دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

روش المان محدود

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مقدمه (Introduction)

در این فصل از روابط انرژی پتانسیل کل، تنش-کرنش و کرنش-جابجایی در توسعه روش اجزای محدود برای مسائل یک بعدی استفاده می شود. شایان ذکر است رویه اصلی برای مسائل دو و سه بعدی که بعدا مورد بحث قرار می گیرد یکسان است. در مسائل یک بعدی پارامترهای تنش، کرنش، جابجایی و بارگذاری فقط به متغیر x بستگی دارد. به عبارت دیگر بردارهای **u** ، **σ** ، **ε** ، **P** ، **T** و **f** در لکچر اول اکنون به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{u}=u_{(x)} & \mathbf{P}=P_{(x)} \\ \boldsymbol{\sigma}=\sigma_{(x)} & \mathbf{T}=T_{(x)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_{(x)} & \mathbf{f}=f_{(x)} \end{array}} \quad (1)$$

علاوه بر این روابط تنش-کرنش و کرنش-جابجایی در حالت یک بُعدی برابر است با:

$$\boxed{\sigma_{(x)}=E\varepsilon_{(x)} \quad \varepsilon_{(x)}=\frac{du_{(x)}}{dx}} \quad (2)$$

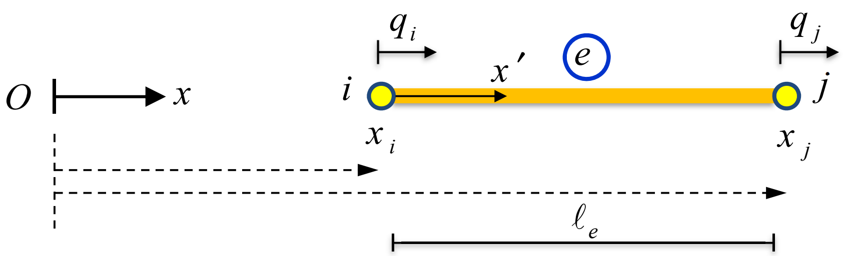
در مسائل یک بُعدی، جز دیفرانسیل حجم d_V را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{d_V = A\,dx} \quad (3)$$

A: مساحت سطح مقطع المان

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

المان یک بُعدی (One Dimensional Element)



در مدل المان محدود، هر المان دارای دو گره در ابتدا و انتها می‌باشد.

در مسائل یک بعدی هر گره یک درجه آزادی در راستای طولی المان دارد.

x': دستگاه مختصات محلی (Local Coordinate) که به المان متصل بوده به طوری که اگر المان در سازه هر گونه جهتگیری داشته باشد این دستگاه مختصات نیز همان جهتگیری را خواهد داشت به عبارت دیگر راستا و جهت ثابتی ندارد.

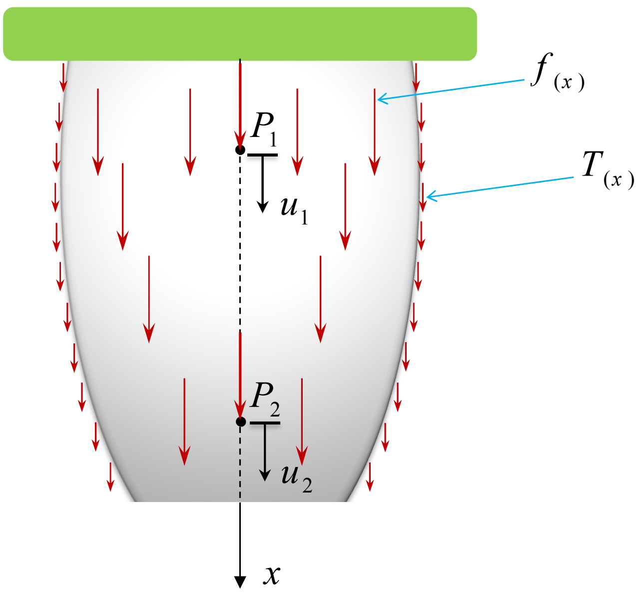
q_i و q_j جابجایی گرهی در مختصات محلی می‌باشند.

x: دستگاه مختصات کلی (Global Coordinate) برای کل سیستم تعریف می‌شود و همواره مکان، راستا و جهت ثابتی دارد.

x_i و x_j مختصات گرهی در مختصات کلی می‌باشند.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مدل‌سازی المان محدود (Finite Element Modeling)



$f_{(x)}$: نیروی حجمی مانند نیروی وزن و نیروی ناشی از میدان مغناطیسی (واحد نیروی حجمی نیرو در واحد حجم است)

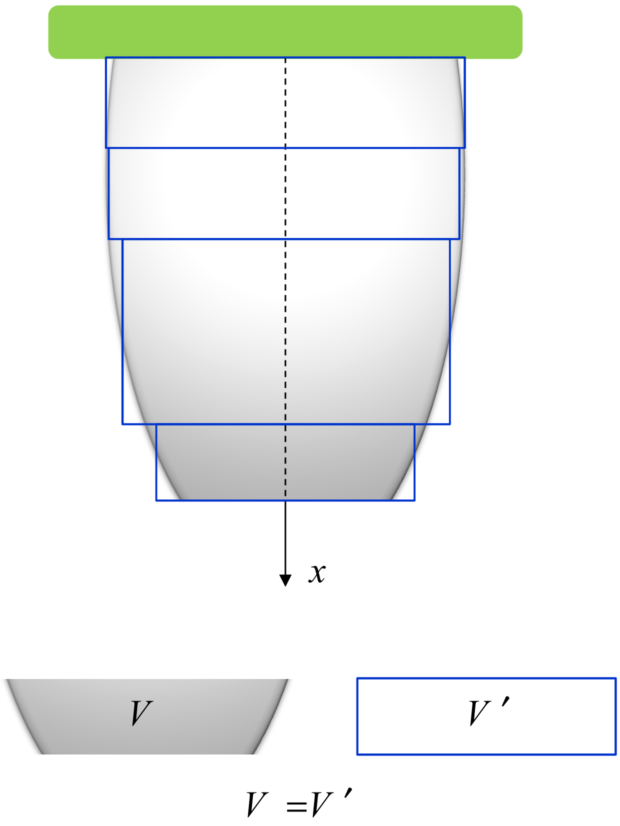
$T_{(x)}$: نیروی سطحی مانند نیروی ناشی از اصطکاک، نیروی کشش ویسکوز و نیروی برش سطحی (در حالت یک بُعدی واحد نیروی سطحی نیرو در واحد طول است)

P_i: نیروی متمرکز در نقطه i.

u_i: جابجایی در راستای x در نقطه i.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

تقسیم‌بندی المان (Element Division)



گام اول میله را به صورت پلکانی، متشکل از تعدادی گسسته از المان‌ها که هر یک دارای سطح مقطع یکنواخت هستند، مدل سازی کنیم.

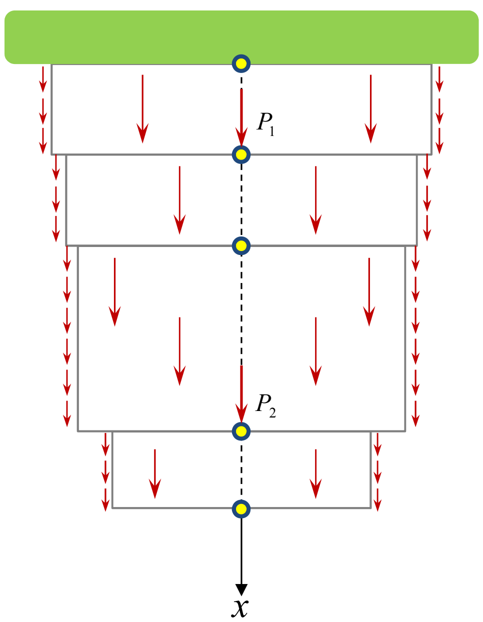
سطح مقطع هر المان ثابت است. در هر المان میانگین سطح مقطع در طول ناحیه به عنوان مساحت ثابت برای کل المان در نظر گرفته می‌شود.

محل در نظر گرفتن المان‌ها:

- محل اثر بار متمرکز
- تغییر ناگهانی در سطح مقطع
- تغییر در جنس المان
- حجم المان با حجم بخش متناظر با میله باید برابر باشد.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

تقسیم‌بندی المان (Element Division)



در اینجا از ۴ المان برای مدل سازی استفاده شده است.

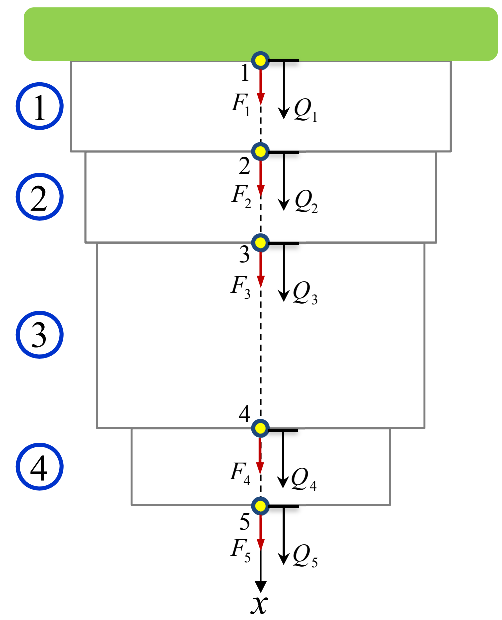
در مدل المان محدود، هر المان دو گره را به هم متصل می‌کند

در هر سطح مقطع نیروهای سطحی و حجمی در طول هر المان ثابت فرض می‌شود. با این وجود نیروها و سطح مقطع می‌تواند از یک المان به المان دیگر متفاوت باشد.

تقریب بهتر از مسئله با افزایش تعداد المان‌ها حاصل می‌شود.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

الگوی شماره گذاری (Numbering Scheme)



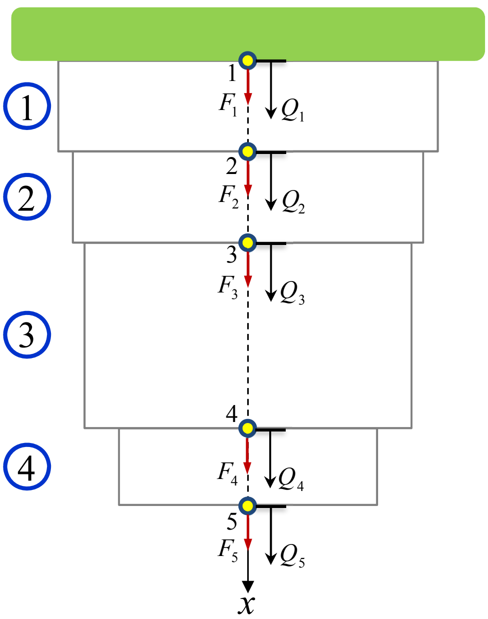
شماره هر المان داخل یک دایره و نزدیک المان نوشته می‌شود.

گره المان‌ها از بالا به پایین (یا برعکس) شماره گذاری می‌گردد.

F_i: نیروهای گرهی المان که اثر تمامی نیروهای وارد بر المان شامل نیروهای حجمی، سطحی و متمرکز شامل می‌شود.

Q_i: جابجایی گرهی المان در مختصات کلی است. در حالت یک بعدی جابجایی گرهی در مختصات کلی همان جابجایی گرهی در مختصات محلی می‌باشد.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)



الگوی شماره گذاری (Numbering Scheme)

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^5$ بردار تغییر مکان‌های گرهی سازه‌ای در مختصات کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5\}^T} \quad (4)$$

$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^5$ بردار نیروهای گرهی سازه‌ای در مختصات کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{F} = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5\}^T} \quad (5)$$

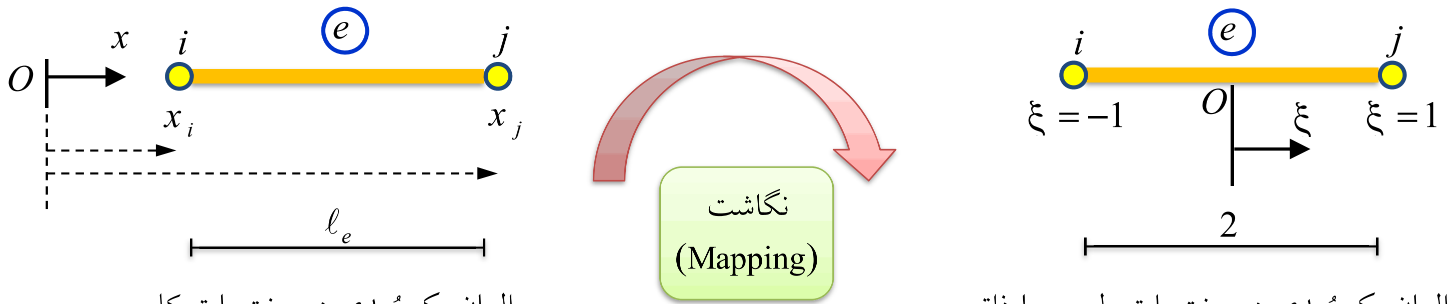
به منظور تعیین سیستماتیک ارتباط المان‌ها با یکدیگر جدولی تحت عنوان جدول ارتباط المان‌ها (Element Connectivity) به صورت مقابل ساخته می‌شود:

شماره المان e	شماره گره i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

به منظور تسهیل در بررسی المان‌ها، به وسیله یک نگاشت مختصات کلی به مختصات ذاتی انتقال می‌یابد. ما از این سیستم مختصات در تعریف توابع شکل استفاده می کنیم که در درونیابی میدان جابجایی استفاده می شود.



المان یک بُعدی در مختصات کلی
(Global Coordinate)

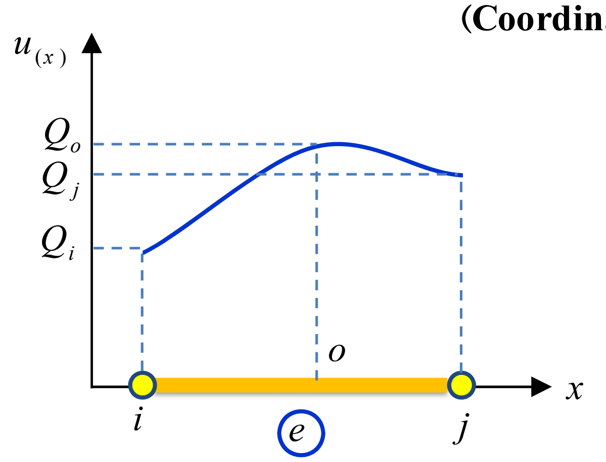
المان یک بُعدی در مختصات طبیعی یا ذاتی
(Natural or Intrinsic Coordinate)

رابطه بین مختصات x و ξ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

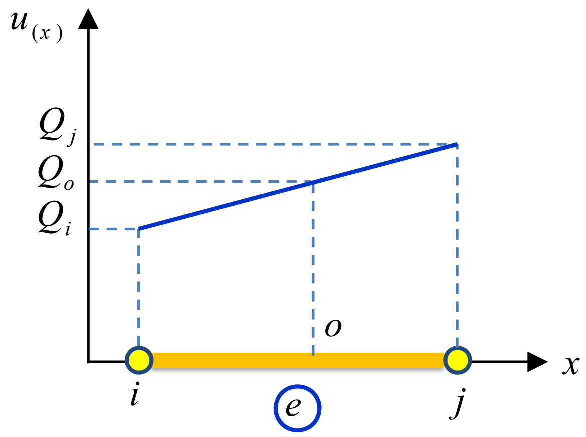
$$\boxed{\xi=\frac{2}{\ell_e}(x-x_i)-1} \quad (6)$$

زمانی که مختصات x از x_i تا x_j تغییر می‌کند مختصات ξ از 1- تا 1 تغییر خواهد کرد.

در کل توابع شکل در المان‌ها، در مختصات طبیعی تعریف می‌شوند تا تغییر نکنند. یک بار در برنامه‌نویسی کامپیوتری توابع شکل را انتخاب کرده و تا آخر ثابت باقی می‌مانند.



شکل روبه رو نمودار جابجایی نقاط مختلف المان در طول المان را نشان می‌دهد که مجهول می‌باشد. هدف تخمین زدن آن است. جابجایی گره‌های ابتدا و انتهای المان برابر با $u_{(x_i)}=Q_i$ و $u_{(x_j)}=Q_j$ می‌باشد.



اگر المان‌های در نظر گرفته شده برای یک مسئله به اندازه کافی کوچک باشد با تقریب خوبی می‌توان تغییرات جابجایی در طول المان را به صورت خطی فرض کرد.

چون تغییرات خطی فرض شده است بنابراین می‌توان به سادگی از یک درون‌یابی برای به دست آوردن جابجایی در هر نقطه دلخواه مانند $u_{(x_o)}=Q_o$ استفاده کرد. برای این منظور از دو تابع شکل خطی استفاده می‌گردد.

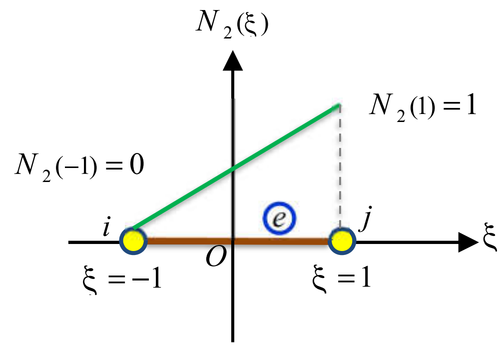
مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

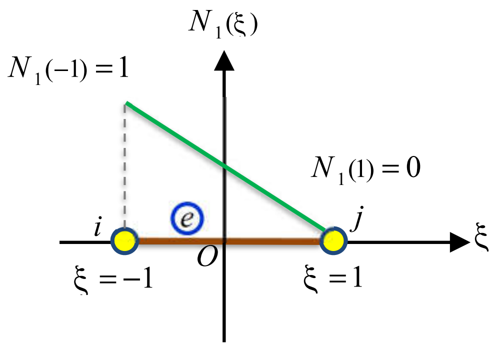
دو تابع شکل خطی برحسب ξ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\boxed{N_1(\xi)=\frac{1-\xi}{2} \quad , \quad N_2(\xi)=\frac{1+\xi}{2}} \qquad (7)$$

نمودار توابع شکل به صورت زیر رسم می‌شود:



نمودار تابع شکل $N_2(x)$ بر روی المان خطی یک بعدی



نمودار تابع شکل $N_1(\xi)$ بر روی المان خطی یک بعدی

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

با استفاده از توابع شکل $N_1(\xi)$ و $N_2(\xi)$ جابجایی خطی نقاط موجود بر روی المان براساس جابجایی‌های گرهی نقاط ابتدا و انتها Q_i و Q_j به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{u_{(\xi)}=N_1(\xi)Q_i+N_2(\xi)Q_j} \qquad (8)$$

فرم ماتریسی رابطه (8) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{u_{(\xi)}=\mathbf{N}\mathbf{q}^e} \qquad (9)$$

که در آن

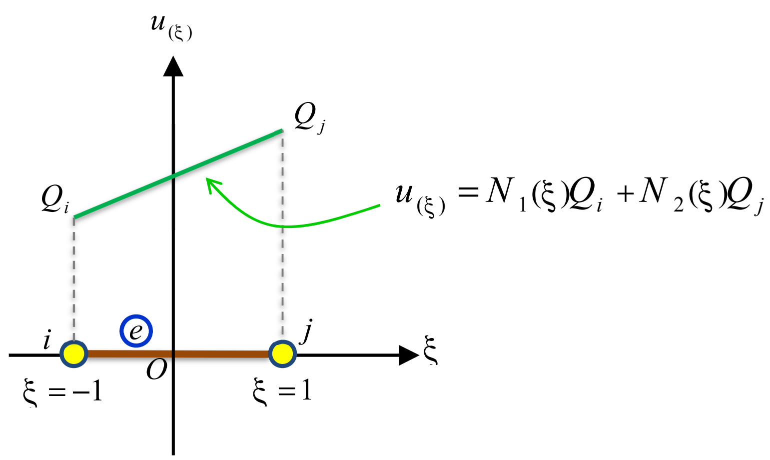
$$\boxed{\mathbf{q}^e=\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix}} \qquad (11)$$

$$\boxed{\mathbf{N}=\{N_1(\xi) \quad N_2(\xi)\}} \qquad (10)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

نمودار جابجایی خطی نقاط موجود بر روی المان براساس رابطه (8) در شکل زیر نشان داده شده است:



توابع شکل $N_1(\xi)$ و $N_2(\xi)$ به صورت خطی در نظر گرفته شد. می‌توان از توابع شکل چند جمله‌ای نیز استفاده کرد با این وجود در حالت کلی تابع شکل باید دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- مشتق اول در طول المان باید متناهی باشد.
- جابجایی در مرز المان باید به صورت پیوسته باشد.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

اگر در رابطه (6) مقدار x برحسب ξ نوشته شود خواهیم داشت:

$$(6) \overset{\ell_e = x_j - x_i}{\Rightarrow} \boxed{x = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)x_i + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)x_j} \quad (12)$$

با توجه به تعریف توابع شکل در رابطه (7) می‌توان نتیجه گرفت:

$$(7) \rightarrow (12) \quad \Rightarrow \boxed{x = N_1(\xi)x_i + N_2(\xi)x_j} \quad (13)$$

فرم ماتریسی رابطه (13) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{x_{(\xi)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^e} \quad (14)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{x}^e = \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix}} \quad (15)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

با مقایسه روابط (9) و (14)

$$\boxed{u_{(\xi)} = \mathbf{N}\mathbf{q}^e} \quad (9) \qquad\qquad \boxed{x_{(\xi)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^e} \quad (14)$$

ویژگی مکانیکی (تغییر شکل)
(Mechanical Properties)

ماتریس تبدیل خواص مکانیکی

ویژگی هندسی (مختصات)
(Geometric Properties)

ماتریس تبدیل خواص هندسی

می‌توان نتیجه گرفت که در اینجا ماتریس تبدیل خواص مکانیکی با ماتریس تبدیل ویژگی هندسی یکسان است. در فرمول‌بندی المان محدود ایزوپارامتریک (Isoperimetric Finite Element) ماتریس‌های تبدیل خواص مکانیکی و هندسی یکسان فرض می‌شود.

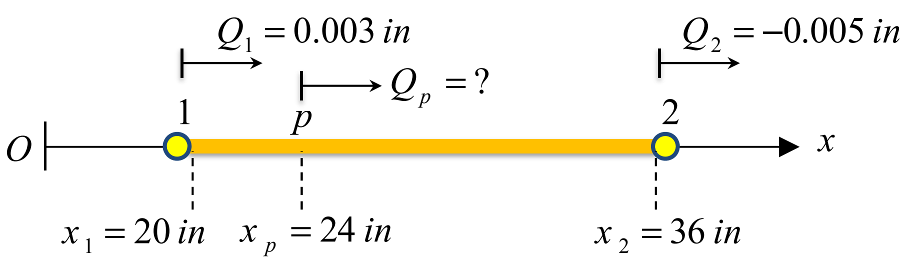
مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مختصات‌ها و توابع شکل (Coordinates and Shape Functions)

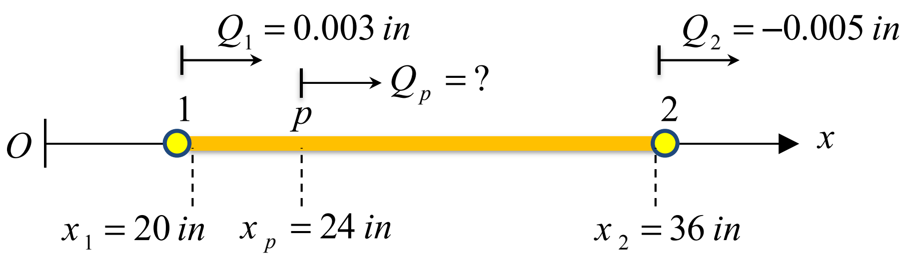
مثال ۱– در المان نشان داده شده مطلوب است:

الف– مقادیر ξ، N_1 و N_2 را در نقطه p محاسبه نمایید.

ب– اگر $Q_1 = 0.003\ in$ و $Q_2 = -0.005\ in$ باشد مطلوب است تعیین مقدار جابجایی در نقطه p.



مختصات‌ها و توابع شکل



پاسخ مثال ۱-

$$\boxed{\xi_p = -0.5} \quad (1.1)$$

$$\boxed{N_1(\xi_p) = 0.75} \quad (1.2)$$

$$\boxed{N_2(\xi_p) = 0.25} \quad (1.3)$$

$$\boxed{u_{(\xi_p)} = 0.001\ in} \quad (1.4)$$

رابطه تنش-کرنش در المان یک بُعدی

رابطه کرنش- جابجایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{(x)} = \frac{du_{(\xi)}}{dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{(x)} = \frac{du_{(\xi)}}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dx}} \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (7) در (8)

$$(7) \rightarrow (8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{(\xi)} = \frac{1-\xi}{2} Q_i + \frac{1+\xi}{2} Q_j} \quad (17)$$

با مشتق گیری از رابطه (17) نسبت به ξ خواهیم داشت:

$$(17) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du_{(\xi)}}{d\xi} = \frac{-Q_i + Q_j}{2}} \quad (18)$$

همچنین با مشتق‌گیری از ξ نسبت به x نتیجه می‌شود:

$$(6) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\ell_e}(x - x_1) - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{\ell_e}} \quad (19)$$

رابطه تنش-کرنش در المان یک بُعدی

با جایگذاری روابط (18) و (19) در رابطه (16) رابطه کرنش برحسب جابجایی‌های گرهی المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(18)\,\&\,(19) \rightarrow (16) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{(x)} = \frac{1}{\ell_e}(-Q_i + Q_j)} \quad (20)$$

فرم ماتریسی رابطه (20) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\varepsilon_{(x)} = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e} \quad (21)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{B}^e = \frac{1}{\ell_e}\{-1 \quad 1\} \quad , \quad \mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix}} \quad (22)$$

$\mathbf{B}^e$: ماتریس کرنش-جابجایی المان (Element Strain-Displacement Matrix)

رابطه تنش-کرنش در المان یک بُعدی

استفاده از توابع شکل خطی منجر به ثابت بودن ماتریس $\mathbf{B}^e$ می‌گردد. از این رو، کرنش در طول المان ثابت است. با بکارگیری قانون هوک از رابطه (2) تنش در المان یک بُعدی برحسب جابجایی‌های گرهی المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(21) \rightarrow (2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{(x)} = E_e \, \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e} \quad (I)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (22) در رابطه (I) مقدار تنش در المان یک بُعدی دو گرهی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(22) \rightarrow (I) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^e = E_e \frac{1}{\ell_e}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix}} \quad (23)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

انرژی پتانسیل کل در مسائل یک بُعدی با توجه به رابطه (L1-30) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(L1-30)\quad \overset{d_V=A\,dx}{\Rightarrow} \quad \boxed{\Pi=\frac{1}{2}\int_{\ell}\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon} A d_x-\int_{\ell}u^T f\ A d_x-\int_{\ell}u^T T\ d_x-\sum_i u_i p_i} \quad (24)$$

در روش المان محدود انرژی پتانسیل کل سیستم از جمع انرژی پتانسیل در تمامی المان‌ها به دست می‌آید:

$$(24)\quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi=\sum_e\left(\frac{1}{2}\int_e\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon} A_e d_x\right)-\sum_e\left(\int_e u^T f\ A_e d_x\right)-\sum_e\left(\int_e u^T T\ d_x\right)-\sum_i Q_i p_i} \quad (25)$$

رابطه (25) بر مبنای این فرض است که تمامی نیروهای متمرکز در گره‌ها اعمال می‌گردد. با توجه به رابطه (L1-28) انرژی کرنشی المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{U_e=\frac{1}{2}\int_e\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon} A_e d_x} \quad (26)$$

با جایگذاری رابطه (26) در (25) خواهیم داشت:

$$(26)\rightarrow(25)\quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi=\sum_e U_e-\sum_e\left(\int_e u^T f\ A_e d_x\right)-\sum_e\left(\int_e u^T T\ d_x\right)-\sum_i Q_i p_i} \quad (27)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با توجه به روابط تنش و کرنش به دسته آمده در روابط (21) و (23) و جایگذاری آن در رابطه انرژی کرنشی المان در رابطه (26) نتیجه می‌شود:

$$(21)\,\&\,(23)\rightarrow(26)\quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e=\frac{1}{2}\int_e(\mathbf{q}^e)^T(\mathbf{B}^e)^T E_e\,\mathbf{B}^e\mathbf{q}^e A_e d_x} \quad (28)$$

از آنجایی که $\mathbf{q}^e$ بردار جابجایی گرهی المان ثابت است رابطه (28) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(28)\quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e=\frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T\left(\int_e(\mathbf{B}^e)^T E_e\,\mathbf{B}^e A_e d_x\right)\mathbf{q}^e} \quad (29)$$

از طرف دیگر با توجه به ثابت بودن ماتریس $\mathbf{B}^e$ و همچنین ثابت بودن E_e و A_e در طول المان می‌توان این پارامترها را نیز از انتگرال رابطه (29) خارج کرد. همچنین با تغییر مختصات به مختصات طبیعی براساس رابطه (19)، رابطه (29) به صورت زیر در می‌آید:

$$(19)\rightarrow(29)\quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e=\frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T\left(A_e\frac{\ell_e}{2}E_e\,(\mathbf{B}^e)^T\,\mathbf{B}^e\int_{-1}^{1}d\xi\right)\mathbf{q}^e} \quad (30)$$

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با جایگذاری ماتریس $\mathbf{B}^e$ از رابطه (22) در رابطه (30) و همچنین با توجه به اینکه $\int_{-1}^{1} d\xi = 2$ خواهیم داشت:

$$(22) \rightarrow (30) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \left(\frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{-1 \quad 1\} \right) \mathbf{q}^e} \quad (31)$$

با بسط رابطه (31) نتیجه می‌شود:

$$(31) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \left(\frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{q}^e} \quad (32)$$

رابطه (32) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e} \quad (33)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

که در آن

$$\boxed{\mathbf{k}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \end{array}} \quad (34)$$

$\mathbf{k}^e \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: ماتریس سختی المان e اُم (Element Stiffness Matrix)

می‌توان مشاهده کرد که رابطه (۳۲) مشابه رابطه انرژی کرنشی ذخیره شده در فنر خطی است

$$U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e \qquad \approx \qquad U_e = \frac{1}{2} k x^2$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

عبارت مربوط به کار خارجی ناشی از نیروی حجمی در رابطه (25) به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{کار خارجی ناشی از نیروی حجمی} = \int_e u^T f\, A_e d_x} \qquad (35)$$

با جایگذاری تغییر شکل از رابطه (9) در رابطه (35) خواهیم داشت:

$$(9) \rightarrow (35) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e u^T f\, A_e d_x = \int_e (\mathbf{q}^e)^T\, \mathbf{N}^T f\, A_e d_x} (36)$$

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (10) در رابطه (36) :

$$(10) \rightarrow (36) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e u^T f\, A_e d_x = \int_e (\mathbf{q}^e)^T \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \end{Bmatrix} f\, A_e d_x} \qquad (37)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

با بسط دادن رابطه (37) و همچنین تغییر متغیر دیفرانسیلی انتگرال از d_x به $d\xi$ (زیرا توابع شکل تابعی از ξ هستند) به کمک رابطه (19) نتیجه می‌شود:

$$(19) \rightarrow (37) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e u^T f\, A_e d_x = (\mathbf{q}^e)^T \begin{Bmatrix} \dfrac{A_e \ell_e f}{2} \displaystyle\int_e N_1(\xi) d\xi \\ \dfrac{A_e \ell_e f}{2} \displaystyle\int_e N_2(\xi) d\xi \end{Bmatrix}} \qquad (38)$$

با جایگذاری مقادیر تابع شکل از رابطه (7)، انتگرال توابع شکل را به صورت محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_e N_1(\xi) d\xi &= \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{2} d\xi \quad \Rightarrow \quad \int_e N_1(\xi) d\xi = 1 \\ \int_e N_2(\xi) d\xi &= \int_{-1}^{1} \frac{1+\xi}{2} d\xi \quad \Rightarrow \quad \int_e N_2(\xi) d\xi = 1 \end{aligned} \qquad (39)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

با جایگذاری رابطه (39) در رابطه (38) نتیجه می‌شود:

$$(39) \rightarrow (38) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e u^T f \; A_e d_x = (\mathbf{q}^e)^T \frac{A_e \ell_e f}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \qquad (40)$$

رابطه (40) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\int_e u^T f \; A_e d_x = (\mathbf{q}^e)^T \, \mathbf{f}^e} \qquad (41)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{f}^e = \frac{A_e \ell_e f}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} \qquad (42)$$

$\mathbf{f}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار نیروی حجمی المان e اُم (Element Body force)

در رابطه (42) f نیروی واحد حجم ضرب در $A_e \ell_e$ حجم المان تبدیل به نیرو شده و به طور مساوی بین گره‌های ابتدا و انتهای المان تقسیم می‌شود.

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

عبارت مربوط به کار خارجی ناشی از نیروی طولی در رابطه (25) به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{کار خارجی ناشی از نیروی طولی} = \int_e u^T T \; d_x} \qquad (43)$$

با جایگذاری تغییر شکل از رابطه (9) در رابطه (43) خواهیم داشت:

$$(9) \rightarrow (43) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e u^T T \; d_x = \int_e (\mathbf{q}^e)^T \, \mathbf{N}^T T \; d_x} \qquad (44)$$

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (10) در رابطه (44) :

$$(10) \rightarrow (44) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e u^T T \; d_x = \int_e (\mathbf{q}^e)^T \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \end{Bmatrix} T \; d_x} \qquad (45)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

با بسط دادن رابطه (45) و همچنین تغییر متغیر دیفرانسیلی انتگرال از d_x به $d\xi$ (زیرا توابع شکل تابعی از ξ هستند) به کمک رابطه (19) نتیجه می‌شود:

$$(19) \rightarrow (45) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e u^T T\, d_x = (\mathbf{q}^e)^T \begin{Bmatrix} \frac{\ell_e T}{2} \int_e N_1(\xi) d\xi \\ \frac{\ell_e T}{2} \int_e N_2(\xi) d\xi \end{Bmatrix}} \quad (46)$$

با جایگذاری رابطه (39) در رابطه (46) نتیجه می‌شود:

$$(39) \rightarrow (46) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e u^T T\, d_x = (\mathbf{q}^e)^T \frac{\ell_e T}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \quad (47)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

رابطه (47) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\int_e u^T T\, d_x = (\mathbf{q}^e)^T\, \mathbf{T}^e} \quad (48)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{T}^e = \frac{\ell_e T}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} \quad (49)$$

$\mathbf{T}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار نیروی طولی المان e اُم (Element Traction force)

در رابطه (49) T نیروی واحد طول ضرب در ℓ_e طول المان تبدیل به نیرو شده و به طور مساوی بین گره‌های ابتدا و انتهای المان تقسیم می‌شود.

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

با جایگذاری روابط (33)، (41) و (48) در رابطه (25) انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(33),(41)\,\&\,(48)\rightarrow(25)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\Pi=\sum_e\frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T\,\mathbf{k}^e\mathbf{q}-\sum_e(\mathbf{q}^e)^T\,\mathbf{f}^e-\sum_e(\mathbf{q}^e)^T\,\mathbf{T}^e-\sum_e(\mathbf{q}^e)^T\,\mathbf{P}^e}\quad(50)$$

$\mathbf{P}^e\in\mathbb{R}^2$: بردار نیروی متمرکز المان e اُم (Element Traction force)

رابطه (50) نشان می‌دهد که انرژی پتانسیل کل از جمع (سرهم بندی کردن) انرژی پتانسیل کل تمامی المان‌ها حاصل می‌گردد. از این رو می‌توان رابطه (50) را به صورت جامع‌تر برای کل سیستم نوشت:

$$\boxed{\Pi=\frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^T\mathbf{F}}\quad(51)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{F}=\mathbf{f}+\mathbf{T}+\mathbf{P}}\quad(52)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش انرژی پتانسیل (The Potential Energy Approach)

$$\boxed{\begin{array}{c}\Pi=\frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^T\mathbf{F}\\ \mathbf{F}=\mathbf{f}+\mathbf{T}+\mathbf{P}\end{array}}$$

$\mathbf{Q}=\sum_e\mathbf{q}^e=\{Q_1\quad Q_2\quad\cdots\quad Q_n\}^T\in\mathbb{R}^n$: بردار جابجایی کل (Global Displacement Vector)

$\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}=\sum_e\mathbf{k}^e$: ماتریس سختی کل (Global Stiffness Matrix)

$\mathbf{F}\in\mathbb{R}^n=\mathbf{f}+\mathbf{T}+\mathbf{P}$: بردار نیروهای گرهی کل (Global Load Vector)

$\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n=\sum_e\mathbf{f}^e$: بردار نیروهای حجمی گرهی کل (Global Body Force Vector)

$\mathbf{T}\in\mathbb{R}^n=\sum_e\mathbf{T}^e$: بردار نیروهای طولی گرهی کل (Global Traction Force Vector)

$\mathbf{P}\in\mathbb{R}^n=\sum_e\mathbf{P}^e$: بردار نیروهای متمرکز گرهی کل (Global Point Force Vector)

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

با استفاده از روش ریتز گالرکین بر روی معادلات تعادل تنش در حالت سه بعدی در رابطه (L1-6) برای تابع شکل دلخواه $\mathbf{\Phi}$ که شرایط مرزی مسئله را ارضا می نماید خواهیم داشت:

$$\boxed{\int_v \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(\Phi)} dv - \int_v \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f} dv - \int_v \mathbf{\Phi}^T \mathbf{T} ds - \sum_i \Phi_i P_i = 0} \qquad (53)$$

که در آن:

$$\boxed{\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^3 = \left\{ \Phi_x(x,y,z) \quad \Phi_y(x,y,z) \quad \Phi_z(x,y,z) \right\}^T} \qquad (54)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6 = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy} \right\}^T} \qquad (55)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^6 = \left[\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \right) \quad \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial x} \right) \quad \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right) \right]^T} \qquad (56)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

رابطه (53) در حالت یک بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\int_\ell \sigma^T \varepsilon_{(\Phi)} A\, dx - \int_\ell \phi^T f A\, dx - \int_\ell \phi^T T dx - \sum_i \phi_i P_i = 0} \qquad (57)$$

که در آن:

$$\boxed{\phi = \phi(x) \quad \sigma = \sigma_x \quad \varepsilon_{(\Phi)} = \frac{d\phi(x)}{dx}} \qquad (58)$$

رابطه (57) برای هر ϕ سازگار با شرایط مرزی باید برقرار باشد. همچنین رابطه (57) همان رابطه کار مجازی است که باید کار مجازی ناشی از نیروهای داخلی با کار مجازی ناشی از نیروهای خارجی برابر باشد. اگر ϕ یک تغییر شکل مجازی فرض کنیم:

$$\boxed{\int_\ell \sigma^T \varepsilon_{(\Phi)} A\, dx} - \boxed{\int_\ell \phi^T f A\, dx - \int_\ell \phi^T T dx - \sum_i \phi_i P_i} = 0$$

کار مجازی داخلی
(ضرب نیروهای داخلی حقیقی در تغییر شکل‌های مجازی)

کار مجازی خارجی
(ضرب نیروهای خارجی حقیقی در تغییر شکل‌های مجازی)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

با جایگذاری مقدار تنش برحسب کرنش در رابطه (57) و همچنین تبدیل حوزه به زیر-حوزه، رابطه (57) در روش المان محدود به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$(57) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_e\left(\int_e \varepsilon^T E_e \varepsilon_{(\Phi)} A_e dx\right)-\sum_e\left(\int_e \phi^T f A_e dx\right)-\sum_e\left(\int_e \phi^T T dx\right)-\sum_i \phi_i P_i=0} \quad (59)$$

توجه شود که $\varepsilon=\mathbf{B}^e\mathbf{q}^e$ کرنش ناشی از بارهای حقیقی است. در حالی که $\varepsilon_{(\Phi)}$ کرنش ناشی از یک جابجایی مجازی می‌باشد. مشابه با روابط (9) و (21) روابط زیر تعریف می‌گردد

$$\boxed{u_{(\xi)}=\mathbf{N}\mathbf{q}^e} \quad (9) \qquad\qquad \boxed{\phi=\mathbf{N}\boldsymbol{\psi}^e} \quad (60)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_{(x)}=\mathbf{B}^e\mathbf{q}^e} \quad (21) \qquad\qquad \boxed{\varepsilon_{(\Phi)}=\mathbf{B}^e\boldsymbol{\psi}^e} \quad (61)$$

$\boldsymbol{\psi}^e=\{\psi_1 \quad \psi_2\}^T$: بردار جابجایی گرهی دلخواه (مجازی) المان e اُم

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با در نظر گرفتن اولین رابطه (59) جایگذاری روابط (21) و (61) در آن نتیجه می‌شود:

$$(21)\,\&\,(61) \rightarrow \textit{first term}\ (59) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e \varepsilon^T E_e \varepsilon_{(\Phi)} A_e dx=\int_e (\mathbf{q}^e)^T(\mathbf{B}^e)^T E_e \mathbf{B}^e \boldsymbol{\psi}^e A_e dx} \quad (62)$$

از آنجایی که $\mathbf{q}^e$ و $\boldsymbol{\psi}^e$ ثابت است رابطه (62) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(62) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e \varepsilon^T E_e \varepsilon_{(\Phi)} A_e dx=(\mathbf{q}^e)^T\left(\int_e (\mathbf{B}^e)^T E_e \mathbf{B}^e A_e dx\right)\boldsymbol{\psi}^e} \quad (63)$$

از طرف دیگر با توجه به ثابت بودن ماتریس $\mathbf{B}^e$ و همچنین ثابت بودن E_e و A_e در طول المان می‌توان این پارامترها را نیز از انتگرال رابطه (63) خارج کرد. همچنین با تغییر مختصات به مختصات طبیعی براساس رابطه (19)، رابطه (63) به صورت زیر در می‌آید:

$$(19)\rightarrow(63) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e \varepsilon^T E_e \varepsilon_{(\Phi)} A_e dx=(\mathbf{q}^e)^T\left(E_e \frac{\ell_e}{2} A_e (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{B}^e \int_{-1}^{1} d\xi\right)\boldsymbol{\psi}^e} \quad (64)$$

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با جایگذاری ماتریس $\mathbf{B}^e$ از رابطه (22) در رابطه (64) و همچنین با توجه به اینکه $\int_{-1}^{1} d\xi = 2$ خواهیم داشت:

$$(22) \rightarrow (64) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e \varepsilon^T E_e \varepsilon_{(\Phi)} A_e dx = (\mathbf{q}^e)^T \left(\frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{-1 \quad 1\} \right) \boldsymbol{\psi}^e} \qquad (65)$$

با بسط رابطه (65) نتیجه می‌شود:

$$(65) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e \varepsilon^T E_e \varepsilon_{(\Phi)} A_e dx = (\mathbf{q}^e)^T \left(\frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\psi}^e} \qquad (66)$$

رابطه (66) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\int_e \varepsilon^T E_e \varepsilon_{(\Phi)} A_e dx = (\mathbf{q}^e)^T \, \mathbf{k}^e \, \boldsymbol{\psi}^e} \qquad (67)$$

که در آن

$$\mathbf{k}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} i & j \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \end{array} \qquad (34)$$

$\mathbf{k}^e \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: ماتریس سختی المان e اُم

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

عبارت مربوط به کار مجازی خارجی ناشی از نیروی حجمی در رابطه (59) به صورت زیر است:

$$\boxed{\int_e \phi^T f A_e dx = \text{کار مجازی خارجی ناشی از نیروی حجمی}} \qquad (68)$$

با جایگذاری تغییر شکل از رابطه (60) در رابطه (68) خواهیم داشت:

$$(60) \rightarrow (68) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e \phi^T f A_e dx = \int_e (\boldsymbol{\psi}^e)^T \, \mathbf{N}^T f A_e dx} \qquad (69)$$

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (10) در رابطه (69) :

$$(10) \rightarrow (69) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_e \phi^T f A_e dx = \int_e (\boldsymbol{\psi}^e)^T \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \end{Bmatrix} f A_e dx} \qquad (70)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

با بسط دادن رابطه (70) و همچنین تغییر متغیر دیفرانسیلی انتگرال از d_x به $d\xi$ (زیرا توابع شکل تابعی از ξ هستند) به کمک رابطه (19) نتیجه می‌شود:

$$(19)\rightarrow(70) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e \phi^T f A_e dx = (\boldsymbol{\psi}^e)^T \begin{Bmatrix} \dfrac{A_e \ell_e f}{2} \displaystyle\int_e N_1(\xi) d\xi \\ \dfrac{A_e \ell_e f}{2} \displaystyle\int_e N_2(\xi) d\xi \end{Bmatrix}} \quad (71)$$

با جایگذاری رابطه (39) در رابطه (71) نتیجه می‌شود:

$$(39)\rightarrow(71) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e \phi^T f A_e dx = (\boldsymbol{\psi}^e)^T \frac{A_e \ell_e f}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \quad (72)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

رابطه (72) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\int_e \phi^T f A_e dx = (\boldsymbol{\psi}^e)^T \ \mathbf{f}^e} \quad (73)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{f}^e = \frac{A_e \ell_e f}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} \quad (42)$$

$\mathbf{f}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار نیروی حجمی المان e اُم (Element Body force)

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

عبارت مربوط به کار مجازی خارجی ناشی از نیروی طولی در رابطه (59) به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{کار مجازی خارجی ناشی از نیروی طولی} = \int_e \phi^T T dx} \qquad (74)$$

با جایگذاری تغییر شکل از رابطه (60) در رابطه (74) خواهیم داشت:

$$(60) \rightarrow (74) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e \phi^T T dx = \int_e (\psi^e)^T \mathbf{N}^T T\, d_x} \qquad (75)$$

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (10) در رابطه (75) :

$$(10) \rightarrow (75) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e \phi^T T dx = \int_e (\psi^e)^T \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \end{Bmatrix} T\, d_x} \qquad (76)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

با بسط دادن رابطه (76) و همچنین تغییر متغیر دیفرانسیلی انتگرال از d_x به $d\xi$ (زیرا توابع شکل تابعی از ξ هستند) به کمک رابطه (19) نتیجه می‌شود:

$$(19) \rightarrow (76) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e \phi^T T dx = (\psi^e)^T \begin{Bmatrix} \dfrac{\ell_e T}{2} \displaystyle\int_e N_1(\xi) d\xi \\ \dfrac{\ell_e T}{2} \displaystyle\int_e N_2(\xi) d\xi \end{Bmatrix}} \qquad (77)$$

با جایگذاری رابطه (39) در رابطه (77) نتیجه می‌شود:

$$(39) \rightarrow (77) \quad \Rightarrow \boxed{\int_e \phi^T T dx = (\psi^e)^T \frac{\ell_e T}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \qquad (78)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

رابطه (78) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\int_e \phi^T T dx = (\boldsymbol{\psi}^e)^T\ \mathbf{T}^e} \qquad (79)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{T}^e = \frac{\ell_e T}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\begin{matrix}i\\j\end{matrix}} \qquad (49)$$

$\mathbf{T}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار نیروی طولی المان e أم (Element Traction force)

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

با جایگذاری روابط (67)، (73) و (79) در رابطه (59) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(67),(73)\,\&\,(79) \rightarrow (59) \quad \Rightarrow \boxed{\sum_e (\mathbf{q}^e)^T\ \mathbf{k}^e \boldsymbol{\psi}^e - \sum_e (\boldsymbol{\psi}^e)^T\ \mathbf{f}^e - \sum_e (\boldsymbol{\psi}^e)^T\ \mathbf{T}^e - \sum_e (\boldsymbol{\psi}^e)^T\ \mathbf{P}^e = 0} \quad (80)$$

$\mathbf{P}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار نیروی متمرکز المان e أم (Element Traction force)

رابطه (80) را به صورت جامع تر برای کل سیستم نوشت:

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{KQ} - \mathbf{F}) = 0} \qquad (81)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{T} + \mathbf{P}} \qquad (52)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

روش ریتز- گالرکین (The Ritz-Galerkin Approach)

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Psi}^T(\mathbf{KQ}-\mathbf{F})=0\\ \mathbf{F}=\mathbf{f}+\mathbf{T}+\mathbf{P}\end{array}}$$

$\boldsymbol{\Psi}=\sum_e \boldsymbol{\psi}^e=\{\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_n\}^T\in\mathbb{R}^n$: بردار جابجایی گرهی دلخواه کل که باید شرایط مرزی را ارضا نماید

$\mathbf{Q}=\sum_e \mathbf{q}^e=\{Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_n\}^T\in\mathbb{R}^n$: بردار جابجایی کل (Global Displacement Vector)

$\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}=\sum_e \mathbf{k}^e$: ماتریس سختی کل (Global Stiffness Matrix)

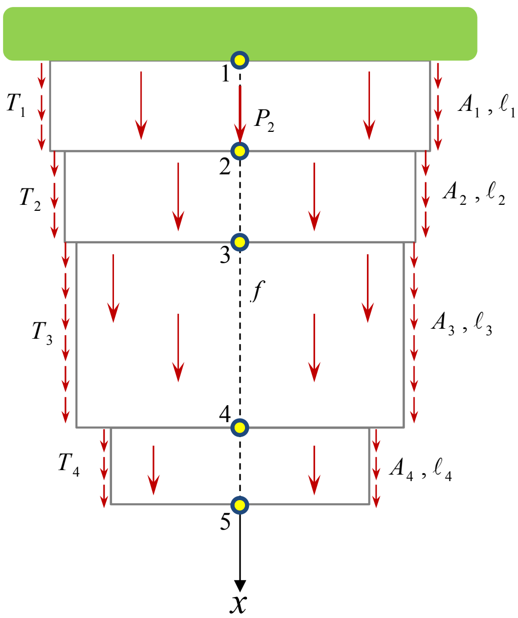
$\mathbf{F}\in\mathbb{R}^n=\mathbf{f}+\mathbf{T}+\mathbf{P}$: بردار نیروهای گرهی کل (Global Load Vector)

$\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n=\sum_e \mathbf{f}^e$: بردار نیروهای حجمی گرهی کل (Global Body Force Vector)

$\mathbf{T}\in\mathbb{R}^n=\sum_e \mathbf{T}^e$: بردار نیروهای طولی گرهی کل (Global Traction Force Vector)

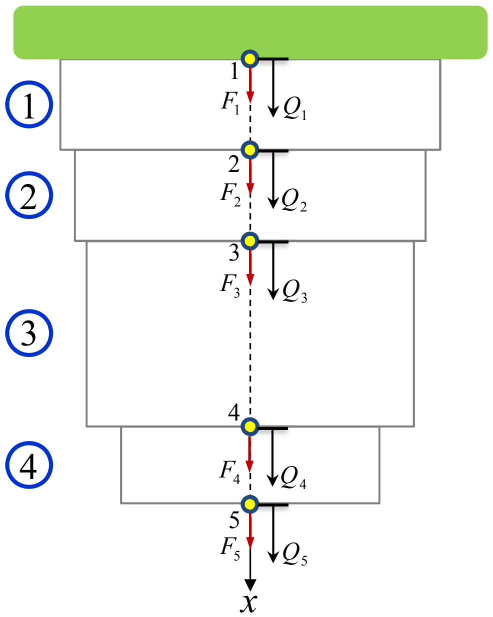
$\mathbf{P}\in\mathbb{R}^n=\sum_e \mathbf{P}^e$: بردار نیروهای متمرکز گرهی کل (Global Point Force Vector)

مثال ۲– در میله نشان داده شده در شکل، A_i و ℓ_i به ترتیب سطح مقطع و طول هر قسمت از میله را نشان می‌دهد. هر بخش از میله تحت اثر نیروی کششی واحد طول T_i و نیروی واحد حجم f قرار دارد. مدول الاستیسیته کل میله ثابت و برابر با E است. بار متمرکز P_2 در گره شماره 2 وارد می‌شود. مطلوب است تشکیل ماتریس سختی کل و بردار نیروی گرهی کل در میله نشان داده شده.



پاسخ مثال ۲-

تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان

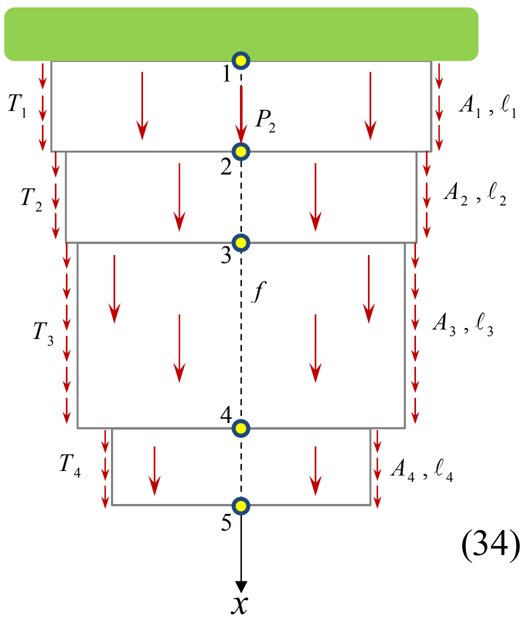


تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

شماره المان e	شماره گره i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

$n_e = 4$ تعداد المان

$n_{DOF} = 5$ تعداد درجه آزادی $\mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5\}^T$



پاسخ مثال ۲-

تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (34)

$$(34) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{k}^{(3)} = \frac{A_3 E}{\ell_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}} \quad (2.3)$$

$$\boxed{\mathbf{k}^{(2)} = \frac{A_2 E}{\ell_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}} \quad (2.2)$$

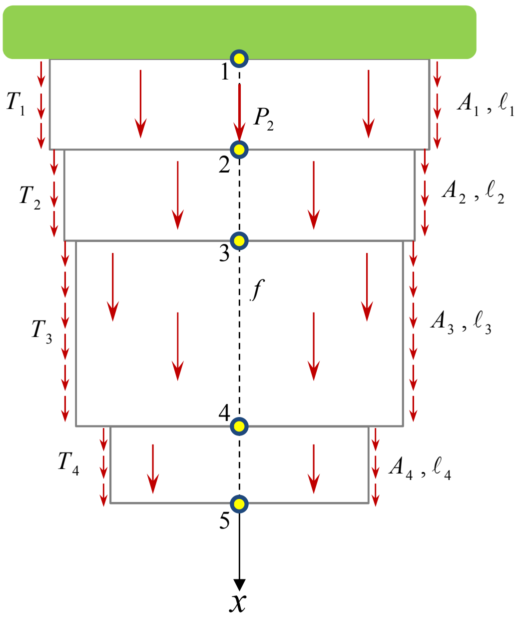
$$\boxed{\mathbf{k}^{(4)} = \frac{A_4 E}{\ell_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array}} \quad (2.4)$$

پاسخ مثال ۲-

تشکیل ماتریس سختی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{5\times 5} = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{k}^e \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{A_1E}{\ell_1} & -\dfrac{A_1E}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{A_1E}{\ell_1} & \left(\dfrac{A_1E}{\ell_1}+\dfrac{A_2E}{\ell_2}\right) & -\dfrac{A_2E}{\ell_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{A_2E}{\ell_2} & \left(\dfrac{A_2E}{\ell_2}+\dfrac{A_3E}{\ell_3}\right) & -\dfrac{A_3E}{\ell_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{A_3E}{\ell_3} & \left(\dfrac{A_3E}{\ell_3}+\dfrac{A_4E}{\ell_4}\right) & -\dfrac{A_4E}{\ell_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{A_4E}{\ell_4} & \dfrac{A_4E}{\ell_4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}} \quad (2.5)$$



پاسخ مثال ۲-

تشکیل بردار نیروی حجمی هر المان براساس رابطه (42)

$$(42) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{f}^{(2)} = \frac{A_2\ell_2 f}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\begin{matrix}2\\3\end{matrix}} \quad (2.7)$$

$$\boxed{\mathbf{f}^{(3)} = \frac{A_3\ell_3 f}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\begin{matrix}3\\4\end{matrix}} \quad (2.8)$$

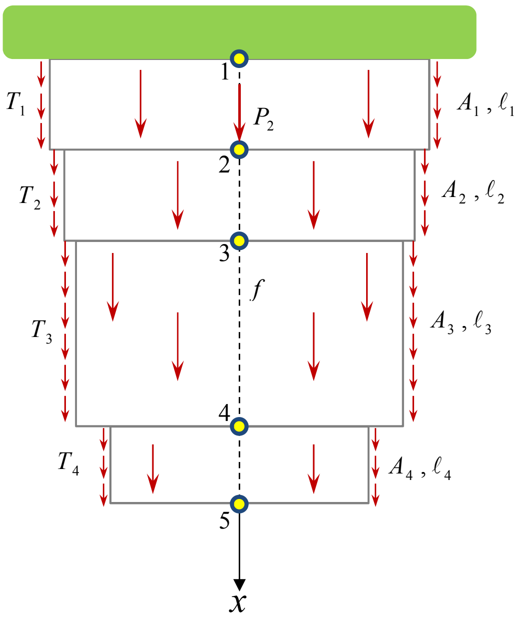
$$\boxed{\mathbf{f}^{(4)} = \frac{A_4\ell_4 f}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\begin{matrix}4\\5\end{matrix}} \quad (2.9)$$

پاسخ مثال ۲-

تشکیل بردار نیروهای حجمی گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی حجمی گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^5 = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{f}^e \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \dfrac{A_1\ell_1 f}{2} \\ \dfrac{A_1\ell_1 f}{2} + \dfrac{A_2\ell_2 f}{2} \\ \dfrac{A_2\ell_2 f}{2} + \dfrac{A_3\ell_3 f}{2} \\ \dfrac{A_3\ell_3 f}{2} + \dfrac{A_4\ell_4 f}{2} \\ \dfrac{A_4\ell_4 f}{2} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}} \quad (2.10)$$



پاسخ مثال ۲-

تشکیل بردار نیروی طولی هر المان براساس رابطه (49)

$$(49) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{T}^{(2)} = \frac{\ell_2 T_2}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} \quad (2.12)$$

$$\boxed{\mathbf{T}^{(3)} = \frac{\ell_3 T_3}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}} \quad (2.13)$$

$$\boxed{\mathbf{T}^{(4)} = \frac{\ell_4 T_4}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}} \quad (2.14)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۲–

تشکیل بردار نیروهای طولی گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی طولی گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^5 = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{T}^e \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{T} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\ell_1 T_1}{2} \\ \dfrac{\ell_1 T_1}{2} + \dfrac{\ell_2 T_2}{2} \\ \dfrac{\ell_2 T_2}{2} + \dfrac{\ell_3 T_3}{2} \\ \dfrac{\ell_3 T_3}{2} + \dfrac{\ell_4 T_4}{2} \\ \dfrac{\ell_4 T_4}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\[12pt] 2 \\[12pt] 3 \\[12pt] 4 \\[12pt] 5 \end{array} \qquad (2.15)}$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۲–

تشکیل بردار نیروهای متمرکز گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی متمرکز گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^5 = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{P}^e \quad \Rightarrow$$

پاسخ مثال ۲-

تشکیل بردار نیروهای گرهی کل میله

$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^5 = \mathbf{f} + \mathbf{T} + \mathbf{P} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \left(\dfrac{A_1\ell_1 f}{2} + \dfrac{\ell_1 T_1}{2}\right) \\ \left(\dfrac{A_1\ell_1 f}{2} + \dfrac{\ell_1 T_1}{2}\right) + \left(\dfrac{A_2\ell_2 f}{2} + \dfrac{\ell_2 T_2}{2} + P_2\right) \\ \left(\dfrac{A_2\ell_2 f}{2} + \dfrac{\ell_2 T_2}{2}\right) + \left(\dfrac{A_3\ell_3 f}{2} + \dfrac{\ell_3 T_3}{2}\right) \\ \left(\dfrac{A_3\ell_3 f}{2} + \dfrac{\ell_3 T_3}{2}\right) + \left(\dfrac{A_4\ell_4 f}{2} + \dfrac{\ell_4 T_4}{2}\right) \\ \left(\dfrac{A_4\ell_4 f}{2} + \dfrac{\ell_4 T_4}{2}\right) \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}} \qquad (2.17)$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

الف- اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

در یک سیستم n درجه آزاد بردارهای $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{F}$ و ماتریس $\mathbf{K}$ به صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad \cdots \quad Q_n\}^T \\ &\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \cdots \quad F_n\}^T \\ &\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}} \qquad (82)$$

اگر رابطه (82) را در معادله انرژی پتانسیل کل (51) جایگذاری کرده و آن را بسط بدیم خواهیم داشت:

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

الف- اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

$$(82) \rightarrow (51) \quad \Rightarrow \quad \Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} \quad \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad \cdots \quad Q_n\}\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} - \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad \cdots \quad Q_n\}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \Pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q_1K_{11}Q_1 + Q_1K_{12}Q_2 + Q_1K_{13}Q_3 + \cdots + Q_1K_{1n}Q_n \\ +Q_2K_{21}Q_1 + Q_2K_{22}Q_2 + Q_2K_{23}Q_3 + \cdots + Q_2K_{2n}Q_n \\ +Q_3K_{31}Q_1 + Q_3K_{32}Q_2 + Q_3K_{33}Q_3 + \cdots + Q_3K_{3n}Q_n \\ \vdots \\ +Q_nK_{n1}Q_1 + Q_nK_{n2}Q_2 + Q_nK_{n3}Q_3 + \cdots + Q_nK_{nn}Q_n \end{pmatrix} - (Q_1F_1 + Q_2F_2 + Q_3F_3 + \cdots + Q_nF_n) \qquad (83)}$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

الف- اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

با فرض آن که دو شرط مرزی $Q_1 = \alpha_1$ و $Q_n = \alpha_n$ موجود باشد. رابطه (83) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_1K_{11}\alpha_1 + \alpha_1K_{12}Q_2 + \alpha_1K_{13}Q_3 + \cdots + \alpha_1K_{1n}\alpha_n \\ +Q_2K_{21}\alpha_1 + Q_2K_{22}Q_2 + Q_2K_{23}Q_3 + \cdots + Q_2K_{2n}\alpha_n \\ +Q_3K_{31}\alpha_1 + Q_3K_{32}Q_2 + Q_3K_{33}Q_3 + \cdots + Q_3K_{3n}\alpha_n \\ \vdots \\ +\alpha_nK_{n1}\alpha_1 + \alpha_nK_{n2}Q_2 + \alpha_nK_{n3}Q_3 + \cdots + \alpha_nK_{nn}\alpha_n \end{pmatrix} - (\alpha_1F_1 + Q_2F_2 + Q_3F_3 + \cdots + \alpha_nF_n)} \quad (84)$$

در اینجا از قضیه حداقل انرژی پتانسیل (L1) استفاده می‌شود. این قضیه بیان می‌کند: از بین همه جابجایی‌های ممکن که شرایط مرزی یک سیستم سازه را برآورده می‌کنند، آن‌هایی که متناظر با حالت تعادل سیستم باشند، انرژی پتانسیل کل را حداقل می‌نمایند. توجه شود اکنون عبارت‌های Q_1 و Q_n در رابطه (84) حذف شده‌اند. در نتیجه رابطه‌ای که دلالت بر آن دارد که انرژی پتانسیل کل حداقل مقدار خود را در سایر درجات آزادی در حالت تعادل خواهد داشت به صورت زیر است:

$$\boxed{\frac{d\Pi}{dQ_i} = 0 \qquad i = 2, 3, 4, \cdots, n-1} \quad (85)$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

الف- اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

با جایگذاری رابطه (84) در (85) دسته معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{gathered}
K_{22}Q_2+K_{23}Q_3+\cdots+K_{2,(n-1)}Q_{n-1}=F_2-K_{21}\alpha_1-K_{2n}\alpha_n \\
K_{32}Q_2+K_{33}Q_3+\cdots+K_{3,(n-1)}Q_{n-1}=F_3-K_{31}\alpha_1-K_{3n}\alpha_n \\
\vdots \\
K_{(n-1),2}Q_2+K_{(n-1),3}Q_3+\cdots+K_{(n-1),(n-1)}Q_{n-1}=F_{n-1}-K_{(n-1),1}\alpha_1-K_{(n-1),n}\alpha_n
\end{gathered} \tag{86}$$

فرم ماتریسی رابطه (86) به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2,(n-1)} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3,(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{(n-1),2} & K_{(n-1),3} & \cdots & K_{(n-1),(n-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2-K_{21}\alpha_1-K_{2n}\alpha_n \\ F_3-K_{31}\alpha_1-K_{3n}\alpha_n \\ \vdots \\ F_{n-1}-K_{(n-1),1}\alpha_1-K_{(n-1),n}\alpha_n \end{Bmatrix} \tag{87}$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

الف- اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

رابطه (87) را می‌توان به صورت روبه رو نوشت:

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{Q}}=\bar{\mathbf{F}}} \quad (88)$$

که در آن

$$\bar{\mathbf{Q}}\in\mathbb{R}^{n-2}=\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_{n-1} \end{Bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{F}}\in\mathbb{R}^{n-2}=\begin{Bmatrix} F_2-K_{21}\alpha_1-K_{2n}\alpha_n \\ F_3-K_{31}\alpha_1-K_{3n}\alpha_n \\ \vdots \\ F_{n-1}-K_{(n-1),1}\alpha_1-K_{(n-1),n}\alpha_n \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}}\in\mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}=\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2,(n-1)} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3,(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{(n-1),2} & K_{(n-1),3} & \cdots & K_{(n-1),(n-1)} \end{bmatrix} \tag{89}$$

حل رابطه (88) مقدار جابجایی‌های گرهی مجهول را نتیجه می‌دهد:

$$(88) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\mathbf{Q}}=\bar{\mathbf{K}}^{-1}\bar{\mathbf{F}}} \quad (90)$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

ب- اعمال شرایط مرزی در روش ریتز-گالرکین

با فرض آن که دو شرط مرزی $Q_1 = \alpha_1$ و $Q_n = \alpha_n$ می‌باشد. باید در رابطه (81) بردارهای جابجایی گرهی دلخواه زیر برقرار باشند.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_2 \in \mathbb{R}^n &= \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0\}^T \\ \mathbf{\Psi}_3 \in \mathbb{R}^n &= \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0\}^T \\ \mathbf{\Psi}_4 \in \mathbb{R}^n &= \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0 \quad 0\}^T \\ &\vdots \\ \mathbf{\Psi}_{n-1} \in \mathbb{R}^n &= \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad 0\}^T \end{aligned}} \qquad (91)$$

به این نکته توجه شود در تمامی بردارهای جابجایی گرهی دلخواه انتخابی در رابطه (91) درایه‌های اول و آخر متناظر با شماره‌های درجات آزادی که مقدار آن‌ها معلوم می‌باشد برابر با صفر است.

اگر رابطه (82) را در معادله (81) جایگذاری کرده و آن را بسط بدیم خواهیم داشت:

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

ب- اعمال شرایط مرزی در روش ریتز-گالرکین

$$(82) \rightarrow (81) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Psi}^T(\mathbf{KQ} - \mathbf{F}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{\Psi}^T \left(\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{\Psi}^T \begin{Bmatrix} K_{11}Q_1 + K_{12}Q_2 + K_{13}Q_3 + \cdots + K_{1n}Q_n - F_1 \\ K_{21}Q_1 + K_{22}Q_2 + K_{23}Q_3 + \cdots + K_{2n}Q_n - F_2 \\ K_{31}Q_1 + K_{32}Q_2 + K_{33}Q_3 + \cdots + K_{3n}Q_n - F_3 \\ \vdots \\ K_{n1}Q_1 + K_{n2}Q_2 + K_{n3}Q_3 + \cdots + K_{nn}Q_n - F_n \end{Bmatrix} = 0} \qquad (92)$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

ب- اعمال شرایط مرزی در روش ریتز-گالرکین

با جایگذاری تک تک $n-2$ تا بردار تغییر شکل از رابطه (91) در رابطه (92):

به طور مثال برای $\boldsymbol{\Psi}_2$

$$\boldsymbol{\Psi}_2^T(\mathbf{KQ}-\mathbf{F})=\{0\quad 1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 0\}\begin{Bmatrix} K_{11}\alpha_1+K_{12}Q_2+K_{13}Q_3+\cdots+K_{1n}\alpha_n-F_1\\ K_{21}\alpha_1+K_{22}Q_2+K_{23}Q_3+\cdots+K_{2n}\alpha_n-F_2\\ K_{31}\alpha_1+K_{32}Q_2+K_{33}Q_3+\cdots+K_{3n}\alpha_n-F_3\\ \vdots\\ K_{n1}\alpha_1+K_{n2}Q_2+K_{n3}Q_3+\cdots+K_{nn}\alpha_n-F_n \end{Bmatrix}=0\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{K_{22}Q_2+K_{23}Q_3+\cdots+K_{2,(n-1)}Q_{n-1}=F_2-K_{21}\alpha_1-K_{2n}\alpha_n}$$

اگر برای سایر $\boldsymbol{\Psi}_i$ نیز این فرآیند را تکرار کنیم می بینیم که مجدد به همان رابطه (86) خواهیم رسید. در نهایت مجدد رابطه (90) حاصل می‌گردد.

$$\boxed{\bar{\mathbf{Q}}=\bar{\mathbf{K}}^{-1}\bar{\mathbf{F}}}\qquad(90)$$

مراحل گام به گام اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

با فرض آن که اگر مقدار جابجایی گره‌های p_1 تا p_r (نقاط تکیه‌گاهی) معلوم باشد:

$$\boxed{Q_{p_1}=\alpha_1\quad,\quad Q_{p_2}=\alpha_2\quad,\quad\cdots\quad,\quad Q_{p_r}=\alpha_r}\qquad(93)$$

گام اول: ذخیره‌کردن سطرهای p_1، p_2، $\cdots$ تا p_r از ماتریس سختی کل $\mathbf{K}$ و بردار نیروهای گرهی کل $\mathbf{F}$ چرا که در مراحل بعد مورد استفاده واقع می‌شوند.

$$\boxed{\begin{bmatrix} K_{p_1,1} & K_{p_1,2} & K_{p_1,3} & \cdots & K_{p_1,n}\\ K_{p_2,1} & K_{p_2,2} & K_{p_2,3} & \cdots & K_{p_2,n}\\ K_{p_3,1} & K_{p_3,2} & K_{p_3,3} & \cdots & K_{p_3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K_{p_r,1} & K_{p_r,2} & K_{p_r,3} & \cdots & K_{p_r,n} \end{bmatrix}_{r\times n}\qquad \begin{Bmatrix} F_{p_1}\\ F_{p_2}\\ F_{p_3}\\ \vdots\\ F_{p_r} \end{Bmatrix}_{r\times 1}}\qquad(94)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مراحل گام به گام اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

گام دوم: حذف سطر و ستون p_1، سطر و ستون p_2 ، ... و سطر و ستون p_r از ماتریس سختی کل $\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. ماتریس سختی کل به دست آمده $\bar{\mathbf{K}}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ خواهد شد. به طور مشابه سطرهای p_1، p_2 ، $\cdots$ و p_r از بردار نیروهای گرهی کل $\mathbf{F}\in\mathbb{R}^{n}$ حذف می‌شوند. بردار نیروهای گرهی کل به دست آمده $\bar{\mathbf{F}}\in\mathbb{R}^{n-r}$ می‌باشد. سپس هر یک از درایه‌های بردار نیروهای گرهی کل به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\boxed{\bar{F}_i = F_i - (K_{i,p_1}\alpha_1 + K_{i,p_2}\alpha_2 + \cdots + k_{i,p_r}\alpha_r)} \quad (94)$$

اندیس i مربوط به تمام درجات آزادی است که مقدار آن معلوم نمی‌باشد. در نهایت بردار مقادیر گرهی مجهول از حل رابطه (90) به دست می‌آید:

$$\boxed{\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1}\bar{\mathbf{F}}} \quad (90)$$

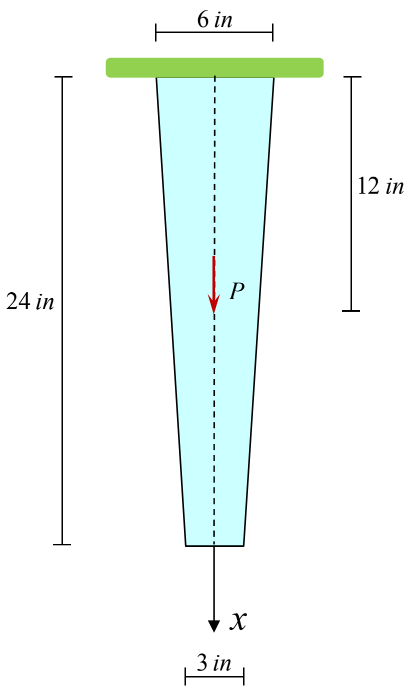
مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مراحل گام به گام اعمال شرایط مرزی به روش حذفی (Elimination Approach)

گام سوم: با استفاده از اطلاعات ذخیره شده در گام اول، واکنش‌های تکیه‌گاهی در درجات آزادی که مربوط به تکیه‌گاه است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} R_{p_1} \\ R_{p_2} \\ R_{p_3} \\ \vdots \\ R_{p_r} \end{Bmatrix}_{r\times 1} = \begin{bmatrix} K_{p_1,1} & K_{p_1,2} & K_{p_1,3} & \cdots & K_{p_1,n} \\ K_{p_2,1} & K_{p_2,2} & K_{p_2,3} & \cdots & K_{p_2,n} \\ K_{p_3,1} & K_{p_3,2} & K_{p_3,3} & \cdots & K_{p_3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p_r,1} & K_{p_r,2} & K_{p_r,3} & \cdots & K_{p_r,n} \end{bmatrix}_{r\times n} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}_{n\times 1} - \begin{Bmatrix} F_{p_1} \\ F_{p_2} \\ F_{p_3} \\ \vdots \\ F_{p_r} \end{Bmatrix}_{r\times 1}} \quad (95)$$

مثال ۳- تیر نشان داده شده از یک ورق با ضخامت یکنواخت t ساخته شده است. مدول الاستیسیته ورق برابر است با E و همچنین وزن واحد حجم آن ρ می‌باشد. علاوه بر وزن خود تیر یک نیروی متمرکز P در وسط دهانه به این تیر وارد می‌شود. مطلوب است تعیین بردار جابجایی گرهی کل، تنش در بخش‌های مختلف تیر و همچنین عکس العمل تکیه‌گاهی.



$t = 1\,in$

$E = 30\times10^6\ psi$

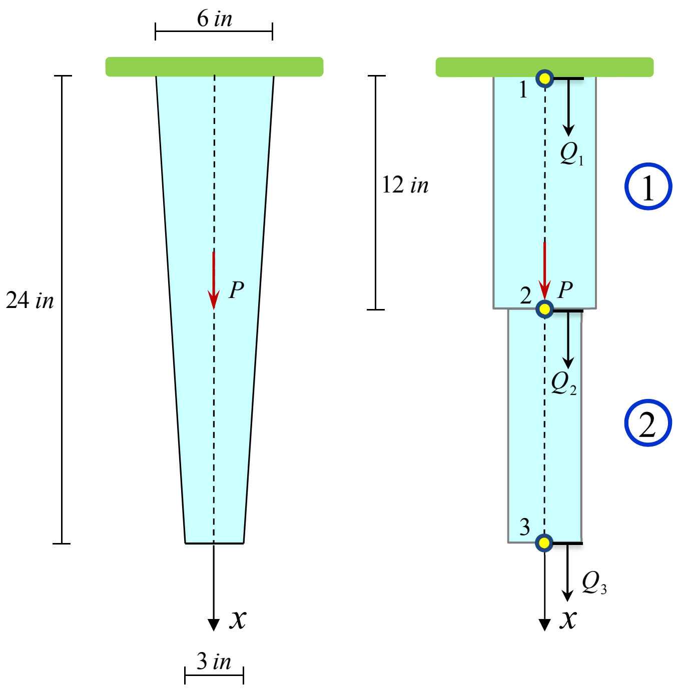
$\rho = 0.2836\ lb/in^3$

$P = 100\ lb$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۳-

تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان



تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

شماره المان e	شماره گره i	j
1	1	2
2	2	3

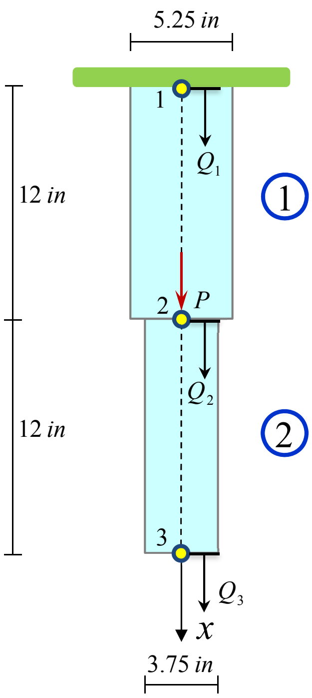
تعداد المان $n_e = 2$

تعداد درجه آزادی $n_{DOF} = 3$

شرایط مرزی: BC

پاسخ مثال ۳–

تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (34)

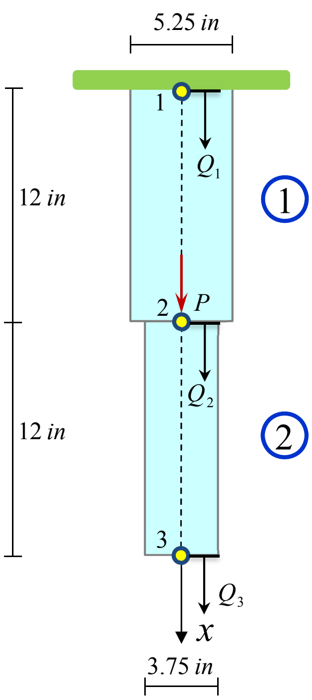


$$\mathbf{k}^{(2)}=\frac{(3.75\times1)\times(30\times10^{6})}{12}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \qquad (3.2)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۳–

تشکیل ماتریس سختی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

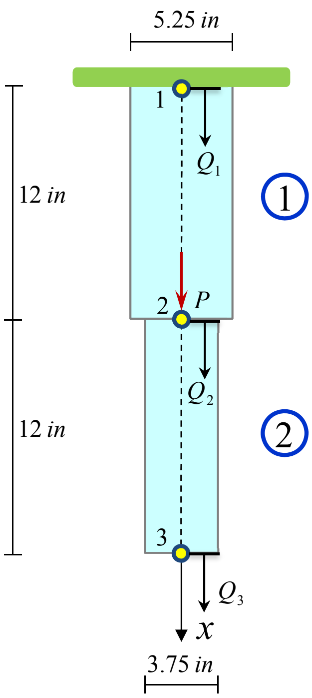


$$\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{3\times3}=\sum_{e=1}^{2}\mathbf{k}^{e} \quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{K}=\frac{30\times10^{6}}{12}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5.25 & -5.25 & 0 \\ -5.25 & 9 & -3.75 \\ 0 & -3.75 & 3.75 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad (3.3)$$

پاسخ مثال ۳-

تشکیل بردار نیروی حجمی هر المان براساس رابطه (42)

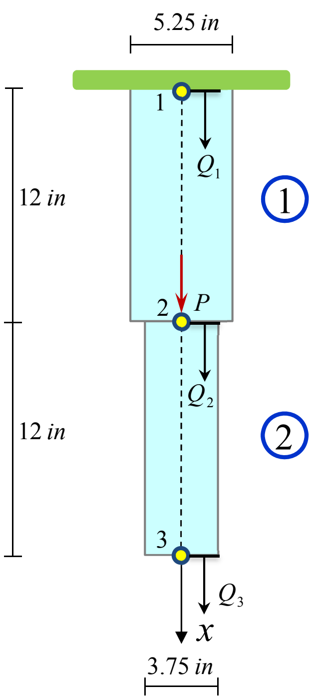


$$\mathbf{f}^{(2)} = \frac{(3.75\times 1)\times 12\times 0.2836}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{f}^{(2)} = \begin{Bmatrix}6.3810\\6.3810\end{Bmatrix}\begin{matrix}2\\3\end{matrix}} \qquad (3.5)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۳-

تشکیل بردار نیروهای حجمی گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی حجمی گرهی تمامی المان‌ها

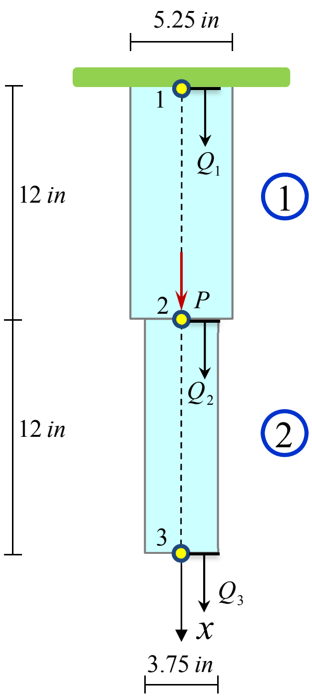


$$\mathbf{f}\in\mathbb{R}^3 = \sum_{e=1}^{2}\mathbf{f}^e \Rightarrow \boxed{\mathbf{f} = \begin{Bmatrix}8.9334\\15.3144\\6.3810\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} \qquad (3.6)$$

تشکیل بردار نیروهای متمرکز گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی متمرکز گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{P}\in\mathbb{R}^3 = \sum_{e=1}^{2}\mathbf{P}^e \Rightarrow$$

پاسخ مثال ۳–



تشکیل بردار نیروهای گرهی کل میله

$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3 = \mathbf{f} + \mathbf{P} \xRightarrow{(3.6)\&(3.7)}$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 8.9334 \\ 15.3144+100 \\ 6.3810 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = \begin{array}{c c} \begin{Bmatrix} 8.9334 \\ 115.3144 \\ 6.3810 \end{Bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}} \qquad (3.8)$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی $\qquad Q_1 = 0$

گام اول: ذخیره‌کردن سطرهای 1 از ماتریس سختی کل و بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{\begin{array}{l} \{K_{11} \quad K_{12} \quad K_{13}\} = \dfrac{30\times10^6}{12}\{5.25 \quad -5.25 \quad 0\} \\ F_1 = 8.9334 \end{array}} \qquad (3.9)$$

پاسخ مثال ۳–

گام دوم: سطر و ستون 1 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطر 1 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از دارایه‌های بردار نیروهای گرهی کل به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$(3.10) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{F}_2 = 115.3144} \qquad (3.11)$$

$$\bar{F}_3 = F_3 - (K_{31}\alpha_1) = 6.3810 - (0\times0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_3 = 6.3810} \qquad (3.12)$$

پاسخ مثال ۳–

$$(88) \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{30\times10^{6}}{12}\begin{bmatrix} 9 & -3.75 \\ -3.75 & 3.75 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 115.3144 \\ 6.3810 \end{Bmatrix}} \quad (3.13)$$

از حل معادله (3.13) خواهیم داشت:

$$(3.13) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9272 \\ 0.9953 \end{Bmatrix} \times 10^{-5}\ in} \quad (3.14)$$

در نتیجه بردار جابجایی گرهی کل به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(3.14) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.9272 \\ 0.9953 \end{Bmatrix} \times 10^{-5}\ in} \quad (3.15)$$

پاسخ مثال ۳–

محاسبه تنش:

$$(23) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(e)} = E_e \frac{1}{\ell_e}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix}} \quad (3.16)$$

$$\boxed{\sigma^{(1)} = 23.18\ psi} \quad (3.17)$$

$$(3.16) \quad \Rightarrow \quad \sigma^{(2)} = E_2 \frac{1}{\ell_2}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \overset{(3.15)}{\Rightarrow}$$

$$\sigma^{(2)} = 30\times10^{6}\frac{1}{12}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} 0.9272\times10^{-5} \\ 0.9953\times10^{-5} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(2)} = 1.70\ psi} \quad (3.18)$$

پاسخ مثال ۳–

گام سوم: با استفاده از اطلاعات ذخیره شده در گام اول، واکنش‌های تکیه‌گاهی در درجات آزادی که مربوط به تکیه‌گاه است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(95) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_1 = \{K_{11} \quad K_{12} \quad K_{13}\}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} - F_1} \quad (3.19)$$

با جایگذاری روابط (3.9) و (3.15) در (3.19) داریم:

$$\boxed{R_1 = -130.6 \; lb} \quad (3.19)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

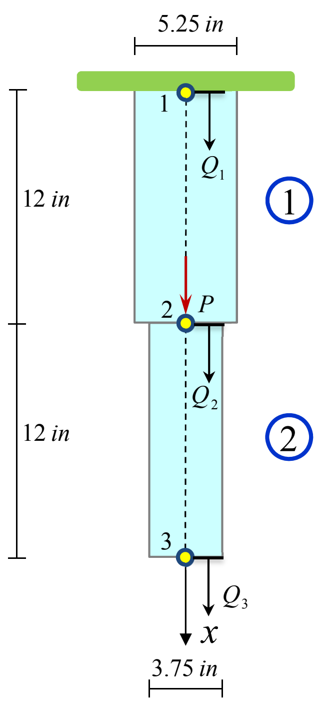
پاسخ مثال ۳– نام فایل برنامه: fem1d.m

نام فایل ورودی: L04EX03.txt

نام فایل خروجی: RL04EX03.txt

L04EX03.txt

```
Next line is problem title    << 1D STRESS ANALYSIS USING BAR ELEMENT >>
EXAMPLE 4.3
NN NE NM NDIM NEN NDN
 3  2  1   1   2   1
ND NL NCH NPR NMPC
 1  3  2   2   0
Node#  X-Coordinate
 1     0
 2     12
 3     24
Elem#  N1  N2  Mat#  Area TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1     1   2   1     5.25  0
 2     2   3   1     3.75  0
DOF#  Displacement
 1    0
DOF#  Load
 1   8.9334
 2  115.3144
 3   6.3810
MAT#  E   Alpha
 1   30E6  0
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



پاسخ مثال ۳–

RL04EX03.txt

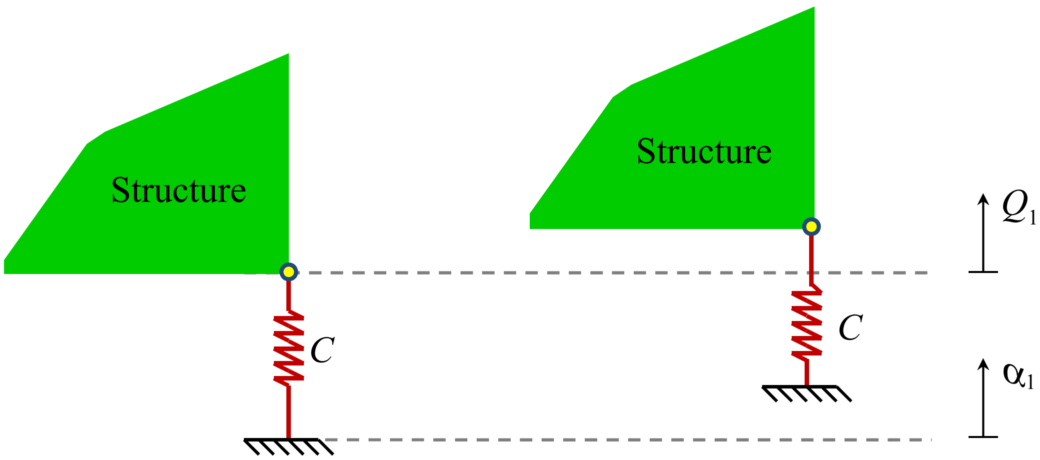
```
EXAMPLE 4.3

NODE#   DISPLACEMENT
1      5.8057E-10
2      9.2726E-06
3      9.9533E-06
ELEM#    STRESS
1           23.18
2          1.7016
NODE#    REACTION
1         -130.63
```


اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی (Penalty Approach)

الف– اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

با فرض آن که شرط مرزی $Q_1 = \alpha_1$ موجود باشد. برای مدل سازی تکیه‌گاه از یک فنر با سختی زیاد C استفاده می‌شود. در این حالت، همانطور که در شکل نشان داده شده است، یک انتهای فنر به مقدار α_1 جابجا می‌شود. جابجایی Q_1 در امتداد درجه آزادی 1 به دلیل مقاومت نسبتا کمی که سازه نشان می‌دهد تقریبا برابر با α_1 خواهد بود. تغییرشکل خالص فنر برابر با $Q_1 - \alpha_1$ است در نتیجه انرژی کرنشی ذخیره شده در فنر برابر است با:

$$\boxed{U_{spring} = \frac{1}{2} C \, (Q_1 - \alpha_1)^2} \quad (96)$$



اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی (Penalty Approach)

الف- اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

با احتساب انرژی ذخیره شده در فنر، رابطه (51) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(51)\,\&\,(96) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}\mathbf{Q} + \frac{1}{2}C\,(Q_1 - \alpha_1)^2 - \mathbf{Q}^T\mathbf{F}} \quad (97)$$

در نتیجه رابطه‌ای که دلالت بر آن دارد که انرژی پتانسیل کل حداقل مقدار خود را در سایر درجات آزادی در حالت تعادل خواهد داشت به صورت زیر است:

$$\boxed{\frac{d\Pi}{dQ_i} = 0 \qquad i = 1, 3, 4, \cdots, n} \quad (98)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی (Penalty Approach)

الف- اعمال شرایط مرزی در روش انرژی

با بسط رابطه (98) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} (K_{11}+C) & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + C\alpha_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (99)$$

حل رابطه (99) بردار جابجایی گرهی کل را طوری نتیجه می‌دهد که $Q_1 \approx \alpha_1$ باشد.

با دردسترس بودن تغییر شکل خالص فنر $Q_1 - \alpha_1$ مقدار عکس العمل تکیه‌گاهی گره 1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{R_1 = -C\,(Q_1 - \alpha_1)} \quad (100)$$

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی (Penalty Approach)

ب- اعمال شرایط مرزی در روش ریتز-گالرکین

با فرض آن که شرط مرزی $Q_1 = \alpha_1$ موجود باشد. مقدار کار مجازی نیروی فنر در اثر جابجایی مجازی $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^n = \{\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_n\}^T$ برابر است با :

$$\boxed{\delta W_s = \psi_1 \times C\,(Q_1 - \alpha_1)} \qquad (101)$$

با احتساب کار مجازی نیروی فنر، رابطه (81) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(81)\,\&\,(101) \quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Psi}^T(\mathbf{KQ} - \mathbf{F}) + \psi_1 C\,(Q_1 - \alpha_1) = 0} \qquad (102)$$

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی (Penalty Approach)

ب- اعمال شرایط مرزی در روش ریتز-گالرکین

در رابطه (102) بردارهای جابجایی گرهی دلخواه زیر باید برقرار باشند.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{\Psi}_1 \in \mathbb{R}^n = \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0\}^T \\ \mathbf{\Psi}_2 \in \mathbb{R}^n = \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0\}^T \\ \mathbf{\Psi}_3 \in \mathbb{R}^n = \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0\}^T \\ \qquad \vdots \\ \mathbf{\Psi}_n \in \mathbb{R}^n = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1\}^T\end{array}} \qquad (103)$$

با جایگذاری تک تک n تا بردار تغییر شکل از رابطه (103) در رابطه (102) مجدد به همان معادله (99) خواهیم رسید.

$$\boxed{\begin{bmatrix} (K_{11}+C) & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + C\alpha_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}} \qquad (99)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی (Penalty Approach)

نحوه انتخاب C

با در نظر گرفتن اولین معادله از رابطه (99) خواهیم داشت:

$$(99)\quad \Rightarrow \quad \boxed{(K_{11}+C)Q_1+K_{12}Q_2+K_{13}Q_3+\cdots+K_{1n}Q_n=F_1+C\alpha_1}\quad (104)$$

با تقسیم طرفین رابطه (104) بر C نتیجه می‌شود:

$$(104)\quad \overset{\div C}{\Rightarrow}\quad \boxed{(\frac{K_{11}}{C}+1)Q_1+\frac{K_{12}}{C}Q_2+\frac{K_{13}}{C}Q_3+\cdots+\frac{K_{1n}}{C}Q_n=\frac{F_1}{C}+\alpha_1}\quad (105)$$

با توجه به رابطه (105) اگر مقدار C در مقایسه با درایه‌های سختی K_{ij} و نیروی F به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود

در این صورت:

$$if\ C>>K_{ij}\ \&F\quad \overset{(104)}{\Rightarrow}\quad (\cancelto{0}{\frac{K_{11}}{C}}+1)Q_1+\cancelto{0}{\frac{K_{12}}{C}}Q_2+\cancelto{0}{\frac{K_{13}}{C}}Q_3+\cdots+\cancelto{0}{\frac{K_{1n}}{C}}Q_n=\cancelto{0}{\frac{F_1}{C}}+\alpha_1\quad \Rightarrow\quad \boxed{Q_1=\alpha_1}\quad (105)$$

انتخاب مقدار C به صورت زیر از نظر محاسباتی می‌تواند در اکثر کامپیوترها رضایت بخش باشد:

$$\boxed{C=\max\left(K_{ij}\right)\times 10^4}\quad (106)$$

(اگر محدودیت محاسبه کامپیوتری اجازه دهد می‌توان C بزرگتری را نیز انتخاب نمود.)

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

مراحل گام به گام اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی (Penalty Approach)

با فرض آن که اگر مقدار جابجایی گره‌های p_1 تا p_r (نقاط تکیه‌گاهی) معلوم باشد:

$$\boxed{Q_{p_1}=\alpha_1\quad ,\quad Q_{p_2}=\alpha_2\quad ,\quad \cdots\quad ,\quad Q_{p_r}=\alpha_r}\quad (93)$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی، با افزودن یک مقدار بزرگ C به المان‌های قطری p_1، p_2، ... تا p_r از ماتریس سختی کل $\mathbf{K}$. همچنین اصلاح بردار نیروی گرهی کل $\mathbf{F}$ با اضافه نمودن $C\alpha_1$ به F_{p_1}، $C\alpha_2$ به F_{p_2}، ...، $C\alpha_r$ به F_{p_r}. سپس حل معادله $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{F}}$ که منجر به تعیین بردار جابجایی گرهی کل سازه $\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^n$ می‌شود. $\bar{\mathbf{K}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس سختی اصلاح شده و $\bar{\mathbf{F}}\in\mathbb{R}^n$ بردار نیروی گرهی اصلاح شده می‌باشند.

گام دوم: محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی

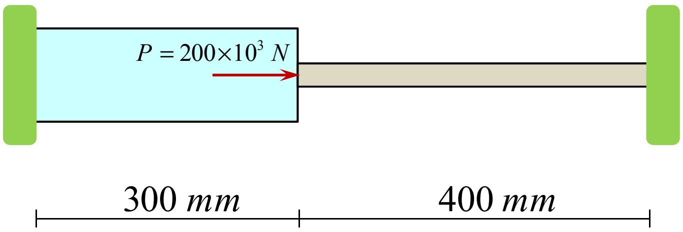
$$\boxed{R_{p_i}=-C\left(Q_{p_i}-\alpha_i\right)\qquad i=1,2,\cdots,r}\quad (107)$$

مثال ۴– میله نشان داده شده در شکل از دو بخش با جنس‌های متفاوت فولاد و آلومینیم ساخته شده است. مطلوب است تعیین:

الف– جابجایی گرهی.

ب– مقدار تنش در هر یک از مصالح.

ج– عکس العمل‌های تکیه‌گاهی.



Aluminum

$A = 2400\ mm^2$

$E = 70\times10^9\ N/m^2$

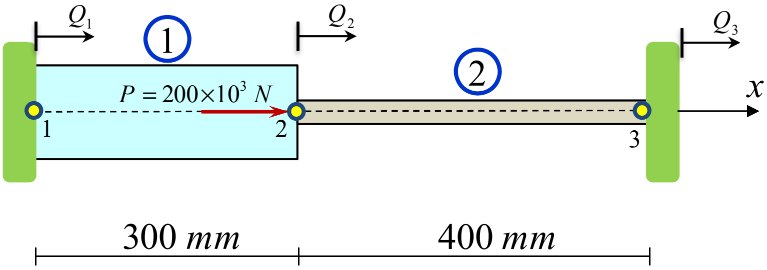
Steel

$A = 600\ mm^2$

$E = 200\times10^9\ N/m^2$

پاسخ مثال ۴–

تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان



Aluminum

$A = 2400\ mm^2$

$E = 70\times10^9\ N/m^2$

Steel

$A = 600\ mm^2$

$E = 200\times10^9\ N/m^2$

تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

شماره المان e	شماره گره i	j
1	1	2
2	2	3

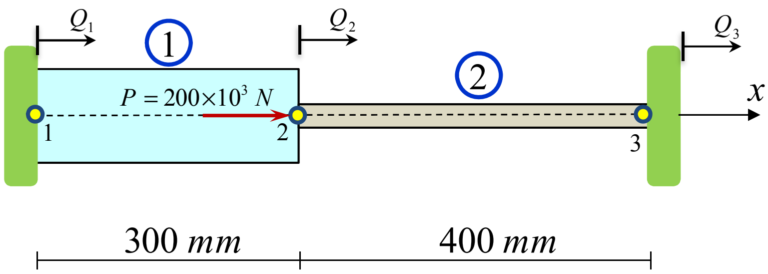
تعداد المان $n_e = 2$

تعداد درجه آزادی $n_{DOF} = 3$

شرایط مرزی $BC:$

پاسخ مثال ۴–

تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (34)

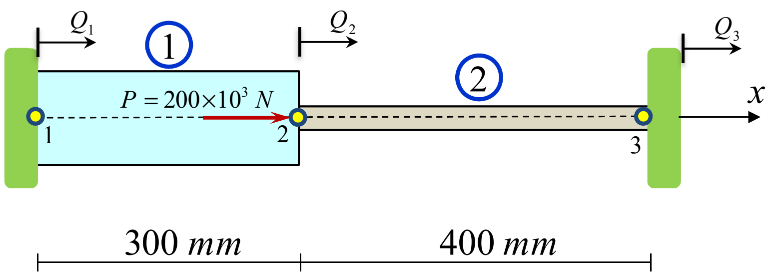


Aluminum
$A = 2400\ mm^2$
$E = 70\times10^9\ N/m^2$

Steel
$A = 600\ mm^2$
$E = 200\times10^9\ N/m^2$

$$\boxed{\mathbf{k}^{(2)} = \frac{(600)\times(200\times10^9\times10^{-6}\ N/mm^2)}{400}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}} \quad (4.2)$$

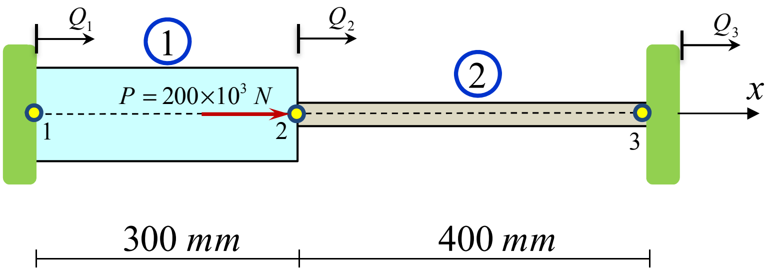
پاسخ مثال ۴–



تشکیل ماتریس سختی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3\times3} = \sum_{e=1}^{2}\mathbf{k}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K} = 10^6 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & 0.30 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \quad (4.3)$$

پاسخ مثال ۴–



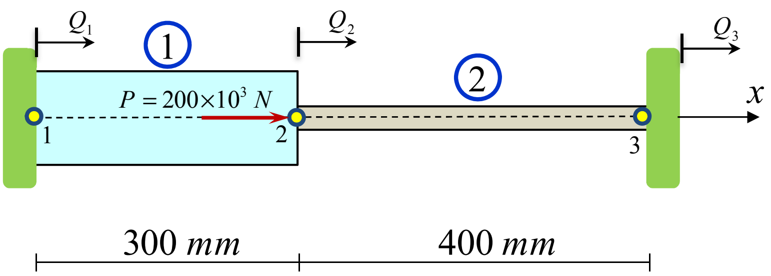
تشکیل بردار نیروهای متمرکز گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی متمرکز گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 = \sum_{e=1}^{2} \mathbf{P}^e \quad \Rightarrow$$

از آنجایی که نیروهای حجمی و کشش طولی نداریم بنابراین بردار نیروهای گرهی کل همان بردار نیروهای متمرکز گرهی است.

$$\boxed{\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200\times10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \quad (4.5)$$

پاسخ مثال ۴–



اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

$$Q_1 = 0 \quad , \quad Q_3 = 0$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{C = 8600\times10^6} \quad (4.6)$$

$$(4.3)\,\&\,(4.6) \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{\mathbf{K}} = 10^6 \times \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \quad (4.7)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0+(8600\times10^6)(0) \\ 200\times10^3 \\ 0+(8600\times10^6)(0) \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200\times10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \quad (4.8)$$

پاسخ مثال ۴-

معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{F}} \overset{(4.7)\&(4.8)}{\Rightarrow} \boxed{10^6\times\begin{bmatrix}8600.56 & -0.56 & 0\\ -0.56 & 0.86 & -0.30\\ 0 & -0.30 & 8600.30\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\200\times10^3\\0\end{Bmatrix}} \quad (4.9)$$

با حل معادله (4.9) بردار جابجایی‌های گرهی کل به دست می‌آید:

$$(4.9) \Rightarrow \begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8600.56 & -0.56 & 0\\ -0.56 & 0.86 & -0.30\\ 0 & -0.30 & 8600.30\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\200\\0\end{Bmatrix}\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}15.1432\times10^{-6}\\0.23257\\8.1127\times10^{-6}\end{Bmatrix} mm} \quad (4.10)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۴-

محاسبه تنش:

$$(4.11) \Rightarrow \sigma^{(1)}=E_1\frac{1}{\ell_1}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\end{Bmatrix} \overset{(4.10)}{\Rightarrow}$$

$$\sigma^{(1)}=70\times10^9\times10^{-6}\frac{1}{300}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix}15.1432\times10^{-6}\\0.23257\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(1)}=54.27\left(Mpa=\frac{N}{mm^2}\right)} \quad (4.12)$$

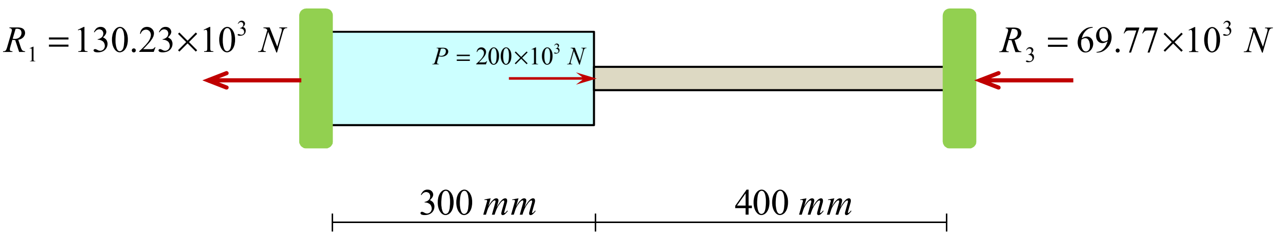
$$\boxed{\sigma^{(2)}=-116.29\left(Mpa=\frac{N}{mm^2}\right)} \quad (4.13)$$

پاسخ مثال ۴–

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$(4.14) \Rightarrow \quad R_1 = -C\left(Q_1 - \alpha_1\right) = -8600\times10^6\left(15.1432\times10^{-6} - 0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_1 = -130.23\times10^3\ N} \quad (4.15)$$

$$\boxed{R_3 = -69.77\times10^3\ N} \quad (4.16)$$



مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

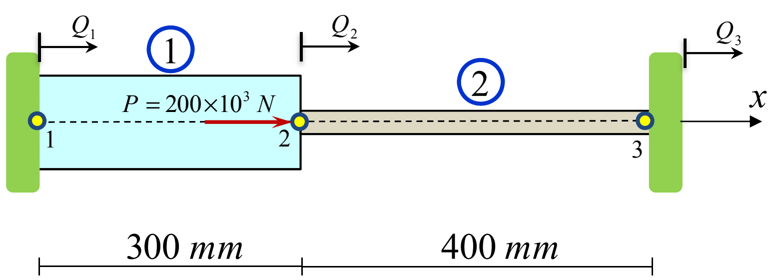
پاسخ مثال ۴– نام فایل برنامه: fem1d.m

نام فایل ورودی: L04EX04.txt

نام فایل خروجی: RL04EX04.txt

L04EX04.txt

```
Next line is problem title    << 1D STRESS ANALYSIS USING BAR ELEMENT >>
EXAMPLE 4.4
NN NE NM NDIM NEN NDN
 3  2  2   1   2   1
ND NL NCH NPR NMPC
 2  1  2   2   0
Node#   X-Coordinate
 1      0
 2      300
 3      700
Elem#  N1  N2  Mat#  Area TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1      1   2    1    2400   0
 2      2   3    2    600    0
DOF#  Displacement
 1     0
 3     0
DOF#  Load
 2    200000
MAT#  E   Alpha
 1   70e3  0
 2   200e3 0
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



پاسخ مثال ۴–

RL04EX04.txt

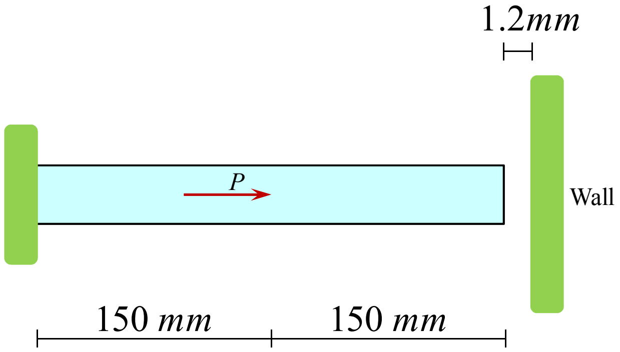
```
EXAMPLE 4.4

NODE#   DISPLACEMENT
1      1.5143E-05
2         0.23257
3      8.1127E-06
ELEM#    STRESS
1          54.263
2         -116.28
NODE#    REACTION
1     -1.3023E+05
3          -69769
```


مثال ۵– میله نشان داده شده به فاصله 1.2 mm از دیوار کناری فاصله دارد مطلوب است تعیین:

الف– جابجایی گرهی.

ب– مقدار تنش.

ج– عکس العمل‌های تکیه گاهی.



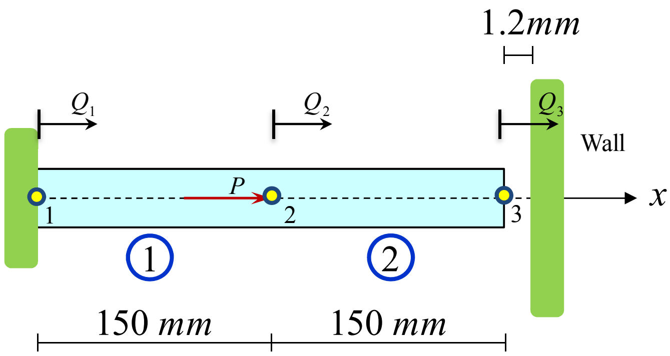
$$P = 60\times10^3\ N$$

$$A = 250\ mm^2$$

$$E = 20\times10^3\ N/mm^2$$

پاسخ مثال ۵-

تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان



تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

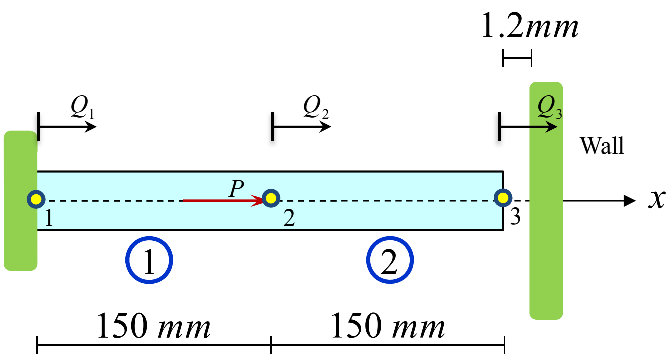
شماره المان e	شماره گره i	j
1	1	2
2	2	3

$$P = 60\times10^3\ N$$
$$A = 250\ mm^2$$
$$E = 20\times10^3\ N/mm^2$$

تعداد المان $n_e = 2$

تعداد درجه آزادی $n_{DOF} = 3$

شرایط مرزی $:BC$



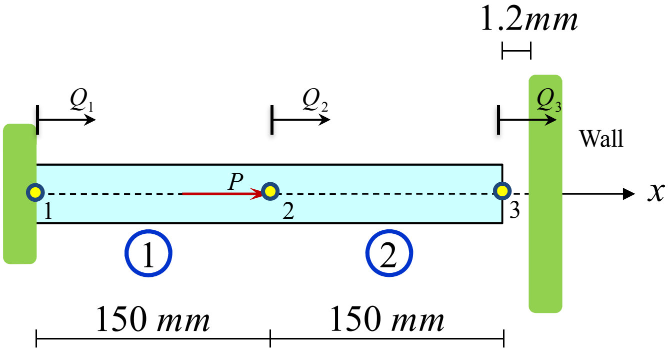
پاسخ مثال ۵-

تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (34)

$$P = 60\times10^3\ N$$
$$A = 250\ mm^2$$
$$E = 20\times10^3\ N/mm^2$$

$$(34)\quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \end{array}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{k}^{(2)} = \frac{250\times(20\times10^3)}{150} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}} \quad (5.2)$$

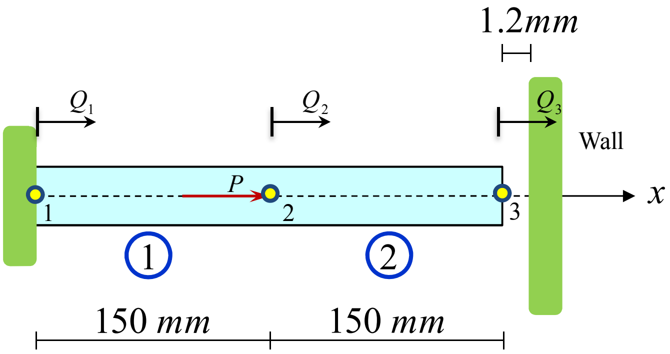


پاسخ مثال ۵-

تشکیل ماتریس سختی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

$$P = 60\times10^3\ N$$
$$A = 250\ mm^2$$
$$E = 20\times10^3\ N\ /\ mm^2$$

$$\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{3\times3} = \sum_{e=1}^{2}\mathbf{k}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K} = \frac{250\times(20\times10^3)}{150}\times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \quad (5.3)$$



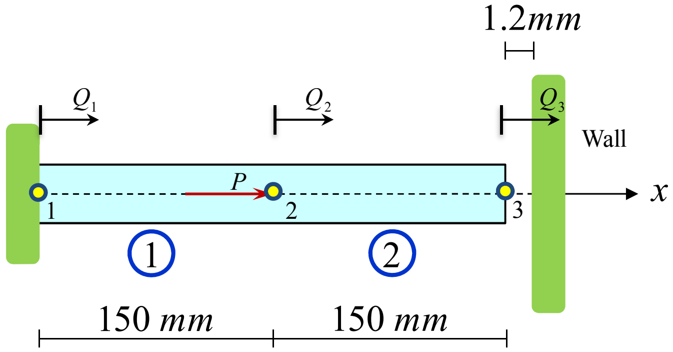
پاسخ مثال ۵-

تشکیل بردار نیروهای متمرکز گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی متمرکز گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{P}\in\mathbb{R}^{3} = \sum_{e=1}^{2}\mathbf{P}^e \quad \Rightarrow$$

از آنجایی که نیروهای حجمی و کشش طولی نداریم بنابراین بردار نیروهای گرهی کل همان بردار نیروهای متمرکز گرهی است.

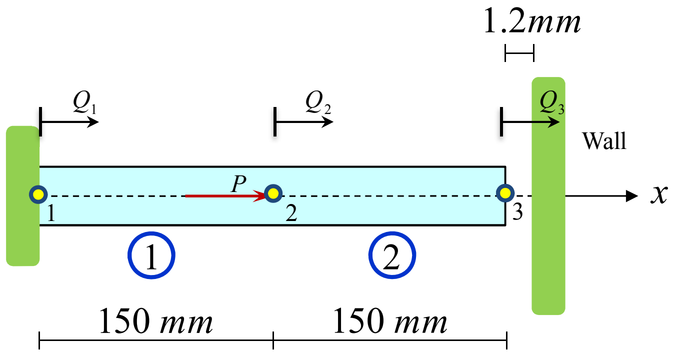
$$\boxed{\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60\times10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \quad (5.5)$$



پاسخ مثال ۵-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

در ابتدا باید بررسی شود که آیا میله به دیوار برخورد می‌کند یا خیر؟ چرا که شرایط مرزی کاملا به برخورد یا عدم برخورد میله با دیوار بستگی دارد. برای این منظور ابتدا میله را با فرض عدم وجود دیوار آنالیز می‌کنیم. اگر جابجایی گرهی $Q_3 > 1.2mm$ باشد برخورد اتفاق می افتد در غیر این صورت برخوردی صورت نمی‌پذیرد.



پاسخ مثال ۵-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

الف- شرایط مرزی با فرض عدم وجود دیوار

$$Q_1 = 0$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{C = \frac{2}{3}\times 10^9} \qquad (5.6)$$

$$(5.3)\,\&\,(5.6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\mathbf{K}} = \frac{10^5}{3}\times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \qquad (5.7)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 + C(0) \\ 60\times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60\times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \qquad (5.8)$$

پاسخ مثال ۵-

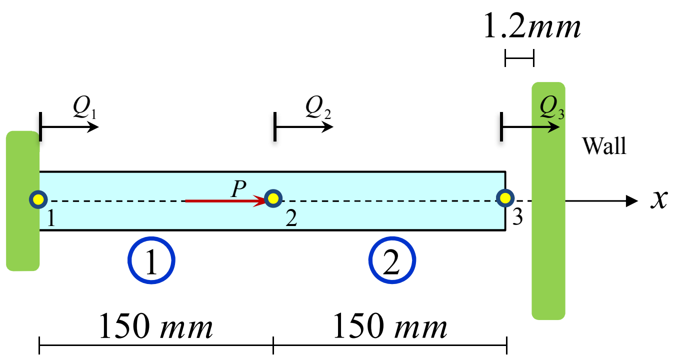
معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{F}} \xRightarrow{(5.7)\&(5.8)} \boxed{\frac{10^5}{3}\times\begin{bmatrix}20001 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 60\times10^3\\ 0\end{Bmatrix}} \qquad (5.9)$$

با حل معادله (5.9) بردار جابجایی گرهی کل به دست می‌آید:

$$(5.9) \Rightarrow \begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{Bmatrix}=\frac{3}{10^5}\times\begin{bmatrix}20001 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ 60\times10^3\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 1.8\\ 1.8\end{Bmatrix} mm} \qquad (5.10)$$

با توجه به رابطه (5.10) می‌توان نتیجه گرفت که $Q_3=1.8>1.2mm$ بنابراین میله با دیوار برخورد دارد.



پاسخ مثال ۵-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

ب- شرایط مرزی با فرض برخورد میله با دیوار

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$$(5.3)\&(5.6) \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{K}}=\frac{10^5}{3}\times\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{bmatrix} & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\ 2\\ 3\end{array}} \qquad (5.11)$$

$$=\begin{Bmatrix}0+\frac{2}{3}\times10^9(0)\\ 60\times10^3\\ 0+\frac{2}{3}\times10^9(1.2)\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathbf{F}}=\begin{Bmatrix}0\\ 60\times10^3\\ 80\times10^7\end{Bmatrix}\begin{array}{c}1\\ 2\\ 3\end{array}} \qquad (5.12)$$

پاسخ مثال ۵–

معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}} \xRightarrow{(5.11)\&(5.12)} \boxed{\frac{10^5}{3}\times\begin{bmatrix} 20001 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 20001 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60\times10^3 \\ 80\times10^7 \end{Bmatrix}} \quad (5.13)$$

با حل معادله (5.13) بردار جابجایی‌های گرهی کل به دست می‌آید:

$$(5.13) \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \frac{3}{10^5}\times\begin{bmatrix} 20001 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 20001 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 0 \\ 60\times10^3 \\ 80\times10^7 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.49985\times10^{-5} \\ 1.500045 \\ 1.200015 \end{Bmatrix} mm} \quad (5.14)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۵–

محاسبه تنش:

$$(23) \Rightarrow \boxed{\sigma^{(e)} = E_e \frac{1}{\ell_e}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix}} \quad (5.15)$$

$$\boxed{\sigma^{(1)} = 199.996 Mpa} \quad (5.16)$$

$$(5.15) \Rightarrow \sigma^{(2)} = E_2 \frac{1}{\ell_2}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \xRightarrow{(5.14)}$$

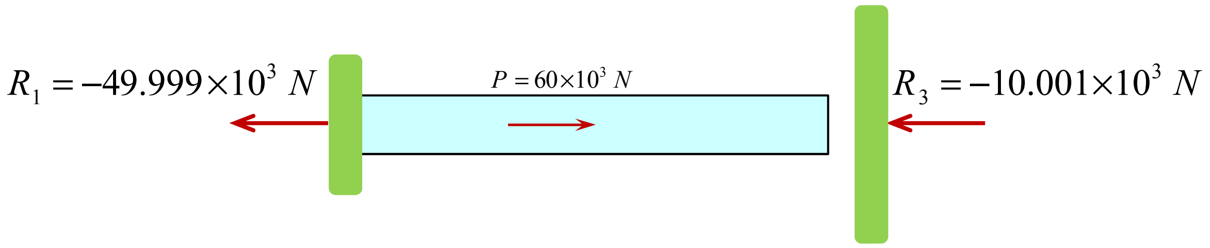
$$\sigma^{(2)} = 20\times10^3 \frac{1}{150}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} 1.500045 \\ 1.200015 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(2)} = -40.004\ Mpa} \quad (5.17)$$

پاسخ مثال ۵–

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$\boxed{R_1 = -49.999\times10^3\ N} \quad (5.19)$$

$$(5.18) \Rightarrow \quad R_3 = -C\left(Q_3-\alpha_3\right) = -\frac{2}{3}\times10^9\left(1.200015-1.20\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_3 = -10.001\times10^3\ N} \quad (5.20)$$



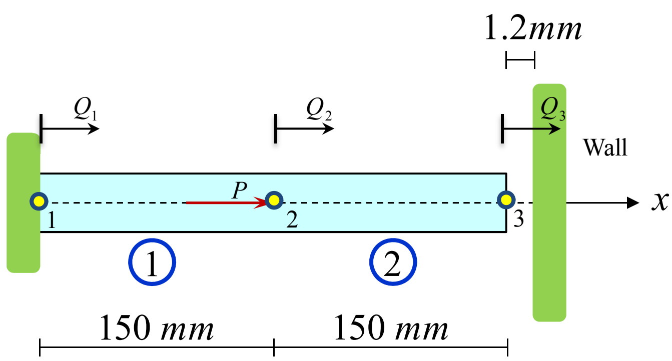
پاسخ مثال ۵– نام فایل برنامه: fem1d.m

نام فایل ورودی: L04EX05.txt

نام فایل خروجی: RL04EX05.txt

L04EX05.txt

```
Next line is problem title    << 1D STRESS ANALYSIS USING BAR ELEMENT >>
EXAMPLE 4.5
NN NE NM NDIM NEN NDN
 3  2  1   1   2   1
ND NL NCH NPR NMPC
 2  1  2   2   0
Node#   X-Coordinate
 1      0
 2      150
 3      300
Elem#  N1  N2  Mat#  Area TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1      1   2    1    250    0
 2      2   3    1    250    0
DOF#  Displacement
 1     0
 3     1.2
DOF#  Load
 2    60000
MAT#  E   Alpha
 1   20e3 0
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



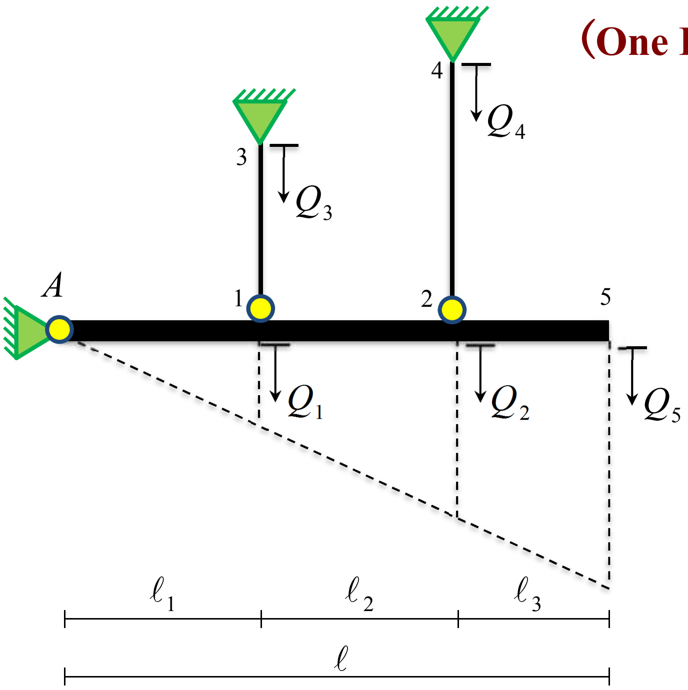
پاسخ مثال ۵-

RL04EX05.txt

```
EXAMPLE 4.5

NODE#   DISPLACEMENT
1     7.4999E-05
2           1.5
3           1.2
ELEM#    STRESS
1           200
2        -40.004
NODE#    REACTION
1         -49999
3         -10001
```


شرایط مرزی وابسته (Multipoint Constraints)

در سیستم‌های سازه‌ای که دارای تکیه‌گاه غلتکی بر روی سطح شیب‌دار هستند و یا از قطعات صلب به منظور اتصال چند المان استفاده شده باشد شرایط مرزی به صورت وابسته می‌باشند:



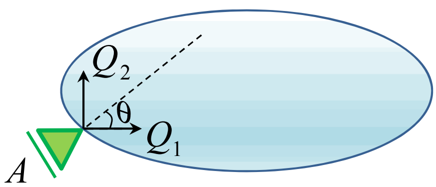
$$\frac{Q_1}{Q_5}=\frac{\ell_1}{\ell} \quad \Rightarrow \quad Q_1-\frac{\ell_1}{\ell}Q_5=0$$

$$\frac{Q_2}{Q_5}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\ell} \quad \Rightarrow \quad Q_2-\frac{\ell_1+\ell_2}{\ell}Q_5=0$$

شرایط مرزی مستقل: Q_3 ,Q_4

شرایط مرزی وابسته: Q_1 ,Q_5

شرایط مرزی وابسته: Q_2 ,Q_5



$$Q_1\cos(\theta)+Q_2\sin(\theta)=0$$

شرایط مرزی وابسته: Q_1 ,Q_2

مراحل گام به گام **شرایط مرزی وابسته (Multipoint Constraints)**

با فرض آن که شرایط مرزی وابسته به درجات آزادی p_1 و p_2 زیر وجود داشته باشد:

$$\boxed{\beta_1 Q_{p_1} + \beta_2 Q_{p_2} = \beta_0} \qquad (108)$$

گام اول: با اضافه نمودن یک عدد به اندازه کافی بزرگ C به درایه‌هایی از ماتریس سختی کل و بردار نیروی گرهی کل که متناظر با درجات آزادی p_1 و p_2 است به زیر اصلاح می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2} \\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} K_{p_1p_1} + C\beta_1^2 & K_{p_1p_2} + C\beta_1\beta_2 \\ K_{p_2p_1} + C\beta_1\beta_2 & K_{p_2p_2} + C\beta_2^2 \end{bmatrix}} \qquad (109)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{p_1} \\ F_{p_2} \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} F_{p_1} + C\beta_0\beta_1 \\ F_{p_2} + C\beta_0\beta_2 \end{Bmatrix}} \qquad (110)$$

گام سوم: محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی

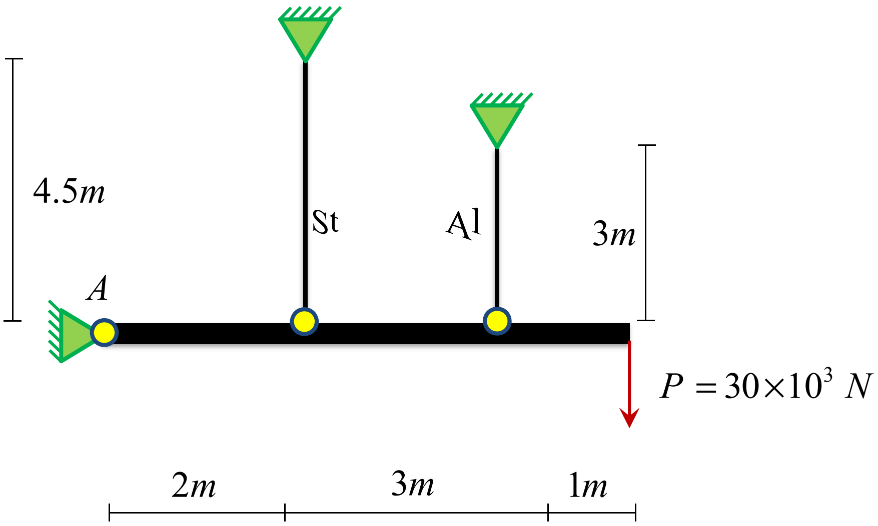
$$\boxed{\begin{aligned} R_{p_1} &= -C\beta_1\left(\beta_1 Q_{p_1} + \beta_2 Q_{p_2} - \beta_0\right) \\ R_{p_2} &= -C\beta_2\left(\beta_1 Q_{p_1} + \beta_2 Q_{p_2} - \beta_0\right) \end{aligned}} \qquad (111)$$

مثال ۶– دو میله نشان داده شده در شکل توسط یک میله صلب بدون وزن به هم متصل شده‌اند. مطلوب است تعیین:

الف– جابجایی گرهی.

ب– مقدار تنش در هر یک از میله‌ها.

ج– عکس العمل‌های تکیه‌گاهی.



Steel

$A = 1200\ mm^2$

$E = 200\times10^3\ N/mm^2$

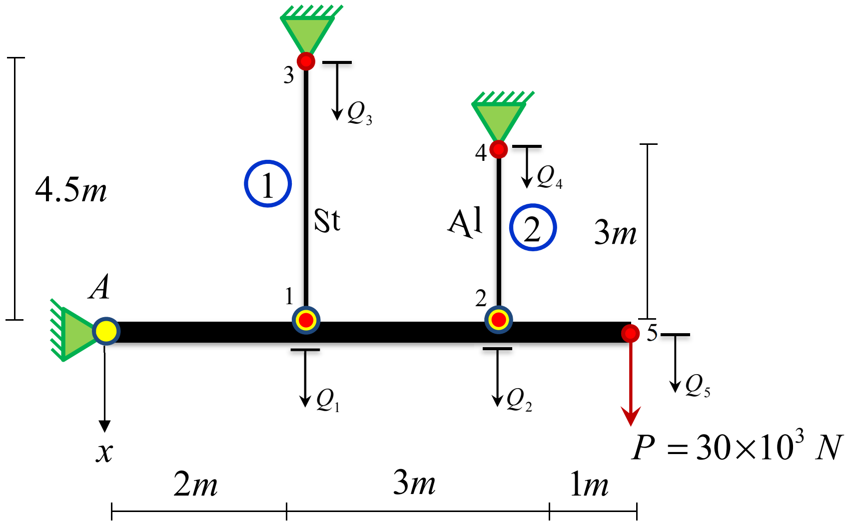
Aluminum

$A = 900\ mm^2$

$E = 70\times10^3\ N/mm^2$

پاسخ مثال ۶–

تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان



تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

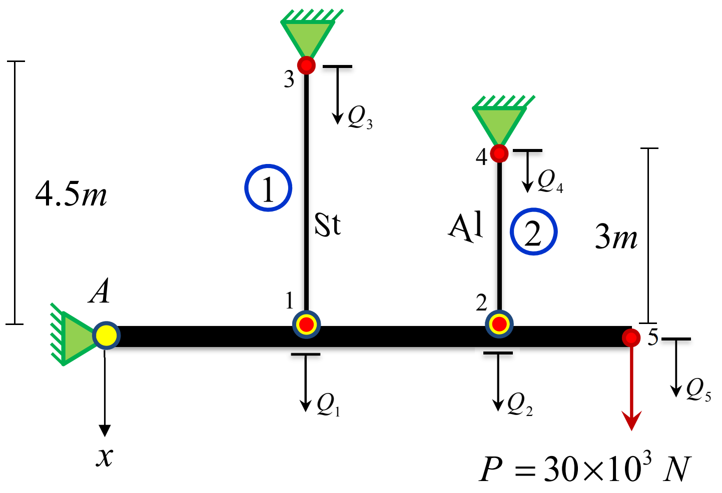
شماره المان e	شماره گره i	j
1	3	1
2	4	2

$n_e = 2$ تعداد المان

$n_{DOF} = 5$ تعداد درجه آزادی $\mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5\}^T$

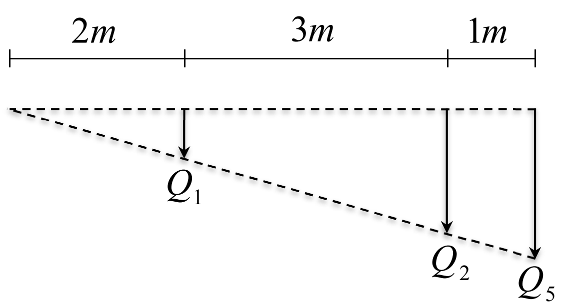
تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان

پاسخ مثال ۶–



BC: شرایط مرزی

(6.1)

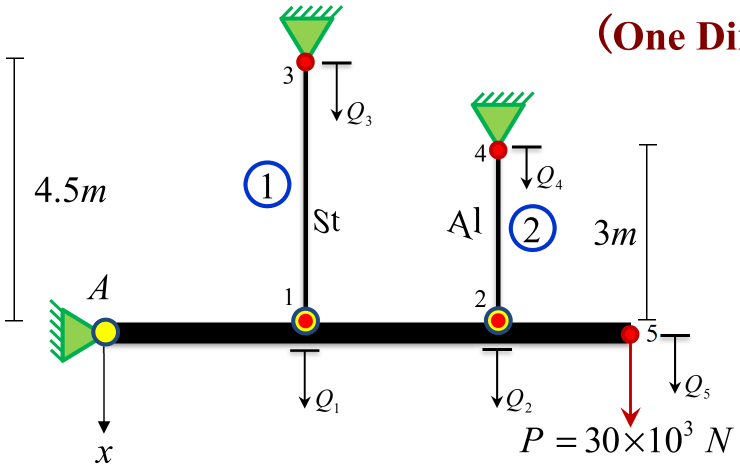


Q_4 ، Q_3: شرایط مرزی مستقل

Q_5 ، Q_1: شرایط مرزی وابسته

Q_5 ، Q_2: شرایط مرزی وابسته

پاسخ مثال ۶-



Steel

$A = 1200\ mm^2$

$E = 200\times10^3\ N\ /\ mm^2$

Aluminum

$A = 900\ mm^2$

$E = 70\times10^3\ N\ /\ mm^2$

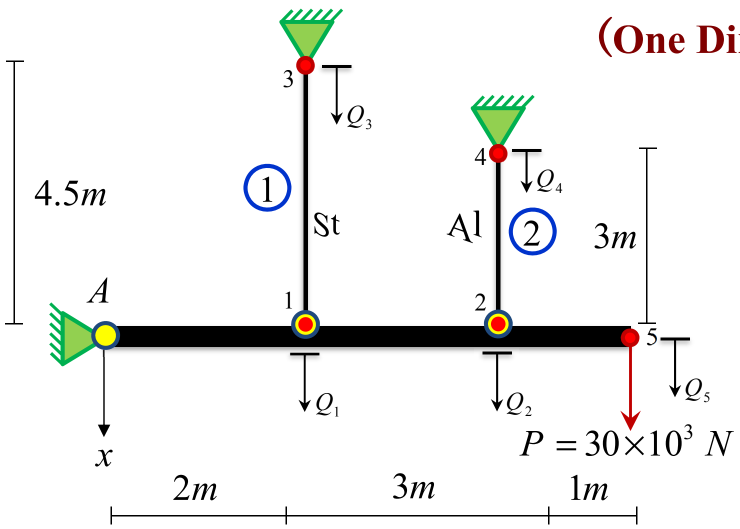
تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (34)

$$(34)\ \Rightarrow\ \boxed{\mathbf{k}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} i \\ j \end{array}}\ \Rightarrow$$

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{(1200)\times(200\times10^3)}{4.5\times10^3\,mm}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \Rightarrow \mathbf{k}^{(1)} = 10^3\times\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 53.33 & -53.33 \\ -53.33 & 53.33 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \quad (6.2)$$

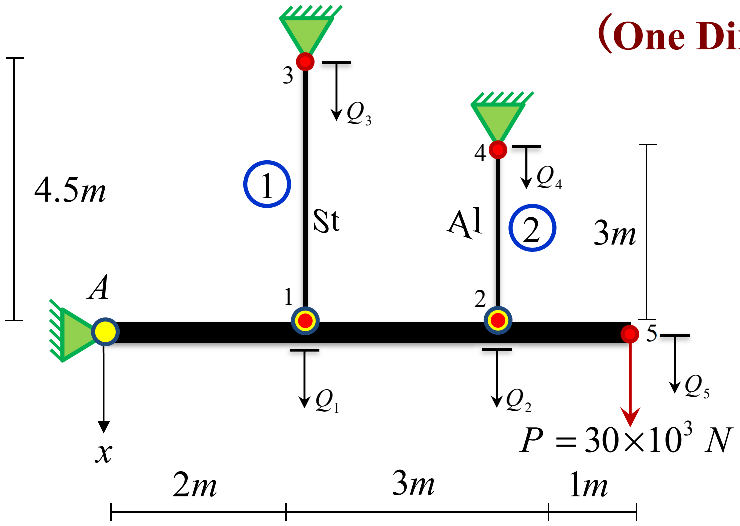
$$\mathbf{k}^{(2)} = 10^3\times\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 21 & -21 \\ -21 & 21 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \quad (6.3)$$

پاسخ مثال ۶-



تشکیل ماتریس سختی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{5\times5} = \sum_{e=1}^{2}\mathbf{k}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K} = 10^3\times\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 53.33 & 0 & -53.33 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & -21 & 0 \\ -53.33 & 0 & 53.33 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}} \quad (6.4)$$



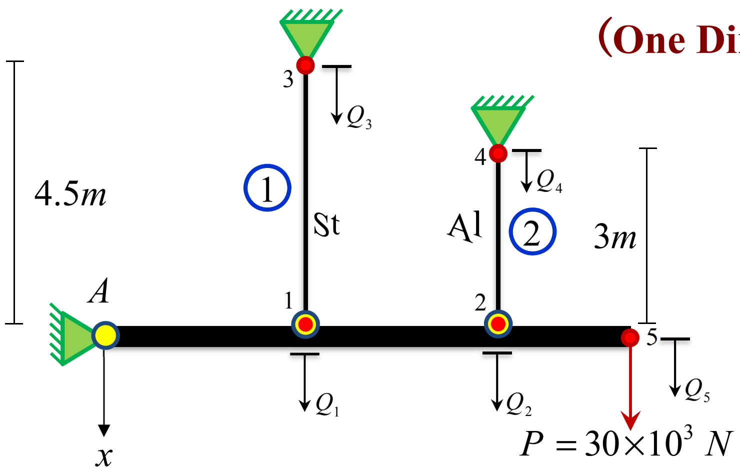
پاسخ مثال ۶–

تشکیل بردار نیروهای متمرکز گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی متمرکز گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{P}\in\mathbb{R}^5=\sum_{e=1}^{2}\mathbf{P}^e \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{P}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\30\times10^3\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}} \quad (6.5)$$

از آنجایی که نیروهای حجمی و کشش طولی نداریم بنابراین بردار نیروهای گرهی کل همان بردار نیروهای متمرکز گرهی است.

$$\boxed{\mathbf{F}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\30\times10^3\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix}} \quad (6.6)$$



پاسخ مثال ۶–

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

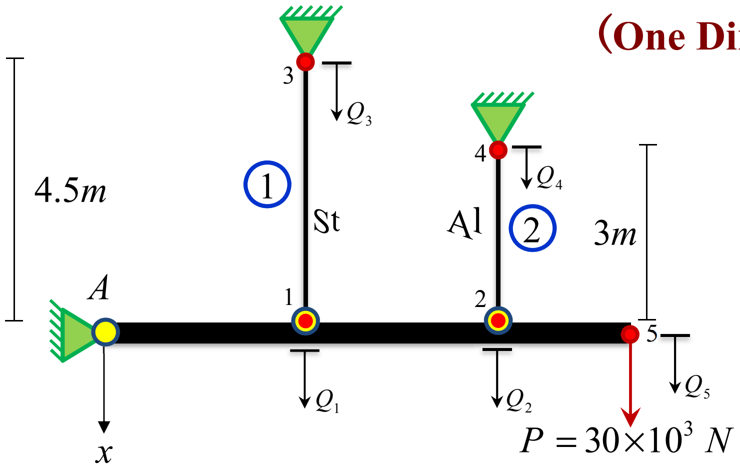
$$\boxed{\begin{aligned}&Q_3=Q_4=0\\&Q_1-0.333Q_5=0\\&Q_2-0.833Q_5=0\end{aligned}} \quad (6.1)$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{C=53.33\times10^7} \quad (6.7)$$

(6.9)

$$=\boxed{10^7\times\begin{array}{c}\begin{array}{cc}1 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}53.33 & -17.77\\ -17.77 & 5.9259\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}1\\5\end{matrix}}$$



پاسخ مثال ۶-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

$$\boxed{\begin{aligned} &Q_3 = Q_4 = 0 \\ &Q_1 - 0.333Q_5 = 0 \\ &Q_2 - 0.833Q_5 = 0 \end{aligned}} \quad (6.1)$$

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

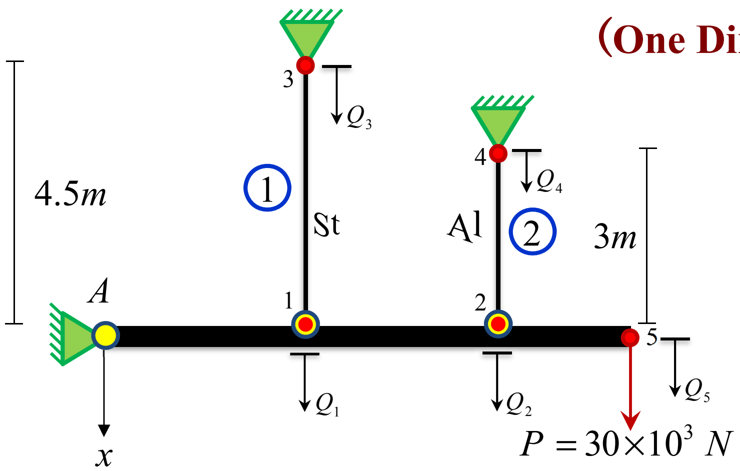
$$(108) \Rightarrow \begin{aligned} Q_2 - 0.833Q_5 = 0 \\ \beta_1 Q_{p_1} + \beta_2 Q_{p_2} = \beta_0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\beta_1 = 1 \quad , \quad \beta_2 = -0.833 \quad , \quad \beta_0 = 0} \quad (6.11)$$

(6.12)

$$(109) \Rightarrow C \times \begin{bmatrix} \beta_1^{\,2} & \beta_1\beta_2 \\ \beta_1\beta_2 & \beta_2^{\,2} \end{bmatrix} = 53.33\times10^7 \times \begin{bmatrix} (1)^2 & (1)(-0.833) \\ (1)(-0.833) & (-0.333)^2 \end{bmatrix} = 10^7 \times \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 53.33 & -44.44 \\ -44.44 & 37.037 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$(110) \Rightarrow C \times \begin{Bmatrix} \beta_0\beta_1 \\ \beta_0\beta_2 \end{Bmatrix} = 53.33\times10^7 \times \begin{Bmatrix} (0)(1) \\ (0)(-0.833) \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array}} \quad (6.13)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)



پاسخ مثال ۶-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

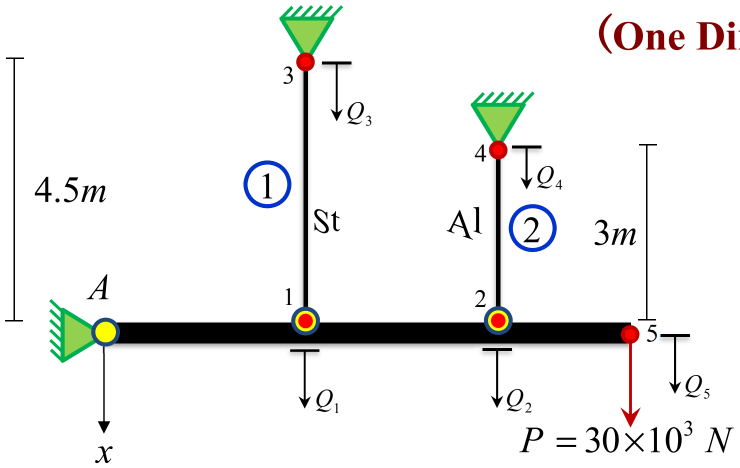
گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

همچنین با توجه به $Q_3 = Q_4 = 0$ در ماتریس اصلاح شده مقدار بزرگ C به درایه‌های قطری متناظر با درجات آزادی Q_3 و Q_4 اضافه می‌گردد.

$$(6.9)\,\&\,(6.12) \rightarrow (6.4) \quad \Rightarrow$$

(6.14)

$$\bar{\mathbf{K}} = 10^3 \times \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 53.33+53.33\times10^4 & 0 & -53.33 & 0 & 0-17.77\times10^4 \\ 0 & 21+53.33\times10^4 & 0 & -21 & 0-44.44\times10^4 \\ -53.33 & 0 & 53.33+53.33\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 21+53.33\times10^4 & 0 \\ 0-17.77\times10^4 & 0-44.44\times10^4 & 0 & 0 & 0+5.9259\times10^4+37.037\times10^4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$



پاسخ مثال ۶-

اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی

گام اول: اصلاح ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی

با ساده سازی رابطه (6.14) خواهیم داشت:

$$
(6.14)\quad \Rightarrow\quad \bar{\mathbf{K}} = 10^3\times
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
533386.7 & 0 & -53.33 & 0 & -177777.7\\
0 & 533354.3 & 0 & -21 & -444444.4\\
-53.33 & 0 & 533386.7 & 0 & 0\\
0 & -21 & 0 & 533354.3 & 0\\
-177777.7 & -444444.4 & 0 & 0 & 429629.6
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}
\qquad (6.15)
$$

پاسخ مثال ۶-

معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow$$

$$
10^3\times
\begin{bmatrix}
533386.7 & 0 & -53.33 & 0 & -177777.7\\
0 & 533354.3 & 0 & -21 & -444444.4\\
-53.33 & 0 & 533386.7 & 0 & 0\\
0 & -21 & 0 & 533354.3 & 0\\
-177777.7 & -444444.4 & 0 & 0 & 429629.6
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 30\times10^3 \end{Bmatrix}
\qquad (6.16)
$$

با حل معادله (6.16) بردار جابجایی‌های گرهی کل به دست می‌آید:

$$
(6.16)\quad \Rightarrow\quad
\begin{Bmatrix} Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0.486\\ 1.215\\ 4.85\times10^{-5}\\ 4.78\times10^{-5}\\ 1.457 \end{Bmatrix} mm
\qquad (6.17)
$$

پاسخ مثال ۶–

محاسبه تنش:

$$(23) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(e)} = E_e \frac{1}{\ell_e}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix}} \quad (6.18)$$

$$\sigma^{(1)} = 200\times10^3 \frac{1}{4500}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} 1.215 \\ 0.486 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(1)} = 21.60\left(Mpa = \frac{N}{mm^2}\right)} \quad (6.19)$$

$$\sigma^{(2)} = 70\times10^3 \frac{1}{3000}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} 4.85\times10^{-5} \\ 1.215 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(2)} = 28.35\left(Mpa = \frac{N}{mm^2}\right)} \quad (6.20)$$

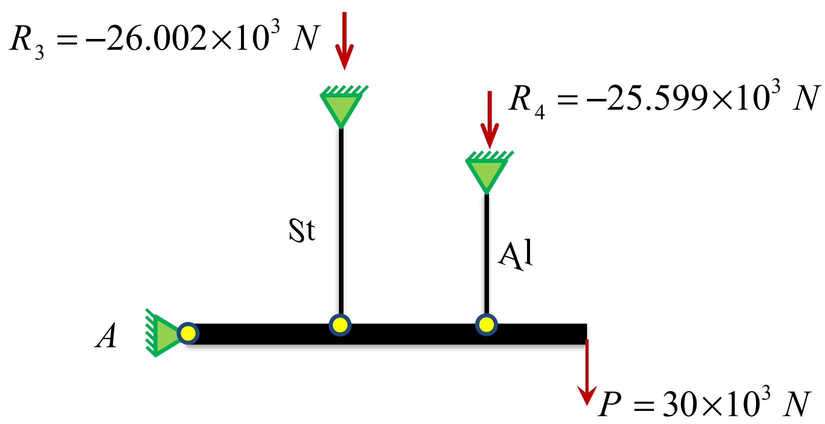
پاسخ مثال ۶–

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$(107) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{p_i} = -C\left(Q_{p_i} - \alpha_i\right) \qquad i = 3,4} \quad (6.21)$$

$$(6.21) \Rightarrow \quad R_3 = -C\left(Q_3 - \alpha_3\right) = -53.33\times10^7\left(4.85\times10^{-5} - 0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_3 = -26.002\times10^3 \; N} \quad (6.22)$$

$$\boxed{R_4 = -25.599\times10^3 \; N} \quad (6.23)$$



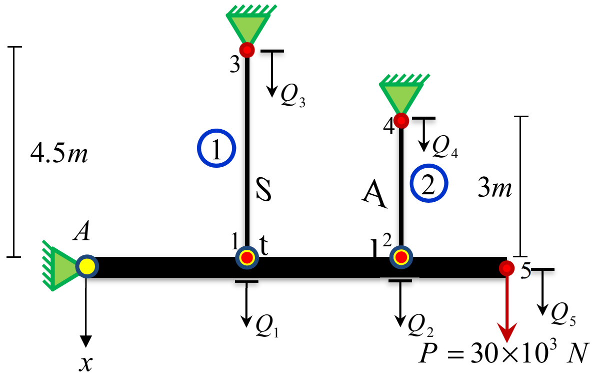
پاسخ مثال ۶– نام فایل برنامه: fem1d.m

نام فایل ورودی: L04EX06.txt

نام فایل خروجی: RL04EX06.txt

L04EX06.txt

```
Next line is problem title    << 1D STRESS ANALYSIS USING BAR ELEMENT >>
EXAMPLE 4.6
NN NE NM NDIM NEN NDN
 5  2  2   1   2   1
ND NL NCH NPR NMPC
 2  1  1   2   2
Node#   X-Coordinate
 1      0
 2      0
 3     -4500
 4     -3000
 5      0
Elem#  N1  N2  Mat#  Area TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1     1   3    1    1200   0
 2     2   4    2    900    0
DOF#  Displacement
 3     0
 4     0
DOF#  Load
 5    30000
MAT#  E   Alpha
 1   200000  0
 2   70000   0
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
1   1  -0.3333  5   0
1   2  -0.8333  5   0
```



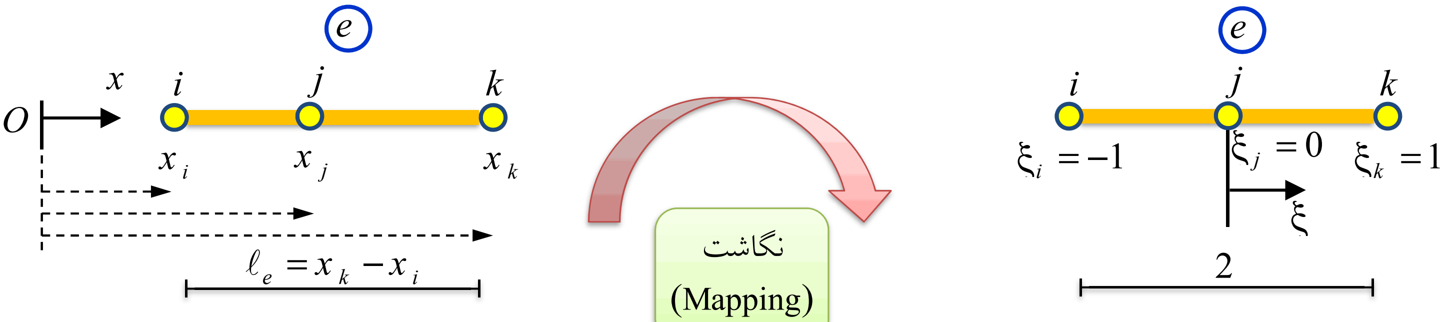
پاسخ مثال ۶–

RL04EX06.txt

```
EXAMPLE 4.6

NODE#   DISPLACEMENT
1          0.4876
2          1.2191
3      4.8755E-05
4      4.8002E-05
5          1.4631
ELEM#    STRESS
1          21.669
2          28.446
NODE#    REACTION
3          -26003
4          -25601
```

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

در بعضی مسائل استفاده از توابع شکل خطی و درون‌یابی آن‌ها برای به دست آوردن تغییر شکل با خطا مواجه می‌شود. به همین منظور پیشنهاد می‌گردد که از توابع شکل درجه دوم استفاده شود.



المان یک بُعدی در مختصات کلی (Global Coordinate)

المان یک بُعدی در مختصات طبیعی یا ذاتی (Natural or Intrinsic Coordinate)

رابطه بین مختصات x و ξ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\boxed{\xi = \frac{2(x - x_j)}{\ell_e}} \quad (112)$$

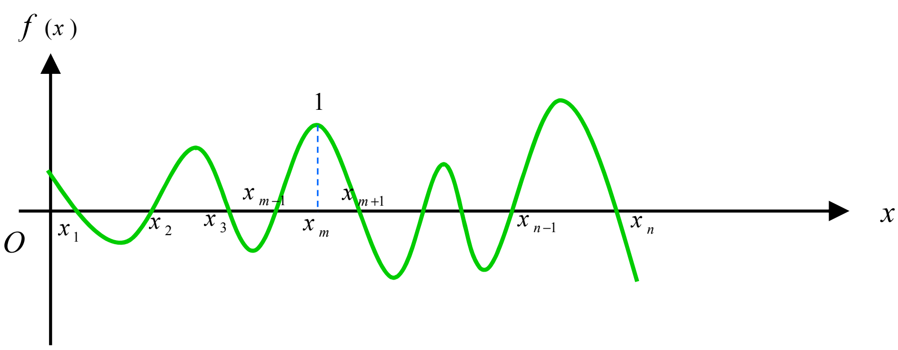
زمانی که مختصات x از x_i تا x_k تغییر می‌کند مختصات ξ از 1- تا 1 تغییر خواهد کرد.

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

چند جمله‌ای لاگرانژ (Lagrange polynomial)

تابعی که در نقاط $x_1, x_2, \cdots, x_n$ مقدار آن صفر باشد و در نقطه x_m مقدار آن برابر با 1 باشد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{m-1})(x - x_{m+1})\cdots(x - x_n)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2)\cdots(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})\cdots(x_m - x_n)}} \quad (113)$$



مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

چند جمله‌ای لاگرانژ (Lagrange polynomial)

با توجه به چند جمله‌ای لاگرانژ توابع شکل برای یک المان سه گرهی به صورت زیر به دست می‌آید:

۱- تابع شکل $N_1(\xi)$:

$$@N_1(\xi) \;\Rightarrow\; N_1(-1)=1 \;,\; N_1(0)=0 \;,\; N_1(1)=0$$

$$(113) \;\Rightarrow\; N_1(\xi)=\frac{(\xi-\xi_j)(\xi-\xi_k)}{(\xi_i-\xi_j)(\xi_i-\xi_k)}=\frac{(\xi-0)(\xi-1)}{(-1-0)(-1-1)} \;\Rightarrow\; \boxed{N_1(\xi)=\frac{\xi(\xi-1)}{2}} \quad (114)$$

۲- تابع شکل $N_2(\xi)$:

$$@N_2(\xi) \;\Rightarrow\; N_2(-1)=0 \;,\; N_2(0)=1 \;,\; N_2(1)=0$$

$$(113) \;\Rightarrow\; N_2(\xi)=\frac{(\xi-\xi_i)(\xi-\xi_k)}{(\xi_j-\xi_i)(\xi_j-\xi_k)}=\frac{(\xi-(-1))(\xi-1)}{(0-(-1))(0-1)} \;\Rightarrow\; \boxed{N_2(\xi)=1-\xi^2} \quad (115)$$

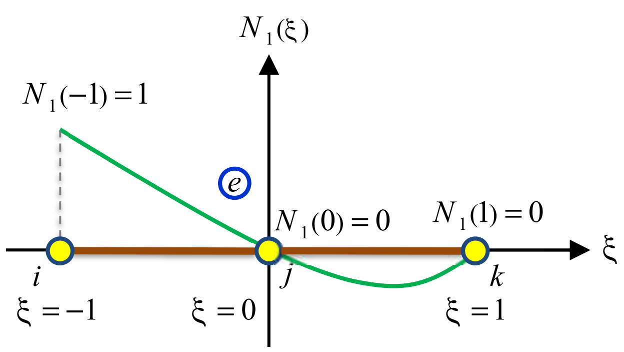
۳- تابع شکل $N_3(\xi)$:

$$@N_3(\xi) \;\Rightarrow\; N_3(-1)=0 \;,\; N_3(0)=0 \;,\; N_3(1)=1$$

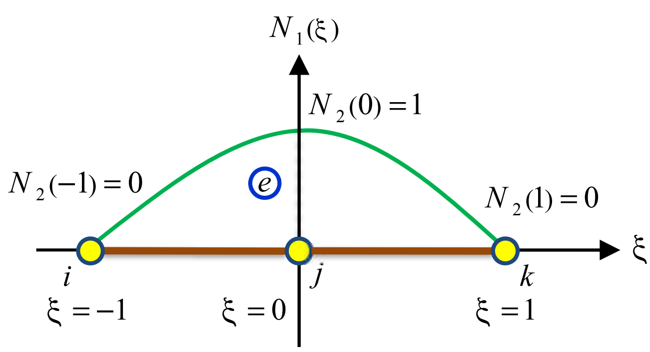
$$(113) \;\Rightarrow\; N_3(\xi)=\frac{(\xi-\xi_i)(\xi-\xi_j)}{(\xi_k-\xi_i)(\xi_k-\xi_j)}=\frac{(\xi-(-1))(\xi-0)}{(1-(-1))(1-0)} \;\Rightarrow\; \boxed{N_3(\xi)=\frac{\xi(\xi+1)}{2}} \quad (116)$$

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

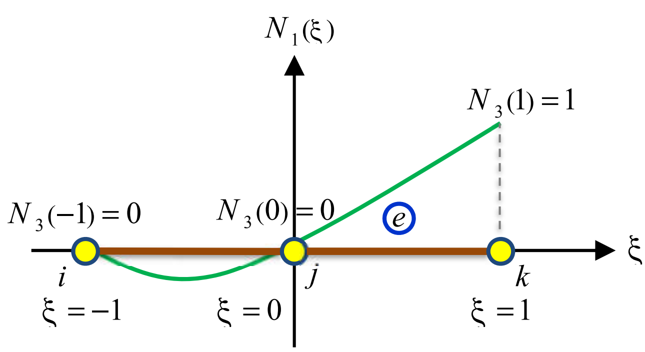
نمودار توابع شکل به صورت زیر رسم می‌شود:



نمودار تابع شکل $N_1(\xi)$ بر روی المان سه گرهی



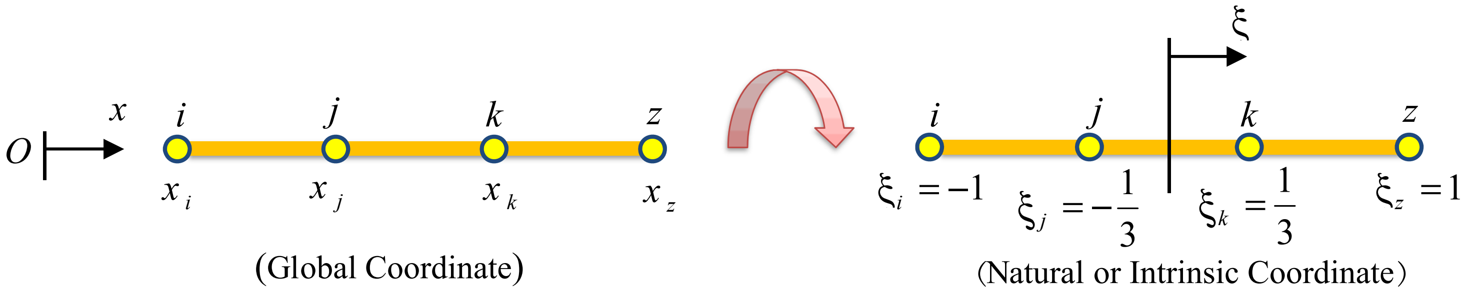
نمودار تابع شکل $N_2(\xi)$ بر روی المان سه گرهی



نمودار تابع شکل $N_3(\xi)$ بر روی المان سه گرهی

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

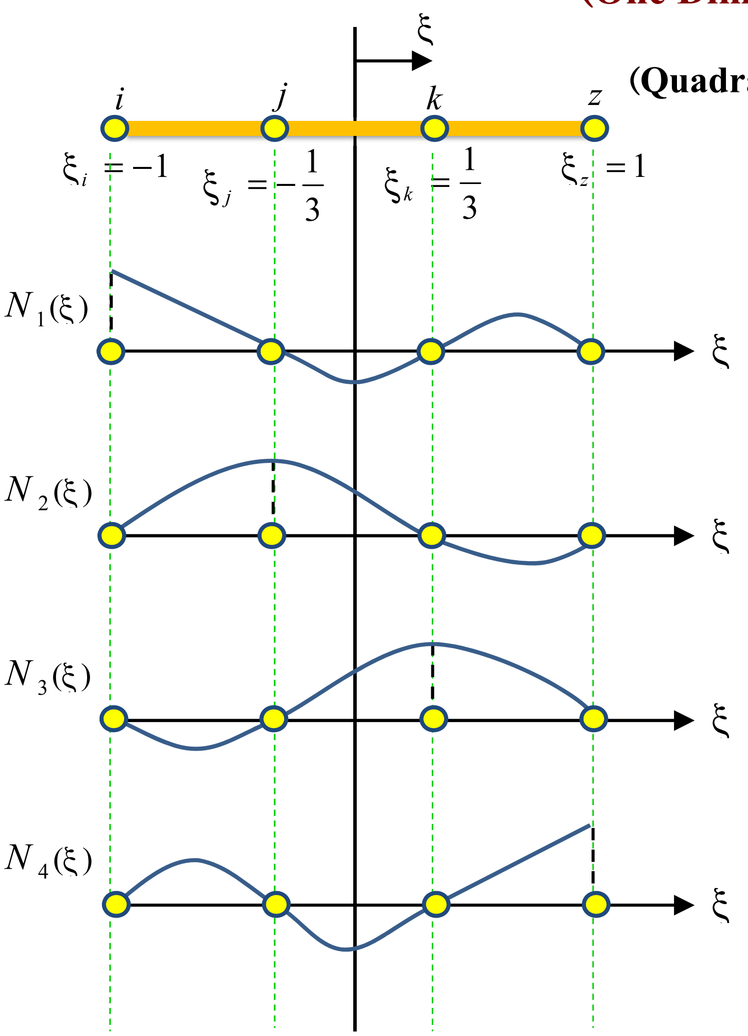
به طور مشابه می‌توان به سادگی توابع شکل المان چهار گرهی رابه کمک قضیه لاگرانژ به صورت زیر نوشت:



$$\boxed{\begin{array}{ll} N_1(\xi) = \dfrac{\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(\xi-1)}{\left(-1+\frac{1}{3}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)(-1-1)} & N_3(\xi) = \dfrac{(\xi+1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)(\xi-1)}{\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)} \\ N_2(\xi) = \dfrac{(\xi+1)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(\xi-1)}{\left(-\frac{1}{3}+1\right)\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)} & N_4(\xi) = \dfrac{(\xi+1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)}{(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)} \end{array}} \qquad (117)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)



نمودار توابع شکل المان چهار گرهی را به صورت مقابل است:

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

با استفاده از توابع شکل $N_1(\xi)$ ، $N_2(\xi)$ و $N_3(\xi)$ جابجایی نقاط موجود بر روی المان براساس جابجایی‌های گرهی نقاط Q_i ، Q_j و Q_k به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{u_{(\xi)} = N_1(\xi)Q_i + N_2(\xi)Q_j + N_3(\xi)Q_k} \quad (118)$$

فرم ماتریسی رابطه (118) به صورت زیر نوشته می‌شود:

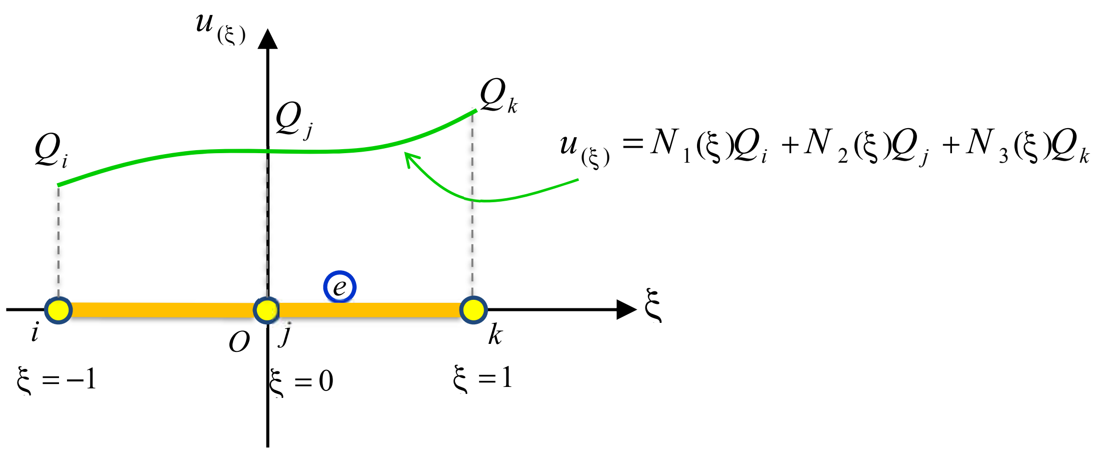
$$\boxed{u_{(\xi)} = \mathbf{N}\mathbf{q}^e} \quad (119)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{N} = \{N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi)\}} \quad (120) \qquad \boxed{\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix}} \quad (121)$$

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

نمودار جابجایی نقاط موجود بر روی المان براساس رابطه (118) در شکل زیر نشان داده شده است:



رابطه کرنش- جابجایی که پیش‌تر بررسی شد در این‌جا تکرار می‌شود:

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{(x)} = \frac{du_{(\xi)}}{dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{(x)} = \frac{du_{(\xi)}}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dx}} \quad (16)$$

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

با مشتق گیری از رابطه (119) نسبت به ξ خواهیم داشت:

$$(119) \quad \Rightarrow \quad \frac{du_{(\xi)}}{d\xi} = \frac{d\,\mathbf{N}_{(\xi)}}{d\xi} \times \mathbf{q}^e \quad \overset{(120)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\frac{du_{(\xi)}}{d\xi} = \left\{ \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \quad \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \quad \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} \right\} \mathbf{q}^e} \quad (122)$$

همچنین با مشتق‌گیری از ξ در رابطه (112) نسبت به x نتیجه می‌شود:

$$(112) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2(x - x_j)}{\ell_e} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{\ell_e}} \quad (123)$$

با جایگذاری روابط (122) و (123) در رابطه (16) رابطه کرنش برحسب جابجایی‌های گرهی المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(122)\,\&\,(123) \rightarrow (16) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{(x)} = \frac{2}{\ell_e}\left\{ \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \quad \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \quad \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} \right\} \mathbf{q}^e} \quad (124)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

با جایگذاری روابط (114) تا (116) در رابطه (124) مقدار کرنش برابر است با:

$$(114)\,to\,(116) \rightarrow (124) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{(x)} = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e} \quad (125)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{B}^e = \frac{2}{\ell_e}\left\{ \frac{2\xi - 1}{2} \quad -2\xi \quad \frac{2\xi + 1}{2} \right\}} \quad (126)$$

$\mathbf{B}^e$: ماتریس کرنش-جابجایی المان (Element Strain-Displacement Matrix)

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

استفاده از توابع شکل درجه دوم منجر به خطی بودن ماتریس $\mathbf{B}^e$ نسبت به ξ می‌گردد. از این رو، کرنش در طول المان ثابت نیست. بنابراین کرنش و بالتبع آن تنش می‌تواند در طول المان به صورت خطی تغییر کند. با بکارگیری قانون هوک از رابطه (2) تنش در المان یک بُعدی سه گرهی برحسب جابجایی‌های گرهی المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(125) \rightarrow (2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{(x)} = E_e\, \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e} \qquad (II)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (126) در رابطه (II) مقدار تنش در المان یک بُعدی سه گرهی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(121)\,\&\,(126) \rightarrow (II) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^e = \frac{2E_e}{\ell_e}\begin{Bmatrix} \frac{2\xi-1}{2} & -2\xi & \frac{2\xi+1}{2} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix}} \qquad (127)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با توجه به روابط تنش و کرنش به دسته آمده در روابط (125) و (127) و جایگذاری آن در رابطه انرژی کرنشی المان در رابطه (26) نتیجه می‌شود:

$$(125)\,\&\,(127) \rightarrow (26) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}\int_e (\mathbf{q}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T E_e\, \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e A_e d_x} \qquad (128)$$

از آنجایی که $\mathbf{q}^e$ بردار جابجایی گرهی المان ثابت است رابطه (128) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(128) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \left(\int_e (\mathbf{B}^e)^T E_e\, \mathbf{B}^e A_e d_x \right) \mathbf{q}^e} \qquad (129)$$

از طرف دیگر با توجه به ثابت بودن E_e و A_e در طول المان می‌توان این پارامترها را نیز از انتگرال رابطه (129) خارج کرد. اما توجه شود که ماتریس $\mathbf{B}^e$ ثابت نبوده و نمی‌توان آن را از انتگرال خارج نمود. همچنین با تغییر مختصات به مختصات طبیعی براساس رابطه (123)، رابطه (129) به صورت زیر در می‌آید:

$$(123) \rightarrow (129) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \left(A_e \frac{\ell_e}{2} E_e \int_{-1}^{1} (\mathbf{B}^e)^T\, \mathbf{B}^e d\xi \right) \mathbf{q}^e} \qquad (130)$$

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

با جایگذاری ماتریس $\mathbf{B}^e$ از رابطه (126) در رابطه (130) خواهیم داشت:

$$(126) \rightarrow (130) \quad \Rightarrow \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \left(\frac{2A_eE_e}{\ell_e} \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} \frac{2\xi-1}{2} \\ -2\xi \\ \frac{2\xi+1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2\xi-1}{2} & -2\xi & \frac{2\xi+1}{2} \end{Bmatrix} d\xi \right) \mathbf{q}^e} \quad (131)$$

با بسط رابطه (31) نتیجه می‌شود:

$$(131) \quad \Rightarrow \boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \left(\frac{A_eE_e}{3\ell_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \right) \mathbf{q}^e} \quad (132)$$

رابطه (132) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e} \quad (133)$$

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

ماتریس سختی المان (Element Stiffness Matrix)

که در آن

$$\boxed{\mathbf{k}^e = \frac{A_eE_e}{3\ell_e} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array}} \quad (134)$$

$\mathbf{k}^e \in \mathbb{R}^{3\times3}$: ماتریس سختی المان e اُم در حالت المان خطی سه گرهی

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

با جایگذاری تغییر شکل از رابطه (119) در رابطه (35) خواهیم داشت:

$$(119)\rightarrow(35)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_e u^T f\ A_e d_x = \int_e (\mathbf{q}^e)^T\ \mathbf{N}^T f\ A_e d_x} \qquad (135)$$

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (120) در رابطه (135) :

$$(120)\rightarrow(135)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_e u^T f\ A_e d_x = (\mathbf{q}^e)^T \int_e \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \\ N_3(\xi) \end{Bmatrix} f\ A_e d_x} \qquad (136)$$

با جایگذاری مقدار توابع شکل از روابط (114) تا (116) در رابطه (136) :

$$(114)to(116)\rightarrow(136)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_e u^T f\ A_e d_x = (\mathbf{q}^e)^T \int_e \begin{Bmatrix} \dfrac{\xi(\xi-1)}{2} \\ 1-\xi^2 \\ \dfrac{\xi(\xi+1)}{2} \end{Bmatrix} f\ A_e d_x} \qquad (137)$$

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

برداری نیروی حجمی المان (Element Body Force Vector)

با بسط دادن رابطه (137) و همچنین تغییر متغیر دیفرانسیلی انتگرال از d_x به $d\xi$ (زیرا توابع شکل تابعی از ξ هستند) به کمک رابطه (123) نتیجه می‌شود:

$$(123)\rightarrow(137)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_e u^T f\ A_e d_x = (\mathbf{q}^e)^T\ \frac{A_e \ell_e f}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}} \qquad (138)$$

رابطه (138) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\int_e u^T f\ A_e d_x = (\mathbf{q}^e)^T\ \mathbf{f}^e} \qquad (139)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{f}^e = \frac{A_e \ell_e f}{6} \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array}} \qquad (140)$$

$\mathbf{f}^e \in \mathbb{R}^3$: بردار نیروی حجمی المان e اُم در حالت المان خطی سه گرهی

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

با جایگذاری تغییر شکل از رابطه (119) در رابطه (43) خواهیم داشت:

$$(119)\rightarrow(43)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_e u^T T\, d_x=\int_e (\mathbf{q}^e)^T\,\mathbf{N}^T T\, d_x}\quad(141)$$

با جایگذاری تابع شکل از رابطه (120) در رابطه (141) :

$$(120)\rightarrow(141)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_e u^T T\, d_x=(\mathbf{q}^e)^T\int_e \begin{Bmatrix} N_1(\xi)\\ N_2(\xi)\\ N_3(\xi)\end{Bmatrix} T\, d_x}\quad(142)$$

با جایگذاری مقدار توابع شکل از روابط (114) تا (116) در رابطه (142) :

$$(114)\,to\,(116)\rightarrow(142)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_e u^T T\, d_x=(\mathbf{q}^e)^T\int_e \begin{Bmatrix} \dfrac{\xi(\xi-1)}{2}\\ 1-\xi^2\\ \dfrac{\xi(\xi+1)}{2}\end{Bmatrix} T\, d_x}\quad(143)$$

توابع شکل درجه دوم (Quadratic Shape Functions)

برداری نیروی طولی المان (Element Traction Force Vector)

با بسط دادن رابطه (143) و همچنین تغییر متغیر دیفرانسیلی انتگرال از d_x به $d\xi$ (زیرا توابع شکل تابعی از ξ هستند) به کمک رابطه (123) نتیجه می‌شود:

$$(123)\rightarrow(143)\quad \boxed{\Rightarrow\quad \int_e u^T T\, d_x=(\mathbf{q}^e)^T\,\frac{\ell_e T}{6}\begin{Bmatrix}1\\4\\1\end{Bmatrix}}\quad(144)$$

رابطه (144) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\int_e u^T T\, d_x=(\mathbf{q}^e)^T\,\mathbf{T}^e}\quad(145)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{T}^e=\frac{\ell_e T}{6}\begin{Bmatrix}1\\4\\1\end{Bmatrix}\begin{matrix}i\\j\\k\end{matrix}}\quad(146)$$

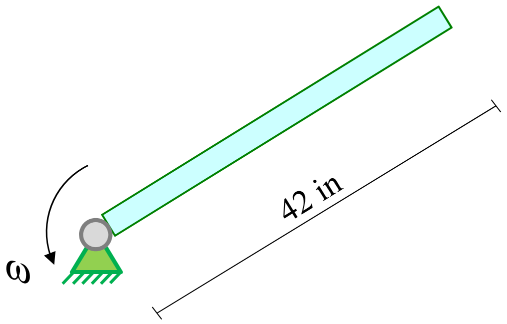
$\mathbf{T}^e\in\mathbb{R}^3$: بردار نیروی طولی المان e اُم در حالت المان خطی سه گرهی

مثال ۷– میله صلب نشان داده شده با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = 30\ rad/\sec$ در حال دوران است. با در نظر گرفتن نیروی گریز از مرکز (Centrifugal Force) مطلوب است تعیین:

الف– جابجایی گرهی.

ب– توزیع تنش در طول میله.

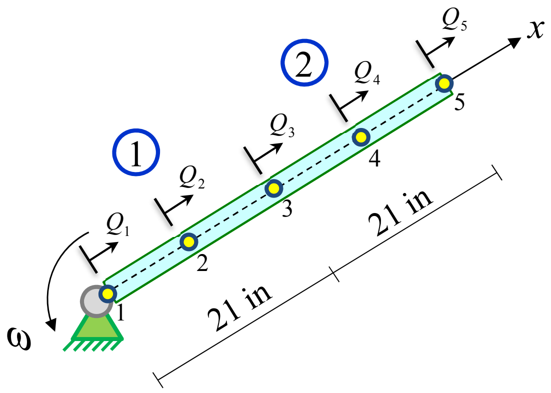
ج– عکس العمل تکیه‌گاهی در راستای محور میله.



$$A = 0.6\ in^2$$
$$E = 10^7\ psi$$
$$\rho = 0.2836\ lb/in^3$$

پاسخ مثال ۷–

تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان



تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

شماره المان e	شماره گره i	j	k
1	1	2	3
2	3	4	5

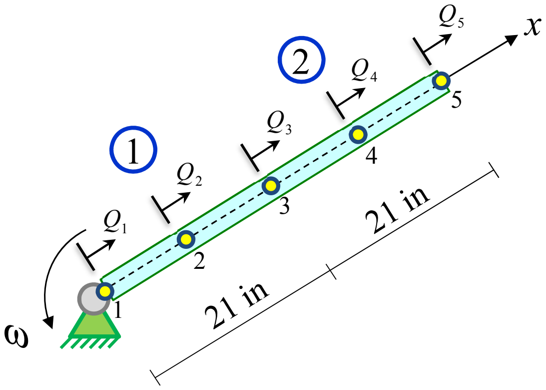
تعداد المان $n_e = 2$

تعداد درجه آزادی $n_{DOF} = 5$ $\quad \mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5\}^T$

شرایط مرزی $: BC$

پاسخ مثال ۷–

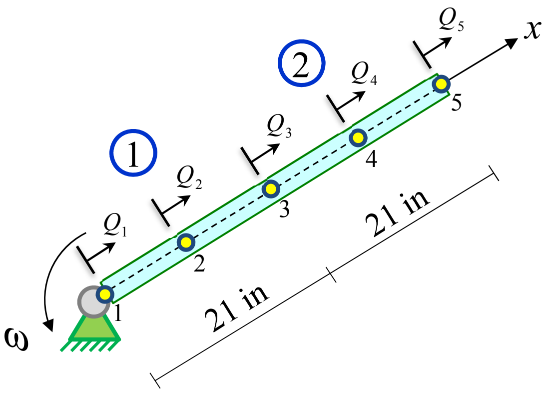
تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (134)



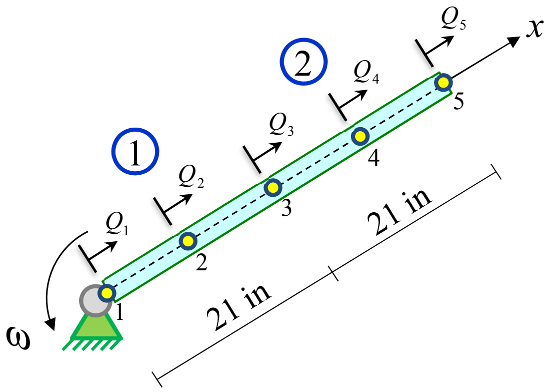
$$\mathbf{k}^{(2)} = \frac{0.6\times10^{7}}{3(21)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (7.2)$$

پاسخ مثال ۷–

تشکیل ماتریس سختی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها



$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{5\times5} = \sum_{e=1}^{2} \mathbf{k}^{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \frac{0.6\times10^{7}}{3(21)} \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (7.3)$$



پاسخ مثال ۷-

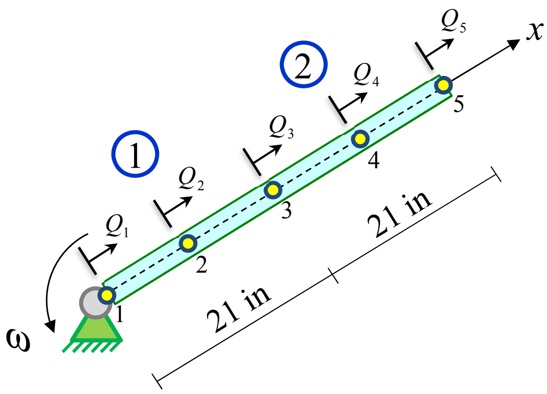
نیروی حجمی براساس نیروی گریز از مرکز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

از آنجایی نیروی حجمی تابعی از r است از این رو در طول المان از مقدار متوسط آن استفاده می‌شود. به عبارت دیگر فاصله مرکز المان در نظر گرفته خواهد شد.

$$\boxed{f_1 = 6.94 \;\; lb/in^3} \quad (7.5)$$

$$(7.4) \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{\rho r_2 \omega^2}{g} = \frac{0.2836 \times (21 + 10.5) \times (30)^2}{32.2\,(ft/\sec^2) \times 12\,in} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_2 = 20.81 \;\; lb/in^3} \quad (7.6)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)



پاسخ مثال ۷-

تشکیل بردار نیروی حجمی هر المان براساس رابطه (140)

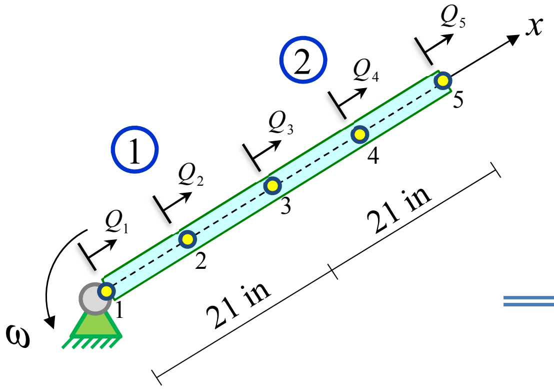
$$\boxed{\mathbf{f}^{(2)} = \frac{0.6 \times 21 \times 20.81}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}} \quad (7.8)$$

تشکیل بردار نیروهای حجمی گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی حجمی گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^5 = \sum_{e=1}^{2} \mathbf{f}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 14.57 \\ 58.26 \\ 58.26 \\ 174.79 \\ 43.7 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}} \quad (7.9)$$

پاسخ مثال ۷–

از آنجایی که نیروهای متمرکز و طولی ندارم از این رو بردار نیروهای گرهی کل برابر با **f** می‌شود:



$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^5 = \mathbf{f} \quad \overset{(7.9)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mathbf{F} = \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} 14.57 \\ 58.26 \\ 58.26 \\ 174.79 \\ 43.7 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}} \quad (7.10)$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی $\quad Q_1 = 0$

گام اول: ذخیره‌کردن سطرهای 1 از ماتریس سختی کل و بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{\begin{gathered} \{K_{11} \quad K_{12} \quad K_{13} \quad K_{14} \quad K_{15}\} = \frac{0.6\times10^7}{3(21)} \times \{7 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \quad 0\} \\ F_1 = 14.57 \end{gathered}} \quad (7.11)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۷–

گام دوم: سطر و ستون 1 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطر 1 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از دارایه‌های بردار نیروهای گرهی کل به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$(94) \quad \Rightarrow \quad \bar{F}_i = F_i - (K_{i1}\alpha_1) \quad \overset{\alpha_1 = 0}{\Rightarrow} \quad \boxed{\bar{F}_i = F_i \qquad i = 2,3,4,5} \quad (7.12)$$

معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}} \quad \overset{(7.3)\&(7.10)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\frac{0.6\times10^7}{3(21)} \times \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 58.26 \\ 58.26 \\ 174.79 \\ 43.7 \end{Bmatrix}} \quad (7.13)$$

با حل معادله (7.13) بردار جابجایی‌های گرهی کل به دست می‌آید:

$$(7.13) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5735 \\ 1.0706 \\ 1.4147 \\ 1.5294 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}\, in} \quad (7.14)$$

پاسخ مثال ۷–

محاسبه تنش:

$$(127) \quad \Rightarrow \boxed{\sigma^e = E_e \frac{2}{\ell_e}\left\{\frac{2\xi-1}{2} \quad -2\xi \quad \frac{2\xi+1}{2}\right\}\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix}} \quad (7.15)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر تنش در طول المان متغیر و تابعی از ξ است.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

پاسخ مثال ۷–

محاسبه تنش:

$$\boxed{\sigma_1^{(1)} = 583\,psi} \quad (7.17)$$

$$@Node\ 2 \quad \xi = 0 \quad \overset{(7.16)}{\Rightarrow} \quad \sigma_2^{(1)} = 10^7 \times \frac{2}{21} \times 10^{-3}\{-0.5 \quad 0 \quad 0.5\}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5735 \\ 1.0706 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma_2^{(1)} = 510\,psi} \quad (7.18)$$

$$@Node\ 3 \quad \xi = 1 \quad \overset{(7.16)}{\Rightarrow} \quad \sigma_3^{(1)} = 10^7 \times \frac{2}{21} \times 10^{-3}\{0.5 \quad -2 \quad 1.5\}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5735 \\ 1.0706 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma_3^{(1)} = 437\,psi} \quad (7.19)$$

پاسخ مثال ۷–

محاسبه تنش:

$$(7.15)\quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(2)} = 10^{7} \times \frac{2}{21}\left\{\frac{2\xi-1}{2} \quad -2\xi \quad \frac{2\xi+1}{2}\right\}\begin{Bmatrix}1.0706\\1.4147\\1.5294\end{Bmatrix}\times 10^{-3}} \quad (7.20)$$

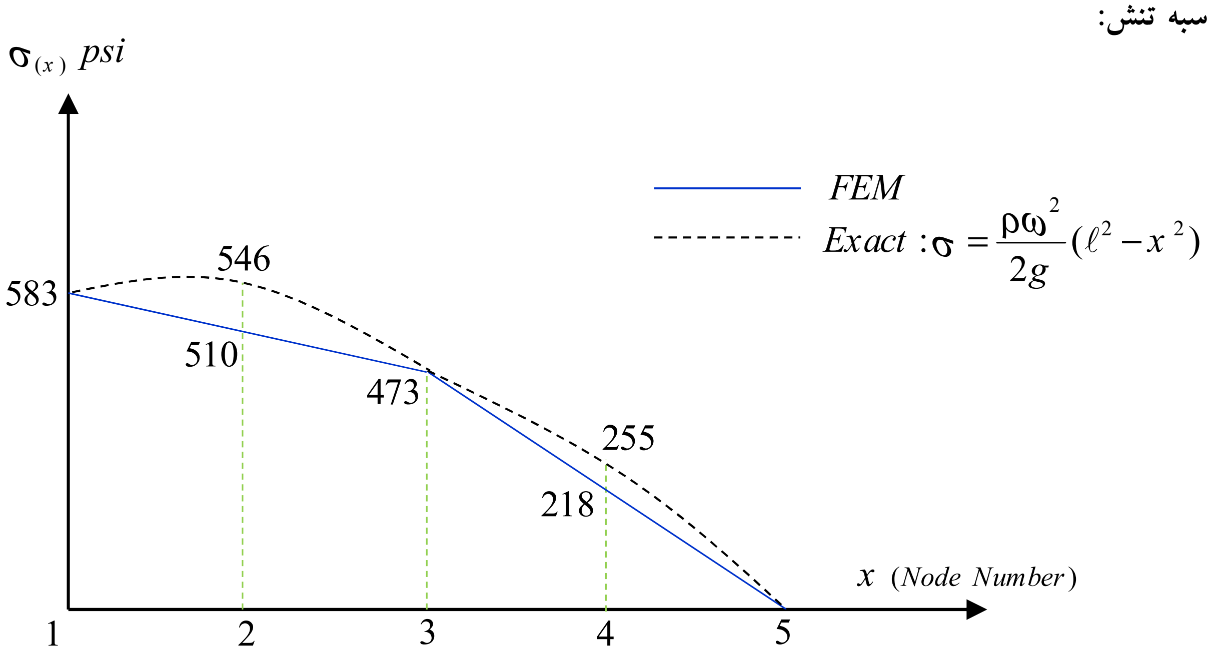
$$@Node\ 3 \quad \xi=-1 \quad \overset{(7.16)}{\Rightarrow} \quad \sigma_1^{(2)} = 10^{7}\times\frac{2}{21}\times 10^{-3}\{-1.5 \quad 2 \quad -0.5\}\begin{Bmatrix}1.0706\\1.4147\\1.5294\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma_3^{(2)} = 437\,psi} \quad (7.21)$$

$$\boxed{\sigma_4^{(2)} = 218\,psi} \quad (7.22)$$

$$@Node\ 5 \quad \xi=1 \quad \overset{(7.16)}{\Rightarrow} \quad \sigma_3^{(2)} = 10^{7}\times\frac{2}{21}\times 10^{-3}\{0.5 \quad -2 \quad 1.5\}\begin{Bmatrix}1.0706\\1.4147\\1.5294\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_5^{(2)} = 0} \quad (7.23)$$

پاسخ مثال ۷–

محاسبه تنش:



نمودار توزیع تنش در طول میله

پاسخ مثال ۷–

گام سوم: با استفاده از اطلاعات ذخیره شده در گام اول، واکنش‌های تکیه‌گاهی در درجات آزادی که مربوط به تکیه‌گاه است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

با جایگذاری روابط (7.11) و (7.14) در (7.24) داریم:

$$(7.11)\,\&\,(7.14) \rightarrow (7.24) \quad \Rightarrow$$

$$R_1 = \frac{0.6\times 10^7}{3(21)} \times \{7 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \quad 0\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5735 \\ 1.0706 \\ 1.4147 \\ 1.5294 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} - 14.57 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_1 = -349.56\ lb} \qquad (7.25)$$

اثرات حرارت (Temperature Effects)

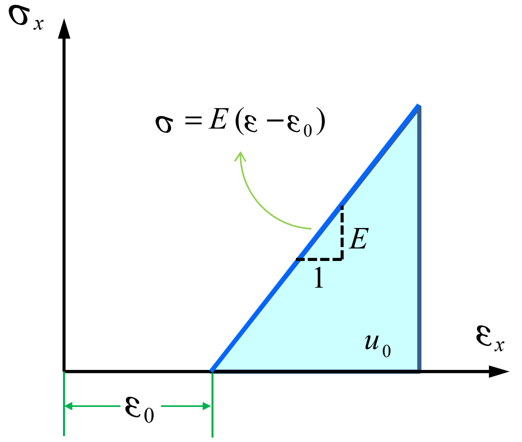
اگر توزیع تغییرات دما، ΔT ، مشخص باشد کرنش ناشی از این تغییر دما را می‌توان به عنوان یک **کرنش اولیه**، ε_0 ، در نظر گرفت که به صورت زیر است:

$$\boxed{\varepsilon_0 = \alpha\,\Delta T} \qquad (147)$$

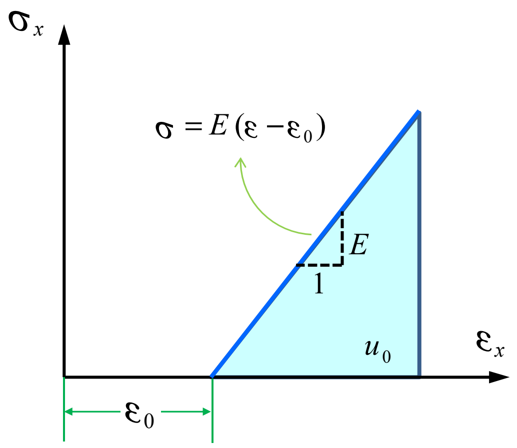
α: ضریب انبساط حرارتی (Coefficient of Thermal Expansion)

ΔT: تغییرات حرارتی (Temperature Gradient)

فرم رابطه تنش با وجود کرنش اولیه به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$\boxed{\sigma_x = E\,(\varepsilon_x - \varepsilon_0)} \qquad (148)$$



اثرات حرارت (Temperature Effects)

چگالی انرژی کرنشی (انرژی در واحد حجم) برای یک جزء دیفرانسیلی همان مساحت زیر نمودار تنش کرنش است:

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)} \qquad (149)$$

انرژی کرنشی برای یک المان به کمک انتگرال‌گیری بر روی حجم المان به دست می‌آید:

$$\boxed{U_e = \int_e \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)A_e dx} \qquad (150)$$

در روش المان محدود انرژی کرنشی کل سیستم از جمع انرژی کرنشی تمامی المان‌ها به دست می‌آید:

$$\boxed{U = \sum_e \left(\int_e \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)A_e dx \right)} \qquad (151)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

اثرات حرارت (Temperature Effects)

با توجه به روابط تنش و کرنش به دسته آمده از رابطه (148) و جایگذاری آن در رابطه (151) و همچنین تغییر متغیر دیفرانسیلی انتگرال از d_x به $d\xi$ (زیرا توابع شکل تابعی از ξ هستند) به کمک رابطه (19) نتیجه می‌شود:

$$(148) \rightarrow (151) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \sum_e \left(\frac{1}{2} A_e \frac{\ell_e}{2} E_e \int_e (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) d\xi \right)} \qquad (152)$$

با جایگذاری رابطه (21) در رابطه (152) خواهیم داشت:

$$(21) \rightarrow (152) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} U = & \sum_e \left(\frac{1}{2} (\mathbf{q}^e)^T \left(A_e \frac{\ell_e}{2} E_e \int_{-1}^{1} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{B}^e d\xi \right) \mathbf{q}^e \right) \\ & - \sum_e \left((\mathbf{q}^e)^T \left(A_e \frac{\ell_e}{2} E_e \int_{-1}^{1} (\mathbf{B}^e)^T d\xi \right) \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) + \sum_e \left(A_e \frac{\ell_e}{2} E_e \boldsymbol{\varepsilon}_0{}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \end{aligned}} \qquad (153)$$

با بررسی عبارت انرژی کرنشی، می‌بینیم که عبارت اول در سمت راست، ماتریس سختی المان را به دست می‌دهد که پیش‌تر به دست آمده است. از آنجایی که عبارت آخر نیز یک مقدار ثابت است از این رو هنگام استفاده از معادلات تعادل که با قرار دادن $d\Pi / dQ_i = 0$ به دست می‌آیند، از رابطه حذف می‌شود. عبارت دوم، بردار بار المان مورد نظر را در نتیجه تغییرات دمایی به دست می‌دهد.

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

اثرات حرارت (Temperature Effects)

بردار بار حرارتی گرهی در المان به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\boxed{\boldsymbol{\theta}^e = A_e \frac{\ell_e}{2} E_e \left(\int_{-1}^{1} (\mathbf{B}^e)^T \, d\xi \right) \boldsymbol{\varepsilon}_0} \quad (154)$$

با جایگذاری رابطه (147) در (154):

$$(147) \to (154) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta}^e = \frac{E_e A_e \ell_e \alpha \, \Delta T}{2} \int_{-1}^{1} (\mathbf{B}^e)^T \, d\xi} \quad (155)$$

با جایگذاری رابطه (22) در (155) بردار بار حرارتی در المان دو گرهی برابر است با

$$(22) \to (155) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta}^e = E_e A_e \alpha \, \Delta T \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \end{array}} \quad (156)$$

بردار نیروی حرارتی در المان دو گرهی $\boldsymbol{\theta}^e \in \mathbb{R}^2$:

با جایگذاری رابطه (126) در (155) بردار بار حرارتی در المان سه گرهی برابر است با

$$(126) \to (155) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta}^e = E_e A_e \alpha \, \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array}} \quad (157)$$

بردار نیروی حرارتی در المان سه گرهی $\boldsymbol{\theta}^e \in \mathbb{R}^3$:

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

اثرات حرارت (Temperature Effects)

مقدار تنش در حالت المان دو گرهی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(23) \,\&\, (147) \to (148) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(e)} = E_e \left(\frac{1}{\ell_e} \{-1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} - \alpha_e \, \Delta T_e \right)} \quad (158)$$

مقدار تنش در حالت المان سه گرهی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(127) \,\&\, (147) \to (148) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^e = E_e \left(\frac{2}{\ell_e} \left\{ \frac{2\xi - 1}{2} \quad -2\xi \quad \frac{2\xi + 1}{2} \right\} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix} - \alpha_e \, \Delta T_e \right)} \quad (159)$$

اثرات نقص عضو (Defect Effects)

اثر نقص عضو هم مانند حرارت به صورت کرنش اولیه ظاهر می‌گردد

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{\Delta\ell_e}{\ell_e}} \qquad (160)$$

$\Delta\ell_e$: تغییرشکل ناشی از نقص عضو e اُم (عضو کوتاهتر منفی، عضو با طول بیشتر مثبت)

$$\boxed{\mathbf{D}^e = \frac{E_e A_e}{\ell_e}\Delta\ell_e \begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\begin{matrix}i\\j\end{matrix}} \qquad (161)$$

$\mathbf{D}^e \in \mathbb{R}^2$: بردار نیروی ناشی از نقص عضو در المان دو گرهی

$$\boxed{\mathbf{D}^e = \frac{E_e A_e}{\ell_e}\Delta\ell_e \begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}\begin{matrix}i\\j\\k\end{matrix}} \qquad (162)$$

$\mathbf{D}^e \in \mathbb{R}^3$: بردار نیروی ناشی از نقص عضو در المان سه گرهی

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)

اثرات نقص عضو (Defect Effects)

مقدار تنش در حالت المان دو گرهی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(23)\,\&\,(160) \rightarrow (148) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(e)} = \frac{E_e}{\ell_e}\left(\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix}Q_i\\Q_j\end{Bmatrix} - \Delta\ell_e\right)} \qquad (163)$$

مقدار تنش در حالت المان سه گرهی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

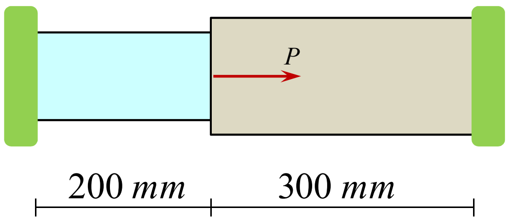
$$(127)\,\&\,(160) \rightarrow (148) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{e} = \frac{E_e}{\ell_e}\left(2\left\{\frac{2\xi-1}{2} \quad -2\xi \quad \frac{2\xi+1}{2}\right\}\begin{Bmatrix}Q_i\\Q_j\\Q_k\end{Bmatrix} - \Delta\ell_e\right)} \qquad (164)$$

مثال ۸– نیروی محوری $P = 300\times10^3\ N$ در دمای 20^{oC} به میله نشان داده شده در شکل وارد می‌شود. اگر دمای میله به 60^{oC} برسد مطلوب است تعیین:

الف– جابجایی گرهی.

ب– مقدار تنش در هر یک از مصالح.

ج– عکس العمل‌های تکیه‌گاهی.



Aluminum

$A = 900\ mm^2$

$E = 70\times10^9\ N/m^2$

$\alpha = 23\times10^{-6}\ (1/\circ c)$

Steel

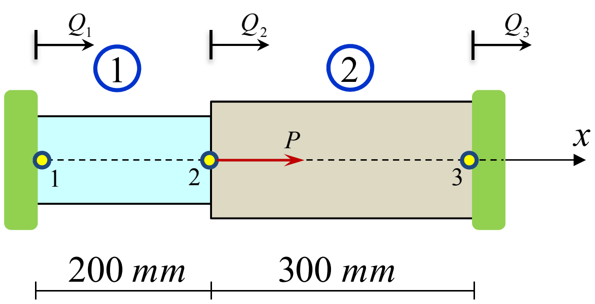
$A = 1200\ mm^2$

$E = 200\times10^9\ N/m^2$

$\alpha = 11.7\times10^{-6}\ (1/\circ c)$

پاسخ مثال ۸–

تقسیم‌بندی میله به المان‌های مختلف و شماره گذاری گره و المان



Aluminum

$A = 900\ mm^2$

$E = 70\times10^9\ N/m^2$

$\alpha = 23\times10^{-6}\ (1/\circ c)$

Steel

$A = 1200\ mm^2$

$E = 200\times10^9\ N/m^2$

$\alpha = 11.7\times10^{-6}\ (1/\circ c)$

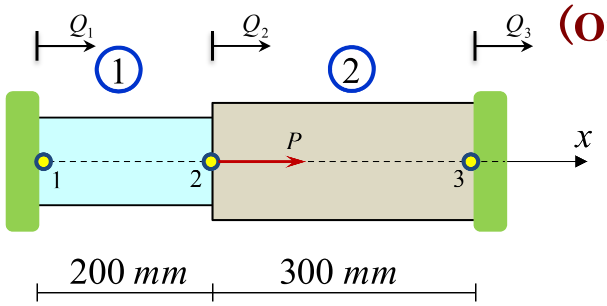
تعیین ارتباط المان‌ها و درجات آزادی

شماره المان e	شماره گره i	j
1	1	2
2	2	3

تعداد المان $n_e = 2$

تعداد درجه آزادی $n_{DOF} = 3$ $\quad \mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3\}^T$

شرایط مرزی : BC



پاسخ مثال ۸–

تشکیل ماتریس سختی هر المان براساس رابطه (34)

Aluminum

$A = 900\ mm^2$

$E = 70\times10^9\ N/m^2$

$\alpha = 23\times10^{-6}\ (1/^\circ c)$

Steel

$A = 1200\ mm^2$

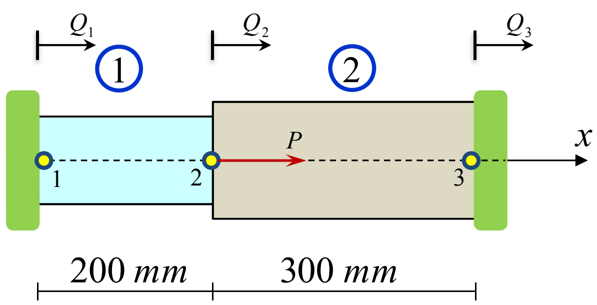
$E = 200\times10^9\ N/m^2$

$\alpha = 11.7\times10^{-6}\ (1/^\circ c)$

$$(34) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{k}^e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \end{array}} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{(900)\times(70\times10^9\times10^{-6}\ N/mm^2)}{200}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k}^{(1)} = 315\times10^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}} \quad (8.1)$$

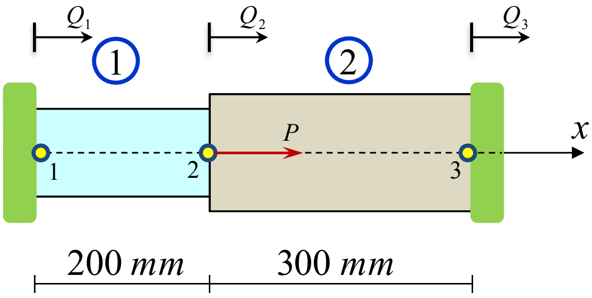
$$\boxed{\mathbf{k}^{(2)} = 800\times10^3 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}} \quad (8.2)$$



پاسخ مثال ۸–

تشکیل ماتریس سختی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن ماتریس سختی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3\times3} = \sum_{e=1}^{2} \mathbf{k}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K} = 10^3 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 315 & -315 & 0 \\ -315 & 1115 & -800 \\ 0 & -800 & 800 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \quad (8.3)$$



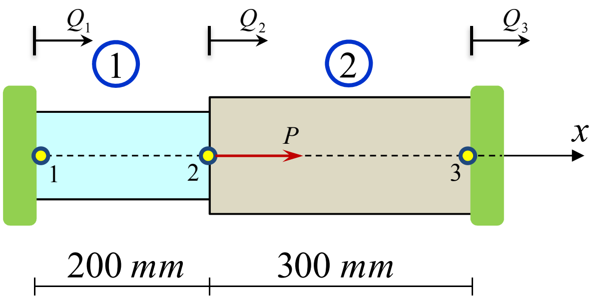
پاسخ مثال ۸–

تشکیل بردار نیروی حرارتی هر المان براساس رابطه (156)

$$(156) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta}^e = E_e A_e \alpha \, \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta T = +40^{oC}} \quad (8.4)$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(2)} = (200\times10^3)\times1200\times(11.7\times10^{-6})\times40\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta}^{(2)} = 10^3\times\begin{Bmatrix} -112.32 \\ 112.32 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} \quad (8.6)$$



پاسخ مثال ۸–

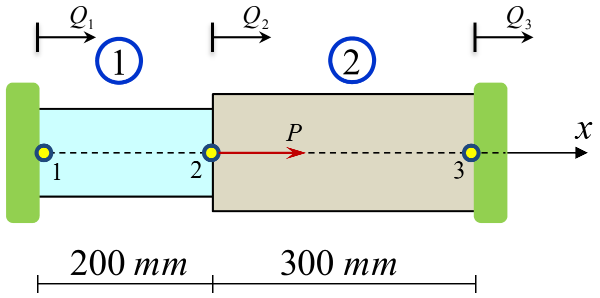
تشکیل بردار نیروهای حرارتی گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی حرارتی گرهی تمامی المان‌ها

$$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3 = \sum_{e=1}^{2} \boldsymbol{\theta}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta} = 10^3\times\begin{Bmatrix} -57.96 \\ -54.36 \\ 112.32 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \quad (8.7)$$

تشکیل بردار نیروهای متمرکز گرهی کل میله به وسیله سرهم‌بندی کردن بردار نیروی متمرکز گرهی تمامی المان‌ها

$$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 = \sum_{e=1}^{2} \mathbf{P}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{P} = 10^3\times\begin{Bmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \quad (8.8)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)



پاسخ مثال ۸-

تشکیل بردار نیروهای گرهی کل میله

$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3 = \mathbf{0} + \mathbf{P} \quad \Rightarrow$$

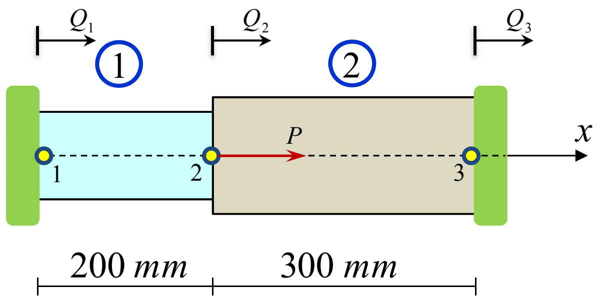
$$\mathbf{F} = 10^3 \times \begin{Bmatrix} -57.96 \\ -54.36 \\ 112.32 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = 10^3 \times \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} -57.96 \\ 245.64 \\ 112.32 \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} \qquad (8.9)$$

اعمال شرایط مرزی به روش حذفی $\qquad Q_1 = Q_3 = 0$

گام اول: ذخیره‌کردن سطرهای 1 و 3 از ماتریس سختی کل و بردار نیروهای گرهی

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 315 & -315 & 0 \\ 0 & -800 & 800 \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} = 10^3 \times \begin{Bmatrix} -57.96 \\ 112.32 \end{Bmatrix} \end{array}} \qquad (8.10)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)



پاسخ مثال ۸-

گام دوم: سطر و ستون‌های 1 و 3 از ماتریس سختی کل و به طور مشابه سطرهای 1 و 3 از بردار نیروهای گرهی کل حذف می‌شوند. سپس هر یک از دارایه‌های بردار نیروهای گرهی کل به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\mathbf{K} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 315 & -315 & 0 \\ -315 & 1115 & -800 \\ 0 & -800 & 800 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = 10^3 \times \begin{Bmatrix} -57.96 \\ 245.64 \\ 112.32 \end{Bmatrix}$$

$$(94) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{F}_i = F_i - (K_{i1}\alpha_1 + K_{i3}\alpha_3) \qquad i = 2} \qquad (8.11)$$

$$(8.11) \quad \Rightarrow \quad \overline{F}_2 = F_2 - (K_{21}\alpha_1 + K_{23}\alpha_3) = 245.64 \times 10^3 - \left((-315 \times 10^3)(0) + (-800 \times 10^3)(0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{F}_2 = 245.64 \times 10^3} \qquad (8.12)$$

پاسخ مثال ۸-

$$(88) \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{10^3 \times 1115 \times Q_2 = 245.64 \times 10^3} \quad (8.13)$$

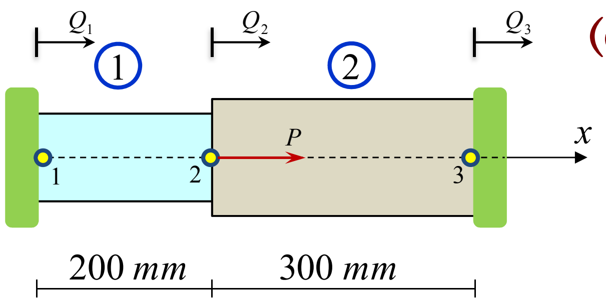
از حل معادله (8.13) خواهیم داشت:

$$(8.13) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2 = 0.2203\, mm} \quad (8.14)$$

در نتیجه بردار جابجایی گرهی کل به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(8.14) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2203 \\ 0 \end{Bmatrix} mm} \quad (8.15)$$

مسائل یک بُعدی (One Dimensional Problems)



پاسخ مثال ۸-

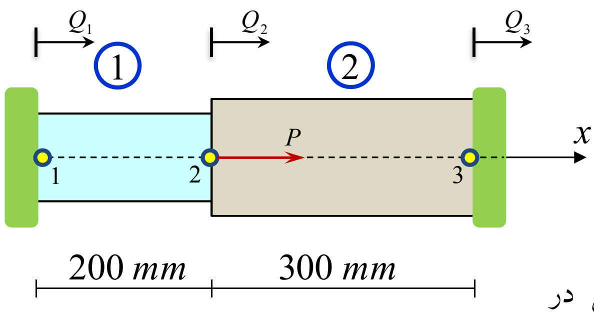
محاسبه تنش:

$$(158) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(e)} = E_e \left(\frac{1}{\ell_e} \{-1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} - \alpha_e \, \Delta T_e \right)} \quad (8.16)$$

$$\sigma^{(1)} = 70 \times 10^3 \left(\frac{1}{200} \{-1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2203 \end{Bmatrix} - (23 \times 10^{-6}) \times 40 \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(1)} = 12.60\, Mpa} \quad (8.17)$$

$$(8.16) \quad \Rightarrow \quad \sigma^{(2)} = E_2 \left(\frac{1}{\ell_2} \{-1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} - \alpha_2 \, \Delta T_2 \right) \quad \overset{(8.15)}{\Rightarrow}$$

$$\sigma^{(2)} = 200 \times 10^3 \left(\frac{1}{300} \{-1 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 0.2203 \\ 0 \end{Bmatrix} - (11.7 \times 10^{-6}) \times 40 \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^{(2)} = -240.27\, Mpa} \quad (8.18)$$



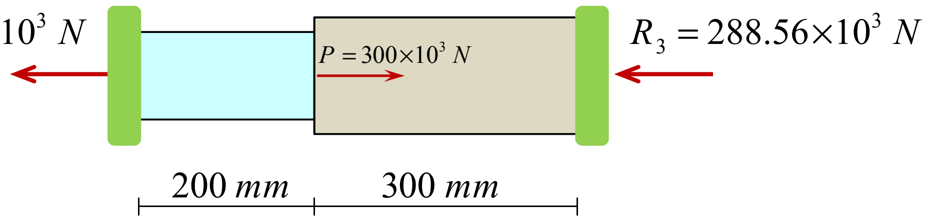
پاسخ مثال ۸–

محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

با استفاده از اطلاعات ذخیره شده در گام اول، واکنش‌های تکیه‌گاهی در درجات آزادی که مربوط به تکیه‌گاه است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(8.16) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 315 & -315 & 0 \\ 0 & -800 & 800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2203 \\ 0 \end{Bmatrix} - 10^3 \times \begin{Bmatrix} -57.96 \\ 112.32 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.44 \\ -288.56 \end{Bmatrix} \times 10^3 \; N} \quad (8.17)$$



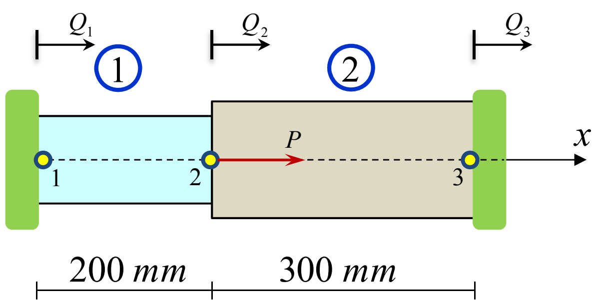
پاسخ مثال ۸– نام فایل برنامه: fem1d.m

نام فایل ورودی: L04EX08.txt

نام فایل خروجی: RL04EX08.txt

L04EX08.txt

```
Next line is problem title    << 1D STRESS ANALYSIS USING BAR ELEMENT >>
EXAMPLE 4.8
NN NE NM NDIM NEN NDN
 3  2  2   1   2   1
ND NL NCH NPR NMPC
 2  1  2   2   0
Node#   X-Coordinate
 1      0
 2      200
 3      500
Elem#  N1  N2  Mat#  Area TempRise (NCH=2 Elem Char: Area, TempRise)
 1      1   2    1    900   40
 2      2   3    2    1200   40
DOF#  Displacement
 1     0
 3     0
DOF#  Load
 2    300000
MAT#  E   Alpha
 1   70000  23e-6
 2   200000   11.7e-6
B1  i  B2 j  B3  (Multi-point constr. B1*Qi+B2*Qj=B3)
```



پاسخ مثال ۸-

RL04EX08.txt

```
EXAMPLE 4.8

NODE#   DISPLACEMENT
1      1.0262E-06
2         0.22032
3      2.588E-05
ELEM#    STRESS
1          12.713
2         -240.47
NODE#    REACTION
1          -11442
3     -2.8856E+05
```


برنامه‌نویسی کامپیوتری (Computer Programing)

جدول اختصارها (abbreviation tables)

NN	تعداد گره‌ها (Number of Nodes)
NE	تعداد المان‌ها (Number of Elements)
NM	تعداد نوع مصالح (Number of Different Materials)
NDIM	تعداد ابعاد (Number of Coordinates per Node)(e.g. NDIM = 2 for 2D)
NEN	تعداد گره‌های المان (Number of Nodes per Element) (e.g. NEN = 3 for constant strain triangle (CST) Element)
NDN	تعداد درجه آزادی گره‌ها (Number of DOFs per Node) (e.g. NDN = 2 for BEAM)
ND	تعداد درجات آزادی که مقدار آن‌ها مشخص است (Number of Specified Displacement DOFs)
NL	تعداد مولفه‌های باری که در راستای درجات آزادی اعمال شده‌اند. (Number of Applied Component Loads along DOF directions)
NCH	تعداد ویژگی المان‌ها(مساحت، دما، ضخامت و ممان اینرسی) (Number of Element Characteristics like Area and Temperature rise in BAR or TRUSS, Thickness and Temperature rise in CST and so on. Area, Moment of Inertia, Temperature Rise etc. are treated as Element Characteristics)
NPR	تعداد ویژگی‌های مصالح (ضریب حرارتی، ضریب پواسون، مدول الاستیسیته و مدول برشی) (Number of Material Properties)
NMPC	تعداد شرایط مرزی وابسته (Number of MultiPoint Constraints)
NNREF	تعداد گره‌های مرجع (Number of Node Reference)