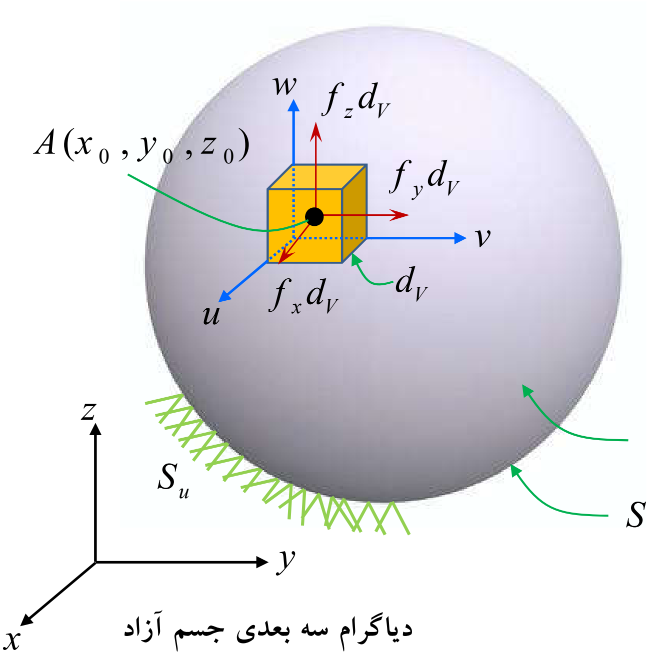
روش المان محدود

مفاهیم پایه

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

تنش‌ها و تعادل (Stresses and Equilibrium)



دیاگرام سه بعدی جسم آزاد

S: مساحت کل

V: حجم کل

S_u: سطح تکیه‌گاه

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ بردار جابجایی نقطه A به مختصات (x_0, y_0, z_0) به صورت زیر است:

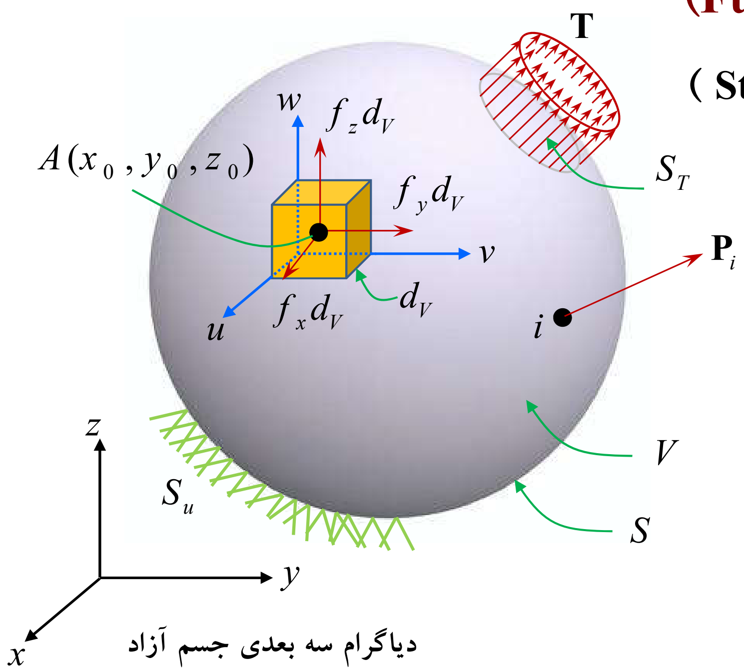
$$\mathbf{u} = [u \quad v \quad w]^T \qquad (1)$$

$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ بردار نیروی واحد حجم (مانند نیروی وزن و نیروی ناشی از میدان مغناطیسی) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \qquad (2)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

تنش‌ها و تعادل (Stresses and Equilibrium)



دیاگرام سه بعدی جسم آزاد

بردار $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$ نیروی کشش سطحی (مانند نیروی ناشی از فشار و یا نیروی تماسی) در سطح تماس S_T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}^T} \qquad (3)$$

بردار $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ بردار نیروی متمرکز در نقطه i به صورت زیر است:

$$\boxed{\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T} \qquad (4)$$

شرایط مرزی: بردار جابجایی بر روی سطح S_u که تکیه‌گاه می‌باشد صفر است.

$$@ \quad S_u \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = [0 \quad 0 \quad 0]^T = \mathbf{O}_{3\times 1}$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

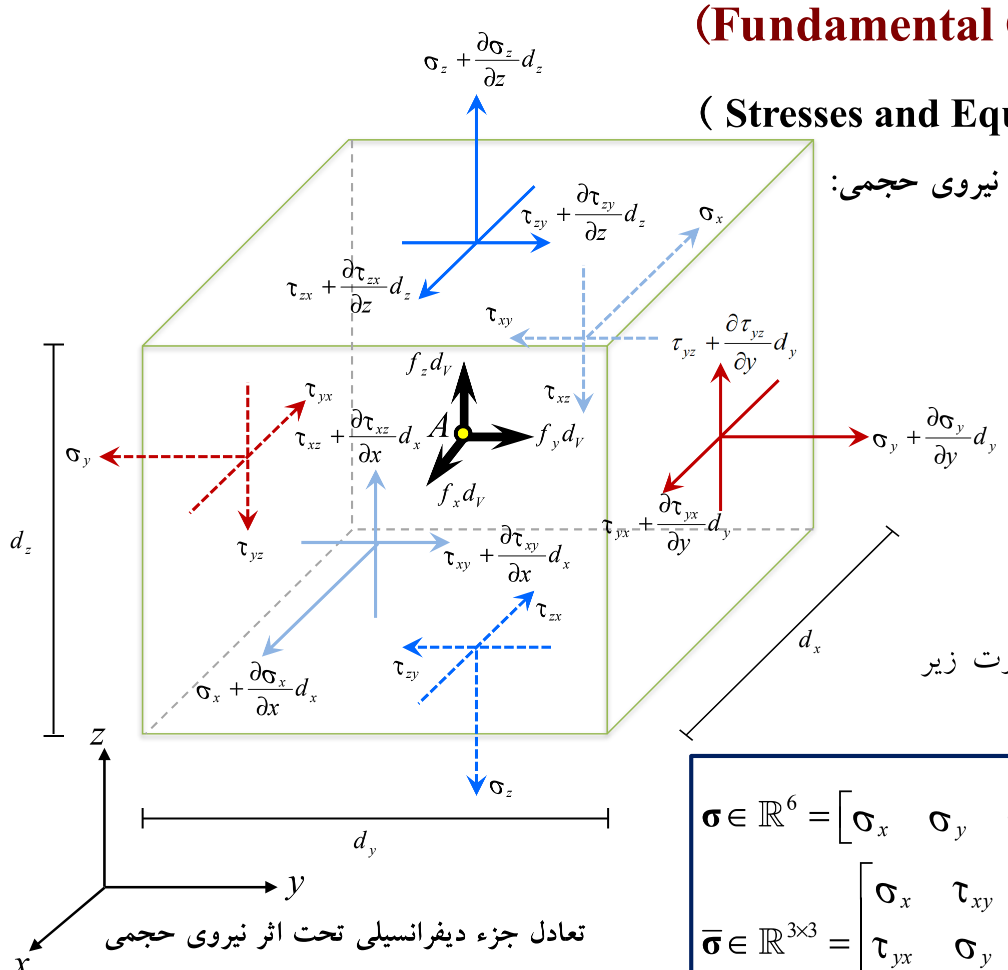
تنش‌ها و تعادل (Stresses and Equilibrium)

بررسی تعادل جزء دیفرانسیلی تحت اثر نیروی حجمی:

σ_i: تنش نرمال

$\tau_{ij} = \tau_{ji}$: تنش برشی

اندیس اول نشان دهنده محور عمود بر صفحه تنش برشی و اندیس دوم راستا را نشان می‌دهد.



تعادل جزء دیفرانسیلی تحت اثر نیروی حجمی

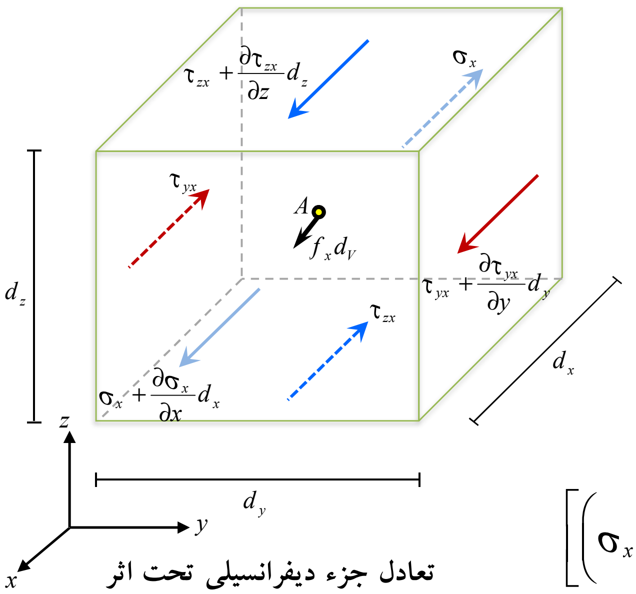
بردار و ماتریس (تنسور) تنش به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6 &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{yz} & \tau_{xz} & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{R}^{3\times 3} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \end{aligned}} \qquad (5)$$

(Fundamental Concepts) مفاهیم پایه

(Stresses and Equilibrium) تنش‌ها و تعادل

بررسی تعادل جزء دیفرانسیلی تحت اثر نیروی حجمی:



تعادل جزء دیفرانسیلی تحت اثر نیروی حجمی در جهت x

با نوشتن معادلات تعادل در جهت x خواهیم داشت:

$$\sum f_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}d_x\right)-\sigma_x\right]d_y d_z+\left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}d_y\right)-\tau_{yx}\right]d_x d_z$$
$$+\left[\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}d_z\right)-\tau_{zx}\right]d_y d_z+f_x d_V=0$$

$$\xRightarrow{d_V=d_z d_y d_z}\quad \boxed{\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f_x=0}$$

به طور مشابه با نوشتن معادلات تعادل در دو جهت y و z به نتیجه مشابه خوایم رسید در نتیجه خواهیم داشت:

(Fundamental Concepts) مفاهیم پایه

(Stresses and Equilibrium) تنش‌ها و تعادل

بررسی تعادل جزء دیفرانسیلی تحت اثر نیروی حجمی:

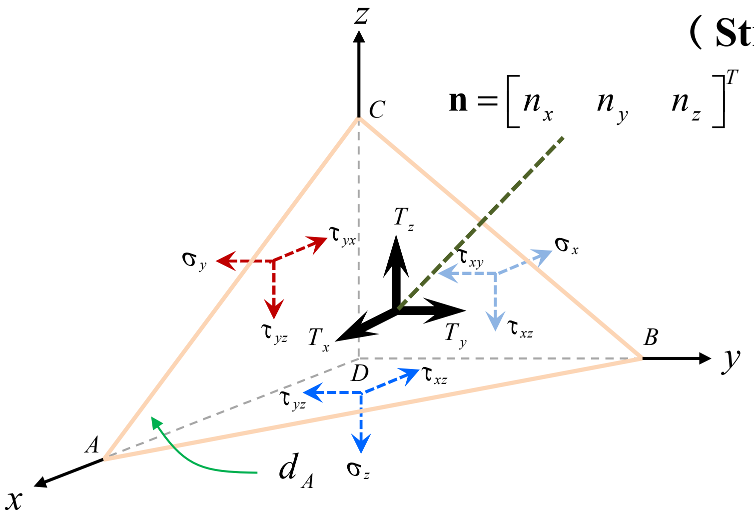
در حالت کلی معادلات تعادل در جز دیفرانسیلی تحت اثر نیروهای حجمی به صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f_x=0\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+f_y=0\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0\end{aligned}}\qquad(6)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

تنش‌ها و تعادل (Stresses and Equilibrium)

بررسی تعادل جزء دیفرانسیلی تحت اثر نیروی سطحی:



تعادل جزء دیفرانسیلی تحت اثر نیروی سطحی

$\mathbf{n}\in\mathbb{R}^3$: بردار نرمال (عمود) صفحه ABC با مساحت d_A

مساحت هر یک از وجه‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} A_{ABC}=d_A & A_{BDC}=n_x d_A \\ A_{ADC}=n_y d_A & A_{ADB}=n_z d_A \end{array} \qquad (7)$$

در حالت کلی معادلات تعادل در جز دیفرانسیلی تحت اثر نیروهای سطحی با در نظر گرفتن معادلات تعادل در هر سه راستا به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x+\tau_{yx} n_y+\tau_{zx} n_z &= T_x \\ \tau_{xy} n_x+\sigma_y n_y+\tau_{zy} n_z &= T_y \\ \tau_{xz} n_x+\tau_{yz} n_y+\sigma_z n_z &= T_z \end{aligned} \qquad (8)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روابط جابجایی-کرنش (Strain-Displacement Relations)

بردار و ماتریس (تنسور) کرنش به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{R}^6 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\in\mathbb{R}^{3\times3} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \varepsilon_{zy} & \gamma_z \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (9)$$

ε_i: کرنش نرمال

$\gamma_{ij}=\gamma_{ji}$: کرنش برشی

با فرض تغییرشکل‌های کوچک، بردار کرنش برحسب جابجایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{R}^6=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} & \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{bmatrix}^T \qquad (10)$$

روابط تنش-کرنش (Stress-Strain Relations)

روابط تنش کرنش در حالت سه بعدی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} - \upsilon\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= -\upsilon\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \upsilon\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= -\upsilon\frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \qquad (11)$$

E: مدول الاستیسیته

G: مدول برشی یا مدول صلبیت

υ: ضریب پواسون

مدول برشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \qquad (12)$$

به کمک رابطه هوک خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (13)$$

روابط تنش-کرنش (Stress-Strain Relations)

روابط تنش کرنش در حالت سه بعدی به فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6$: بردار تنش

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (14)$$

$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^6$: بردار کرنش

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$: ماتریس مصالح (متقارن)

فرم بسط داده شده رابطه (۱۴) به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & \upsilon & 1-\upsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\upsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (15)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روابط تنش-کرنش (Stress-Strain Relations)

ماتریس مصالح **D** در حالت تنش سه بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \qquad (16)$$

حالت‌های خاص: حالت یک بعدی

در حالت یک بعدی تنش نرمال و کرنش نرمال متناظر در راستای x داریم. رابطه تنش- کرنش در حالت یک بعدی:

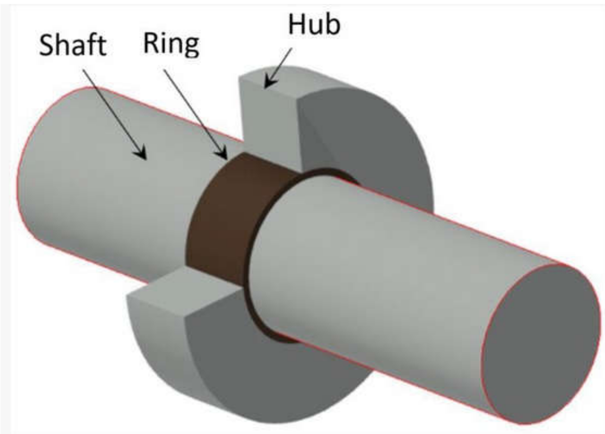
$$\sigma = E\varepsilon \qquad (17)$$

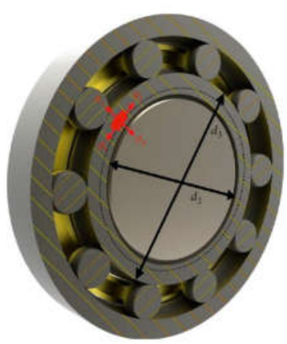
مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روابط تنش-کرنش (Stress-Strain Relations)

حالت‌های خاص: حالت دو بعدی-تنش صفحه‌ای (Plain Stress)

در اجسام صفحه‌ای نازک تحت اثر بارگذاری بر روی سطح لبه، تنش صفحه‌ای ایجاد می‌گردد. مانند یک حلقه که یک میله عبوری، آن را تحت فشار قرار دهد.

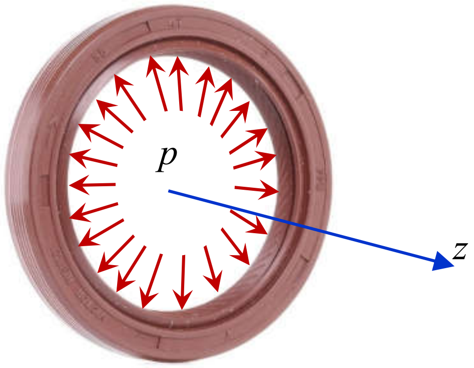


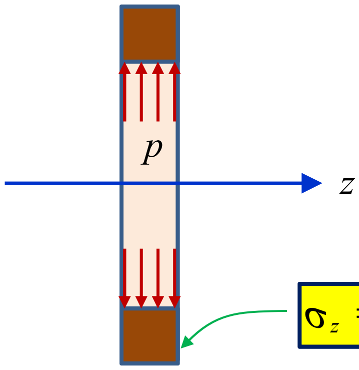


مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روابط تنش-کرنش (Stress-Strain Relations)

حالت‌های خاص: حالت دو بعدی-تنش صفحه‌ای (Plain Stress)





p : فشار داخلی

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

روابط تنش کرنش در حالت تنش صفحه‌ای

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\upsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

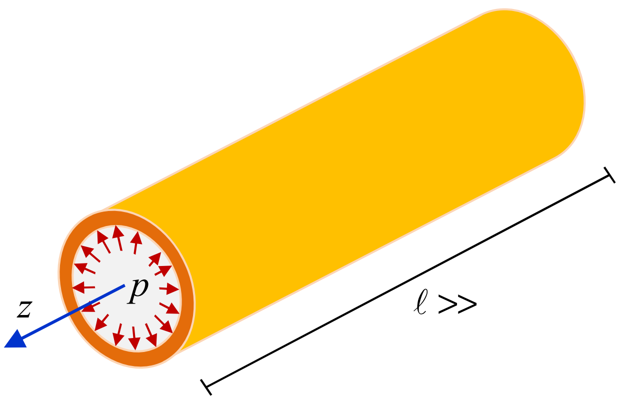
مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

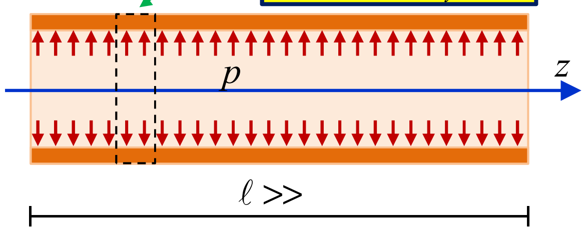
روابط تنش-کرنش (Stress-Strain Relations)

حالت‌های خاص: حالت دو بعدی-کرنش صفحه‌ای (Plain Strain)

در اجسام با طول زیاد، سطح مقطع یکنواخت و ضخامت کم تحت اثر بارگذاری عمود بر راستای طولی جسم، کرنش صفحه‌ای ایجاد می‌گردد. مانند لوله‌ها یا مخازن با طول زیاد تحت اثر فشار داخلی. در این حالت ممکن است $\sigma_z \neq 0$.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$





p : فشار داخلی

روابط تنش کرنش در حالت کرنش صفحه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-2\upsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

اثرات حرارت (Temperature Effects)

در صورت وجود گرادیان حرارتی یا تغییرات دمایی کرنش یکنواخت ایجاد خواهد شد. در روابط، کرنش حرارتی به صورت یک کرنش اولیه ظاهر خواهد شد. در حالت سه بعدی کرنش حرارتی به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbb{R}^6 = \begin{bmatrix} \alpha\,\Delta T & \alpha\,\Delta T & \alpha\,\Delta T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (20)$$

کرنش حرارتی در حالت‌های خاص:

تنش صفحه‌ای:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbb{R}^3 = \begin{bmatrix} \alpha\,\Delta T & \alpha\,\Delta T & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (21)$$

کرنش صفحه‌ای:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbb{R}^3 = (1+\upsilon)\begin{bmatrix} \alpha\,\Delta T & \alpha\,\Delta T & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (22)$$

در صورت وجود گرادیان حرارتی یا تغییرات دمایی روابط تنش کرنش به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \qquad (23)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

اثرات حرارت (Temperature Effects)

روابط تنش کرنش در حالت‌های مختلف در صورت وجود گرادیان حرارتی یا تغییرات دمای

تنش سه بعدی:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & \upsilon & 1-\upsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\upsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha\,\Delta T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (24)$$

تنش صفحه‌ای:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\upsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha\,\Delta T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (25)$$

کرنش صفحه‌ای:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\upsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - (1+\upsilon)\alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_y - (1+\upsilon)\alpha\,\Delta T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (26)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

انرژی پتانسیل (Potential Energy)

انرژی پتانسیل کل در یک جسم الاستیک، از مجموع انرژی کرنشی کل بعلاوه کار ناشی از نیروهای خارجی به دست می‌آید:

Π: انرژی پتانسیل کل

U: انرژی کرنشی کل

W: کار ناشی از نیروهای خارجی

$$\boxed{\Pi = U + W} \qquad (27)$$

که در آن:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, d_V} \qquad (28)$$

$$\boxed{W = -\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}\, d_V - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T}\, d_S - \sum_i \mathbf{u}_i{}^T \mathbf{P}_i} \qquad (29)$$

(علامت منفی: دلیل آن مخالفت نیروی داخلی با تغییر شکل)

$$(28)\,\&\,(29) \rightarrow (27) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, d_V - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}\, d_V - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T}\, d_S - \sum_i \mathbf{u}_i{}^T \mathbf{P}_i} \qquad (30)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

انرژی پتانسیل (Potential Energy)

سیستم‌هایی که در اینجا در نظر گرفته می‌شوند پایستار می‌باشند. کار ناشی از نیروی خارجی مستقل از مسیر است. به عبارت دیگر، اگر سیستم از یک حالت مشخص جابجا شود و مجدد به حالت اولیه برگردانده شود کار ناشی از نیروهای خارجی بدون توجه به مسیر برابر با صفر است.

اصل انرژی پتانسیل حداقل (Principle of Minimum Potential Energy):

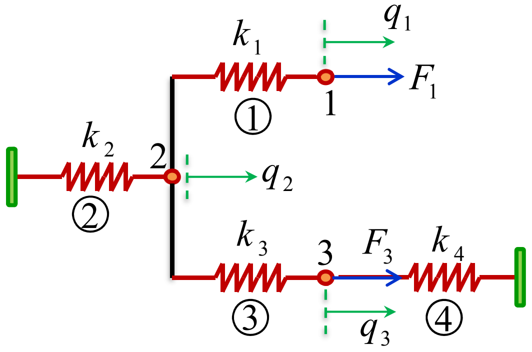
در یک سیستم پایستار تغییرشکل‌های قابل قبول (تغییرشکل سازگار با شرایط مرزی)، سبب اکسترمم شدن انرژی پتانسیل می‌گردد. اگر انرژی پتانسیل حداقل شود جسم پایدار می‌باشد.

از اصل انرژی پتانسیل حداقل می‌توان برای محاسبه تغییرشکل در سازه‌ها استفاده نمود.

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

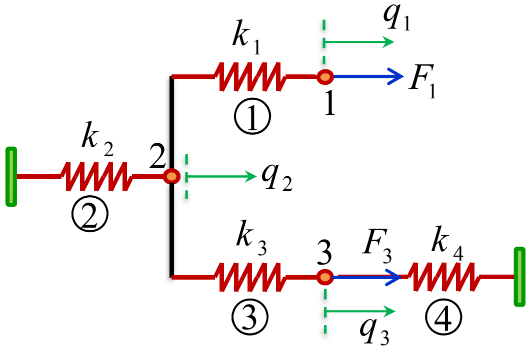
انرژی پتانسیل (Potential Energy)

مثال ۱– مقدار جابجایی گره‌ای سیستم سه درجه آزاد نشان داده شده را در نقاط ۱، ۲ و ۳ محاسبه نمایید.



مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

انرژی پتانسیل (Potential Energy)



پاسخ مثال ۱–

مقدار انرژی پتانسیل کل سیستم را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به هندسه شکل مقدار تغییرشکل هر فنر براساس جابجایی‌های گره‌ای ابتدا و انتهای هر المان فنر به صورت زیر تعریف می‌شود:

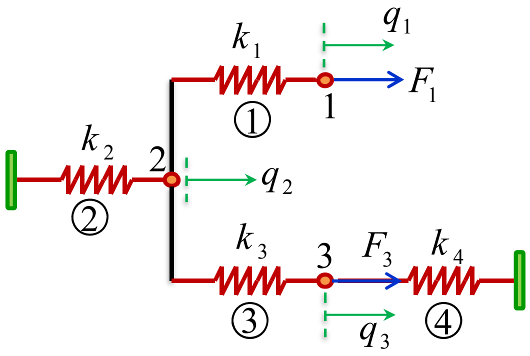
با جایگذاری رابطه (۱.۲) در رابطه (۱.۱) و بسط آن:

$$(1.2) \rightarrow (1.1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = \frac{1}{2}k_1(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(q_3 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_4(-q_3)^2 - F_1q_1 - F_3q_3} \quad (1.3)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

انرژی پتانسیل (Potential Energy)

پاسخ مثال ۱-



به منظور برقراری تعادل در این سیستم سه درجه آزاد، براساس اصل "انرژی پتانسیل حداقل" باید انرژی پنانسل کل Π در جابجایی‌های گره‌ای q_1، q_2 و q_3 مینیمم شود. به عبارت دیگر:

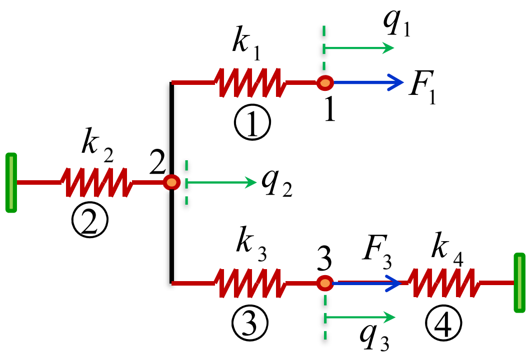
از این رو

$$(1.3)\ \&\ (1.4) \quad \Rightarrow$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

انرژی پتانسیل (Potential Energy)

پاسخ مثال ۱-



فرم ماتریسی رابطه (۱.۵) به صورت زیر است:

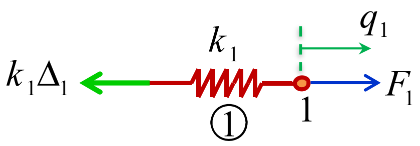
$$\mathbf{Kq}=\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}} \qquad (1.6)$$

با حل رابطه (۱.۶) پاسخ جابجایی گره‌ای سیستم سه درجه آزاد به دست می‌آید:

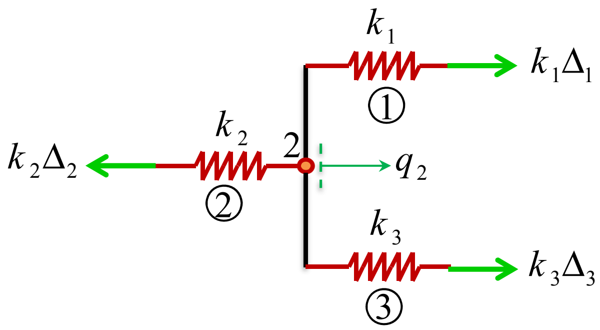
$$(1.6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}} \qquad (1.7)$$

انرژی پتانسیل (Potential Energy)

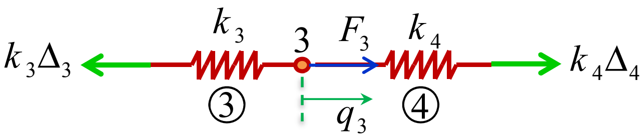
پاسخ مثال ۱-   راه حل دوم: بررسی تعادل گره‌ای- با بررسی تعادل به صورت مجزا در هر گره خواهیم داشت:



$$\Rightarrow \boxed{k_1(q_1-q_2)-F_1=0}$$



$$\Rightarrow \boxed{-k_1(q_1-q_2)+k_2q_2-k_3(q_3-q_2)=0}$$



$$\Rightarrow \boxed{k_3(q_3-q_2)+k_4q_3-F_3=0}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود روش استفاده از اصل "انرژی پتانسیل حداقل" در سیستم‌های پیچیده کارآیی بیشتر دارد و نیازی به بررسی تعادل دیاگرام‌های جسم آزاد نیست.

روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

در فضای پیوسته انرژی پتانسیل کل را می‌توان برای یافتن یک راه حل تقریبی استفاده نمود. روش رایلی- ریتز یک میدان جابجایی برای سیستم به صورت زیر فرض می کند:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\phi_i(x,y,z) \\ v &= \sum_{j=\ell+1}^{m}\alpha_j\phi_j(x,y,z) \\ w &= \sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\phi_k(x,y,z) \end{aligned}} \qquad (31)$$

تابع‌های ϕ به طور معمول به صورت چند جمله‌ای در نظر گرفته می‌شود.

جابجایی‌های u، v و w باید از نظر سینماتیکی قابل قبول باشند. به این معنی که شرایط مرزی خاص سیستم را ارضا نماید. ($n>m>\ell$)

متغیرهای وابسطه : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

تابع چندجمله‌ای (Polynomial):

$$u_{(x)}=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$$

$$\Rightarrow \quad \phi_0(x)=1 \quad , \quad \phi_1(x)=x \quad , \quad \phi_2(x)=x^2$$

= =

تابع مثلثاتی (Trigonometric):

$$u_{(x)}=\alpha_0+\alpha_1\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)+\alpha_2\sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \phi_0(x)=1 \quad , \quad \phi_1(x)=\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \quad , \quad \phi_2(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)$$

روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

با معرفی روابط تنش- کرنش و کرنش- جابجایی و همچنین با در نظر گرفتن شرایط مرزی تعداد متغیرهای وابسته به r متغیر مستقل کاهش می‌یابد. با جایگذاری آن‌ها در معادله انرژی پتانسیل کل (۳۰) نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\text{انرژی پتانسیل کل} = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)} \qquad (32)$$

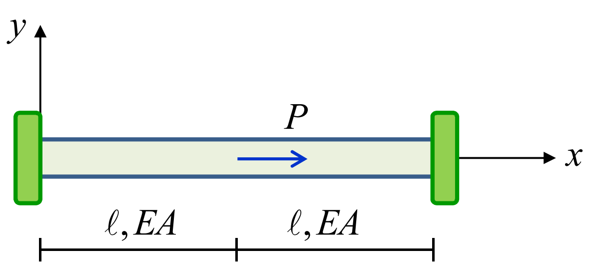
$\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_r$: متغیرهای مستقل

به منظور برقراری تعادل در سیستم، براساس اصل "انرژی پتانسیل حداقل" باید Π نسبت به α_i اکسترمم باشد.

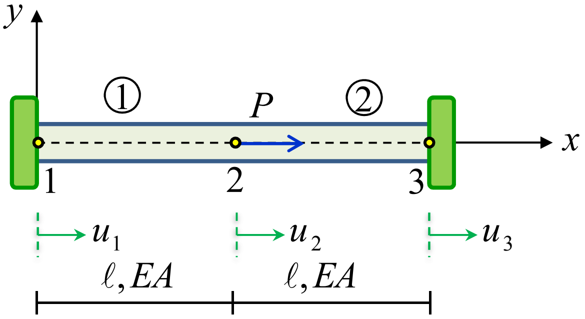
$$\boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)} \quad (33)$$

روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

مثال ۲– یک میله افقی یک بعدی بدون وزن تحت اثر بار متمرکز قرار دارد. تابع تغییر شکل تیر در راستای محور طولی به صورت یک تابع چند جمله‌ای درجه دوم $u_{(x)} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$ فرض می‌شود. تغییرات تنش در راستای محور طولی میله را محاسبه نمایید.



مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)



روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۲-

محاسبه انرژی پتانسیل کل سیستم:

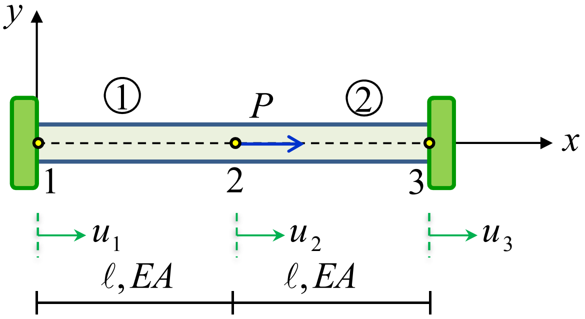
$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, d_V - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i} \quad (2.1)$$

$$u_{(x)} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 \ell + 4\alpha_3 \ell^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \ell + \alpha_3 \ell^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_2 &= -\alpha_3 \ell^2 \\ u_{(x)} &= -2\alpha_3 \ell x + \alpha_3 x^2 \end{aligned}} \quad (2.3)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)



روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۲-

$$\boxed{\frac{du}{dx} = -2\alpha_3 \ell + 2\alpha_3 x} \quad (2.4)$$

$$(2.3)\,\&\,(2.4) \rightarrow (2.2) \quad \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EA\,(-2\alpha_3 \ell + 2\alpha_3 x)^2\, d_x + \frac{1}{2}\int_{\ell}^{2\ell} EA\,(-2\alpha_3 \ell + 2\alpha_3 x)^2\, d_x - P(-\alpha_3 \ell^2)$$

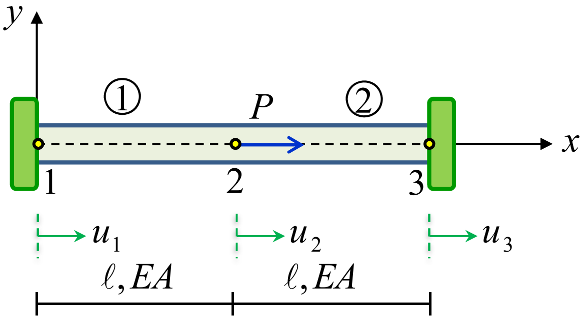
$$\Rightarrow \boxed{\Pi = \frac{4}{3} EA\,\alpha_3^{\,2} \ell^3 + P\alpha_3 \ell^2} \quad (2.5)$$

به منظور برقراری تعادل در سیستم، براساس اصل "انرژی پتانسیل حداقل" باید Π نسبت به α_3 اکسترمم باشد.

$$\boxed{\alpha_3 = -\frac{3}{8}\frac{P}{EA\,\ell}} \quad (2.6)$$

روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۲-



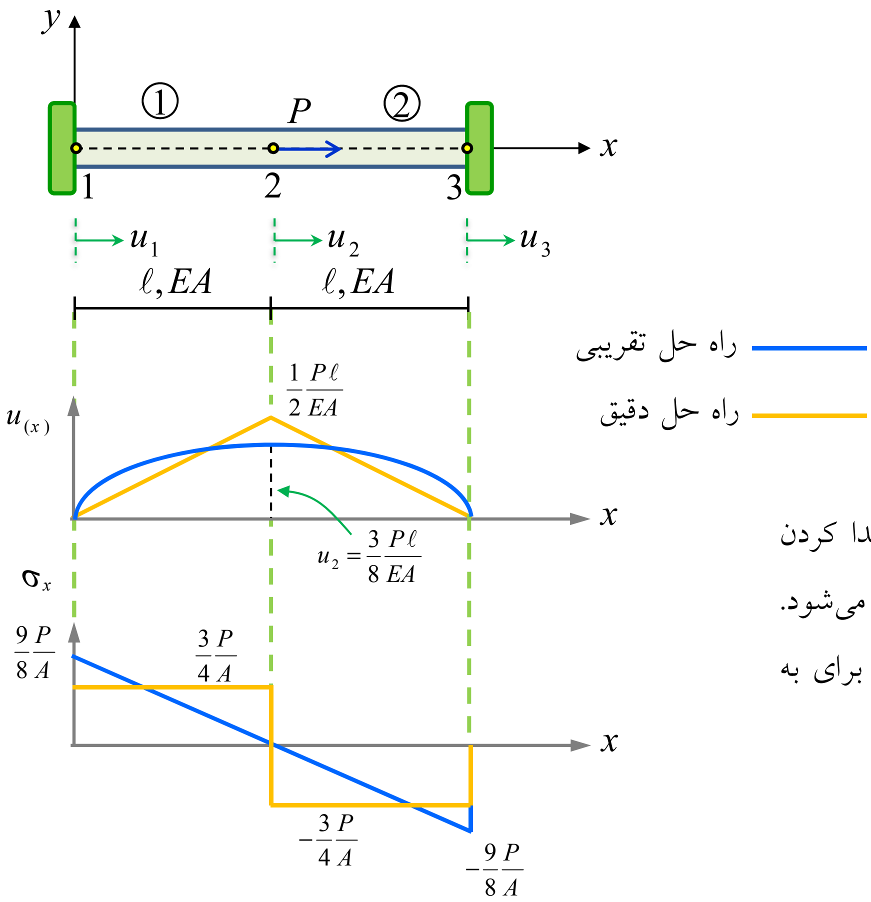
$$(2.6)\rightarrow(2.3)\quad\Rightarrow\quad \boxed{u_{(x)}=\frac{3}{8}\frac{P}{EA}\left(2x-\frac{x^2}{\ell}\right)}\ ,\ \boxed{u_2=\frac{3}{8}\frac{P\ell}{EA}}\quad(2.7)$$

$$\overset{(2.7)}{\Rightarrow}\quad \boxed{\varepsilon_x=\frac{3}{4}\frac{P}{EA}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}\quad(2.8)$$

$$\overset{(2.8)}{\Rightarrow}\quad \boxed{\sigma_x=\frac{3}{4}\frac{P}{A}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}\quad(2.8)$$

روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۲-



اگر از درونیابی چند جمله‌ای تکه‌ای برای پیدا کردن تابع $u_{(x)}$ استفاده شود پاسخ دقیق حاصل می‌شود. روش المان محدود یک راه حل سیستماتیک برای به دست آوردن تابع‌های ϕ فراهم می‌کند.

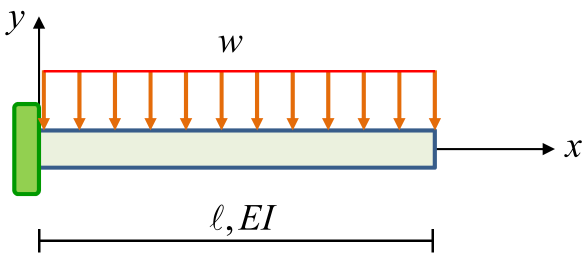
مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

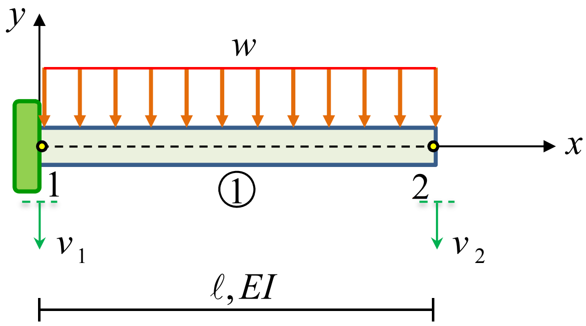
روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

مثال ۳- تیر کنسول بدون وزن نشان داده شده تحت اثر بار یکنواخت w قرار دارد. مطلوب است تعیین میزان خیز تیر در نقاط وسط و انتهای آزاد در دو حالت زیر:

الف-
$$v_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{\ell}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{\ell}\right)^3$$

ب-
$$v_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{\ell}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \alpha_4\left(\frac{x}{\ell}\right)^4$$





پاسخ مثال ۳- الف:

محاسبه انرژی پتانسیل کل سیستم:

$$\Rightarrow \boxed{\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M_{(x)}^{\,2}}{EI}dx - \int_0^{\ell} w v_{(x)} d_x} \qquad (3.1)$$

$$\overset{(3.1)}{\Rightarrow} \boxed{\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI\, v''^{\,2}_{(x)} dx - \int_0^{\ell} w v_{(x)} d_x} \qquad (3.2)$$

اعمال شرایط مرزی:

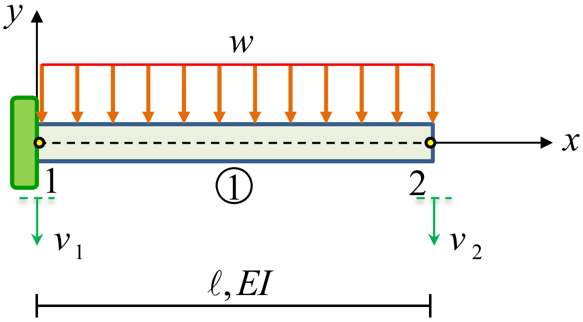
$$v_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{\ell}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{\ell}\right)^3$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \Rightarrow \boxed{v_{(x)} = \alpha_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{\ell}\right)^3} \qquad (3.3)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روش رایلی– ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۳– الف:



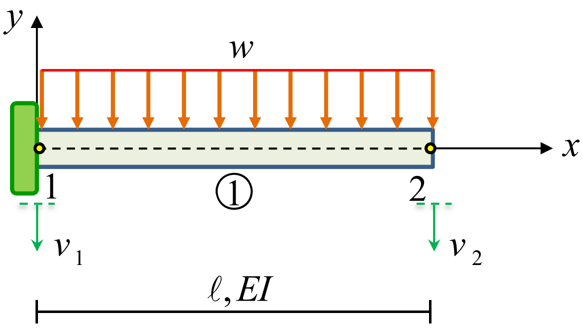
به منظور برقراری تعادل در سیستم، براساس اصل "انرژی پتانسیل حداقل" باید Π نسبت به α_k اکسترمم باشد.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = 0 \overset{(3.4)}{\Rightarrow} EI\int_0^{\ell}\left(\frac{2\alpha_2}{\ell^2}+\frac{6\alpha_3}{\ell^3}x\right)\left(\frac{6}{\ell^3}x\right)d_x - w\int_0^{\ell}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 d_x = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow 4\alpha_2 + 6\alpha_3 = \frac{w\,\ell^4}{3EI} \\ &\alpha_2 + 2\alpha_3 = \frac{w\,\ell^4}{24EI}\end{aligned}} \quad (3.5)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روش رایلی– ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۳– الف:



$$(3.5) \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{w\,\ell^4}{3EI} \\ \dfrac{w\,\ell^4}{24EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{5w\,\ell^4}{24EI} \\ -\dfrac{w\,\ell^4}{12EI} \end{Bmatrix}} \quad (3.6)$$

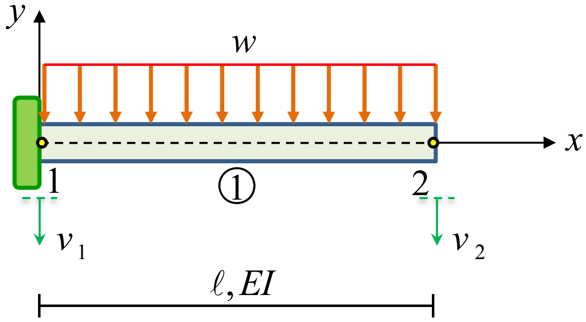
$$(3.6) \rightarrow (3.3) \Rightarrow \boxed{v_{(x)} = \frac{5w\,\ell^2}{24EI}x^2 - \frac{w\,\ell}{12EI}x^3} \quad (3.7)$$

$$(3.7) \Rightarrow \begin{matrix} @x = \dfrac{\ell}{2} \\ @x = \ell \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_{(x=\frac{\ell}{2})} &= \frac{w\,\ell^4}{24EI} \\ v_{(x=\ell)} &= \frac{w\,\ell^4}{8EI} \end{aligned}} \quad (3.8)$$

(5.88 % خطا دارد)

(جواب دقیق به دست آمد)

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)



روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۳- ب:

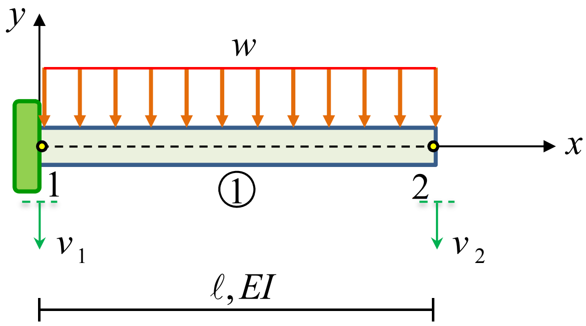
اعمال شرایط مرزی:

$$v_{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{\ell}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \alpha_4\left(\frac{x}{\ell}\right)^4$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{(x)} = \alpha_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \alpha_4\left(\frac{x}{\ell}\right)^4} \qquad (3.9)$$

به منظور برقراری تعادل در سیستم، براساس اصل "انرژی پتانسیل حداقل" باید Π نسبت به α_k اکسترمم باشد.

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)



روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)

پاسخ مثال ۳- ب:

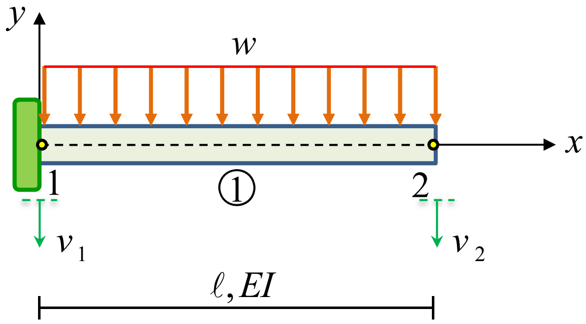
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = 0 \overset{(3.4)}{\Rightarrow} EI\int_0^{\ell}\left(\frac{2}{\ell^2}\alpha_2 + \frac{6x}{\ell^3}\alpha_3 + \frac{12x^2}{\ell^4}\alpha_4\right)\left(\frac{6x}{\ell^3}\right)d_x - w\int_0^{\ell}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 d_x = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_4} = 0 \overset{(3.4)}{\Rightarrow} EI\int_0^{\ell}\left(\frac{2}{\ell^2}\alpha_2 + \frac{6x}{\ell^3}\alpha_3 + \frac{12x^2}{\ell^4}\alpha_4\right)\left(\frac{12x^2}{\ell^4}\right)d_x - w\int_0^{\ell}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 d_x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 &= \frac{w\ell^4}{6EI} \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 &= \frac{w\ell^4}{24EI} \\ 20\alpha_2 + 45\alpha_3 + 72\alpha_4 &= \frac{w\ell^4}{2EI} \end{aligned}} \qquad (3.11)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روش رایلی- ریتز (Rayleigh-Ritz Method)



پاسخ مثال ۳- ب:

$$(3.11) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 20 & 45 & 72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{w\ell^4}{6EI} \\ \dfrac{w\ell^4}{24EI} \\ \dfrac{w\ell^4}{2EI} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{w\ell^4}{4EI} \\ -\dfrac{w\ell^4}{6EI} \\ \dfrac{w\ell^4}{24EI} \end{Bmatrix}} \quad (3.12)$$

$$(3.12) \rightarrow (3.9) \Rightarrow \boxed{v_{(x)} = \frac{w\ell^2}{4EI}x^2 - \frac{w\ell}{6EI}x^3 + \frac{w}{24EI}x^4} \quad (3.13)$$

$$(3.13) \Rightarrow \begin{matrix} @x = \dfrac{\ell}{2} \\ @x = \ell \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} v_{(x=\frac{\ell}{2})} = \dfrac{17w\ell^4}{384EI} \\ v_{(x=\ell)} = \dfrac{w\ell^4}{8EI} \end{matrix}} \quad (3.14)$$

(هر دو جواب دقیق به دست آمد)

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)

تابع لاگرانژی L به عنوان تفاضل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل تعریف می شود:

U: انرژی پتانسیل (انرژی کرنشی)

L: تابع لاگرانژی

K_E: انرژی جنبشی

$$\boxed{L = K_E - U} \quad (34)$$

انتگرال تابع لاگرانژی یک سیستم پایستار بر روی مسیر حرکت از لحظه t_1 تا t_2 یک اکسترمم برای مسیر حرکت است.

I: انتگرال کنش

$$\boxed{I = \int_{t_1}^{t_2} L d_t} \quad (35)$$

اکسترمم شدن I معادل صفر شدن تغییرات مرتبه اول انتگرال فوق است. در اصطلاح حساب تغییرات یعنی:

$$\boxed{\delta I = 0} \quad (36)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)

روش رایلی- ریتز میدان جابجایی برای سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیرد:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(t)\phi_i(x,y,z) & \dot{u} &= \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\alpha}_i(t)\phi_i(x,y,z) \\ v &= \sum_{j=\ell+1}^{m} \alpha_j(t)\phi_j(x,y,z) & \dot{v} &= \sum_{j=\ell+1}^{m} \dot{\alpha}_j(t)\phi_j(x,y,z) \\ w &= \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k(t)\phi_k(x,y,z) & \dot{w} &= \sum_{k=m+1}^{n} \dot{\alpha}_k(t)\phi_k(x,y,z) \end{aligned}} \quad (37)$$

$\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t)$: تابع‌های وابسطه و صرفا تابع موقعیت زمانی هستند.

تابع‌های ϕ صرفا تابع موقعیت مکانی هستند.

جابجایی‌های u، v و w باید از نظر سینماتیکی قابل قبول باشند. به این معنی که شرایط مرزی خاص سیستم را ارضا نماید. ($n > m > \ell$)

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)

تابع لاگرانژی در رابطه (۳۴) به صورت زیر گسسته می‌گردد:

$$\boxed{L = K_E - U = L(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_r(t), \dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_2(t), \cdots, \dot{\alpha}_r(t))} \quad (38)$$

$\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_r(t)$: تابع‌های مستقل و صرفا تابع موقعیت زمانی هستند.

براساس رابطه (۳۶) با مساوی قرار دادن تغییرات مرتبه اول I و انتگرالگیری جزء به جز، مسئله به معادلات معروف اویلر- لاگرانژ کاهش می‌یابد:

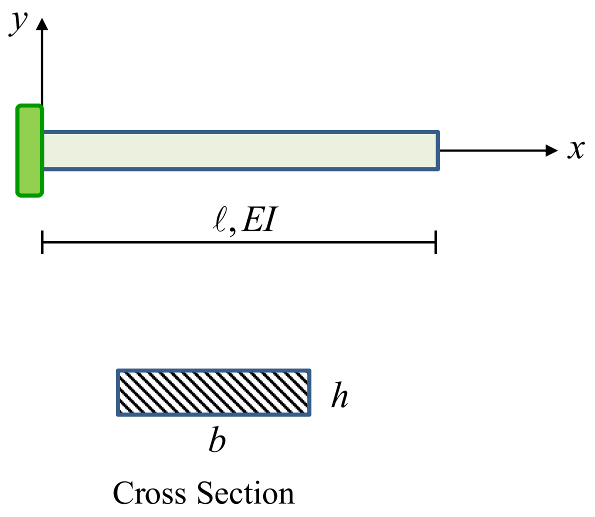
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i = (0, 1, 2, \cdots, r)} \quad (39)$$

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)

مثال ۴- با استفاده از روش رایلی- ریتز فرکانس ارتعاش تیر کنسول نشان داده شده را در دو حالت زیر محاسبه نمایید. هر دو تابع تغییرشکل، شرایط مرزی را تامین می‌نمایند.

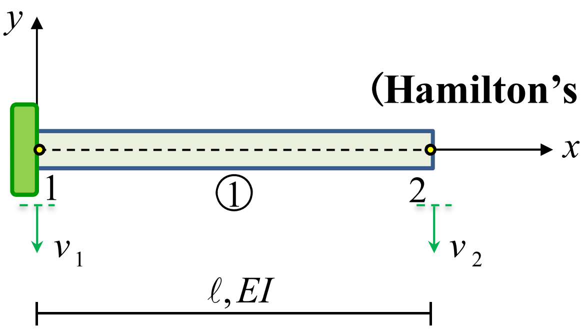
الف- $v_{(x)} = \alpha(t)\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2$

ب- $v_{(x)} = \alpha_1(t)\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_2(t)\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3$



$$E = 2\times10^{11} \quad (N/m^2)$$
$$\ell = 0.6096 \quad (m)$$
$$b = 0.1016 \quad (m)$$
$$h = 0.0028067 \quad (m)$$
$$\rho = 7800 \quad (kg/m^3)$$

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)



پاسخ مثال ۴- الف:

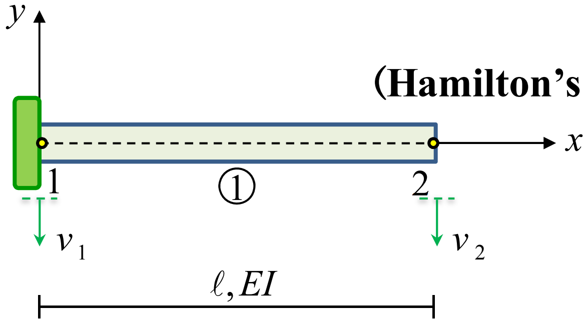
محاسبه انرژی پتانسیل سیستم:

با جایگذاری تابع تغییر شکل در رابطه (4.1) خواهیم داشت:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{4EI}{\ell^3}\alpha^2(t)} \quad (4.2)$$

محاسبه انرژی جنبشی سیستم:

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)



پاسخ مثال ۴- الف:

با جایگذاری تابع تغییر شکل در رابطه (4.3) خواهیم داشت:

$$\boxed{K_E = \frac{1}{2}\frac{\rho A \ell}{5}\dot{\alpha}^2(t)} \qquad (4.4)$$

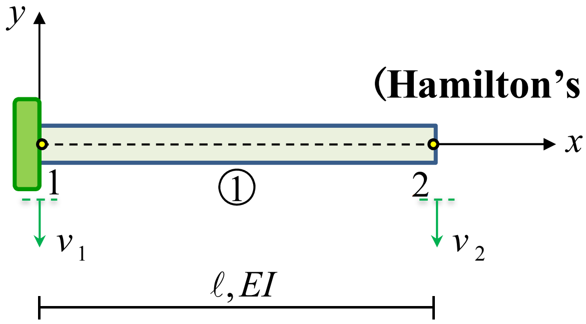
جرم و سختی معادل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{k_{eq} = \frac{4EI}{\ell^3} \quad , \quad m_{eq} = \frac{\rho A \ell}{5}} \qquad (4.5)$$

با استفاده از تعاریف رابطه (4.5) و جایگذاری آن‌ها در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل در روابط (4.2) و (4.4):

$$(4.5) \rightarrow (4.2)\ \&\ (4.4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2}k_{eq}\alpha^2(t) \quad , \quad K_E = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{\alpha}^2(t)} \qquad (4.6)$$

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)



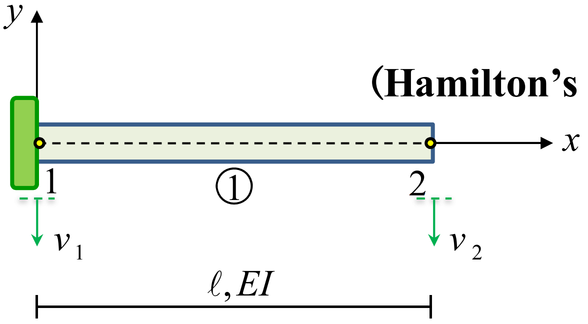
پاسخ مثال ۴- الف:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{\alpha}^2(t) - \frac{1}{2}k_{eq}\alpha^2(t)} \qquad (4.7)$$

فرکانس سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f = \frac{h}{2\pi\ell^2}\sqrt{\frac{5E}{3\rho}} = \frac{0.0028067}{2\pi(0.6096)^2}\sqrt{\frac{5(2\times10^{11})}{3(7800)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 7.858\ (Hz)} \qquad (4.9)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)



روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)

پاسخ مثال ۴- ب:

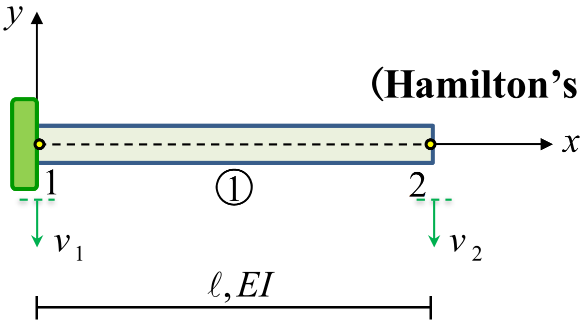
تابع تغییرشکل در حالت دوم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{v_{(x)} = \alpha_1(t)\phi_1(x) + \alpha_2(t)\phi_2(x)} \qquad (4.10)$$

که در آن

محاسبه انرژی پتانسیل سیستم:

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)



روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)

پاسخ مثال ۴- ب:

فرم ماتریسی رابطه (4.12) به صورت زیر است:

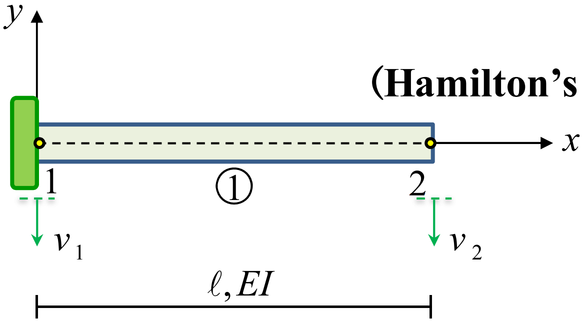
$$(4.12) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2} EI \begin{Bmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^{\ell} \phi_1''(x)\phi_1''(x)dx & \int_0^{\ell} \phi_1''(x)\phi_2''(x)dx \\ \int_0^{\ell} \phi_2''(x)\phi_1''(x)dx & \int_0^{\ell} \phi_2''(x)\phi_2''(x)dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{Bmatrix}} \qquad (4.13)$$

محاسبه انرژی جنبشی سیستم:

فرم ماتریسی رابطه (4.14) به صورت زیر است:

$$(4.12) \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_E = \frac{1}{2} \rho A \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_1(t) & \dot{\alpha}_2(t) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^{\ell} \phi_1(x)\phi_1(x)dx & \int_0^{\ell} \phi_1(x)\phi_2(x)dx \\ \int_0^{\ell} \phi_2(x)\phi_1(x)dx & \int_0^{\ell} \phi_2(x)\phi_2(x)dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{Bmatrix}} \qquad (4.15)$$

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)



پاسخ مثال ۴- ب:

روابط انرژی جنبشی و پتانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود:

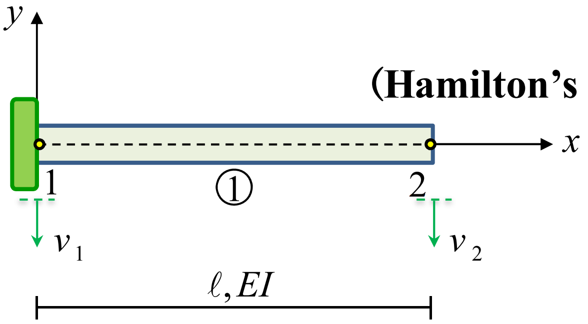
که در آن

$$\boldsymbol{\alpha}^T(t) = \{\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t)\}$$

$$\mathbf{k}_{eq} = EI \begin{bmatrix} \int_0^\ell \phi_1''(x)\phi_1''(x)dx & \int_0^\ell \phi_1''(x)\phi_2''(x)dx \\ \int_0^\ell \phi_2''(x)\phi_1''(x)dx & \int_0^\ell \phi_2''(x)\phi_2''(x)dx \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{m}_{eq} = \rho A \begin{bmatrix} \int_0^\ell \phi_1(x)\phi_1(x)dx & \int_0^\ell \phi_1(x)\phi_2(x)dx \\ \int_0^\ell \phi_2(x)\phi_1(x)dx & \int_0^\ell \phi_2(x)\phi_2(x)dx \end{bmatrix}$$

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)



پاسخ مثال ۴- ب:

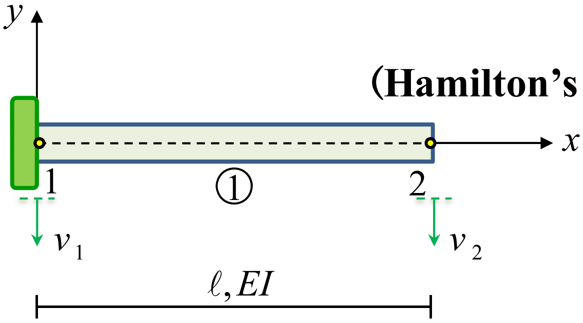
$$(4.11) \rightarrow (4.17) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{k}_{eq} = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{m}_{eq} = \rho A \ell \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)



پاسخ مثال ۴- ب:

$$(34) \quad \Rightarrow \quad L = K_E - U \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^T(t)\mathbf{m}_{eq}\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T(t)\mathbf{k}_{eq}\boldsymbol{\alpha}(t)} \quad (4.19)$$

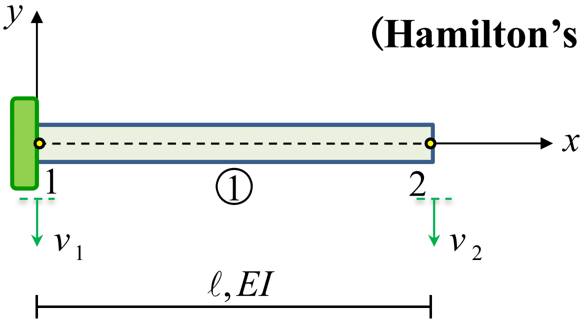
$$(39) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha(t)} = 0 \overset{(4.19)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\left(\mathbf{m}_{eq}\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right) - \left(-\mathbf{k}_{eq}\boldsymbol{\alpha}(t)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{m}_{eq}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + \mathbf{k}_{eq}\boldsymbol{\alpha}(t) = 0} \, (4.8)$$

فرکانس‌های سیستم با استفاده از حل مسله مقادیر ویژه در دینامیک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{f} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi} = \begin{Bmatrix} 6.2075 \\ 61.16 \end{Bmatrix} (Hz)} \quad (4.10)$$

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

روش رایلی- ریتز همراه با اصل هامیلتون (Hamilton's Principle)



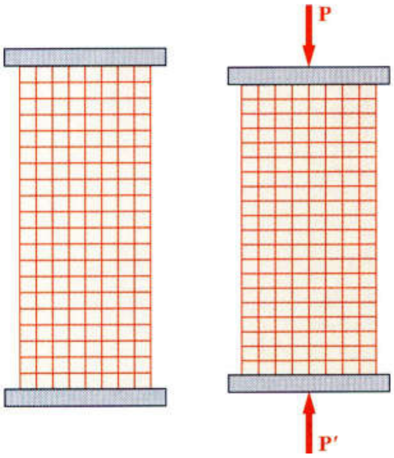
پاسخ مثال ۴- ب:

	$f_1\,(Hz)$	$f_2\,(Hz)$
$v_{(x)} = \alpha(t)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$	7.858	*NA*
$v_{(x)} = \alpha_1(t)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \alpha_2(t)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3$	6.2075	61.16
Exact (NASA 1968: 3–124)	6.182	38.718

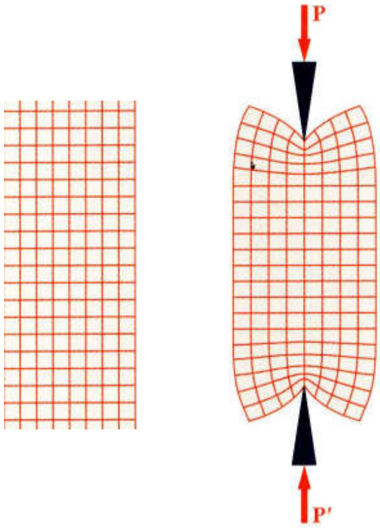
NASA, Sonic and Vibration Environments for Ground Facilities: A Design Manual, Report NAS8–11287, NASA, 1968.

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

اصل سنت-ونانت (Saint-Venant's Principle)



بارهای منتقل شده از طریق صفحات صلب منجر به توزیع یکنواخت تنش و کرنش می شود.

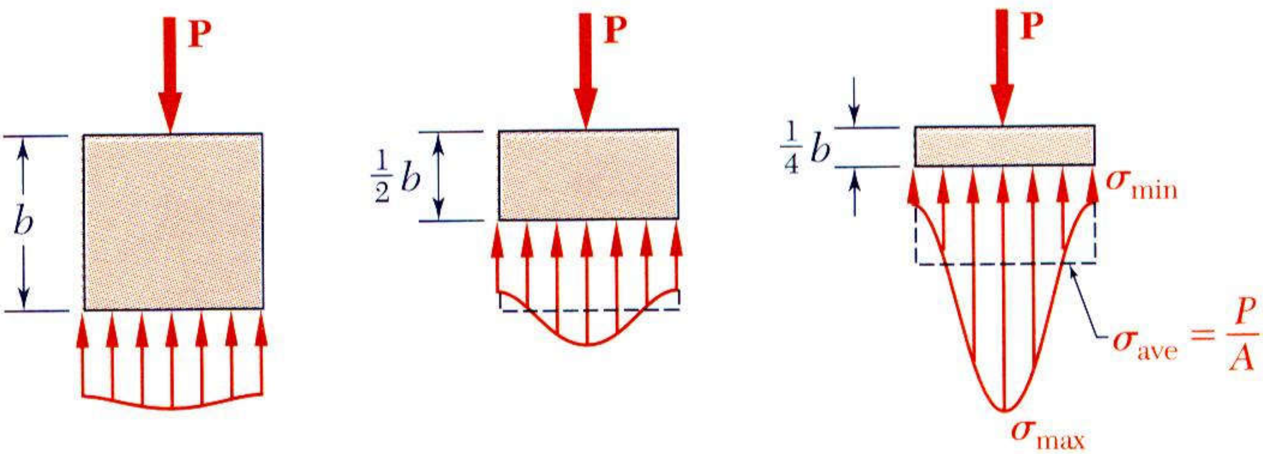


بارهای متمرکز منجر به تنش‌های زیادی در مجاورت نقطه اعمال بار می شود (تمرکز تنش).

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

اصل سنت-ونانت (Saint-Venant's Principle)

توزیع تنش و کرنش در فاصله نسبتا کوتاهی از نقاط اعمال بار یکنواخت می شود.



$\sigma_{min} = 0.973\sigma_{ave}$ $\sigma_{max} = 1.027\sigma_{ave}$

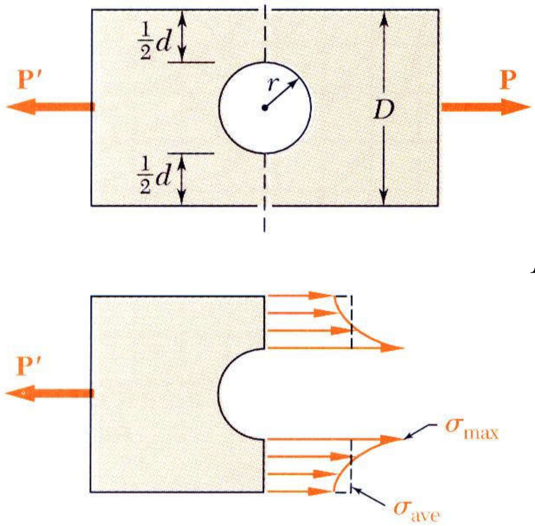
$\sigma_{min} = 0.668\sigma_{ave}$ $\sigma_{max} = 1.387\sigma_{ave}$

$\sigma_{min} = 0.198\sigma_{ave}$ $\sigma_{max} = 2.575\sigma_{ave}$

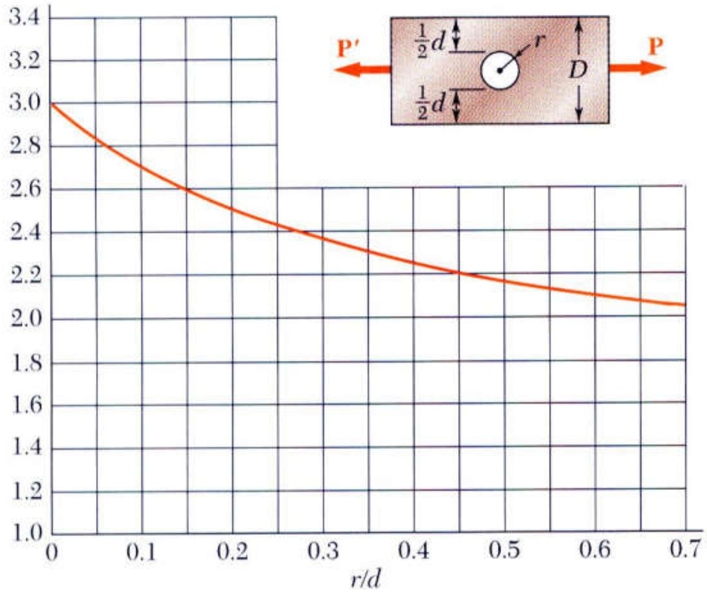
(Fundamental Concepts) مفاهیم پایه

(Saint-Venant's Principle) اصل سنت-ونانت

ناپیوستگی سطح مقطع ممکن است منجر به تنش های موضعی یا متمرکز شود.



$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$$

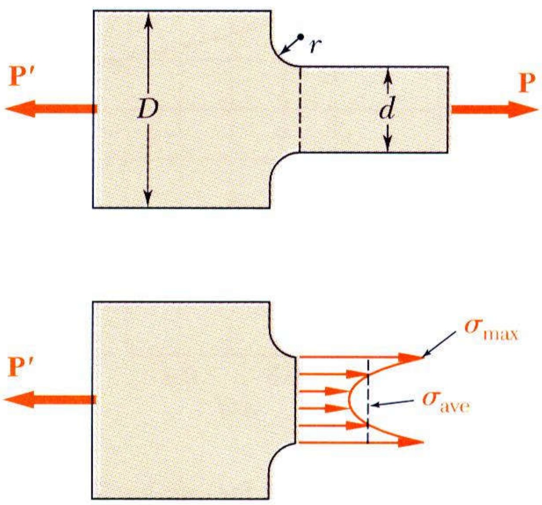


(a) Flat bars with holes

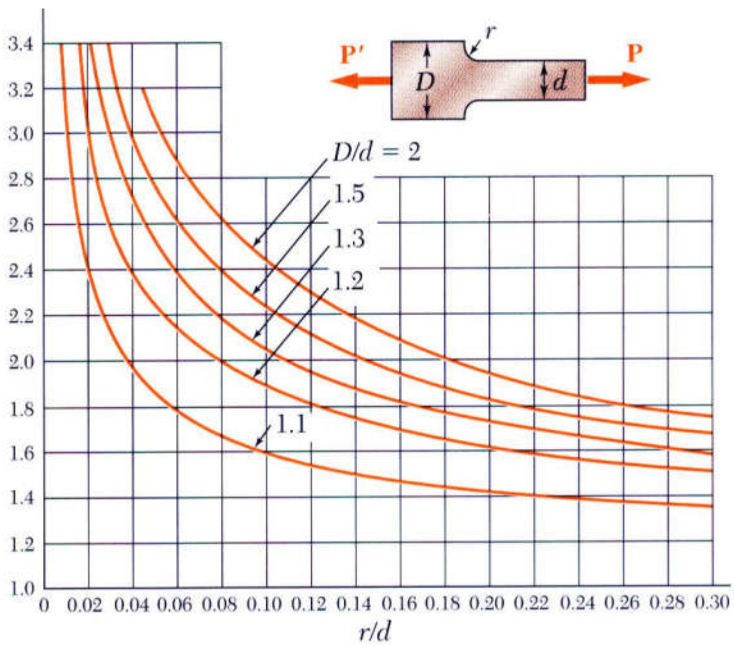
(Fundamental Concepts) مفاهیم پایه

(Saint-Venant's Principle) اصل سنت-ونانت

ناپیوستگی سطح مقطع ممکن است منجر به تنش های موضعی یا متمرکز شود.



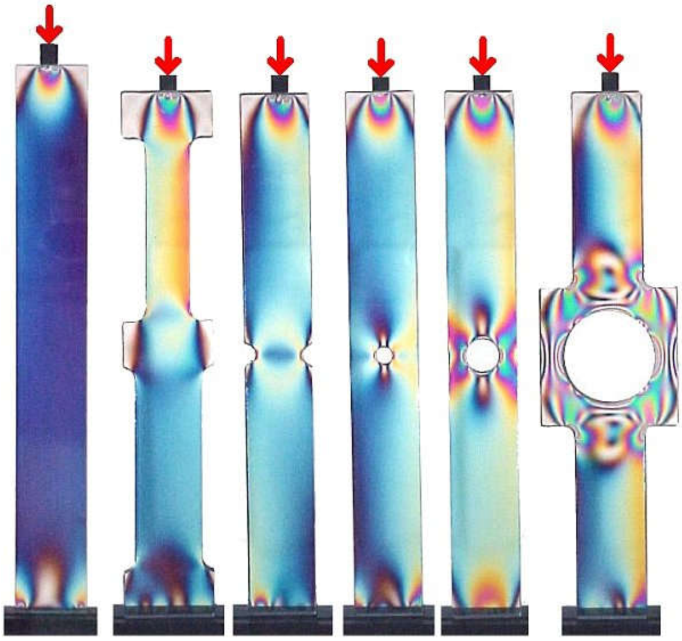
$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$$



(b) Flat bars with fillets

مفاهیم پایه (Fundamental Concepts)

اصل سنت-ونانت (Saint-Venant's Principle)



در تعریف شرایط مرزی در سطح تماس سازه تکیه‌گاه ما اغلب مجبوریم تقریب انجام دهیم. به عنوان مثال، یک تیر کنسول را در نظر بگیرید که در یک انتها آزاد است و به یک ستون با پیچ در انتهای دیگر متصل است. این سؤال مطرح می شود که آیا اتصال پیچ شده کاملا صلب است یا نیمه صلب است؟ اینکه هر نقطه روی سطح مقطع در انتهای گیردار آیا شرایط مرزی یکسانی دارند؟ سنت ونانت تأثیر تقریب‌های مختلف را بر روی حل کلی مسئله در نظر گرفت.

اصل سنت-ونانت بیان می‌کند که تا زمانی که تقریب‌های مختلف از نظر استاتیکی معادل باشند، راه‌حل‌های به‌دست‌آمده معتبر خواهند بود مشروط بر آن که روی نواحی به اندازه کافی دور از تکیه‌گاه تمرکز کنیم. یعنی راه حل‌ها ممکن است به طور قابل توجهی فقط در مجاورت تکیه‌گاه متفاوت باشد.