دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

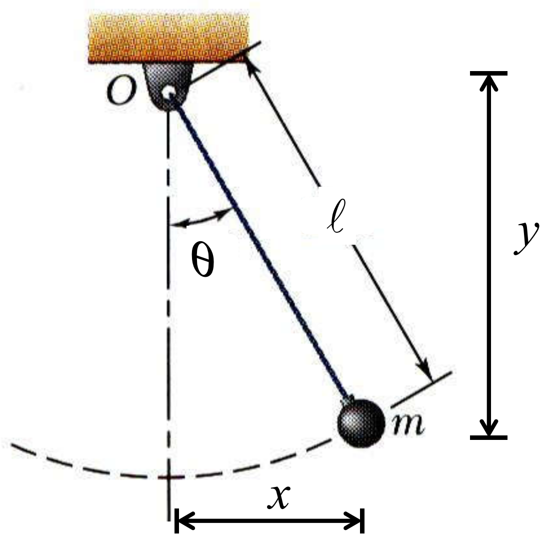
Dynamic of Structures

Mathematical Model of SDOF Systems

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

Mathematical Model of SDOF Systems

I. مختصات تعمیم‌یافته (Generalized Coordinate)



فرض کنید که آونگی داریم و آن را به حرکت در می‌آوریم. این سیستم یک SDOF است چرا که با دانستن θ می‌توان موقعیت آن را مشخص کرد. حال اگر موقعیت ذره m را با دو مختصه x و y نشان دهیم، نمی‌توان گفت که این سیستم چند درجه آزادی است چرا که x و y به هم وابسته‌اند.

در سیستم نشان داده شده x و y مختصات محلی (Local Coordinate) و یا مختصات تغییر مکانی نام دارد.

θ مختصات کلی یا تعمیم‌یافته (General) است.

چون با یک θ در مختصات تعمیم‌یافته می‌توان موقعیت سیستم را مشخص کرد بنابراین سیستم SDOF است.

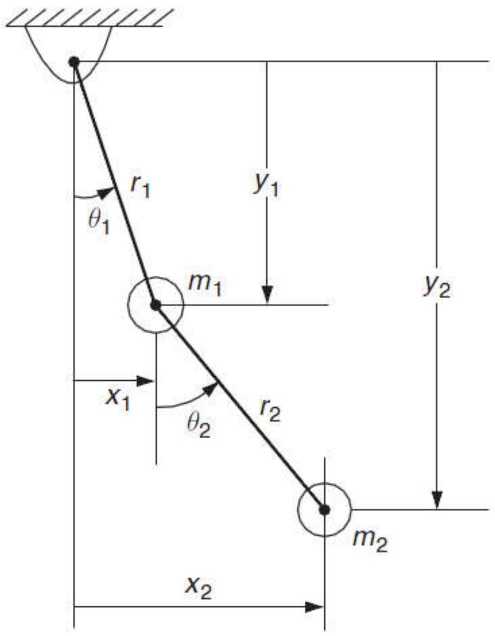
I. مختصات تعمیم‌یافته (Generalized Coordinate)

مختصات کارتزین x_1 ، y_1 ، x_2 و y_2 که وابسطه به هم می‌باشند.

$$x_1^2+y_1^2=r_1^2 \quad and \quad (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=r_2^2$$

مختصات تعمیم‌یافته θ_1 و θ_2 که مستقل از هم می‌باشند. در نتیجه سیستم دارای دو درجه آزادی 2DOF است.

در حالت کلی می‌توان گفت که در یک مختصات محلی، مختصات به هم وابسطه می‌باشند. اما در مختصات تعمیم‌یافته، پارامترهای مختصاتی از هم مستقل خواهند بود.



Double pendulum illustrating generalized coordinates.

I. مختصات تعمیم‌یافته (Generalized Coordinate)

در مختصات تعمیم‌یافته معادله حرکت به صورت زیر است:

$$M^*\ \ddot{z}+C^*\ \dot{z}+K^*\ z=P^*(t)$$

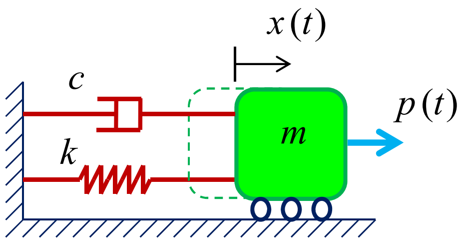
M^* : جرم موثر در مختصات تعمیم‌یافته

C^* : میرایی موثر در مختصات تعمیم‌یافته

K^* : سختی موثر در مختصات تعمیم‌یافته

P^* : نیروی خارجی موثر در مختصات تعمیم‌یافته

- کلیه حالت‌هایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند، همگی دارای شکل بسیار ساده‌ای بوده‌اند؛ زیرا مشخصه‌های فیزیکی آن‌ها (جرم، میرایی و الاستیسیته) هر کدام توسط یک عنصر مجزای منفرد نشان داده شده است.

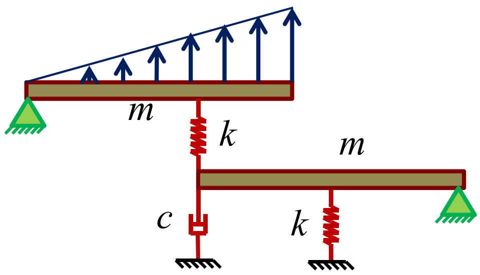


Mathematical Model of SDOF Systems

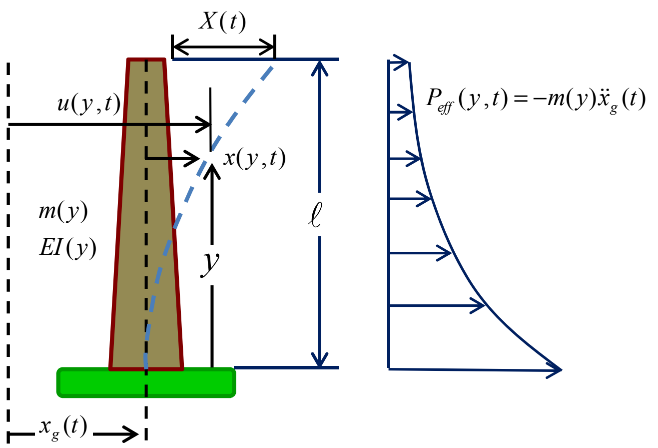
I. مختصات تعمیم یافته (Generalized Coordinate)

- آنالیز اغلب سیستم‌های سازه‌ای واقعی، هر چند که بتوان آن‌ها را سازه‌ای با یک درجه آزادی در نظر گرفت، نیازمند مدل‌های پیچیده‌تری است. به همین دلیل دو گروه متمایز سازه‌های یک درجه آزادی تعمیم‌یافته را می‌توان در نظر گرفت:

a) سیستم‌های متشکل از مجموعه‌ای از اجسام صلب: که در آنها تغییرمکان‌های الاستیک به طور مشخص محدود به فنرهای بدون وزنی است که به صورت متمرکز در مکان‌های مختلف قرار دارند.



b) سیستم با جرم و سختی گسترده: که تغییرشکل‌های آن‌ها، در کل سازه و یا قسمت‌هایی از آن به صورت پیوسته می‌باشد.



Mathematical Model of SDOF Systems

I. مختصات تعمیم یافته (Generalized Coordinate)

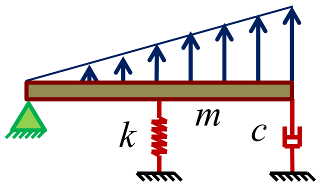
- در هر دو حالت فوق، با فرض این که سازه فقط دارای یک شکل تغییر مکان منحصر به فرد است، مانند یک سیستم SDOF عمل می‌کند.

- در سازه‌هایی که به صورت مجموعه‌ای از اجسام صلب هستند. محدودیت سیستم به یک شکل تغییر مکانی منحصر به فرد، اغلب نتیجه شکل سرهم‌بندی شده خاص سیستم (نحوه اتصال اجسام)، است. یعنی اجسام صلب توسط تکیه‌گاه‌ها و مفصل‌ها طوری مقید می‌باشند که تنها یک نوع تغییر مکان برای آنها امکان‌پذیر است.

- در سازه‌های الاستیسیته پیوسته، محدودیت سیستم به یک شکل تغییرمکانی است (فقط یک فرض است). در عمل الاستیسیته پیوسته امکان انجام بینهایت تغییرمکان گوناگون را دارد.

Mathematical Model of SDOF Systems

I. مختصات تعمیم‌یافته (Generalized Coordinate)



- تنها تغییرشکل الاستیک که در این نوع سیستم‌ها رخ می‌دهد، تغییرطول فنرهای موجود در سیستم است. در تحلیل این سیستم‌ها، تغییرشکلی را باید برای آن‌ها در نظر گرفت که شرایط تکیه‌گاهی و نیز پیوستگی اعضا آن را تامین نماید.
- در اثر حرکت سیستم، تغییر طول‌هایی در فنرهای موجود در مدل به وجود می‌آید که نتیجه آن اعمال نیروهای الاستیک به سیستم است.
- به طور مشابه نیروهای میرایی نیز متناسب با مقدار سرعت موجود در تجهیزات میراکننده‌ی مدل به وجود می‌آید.
- همچنین در روند استخراج معادله حرکت، می‌توان بارهای خارجی گسترده‌ای را که به اعضای سیستم وارد می‌شوند با برآیند آن‌ها جایگزین نمود.

Mathematical Model of SDOF Systems

I. مختصات تعمیم‌یافته (Generalized Coordinate)

- لازم به ذکر است که اگر عضوهای صلب سیستم فقط دارای جرم متمرکز باشند بر اثر حرکت آن فقط نیروهای اینرسی انتقالی متمرکز پدید می‌آیند که متناسب با شتاب‌های مربوطه در محل آن جرم خواهند بود. اما اگر عضوهای صلب سیستم دارای ابعادی باشند که نتوان آن‌ها را به صورت ذره فرض نمود، در این صورت نیروهای اینرسی گسترده به وجود می‌آیند.

- ساده‌ترین روش برای احتساب نیروهای اینرسی گسترده آن است که آن‌ها را براساس جرم متمرکز در مرکز جرم جسم و لنگر اینرسی جرمی حول مرکز جرم جسم محاسبه نماییم.

Mathematical Model of SDOF Systems

I. مختصات تعمیم‌یافته (Generalized Coordinate)

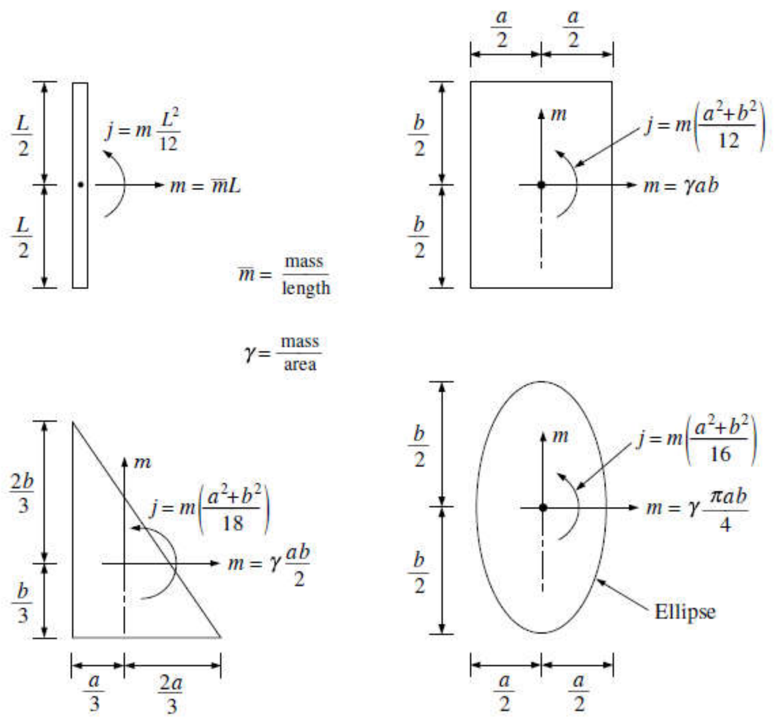
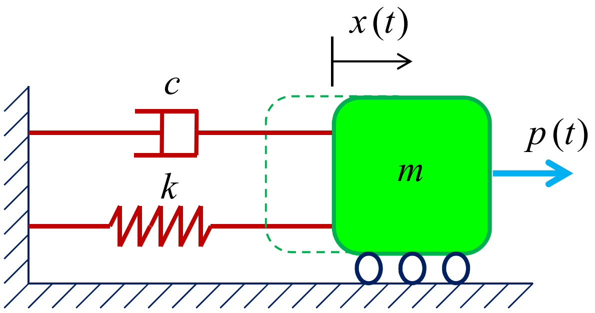


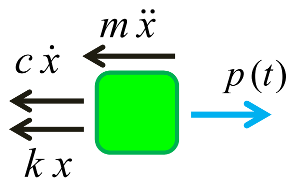
FIGURE 8-1
Rigid-body mass and centroidal mass moment of inertia for uniform rod and uniform plates of unit thickness.

Mathematical Model of SDOF Systems

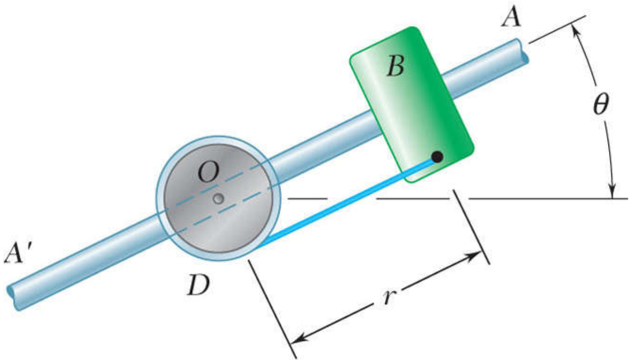
II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton's Second Law)

در بخش‌های قبلی تمامی معادلات حرکت بر اساس قانون دوم نیوتن به دست آمد.





$$\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t)}$$

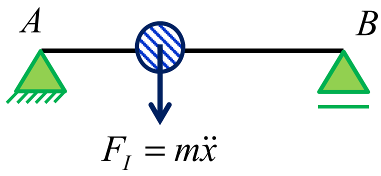


قانون دوم نیوتن در مورد اجسام صلب در حال دوران به جای معادله تعادل نیرو از معادله تعادل لنگر استفاده می‌شود

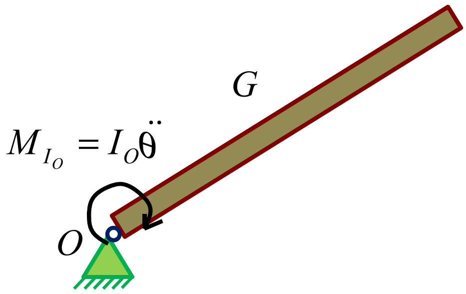
$$\boxed{\sum F_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum M - I_m\ddot{\theta} = 0}$$

Mathematical Model of SDOF Systems

II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton's Second Law)



در روش نیوتنی در اجسام دورانی به جای نیروی اینرسی، لنگر اینرسی حرکتی داریم که آن هم نسبت به مرکز دوران محاسبه می‌گردد.

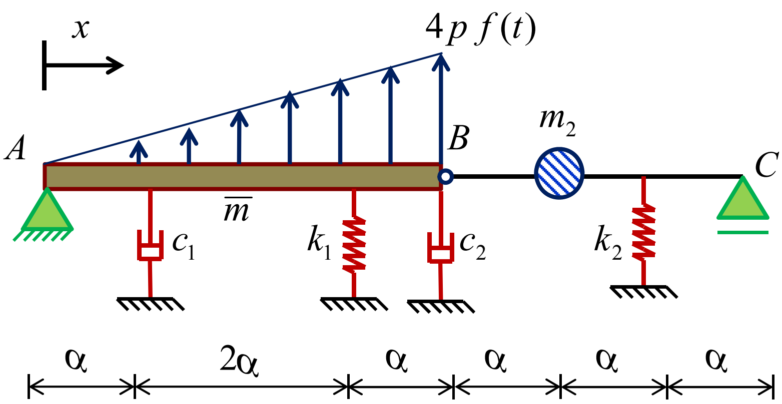


$$\boxed{I_O = I_G + md^2}$$

Mathematical Model of SDOF Systems

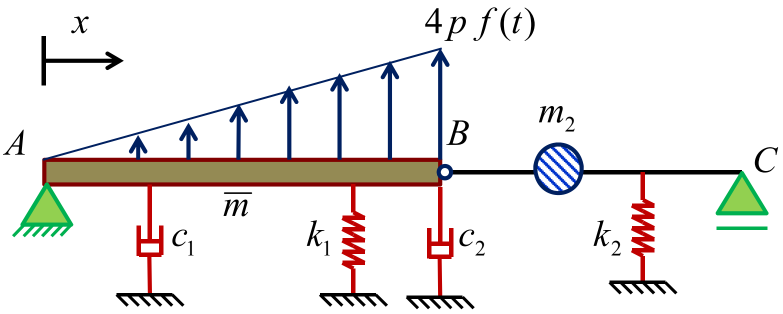
II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton's Second Law)

مثال ۱– معادله حرکت سیستم نشان داده شده را تعیین نمایید. از وزن تیر BC صرف نظر کنید. $\overline{m}$ جرم واحد طول تیر AB است.



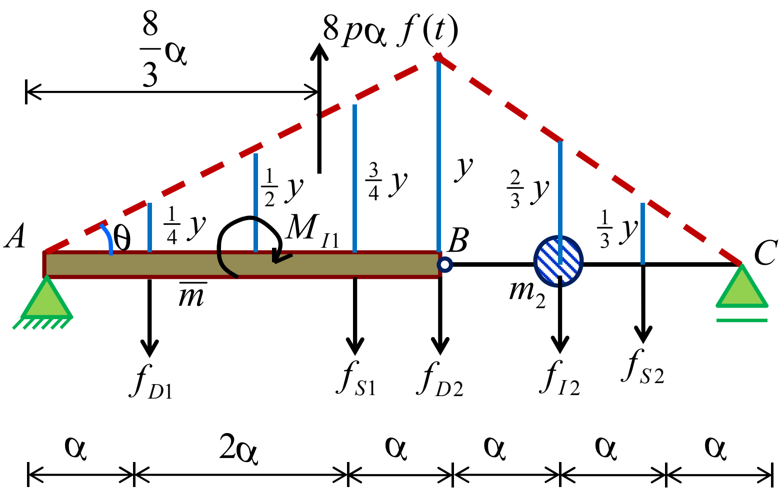
Mathematical Model of SDOF Systems

II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton’s Second Law)



پاسخ مثال ۱-

با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله تعادل را می‌نویسیم. چون ارتعاش در دامنه‌های کوچک است بنابراین رفتار سازه خطی است. تغییرشکل سیستم به همراه نیروهای موثر بر آن را در لحظه t رسم می‌کنیم.



Mathematical Model of SDOF Systems

II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton’s Second Law)

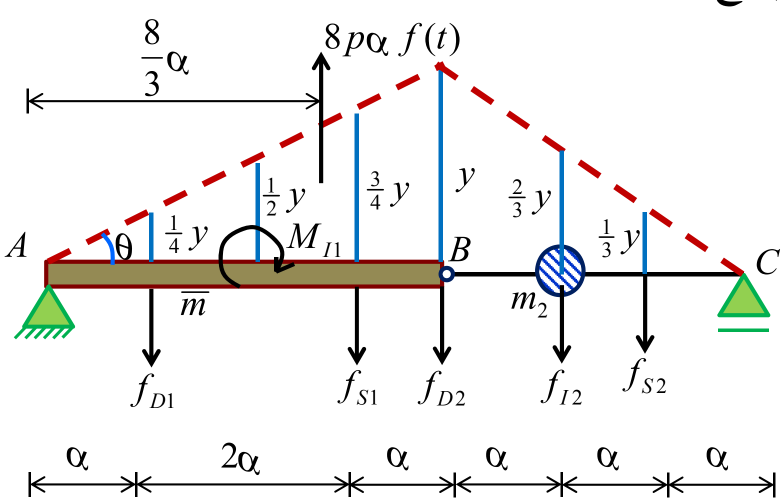
پاسخ مثال ۱-

$$\boxed{f_{S1} = \frac{3}{4}k_1 y}$$

$$\boxed{f_{S2} = \frac{1}{3}k_2 y}$$

$$\boxed{f_{D1} = \frac{1}{4}c_1 \dot{y}}$$

$$\boxed{f_{D2} = c_2 \dot{y}}$$

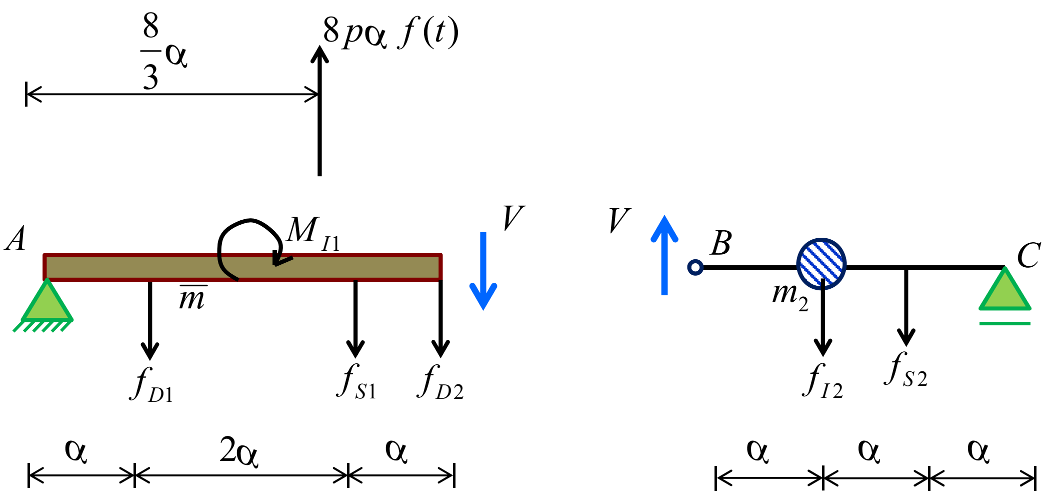


$$\boxed{f_{I2} = \frac{2}{3}m_2\,\ddot{y}}$$

$$\boxed{M_{I1} = \frac{16}{3}\overline{m}\alpha^2\,\ddot{y}}$$

II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton's Second Law)

پاسخ مثال ۱-



$$\boxed{V = \frac{2}{3} f_{I2} + \frac{1}{3} f_{S2}}$$

پس از جایگذاری عبارت‌ها و ساده سازی روابط خواهیم داشت:

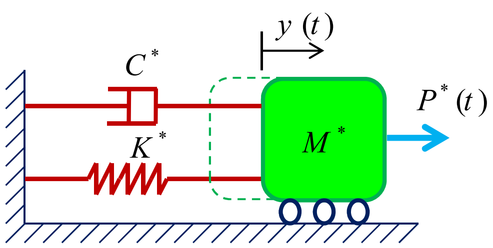
II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton's Second Law)

پاسخ مثال ۱-

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\left(\frac{4}{3}\overline{m}\alpha + \frac{4}{9}m_2\right)}_{\text{جرم موثر}}\ddot{y} + \underbrace{\left(\frac{1}{16}c_1 + c_2\right)}_{\text{میرایی موثر}}\dot{y} + \underbrace{\left(\frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2\right)}_{\text{سختی موثر}}y = \underbrace{\frac{16}{3}p\alpha\, f(t)}_{\text{نیروی خارجی موثر}}}$$

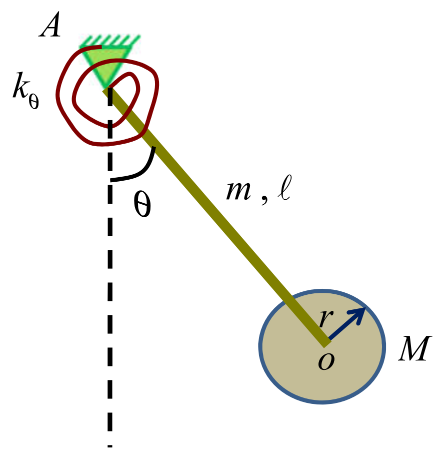
$$\Rightarrow \boxed{M^*\ddot{y} + C^*\dot{y} + K^* y = P^*(t)}$$

معادله حرکت سیستم معادل SDOF با جرم موثر، میرایی موثر، سختی موثر و نیروی خارجی موثر در مختصات تعمیم‌یافته.

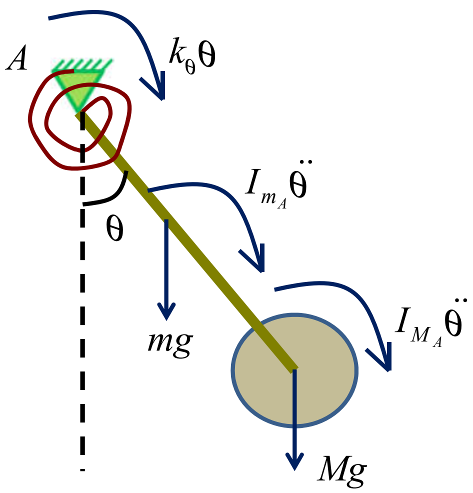


II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton’s Second Law)

مثال ۲– صفحه دایره‌ای شکلی به شعاع r ، جرم M و ضخامت ناچیز دارای نوسان است. اگر جرم میله m و سختی فنر پیچشی k_θ باشد معادله حرکت سیستم نشان داده شده را تعیین نمایید



II. کاربرد قانون دوم نیوتن (Newton’s Second Law)



پاسخ مثال ۲–

$$\boxed{I_{M_A} = M\left(\frac{r^2}{2} + \ell^2\right)}$$

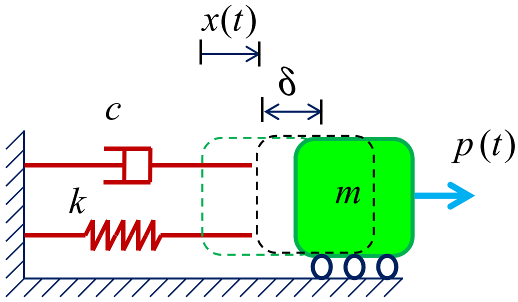
$$\boxed{I_{m_A} = \frac{m\,\ell^2}{3}}$$

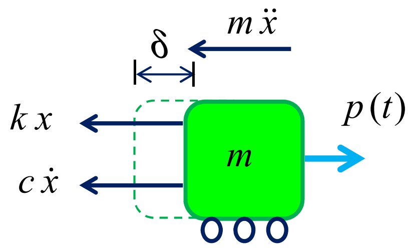
$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{M}{2}r^2 + \frac{3M+m}{3}\ell^2\right)\ddot{\theta} + \left(Mg\ell + mg\frac{\ell}{2} + k_\theta\right)\theta = 0} \Rightarrow \quad M^*\ddot{\theta} + K^*\theta = 0$$

Mathematical Model of SDOF Systems

III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

کار کلیه نیروهای وارد بر سازه (شامل نیروی اینرسی) به علت یک تغییر مکان مجازی کوچک، برابر با صفر است.





$$\sum W = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}(\delta) + c\dot{x}(\delta) + kx(\delta) - p(t)(\delta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)}$$

Mathematical Model of SDOF Systems

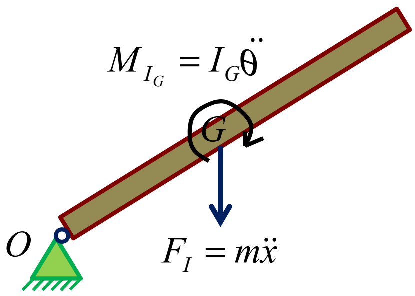
III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

در یک سیستم دینامیکی به دست آوردن معادلات حرکت شامل مراحل زیر می‌باشد:

a) ابتدا تمامی نیروهای وارد بر جرم‌های سیستم (شامل نیروهای اینرسی بر طبق اصل دالامبر) تعیین می‌گردد.

b) در هر درجه آزادی سیستم، یک تغییر مکان مجازی مناسب فرض می‌شود.

c) با مساوی قرار دادن کل کار انجام شده برابر با صفر، معادلات حرکت به دست می‌آید.

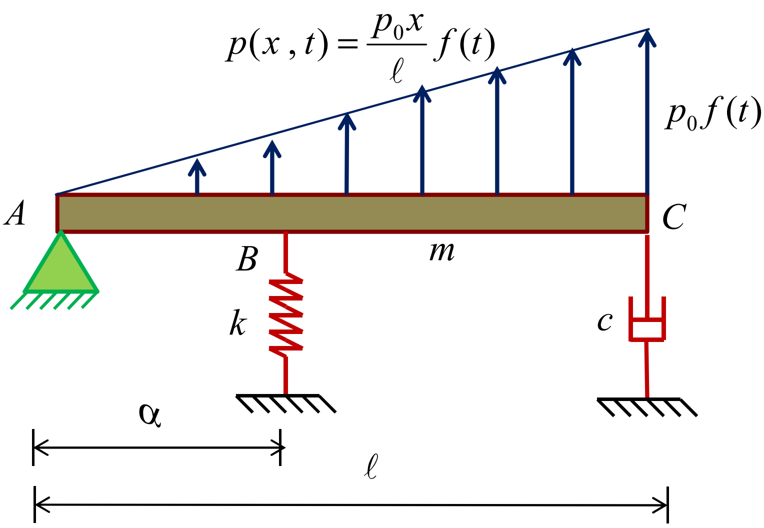


در روش کار مجازی در اجسام دورانی هم نیروی اینرسی و هم لنگر اینرسی حرکتی داریم که باید لنگر اینرسی حرکتی نسبت به مرکز جرم محاسبه می‌گردد.

در روش کار مجازی جرم نقطه‌ای تنها یک نیروی اینرسی دارد و لنگر اینرسی حرکتی آن برابر صفر است.

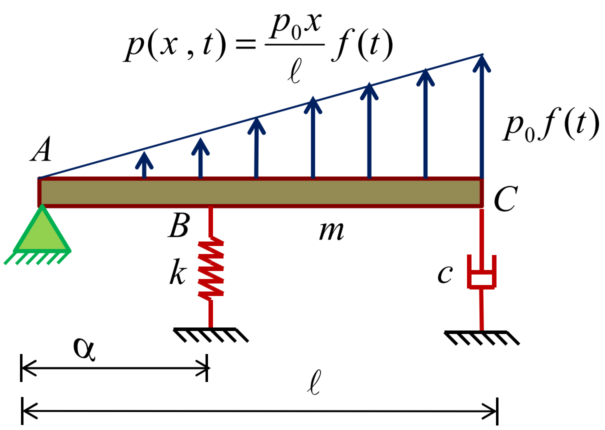
III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

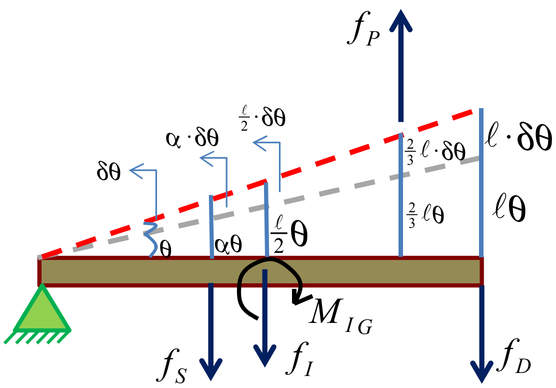
مثال ۳– معادله حرکت سیستم نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش کار مجازی به دست آورید. جرم کل تیر صلب m است.



III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

پاسخ مثال ۳–





Mathematical Model of SDOF Systems

III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

پاسخ مثال ۳–

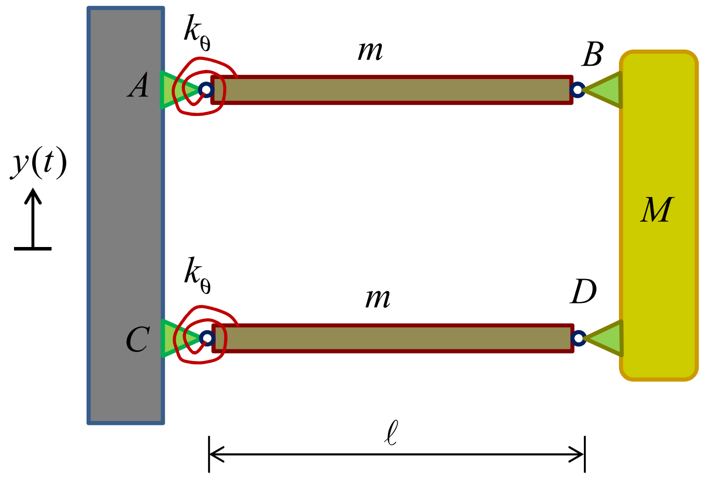
$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\ddot{\theta}+(c\ell^2)\dot{\theta}+(k\alpha^2)\theta=\frac{p_0\ell^2}{3}f(t) \quad\Rightarrow\quad M^*\ddot{\theta}+C^*\dot{\theta}+K^*\theta=P^*(t)}$$

اگر از روش نیوتنی استفاده می‌کردیم به جای F_I و M_{IG} فقط M_{Io} داریم که نسبت به مرکز دوران محاسبه می‌شود.

Mathematical Model of SDOF Systems

III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

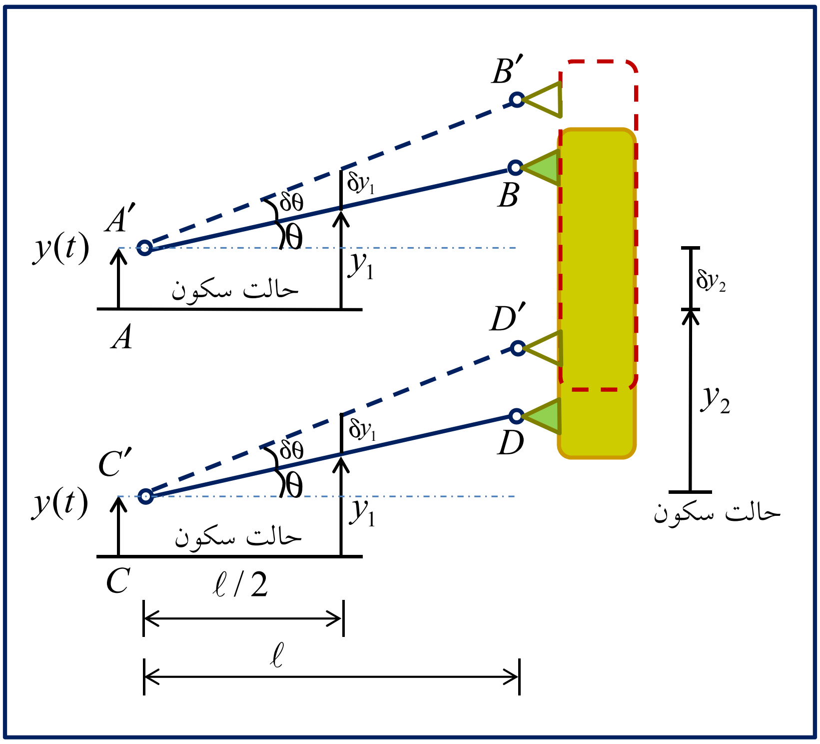
مثال ۴– سیستم نشان داده شده در شکل زیر مدل حرکت بازوهای یک جرثقیل را نشان می‌دهد. جسمی به جرم M توسط دو تیر صلب AB و CD هر یک به جرم کلی m به قسمت متحرک جرثقیل متصل شده است. مقدار دوران بازوها کوچک فرض شده و از میرایی سیستم صرف نظر شده است. با استفاده از روش کار مجازی معادله دیفرانسیل حرکت سیستم را به دست آورید.



Mathematical Model of SDOF Systems

III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

پاسخ مثال ۴–

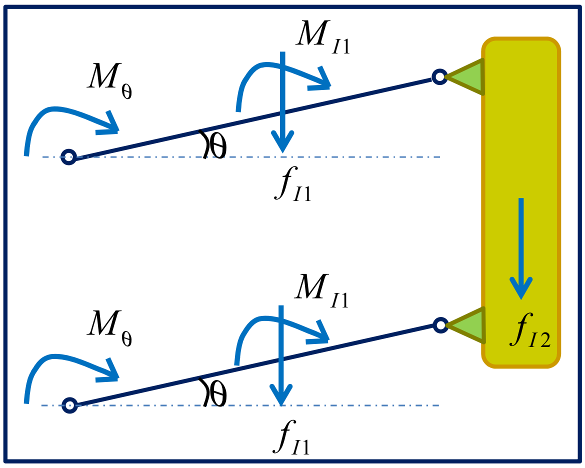


Mathematical Model of SDOF Systems

III. کاربرد اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

دیاگرام جسم آزاد

پاسخ مثال ۴–

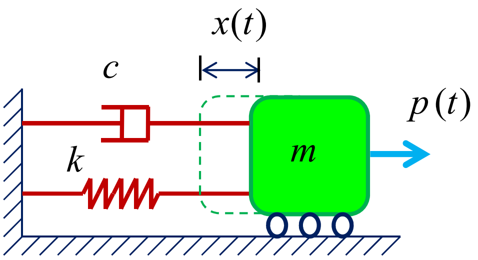


$$\Rightarrow \boxed{(M+\frac{2}{3}m)\ell^2\ddot{\theta}(t)+2k_\theta\theta(t)=-(m+M)\ell\ddot{y}(t) \quad\Rightarrow\quad M^*\ddot{\theta}(t)+K^*\theta(t)=P^*(t)}$$

Mathematical Model of SDOF Systems

IV. روش براساس انرژی (Energy Based Method)

یکی از روش‌های به دست آوردن معادلات حرکت، استفاده از اصل بقای انرژی است. طبق این اصل، مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل همواره ثابت است (این روش بیشتر در رشته مکانیک کاربرد دارد).



$P(t)$: انرژی پتانسیل

$T(t)$: انرژی جنبشی

$E_D(t)$: انرژی ناشی از میرایی

$E_P(t)$: انرژی ناشی از نیروی خارجی

$$\boxed{P(t)+T(t)+E_D(t)=E_P(t)}$$

$$p(t)=\frac{1}{2}k\,x^2(t)$$

$$T(t)=\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2(t)$$

$$E_D(t)=\int_0^t c\dot{x}^2dt$$

$$P(t)=\int_0^x p(t)dx=\int_0^t p(t)\dot{x}dt$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}k\,x^2(t)+\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2(t)+\int_0^t c\dot{x}^2dt=\int_0^t p(t)\dot{x}dt$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}\ k\,\dot{x}x+m\,\dot{x}\ddot{x}+c\dot{x}^2=p(t)\dot{x}\ \Rightarrow\ \boxed{m\,\ddot{x}+c\dot{x}+k\,x=p(t)}$$

V. روش ریلی (Rayleigh Method)

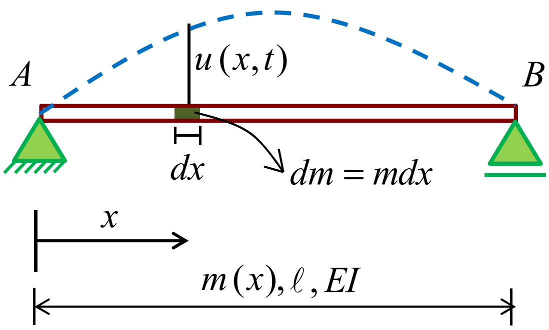
روش ریلی، روشی تقریبی برای یافتن فرکانس یک حرکت است. در روش ریلی چون شکل ارتعاش حدس زده می‌شود بنابراین این روش تقریبی است. سیستم در این حالت الزامی ندارد که SDOF باشد می‌تواند MDOF نیز باشد.

در این روش با تقریب خوبی فرکانس حرکت، بدون تبدیل جرم گسترده به جرم متمرکز (با در نظر گرفتن جرم گسترده) به دست می‌آید. مزایای این روش سادگی و تقریب خوب آن بدون متمرکز کردن جرم‌ها می‌باشد.

از آن جا که سازه چند درجه آزادی، به تعداد درجه آزادی‌اش فرکانس دارد؛ بنابراین باید بدانیم روش ریلی چه فرکانسی از سازه را بیان می‌کند.

Mathematical Model of SDOF Systems

.V روش ریلی (Rayleigh Method)



تیر مقابل را تحت اثر شرایط اولیه مرتعش نموده‌ایم. می‌خواهیم فرکانس حرکت سازه را تعیین نماییم.

در روش ریلی تابع تغییر مکان به این صورت است که جابجایی هر نقطه از تیر تابعی از محل نقطه و زمان است. ریلی u را به صورت حرکت رفت و برگشتی به صورت زیر فرض کرد:

$$\boxed{u(x,t) = \psi(x)\cdot\sin(\omega t)} \quad (1)$$

که در آن

ω: فرکانس حرکت است که می‌خواهیم آن را تعیین کنیم.

$\psi(x)$: تابع شکل (Shape Function) نام دارد که شکل تغییر مکان را مشخص می‌کند و تابعی از مکان است.

$\sin(\omega t)$: تابعی از زمان است و دامنه ارتعاش را مشخص می‌کند و تامین کننده حرکت رفت و برگشتی است.

معمولا برای این قسمت از تابع‌های هارمونیک استفاده می‌شود.

Mathematical Model of SDOF Systems

.V روش ریلی (Rayleigh Method)

تابع شکل $\psi(x)$ به دلخواه انتخاب می شود. البته باید شرایط مرزی را احراز کند (به همین دلیل روش ریلی تقریبی است.)

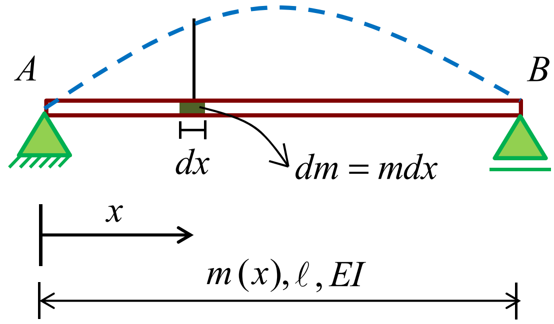
- اگر تابع شکل به صورت دقیق انتخاب شود، سختی حداقل مقدار را خواهد داشت. انتخاب هر شکل دیگری غیر از شکل واقعی مستلزم وجود قیدهای خارجی اضافی در سازه است که این امر باعث افزایش سختی سازه می‌گردد. در نتیجه باعث افزایش فرکانس محاسبه شده می‌شود. شکل ارتعاش واقعی هیچ‌گونه قید اضافی ندارد بنابراین دارای کمترین مقدار فرکانس ارتعاش است.
- بنابراین در بین چند شکل فرض شده برای تغییرشکل سازه، آن که دارای کمترین فرکانس باشد؛ بهترین فرض محسوب می‌شود.
- تغییرشکل استاتیکی حاصل از نیروهای اینرسی یک فرض تقریبی خوب برای تابع شکل می‌باشد.
- با بکار بردن تعداد توابع شکل بیشتر برای توصیف تغییرشکل، می‌توان سیستمی با درجات بیشتر و دقیق‌تر را مدل‌سازی نمود:

$$\boxed{u(x,t) = \psi_1(x)\cdot Y_1(t) + \psi_2(x)\cdot Y_2(t) + \ldots}$$

Mathematical Model of SDOF Systems

V. روش ریلی (Rayleigh Method)

$$u(x,t)=\psi(x)\cdot\sin(\omega t)$$



در سیستم بدون میرایی :

$$P+T=cte$$

$$\begin{aligned} &if \quad T=0 \;\Rightarrow\; P_{\max}=cte \\ &if \quad P=0 \;\Rightarrow\; T_{\max}=cte \end{aligned} \;\Rightarrow\; \boxed{P_{\max}=T_{\max}} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M^2}{EI}dx \\ M&=EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=EIu'' \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; P=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{(EIu'')^2}{EI}dx \;\Rightarrow\; \boxed{P=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}EIu''^2dx} \qquad (3)$$

مشتق نسبت به مکان با u' نمایش داده می‌شود.

مشتق نسبت به زمان با $\dot{u}$ نمایش داده می‌شود.

$$(1)\,\&\,(3) \;\Rightarrow\; P=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}EI[\psi''(x)\cdot\sin(\omega t)]^2dx \;\underset{\sin(\omega t)=1}{\overset{@\;P_{\max}}{\Longrightarrow}}\; \boxed{P_{\max}=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}EI\psi''^2dx} \qquad (4)$$

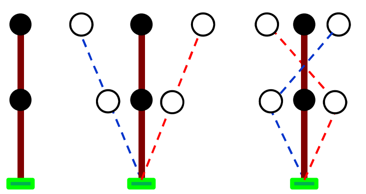
Mathematical Model of SDOF Systems

V. روش ریلی (Rayleigh Method)

$$T=\int_0^{\ell}\frac{1}{2}m\dot{u}^2dx \;\overset{(1)}{\Rightarrow}\; T=\int_0^{\ell}\frac{1}{2}m[\omega\psi(x)\cdot\cos(\omega t)]^2dx \;\underset{\cos(\omega t)=1}{\overset{@\;T_{\max}}{\Longrightarrow}}\; T_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^{\ell}m\psi^2dx \qquad (5)$$

$$(2),(4)\,\&\,(5) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\int_0^{\ell}EI\psi''^2dx=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^{\ell}m\psi^2dx \;\Rightarrow\; \boxed{\omega^2=\frac{\int_0^{\ell}EI\psi''^2dx}{\int_0^{\ell}m\psi^2dx}} \qquad (6)$$

رابطه (6) رابطه ریلی است. اگر شکل ارتعاش را انتخاب کنیم فرکانس به دست خواهد آمد.



ω_1 (1)

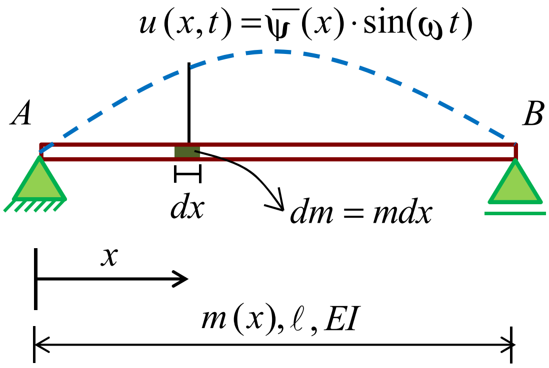
ω_2 (2)

اگر در روش ریلی برای تابع شکل، شکلی شبیه به شکل اول را انتخاب کنیم جوابی که برای فرکانس به دست می‌آوریم به ω_1 نزدیک‌تر است. همچنین اگر شکل انتخابی شبیه شکل دوم باشد جواب به دست آمده به ω_2 شبیه است.

Mathematical Model of SDOF Systems

V. روش ریلی (Rayleigh Method)

اگر تابع شکل $\psi(x)$ را همان شکل سازه تحت اثر بارهای ثقلی $\overline{\psi}(x)$ در نظر بگیریم؛ می‌توان انرژی پتانسیل ناشی از بارهای خارجی را به دست آورد چرا که با انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای داخلی معادل است.



$$dP = \frac{1}{2}(mgdx)[\overline{\psi}(x)\sin(\omega t)]$$

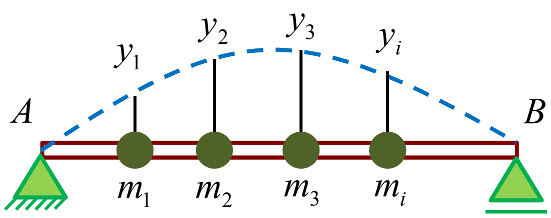
$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} mg\overline{\psi}(x)\sin(\omega t)dx \quad \underset{\sin(\omega t)=1}{\overset{@\ P_{\max}}{\Rightarrow}} \quad P_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} mg\overline{\psi}(x)dx \qquad (7)$$

$$(2),(5)\&(7) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^{\ell} mg\overline{\psi}(x)dx = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^{\ell} m\overline{\psi}^2dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = g\frac{\int_0^{\ell} m\overline{\psi}(x)dx}{\int_0^{\ell} m\overline{\psi}^2dx}} \qquad (8)$$

Mathematical Model of SDOF Systems

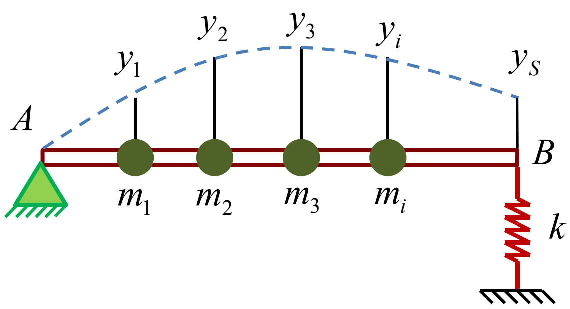
V. روش ریلی (Rayleigh Method)

می‌توان جرم گسترده را به n تا جرم متمرکز تبدیل کرد. در نتیجه رابطه (8) به صورت زیر خواهد شد:



$$\boxed{\omega^2 = g\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i y_i^2}} \qquad (9)$$

اگر در سیستم، فنر بدون وزن نیز وجود داشته باشد:

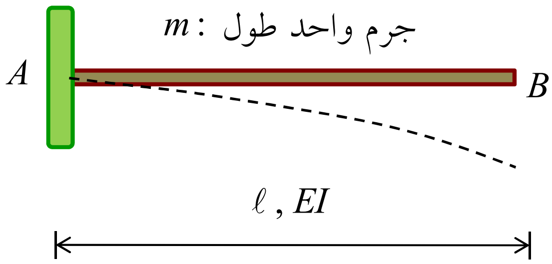


$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}ky_S^2 + \frac{1}{2}g\sum_{i=1}^{n} M_i y_i}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i y_i^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{ky_S^2 + g\sum_{i=1}^{n} M_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i y_i^2}}$$

Mathematical Model of SDOF Systems

V. روش ریلی (Rayleigh Method)

مثال ۵– فرکانس سیستم نشان داده شده را در دو حالت زیر تعیین نمایید:



$$a)\quad \psi(x)=\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$$

$$b)\quad \psi(x)=\alpha\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]$$

Mathematical Model of SDOF Systems

V. روش ریلی (Rayleigh Method)

پاسخ مثال ۵–

$$a)\quad \psi(x)=\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$$

$$\boxed{\omega=4.47\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}}$$

Mathematical Model of SDOF Systems

V. روش ریلی (Rayleigh Method)

پاسخ مثال ۵-

$$b)\quad \psi(x)=\alpha\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]$$

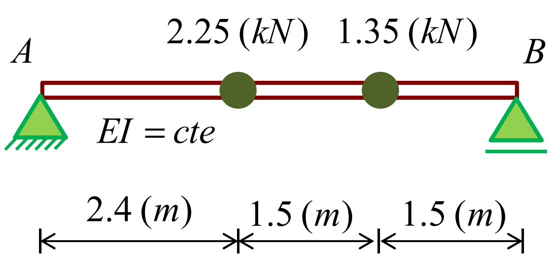
$$\boxed{\omega=3.56\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}}$$

جواب کوچکتر به مقدار حقیقی $\omega=3.52\sqrt{\dfrac{EI}{ml^4}}$ نزدیکتر است

Mathematical Model of SDOF Systems

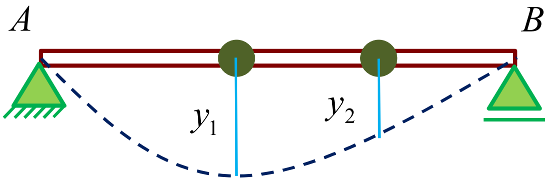
V. روش ریلی (Rayleigh Method)

مثال ۶- در سیستم نشان داده شده از وزن تیر صرف‌نظر کرده و با در نظر گرفتن تابع شکلی مطابق با تغییرشکل تیر تحت اثر بارهای ثقلی، فرکانس حرکت را با استفاده از روش ریلی به دست آورید.



V. روش ریلی (Rayleigh Method)

پاسخ مثال ۶- با استفاده از یکی از روش‌های تیر مزدوج، انرژی، کار مجازی و یا اصل برهم نهی تغییر شکل تیر به صورت زیر به دست می‌آید:



$$y_1 = \frac{10372}{EI} \quad , \quad y_2 = \frac{8139}{EI}$$

$$\omega = 0.319\sqrt{EI}$$