$$

با توجه به هندسه المان می دانیم همواره روابط زیر برقرار است:

$$\boxed{\begin{matrix} x_{ab} = -x_{ba} & y_{ab} = -y_{ba} & \\ x_{ab} = x_{ac} - x_{ac} & y_{ab} = y_{ac} - y_{ac} & \end{matrix} \quad Q_{ab} = -Q_{ba}} \quad (37)$$

با جایگذاری رابطه (37) در (36)

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^e \in \mathbb{R}^3 = \frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{Bmatrix} y_{jk}Q_{2i-1} + y_{ki}Q_{2j-1} + y_{ij}Q_{2k-1} \\ x_{kj}Q_{2i} + x_{ik}Q_{2j} + x_{ji}Q_{2k} \\ x_{kj}Q_{2i-1} + y_{jk}Q_{2i} + x_{ik}Q_{2j-1} + y_{ki}Q_{2j} + x_{ji}Q_{2k-1} + y_{ij}Q_{2k} \end{Bmatrix}} \quad (38)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

فرم ماتریسی رابطه کرنش المان (38) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e\mathbf{Q}^e} \quad (39)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{B}^e \in \mathbb{R}^{3\times 6} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}} \quad (40)$$

همان طور که مشاهده می‌شود ماتریس **B** تابعی از مختصات گرهی المان است که ثابت می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که در المان مثلثی کرنش ثابت است که این از معایب اصلی این المان محسوب می‌شود. بنابراین در محل اثر بار متمرکز و یا در نزدیکی سوراخ‌ها باید تا جایی که امکان دارد المان‌های مثلثی را کوچک انتخاب کرده تا دقت آنالیز بالا رود.

$$\boxed{\mathbf{Q}^e \in \mathbb{R}^6 = \begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \\ Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \\ Q_{2k-1} \\ Q_{2k} \end{Bmatrix}} \quad (20)$$

(تکراری)

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

با جایگذاری رابطه (39) در رابطه (8) مقدار تنش در المان مثلثی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(39) \rightarrow (8) \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{Q}^e} \quad (41)$$

که در آن

ماتریس مصالح در حالت تنش صفحه‌ای

$$\boxed{\mathbf{D}^e = \frac{E_e}{1-\upsilon_e^{\,2}} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon_e & 0 \\ \upsilon_e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\upsilon_e) \end{bmatrix}} \quad (9)$$

(تکراری)

ماتریس مصالح در حالت کرنش صفحه‌ای

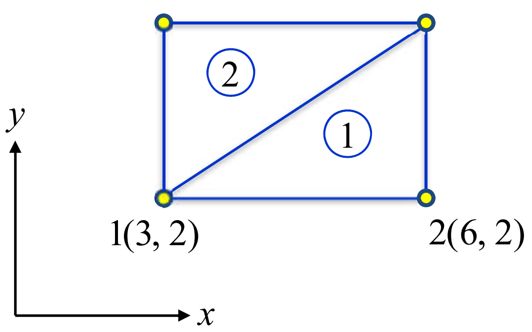
$$\boxed{\mathbf{D}^e = \frac{E_e}{(1+\upsilon_e)(1-2\upsilon_e)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon_e & \upsilon_e & 0 \\ \upsilon_e & 1-\upsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-2\upsilon_e) \end{bmatrix}} \quad (10)$$

(تکراری)

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

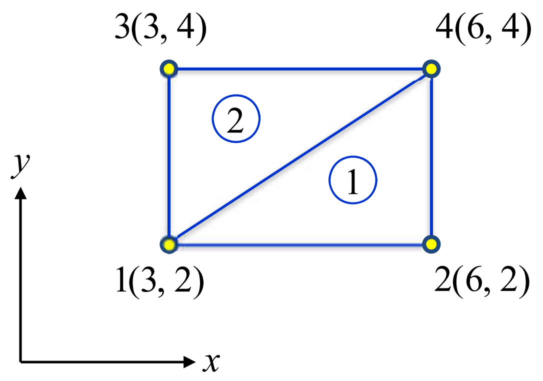
تنش و کرنش (Stress and Strain)

مثال ۲- مقادیر مطلوب است محاسبه ماتریس **B** برای دو المان نشان داده شدخ در شکل.



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)



پاسخ مثال ۲-

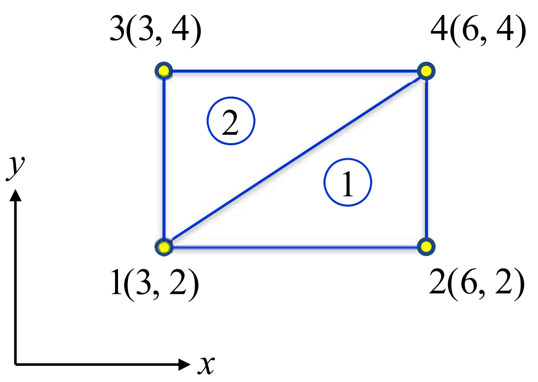
Element Connectivity

Element	Node No.		
No.	*i*	*j*	*k*
1	1	2	4
2	1	4	3

$$(33) \rightarrow (40) \quad \boxed{\mathbf{B}^e = \frac{1}{x_{ik}y_{jk} - x_{jk}y_{ik}} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}} \quad (2.1)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)



پاسخ مثال ۲-

$$(2.1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^e = \frac{1}{x_{ik}y_{jk} - x_{jk}y_{ik}} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B}^{(1)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}} \quad (2.2)$$

$$(2.1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B}^{(2)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}} \quad (2.3)$$

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

با جایگذاری رابطه (8) در انرژی پتانسیل کل (L1-30) خواهیم داشت:

$$(8)\rightarrow(L1-30)\quad \overset{d_V=tdA}{\Rightarrow}\quad \boxed{\Pi=\frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T\,\mathbf{D}^T\,\boldsymbol{\varepsilon}\,td_A-\int_A\mathbf{u}^T\,\mathbf{f}\,td_A-\int_L\mathbf{u}^T\,\mathbf{T}\,td_\ell-\sum_i u_iP_i}\quad(42)$$

در روش المان محدود انرژی پتانسیل کل سیستم از جمع انرژی پتانسیل در تمامی المان‌ها به دست می‌آید:

$$(42)\Rightarrow\boxed{\Pi=\sum_e\left(\frac{1}{2}\int_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^T\,(\mathbf{D}^e)^T\,\boldsymbol{\varepsilon}^e\,t_ed_A\right)-\sum_e\left(\int_e(\mathbf{u}^e)^T\,\mathbf{f}^e\,t_ed_A\right)-\sum_e\left(\int_L(\mathbf{u}^e)^T\,\mathbf{T}^e\,t_ed_\ell\right)-\sum_i Q_ip_i}(43)$$

انرژی کرنشی المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{U_e=\frac{1}{2}\int_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^T\,(\mathbf{D}^e)^T\,\boldsymbol{\varepsilon}^e\,t_ed_A}\quad(44)$$

با جایگذاری رابطه (44) در (43) خواهیم داشت:

$$(44)\rightarrow(43)\quad\Rightarrow\boxed{\Pi=\sum_e U_e-\sum_e\left(\int_e(\mathbf{u}^e)^T\,\mathbf{f}^e\,t_ed_A\right)-\sum_e\left(\int_L(\mathbf{u}^e)^T\,\mathbf{T}^e\,t_ed_\ell\right)-\sum_i Q_ip_i}\quad(45)$$

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با جایگذاری کرنش المان $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ از رابطه (39) در رابطه (44) خواهیم داشت:

$$(39)\rightarrow(44)\quad\Rightarrow\boxed{U_e=\frac{1}{2}\int_e(\mathbf{Q}^e)^T\,(\mathbf{B}^e)^T\,(\mathbf{D}^e)^T\,\mathbf{B}^e\mathbf{Q}^e\,t_ed_A}\quad(46)$$

با فرض ثابت بودن ضخامت در سطح المان و همچنین از آنجایی که درایه ماتریس‌های $\mathbf{D}^e$ و $\mathbf{B}^e$ ثابت می‌باشند می‌توان آنها را از انتگرال خارج نمود:

$$(46)\quad\Rightarrow\boxed{U_e=\frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T\,(\mathbf{B}^e)^T\,(\mathbf{D}^e)^T\,\mathbf{B}^et_e\left(\int_e d_A\right)\mathbf{Q}^e}\quad(47)$$

از آنجایی که $\int_e d_A=A_e$ در نتیجه رابطه (47) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(47)\quad\overset{\int_e d_A=A_e}{\Rightarrow}\boxed{U_e=\frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T\,t_eA_e\,(\mathbf{B}^e)^T\,(\mathbf{D}^e)^T\,\mathbf{B}^e\mathbf{Q}^e}\quad(48)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

رابطه (48) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(48) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{Q}^e} \quad (49)$$

که در آن $\mathbf{k}^e$ ماتریس سختی المان مثلثی می‌باشد:

$$\boxed{\mathbf{k}^e = t_e A_e (\mathbf{B}^e)^T (\mathbf{D}^e)^T \mathbf{B}^e} \quad (50)$$

$\mathbf{k}^e \in \mathbb{R}^{6\times 6}$: ماتریس سختی المان e اُم (Element Stiffness Matrix)

با توجه به نوع ماتریس $\mathbf{D}^e$ (تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای) ماتریس سختی المان مثلثی تشکیل می‌گردد.

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

عبارت مربوط به کار خارجی ناشی از نیروی حجمی در رابطه (45) به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{کار خارجی ناشی از نیروی حجمی} = \int_e (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e \, t_e d_A} \quad (51)$$

با جایگذاری تغییر شکل از رابطه (17) در رابطه (51) خواهیم داشت:

$$(17) \rightarrow (51) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e \, t_e d_A = \int_e (\mathbf{Q}^{eT}) \mathbf{N}^T \mathbf{f}^e \, t_e d_A} \quad (52)$$

با جایگذاری روابط (2)، (19) و (20) در رابطه (52) :

$$(2),(19)\,\&\,(20) \rightarrow (52) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_e (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e \, t_e d_A = \int_e \{Q_{2i-1} \quad Q_{2i} \quad Q_{2j-1} \quad Q_{2j} \quad Q_{2k-1} \quad Q_{2k}\} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} t_e d_A} \quad (53)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

با بسط دادن رابطه (53) نتیجه می‌شود:

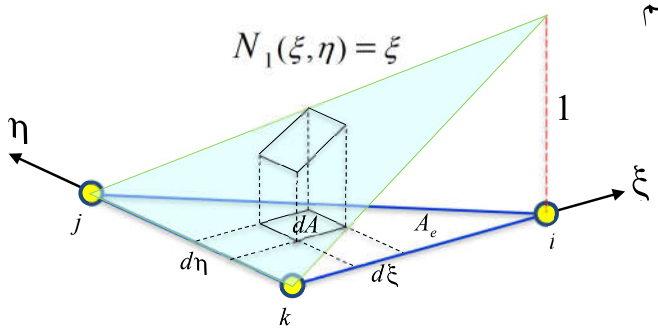
$$(53)\ \Rightarrow \qquad \boxed{\int_e (\mathbf{u}^e)^T\, \mathbf{f}^e\, t_e d_A = t_e\left(Q_{2i-1}f_x + Q_{2i}f_y\right)\int_e N_1 d_A + t_e\left(Q_{2j-1}f_x + Q_{2j}f_y\right)\int_e N_2\, d_A + t_e\left(Q_{2k-1}f_x + Q_{2k}f_y\right)\int_e N_3 d_A} \qquad (54)$$

در رابطه (54) انتگرال‌های زیر ظاهر شده‌اند:

$$\int_e N_1 d_A = ? \quad , \quad \int_e N_2\, d_A = ? \quad , \quad \int_e N_3 d_A = ?$$

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود مقدار $\int_e N_1 d_A$ برابر با حجم چهاروجهی $V_e = \frac{1}{3}A_e \times 1$ است از این رو، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\boxed{\int_e N_1 d_A = \int_e N_2\, d_A = \int_e N_3 d_A = \frac{1}{3}A_e} \qquad (55)$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

از این رو، با جایگذاری رابطه (55) در رابطه (54) خواهیم داشت:

$$(55) \rightarrow (54) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e (\mathbf{u}^e)^T\, \mathbf{f}^e\, t_e d_A = \frac{t_e A_e}{3}\left(Q_{2i-1}f_x + Q_{2i}f_y + Q_{2j-1}f_x + Q_{2j}f_y + Q_{2k-1}f_x + Q_{2k}f_y\right)} \qquad (56)$$

فرم ماتریسی رابطه (56) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(56) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e (\mathbf{u}^e)^T\, \mathbf{f}^e\, t_e d_A = (\mathbf{Q}^{eT})\mathbf{f}_\mathbf{b}^e} \qquad (57)$$

$$\boxed{\mathbf{f}_\mathbf{b}^e = \frac{t_e A_e}{3}\begin{array}{c c} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{Bmatrix} & \begin{array}{c} 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \\ 2k-1 \\ 2k \end{array} \end{array}} \qquad (58)$$

که در آن بردار نیروی حجمی المان $\mathbf{f}_\mathbf{b}^e$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$\mathbf{f}_\mathbf{b}^e \in \mathbb{R}^6$: بردار نیروی حجمی المان e اُم (Element Body force)

می توان نتیجه گرفت که نیروهای حجمی f_x و f_y به نسبت یک سوم بین گره‌های المان تقسیم شده‌اند.

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی سطحی المان (Element Traction Force Vector)

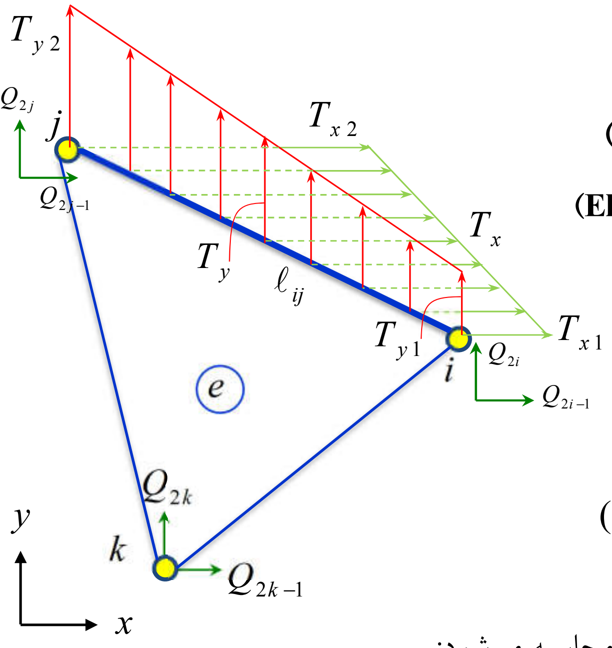
عبارت مربوط به کار خارجی ناشی از نیروی سطحی در رابطه (45) به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{کار خارجی ناشی از نیروی سطحی} = \int_L (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{T}^e \, t_e d_\ell} \qquad (59)$$

با جایگذاری روابط (1) و (3) در رابطه (59)

$$(1)\,\&\,(3) \rightarrow (59) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_L (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{T}^e \, t_e d_\ell = \int_L \{u \quad v\} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} t_e d_\ell} \qquad (60)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی سطحی المان (Element Traction Force Vector)

در اینجا فرض می‌شود که بارهای واحد سطح T_x و T_y بر لبه ij به طول ℓ_{ij} وارد می‌شود.

بنابراین رابطه (60) بر روی لبه ij به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(60) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\ell_{ij}} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{T}^e \, t_e d_\ell = \int_{\ell_{ij}} (uT_x + vT_y) t_e d_\ell} \qquad (61)$$

با استفاده از رابطه (16) میزان جابجایی بر روی لبه ij به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(16) \quad \overset{N_3=0}{\Rightarrow} \quad \boxed{\begin{aligned} u &= N_1 Q_{2i-1} + N_2 Q_{2j-1} \\ v &= N_1 Q_{2i} + N_2 Q_{2j} \end{aligned}} \qquad (62)$$

(جابجایی‌لبه‌ها وابسته به جابجایی
گره‌های دو انتهای لبه است)

همچنین با استفاده از درونیابی بر روی لبه ij نیروهای واحد سطح T_xو T_y را نیز می‌توان به صورت نوشت:

$$\boxed{\begin{aligned} T_x &= N_1 T_{x1} + N_2 T_{x2} \\ T_y &= N_1 T_{y1} + N_2 T_{y2} \end{aligned}} \qquad (63)$$

(بار در طول لبه وابسته به شدت بار
در دو انتهای لبه است)

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی سطحی المان (Element Traction Force Vector)

می دانیم که

$$\boxed{\int_{\ell_{ij}} N_1{}^2 d_\ell = \frac{\ell_{ij}}{3} \quad , \quad \int_{\ell_{ij}} N_2{}^2 d_\ell = \frac{\ell_{ij}}{3} \quad , \quad \int_{\ell_{ij}} N_1 N_2 d_\ell = \frac{\ell_{ij}}{6}} \qquad (64)$$

و همچنین

$$\boxed{\ell_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \qquad (65)$$

با جایگذاری روابط (62) و (63) در رابطه (61) و همچنین با استفاده از روابط (64) و (65) خواهیم داشت:

$$(62) \,\&\, (63) \rightarrow (61) \quad \overset{(64)\&(65)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\int_{\ell_{ij}} (\mathbf{u}^e)^T \, \mathbf{T}^e \, t_e d_\ell = \begin{bmatrix} Q_{2i-1} & Q_{2i} & Q_{2j-1} & Q_{2j} \end{bmatrix} \mathbf{T}_\mathbf{t}^e} \qquad (66)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی سطحی المان (Element Traction Force Vector)

که در آن بردار نیروی سطحی المان $\mathbf{T}_\mathbf{t}^e$ بر لبه ij به صورت زیر تعریف می‌گردد:

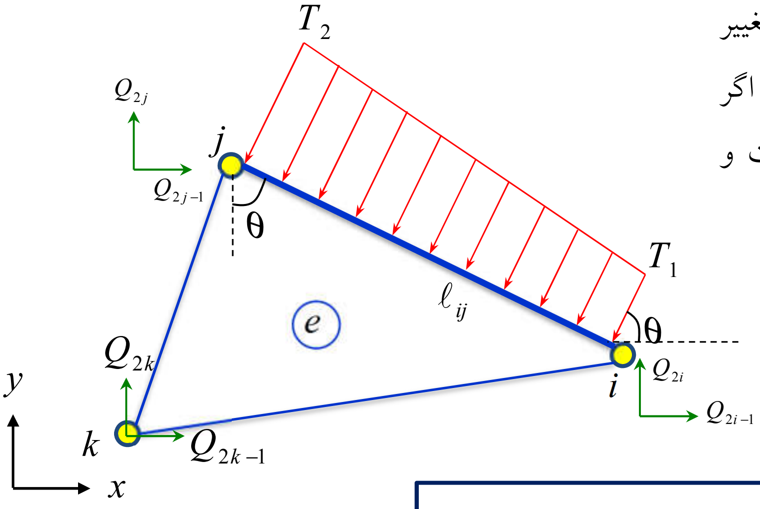
$$\boxed{\mathbf{T}_\mathbf{t}^e = \frac{t_e \ell_{ij}}{6} \begin{array}{c c} \begin{Bmatrix} 2T_{x1} + T_{x2} \\ 2T_{y1} + T_{y2} \\ T_{x1} + 2T_{x2} \\ T_{y1} + 2T_{y2} \end{Bmatrix} & \begin{array}{c} 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{array} \end{array}} \qquad (67)$$

$\mathbf{T}_\mathbf{t}^e \in \mathbb{R}^4$: بردار نیروی سطحی المان e اُم (Element Traction force) وارد بر لبه ij

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی سطحی المان (Element Traction Force Vector)



اگر بار خطی نشان داده شده که شدت آن از T_1 تا T_2 تغییر می‌کند به صورت عمود بر لبه ij وارد شود به طوری که اگر از گره i به سمت گره j حرکت کنیم بار در سمت راست و عمود بر لبه واقع شده باشد در این صورت:

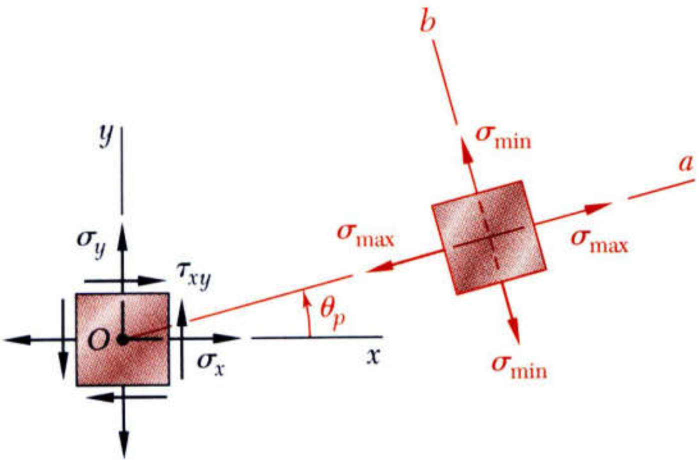
$$\boxed{T_{x1} = -cT_1 \quad , \quad T_{x2} = -cT_2 \quad , \quad T_{y1} = -sT_1 \quad , \quad T_{y1} = -sT_2} \qquad (68)$$

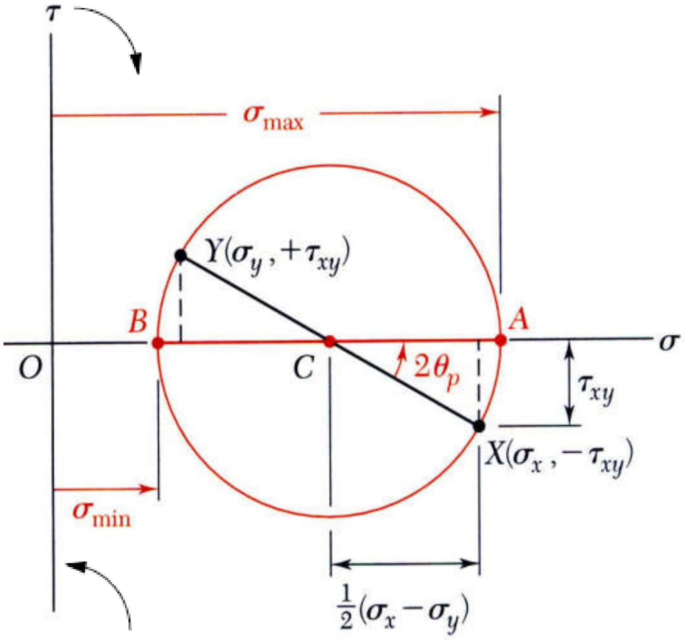
که در آن

$$\boxed{s = \frac{x_i - x_j}{\ell_{ij}} \quad , \quad c = \frac{y_j - y_i}{\ell_{ij}}} \qquad (69)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش‌های اصلی (Principal stresses)





$$\boxed{\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \qquad (70)$$

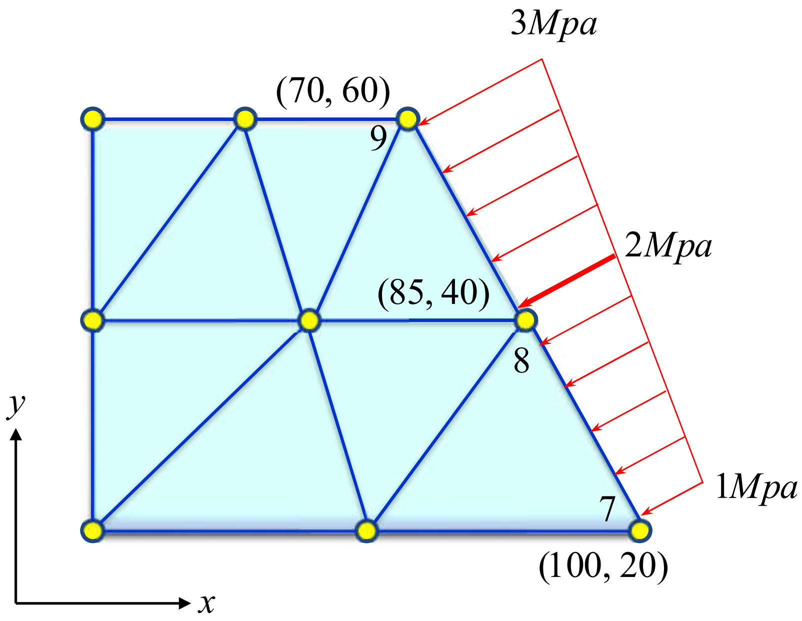
$$\boxed{\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \qquad (71)$$

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

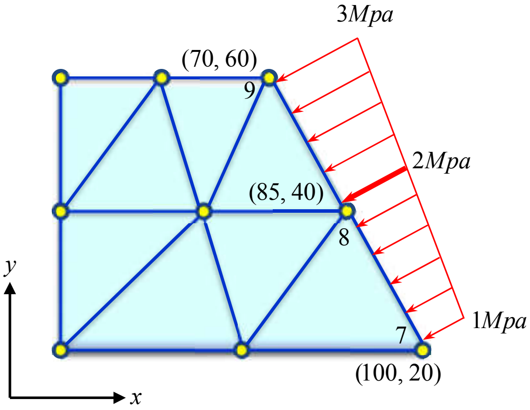
مثال ۳– یک صفحه دو بُعدی در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین مقادیر بار گرهی در گره‌های شماره 7، 8 و 9 تحت اثر بار سطحی وارده بر لبه‌های 9-8-7. (ابعاد بر حسب میلیمتر است)

$(Thickness = 10\ mm)$



مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)



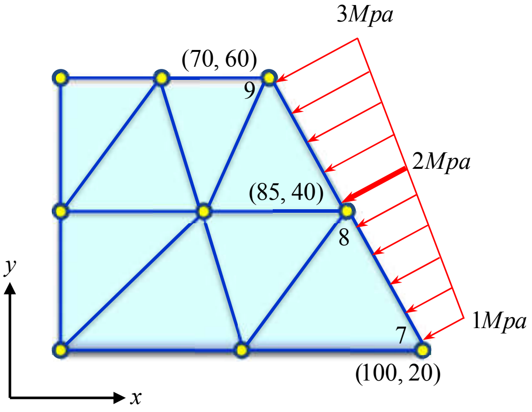
پاسخ مثال ۳–

لبه 7-8 :

$$\sqrt{(85-100)^2+(40-20)^2} \Rightarrow \boxed{\ell_{7-8} = 25\ mm} \quad (3.1)$$

$$\begin{matrix} =\dfrac{100-85}{25} \\ =\dfrac{40-20}{25} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} s = 0.6 \\ c = 0.8 \end{matrix}} \quad (3.2)$$

$$\begin{matrix} -0.8\times1 \\ -0.8\times2 \\ -0.6\times1 \\ -0.6\times2 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} T_{x1} = -0.8 \\ T_{x2} = -1.6 \\ T_{y1} = -0.6 \\ T_{y2} = -1.2 \end{matrix}} \quad (3.3)$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

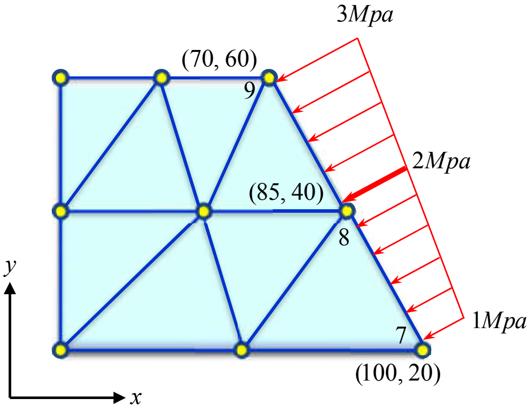
تنش و کرنش (Stress and Strain)

پاسخ مثال ۳-

لبه 7-8 :

$$(67) \quad \Rightarrow$$

$$= \frac{10\times 25}{6}\begin{Bmatrix} 2(-0.8)-1.6 \\ 2(-0.6)-1.2 \\ -0.8+2(-1.6) \\ -0.6+2(-1.2) \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{T}_t^1 = \begin{Bmatrix} -133.3 \\ -100 \\ -166.7 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{matrix}} \qquad (3.4)$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

پاسخ مثال ۳-

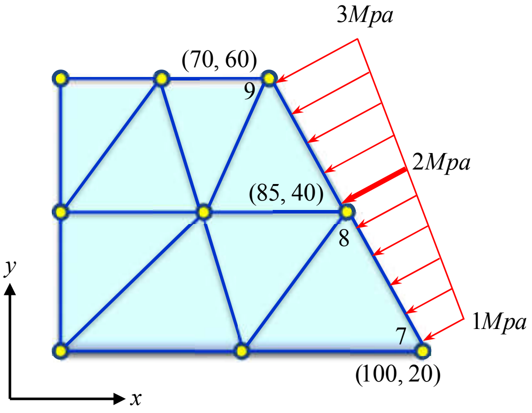
لبه 8-9 :

$$T_1 = 2\,Mpa \quad x_8 = 85\,mm \quad x_9 = 70\,mm$$
$$T_2 = 3\,Mpa \quad y_8 = 40\,mm \quad y_9 = 60\,mm$$

$$(65) \quad \Rightarrow \quad \ell_{8-9} = \sqrt{(x_9-x_8)^2+(y_9-y_8)^2} = \sqrt{(70-85)^2+(60-40)^2} \Rightarrow \boxed{\ell_{8-9} = 25\,mm} \qquad (3.5)$$

$$(69) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} s = \dfrac{x_8-x_9}{\ell_{8-9}} = \dfrac{85-70}{25} \\ c = \dfrac{y_9-y_8}{\ell_{8-9}} = \dfrac{60-40}{25} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} s = 0.6 \\ c = 0.8 \end{matrix}} \qquad (3.6)$$

$$(68) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} T_{x1} = -cT_1 = -0.8\times 2 \\ T_{x2} = -cT_2 = -0.8\times 3 \\ T_{y1} = -sT_1 = -0.6\times 2 \\ T_{y2} = -sT_2 = -0.6\times 3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} T_{x1} = -1.6 \\ T_{x2} = -2.4 \\ T_{y1} = -1.2 \\ T_{y2} = -1.8 \end{matrix}} \qquad (3.7)$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

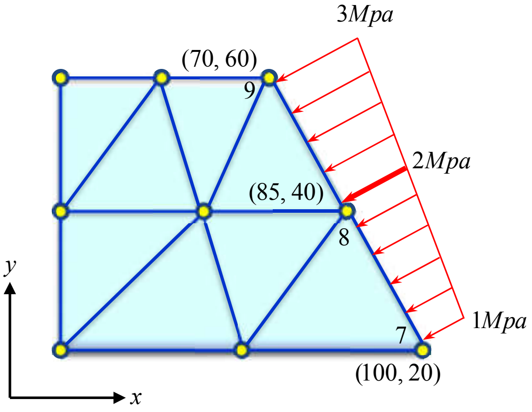
تنش و کرنش (Stress and Strain)

پاسخ مثال ۳-

لبه 8-9 :

$$(67) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{T}_t^2 = \frac{t_e \ell_{8-9}}{6}\begin{Bmatrix}2T_{x1}+T_{x2}\\ 2T_{y1}+T_{y2}\\ T_{x1}+2T_{x2}\\ T_{y1}+2T_{y2}\end{Bmatrix} = \frac{10\times 25}{6}\begin{Bmatrix}2(-1.6)-2.6\\ 2(-1.2)-1.8\\ -1.6+2(-2.6)\\ -1.2+2(-1.8)\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{T}_t^2 = \begin{Bmatrix}-233.3\\ -175\\ -266.7\\ -200\end{Bmatrix}\begin{matrix}15\\ 16\\ 17\\ 18\end{matrix}} \qquad (3.8)$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

تنش و کرنش (Stress and Strain)

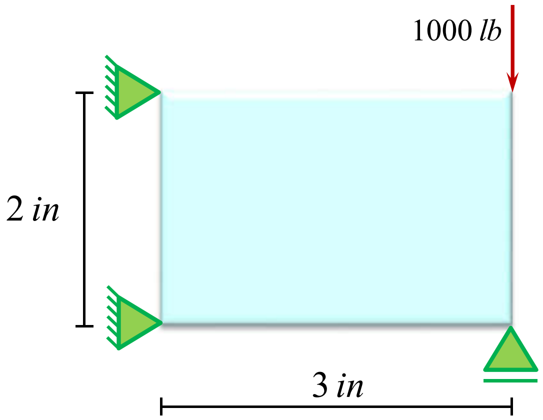
پاسخ مثال ۳-

تشکیل بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{T}_t^1 + \mathbf{T}_t^2 = \begin{Bmatrix}-133.3\\ -100\\ -400\\ -300\\ -266.7\\ -200\end{Bmatrix}\begin{matrix}13\\ 14\\ 15\\ 16\\ 17\\ 18\end{matrix}} \qquad (3.9)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مثال ۴- صفحه نشان داده شده تحت اثر بار متمرکز 1000 lb قرار دارد. مطلوب است آنالیز این صفحه با فرض در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای.



$(Thickness) \quad t = 0.5\ in$

$E = 30 \times 10^6\ psi$

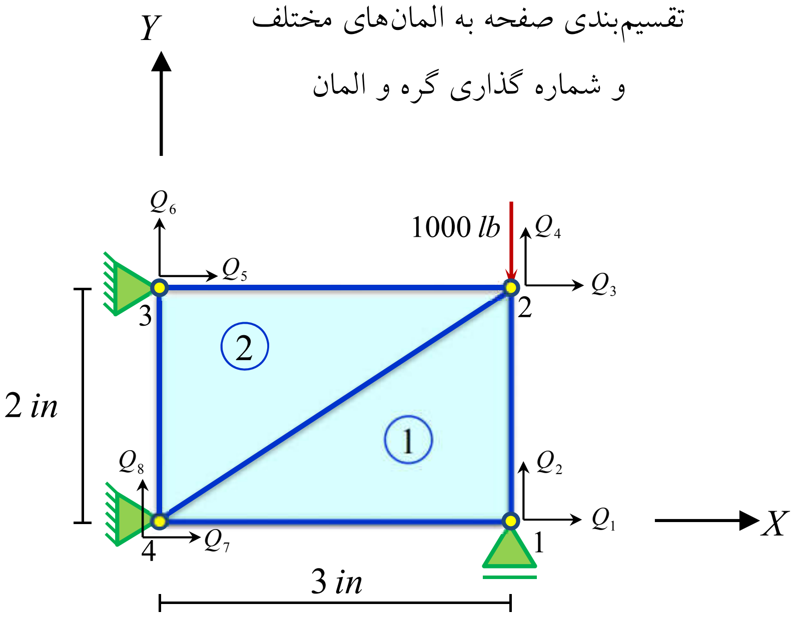
$\nu = 0.25$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

تقسیم‌بندی صفحه به المان‌های مختلف

و شماره گذاری گره و المان



$(Thickness) \quad t = 0.5\ in$

$E = 30 \times 10^6\ psi$

$\nu = 0.25$

Node Coordinates

Node No.	X	Y
1	3	0
2	3	2
3	0	2
4	0	0

Element Connectivity

Element	Node No.		
No.	i	j	k
1	1	2	4
2	3	4	2

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

$$(33) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_e = \frac{1}{2}(x_{ik}y_{jk} - x_{jk}y_{ik})} \quad (4.1)$$

$$\boxed{A_1 = 3} \quad (4.2)$$

$$(4.1) \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{2}(x_{32}y_{42} - x_{42}y_{32}) \quad \Rightarrow \boxed{A_2 = 3} \quad (4.3)$$

$$= \frac{30\times 10^6}{1-(0.25)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-0.25) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 32 & 8 & 0 \\ 8 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}\times 10^6} \quad (4.4)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

$$(33) \to (40) \quad \boxed{\mathbf{B}^e = \frac{1}{x_{ik}y_{jk} - x_{jk}y_{ik}}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}} \quad (4.5)$$

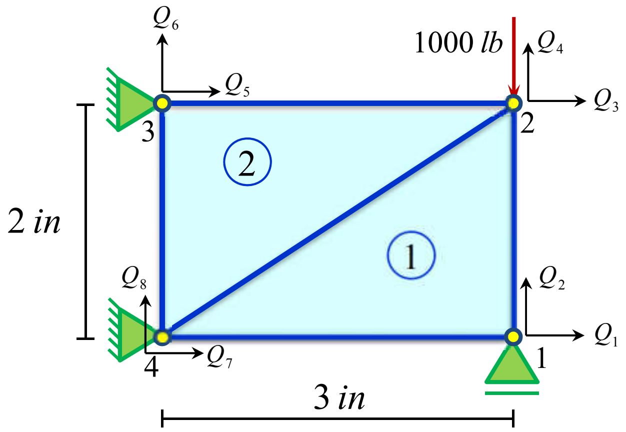
$$(4.5) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & 0 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.33 & 0.5 & 0 & 0 & -0.33 \end{bmatrix}} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B}^{(2)} = \frac{1}{x_{32}y_{42} - x_{42}y_{32}}\begin{bmatrix} y_{42} & 0 & y_{23} & 0 & y_{34} & 0 \\ 0 & x_{24} & 0 & x_{32} & 0 & x_{43} \\ x_{24} & y_{42} & x_{32} & y_{23} & x_{43} & y_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.33 & -0.5 & 0 & 0 & 0.33 \end{bmatrix}} (4.7)$$

مسائل دو بُعدی– المان مثلثی CST

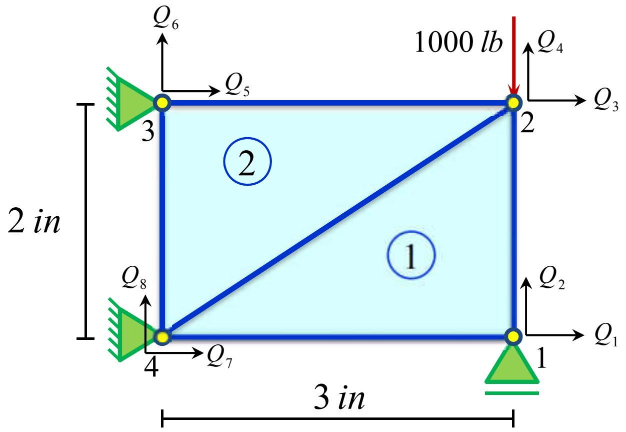
پاسخ مثال ۴–



$$\Rightarrow \mathbf{k}^{(1)} = 10^7 \times \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & \\ 0.983 & -0.5 & -0.45 & 0.2 & -0.53 & 0.3 & 1 \\ -0.5 & 1.4 & 0.3 & -1.2 & 0.2 & -0.2 & 2 \\ -0.45 & 0.3 & 0.45 & 0 & 0 & -0.3 & 3 \\ 0.2 & -1.2 & 0 & 1.2 & -0.2 & 0 & 4 \\ -0.53 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0.53 & 0 & 7 \\ 0.3 & -0.2 & -0.3 & 0 & 0 & 0.2 & 8 \end{array} \qquad (4.8)$$

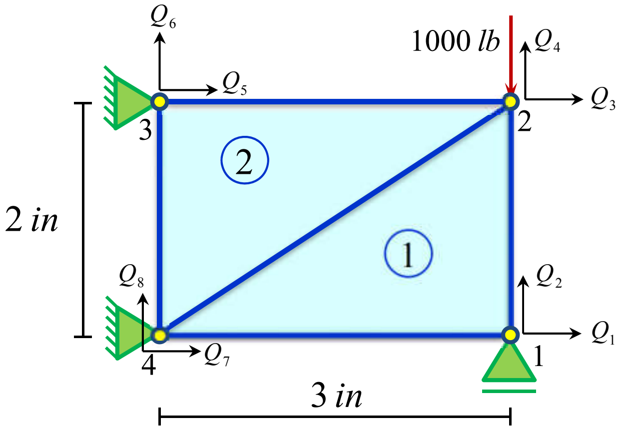
مسائل دو بُعدی– المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴–



$$(50) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}^{(2)} = tA_2(\mathbf{B}^{(2)})^T\,(\mathbf{D})^T\,\mathbf{B}^{(2)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{k}^{(2)} = 10^7 \times \begin{array}{ccccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & \\ 0.983 & -0.5 & -0.45 & 0.2 & -0.53 & 0.3 & 5 \\ -0.5 & 1.4 & 0.3 & -1.2 & 0.2 & -0.2 & 6 \\ -0.45 & 0.3 & 0.45 & 0 & 0 & -0.3 & 7 \\ 0.2 & -1.2 & 0 & 1.2 & -0.2 & 0 & 8 \\ -0.53 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0.53 & 0 & 3 \\ 0.3 & -0.2 & -0.3 & 0 & 0 & 0.2 & 4 \end{array} \qquad (4.9)$$



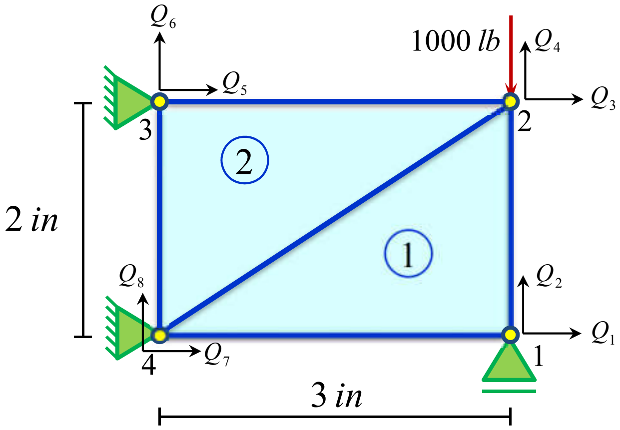
مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

تشکیل ماتریس سختی کل به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{8\times 8} = \sum_{e=1}^{2} \mathbf{K}^{e} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{K} = 10^{7} \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0.98 & -0.5 & -0.45 & 0.2 & 0 & 0 & -0.53 & 0.3 \\ -0.5 & 1.4 & 0.3 & -1.2 & 0 & 0 & 0.2 & -0.2 \\ -0.45 & 0.3 & 0.98 & 0 & -0.53 & 0.2 & 0 & -0.5 \\ 0.2 & -1.2 & 0 & 1.4 & 0.3 & -0.2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.53 & 0.3 & 0.983 & -0.5 & -0.45 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & -0.2 & -0.5 & 1.4 & 0.3 & -1.2 \\ -0.53 & 0.2 & 0 & -0.5 & -0.45 & 0.3 & 0.983 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & -0.5 & 0 & 0.2 & -1.2 & 0 & 1.4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \qquad (4.10)$$



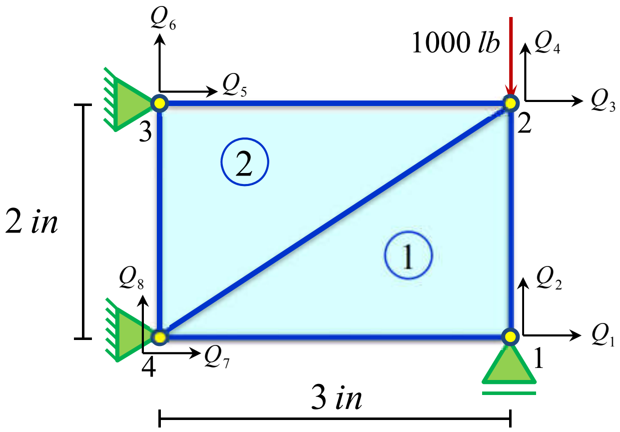
مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

تشکیل بردار نیروهای گرهی کل

$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{8} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \qquad (4.11)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



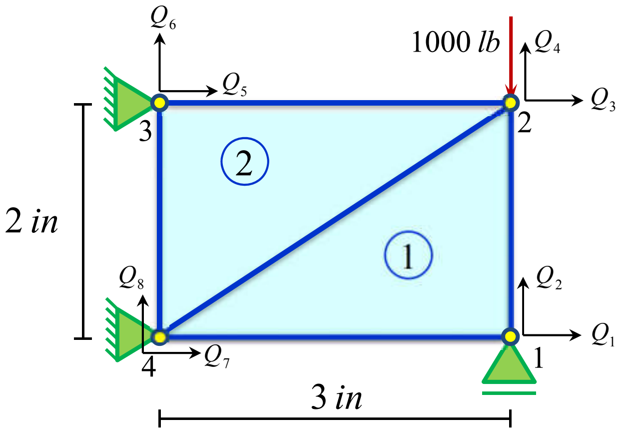
پاسخ مثال ۴-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{C = 14\times10^{10}} \qquad (4.12)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۴-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

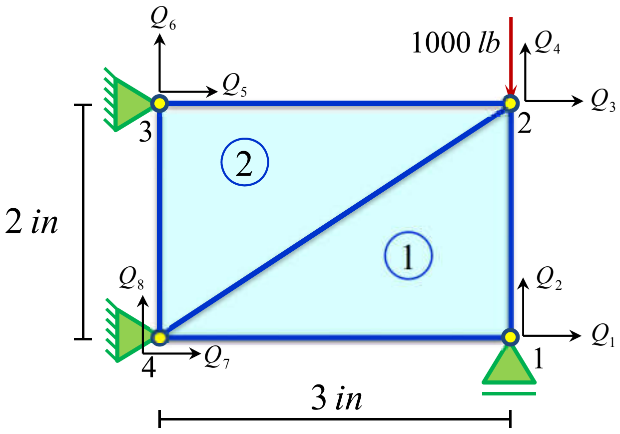
$$Q_2 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = 0$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$(4.10)\,\&\,(4.12) \quad \Rightarrow$

(4.13)

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}} = 10^7 \times \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0.98 & -0.5 & -0.45 & 0.2 & 0 & 0 & -0.53 & 0.3 \\ -0.5 & 14001.4 & 0.3 & -1.2 & 0 & 0 & 0.2 & -0.2 \\ -0.45 & 0.3 & 0.98 & 0 & -0.53 & 0.2 & 0 & -0.5 \\ 0.2 & -1.2 & 0 & 1.4 & 0.3 & -0.2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.53 & 0.3 & 14000.983 & -0.5 & -0.45 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & -0.2 & -0.5 & 14001.4 & 0.3 & -1.2 \\ -0.53 & 0.2 & 0 & -0.5 & -0.45 & 0.3 & 14000.983 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & -0.5 & 0 & 0.2 & -1.2 & 0 & 14001.4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}}$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

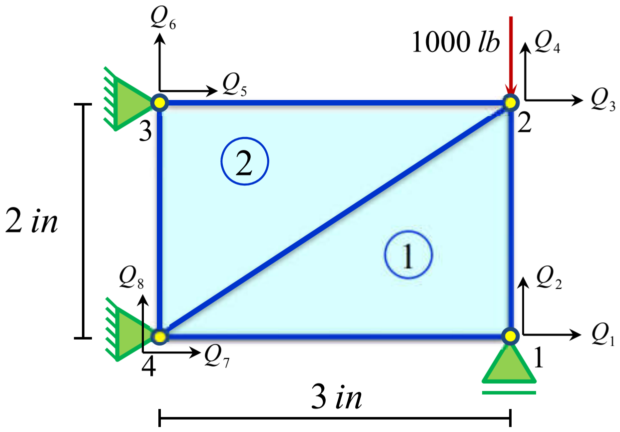
پاسخ مثال ۴-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

$$Q_2 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = 0$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$$(4.11)\,\&\,(4.12) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0+C\alpha_2 \\ 0 \\ -1000 \\ 0+C\alpha_5 \\ 0+C\alpha_6 \\ 0+C\alpha_7 \\ 0+C\alpha_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0+C(0) \\ 0 \\ -1000 \\ 0+C(0) \\ 0+C(0) \\ 0+C(0) \\ 0+C(0) \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{F}} = \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}} \quad (4.14)$$

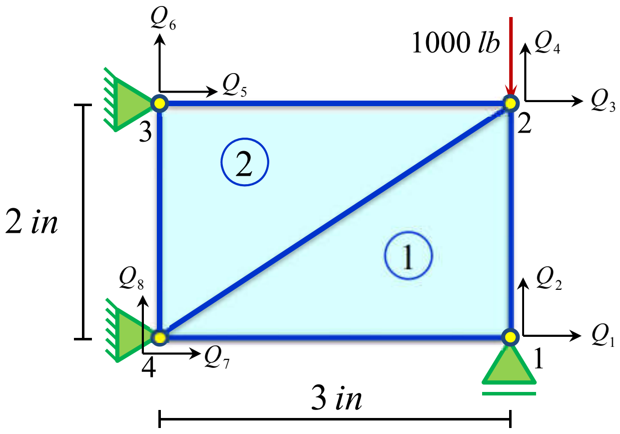


مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

معادله تعادل به صورت زیر نوشته و حل می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = (\bar{\mathbf{K}})^{-1}\bar{\mathbf{F}} \quad \overset{(4.13)\&(4.14)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.9076\times10^{-5} \\ -5.8618\times10^{-9} \\ 8.7326\times10^{-6} \\ -7.416\times10^{-5} \\ 1.9216\times10^{-9} \\ -1.184\times10^{-9} \\ -1.9216\times10^{-9} \\ -9.709\times10^{-11} \end{Bmatrix}} \quad (4.15)$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

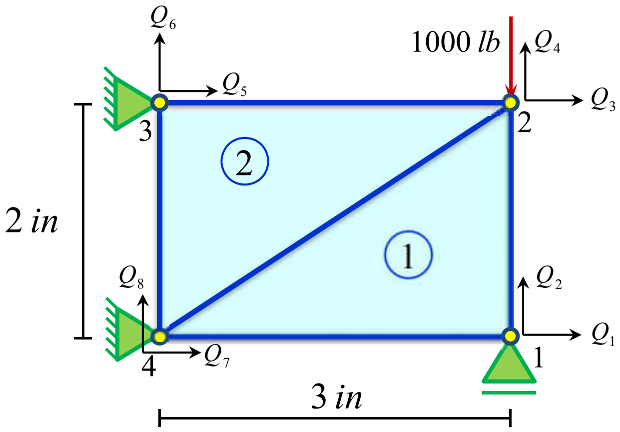
پاسخ مثال ۴-

محاسبه تنش:

$$(41)\quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}\mathbf{B}^e\mathbf{Q}^e} \quad (4.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 32 & 8 & 0 \\ 8 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & 0 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.33 & 0.5 & 0 & 0 & -0.33 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} -1.9076\times10^{-5} \\ -5.8618\times10^{-9} \\ 8.7326\times10^{-6} \\ -7.416\times10^{-5} \\ -1.9216\times10^{-9} \\ -1.9216\times10^{-9} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & = -93.122 \\ \sigma_y & = -1135.6 \\ \tau_{xy} & = -62.082 \end{matrix} \right\} psi} \quad (4.17)$$



مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

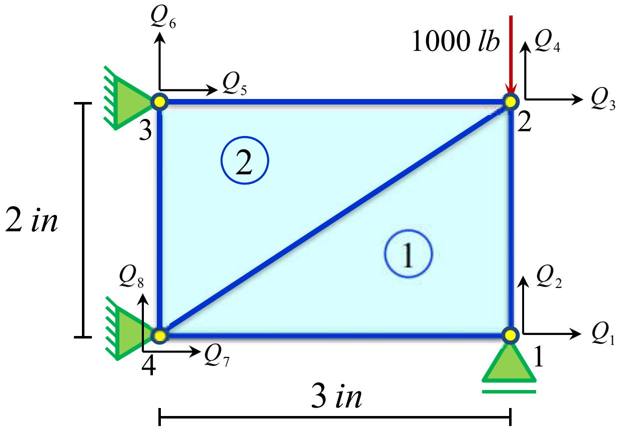
محاسبه تنش:

$$(41)\quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}\mathbf{B}^e\mathbf{Q}^e} \quad (4.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 32 & 8 & 0 \\ 8 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.33 & -0.5 & 0 & 0 & 0.33 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1.9216\times10^{-9} \\ -1.184\times10^{-9} \\ -1.9216\times10^{-9} \\ -9.709\times10^{-11} \\ 8.7326\times10^{-6} \\ -7.416\times10^{-5} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & = 93.122 \\ \sigma_y & = 23.264 \\ \tau_{xy} & = -296.61 \end{matrix} \right\} psi} \quad (4.18)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۴-

محاسبه تنش‌های اصلی:

(70) ⇒

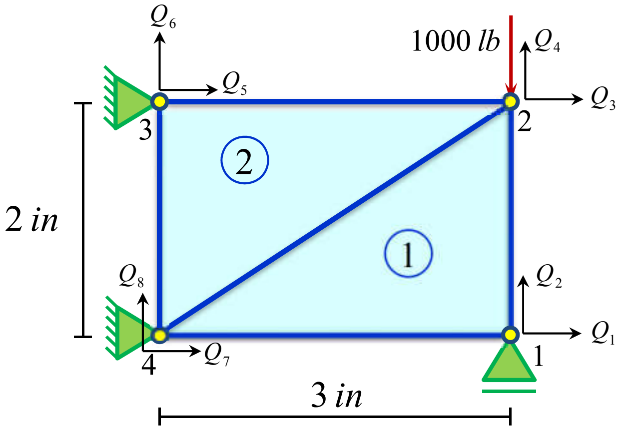
$$\boxed{\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \qquad (4.19)$$

(4.19) ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma^{(1)}{}_{\max} &= -89.438\ psi \\ \sigma^{(1)}{}_{\min} &= -1139.3\ psi \end{aligned}} \qquad (4.20)$$

$$\sigma^{(2)}{}_{\max,\min} = \frac{93.122+23.264}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{93.122-23.264}{2}\right)^2 + (-296.61)^2} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma^{(2)}{}_{\max} &= 356.85\ psi \\ \sigma^{(2)}{}_{\min} &= -240.47\ psi \end{aligned}} \qquad (4.21)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۴-

محاسبه تنش‌های اصلی:

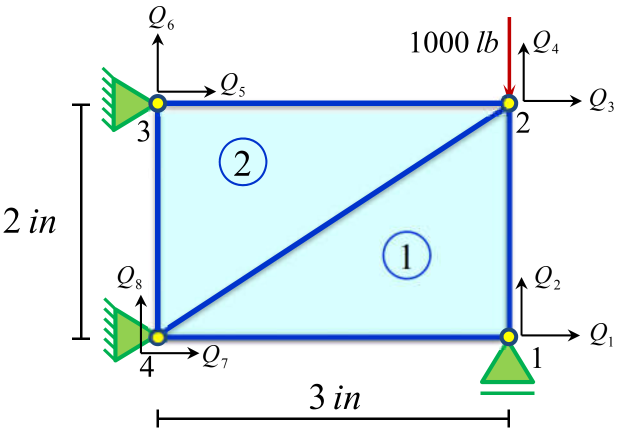
$$(71) \Rightarrow \quad \boxed{\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \qquad (4.22)$$

(4.22) ⇒

$$\boxed{\theta_p^{(1)} = -3.3961^o} \qquad (4.23)$$

$$\tan 2\theta_p^{(2)} = \frac{2(-296.61)}{93.122-23.264} \Rightarrow \boxed{\theta_p^{(2)} = -41.642^o} \qquad (4.24)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۴-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$(4.25) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{R_2 = 820.65\ lb} \quad (4.26)$$

$$R_5 = -C\left(Q_5 - \alpha_5\right) = -14\times10^{10}\left(1.9216\times10^{-9} - 0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_5 = -269.02\ lb} \quad (4.27)$$

$$R_6 = -C\left(Q_6 - \alpha_6\right) = -14\times10^{10}\left(-1.184\times10^{-9} - 0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_6 = 165.75\ lb} \quad (4.28)$$

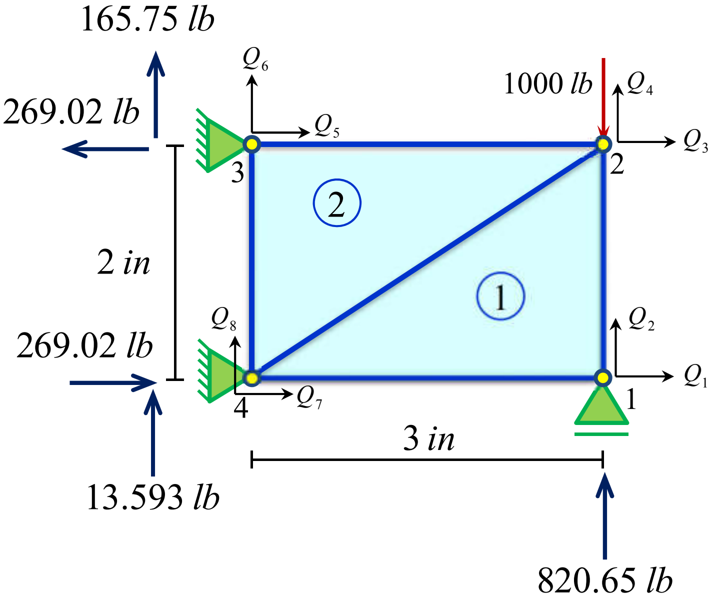
$$R_7 = -C\left(Q_7 - \alpha_7\right) = -14\times10^{10}\left(-1.9216\times10^{-9} - 0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_7 = 269.02\ lb} \quad (4.29)$$

$$R_8 = -C\left(Q_8 - \alpha_8\right) = -14\times10^{10}\left(-9.709\times10^{-11} - 0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_8 = 13.593\ lb} \quad (4.30)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴-

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:



مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

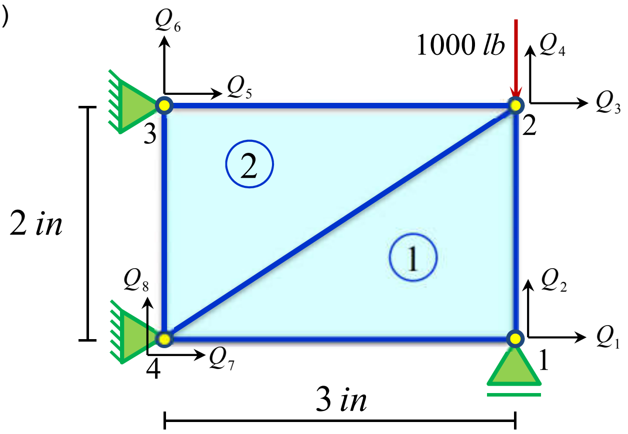
پاسخ مثال ۴– نام فایل برنامه: cst2n.m

نام فایل ورودی: L06EX04.txt

نام فایل خروجی: RL06EX04.txt

L06EX04.txt

```
TITLE OF PROBLEM
EXAMPLE 6.4
NN NE NM NDIM NEN NDN
 4  2  1  2    3   2
ND NL NCH NPR NMPC
 5  1  2   3   0
Node#  X   Y
 1      3   0
 2      3   2
 3      0   2
 4      0   0
Elem#  N1  N2  N3  Mat#  Thickness  TempRise (NCH=2 El Char: Th, Temp)
 1      4   1   2   1     .5          0
 2      3   4   2   1     .5          0
DOF#  Displacement
 2     0
 5     0
 6     0
 7     0
 8     0
DOF#  Load
 4    -1000
MAT#  PROP1  PROP2  PROP3
 1    30E6   .25    12E-6
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۴–

RL06EX04.txt

```
Output for Input Data from file L06EX04.txt
EXAMPLE 6.4

Plane Stress Analysis
 Node#    X-Displ          Y-Displ
    1      1.9076E-05    -5.8618E-09
    2      8.7326E-06    -7.4160E-05
    3      1.9216E-09    -1.1840E-09
    4     -1.9216E-09    -9.7090E-11
  DOF#      Reaction
    2      8.2065E+02
    5     -2.6902E+02
    6      1.6575E+02
    7      2.6902E+02
    8      1.3593E+01
ELEM#         SX            SY              TXY              S1              S2            ANGLE SX-->S1
    1   -9.31224E+01  -1.13559E+03  -6.20816E+01  -8.94383E+01  -1.13928E+03  -3.39610E+00
    2    9.31224E+01   2.32643E+01  -2.96612E+02   3.56855E+02  -2.40468E+02  -4.16419E+01
```

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

اثرات حرارت (Temperature Effects)

اگر توزیع تغییرات دما، $\Delta T\,(X,Y)$، مشخص باشد کرنش ناشی از این تغییر دما را می‌توان به عنوان یک **کرنش اولیه**، ε_0 ، در نظر گرفت که به صورت زیر است:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbb{R}^3 = \begin{Bmatrix} \alpha\,\Delta T \\ \alpha\,\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}} \qquad (72)$$

ماتریس مصالح در حالت تنش صفحه‌ای

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbb{R}^3 = (1+\nu)\begin{Bmatrix} \alpha\,\Delta T \\ \alpha\,\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}} \qquad (73)$$

ماتریس مصالح در حالت کرنش صفحه‌ای

α: ضریب انبساط حرارتی (Coefficient of Thermal Expansion)

ΔT: تغییرات حرارتی (Temperature Gradient)

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

اثرات حرارت (Temperature Effects)

فرم رابطه تنش با وجود کرنش اولیه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)} \qquad (74)$$

انرژی کرنشی برای یک المان به کمک انتگرال‌گیری بر روی حجم المان به دست می‌آید:

$$\boxed{U_e = \int_e \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)\,t\,dA} \qquad (75)$$

با جایگذاری رابطه (74) در (75) خواهیم داشت:

$$(74) \rightarrow \quad (75) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \int_e \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^T\,\mathbf{D}^T(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)\,t\,dA} \qquad (76)$$

با بسط دادن رابطه (76) داریم:

$$(76) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}\int_e \boldsymbol{\varepsilon}^T\,\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,t\,dA - \int_e \boldsymbol{\varepsilon}^T\,\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\,t\,dA + \frac{1}{2}\int_e \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\,T}\,\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\,t\,dA} \qquad (77)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

اثرات حرارت (Temperature Effects)

با بررسی عبارت انرژی کرنشی، می‌بینیم که عبارت اول در سمت راست، ماتریس سختی المان را به دست می‌دهد که پیش‌تر به دست آمده است. از آنجایی که عبارت آخر نیز یک مقدار ثابت است از این رو هنگام استفاده از معادلات تعادل که با قرار دادن $d\Pi / dQ_i = 0$ به دست می‌آیند، از رابطه حذف می‌شود. عبارت دوم، بردار بار المان مورد نظر را در نتیجه تغییرات دمایی به دست می‌دهد.

$$(77) \overset{(39)}{\Rightarrow} \boxed{\int_e \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 t dA = (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 t_e A_e = (\mathbf{Q}^e)^T \boldsymbol{\theta}^e} \quad (78)$$

که در آن

$$(78) \quad \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\theta}^e = t_e A_e (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0} \quad (79)$$

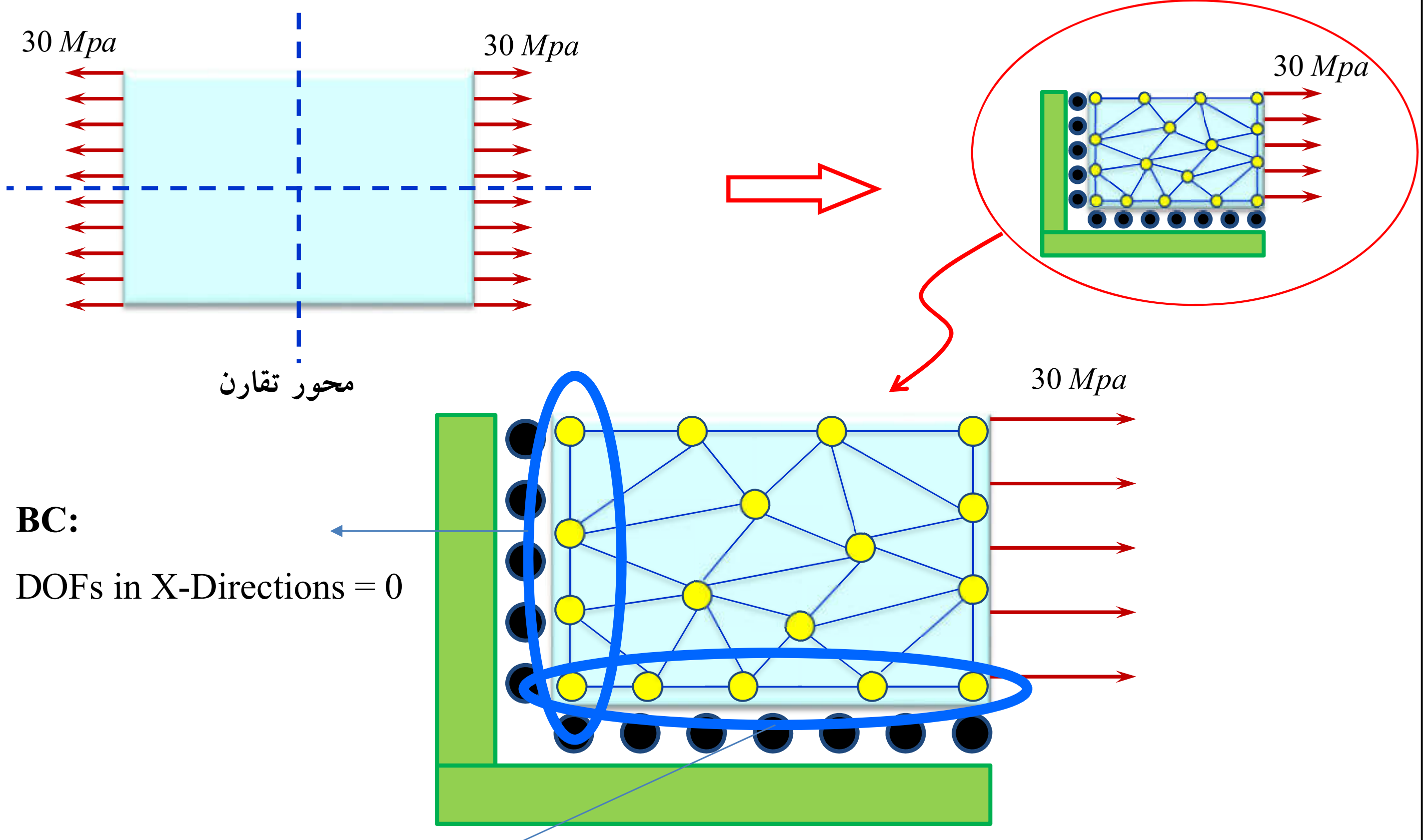
$\boldsymbol{\theta}^e \in \mathbb{R}^6$: بردار نیروی حرارتی در المان مثلثی

با جایگذاری رابطه (39) در (74) خواهیم داشت مقدار تنش در حالت وجود تغییرات دمایی برابر است با:

$$(39) \rightarrow (74) \quad \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}(\mathbf{B}^e \mathbf{Q}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0)} \quad (80)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مدل سازی و شرایط مرزی (Problem Modeling and Boundary Conditions)



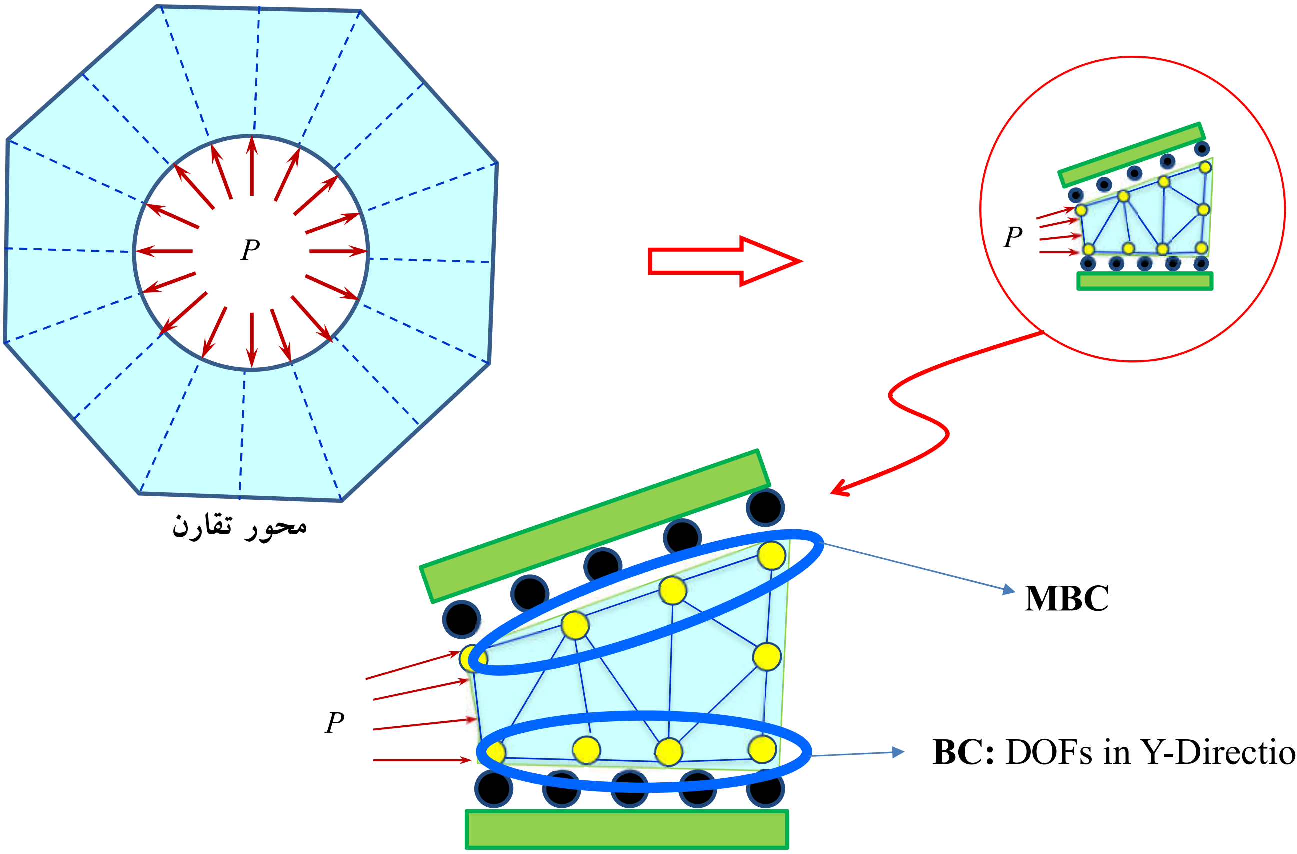
BC:

DOFs in X-Directions = 0

BC: DOFs in Y-Directions = 0

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مدل سازی و شرایط مرزی (Problem Modeling and Boundary Conditions)

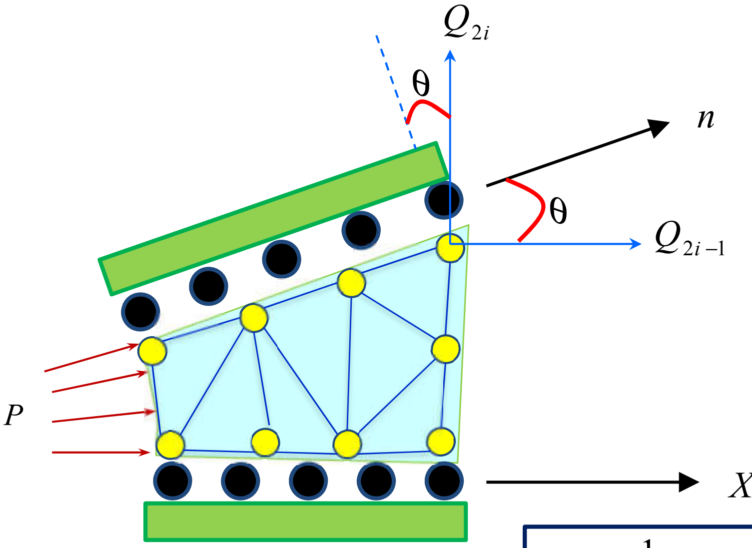


MBC

BC: DOFs in Y-Directions = 0

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

مدل سازی و شرایط مرزی (Problem Modeling and Boundary Conditions)



شرایط مرزی وابسته برای گره‌هایی که بر روی محور n قرار دارند به صورت زیر است:

$$\boxed{Q_{2i-1}\sin\theta - Q_{2i}\cos\theta = 0} \qquad (81)$$

با استفاده از روش انرژی و اعمال روش پنالتی معادله انرژی پتانسیل کل به صورت زیر نوشته می‌شود:

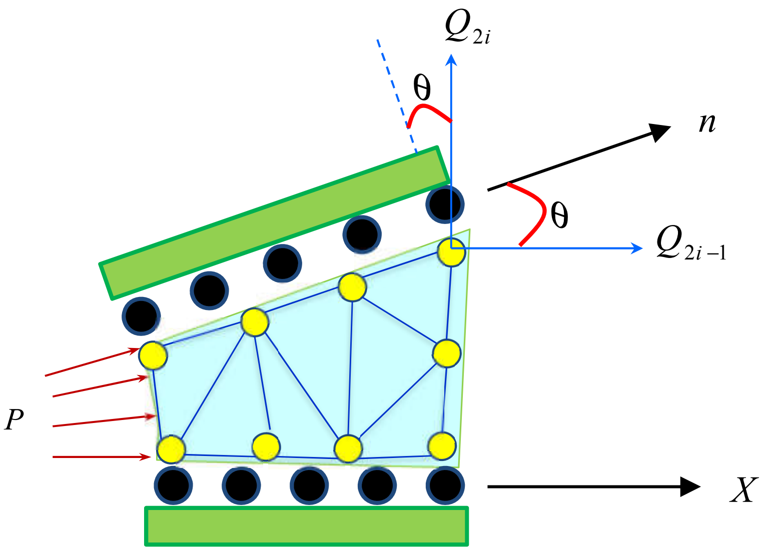
$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} + \frac{1}{2}C\,(Q_{2i-1}\sin\theta - Q_{2i}\cos\theta)^2} \qquad (82)$$

عبارتی که در رابطه (82) توان دوم دارد را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$\boxed{\frac{1}{2}C\,(Q_{2i-1}\sin\theta - Q_{2i}\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}\{Q_{2i-1} \quad Q_{2i}\}\begin{bmatrix} C\sin^2\theta & -C\sin\theta\cos\theta \\ -C\sin\theta\cos\theta & C\cos^2\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_{2i-1} \\ Q_{2i} \end{Bmatrix}} \qquad (83)$$

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

مدل سازی و شرایط مرزی (Problem Modeling and Boundary Conditions)



براساس رابطه (83) ماتریس اصلاح سختی به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\begin{bmatrix} C\sin^2\theta & -C\sin\theta\cos\theta \\ -C\sin\theta\cos\theta & C\cos^2\theta \end{bmatrix}} \qquad (84)$$

ماتریس اصلاح سختی را می توان مستقیم از روابط (L04-109) هم به دست آورد:

$$\begin{matrix} Q_{2i-1}\sin\theta - Q_{2i}\cos\theta = 0 \\ \beta_1 Q_{p_1} + \beta_2 Q_{p_2} = \beta_0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\beta_1 = \sin\theta \quad , \quad \beta_2 = -\cos\theta \quad , \quad \beta_0 = 0} \qquad (85)$$

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

مدل سازی و شرایط مرزی (Problem Modeling and Boundary Conditions)

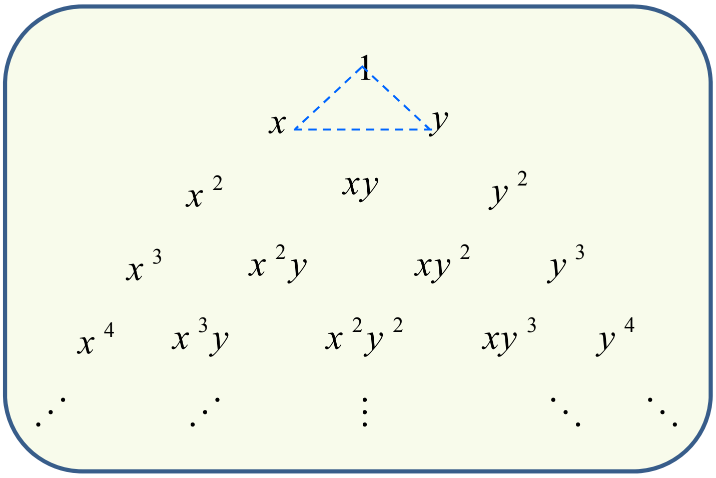
هنگام تقسیم یک ناحیه به مثلث‌ها، از نسبت‌های ابعادی بزرگ خود داری کنید. نسبت ابعادی به عنوان نسبت حداکثر به حداقل ابعاد مشخصه تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که بهترین المان‌ها، المان‌هایی هستند که به پیکربندی مثلثی متساوی‌الاضلاع نزدیک می‌شوند. چنین پیکربندی‌هایی معمولا امکان‌پذیر نیستند. یک روش خوب می‌تواند انتخاب زوایای گوشه در محدوده ۳۰ درجه تا ۱۲۰ درجه باشد. در مسائلی که تنش‌ها در یک ناحیه به طور گسترده تغییر می‌کنند، مانند محل اتصال دیوار برشی به شالوده، شیارها و سوراخ‌ها، روش مطلوب آن است که اندازه المان‌ها در آن ناحیه را کاهش دهیم تا تغییرات تنش را در نظر بگیریم. به طور خاص، المان مثلثی کرنش ثابت (CST)، تنش‌های ثابتی را روی المان ایجاد می‌کند. این نشان می‌دهد که المان‌های کوچک‌تر، توزیع تنش را بهتر نشان می‌دهند.

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

المان‌های کامل مثلثی با درجات بالاتر

المان مثلثی کامل در مرتبه‌های مختلف یه صورت زیر نشان داده می‌شود:

مثلث پاسکال (Pascal's Triangle)



1

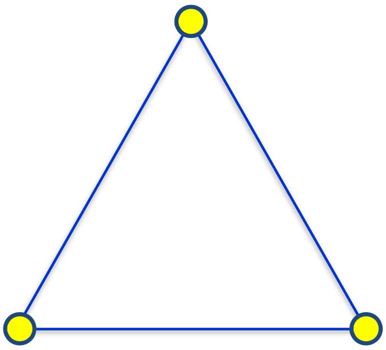
$x \quad y$

$x^2 \quad xy \quad y^2$

$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$

$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$

$\cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots$



المان مثلثی سه گرهی کامل درجه یک

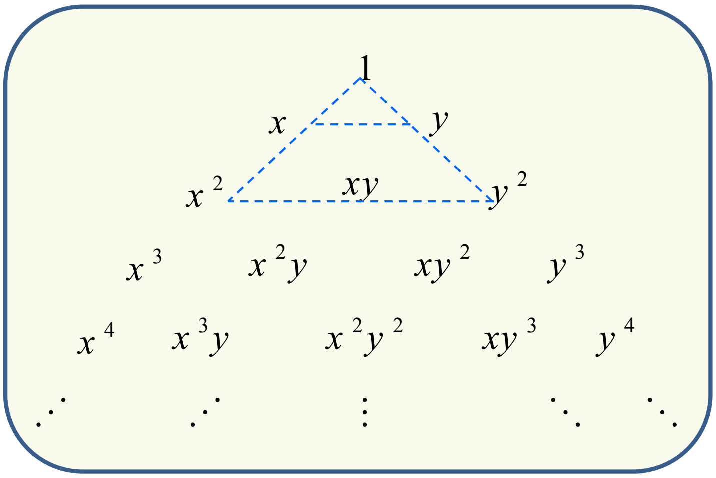
$$\boxed{u(X,Y)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y} \quad (88)$$

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

المان‌های کامل مثلثی با درجات بالاتر

المان مثلثی کامل در مرتبه‌های مختلف یه صورت زیر نشان داده می‌شود:

مثلث پاسکال (Pascal's Triangle)



1

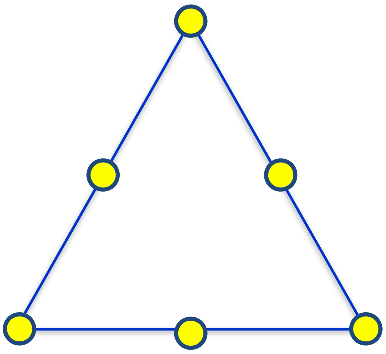
$x \quad y$

$x^2 \quad xy \quad y^2$

$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$

$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$

$\cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots$



المان مثلثی شش گرهی کامل درجه دو

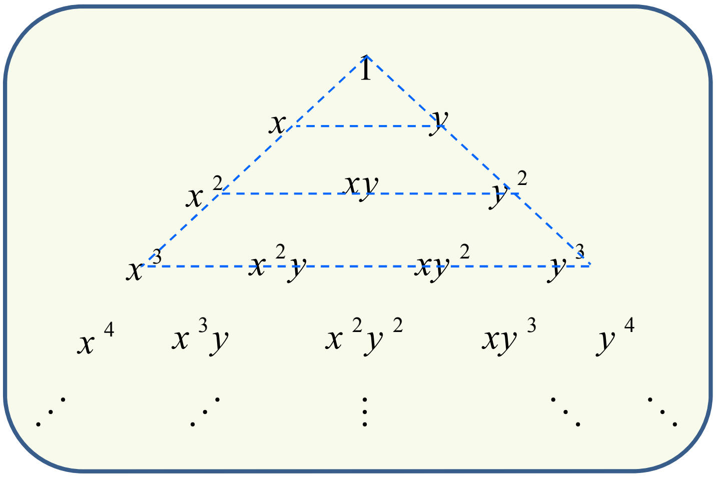
$$\boxed{u(X,Y)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 x^2+\alpha_4 xy+\alpha_5 y^2} \quad (89)$$

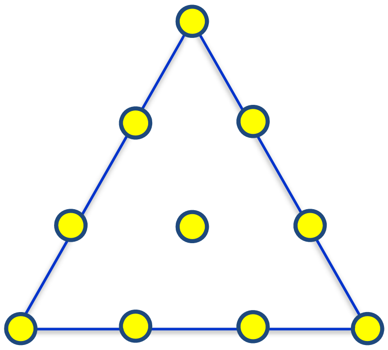
مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

المان‌های کامل مثلثی با درجات بالاتر

المان مثلثی کامل در مرتبه‌های مختلف یه صورت زیر نشان داده می‌شود:

مثلث پاسکال (Pascal's Triangle)





المان مثلثی ده گرهی کامل درجه سه

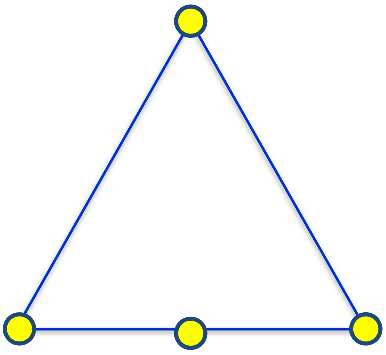
$$\boxed{u(X,Y)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3x^2+\alpha_4xy+\alpha_5y^2+\alpha_6x^3+\alpha_7x^2y+\alpha_8xy^2+\alpha_9y^3} \quad (91)$$

نرم‌افزارهای ANSYS و ADINA المان مثلثی کامل درجه دارد این در حالی است که نرم‌افزارهای SAP و ETABS فاقد المان مثلثی کامل درجه دوم می‌باشند.

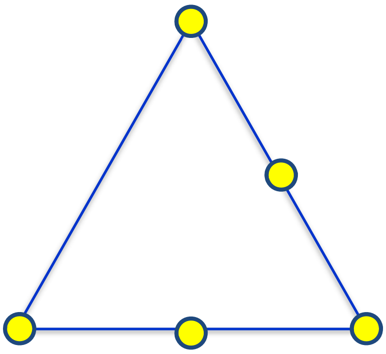
مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

المان‌های ناقص (انتقال) مثلثی با درجات بالاتر

انواع المان مثلثی انتقالی (Transition Element) در شکل زیر نشان داده شده است:



المان مثلثی چهار گرهی

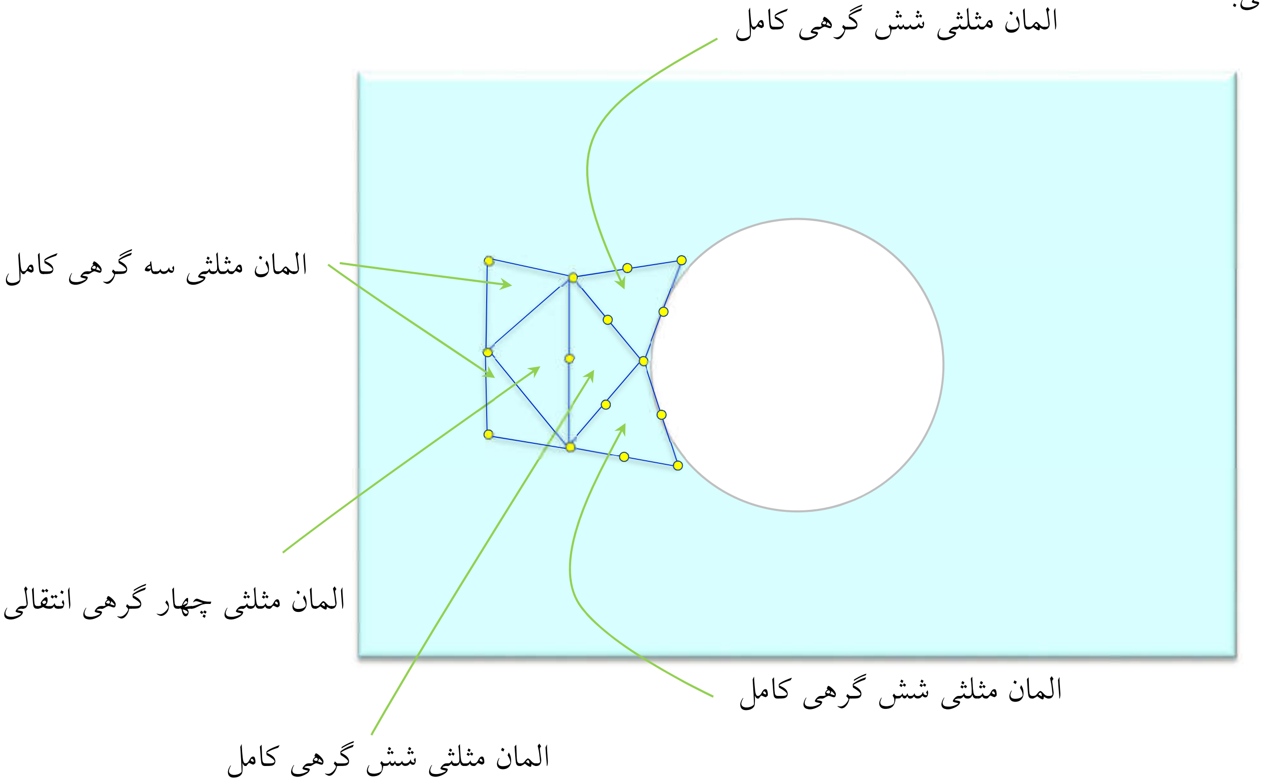


المان مثلثی پنج گرهی

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

المان‌های ناقص (انتقال) مثلثی با درجات بالاتر

در هنگام مش‌بندی برای استفاده همزمان از المان‌های کامل با درجات مختلف حتما نیاز به استفاده از المان‌های انتقالی (ناقص) می‌باشد.



المان مثلثی شش گرهی کامل

المان مثلثی سه گرهی کامل

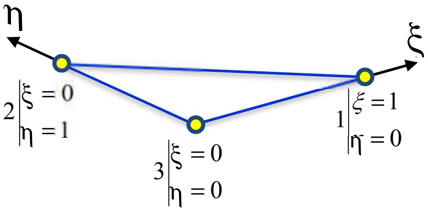
المان مثلثی چهار گرهی انتقالی

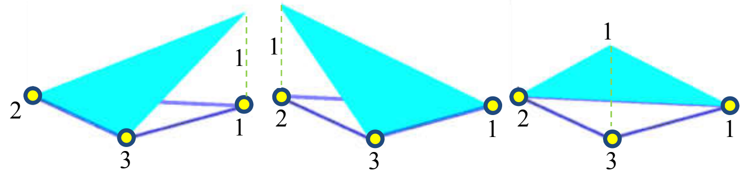
المان مثلثی شش گرهی کامل

المان مثلثی شش گرهی کامل

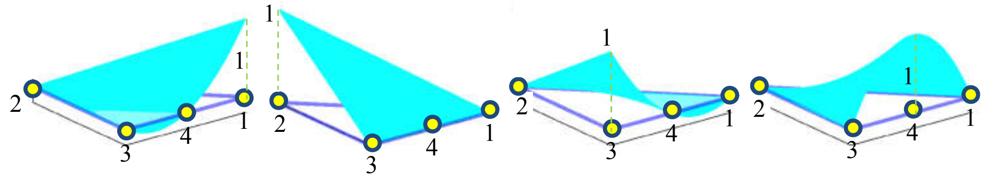
مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

توابع شکل المان مثلثی در حالت کلی

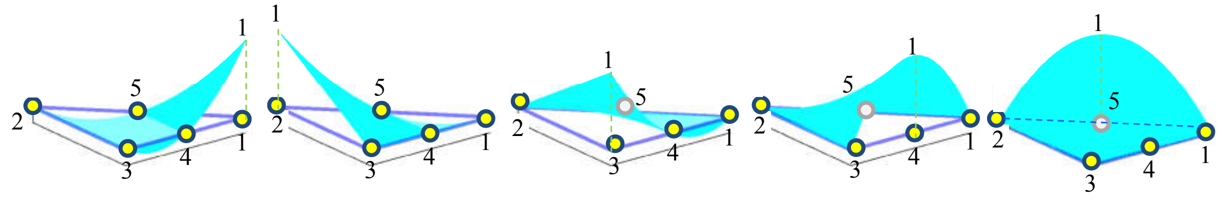




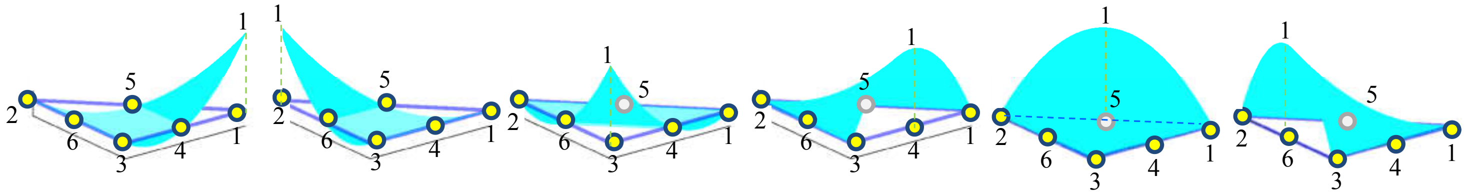
$N_1^{(3)} = \xi$ $\quad$ $N_2^{(3)} = \eta$ $\quad$ $N_3^{(3)} = 1 - \xi - \eta$



$N_1^{(4)} = N_1^{(3)} - \frac{1}{2} N_4^{(4)}$ $\quad$ $N_2^{(4)} = N_2^{(3)}$ $\quad$ $N_3^{(4)} = N_3^{(3)} - \frac{1}{2} N_4^{(4)}$ $\quad$ $N_4^{(4)} = 4 N_1^{(3)} N_3^{(3)}$



$N_1^{(5)} = N_1^{(3)} - \frac{1}{2}(N_4^{(4)} + N_5^{(5)})$ $\quad$ $N_2^{(5)} = N_2^{(3)} - \frac{1}{2} N_5^{(5)}$ $\quad$ $N_3^{(5)} = N_3^{(3)} - \frac{1}{2} N_4^{(4)}$ $\quad$ $N_4^{(5)} = N_4^{(4)}$ $\quad$ $N_5^{(5)} = 4 N_1^{(3)} N_2^{(3)}$



$N_1^{(6)} = N_1^{(5)}$ $\quad$ $N_2^{(6)} = N_2^{(3)} - \frac{1}{2}(N_5^{(5)} + N_6^{(6)})$ $\quad$ $N_3^{(6)} = N_3^{(3)} - \frac{1}{2}(N_4^{(4)} + N_6^{(6)})$ $\quad$ $N_4^{(6)} = N_4^{(4)}$ $\quad$ $N_5^{(6)} = N_5^{(5)}$ $\quad$ $N_6^{(6)} = 4 N_2^{(3)} N_3^{(3)}$

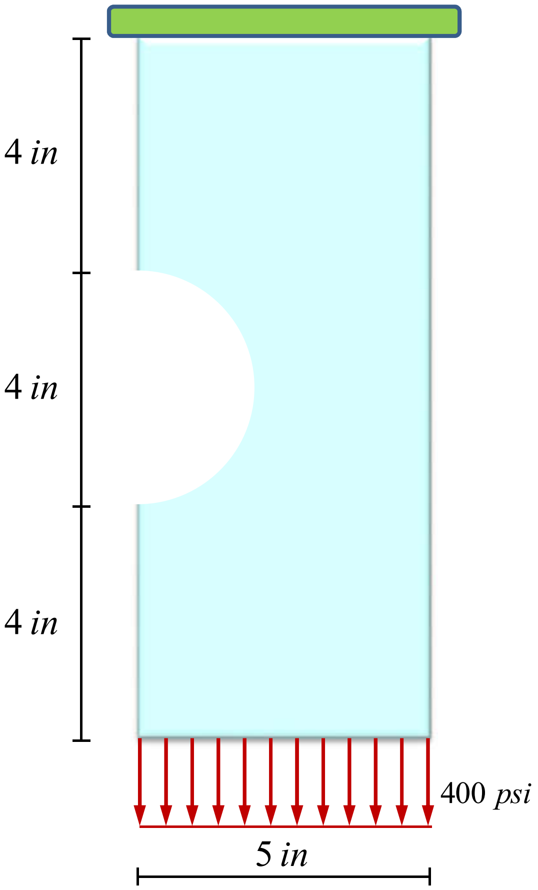
مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

مثال ۵– صفحه نشان داده شده تحت اثر بار گسترده 400 psi قرار دارد. مطلوب است آنالیز این صفحه با فرض در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای.

$$(Thickness) \quad t = 0.4\ in$$

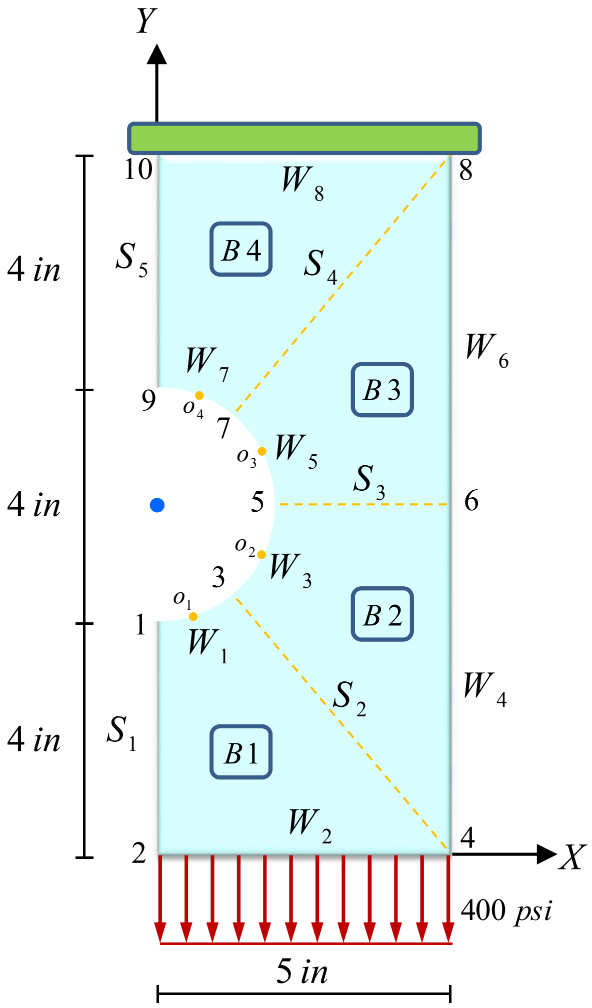
$$E = 30\times10^{6}\ psi$$

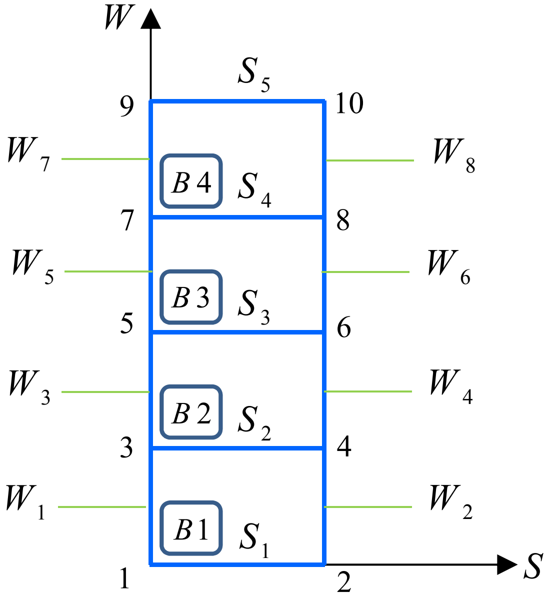
$$\nu = 0.3$$



مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۵– تشکیل دیاگرام بلوکی



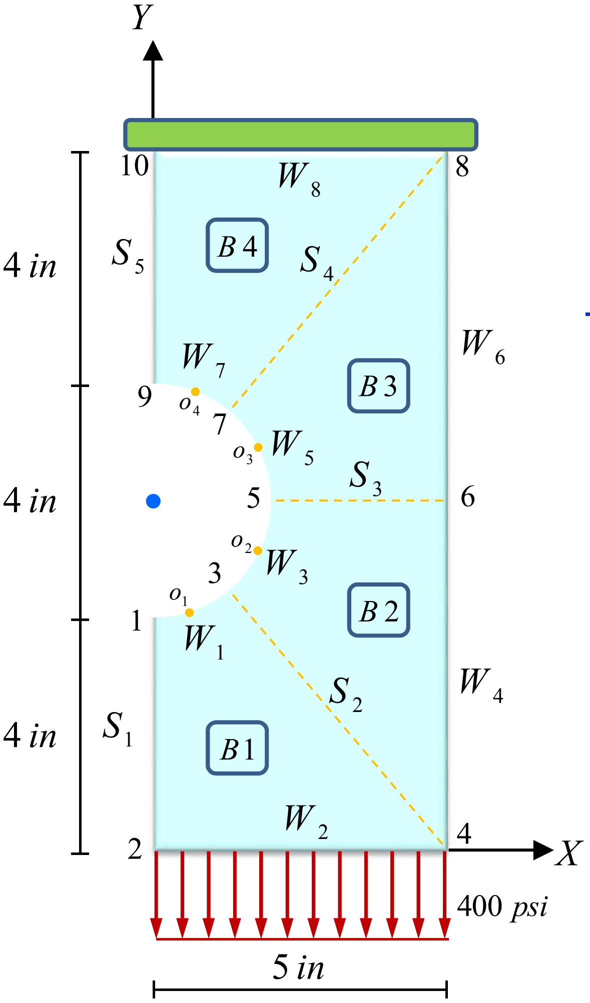


o_i: نقاط میانی ضلع‌هایی که منحنی شکل می‌باشند.

Number of S-Spans = 1

Number of W-Spans = 4

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۵– تعیین مختصات نقاط گوشه هریک از بلوک‌ها

Block Corner DATA

Corner No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X\ (in)$	0	0	1.4142	5	2	5	1.4142	5	0	0
$Y\ (in)$	4	0	4.5858	0	6	6	7.4142	12	8	12

Midpoint DATA

Midpoint	W – Side	$X\ (in)$	$Y\ (in)$
o_1	1	0.7654	4.1522
o_2	3	1.8478	5.2346
o_3	5	1.8478	6.7654
o_4	7	0.7654	7.8478

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

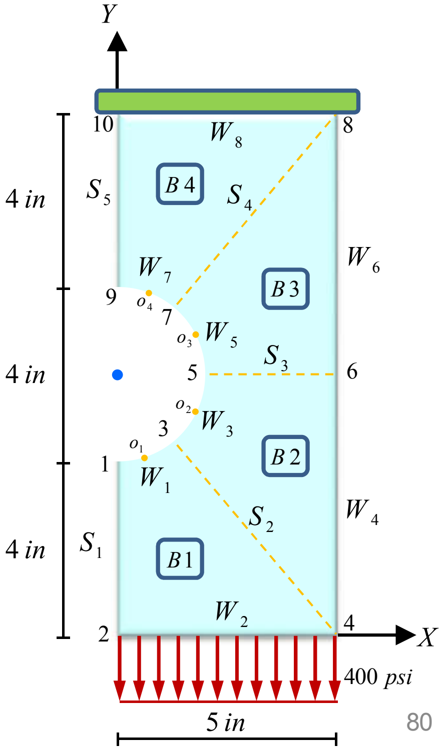
پاسخ مثال ۵– نام فایل برنامه: meshgen.m

نام فایل ورودی: L06EX05MeshgenInput.txt

نام فایل خروجی: L06EX05MeshgenOutput.txt

L06EX05MeshgenInput.txt

```
Mesh Generation
Example 6.5
Number of Nodes per Element <3 or 4>
  3
BLOCK DATA
#S-Spans(NS)  #W-Spans(NW)  #PairsOfEdgesMergedNSJ)
  1         4          0
SPAN DATA
S-Span#  Num-Divisions  (for each S-Span/ Single division = 1)
  1      3
W-Span#  Num-Divisions  (for each W-Span/ Single division = 1)
  1       2
  2       2
  3       2
  4       2
BLOCK MATERIAL DATA (for Material Number other than 1)
Block#   Material  (Void => 0   Block# = 0 completes this data)
  0
BLOCK CORNER DATA
Corner#  X-Coord   Y-Coord (Corner# = 0 completes this data)
  1     0        4
  2     0        0
  3     1.4142    4.5858
  4     5        0
.
.
.
```



مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۵–

نام فایل برنامه: meshgen.m

نام فایل ورودی: L06EX05MeshgenInput.txt

نام فایل خروجی: L06EX05MeshgenOutput.txt

L06EX05MeshgenInput.txt

```
.
.
.
 5    2      6
 6    5      6
 7    1.4142   7.4142
 8    5      12
 9    0      8
 10    0      12
 0
MID POINT DATA FOR CURVED OR GRADED SIDES
S-Side#  X-Coord   Y-Coord (Side# = 0 completes this data)
 0
W-Side#  X-Coord   Y-Coord (Side# = 0 completes this data)
 1     0.7654    4.1522
 3     1.8478    5.2346
 5     1.8478    6.7654
 7     0.7654    7.8478
 0
MERGING SIDES (Node1 is the lower number)
Pair#  Side1Node1  Side1Node2   Side2Node1  Side2node2
```

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۵–

نام فایل برنامه: meshgen.m

نام فایل ورودی: L06EX05MeshgenInput.txt

نام فایل خروجی: L06EX05MeshgenOutput.txt

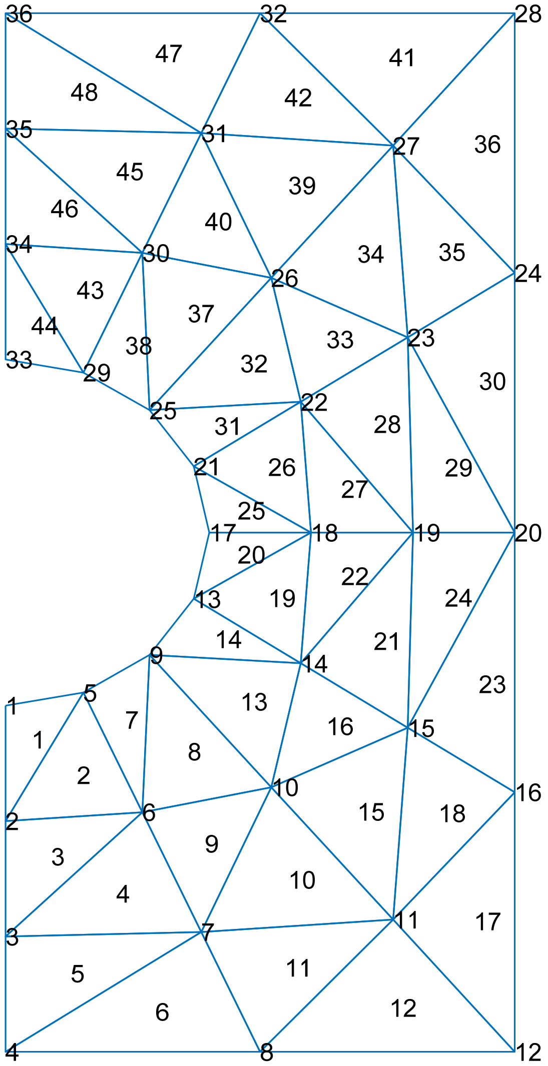
برنامه برای این بخش داده‌ای تولید نمی‌کند خود

ما بعدا این اطلاعات را باید وارد کنیم.

L06EX05MeshgenOutput.txt

```
Program MESHGEN - CHANDRUPATLA & BELEGUNDU
Example 6.5
  NN   NE   NM  NDIM  NEN  NDN
   36   48    1     2      3     2
   ND   NL   NMPC
    0    0    0
 Node#        X                  Y
    1    0.00000e+00    4.00000e+00
    2    0.00000e+00    2.66667e+00
    3    0.00000e+00    1.33333e+00
    .
    .
    .
36    0.00000e+00     1.20000e+01
 Elem#    Node1   Node2   Node3          Mat#
    1       1       2       5       1
    2       6       5       2       1
    3       2       3       6       1
    4       7       6       3       1
    .
    .
    .
    48      36      35      31       1
```

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۵– نام فایل برنامه: plot2d.m

نام فایل ورودی: L06EX05MeshgenOutput.txt

مسائل دو بُعدی – المان مثلثی CST

L06EX05CST2Input.txt

```
Program MESHGEN - CHANDRUPATLA & BELEGUNDU
Example 6.5
 NN   NE   NM  NDIM  NEN  NDN
  36   48    1    2    3    2
 ND NL NCH NPR NMPC
  6  3  2   3   0
Node#       X          Y
   1    0.00000e+00    4.00000e+00
   2    0.00000e+00    2.66667e+00
   3    0.00000e+00    1.33333e+00
   4    0.00000e+00    0.00000e+00
  .
  .
  .
  36    0.00000e+00    1.20000e+01
Elem#    Node1   Node2   Node3         Mat#  Thickness  TempRise (NCH=2 El Char: Th, Temp)
   1       1       2       5       1      0.4      0
   2       6       5       2       1      0.4      0
   3       2       3       6       1      0.4      0
  .
  .
  .
  48      36      35      31       1      0.4      0
DOF#  Displacement
55    0
56    0
63    0
64    0
71    0
72    0
  .
  .
  .
```

پاسخ مثال ۵–

نام فایل برنامه: cst2n.m

نام فایل ورودی: L06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: RL06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: L06EX05ElementStress.txt

بخشی از اطلاعات این فایل را با توجه به مسئله و بخش دیگر را از خروجی فایل L06EX05MeshgenOutput.txt (آبی رنگ) استفاده می‌کنیم.

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۵-

نام فایل برنامه: cst2n.m

نام فایل ورودی: L06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: RL06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: L06EX05ElementStress.txt

L06EX05CST2Input.txt

```
   .
   .
   .
DOF#  Load
 8   -200
 16   -400
 24   -200
MAT#  PROP1  PROP2  PROP3
 1    30E6   .3    12E-6
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```

بخشی از اطلاعات این فایل را با توجه به مسئله و بخش دیگر را از خروجی فایل L06EX05MeshgenOutput.txt استفاده می‌کنیم.

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۵-

نام فایل برنامه: cst2n.m

نام فایل ورودی: L06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: RL06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: L06EX05ElementStress.txt

RL06EX05CST2Input.txt

```
Output for Input Data from file L06EX05CST2Input.txt
Example 6.5

Plane Stress Analysis
 Node#   X-Displ        Y-Displ
   1    1.4049E-004   -3.6608E-004
   2    2.2849E-004   -3.7428E-004
   3    3.1457E-004   -3.8900E-004
   4    4.0092E-004   -4.0645E-004
   5    1.3026E-004   -3.0777E-004
   6    2.1740E-004   -2.8036E-004
   .
   .
   .
  72     2.1332E+002
ELEM#        SX              SY               TXY              S1                S2          ANGLE SX-->S1
   1  5.32306E+001   2.00515E+002   1.03313E+002   2.53746E+002  -3.83693E-013  -1.52741E+002
   2  -2.17537E+001  2.66829E+002   5.58200E+001   2.77250E+002  -3.21745E+001  -1.69425E+002
   3  -2.26547E+000  3.30398E+002   5.20169E+001   3.38342E+002  -1.02094E+001  -1.71317E+002
   .
   .
   .
  48   1.86344E+001   4.11123E+002  -7.64921E+001   4.25504E+002   4.25380E+000  -1.06474E+001
```

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۵–

نام فایل برنامه: cst2n.m

نام فایل ورودی: L06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: RL06EX05CST2Input.txt

نام فایل خروجی: L06EX05ElementStress.txt

L06EX05ElementStress.txt

```
Max. in-plane Shear Stress (or Von Mises)
 1.26873E+002
 1.54712E+002
 1.74276E+002
 2.17085E+002
 2.05608E+002
 2.26134E+002
 3.70914E+002
 2.93017E+002
 2.55386E+002
 2.69283E+002
 2.33790E+002
   .
   .
   .
 2.10625E+002
```

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST

پاسخ مثال ۵–

نام فایل برنامه: bestfit.m

نام فایل‌های ورودی:

L06EX05MeshgenOutput.txt

L06EX05ElementStress.txt

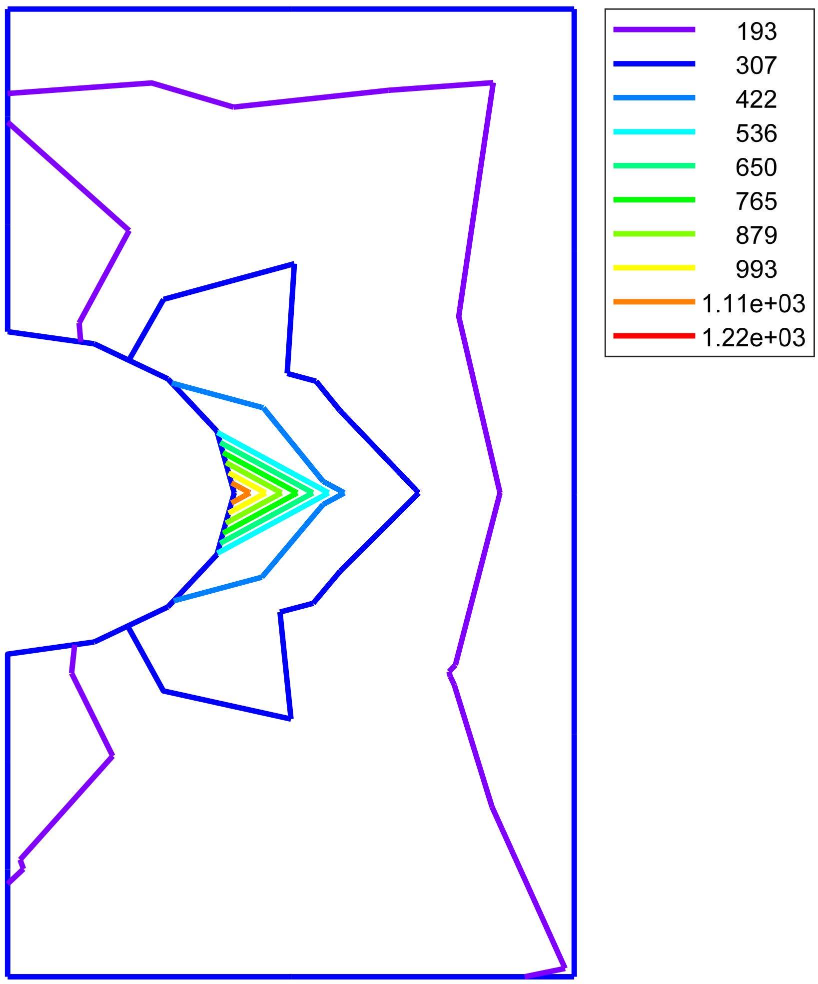
نام فایل خروجی:

L06EX05NodalStress.txt

L06EX05NodalStress.txt

```
Nodal Values for Data in Files L06EX05MeshgenOutput.txt and L06EX05ElementStress.txt
88.752567
106.618110
189.429337
215.001398
223.368756
231.508264
236.845536
212.623638
408.569045
297.091479
250.611883
188.700640
521.141211
  .
  .
  .
299.730316
230.690042
136.750926
213.869897
218.004713
203.060112
119.840956
81.288274
93.597555
198.298258
172.975835
```

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۵-

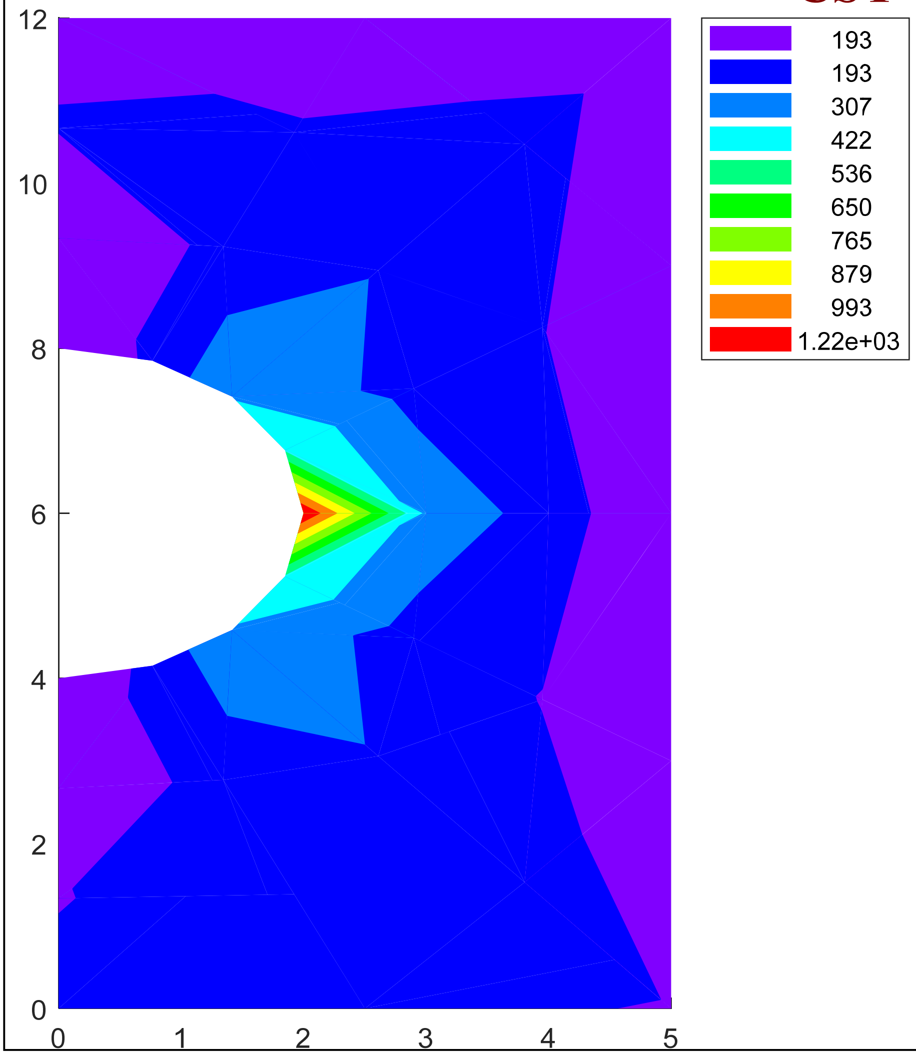
نام فایل برنامه: contourA.m

نام فایل‌های ورودی:

L06EX05MeshgenOutput.txt

L06EX05NodalStress.txt

مسائل دو بُعدی- المان مثلثی CST



پاسخ مثال ۵-

نام فایل برنامه: contourB.m

نام فایل‌های ورودی:

L06EX05MeshgenOutput.txt

L06EX05NodalStress.txt