



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

روش المان محدود

روش باقیمانده وزنی (WRM: Weighted Residual Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی

دانشیار مهندسی سازه

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

روش باقیمانده وزنی یک روش کلی است که به منظور حل تقریبی معادلات دیفرانسیل، توسعه یافته است. روش باقیمانده وزنی یک روش تقریبی بسیار قوی بوده و در حل بسیاری از مسائل کاربرد دارد. فرم کلی معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}(\phi_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (1)$$

$\phi_{(x)}$: متغیر وابسته مجهول

$p_{(x)}$: تابع معلوم

$\mathcal{L}$: عملگر دیفرانسیلی که فرم واقعی معادله دیفرانسیل را مشخص می کند.

Ω : اُمگا دامنه معادله یا ناحیه مورد بررسی است.

شرایط مرزی معادله در حالت کلی به صورت زیر فرض می شود:

$$\mathcal{M}(\phi_{(x)}) + r_{(x)} = 0 \quad \text{in} \quad \Gamma \quad (2)$$

$\mathcal{M}$: عملگر دیفرانسیلی

Γ : گاما نقاط شرایط مرزی

$r_{(x)}$: تابع معلوم

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

مثال ۱- با فرم کلی معادله دیفرانسیل زیر را در دامنه $[0, 1]$ بنویسید.

$$\frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \quad \text{شرایط مرزی (BC): } u_{(x=0)} = 0, \quad u_{(x=1)} = 1$$

پاسخ مثال ۱-

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \\ p_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Omega = [0, 1] \quad (1.1)$$

با توجه به شرایط مرزی می توان گفت که $\Gamma = 0, 1$ (یعنی Γ دو نقطه است بازه نیست).

$$\left\{ \right\} \Rightarrow \mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0 \quad (1.2)$$

$$\left\{ \right\} \Rightarrow \mathcal{M} = 1, r_{(1)} = -1 \quad (1.3)$$

3

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال ۱- فرم پاسخ تحلیلی (دقیق) این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = G_1 e^x + G_2 e^{-x} \quad (1.4)$$

با جایگذاری شرایط مرزی در رابطه (1.4) خواهیم داشت:

$$\left\{ \right\} \Rightarrow G_1 = -G_2 = \frac{e}{e^2 - 1} = 0.42546 \quad (1.5)$$

با جایگذاری رابطه (1.5) در رابطه (1.4) پاسخ تحلیلی معادله دیفرانسیل مورد نظر به دست می آید:

$$(1.5) \rightarrow (1.4) \Rightarrow u_{(x)} = 0.42546 e^x - 0.42546 e^{-x} \quad (1.6)$$

4

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

روش باقیمانده وزنی شامل دو مرحله اصلی است:

مرحله اول: یک راه حل تقریبی بر اساس رفتار کلی متغیر وابسته فرض می شود. راه حل فرضی اغلب به گونه‌ای انتخاب می شود که شرایط مرزی برای u برآورده شود. سپس این راه حل فرضی در معادله دیفرانسیل جایگزین می شود. از آنجایی که راه حل فرضی فقط تقریبی است، به طور کلی معادله دیفرانسیل را برآورده نمی کند و از این رو منجر به یک خطا یا چیزی که ما آن را باقیمانده می نامیم، می شود. سپس با صفر کردن باقیمانده با میانگین گیری در کل حوزه سیستمی از معادلات جبری تولید شود.

مرحله دوم: حل سیستم معادلات حاصل از مرحله اول با توجه به شرط مرزی تعیین شده برای به دست آوردن جواب تقریبی مورد نظر است.

5

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگذاری پاسخ تقریبی $\psi(x)$ در رابطه (1) نتیجه می شود:

$$\mathcal{L}(\psi_{(x)}) + p_{(x)} \neq 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (3)$$

به عبارت دیگر:

$$\mathcal{L}(\psi_{(x)}) + p_{(x)} = R_{(x)} \quad \text{in} \quad \Omega \quad (4)$$

$R_{(x)}$: خطای اندازه گیری شده یا باقیمانده (Residual) می نامند.

با ضرب رابطه (1) در تابع وزنی دلخواه $w_{(x)}$ و انتگرال گیری بر روی دامنه Ω خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} w_{(x)} (\mathcal{L}(\psi_{(x)}) + p_{(x)}) dx = 0 \quad (5)$$

6

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگزین کردن پاسخ تقریبی $\Psi_{(x)}$ به جای پاسخ دقیق $\Phi_{(x)}$ در رابطه (5) نتیجه می‌شود:

$$\int_{\Omega} w_{(x)} (\mathcal{L}(\Psi_{(x)}) + p_{(x)}) dx \neq 0 \quad (6)$$

به عبارت دیگر براساس رابطه (4):

$$\int_{\Omega} w_{(x)} R_{(x)} dx \neq 0 \quad (7)$$

انتگرال رابطه (7) میانگین وزنی باقیمانده بر روی دامنه پاسخ را نتیجه می‌دهد. در روش باقیمانده وزنی سعی بر آن است که مقدار این انتگرال بر روی دامنه پاسخ تقریبی به مقدار ناچیز یا صفر میل نماید. با این کار پاسخ تقریبی به مقدار دقیق نزدیک می‌شود:

$$\int_{\Omega} w_{(x)} R_{(x)} dx = 0 \quad (8)$$

7

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

در اینجا فرض می‌شود که فرم پاسخ تقریبی به صورت زیر است:

$$\Psi_{(x)} = \bar{\Psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x) \quad (9)$$

α_i : ضرایب مجهولی هستند که به آن‌ها ثابت‌های برازش (Fitting coefficients) نیز گفته می‌شود.
 n : تعداد ثابت‌های برازش

$N_i(x)$: توابع خطی مستقل برحسب x که به آن‌ها تابع‌های حدسی (Trial Functions) یا توابع درونیابی (Interpolation Function) نیز گفته می‌شود. توابع حدسی می‌تواند شامل توابع چند جمله‌ای و مثلثاتی باشد.
 $\bar{\Psi}_{(x)}$: یک تابع حدسی برحسب x است که سعی در برآورده کردن شرایط مرزی دارد.

به طور معمول توابع آزمایشی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که تابع تقریبی $\Psi_{(x)}$ شرایط مرزی کلی را برای $\Phi_{(x)}$ برآورده می‌کند، اگرچه این موضوع کامل ضروری نبوده و به طور قطع همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد.

فرم برداری پاسخ تقریبی به صورت زیر است:

$$\Psi_{(x)} = \bar{\Psi}_{(x)} + \mathbf{N}(x) \boldsymbol{\alpha} \quad (10)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots \quad \alpha_n\}^T \quad (11)$$

$$\mathbf{N}(x) = \{N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad \cdots \quad N_n(x)\}$$

8

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ تقریبی $\Psi_{(x)}$ باید شرایط مرزی معادله در حالت کلی بر روی بازه Γ را ارضا نماید:

$$(9) \rightarrow (2) \Rightarrow \mathcal{M}\left(\bar{\Psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x)\right) + r_{(x)} = 0 \quad (12)$$

با بسط دادن رابطه (12):

$$(12) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\Psi}_{(x)}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{M}(N_i(x)) + r_{(x)} = 0 \quad (13)$$

رابطه (13) زمانی برقرار است که دو شرط زیر بر روی نقاط شرایط مرزی Γ ارضا شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(N_i(x)) &= 0 \\ \mathcal{M}(\bar{\Psi}_{(x)}) + r_{(x)} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

9

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

فرم‌های متداول تابع حدسی $N_i(x)$:

الف- فرم چند جمله‌ای: یکی از ساده‌ترین انتخاب‌ها برای تابع‌های حدسی استفاده از تابع‌های چند جمله‌ای است. که می‌توان به صورت زیر آن را در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} N_i(x) &= g_i(x) \\ g_i(x) &= (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_m) \quad (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

در نتیجه پاسخ تقریبی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$(15) \rightarrow (9) \Rightarrow \Psi_{(x)} = \bar{\Psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \quad (16)$$

این یک پاسخ به شکل منحنی صاف تولید می‌کند. اما همچنان محدودیت‌های درونیابی لاگرانژی برقرار است.

10

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

فرم‌های متداول تابع حدسی $N_i(x)$:

ب- فرم مثلثاتی: فرم دیگر پرکاربر برای تابع‌های حدسی استفاده از تابع‌های مثلثاتی براساس سری‌های فوریه می‌باشد. به طور مثال یک تابع حدسی سینوسی را می‌توان به صورت در نظر گرفت:

$$N_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad (17)$$

در نتیجه پاسخ تقریبی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$(17) \rightarrow (9) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \quad (18)$$

این پاسخ تقریبی مناسب حالتی است که در آن مقدار شرایط مرزی در $x=0$ و $x=\ell$ برابر با صفر باشد چرا که

$$\sin(0) = \sin(i\pi) = 0$$

11

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

مثال ۲- پاسخ تقریبی مثلثاتی برای معادله دیفرانسیل زیر بر روی دامنه $[0, 1]$ بنویسید.

$$\frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0$$

$$u_{(x=0)} = 0, \quad u_{(x=1)} = 1 \quad \text{:(BC) شرایط مرزی}$$

پاسخ مثال ۲- یک تابع تقریبی مثلثاتی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\psi_{(x)} = x + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin(i\pi x) \quad (2.1)$$

براساس رابطه (9) خواهیم داشت:

12

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال ۲-

$$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(1)} = 1 \Rightarrow d^0 u_{(1)} - 1 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(1)} = -1} \quad (2.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \xrightarrow{(2.2) \& (2.4)} 1(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$



13

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال ۲-

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(2.2)} \boxed{\mathcal{M}(\sin(i\pi x)) = 0} \quad (2.5)$$

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (2.5) به صورت زیر در می آید:

$$\boxed{\sin(i\pi x) = 0} \quad (2.6)$$

با در نظر گرفتن به طور مثال سه جمله یعنی $n = 3$ خواهیم داشت:

$$i = 2 \Rightarrow N_2 = \sin(2\pi x) \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_2 = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_2 = 0 \end{cases} \quad OK$$



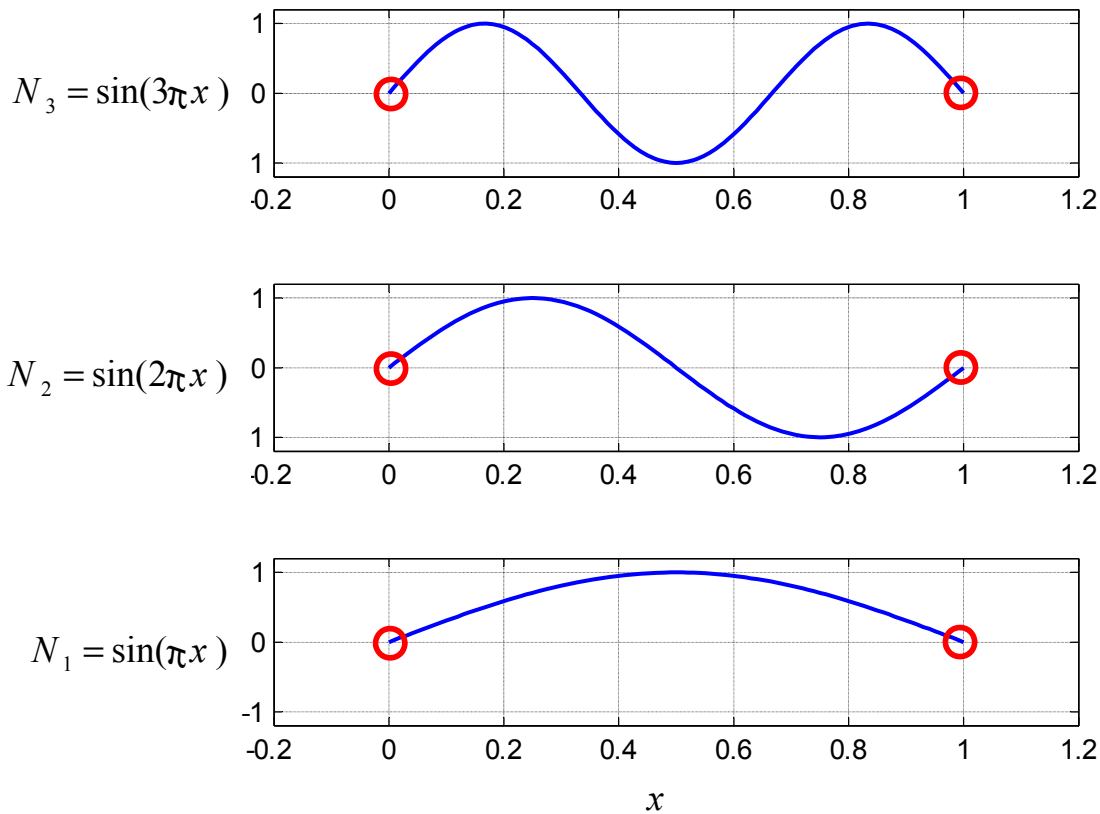
$$i = 3 \Rightarrow N_3 = \sin(3\pi x) \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_3 = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_3 = 0 \end{cases} \quad OK$$



14

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

پاسخ مثال ۲-



15

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

تابع‌های وزنی (Weight Functions):

در حالت کلی تابع وزنی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i w_i(x) \quad (19)$$

β_i : پارامترهای ثابت

$w_i(x)$: توابع معلوم از x

فرم برداری تابع وزنی به صورت زیر است:

$$w(x) = \beta \mathbf{W}(x) \quad (20)$$

که در آن:

$$\beta = \{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_n\}$$

$$\mathbf{W}(x) = \{w_1(x) \quad w_2(x) \quad w_3(x) \quad \cdots \quad w_n(x)\}^T \quad (21)$$

16

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگذاری فرمت برداری تابع وزنی در رابطه (8) خواهیم داشت:

$$(20) \rightarrow (8) \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \beta \mathbf{W}(x) R_{(x)} dx = 0} \quad (22)$$

از آنجایی که بردار β مقدار ثابت است از این رو باید:

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbf{W}(x) R_{(x)} dx = 0} \quad (23)$$

به عبارت دیگر:

$$(23) \Rightarrow \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ \vdots \\ w_n(x) \end{Bmatrix} R_{(x)} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \int_{\Omega} w_1(x) R_{(x)} dx &= 0 \\ \int_{\Omega} w_2(x) R_{(x)} dx &= 0 \\ &\vdots \\ \int_{\Omega} w_n(x) R_{(x)} dx &= 0 \end{aligned}} \quad (24)$$

حال n معادله برای به دست آوردن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در اختیار داریم.

17

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

با جایگذاری فرمت برداری پاسخ تقریبی در رابطه (4) خواهیم داشت:

$$(1) \rightarrow (4) \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) + \mathbf{N}(x)\mathbf{a} + p_{(x)} = R_{(x)} \Rightarrow \boxed{R_{(x)} = \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) + \mathcal{L}(\mathbf{N}(x))\mathbf{a} + p_{(x)}} \quad (25)$$

با جایگذاری مقدار باقیمانده با فرمت برداری در رابطه (23) نتیجه می شود:

$$(25) \rightarrow (23) \Rightarrow \boxed{\left(\int_{\Omega} \mathbf{W}(x) \mathcal{L}(\mathbf{N}(x)) dx \right) \mathbf{a} = - \int_{\Omega} \mathbf{W}(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathbf{W}(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx} \quad (26)$$

رابطه (26) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\mathbf{S}\mathbf{a} = \mathbf{Z}} \quad (27)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n} &= \int_{\Omega} \mathbf{W}(x) \mathcal{L}(\mathbf{N}(x)) dx \Rightarrow s_{ij} = \int_{\Omega} w_i(x) \mathcal{L}(N_j(x)) dx \\ \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^n &= - \int_{\Omega} \mathbf{W}(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathbf{W}(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \Rightarrow z_i = - \int_{\Omega} w_i(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} w_i(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{aligned} \quad (28)$$

18

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

بسط رابطه (65) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} w_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} w_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} w_1(x) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \int_{\Omega} w_2(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} w_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} w_2(x) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} w_n(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} w_n(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} w_n(x) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega} w_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} w_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_{\Omega} w_2(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} w_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ \vdots \\ -\int_{\Omega} w_n(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} w_n(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (29)$$

سیستم دستگاه معادلات ارائه شده در رابطه (29) را می توان برای n ضریب مجهول α_i حل کرد، مشروط بر آن که تابع وزنی $w(x)$ به طور مناسب انتخاب شود.

19

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

انواع روش های باقیمانده وزنی

با توجه به انتخاب تابع وزنی، چندین گزینه وجود دارد. از این رو، بسته به ماهیت تابع وزنی، انواع مختلفی از روش های باقیمانده وزنی پیشنهاد شده است. برخی از این روش های استاندارد عبارتند از:

۱. روش تخصیص نقطه (Point Collocation Method)

۲. روش زیر حوزه (Sub-Domain Method)

۳. روش حداقل مربعات (Least Square Method)

۴. روش گالرکین (Galerkin Method)

20

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

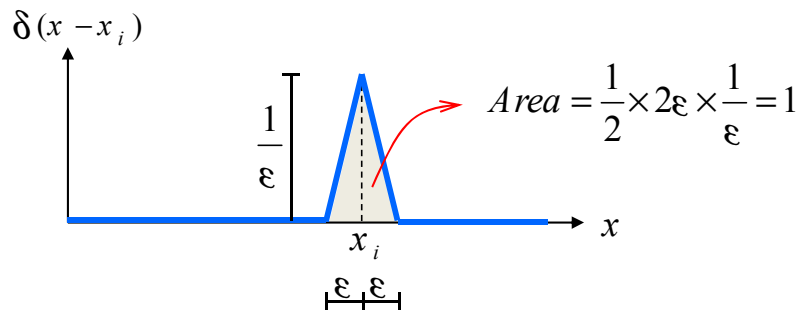
۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

در این روش، تابع وزنی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که باقیمانده را می‌توان در η نقطه مجزا در دامنه برابر با صفر کرد. برای این منظور تابع وزنی براساس تابع دلتای دیراک (Dirac Delta function) انتقال یافته به صورت روبه رو انتخاب می‌گردد:

$$w_i(x) = \delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases} \quad (30)$$

تابع دلتای دیراک دارای مشخصات زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = 1 \quad (31)$$



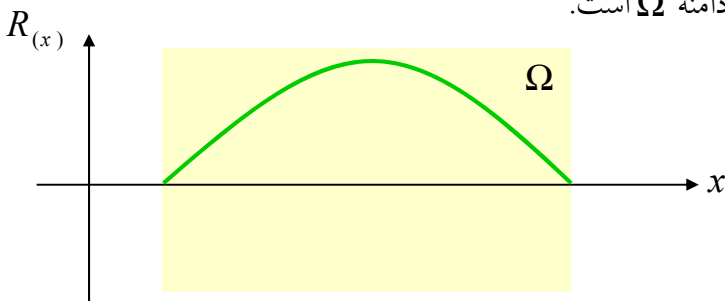
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \delta(x - x_i) dx = G(x_i) \quad (32)$$

21

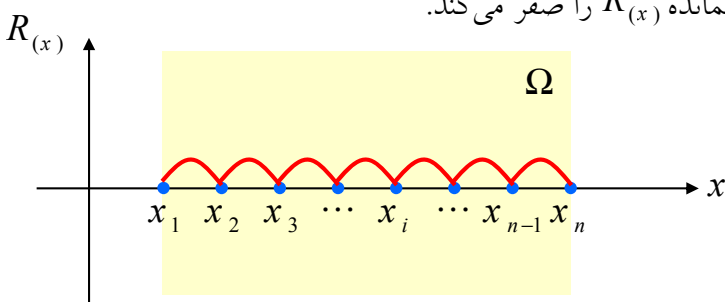
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

تعداد نقاط ثابت $x_i \in \Omega, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ باید برابر با η ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\Psi(x)$ باشند. روش PCM سعی دارد که مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ در نقاط x_i را برابر با صفر نماید. بنابراین هدف اصلی صفر شدن باقیمانده $R_{(x)}$ بر روی کل دامنه Ω است.



روش PCM در تعداد نقاط مشخصی x_i در دامنه Ω مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ را صفر می‌کند.



22

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

با جایگذاری تابع دلتای دیراک به جای تابع وزنی در رابطه (24) نتیجه می شود:

$$(30) \rightarrow (24) \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} \delta(x - x_1) R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_2) R_{(x)} dx = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \delta(x - x_n) R_{(x)} dx = 0 \end{cases} \quad (33)$$

با توجه به ویژگی تابع دلتای دیراک در رابطه (32) خواهیم داشت:

$$(32) \& (33) \Rightarrow \int_{\Omega} \delta(x - x_i) R_{(x)} dx = R(x_i) = 0 \Rightarrow \boxed{R(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)} \quad (34)$$

مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ مجبور می شود که در n نقطه صفر گردد.

23

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

همچنین با جایگذاری تابع دلتای دیراک به جای تابع وزنی در رابطه (28) نتیجه می شود:

$$(30) \rightarrow (28) \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} = \int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathcal{L}(N_j(x)) dx \\ z_i = - \int_{\Omega} \delta(x - x_i) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \delta(x - x_i) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{cases} \quad (35)$$

با توجه به ویژگی تابع دلتای دیراک در رابطه (32) خواهیم داشت:

$$(32) \& (35) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} s_{ij} &= \mathcal{L}(N_j(x_i)) \\ z_i &= -p(x_i) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_i)) \end{aligned}} \quad (36)$$

24

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

بر اساس رابطه (36)، رابطه (29) به صورت زیر در می آید:

$(36) \rightarrow (29) \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}(N_1(x_1)) & \mathcal{L}(N_2(x_1)) & \cdots & \mathcal{L}(N_n(x_1)) \\ \mathcal{L}(N_1(x_2)) & \mathcal{L}(N_2(x_2)) & \cdots & \mathcal{L}(N_n(x_2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}(N_1(x_n)) & \mathcal{L}(N_2(x_n)) & \cdots & \mathcal{L}(N_n(x_n)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p(x_1) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) \\ -p(x_2) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) \\ \vdots \\ -p(x_n) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_n)) \end{Bmatrix} \quad (37)$$

- روش PCM به طور خودکار ماتریس ضرایب متقارن را تولید نمی کند که در زمان جستجوی حل معادله، ویژگی مطلوبی است. همچنین تقارن ربطی به نوع جواب تقریبی انتخاب شده ندارد.
- تنظیم مقدار باقیمانده بر روی صفر در نقاط گسسته به این معنی نیست که خطاها در آن نقاط در واقع صفر هستند.
- عملیات محاسباتی مورد نیاز در روش PCM حداقل است.
- می توان نشان داد روش PCM معادل همان روش تفاضل محدود (Classical Finite Difference Method) است.

25

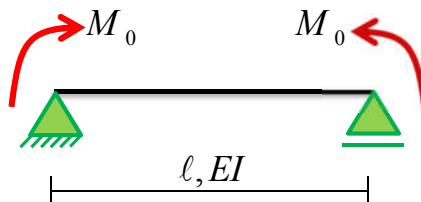
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

مثال ۳- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش PCM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

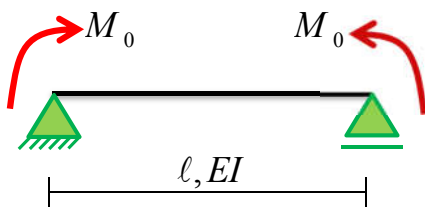
الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

ب- تابع حدسی فرم چند جمله ای



26

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳-

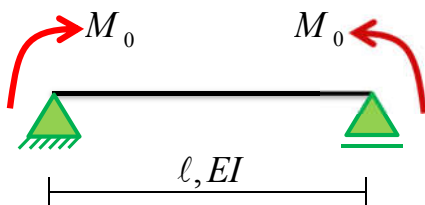
با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می آید:

27

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \\ p_{(x)} &= -\frac{M_0}{EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \Omega = (0, \ell) \quad (3.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

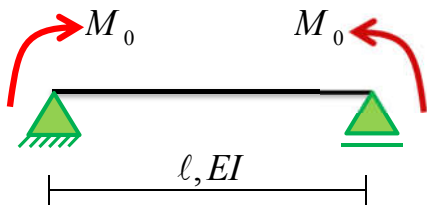
با در نظر گرفتن تنها دو جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

با توجه به رابطه (3.5):

$$(3.5) \Rightarrow N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad N_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0 \quad (3.6)$$

28

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (3.7)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(3.6) \& (3.7)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

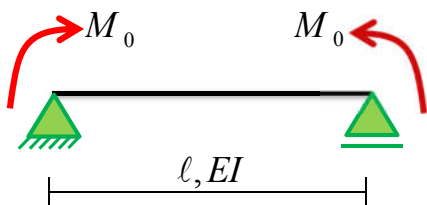
$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (3.8)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(3.6) \& (3.8)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(3.6)} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)\right) = 0} \quad (3.9)$$

29

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (3.9) به صورت زیر در می آید:

$$\boxed{N_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) = 0} \quad (3.10)$$

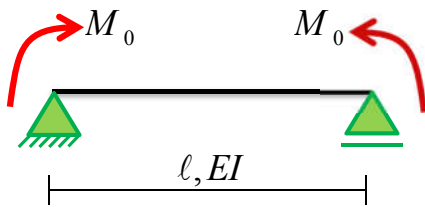
با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n = 2$ خواهیم داشت:

$$i = 2 \Rightarrow N_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x = \ell \Rightarrow N_2(\ell) = 0 \end{cases} \quad OK$$

براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض ۲ نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می شود:

30

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با ۲ همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi(x)$ قرار می‌دهیم. این ۲ نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۲ نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

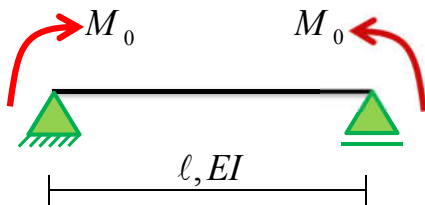
اکنون پارامترهای رابطه (3.11) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$p(x_1) = p(x_2) = -\frac{M_0}{EI} \quad (3.13)$$

$$(\bar{\psi}(x_1)) = \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) = 0 \quad (3.14)$$

31

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

$$\mathcal{L}(N_1(x_1)) = -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} \quad (3.15)$$

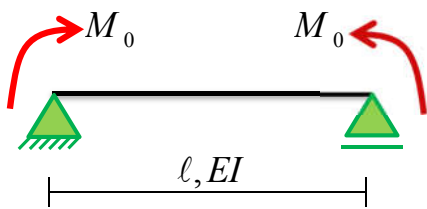
$$\mathcal{L}(N_2(x_1)) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \right) \bigg|_{x_1=\frac{\ell}{3}} = -\frac{4\pi^2}{\ell^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \bigg|_{x_1=\frac{\ell}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(N_2(x_1)) = -\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}(N_1(x_2)) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \right) \bigg|_{x_2=\frac{2\ell}{3}} = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \bigg|_{x_2=\frac{2\ell}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(N_1(x_2)) = -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_2)) = \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \quad (3.18)$$

32

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳-الف - تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (3.13) تا (3.18) در دستگاه معادلات (3.11) خواهیم داشت:

$$(3.13) \text{ to } (3.18) \rightarrow (3.11) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & -\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \\ -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M_0}{EI} \\ \frac{M_0}{EI} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

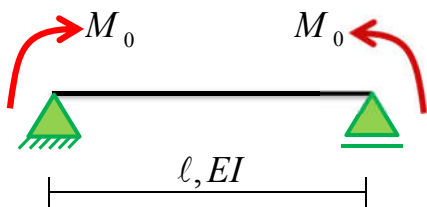
(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (3.19) نتیجه می شود:

$$(3.19) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & -\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \\ -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\ell^2} & \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\ell^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{M_0}{EI} \\ \frac{M_0}{EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2M_0\ell^2}{\sqrt{3}EI\pi^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

33

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

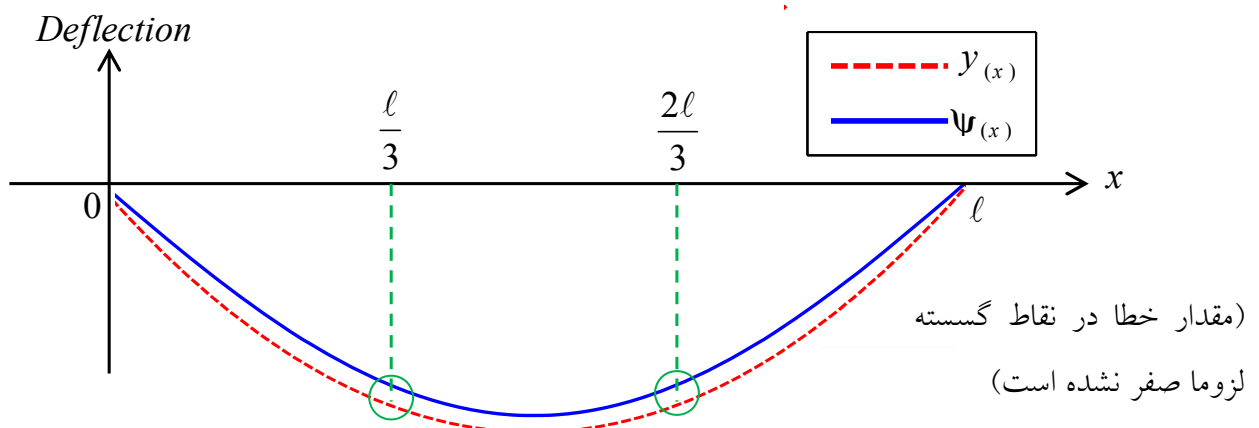


۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳-الف - تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با جایگذاری ثابت های α_i در رابطه (3.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می آید:

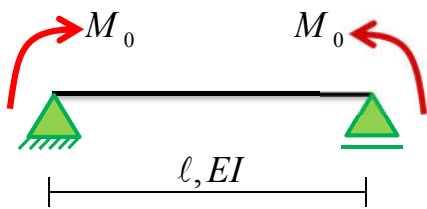
$$(3.20) \rightarrow (3.5) \Rightarrow \psi_{(x)} = -\frac{2M_0\ell^2}{\sqrt{3}EI\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (3.21)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

34

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

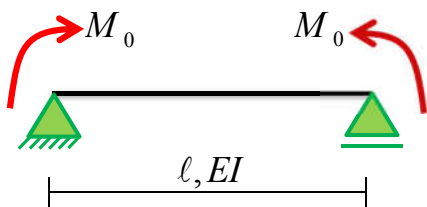
با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

با توجه به رابطه (3.22):

$$(3.22) \Rightarrow N_1(x) = x(x - \ell), \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0 \quad (3.23)$$

35

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (3.7) \text{ (تکراری)}$$

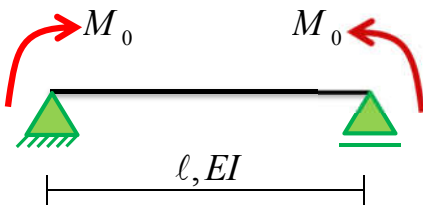
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(3.7) \& (3.23)} 1(\alpha_0) + 0 = 0 \xrightarrow{\text{Must be}} \boxed{\alpha_0 = 0} \xrightarrow{(3.24)} 0 = 0 \quad \text{OK} \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (3.8) \text{ (تکراری)}$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(3.8) \& (3.23) \& (3.24)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{OK} \quad \checkmark$$

36

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی ها $M = 1$ بود در نتیجه رابطه (3.25) به صورت زیر در می‌آید:

$$N_1(x) = x(x - l) = 0 \quad (3.26)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n = 1$ خواهیم داشت:

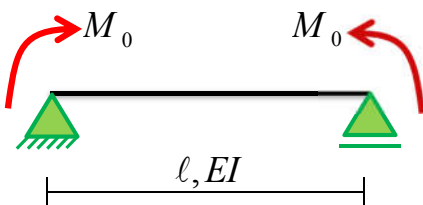
OK



براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض ۱ نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می‌شود:

37

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با ۱ همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi(x)$ قرار می‌دهیم. این ۱ نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شود که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۱ نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

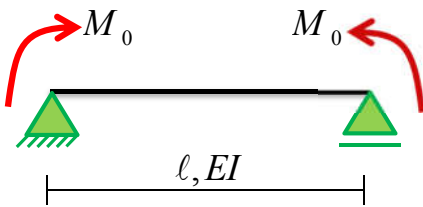
اکنون پارامترهای رابطه (3.27) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$p_{(x)} = -\frac{M_0}{EI} \Rightarrow p(x_1) = -\frac{M_0}{EI} \quad (3.29)$$

$$\bar{\psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) = 0 \quad (3.30)$$

38

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۳-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\mathcal{L}(N_1(x_1)) = 2 \quad (3.31)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (3.29) تا (3.31) در معادله (3.27) خواهیم داشت:

$$(3.29) \text{ to } (3.31) \rightarrow (3.27) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{M_0}{2EI} \quad (3.32)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (3.22) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(3.32) \rightarrow (3.22) \Rightarrow \psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x - \ell) \quad (3.33) \quad (\text{همان پاسخ دقیق است})$$

39

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

مثال ۴- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش PCM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \quad x \in (0, 2) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \Rightarrow y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

40

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) \\ p_{(x)} = -x \end{array} \right. \Rightarrow \Omega = (0, 2) \quad (4.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله ای در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

با توجه به رابطه (4.2):

$$(4.2) \Rightarrow N_1(x) = x(x-2), \quad N_2(x) = x^2(x-2), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x \quad (4.3)$$

41

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴-

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0 \quad (4.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(4.3) \& (4.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad OK$$



$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(4.3)} \begin{array}{l} \text{for } i = 1 \\ \text{for } i = 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(x(x-2)) = 0 \\ \mathcal{M}(x^2(x-2)) = 0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

42

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴-

در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (4.6) به صورت زیر در می آید:

$$(4.4) \text{ or } (4.5) \rightarrow (4.6) \Rightarrow \begin{cases} \text{for } i=1 & N_1(x) = x(x-2) = 0 \\ \text{for } i=2 & N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=2 \Rightarrow N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x=2 \Rightarrow N_2(2) = 0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

43

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴- براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض ۲ نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می شود:

$$(37) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{L}(N_1(x_1)) & \mathcal{L}(N_2(x_1)) \\ \mathcal{L}(N_1(x_2)) & \mathcal{L}(N_2(x_2)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p(x_1) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) \\ -p(x_2) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با ۲ همان تعداد ثابت های مجهول α_i در تابع تقریبی $\bar{\psi}(x)$ قرار می دهیم. این ۲ نقطه ثابت باید به گونه ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۲ نقطه را به دلخواه انتخاب می کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

44

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴- اکنون پارامترهای رابطه (4.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$p(x_1) = -\frac{2}{3} \quad (4.10)$$

$$(4.1) \Rightarrow p_{(x)} = -x \quad \xrightarrow{x_2 = \frac{4}{3}} \Rightarrow p(x_2) = -\frac{4}{3} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) = 2.5x \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x_1)}) = \frac{5}{3} \quad (4.13)$$

$$(4.12) \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x_2)}) = 2.5x \Big|_{x_2 = \frac{4}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x_2)}) = \frac{10}{3} \quad (4.14)$$

45

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴-

$$\mathcal{L}(N_1(x_1)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x(x-2)) \Big|_{x_1 = \frac{2}{3}} = (x^2 - 2x + 2) \Big|_{x_1 = \frac{2}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(N_1(x_1)) = \frac{10}{9} \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_1)) = -\frac{16}{27} \quad (4.16)$$

$$\mathcal{L}(N_1(x_2)) = \frac{10}{9} \quad (4.17)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_2)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x^2(x-2)) \Big|_{x_2 = \frac{4}{3}} = (x^3 - 2x^2 + 6x - 4) \Big|_{x_2 = \frac{4}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(N_2(x_2)) = \frac{76}{27} \quad (4.18)$$

46

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (4.10) تا (4.18) در دستگاه معادلات (4.8) خواهیم داشت:

$$(4.10) \text{ to } (4.18) \rightarrow (4.8) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{16}{27} \\ \frac{10}{9} & \frac{76}{27} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (4.19) نتیجه می‌شود:

$$(4.19) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{16}{27} \\ \frac{10}{9} & \frac{76}{27} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{243}{230} \\ -\frac{135}{460} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (4.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

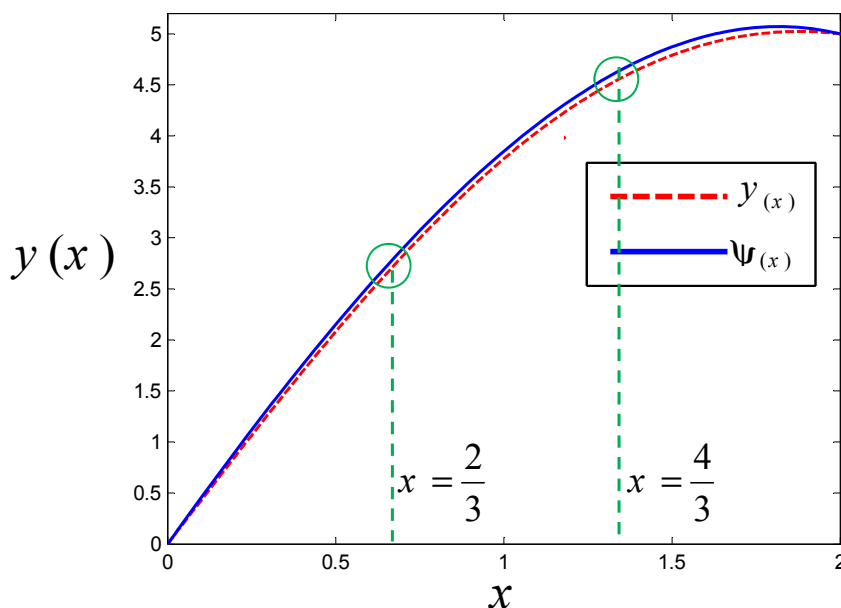
$$(4.20) \rightarrow (4.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = -\frac{135}{460}x^3 - \frac{54}{115}x^2 + \frac{1061}{230}x \quad (4.21)$$

47

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۴-



(مقدار خطا در نقاط گسسته)

لزوما صفر نشده است)

نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

48

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

مثال ۵- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش PCM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow u_{(0)} = 0 \\ @x = 1 \Rightarrow u_{(1)} = 1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^x - 0.42546e^{-x}$$

49

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) u_{(x)} + 0 = 0 \\ (1) &\Rightarrow \mathcal{L}(u_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \\ p_{(x)} &= 0 \end{aligned}} \quad \Omega = [0, 1] \quad (5.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x + \alpha_1 \sin(\pi x) + \alpha_2 \sin(2\pi x)} \quad (5.2)$$

با توجه به رابطه (5.2):

$$(5.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad N_2(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = x} \quad (5.3)$$

50

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵-

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 u_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (5.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(5.3) \& (5.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(1)} = 1 \Rightarrow d^0 u_{(1)} - 1 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(1)} = -1} \quad (5.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \xrightarrow{(5.3) \& (5.5)} 1(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(5.3)} \boxed{\mathcal{M}(\sin(i\pi x)) = 0} \quad (5.6)$$

51

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵-

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (5.6) به صورت زیر در می آید:

$$(5.4) \text{ or } (5.5) \rightarrow (5.6) \Rightarrow \boxed{N_i(x) = \sin(i\pi x) = 0} \quad (5.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n = 2$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = \sin(\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_1(1) = 0 \end{cases} \quad OK$$

$$i = 2 \Rightarrow N_2(x) = \sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_2(1) = 0 \end{cases} \quad OK$$

52

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵- براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض ۲ نقطه ثابت به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(37) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{L}(N_1(x_1)) & \mathcal{L}(N_2(x_1)) \\ \mathcal{L}(N_1(x_2)) & \mathcal{L}(N_2(x_2)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p(x_1) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) \\ -p(x_2) - \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

تعداد نقاط ثابت x_i را برابر با ۲ همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\bar{\psi}(x)$ قرار می‌دهیم. این ۲ نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در آنجا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۲ نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

$$x_i \in \Omega, (i = 1, 2) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad (5.9)$$

53

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵- اکنون پارامترهای رابطه (5.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(5.1) \Rightarrow p_{(x)} = 0 \Rightarrow p(x_1) = p(x_2) = 0 \quad (5.10)$$

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) = -x \quad (5.11)$$

$$(5.11) \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) = -x \Big|_{x_1=\frac{1}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_1)) = -\frac{1}{3} \quad (5.12)$$

$$(5.11) \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) = -x \Big|_{x_2=\frac{2}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{\psi}(x_2)) = -\frac{2}{3} \quad (5.13)$$

54

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵-

$$\mathcal{L}(N_1(x_1)) = -(1 + \pi^2) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.14)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_1)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \Big|_{x_1 = \frac{1}{3}} = -(1 + 4\pi^2) \sin(2\pi x) \Big|_{x_1 = \frac{1}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(N_2(x_1)) = -(1 + 4\pi^2) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{L}(N_1(x_2)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) \Big|_{x_2 = \frac{2}{3}} = -(1 + \pi^2) \sin(\pi x) \Big|_{x_2 = \frac{2}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(N_1(x_2)) = -(1 + \pi^2) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.16)$$

$$\mathcal{L}(N_2(x_2)) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \Big|_{x_2 = \frac{2}{3}} = -(1 + 4\pi^2) \sin(2\pi x) \Big|_{x_2 = \frac{2}{3}} \Rightarrow \mathcal{L}(N_2(x_2)) = (1 + 4\pi^2) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.17)$$

55

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (5.10) تا (5.17) در دستگاه معادلات (5.8) خواهیم داشت:

$$(5.10) \text{ to } (5.17) \rightarrow (5.8) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} -(1 + \pi^2) & -(1 + 4\pi^2) \\ -(1 + \pi^2) & (1 + 4\pi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (5.18) نتیجه می شود:

$$(5.18) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -(1 + \pi^2) & -(1 + 4\pi^2) \\ -(1 + \pi^2) & (1 + 4\pi^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -53.1160 \\ 4.7544 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad (5.19)$$

با جایگذاری ثابت های α_i در رابطه (5.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می آید:

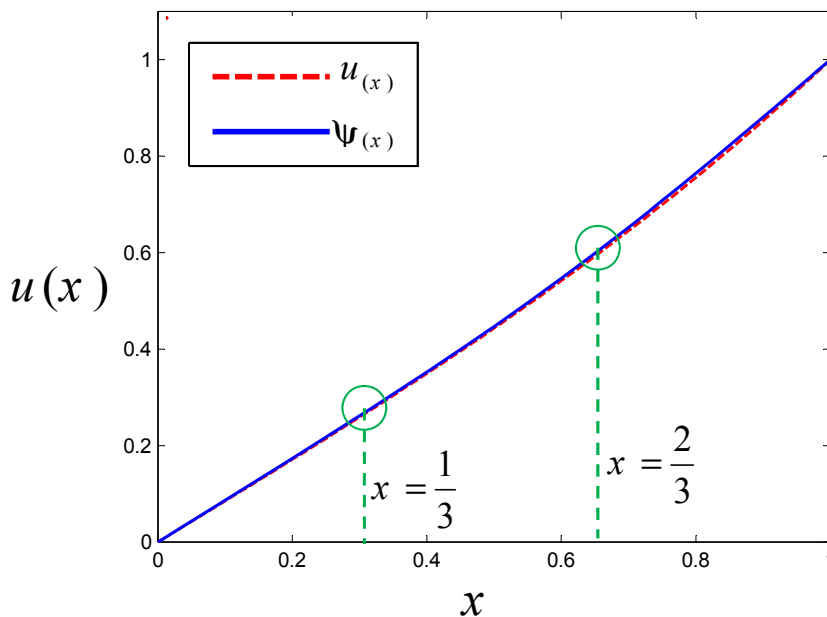
$$(5.19) \rightarrow (5.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = x - 53.1160 \times 10^{-3} \sin(\pi x) + 4.7544 \times 10^{-3} \sin(2\pi x) \quad (5.20)$$

56

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۱. روش تخصیص نقطه (PCM: Point Collocation Method)

پاسخ مثال ۵-



(مقدار خطا در نقاط گسسته

تقریباً صفر شده است)

نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

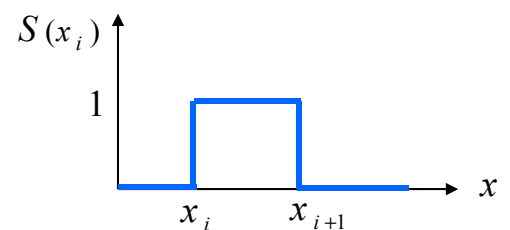
57

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

در این روش، دامنه به تعدادی زیر بازه مختلف که همپوشانی نداشته باشد تبدیل می‌شود. تابع وزنی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که باقیمانده را می‌توان در n زیر بازه برابر با صفر کرد. برای این منظور تابع وزنی براساس تابع پله‌ای واحد (Step Function) به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$w_i(x) = U(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (38)$$



تابع پله‌ای واحد دارای مشخصات زیر است:

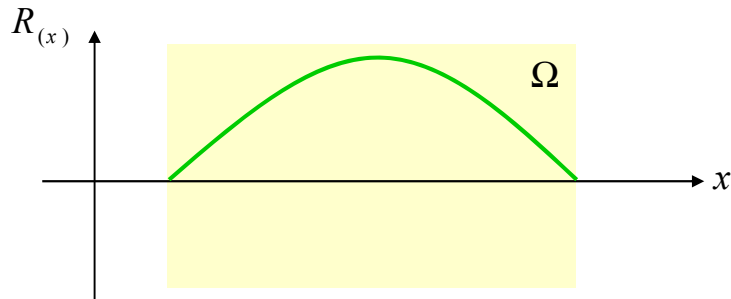
$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x_i) G(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x) dx \quad (39)$$

58

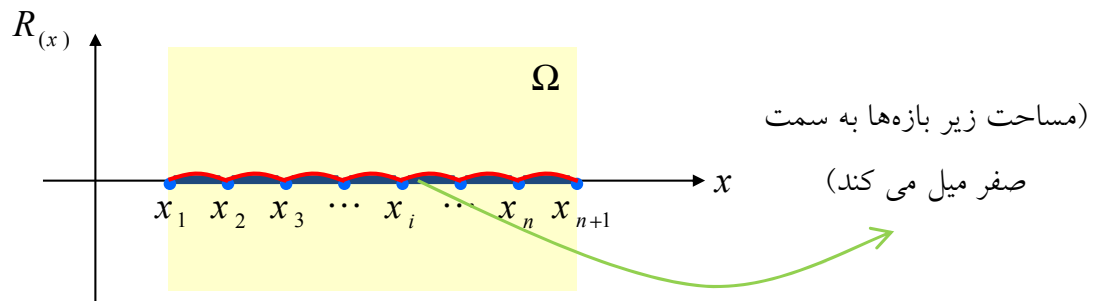
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

تعداد زیر بازه‌ها $(x_i, x_{i+1}) \in \Omega, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ باید برابر با n ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\Psi_{(x)}$ باشند. روش SDM سعی دارد که مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ در تمام زیر بازه‌ها را برابر با صفر نماید. بنابراین هدف اصلی صفر شدن باقیمانده $R_{(x)}$ بر روی کل دامنه Ω است.



روش SDM در تعداد زیر بازه مشخصی (x_i, x_{i+1}) در دامنه Ω مقدار باقیمانده $R_{(x)}$ را صفر می‌کند.



59

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

با جایگذاری تابع پله‌ای واحد به جای تابع وزنی در رابطه (24) نتیجه می‌شود:

$$(38) \rightarrow (24) \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} U(x_1) R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} U(x_2) R_{(x)} dx = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} U(x_n) R_{(x)} dx = 0 \end{cases} \quad (40)$$

با توجه به ویژگی تابع پله‌ای واحد در رابطه (39) خواهیم داشت:

$$(39) \& (40) \Rightarrow \int_{\Omega} U(x_i) R_{(x)} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_{(x)} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} R_{(x)} dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)} \quad (41)$$

این بدان معنی است که مقدار میانگین باقیمانده در طول هر زیر بازه به اجبار صفر گردد.

60

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

همچنین با جایگذاری تابع پله‌ای واحد به جای تابع وزنی در رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$(38) \rightarrow (28) \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} = \int_{\Omega} U(x_i) \mathcal{L}(N_j(x)) dx \\ z_i = - \int_{\Omega} U(x_i) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} U(x_i) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{cases} \quad (42)$$

با توجه به ویژگی تابع پله‌ای واحد در رابطه (39) خواهیم داشت:

$$(39) \& (42) \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{L}(N_j(x)) dx \\ z_i = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{(x)} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{cases} \quad (43)$$

61

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

بر اساس رابطه (43)، رابطه (29) به صورت زیر در می‌آید:

(43) $\rightarrow$ (29) $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(N_n(x)) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \int_{x_1}^{x_2} p_{(x)} dx - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ - \int_{x_2}^{x_3} p_{(x)} dx - \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ \vdots \\ - \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_{(x)} dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (44)$$

می‌توان نشان داد روش SDM معادل همان روش پراکند حجم محدود (Finite Volume Method) در دینامیک

سیالات محاسباتی (CFD: Computational Fluid Dynamics) است.

62

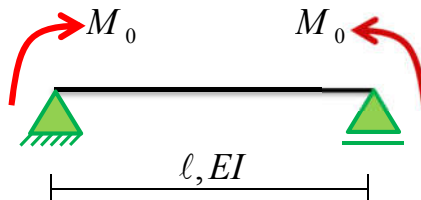
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

مثال ۶- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش SDM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای

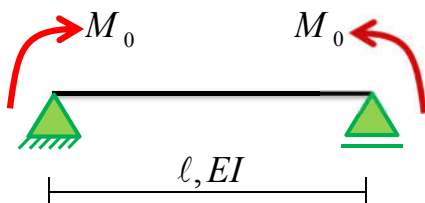


63

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶-



با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$EI \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} - M_0 = 0 \quad x \in (0, \ell) \quad (6.1)$$

با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = \ell \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

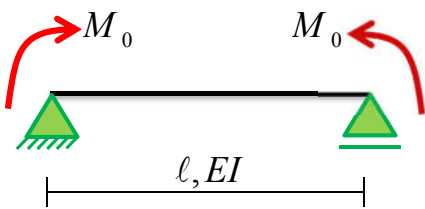
با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می آید:

$$y_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x (x - \ell) \quad (6.3)$$

64

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)



پاسخ مثال ۶- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$(6.1) \Rightarrow \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) y_{(x)} - \frac{M_0}{EI} &= 0 \\ (1) \Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \\ p_{(x)} &= -\frac{M_0}{EI} \end{aligned}} \quad \Omega = (0, \ell) \quad (6.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با در نظر گرفتن تنها دو جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)} \quad (6.5)$$

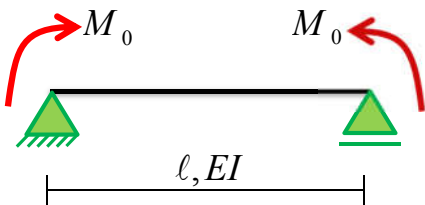
با توجه به رابطه (6.5):

$$(6.5) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad N_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (6.6)$$

65

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)



پاسخ مثال ۶- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (6.7)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(6.6) \& (6.7)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (6.8)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(6.6) \& (6.8)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK \quad \checkmark$$

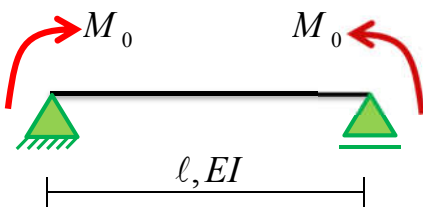
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(6.6)} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right)\right) = 0} \quad (6.9)$$

66

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:



در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (6.9) به صورت زیر در می آید:

$$N_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) = 0 \quad (6.10)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_1(0)=0 \\ x=\ell \Rightarrow N_1(\ell)=0 \end{cases}$$

OK ✓

$$i=2 \Rightarrow N_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_2(0)=0 \\ x=\ell \Rightarrow N_2(\ell)=0 \end{cases}$$

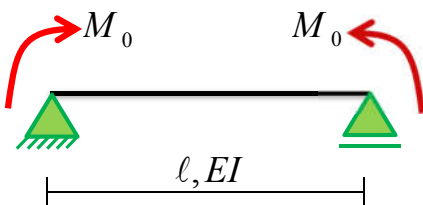
OK ✓

براساس رابطه (44) دستگاه معادلات با فرض ۲ زیر بازه به صورت زیر تشکیل می شود:

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:



تعداد زیر بازه ها (x_i, x_{i+1}) را برابر با ۲ همان تعداد ثابت های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi(x)$ قرار می دهیم. برای ایجاد ۲ زیر بازه به ۳ نقطه نیاز داریم. این ۳ نقطه ثابت باید به گونه ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در ۲ زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۳ نقطه را به دلخواه انتخاب می کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

$$x_i \in \Omega, (i=1, 2, 3) \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=\frac{\ell}{2}, \quad x_3=\ell \quad (6.12)$$

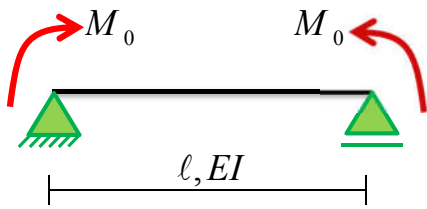
اکنون پارامترهای رابطه (6.11) را تک تک محاسبه می کنیم:

$$p_{(x)} = -\frac{M_0}{EI} \Rightarrow \begin{cases} \int_{x_2}^{x_3} p_{(x)} dx = \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} -\frac{M_0}{EI} dx = -\frac{M_0 \ell}{2EI} \end{cases} \quad (6.13)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:



$$\bar{\Psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\Psi}_{(x)}) dx = \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\Psi}_{(x)}) dx = 0 \quad (6.14)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{\pi}{\ell} \quad (6.15)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sin \left(\frac{2\pi x}{\ell} \right) \right) dx = \frac{2\pi}{\ell} \cos \left(\frac{2\pi x}{\ell} \right) \Big|_0^{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = -\frac{4\pi}{\ell} \quad (6.16)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_{x_2}^{x_3} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sin \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \right) dx = \frac{\pi}{\ell} \cos \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \Rightarrow \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{\pi}{\ell} \quad (6.17)$$

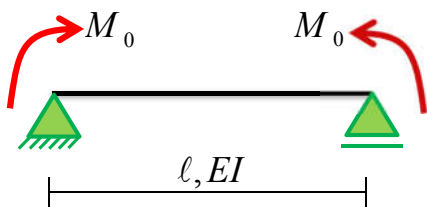
$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_{x_2}^{x_3} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sin \left(\frac{2\pi x}{\ell} \right) \right) dx = \frac{2\pi}{\ell} \cos \left(\frac{2\pi x}{\ell} \right) \Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \Rightarrow \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \frac{4\pi}{\ell} \quad (6.18)$$

69

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:



با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (6.13) تا (6.18) در دستگاه معادلات (6.11) خواهیم داشت:

$$(6.13) \text{ to } (6.18) \rightarrow (6.11) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{\ell} & -\frac{4\pi}{\ell} \\ -\frac{\pi}{\ell} & \frac{4\pi}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M_0 \ell}{2EI} \\ \frac{M_0 \ell}{2EI} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (6.19) نتیجه می شود:

$$(6.19) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{\ell} & -\frac{4\pi}{\ell} \\ -\frac{\pi}{\ell} & \frac{4\pi}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{M_0 \ell}{2EI} \\ \frac{M_0 \ell}{2EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{M_0 \ell^2}{2\pi EI} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

70

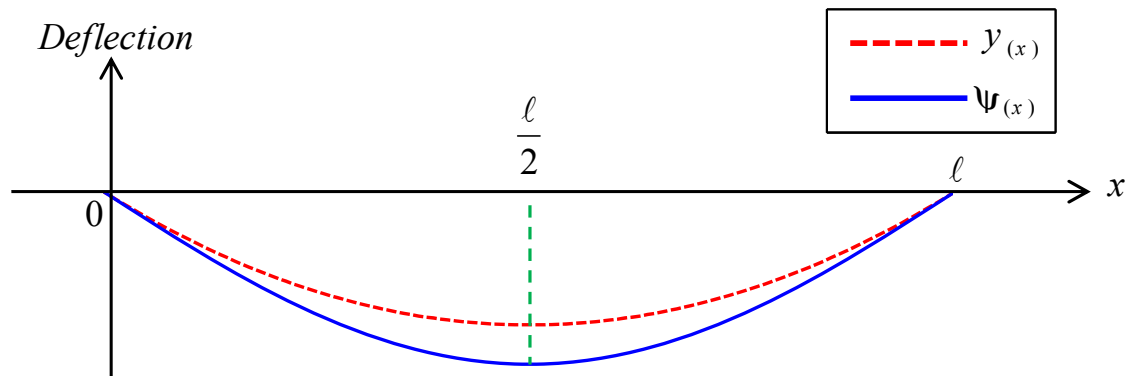
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی:

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (6.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(6.20) \rightarrow (6.5) \Rightarrow \psi_{(x)} = -\frac{M_0 \ell^2}{2\pi EI} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (6.21)$$



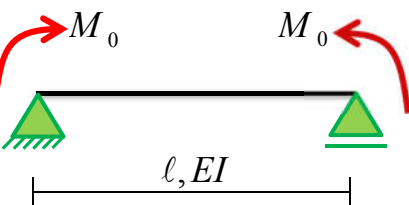
نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

71

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:



با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x - \ell) \quad (6.22)$$

با توجه به رابطه (6.22):

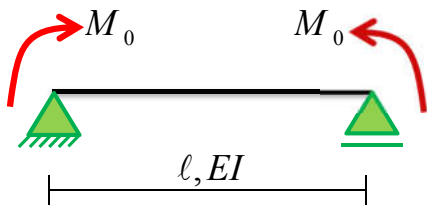
$$(6.22) \Rightarrow N_1(x) = x(x - \ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0 \quad (6.23)$$

72

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:



$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (6.7) \quad (\text{تکراری})$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(6.7) \& (6.23)} 1(\alpha_0) + 0 = 0 \xrightarrow{\text{Must be}} \boxed{\alpha_0 = 0} \xrightarrow{(6.24)} \boxed{0 = 0} \quad OK \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (6.8) \quad (\text{تکراری})$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(6.8) \& (6.23) \& (6.24)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK \quad \checkmark$$

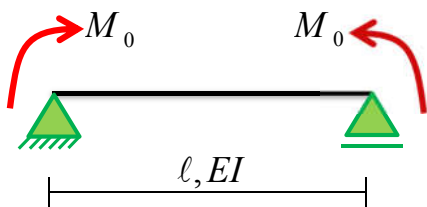
$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(6.23)} \boxed{\mathcal{M}(x(x - \ell)) = 0} \quad (6.25)$$

73

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:



در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (6.25) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{N_1(x) = x(x - \ell) = 0} \quad (6.26)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n = 1$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = x(x - \ell) = 0 \Rightarrow \boxed{@ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = \ell \Rightarrow N_1(\ell) = 0 \end{cases}} \quad OK \quad \checkmark$$

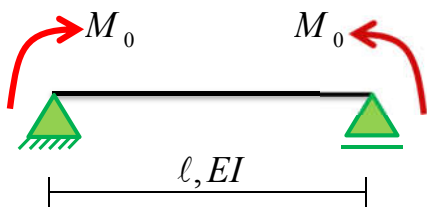
براساس رابطه (44) دستگاه معادلات با فرض ۱ زیر بازه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

74

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:



تعداد زیر بازه‌ها (x_i, x_{i+1}) را برابر با ۱ همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\Psi_{(x)}$ قرار می‌دهیم. برای ایجاد ۱ زیر بازه به ۲ نقطه نیاز داریم. این ۲ نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در ۱ زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۲ نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

$$x_i \in \Omega, (i = 1, 2) \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \ell \quad (6.28)$$

اکنون پارامترهای رابطه (6.27) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$p_{(x)} = -\frac{M_0}{EI} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p_{(x)} dx = \int_0^{\ell} -\frac{M_0}{EI} dx = -\frac{M_0 \ell}{EI} \quad (6.29)$$

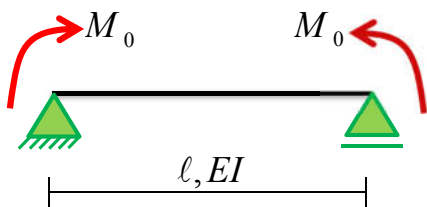
$$\bar{\Psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\Psi}_{(x)}) dx = 0 \quad (6.30)$$

75

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۶- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:



$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = 2\ell \quad (6.31)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (6.29) تا (6.31) در معادله (6.27) خواهیم داشت:

$$(6.29) \text{ to } (6.31) \rightarrow (6.27) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{M_0}{2EI} \quad (6.32)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (6.22) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(6.32) \rightarrow (6.22) \Rightarrow \Psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x - \ell) \quad (6.33) \quad (\text{همان پاسخ دقیق است})$$

76

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

مثال ۷- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش SDM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \quad x \in (0, 2) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \Rightarrow y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

77

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) y_{(x)} - x = 0 \\ (1) &\Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) \\ p_{(x)} &= -x \end{aligned} \quad \Omega = (0, 2)} \quad (7.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله ای در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = 2.5x + \alpha_1 x(x-2) + \alpha_2 x^2(x-2)} \quad (7.2)$$

با توجه به رابطه (7.2):

$$(7.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = x(x-2) \quad , \quad N_2(x) = x^2(x-2) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x} \quad (7.3)$$

78

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷-۷

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow y_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (7.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(7.3) \& (7.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow y_{(2)} = 5 \Rightarrow d^0 y_{(2)} - 5 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(y_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(2)} = -5} \quad (7.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \xrightarrow{(7.3) \& (7.5)} 1(2.5 \times 2) - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(7.3)} \begin{cases} \text{for } i = 1 & \mathcal{M}(x(x-2)) = 0 \\ \text{for } i = 2 & \mathcal{M}(x^2(x-2)) = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

79

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷-۷

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (7.6) به صورت زیر در می آید:

$$(7.4) \text{ or } (7.5) \rightarrow (7.6) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \text{for } i = 1 & \quad N_1(x) = x(x-2) = 0 \\ \text{for } i = 2 & \quad N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \end{aligned}} \quad (7.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n = 2$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = x(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow N_1(2) = 0 \end{cases} \quad OK$$

$$i = 2 \Rightarrow N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow N_2(2) = 0 \end{cases} \quad OK$$

80

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷- براساس رابطه (44) دستگاه معادلات با فرض ۲ زیر بازه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(44) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\int_{x_1}^{x_2} p_{(x)}dx - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \\ -\int_{x_2}^{x_3} p_{(x)}dx - \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx \end{array} \right\} \quad (7.8)$$

تعداد زیر بازه‌ها (x_i, x_{i+1}) را برابر با ۲ همان تعداد ثابت‌های مجهول α_i در تابع تقریبی $\bar{\psi}_{(x)}$ قرار می‌دهیم. برای ایجاد ۲ زیر بازه به ۳ نقطه نیاز داریم. این ۳ نقطه ثابت باید به گونه‌ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در ۲ زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی‌دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۳ نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

81

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷- اکنون پارامترهای رابطه (7.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(7.1) \Rightarrow p_{(x)} = -x \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p_{(x)}dx = \int_0^1 (-x)dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p_{(x)}dx = -\frac{1}{2} \quad (7.10)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} p_{(x)}dx = -\frac{3}{2} \quad (7.11)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \frac{5}{4} \quad (7.12)$$

$$(7.3) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x \Rightarrow \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \int_1^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (2.5x)dx = \frac{15}{4} \Rightarrow \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})dx = \frac{15}{4} \quad (7.13)$$

82

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷-۷

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_0^1 \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x(x-2)) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \bigg|_0^1 \Rightarrow \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \frac{4}{3}} \quad (7.14)$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \frac{9}{4}} \quad (7.15)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_1^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x(x-2)) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \bigg|_1^2 \Rightarrow \boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \frac{4}{3}} \quad (7.16)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_1^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x^2(x-2)) dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right) \bigg|_1^2 \Rightarrow \boxed{\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \frac{39}{4}} \quad (7.17)$$

83

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷-۷ با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (7.10) تا (7.17) در دستگاه معادلات (7.8) خواهیم داشت:

$$(7.10) \text{ to } (7.17) \rightarrow (7.8) \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{9}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{39}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{9}{4} \end{Bmatrix}} \quad (7.18)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (7.18) نتیجه می‌شود:

$$(7.18) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{9}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{39}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{9}{4} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{9}{40} \\ -\frac{1}{5} \end{Bmatrix}} \quad (7.19)$$

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (7.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

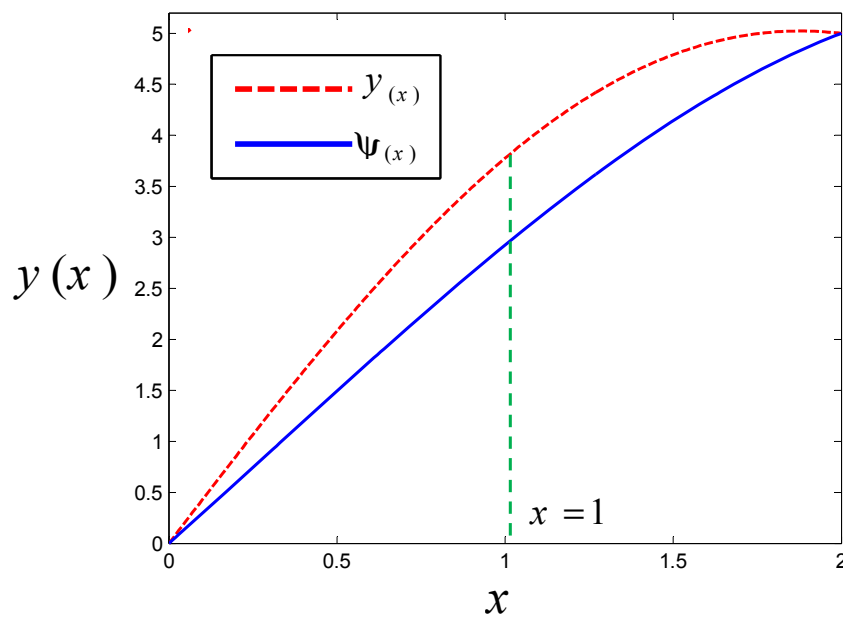
$$(7.19) \rightarrow (7.2) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{7}{40}x^2 + \frac{59}{20}x} \quad (7.20)$$

84

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۷-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

85

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

مثال ۸- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش SDM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad BC : \begin{cases} @x=0 \Rightarrow u_{(0)}=0 \\ @x=1 \Rightarrow u_{(1)}=1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^x - 0.42546e^{-x}$$

86

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) u_{(x)} + 0 = 0 \\ (1) &\Rightarrow \mathcal{L}(u_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \\ p_{(x)} &= 0 \end{aligned}} \quad \Omega = [0, 1] \quad (8.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x + \alpha_1 \sin(\pi x) + \alpha_2 \sin(2\pi x)} \quad (8.2)$$

با توجه به رابطه (8.2):

$$(8.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad N_2(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = x} \quad (8.3)$$

87

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸-

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow u_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 u_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(u_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (8.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(8.3) \& (8.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow u_{(1)} = 1 \Rightarrow d^0 u_{(1)} - 1 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(u_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(1)} = -1} \quad (8.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \xrightarrow{(8.3) \& (8.5)} 1(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(8.3)} \boxed{\mathcal{M}(\sin(i\pi x)) = 0} \quad (8.6)$$

88

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸-

در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (8.6) به صورت زیر در می آید:

$$(8.4) \text{ or } (8.5) \rightarrow (8.6) \Rightarrow N_i(x) = \sin(i\pi x) = 0 \quad (8.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = \sin(\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_1(0)=0 \\ x=1 \Rightarrow N_1(1)=0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

$$i=2 \Rightarrow N_2(x) = \sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_2(0)=0 \\ x=1 \Rightarrow N_2(1)=0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

89

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸- براساس رابطه (37) دستگاه معادلات با فرض ۲ زیر بازه به صورت زیر تشکیل می شود:

$$(44) \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x))dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x))dx & \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x))dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}(x))dx \\ -\int_{x_2}^{x_3} p(x)dx - \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}(x))dx \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

تعداد زیر بازه ها (x_i, x_{i+1}) را برابر با ۲ همان تعداد ثابت های مجهول α_i در تابع تقریبی $\psi(x)$ قرار می دهیم. برای ایجاد ۲ زیر بازه به ۳ نقطه نیاز داریم. این ۳ نقطه ثابت باید به گونه ای انتخاب شوند که مقدار تابع باقیمانده در ۲ زیر فضا مجبور شود که صفر گردد. از آنجایی که نمی دانیم بهترین انتخاب کدام است از این رو محل ۳ نقطه را به دلخواه انتخاب می کنیم (اما بهتر است تا جایی که امکان دارد از بین کل دامنه انتخاب شود نه بخش خاصی از دامنه، به عبارت دیگر در فواصل کم و بیش مساوی قرار گیرند):

$$x_i \in \Omega, (i=1, 2, 3) \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=\frac{1}{2}, \quad x_3=1 \quad (8.9)$$

90

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸- اکنون پارامترهای رابطه (8.8) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(8.1) \Rightarrow p_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p_{(x)} dx = \int_{x_2}^{x_3} p_{(x)} dx = 0 \quad (8.10)$$

$$(8.3) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = x \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) (x) dx \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{1}{8} \quad (8.11)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{3}{8} \quad (8.12)$$

91

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸-

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) dx = \frac{1+\pi^2}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{1+\pi^2}{\pi} \quad (8.13)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) dx = \frac{1+4\pi^2}{2\pi} \cos(2\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = -\frac{1+4\pi^2}{\pi} \quad (8.14)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) dx = \frac{1+\pi^2}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \Rightarrow \int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{1+\pi^2}{\pi} \quad (8.15)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \frac{1+4\pi^2}{\pi} \quad (8.16)$$

92

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (8.10) تا (8.16) در دستگاه معادلات (8.8) خواهیم داشت:

$$(8.10) \text{ to } (8.16) \rightarrow (8.8) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+\pi^2 & 1+4\pi^2 \\ 1+\pi^2 & -(1+4\pi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = -\frac{\pi}{8} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (8.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن نیست)

با حل معادله (8.17) نتیجه می‌شود:

$$(8.17) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = -\frac{\pi}{8} \begin{bmatrix} 1+\pi^2 & 1+4\pi^2 \\ 1+\pi^2 & -(1+4\pi^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -72.256 \\ 9.7014 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad (8.18)$$

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (8.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

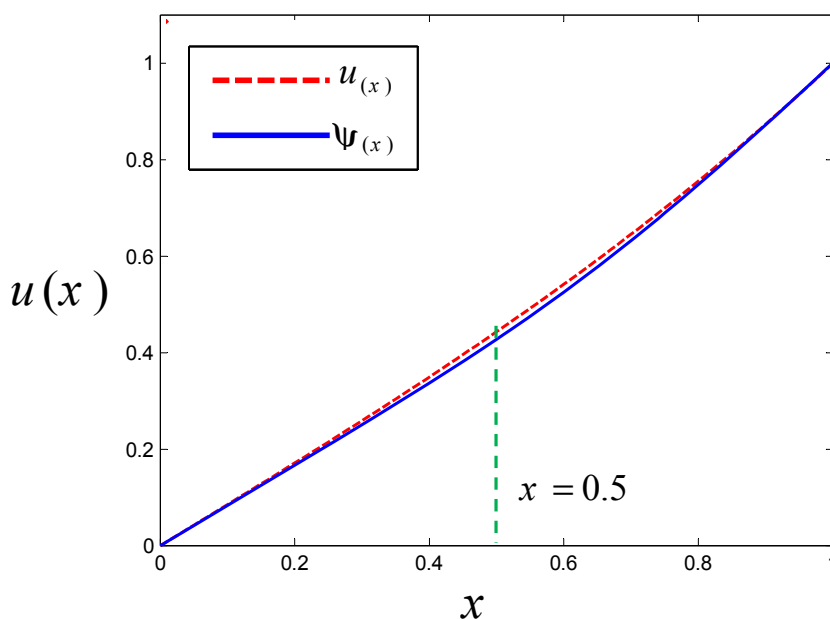
$$(8.18) \rightarrow (8.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = x - 72.256 \times 10^{-3} \sin(\pi x) + 9.7014 \times 10^{-3} \sin(2\pi x) \quad (8.19)$$

93

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۲. روش زیر حوزه (SDM: Sub-Domain Method)

پاسخ مثال ۸-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

94

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

در این روش، تابع وزنی برابر با مشتق باقیمانده نسبت به ثابت‌های نامعین برازش در تابع حدسی α_i در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع وزنی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$w_i(x) = \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (45)$$

با جایگذاری تابع وزنی پیشنهادی (45) در رابطه (24) نتیجه می‌شود:

$$(45) \rightarrow (24) \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_1} R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_2} R_{(x)} dx = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_n} R_{(x)} dx = 0 \end{cases} \quad (46)$$

95

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

از رابطه (46) می‌توان نتیجه گرفت:

$$(46) \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} R_{(x)} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial R_{(x)}^2}{\partial \alpha_i} dx = 0} \quad (47)$$

رابطه (47) به این معنی است که میانگین مجذور باقیمانده در دامنه Ω با توجه به ثابت‌های برازش α_i باید به حداقل برسد. بنابراین با رساندن میانگین مجذور باقیمانده به صفر، عملاً باقیمانده $R_{(x)}$ صفر می‌گردد.

با مشتق‌گیری از باقیمانده $R_{(x)}$ نسبت به ثابت برازش α_i در رابطه (25) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (25) \Rightarrow R_{(x)} &= \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{L}(N_i(x)) \right) + p_{(x)} \Rightarrow \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{L}(N_i(x)) \right)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial p_{(x)}}{\partial \alpha_i} \\ \Rightarrow \frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\alpha_1 \mathcal{L}(N_1(x)) + \alpha_2 \mathcal{L}(N_2(x)) + \dots + \alpha_i \mathcal{L}(N_i(x)) + \dots + \alpha_n \mathcal{L}(N_n(x)) \right) = \mathcal{L}(N_i(x)) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial R_{(x)}}{\partial \alpha_i} &= \mathcal{L}(N_i(x))} \quad (48) \end{aligned}$$

96

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

با جایگذاری تابع وزنی (45) در رابطه (28) و استفاده رابطه (48) نتیجه می شود:

(45) $\rightarrow$ (28) $\stackrel{(48)}{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_i(x)) \mathcal{L}(N_j(x)) dx \\ z_i &= - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_i(x)) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_i(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{aligned} \quad (49)$$

97

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

بر اساس رابطه (49)، رابطه (29) به صورت زیر در می آید:

(49) $\rightarrow$ (29) $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ \vdots \\ - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (50)$$

▪ روش LSM به طور خودکار ماتریس ضرایب را متقارن و مثبت معین (درایه های قطر اصلی مثبت) تولید می کند.

▪ عملیات محاسباتی مورد نیاز در روش LSM پر هزینه است.

98

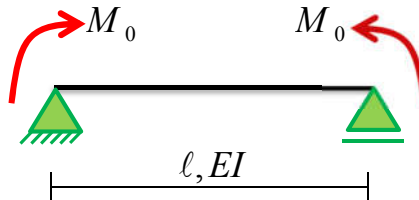
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

مثال ۹- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش LSM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

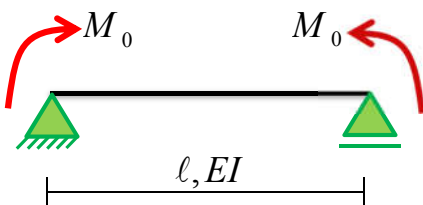
ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای



99

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)



پاسخ مثال ۹-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$EI \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} - M_0 = 0 \quad x \in (0, \ell) \quad (9.1)$$

با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

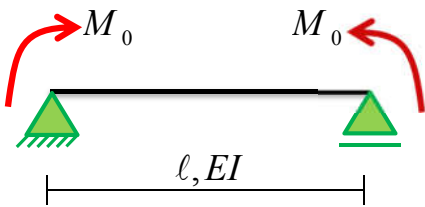
$$BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = \ell \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می آید:

$$y_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x (x - \ell) \quad (9.3)$$

100

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$(9.1) \Rightarrow \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) y_{(x)} - \frac{M_0}{EI} &= 0 \\ (1) \Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \\ p_{(x)} &= -\frac{M_0}{EI} \end{aligned}} \quad \Omega = (0, \ell) \quad (9.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

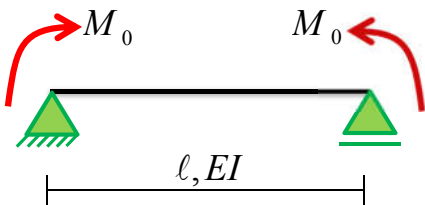
$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (9.5)$$

با توجه به رابطه (9.5):

$$(9.5) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (9.6)$$

101

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} &= 0 \Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (9.7)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(9.6) \& (9.7)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK \quad \checkmark$$

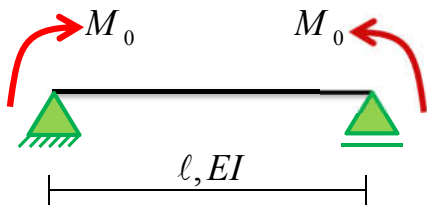
$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} &= 0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (9.8)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(9.6) \& (9.8)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK \quad \checkmark$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_1(x)) = 0 \xrightarrow{(9.6)} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right) = 0} \quad (9.9)$$

102

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (9.9) به صورت زیر در می آید:

$$N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0 \quad (9.10)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

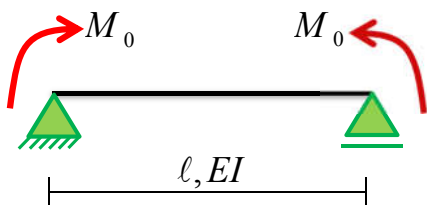
$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_1(0)=0 \\ x=\ell \Rightarrow N_1(\ell)=0 \end{cases}$$

OK ✓

براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض ۱ جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

103

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

اکنون پارامترهای رابطه (9.11) را تک تک محاسبه می کنیم:

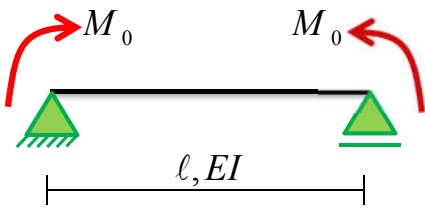
$$(9.4) \& (9.6) \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) p_{(x)} dx = \frac{2M_0\pi}{EI\ell} \quad (9.12)$$

$$(9.6) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0 \quad (9.13)$$

104

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

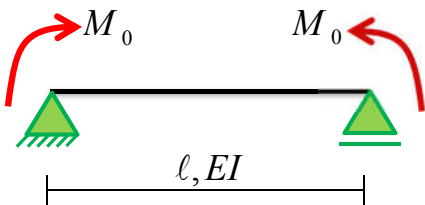
$$\Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \frac{\pi^4}{2\ell^3} \quad (9.14)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (9.12) تا (9.14) در دستگاه معادلات (9.11) خواهیم داشت:

$$(9.12) \text{ to } (9.14) \rightarrow (9.11) \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3} \quad (9.15)$$

105

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

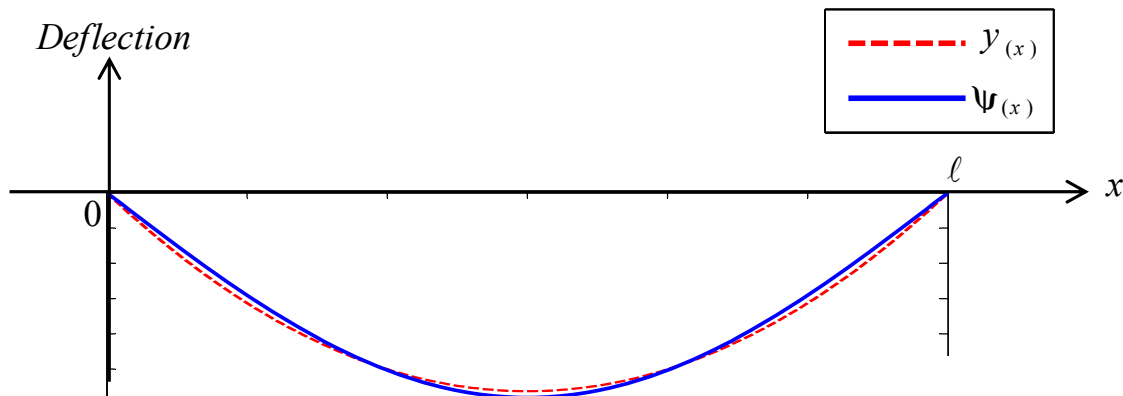


۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (9.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می آید:

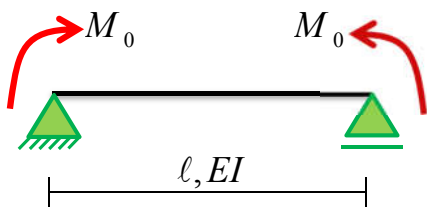
$$(9.15) \rightarrow (9.5) \Rightarrow \psi_{(x)} = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (9.16)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

106

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

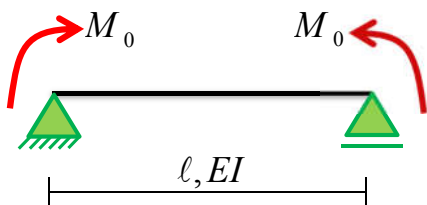
$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x - \ell)} \quad (9.17)$$

با توجه به رابطه (9.17):

$$(9.17) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = x(x - \ell), \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0} \quad (9.18)$$

107

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (9.7) \text{ (تکراری)}$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(9.7) \& (9.18)} 1(\alpha_0) + 0 = 0 \xrightarrow{\text{Must be}} \boxed{\alpha_0 = 0} \Rightarrow \boxed{0 = 0} \text{ OK} \checkmark$$

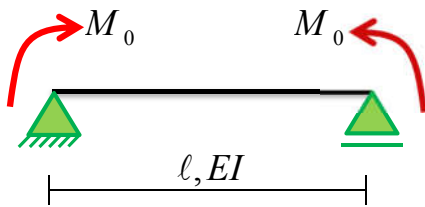
$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (9.8) \text{ (تکراری)}$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(9.8) \& (9.18) \& (9.19)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \text{ OK} \checkmark$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(9.18)} \boxed{\mathcal{M}(x(x - \ell)) = 0} \quad (9.20)$$

108

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی ها $M = 1$ بود در نتیجه رابطه (9.20) به صورت زیر در می‌آید:

$$N_1(x) = x(x - \ell) = 0 \quad (9.21)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n = 1$ خواهیم داشت:

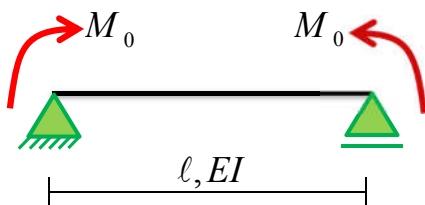
$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = x(x - \ell) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = \ell \Rightarrow N_1(\ell) = 0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض ۱ جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(50) \Rightarrow \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \alpha_1 = - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \quad (9.11) \quad (\text{تکراری})$$

109

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

اکنون پارامترهای رابطه (9.11) در حالتی که تابع حدسی فرم چندجمله‌ای دارد را تک تک محاسبه می‌کنیم:

$$(9.4) \& (9.18) \Rightarrow$$

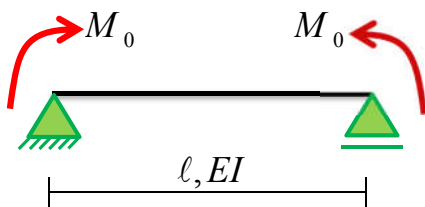
$$= - \frac{2M_0 x}{EI} \Big|_0^{\ell} = - \frac{2M_0 \ell}{EI}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) p_{(x)} dx = - \frac{2M_0 \ell}{EI} \quad (9.22)$$

$$(9.18) \& (9.19) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0 \quad (9.23)$$

110

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۹- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$4x \Big|_0^\ell = 4\ell$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = 4\ell \quad (9.24)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (9.22) تا (9.24) در دستگاه معادلات (9.11) خواهیم داشت:

$$(9.22) \text{ to } (9.24) \rightarrow (9.11) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{M_0}{2EI} \quad (9.25)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (9.17) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(9.25) \rightarrow (9.17) \Rightarrow \psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x - \ell) \quad (9.26) \quad (\text{همان پاسخ دقیق است})$$

111

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

مثال ۱۰- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش LSM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \quad x \in (0, 2) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \Rightarrow y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

112

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰ - معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) y_{(x)} - x = 0 \\ (1) \Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) \\ p_{(x)} &= -x \end{aligned}} \quad \Omega = (0, 2) \quad (10.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله ای در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = 2.5x + \alpha_1 x(x-2) + \alpha_2 x^2(x-2)} \quad (10.2)$$

با توجه به رابطه (10.2):

$$(10.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = x(x-2), \quad N_2(x) = x^2(x-2), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x} \quad (10.3)$$

113

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰ -

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (10.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(10.3) \& (10.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK$$

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(2)} = 5 &\Rightarrow d^0 y_{(2)} - 5 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(2)} = -5} \quad (10.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \xrightarrow{(10.3) \& (10.5)} 1(2.5 \times 2) - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(10.3)} \begin{aligned} &\text{for } i = 1 \quad \boxed{\mathcal{M}(x(x-2)) = 0} \\ &\text{for } i = 2 \quad \boxed{\mathcal{M}(x^2(x-2)) = 0} \end{aligned} \quad (10.6)$$

114

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰-

در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (10.6) به صورت زیر در می آید:

$$(10.4) \text{ or } (10.5) \rightarrow (10.6) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{for } i=1 \quad N_1(x) = x(x-2) = 0 \\ \text{for } i=2 \quad N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \end{array}} \quad (10.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = x(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x=2 \Rightarrow N_1(2) = 0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

$$i=2 \Rightarrow N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x=2 \Rightarrow N_2(2) = 0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

115

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰- براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

اکنون پارامترهای رابطه (10.8) را تک تک محاسبه می کنیم:

(10.1) & (10.3) $\Rightarrow$

$$= - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \bigg|_0^2 = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) p_{(x)} dx = -\frac{8}{3}} \quad (10.9)$$

116

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰-

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) p_{(x)} dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x^2 (x-2) \right) (-x) dx = - \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x^3 - 2x^2 \right) \Big|_0^2 = -\frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) p_{(x)} dx = -\frac{32}{5}} \quad (10.10)$$

$$= \frac{5}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \frac{20}{3}} \quad (10.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx &= \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x^2 (x-2) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) 2.5x \right) dx \\ &= \frac{5}{2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x^3 - 2x^2 \right) \Big|_0^2 = 16 \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) p_{(x)} dx = 16} \quad (10.12) \end{aligned}$$

117

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰-

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x (x-2) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x (x-2) \right) dx = 4x \Big|_0^2 = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = 8} \quad (10.13)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x (x-2) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x^2 (x-2) \right) dx = (6x^2 - 8x) \Big|_0^2 = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = 8} \quad (10.14)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = 8} \quad (10.15)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x^2 (x-2) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x^2 (x-2) \right) dx$$

$$= (12x^3 - 24x^2 + 16x) \Big|_0^2 = 32 \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = 32} \quad (10.16)$$

118

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (10.9) تا (10.16) در دستگاه معادلات (10.8) خواهیم داشت:

$$(10.9) \text{ to } (10.16) \rightarrow (10.8) \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -\frac{48}{5} \end{Bmatrix} \quad (10.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (10.17) نتیجه می‌شود:

$$(10.17) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 32 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -4 \\ -\frac{48}{5} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{15} \\ \frac{7}{30} \end{Bmatrix} \quad (10.18)$$

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (10.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

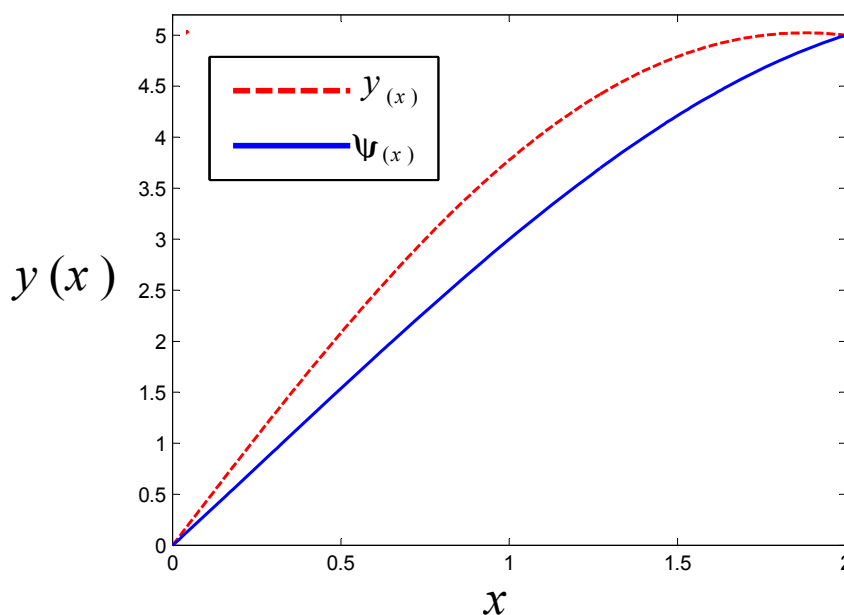
$$(10.18) \rightarrow (10.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = -\frac{7}{30}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{91}{30}x \quad (10.19)$$

119

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۰-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

120

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

مثال ۱۱- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش LSM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow u_{(0)} = 0 \\ @x = 1 \Rightarrow u_{(1)} = 1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^x - 0.42546e^{-x}$$

121

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) u_{(x)} + 0 = 0 \\ (1) &\Rightarrow \mathcal{L}(u_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) & \Omega &= [0, 1] \\ p_{(x)} &= 0 \end{aligned}} \quad (11.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x + \alpha_1 \sin(\pi x) + \alpha_2 \sin(2\pi x)} \quad (11.2)$$

با توجه به رابطه (11.2):

$$(11.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad N_2(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = x} \quad (11.3)$$

122

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱-

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 u_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (11.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(11.3) \& (11.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(1)} = 1 \Rightarrow d^0 u_{(1)} - 1 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(1)} = -1} \quad (11.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \xrightarrow{(11.3) \& (11.5)} 1(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(11.3)} \boxed{\mathcal{M}(\sin(i \pi x)) = 0} \quad (11.6)$$

123

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱-

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (11.6) به صورت زیر در می آید:

$$(11.4) \text{ or } (11.5) \rightarrow (11.6) \Rightarrow \boxed{N_i(x) = \sin(i \pi x) = 0} \quad (11.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n = 2$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = \sin(\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_1(1) = 0 \end{cases} \quad OK$$

$$i = 2 \Rightarrow N_2(x) = \sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_2(1) = 0 \end{cases} \quad OK$$

124

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱- براساس رابطه (50) دستگاه معادلات با فرض ۲ جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

$$(50) \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx \\ \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (11.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (11.8) را تک تک محاسبه می کنیم:

$$(11.1) \& (11.3) \Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) p_{(x)} dx = 0 \quad (11.9)$$

$$(11.1) \& (11.3) \Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) p_{(x)} dx = 0 \quad (11.10)$$

125

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱-

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \frac{1+\pi^2}{\pi} \quad (11.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx &= \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) x \right) dx = \\ \int_0^1 (1+4\pi^2) x \sin(2\pi x) dx &= -\frac{1+4\pi^2}{2\pi} \Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) p_{(x)} dx = -\frac{1+4\pi^2}{2\pi} \end{aligned} \quad (11.12)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx &= \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) \right) dx = \\ \int_0^1 (-(1+\pi^2) \sin(\pi x))^2 dx &= \frac{(1+\pi^2)^2}{2} \Rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \frac{(1+\pi^2)^2}{2} \end{aligned} \quad (11.13)$$

126

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱ -

$$\int_0^1 (1 + \pi^2)(1 + 4\pi^2) \sin(\pi x) \sin(2\pi x) dx = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = 0} \quad (11.14)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) \right) dx = (6x^2 - 8x) \Big|_0^2 = 8$$

$$\int_0^1 (1 + \pi^2)(1 + 4\pi^2) \sin(\pi x) \sin(2\pi x) dx = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = 0} \quad (11.15)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \right) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(-(1 + 4\pi^2) \sin(2\pi x) \right)^2 dx = \frac{(1 + 4\pi^2)^2}{2} \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \frac{(1 + 4\pi^2)^2}{2}} \quad (11.16)$$

127

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱ - با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (11.9) تا (11.16) در دستگاه معادلات (11.8) خواهیم داشت:

$$(11.9) \text{ to } (11.16) \rightarrow (11.8) \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \frac{(1 + \pi^2)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1 + 4\pi^2)^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1 + \pi^2}{\pi} \\ \frac{1 + 4\pi^2}{2\pi} \end{Bmatrix}} \quad (11.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (11.17) نتیجه می‌شود:

$$(11.17) \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -58.5688 \\ 7.8637 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}} \quad (11.18)$$

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (11.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

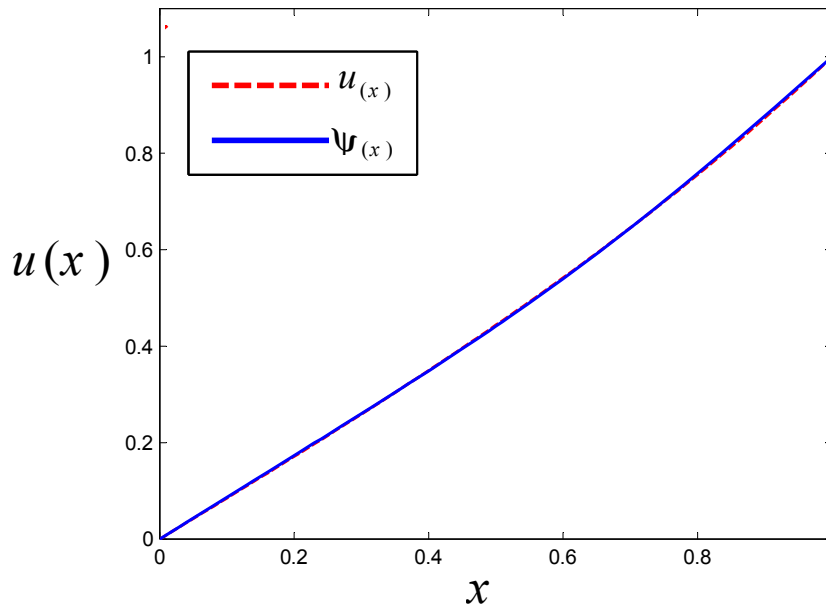
$$(11.18) \rightarrow (11.2) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x - 58.5688 \times 10^{-3} \sin(\pi x) + 7.8637 \times 10^{-3} \sin(2\pi x)} \quad (11.19)$$

128

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۳. روش حداقل مربعات (LSM: Least Square Method)

پاسخ مثال ۱۱-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

129

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

در این روش، تابع وزنی به صورت یک سری توابع (حدسی) آزمایشی در نظر گرفته می‌شود. از این روش برای توسعه روش المان محدود استفاده می‌گردد.

با جایگذاری تابع وزنی پیشنهادی (51) در رابطه (24) نتیجه می‌شود:

$$w_i(x) = N_i(x) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (51)$$

$$(51) \rightarrow (24) \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} N_1(x) R_{(x)} dx = 0 \\ \int_{\Omega} N_2(x) R_{(x)} dx = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} N_n(x) R_{(x)} dx = 0 \end{cases} \quad (52)$$

همچنین با جایگذاری تابع حدسی $N_i(x)$ به جای تابع وزنی در رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$(51) \rightarrow (28) \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} = \int_{\Omega} N_i(x) \mathcal{L}(N_j(x)) dx \\ z_i = - \int_{\Omega} N_i(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_i(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{cases} \quad (53)$$

130

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

بر اساس رابطه (53)، رابطه (29) به صورت زیر در می آید:

$$(53) \rightarrow (29) \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} N_n(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} N_n(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx & \cdots & \int_{\Omega} N_n(x) \mathcal{L}(N_n(x)) dx \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ \vdots \\ -\int_{\Omega} N_n(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_n(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (54)$$

- اگر عملگر دیفرانسیلی خود الحاقی باشد روش LSM به طور خودکار ماتریس ضرایب را متقارن و مثبت معین تولید می کند.
- عملیات محاسباتی مورد نیاز در روش GM کم هزینه است.

131

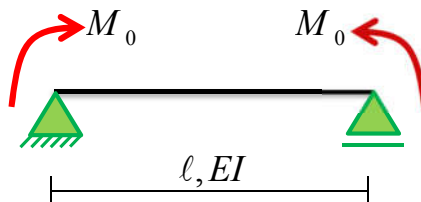
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

مثال ۱۲- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش LSM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

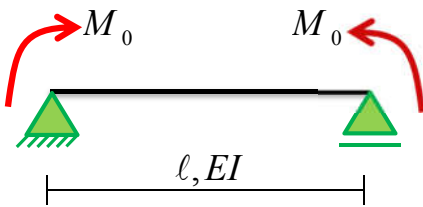
ب- تابع حدسی فرم چند جمله ای



132

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)



پاسخ مثال ۱۲-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$EI \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} - M_0 = 0 \quad x \in (0, \ell) \quad (12.1)$$

با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = \ell \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 \end{cases} \quad (12.2)$$

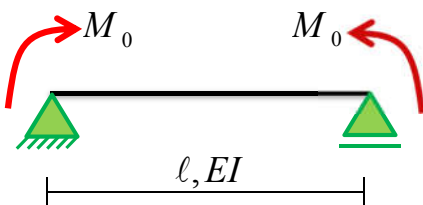
با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می آید:

$$y_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x - \ell) \quad (12.3)$$

133

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)



پاسخ مثال ۱۲- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$(12.1) \Rightarrow \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) y_{(x)} - \frac{M_0}{EI} &= 0 \\ (1) \Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \\ p_{(x)} &= -\frac{M_0}{EI} \end{aligned} \right. \quad \Omega = (0, \ell) \quad (12.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

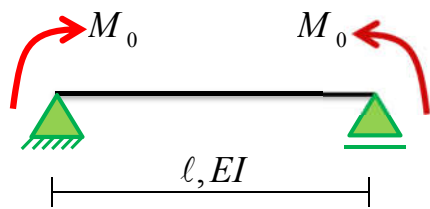
$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (12.5)$$

با توجه به رابطه (12.5):

$$(12.5) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (12.6)$$

134

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - الف - تابع حدسی فرم مثلثاتی

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (12.7)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(12.6) \& (12.7)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

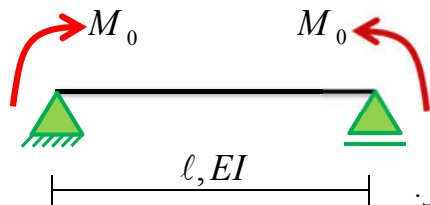
$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (12.8)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(12.6) \& (12.8)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_1(x)) = 0 \xrightarrow{(12.6)} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right) = 0} \quad (12.9)$$

135

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - الف - تابع حدسی فرم مثلثاتی

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (12.9) به صورت زیر در می آید:

$$\boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0} \quad (12.10)$$

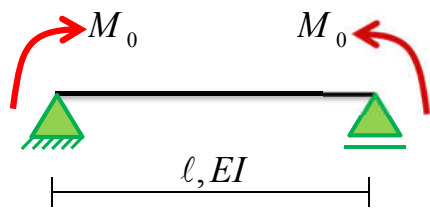
با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n = 1$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = \ell \Rightarrow N_1(\ell) = 0 \end{cases} \quad OK$$

براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض ۱ جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

136

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - الف - تابع حدسی فرم مثلثاتی

اکنون پارامترهای رابطه (12.11) را تک تک محاسبه می‌کنیم:

(12.4) & (12.6) $\Rightarrow$

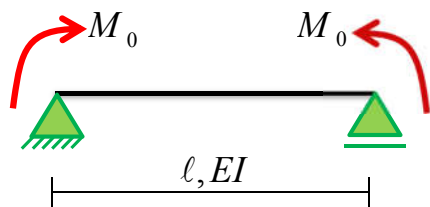
$$= \frac{M_0}{EI} \frac{\ell}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \Big|_0^\ell = -\frac{2M_0 \ell}{\pi EI}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = -\frac{2M_0 \ell}{\pi EI} \quad (12.12)$$

$$(12.6) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0 \quad (12.13)$$

137

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - الف - تابع حدسی فرم مثلثاتی

$$= -\frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = -\frac{\pi^2}{2\ell}$$

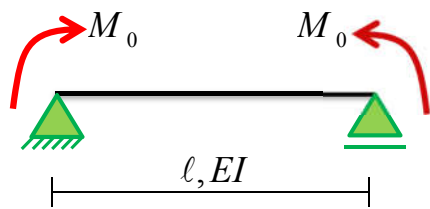
$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{\pi^2}{2\ell} \quad (12.14)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (12.12) تا (12.14) در دستگاه معادلات (12.11) خواهیم داشت:

$$(12.12) \text{ to } (12.14) \rightarrow (12.11) \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4M_0 \ell^2}{EI \pi^3} \quad (12.15)$$

138

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

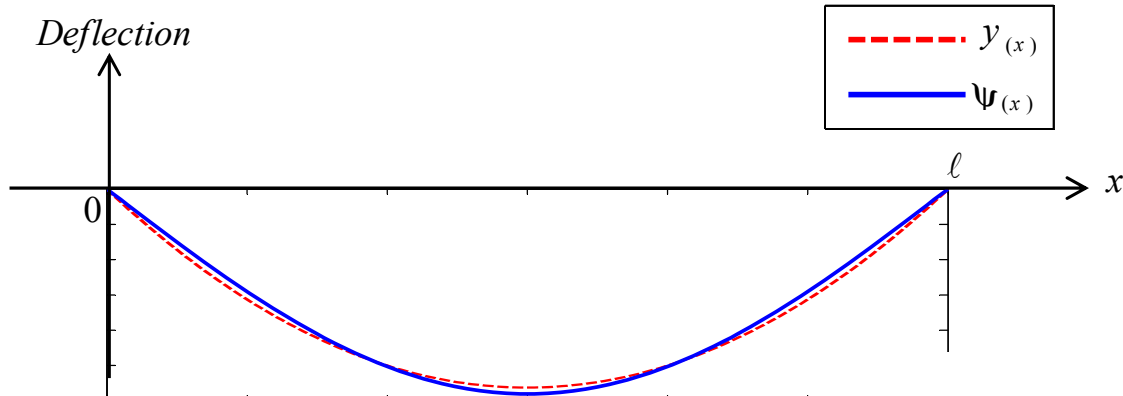


۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - الف - تابع حدسی فرم مثلثاتی

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (12.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

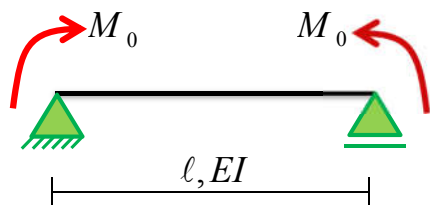
$$(12.15) \rightarrow (12.5) \Rightarrow \psi_{(x)} = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (12.16)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

139

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - ب - تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

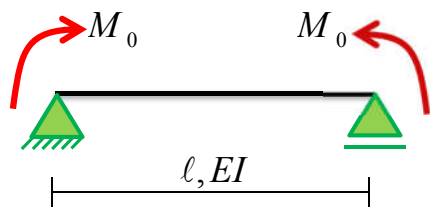
$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x - \ell) \quad (12.17)$$

با توجه به رابطه (12.17):

$$(12.17) \Rightarrow N_1(x) = x(x - \ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0 \quad (12.18)$$

140

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (12.7) \text{ (تکراری)}$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(12.7) \& (12.18)} 1(\alpha_0) + 0 = 0 \xrightarrow{\text{Must be}} \boxed{\alpha_0 = 0} \xrightarrow{(12.19)} 0 = 0 \quad OK$$

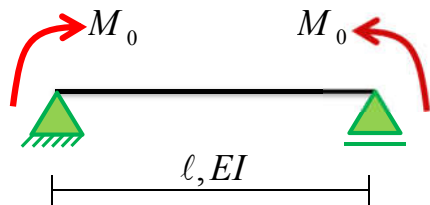
$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (12.8) \text{ (تکراری)}$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(12.8) \& (12.18) \& (12.19)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(12.18)} \boxed{\mathcal{M}(x(x - \ell)) = 0} \quad (12.20)$$

141

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (12.20) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{N_1(x) = x(x - \ell) = 0} \quad (12.21)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n = 1$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = x(x - \ell) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = \ell \Rightarrow N_1(\ell) = 0 \end{cases} \quad OK$$

براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض ۱ جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

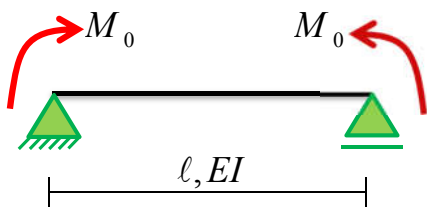
$$(54) \Rightarrow \left(\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \alpha_1 = - \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \quad (12.11) \text{ (تکراری)}$$

142

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - ب - تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:



اکنون پارامترهای رابطه (12.11) در حالتی که تابع حدسی فرم چندجمله‌ای دارد را تک تک محاسبه می‌کنیم:

(12.4) & (12.18) $\Rightarrow$

$$= -\frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 \ell}{2} \right) \Big|_0^\ell = \frac{M_0 \ell^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) p(x) dx = \frac{M_0 \ell^3}{6EI}} \quad (12.22)$$

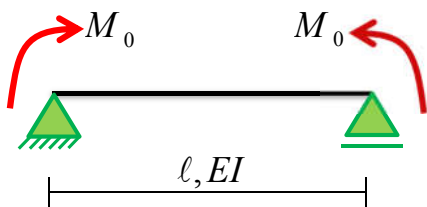
$$(12.18) \& (12.19) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0} \quad (12.23)$$

143

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۲ - ب - تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:



$$\frac{2x^3}{3} - x^2 \ell \Big|_0^\ell = -\frac{\ell^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{\ell^3}{3}} \quad (12.24)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (12.22) تا (12.24) در دستگاه معادلات (12.11) خواهیم داشت:

$$(12.22) \text{ to } (12.24) \rightarrow (12.11) \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{M_0}{2EI}} \quad (12.25)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (12.17) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(12.25) \rightarrow (12.17) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x - \ell)} \quad (12.26) \quad (\text{همان پاسخ دقیق است})$$

144

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

مثال ۱۳- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش SDM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \quad x \in (0, 2) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \Rightarrow y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

145

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) y_{(x)} - x = 0 \\ (1) \Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) \\ p_{(x)} &= -x \end{aligned}} \quad \Omega = (0, 2) \quad (13.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله ای در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = 2.5x + \alpha_1 x(x-2) + \alpha_2 x^2(x-2)} \quad (13.2)$$

با توجه به رابطه (13.2):

$$(13.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = x(x-2) \quad , \quad N_2(x) = x^2(x-2) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x} \quad (13.3)$$

146

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳-

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (13.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(13.3) \& (13.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow y_{(2)} = 5 \Rightarrow d^0 y_{(2)} - 5 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(2)} = -5} \quad (13.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \xrightarrow{(13.3) \& (13.5)} 1(2.5 \times 2) - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(13.3)} \begin{array}{l} \text{for } i = 1 \quad \mathcal{M}(x(x-2)) = 0 \\ \text{for } i = 2 \quad \mathcal{M}(x^2(x-2)) = 0 \end{array} \quad (13.6)$$

147

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳-

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (13.6) به صورت زیر در می آید:

$$(13.4) \text{ or } (13.5) \rightarrow (13.6) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{for } i = 1 \quad N_1(x) = x(x-2) = 0 \\ \text{for } i = 2 \quad N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \end{array}} \quad (13.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n = 2$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = x(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow N_1(2) = 0 \end{cases} \quad OK$$

$$i = 2 \Rightarrow N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow N_2(2) = 0 \end{cases} \quad OK$$

148

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳ - براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

$$(54) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx \\ \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (13.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (13.8) را تک تک محاسبه می کنیم:

(13.1) & (13.3) $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = \int_0^2 x(x-2)(-x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = \frac{4}{3} \quad (13.9)$$

149

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳ -

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx = \frac{8}{5} \quad (13.10)$$

$$\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_0^2 x(x-2) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) 2.5x \right) dx = \frac{5}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = -\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{10}{3} \quad (13.11)$$

$$= \frac{5}{2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^2 = -4 \Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -4 \quad (13.12)$$

150

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳-

$$= \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - 2x^2 \right) \bigg|_0^2 = -\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{8}{5} \quad (13.13)$$

$$\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^2 x(x-2) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x^2(x-2) \right) dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{4}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 4x^2 \right) \bigg|_0^2 = -\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = -\frac{8}{5} \quad (13.14)$$

$$= \left(\frac{x^6}{6} - \frac{4}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 \right) \bigg|_0^2 = -\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = -\frac{8}{5} \quad (13.15)$$

$$\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^2 x^2(x-2) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) x^2(x-2) \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^7}{7} - \frac{2}{3}x^6 + 2x^5 - 4x^4 + \frac{8}{3}x^3 \right) \bigg|_0^2 = -\frac{64}{21} \Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = -\frac{64}{21} \quad (13.16)$$

151

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (13.9) تا (13.16) در دستگاه معادلات (13.8) خواهیم داشت:

$$(13.9) \text{ to } (13.16) \rightarrow (13.8) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix} \quad (13.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (13.17) نتیجه می شود:

$$(10.17) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9737 \\ -0.2763 \end{Bmatrix} \quad (13.18)$$

با جایگذاری ثابت های α_i در رابطه (13.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می آید:

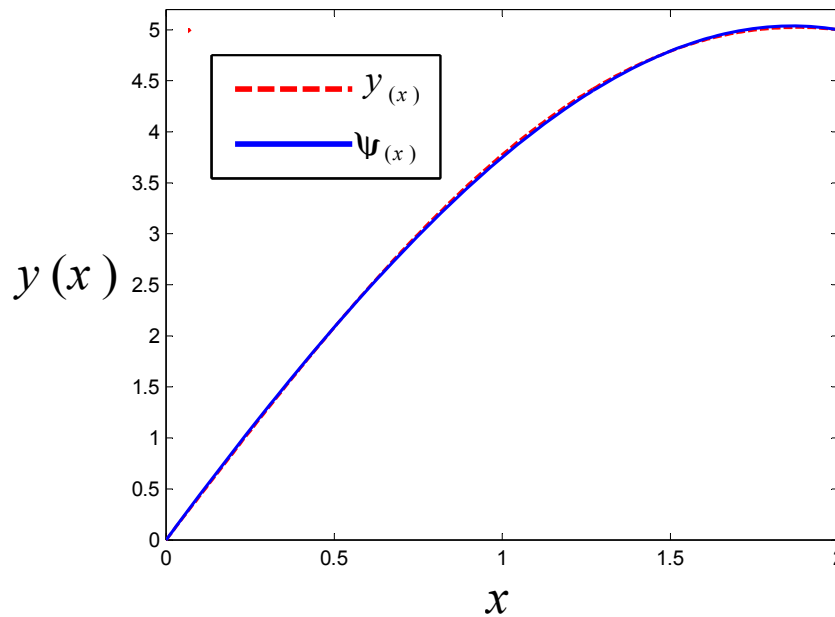
$$(13.18) \rightarrow (13.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = -0.2763x^3 - 0.4211x^2 + 4.4474x \quad (13.19)$$

152

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۳ -



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

153

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

مثال ۱۴ - پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش GM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow u_{(0)} = 0 \\ @x = 1 \Rightarrow u_{(1)} = 1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^x - 0.42546e^{-x}$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴ - معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) u_{(x)} + 0 = 0 \\ (1) &\Rightarrow \mathcal{L}(u_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \\ p_{(x)} &= 0 \end{aligned}} \quad \Omega = [0, 1] \quad (14.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x + \alpha_1 \sin(\pi x) + \alpha_2 \sin(2\pi x)} \quad (14.2)$$

با توجه به رابطه (14.2):

$$(14.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad N_2(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = x} \quad (14.3)$$

155

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴ -

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow u_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 u_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(u_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (14.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(14.3) \& (14.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow u_{(1)} = 1 \Rightarrow d^0 u_{(1)} - 1 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(u_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(1)} = -1} \quad (14.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \xrightarrow{(14.3) \& (14.5)} 1(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(14.3)} \boxed{\mathcal{M}(\sin(i\pi x)) = 0} \quad (14.6)$$

156

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴-

در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (14.6) به صورت زیر در می آید:

$$(14.4) \text{ or } (14.5) \rightarrow (14.6) \Rightarrow N_i(x) = \sin(i\pi x) = 0 \quad (14.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = \sin(\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_1(0)=0 \\ x=1 \Rightarrow N_1(1)=0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

$$i=2 \Rightarrow N_2(x) = \sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_2(0)=0 \\ x=1 \Rightarrow N_2(1)=0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

157

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴- براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض ۲ جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

$$(54) \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx \\ \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx & \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (14.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (14.8) را تک تک محاسبه می کنیم:

$$(14.1) \& (14.3) \Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = 0 \quad (14.9)$$

$$(14.1) \& (14.3) \Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx = 0 \quad (14.10)$$

158

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴-

$$\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) x \right) dx = - \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = - \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = - \frac{1}{\pi}} \quad (14.11)$$

$$- \int_0^1 x \sin(2\pi x) dx = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \frac{1}{2\pi}} \quad (14.12)$$

$$\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) \right) dx =$$

$$- \int_0^1 (1 + \pi^2) \sin^2(\pi x) dx = - \frac{1 + \pi^2}{2} \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = - \frac{1 + \pi^2}{2}} \quad (14.13)$$

159

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴-

$$\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \right) dx =$$

$$- \int_0^1 (1 + 4\pi^2) \sin(\pi x) \sin(2\pi x) dx = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = 0} \quad (14.14)$$

$$- \int_0^1 (1 + \pi^2) \sin(\pi x) \sin(2\pi x) dx = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_1(x)) dx = 0} \quad (14.15)$$

$$\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = \int_0^1 \sin(2\pi x) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) \right) dx =$$

$$- \int_0^1 (1 + 4\pi^2) \sin^2(2\pi x) dx = - \frac{1 + 4\pi^2}{2} \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(N_2(x)) dx = - \frac{1 + 4\pi^2}{2}} \quad (14.16)$$

160

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (14.9) تا (14.16) در دستگاه معادلات (14.8) خواهیم داشت:

$$(14.9) \text{ to } (14.16) \rightarrow (14.8) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1+\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1+4\pi^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\pi} \\ -\frac{1}{2\pi} \end{Bmatrix} \quad (14.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (14.17) نتیجه می‌شود:

$$(14.17) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -58.5688 \\ 7.8637 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad (14.18)$$

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (14.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

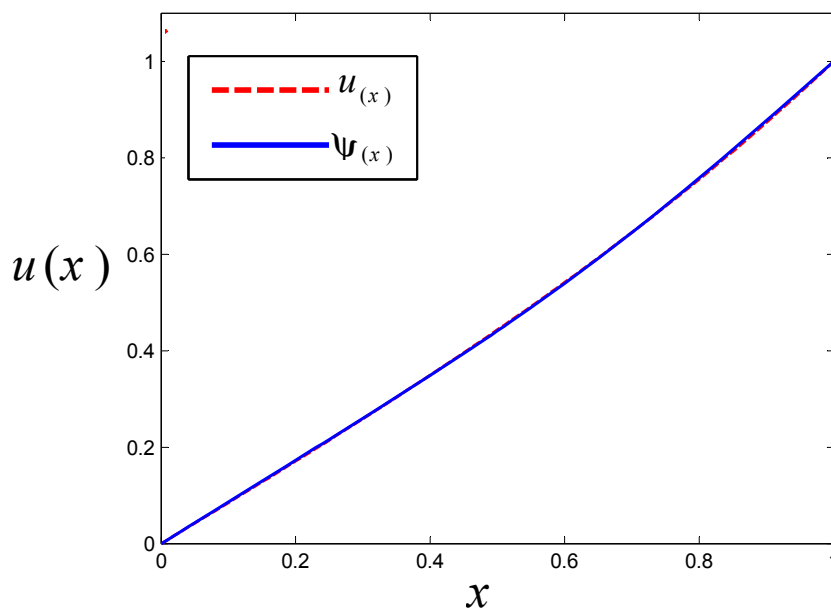
$$(14.18) \rightarrow (14.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = x - 58.5688 \times 10^{-3} \sin(\pi x) + 7.8637 \times 10^{-3} \sin(2\pi x) \quad (14.19)$$

161

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش گالرکین (GM: Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۴-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

162

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

این روش کاملاً شبیه به روش گالرکین است با این تفاوت که از انتگرال گیری جزء به جزء برای محاسبه s_{ij} استفاده می گردد.

$$\int_{\Omega} uv' dx = uv - \int_{\Omega} u'v dx \quad (55) \quad \text{انتگرال گیری جزء به جزء (Integration by parts)}$$

از رابطه (53) مقدار s_{ij} با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر محاسبه می شود:

$$(53) \Rightarrow s_{ij} = \int_{\Omega} N_i(x) \mathcal{L}(N_j(x)) dx \Rightarrow \text{if } U(x) = N_i(x) \quad dV = \mathcal{L}(N_j(x)) dx$$

$$\Rightarrow s_{ij} = N_i(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x)) dx \right) \frac{dN_i(x)}{dx} dx \quad (56)$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (56) در رابطه (53) خواهیم داشت:

$$s_{ij} = N_i(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j(x)) dx \right) \frac{dN_i(x)}{dx} dx \quad (56)$$

$$z_i = - \int_{\Omega} N_i(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_i(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx$$

163

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

بر اساس رابطه (56)، رابطه (29) به صورت زیر در می آید:

$$(56) \rightarrow (29) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx & \cdots & N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx \\ N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx & \cdots & N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_n(x)}{dx} dx & \cdots & N_n(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_n(x)) dx \right) \frac{dN_n(x)}{dx} dx \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\times \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ - \int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ \vdots \\ - \int_{\Omega} N_n(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_n(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix}$$

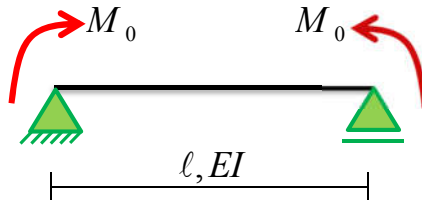
روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

مثال ۱۵- مقدار تقریبی خیز در تیر نشان داده شده را در دو حالت زیر به روش LSM محاسبه و با مقدار تحلیلی مقایسه نمایید.

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

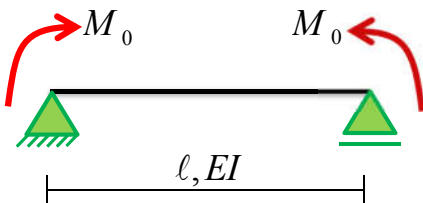
ب- تابع حدسی فرم چند جمله‌ای



165

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)



پاسخ مثال ۱۵-

با توجه به رابطه بین خمش و خیز، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر است:

$$EI \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} - M_0 = 0 \quad x \in (0, \ell) \quad (15.1)$$

با توجه به شکل شرایط مرزی به صورت زیر است:

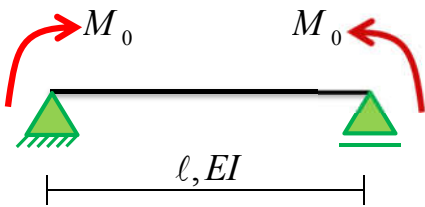
$$BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = \ell \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 \end{cases} \quad (15.2)$$

با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم پاسخ تحلیلی به دست می آید:

$$y_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x (x - \ell) \quad (15.3)$$

166

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$(15.1) \Rightarrow \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) y_{(x)} - \frac{M_0}{EI} &= 0 \\ (1) \Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \\ p_{(x)} &= -\frac{M_0}{EI} \end{aligned}} \quad \Omega = (0, \ell) \quad (15.4)$$

الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (18) تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

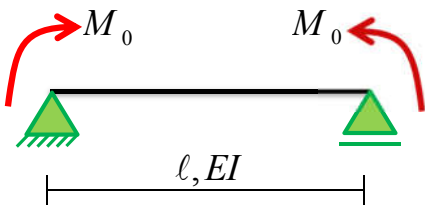
$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)} \quad (15.5)$$

با توجه به رابطه (15.5):

$$(15.5) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 0} \quad (15.6)$$

167

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (15.7)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(15.6) \& (15.7)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK \quad \checkmark$$

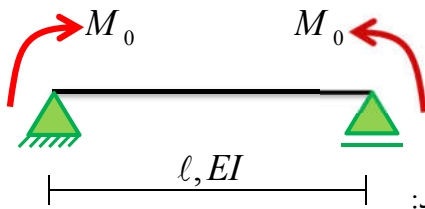
$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (15.8)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(15.6) \& (15.8)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK \quad \checkmark$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_1(x)) = 0 \xrightarrow{(15.6)} \boxed{\mathcal{M}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right) = 0} \quad (15.9)$$

168

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (15.9) به صورت زیر در می آید:

$$N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0 \quad (15.10)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=1$ خواهیم داشت:

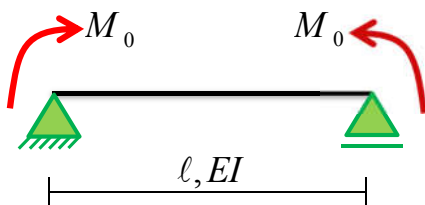
$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_1(0)=0 \\ x=\ell \Rightarrow N_1(\ell)=0 \end{cases}$$

OK ✓

براساس رابطه (57) دستگاه معادلات با فرض ۱ جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

169

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

اکنون پارامترهای رابطه (15.11) را تک تک محاسبه می کنیم:

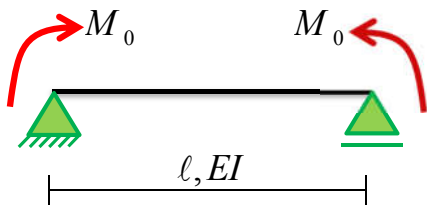
$$(15.4) \& (15.6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = -\frac{2M_0 \ell}{\pi EI} \quad (15.12)$$

$$(15.6) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0 \quad (15.13)$$

170

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

$$= -\frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = -\frac{\pi^2}{2\ell}$$

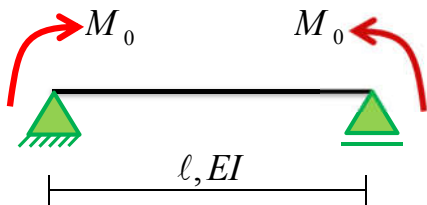
$$\Rightarrow N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx = -\frac{\pi^2}{2\ell} \quad (15.14)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (15.12) تا (15.14) در دستگاه معادلات (15.11) خواهیم داشت:

$$(15.12) \text{ to } (15.14) \rightarrow (15.11) \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3} \quad (15.15)$$

171

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

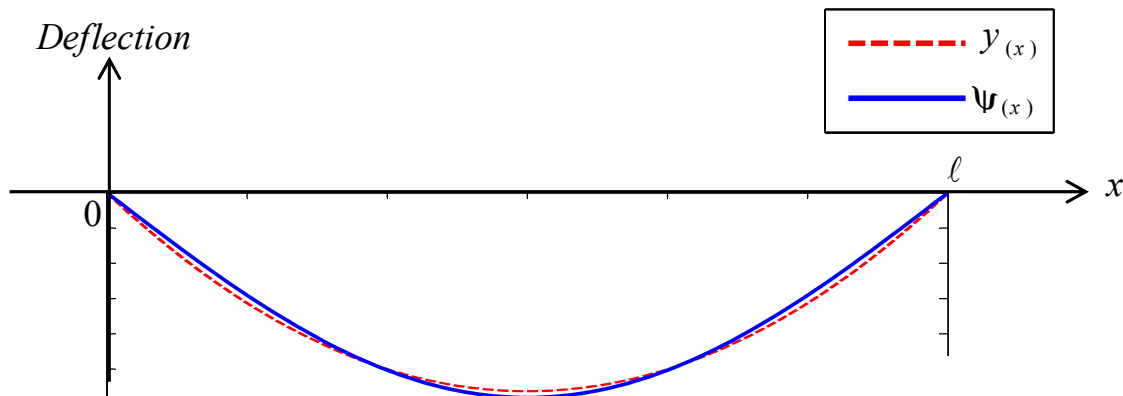


۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- الف- تابع حدسی فرم مثلثاتی

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (15.5) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می آید:

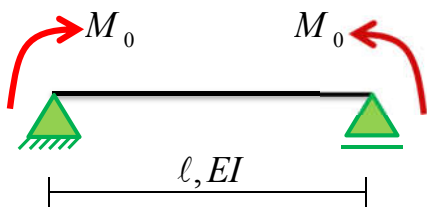
$$(15.15) \rightarrow (15.5) \Rightarrow \psi_{(x)} = -\frac{4M_0\ell^2}{EI\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (15.16)$$



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

172

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

با در نظر گرفتن تنها یک جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

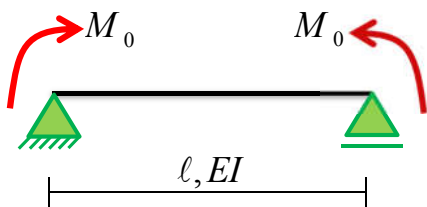
$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x(x - \ell)} \quad (15.17)$$

با توجه به رابطه (15.17):

$$(15.17) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = x(x - \ell) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = \alpha_0} \quad (15.18)$$

173

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(0)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (15.7) \text{ (تکراری)}$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(15.7) \& (15.18)} 1(\alpha_0) + 0 = 0 \xrightarrow{\text{Must be}} \boxed{\alpha_0 = 0} \Rightarrow \boxed{0 = 0} \text{ OK} \checkmark$$

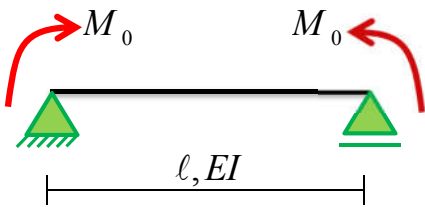
$$\left. \begin{aligned} BC \Rightarrow y_{(\ell)} = 0 &\Rightarrow d^0 y_{(\ell)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(y_{(\ell)}) + r_{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(\ell)} = 0} \quad (12.8) \text{ (تکراری)}$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(\ell)}) + r_{(\ell)} = 0 \xrightarrow{(15.8) \& (15.18) \& (15.19)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \text{ OK} \checkmark$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(15.18)} \boxed{\mathcal{M}(x(x - \ell)) = 0} \quad (15.20)$$

174

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

در همه شرایط مرزی‌ها $M = 1$ بود در نتیجه رابطه (15.20) به صورت زیر در می‌آید:

$$N_1(x) = x(x - \ell) = 0 \quad (15.21)$$

با در نظر گرفتن یک جمله یعنی $n = 1$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = x(x - \ell) = 0 \Rightarrow \textcircled{a} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = \ell \Rightarrow N_1(\ell) = 0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

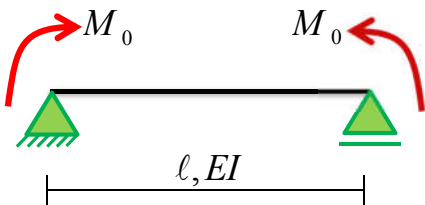
براساس رابطه (54) دستگاه معادلات با فرض ۱ جمله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\left(N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx \right) \alpha_1 = - \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \quad (\text{تکراری})$$

(15.11)

175

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵- ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

اکنون پارامترهای رابطه (15.11) در حالتی که تابع حدسی فرم چندجمله‌ای دارد را تک تک محاسبه می‌کنیم:

(15.4) & (15.18) $\Rightarrow$

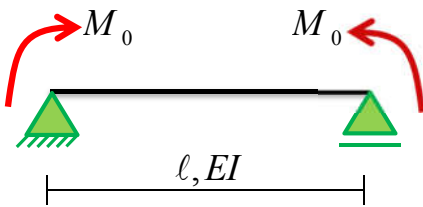
$$= - \frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 \ell}{2} \right) \Big|_0^{\ell} = \frac{M_0 \ell^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = \frac{M_0 \ell^3}{6EI} \quad (15.22)$$

$$(15.18) \& (15.19) \Rightarrow \bar{\psi}_{(x)} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = 0 \quad (15.23)$$

176

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)



۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۵-ب- تابع حدسی فرم چندجمله‌ای:

$$\Rightarrow N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx = -\frac{\ell^3}{3} \quad (15.24)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (15.22) تا (15.24) در دستگاه معادلات (15.11) خواهیم داشت:

$$(15.22) \text{ to } (15.24) \rightarrow (15.11) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{M_0}{2EI} \quad (15.25)$$

با جایگذاری ثابت α_1 در رابطه (15.17) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$(15.25) \rightarrow (15.17) \Rightarrow \psi_{(x)} = \frac{M_0}{2EI} x(x - \ell) \quad (15.26) \quad (\text{همان پاسخ دقیق است})$$

177

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

مثال ۱۶- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش RGM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x \quad x \in (0, 2) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 0 \\ @x = 2 \Rightarrow y_{(2)} = 5 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$y_{(x)} = \frac{3}{\sin(2)} \sin(x) + x$$

178

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_{(x)}}{dx^2} + y_{(x)} = x &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) y_{(x)} - x = 0 \\ (1) &\Rightarrow \mathcal{L}(y_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) \\ p_{(x)} &= -x \end{aligned}} \quad \Omega = (0, 2) \quad (16.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم چند جمله ای در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (16) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(16) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = 2.5x + \alpha_1 x(x-2) + \alpha_2 x^2(x-2)} \quad (16.2)$$

با توجه به رابطه (16.2):

$$(16.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = x(x-2), \quad N_2(x) = x^2(x-2), \quad \bar{\psi}_{(x)} = 2.5x} \quad (16.3)$$

179

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶-

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow y_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 y_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(y_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (16.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(16.3) \& (16.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK$$

$$\left. \begin{aligned} BC &\Rightarrow y_{(2)} = 5 \Rightarrow d^0 y_{(2)} - 5 = 0 \\ (2) &\Rightarrow \mathcal{M}(y_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(2)} = -5} \quad (16.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(2)}) + r_{(2)} = 0 \xrightarrow{(16.3) \& (16.5)} 1(2.5 \times 2) - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{0=0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(16.3)} \begin{aligned} &\text{for } i = 1 \quad \boxed{\mathcal{M}(x(x-2)) = 0} \\ &\text{for } i = 2 \quad \boxed{\mathcal{M}(x^2(x-2)) = 0} \end{aligned} \quad (16.6)$$

180

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶-

در همه شرایط مرزی ها $M=1$ بود در نتیجه رابطه (16.6) به صورت زیر در می آید:

$$(16.4) \text{ or } (16.5) \rightarrow (16.6) \Rightarrow \begin{cases} \text{for } i=1 & N_1(x) = x(x-2) = 0 \\ \text{for } i=2 & N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \end{cases} \quad (16.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n=2$ خواهیم داشت:

$$i=1 \Rightarrow N_1(x) = x(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x=2 \Rightarrow N_1(2) = 0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

$$i=2 \Rightarrow N_2(x) = x^2(x-2) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x=0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x=2 \Rightarrow N_2(2) = 0 \end{cases} \quad OK \quad \checkmark$$

181

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶- براساس رابطه (57) دستگاه معادلات با فرض 2 جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

(57) $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} N_1(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx & N_1(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx \\ N_2(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx & N_2(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (16.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (16.8) را تک تک محاسبه می کنیم:

(16.1) & (16.3) $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = \int_0^2 x(x-2)(-x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = \frac{4}{3} \quad (16.9)$$

182

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶-

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx = \frac{8}{5} \quad (16.10)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{10}{3} \quad (16.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx &= \int_0^2 x^2(x-2) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) 2.5x \right) dx \\ &= \frac{5}{2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^2 = -4 \Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -4 \end{aligned} \quad (16.12)$$

183

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶-

$$\begin{aligned} N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx &= - \int_0^2 \left(\int_{\Omega} \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x(x-2)) dx \right) \frac{d(x(x-2))}{dx} dx = \\ &= - \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) (2x-2) dx = -\frac{8}{5} \Rightarrow N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx = -\frac{8}{5} \end{aligned} \quad (16.13)$$

$$N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx = -\frac{8}{5} \quad (16.14)$$

$$\begin{aligned} N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx &= - \int_0^2 \left(\int_{\Omega} \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x(x-2)) dx \right) \frac{d(x^2(x-2))}{dx} dx \\ &= - \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) (3x^2 - 4x) dx = -\frac{8}{5} \Rightarrow N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx = -\frac{8}{5} \end{aligned} \quad (16.15)$$

$$\begin{aligned} N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx &= - \int_0^2 \left(\int_{\Omega} \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) (x^2(x-2)) dx \right) \frac{d(x^2(x-2))}{dx} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 4x \right) (3x^2 - 4x) dx = -\frac{64}{21} \Rightarrow N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx = -\frac{64}{21} \end{aligned} \quad (16.16)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (16.9) تا (16.16) در دستگاه معادلات (16.8) خواهیم داشت:

$$(16.9) \text{ to } (16.16) \rightarrow (16.8) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix} \quad (16.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (16.17) نتیجه می‌شود:

$$(16.17) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{64}{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2 \\ \frac{12}{5} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9737 \\ -0.2763 \end{Bmatrix} \quad (16.18)$$

با جایگذاری ثابت‌های α_i در رابطه (16.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می‌آید:

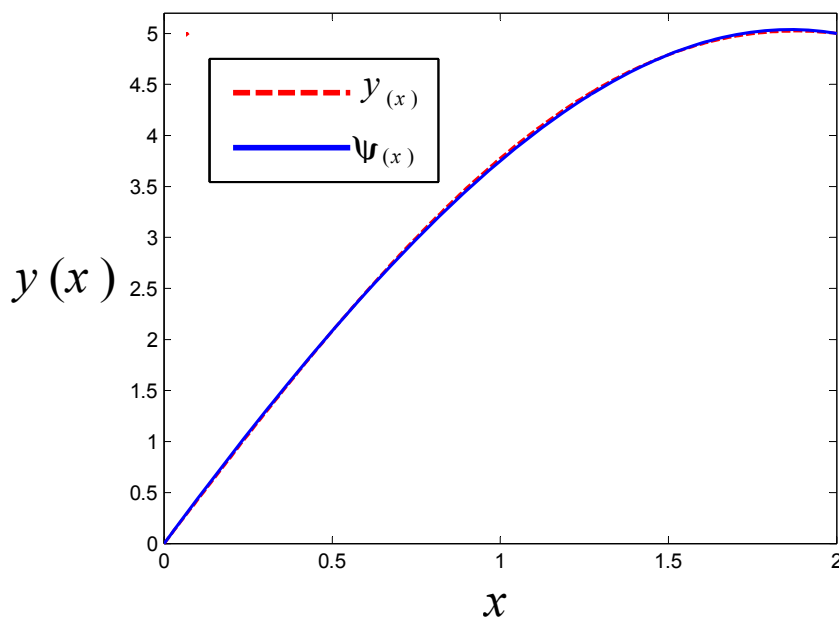
$$(16.18) \rightarrow (16.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = -0.2763x^3 - 0.4211x^2 + 4.4474x \quad (16.19)$$

185

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۶-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

186

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

مثال ۱۷- پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را به روش RGM محاسبه نمایید.

$$\frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad BC : \begin{cases} @x = 0 \Rightarrow u_{(0)} = 0 \\ @x = 1 \Rightarrow u_{(1)} = 1 \end{cases}$$

پاسخ دقیق یا تحلیلی به صورت زیر است:

$$u_{(x)} = 0.42546e^x - 0.42546e^{-x}$$

18
7

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷- معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_{(x)}}{dx^2} - u_{(x)} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) u_{(x)} + 0 = 0 \\ (1) &\Rightarrow \mathcal{L}(u_{(x)}) + p_{(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \\ p_{(x)} &= 0 \end{aligned} \quad \Omega = [0, 1]} \quad (17.1)$$

در این جا یک تابع حدسی به فرم مثلثاتی در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن دو جمله در رابطه (18) و همچنین با توجه به نقاط مربوط به شرایط مرزی یک تابع حدسی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(18) \Rightarrow \psi_{(x)} = \bar{\psi}_{(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi x}{\ell}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_{(x)} = x + \alpha_1 \sin(\pi x) + \alpha_2 \sin(2\pi x)} \quad (17.2)$$

با توجه به رابطه (17.2):

$$(17.2) \Rightarrow \boxed{N_1(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad N_2(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad \bar{\psi}_{(x)} = x} \quad (17.3)$$

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز-گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷-

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(0)} = 0 \Rightarrow d^0 u_{(0)} + 0 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(0)} = 0} \quad (17.4)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(0)}) + r_{(0)} = 0 \xrightarrow{(17.3) \& (17.4)} 1(0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \Rightarrow u_{(1)} = 1 \Rightarrow d^0 u_{(1)} - 1 = 0 \\ (2) \Rightarrow \mathcal{M}(u_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = 1, r_{(1)} = -1} \quad (17.5)$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(\bar{\psi}_{(1)}) + r_{(1)} = 0 \xrightarrow{(17.3) \& (17.5)} 1(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \quad OK$$

$$(14) \Rightarrow \mathcal{M}(N_i(x)) = 0 \xrightarrow{(17.3)} \boxed{\mathcal{M}(\sin(i\pi x)) = 0} \quad (17.6)$$

189

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز-گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷-

در همه شرایط مرزی ها $\mathcal{M} = 1$ بود در نتیجه رابطه (17.6) به صورت زیر در می آید:

$$(17.4) \text{ or } (17.5) \rightarrow (17.6) \Rightarrow \boxed{N_i(x) = \sin(i\pi x) = 0} \quad (17.7)$$

با در نظر گرفتن دو جمله یعنی $n = 2$ خواهیم داشت:

$$i = 1 \Rightarrow N_1(x) = \sin(\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_1(1) = 0 \end{cases} \quad OK$$

$$i = 2 \Rightarrow N_2(x) = \sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow @ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N_2(0) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow N_2(1) = 0 \end{cases} \quad OK$$

190

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷- براساس رابطه (57) دستگاه معادلات با فرض ۲ جمله به صورت زیر تشکیل می شود:

(57) $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} N_1(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx & N_1(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x))dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx \\ N_2(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx & N_2(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x))dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x))dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \\ -\int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx - \int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx \end{Bmatrix} \quad (17.8)$$

اکنون پارامترهای رابطه (17.8) را تک تک محاسبه می کنیم:

$$(17.1) \& (17.3) \Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) p_{(x)} dx = 0 \quad (17.9)$$

$$(17.1) \& (17.3) \Rightarrow \int_{\Omega} N_2(x) p_{(x)} dx = 0 \quad (17.10)$$

191

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷-

$$\int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) x \right) dx = -\int_0^1 x \sin(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_1(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = -\frac{1}{\pi} \quad (17.11)$$

$$\int_{\Omega} N_2(x) \mathcal{L}(\bar{\psi}_{(x)}) dx = \frac{1}{2\pi} \quad (17.12)$$

$$\begin{aligned} N_1(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx &= -\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) dx \right) \frac{d(\sin(\pi x))}{dx} dx = \\ -\int_0^1 (1 + \pi^2) \cos^2(\pi x) dx &= -\frac{1 + \pi^2}{2} \Rightarrow N_1(x)|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x))dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx = -\frac{1 + \pi^2}{2} \end{aligned} \quad (17.13)$$

192

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷-

$$N_1(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx = 0 \quad (17.14)$$

$$\begin{aligned} \cancel{N_2(x)} \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx &= - \int_0^1 \left(\int \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(\pi x) dx \right) \frac{d(\sin(2\pi x))}{dx} dx \\ -2 \int_0^1 (1 + \pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi x) dx = 0 &\Rightarrow N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_1(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx = 0 \end{aligned} \quad (17.15)$$

$$\begin{aligned} \cancel{N_2(x)} \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx &= - \int_0^1 \left(\int \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \sin(2\pi x) dx \right) \frac{d(\sin(2\pi x))}{dx} dx \\ - \int_0^1 (1 + 4\pi^2) \cos^2(2\pi x) dx = -\frac{1 + 4\pi^2}{2} &\Rightarrow N_2(x) \Big|_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{L}(N_2(x)) dx \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx = -\frac{1 + 4\pi^2}{2} \end{aligned} \quad (17.16)$$

193

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷- با جایگذاری مقادیر پارامترها از روابط (17.9) تا (17.16) در دستگاه معادلات (17.8) خواهیم داشت:

$$(17.9) \text{ to } (17.16) \rightarrow (17.8) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1+\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1+4\pi^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\pi} \\ -\frac{1}{2\pi} \end{Bmatrix} \quad (17.17)$$

(ماتریس ضرایب متقارن است)

با حل معادله (17.17) نتیجه می شود:

$$(17.17) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -58.5688 \\ 7.8637 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad (17.18)$$

با جایگذاری ثابت های α_i در رابطه (17.2) تابع حدسی یا همان تابع تغییر شکل تقریبی به دست می آید:

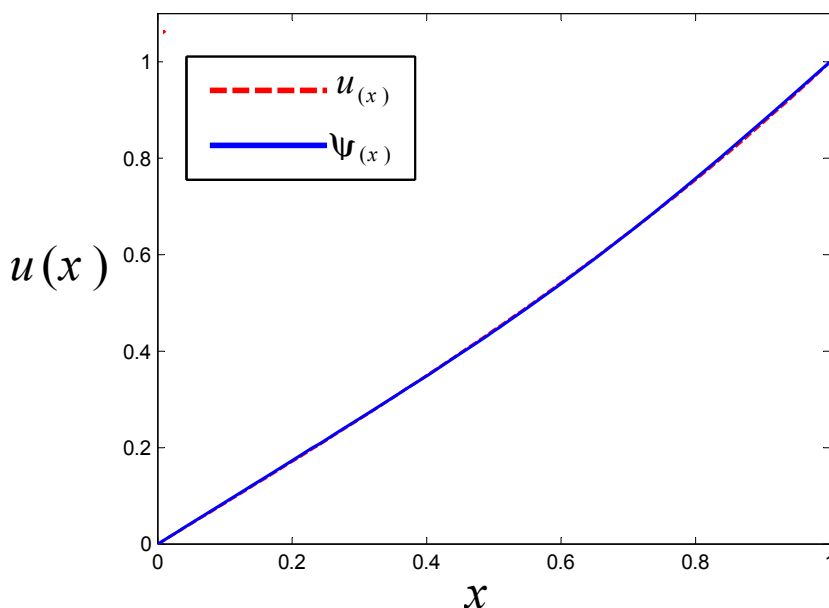
$$(17.18) \rightarrow (17.2) \Rightarrow \psi_{(x)} = x - 58.5688 \times 10^{-3} \sin(\pi x) + 7.8637 \times 10^{-3} \sin(2\pi x) \quad (17.19)$$

194

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

۴. روش ریتز- گالرکین (RGM: Ritz Galerkin Method)

پاسخ مثال ۱۷-



نمودار مقایسه مقدار تقریبی با مقدار واقعی پاسخ معادله دیفرانسیل مورد نظر

195

روش باقیمانده وزنی (Weighted Residual Method)

تا اینجا ما از چندین نوع روش باقیمانده وزنی برای حل مسائل مقدار مرزی استفاده شد. مشاهده گردید که برای مسئله تغییرشکل تیر، اگر چند جمله‌ای درجه دوم یا بالاتر به عنوان تابع تقریبی انتخاب شود، استفاده از تمام روش‌ها جواب دقیق را به دست می‌دهد. این به این دلیل است که رفتار واقعی منحنی خیز تیر به صورت سهمی است (یک چند جمله‌ای درجه دوم). با این حال، انتخاب یک تابع سینوسی نیز به عنوان یک تابع تقریبی، راه‌حل‌های متفاوتی را برای روش‌های مختلف (به جز روش حداقل مربعات و گالرکین که نتایج یکسانی داشتند) به دست می‌دهد. حال این سوال به طور طبیعی مطرح می‌شود که کدام روش دقیق‌ترین نتایج را می‌دهد. متأسفانه پاسخ قطعی برای این موضوع وجود ندارد. مقدار خطا به مقدار تابع تقریبی و معادله دیفرانسیل که باید حل شود بستگی دارد. با این حال، برای اکثر مسائل، روش گالرکین بهترین نتایج را می‌دهد.

توجه شود که روش گالرکین همان روش المان محدود نیست. در واقع، روش گالرکین خیلی قبل‌تر از پیدایش المان محدود در دسترس بود. تفاوت اساسی بین روش گالرکین و روش المان محدود آن است که برخلاف روش گالرکین، تابع تقریبی در روش المان محدود در کل بازه فیزیکی تعریف نشده است. فقط بر روی المان‌های منفرد که حوزه فیزیکی را تشکیل می‌دهند، تعریف می‌شود. در روش المان محدود استاندارد از روش گالرکین اغلب برای استخراج معادلات المان استفاده می‌شود.

196