



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Dynamic of Structures

Single Degree of Freedom Systems: Response to Harmonic and Periodic Excitations

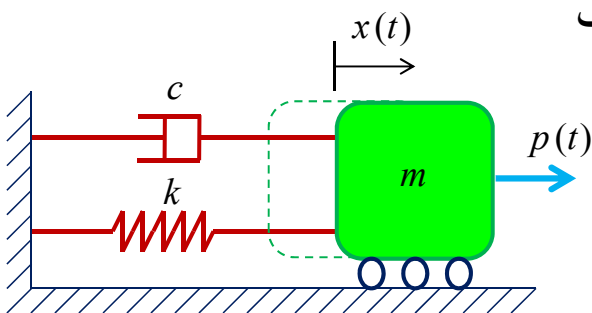
By: Kaveh Karami

Associate Prof. of Structural Engineering

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

I. ارتعاش اجباری - پاسخ به بارگذاری هارمونیک



معادله حرکت یک سیستم SDOF در حالت کلی به صورت زیر است:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p(t) \quad (1)$$

رابطه (1) یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) می باشد که جواب آن از دو بخش تشکیل می گردد.

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (2)$$

که در آن

$x_c(t)$: جواب عمومی (Complementary Solution) است که از نظر فیزیکی همان پاسخ نظیر ارتعاش آزاد

سیستم می باشد و از حل معادله $m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0$ به دست می آید.

$x_p(t)$: جواب خصوصی (Particular Solution) است که از نظر فیزیکی همان پاسخ نظیر ارتعاش اجباری

سیستم در اثر نیروی خارجی می باشد و از حل معادله های غیرهمگن با ضرایب ثابت به دست می آید.

یادآوری: حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین

در حالت کلی معادله خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad (I)$$

در روش ضریب‌های نامعین، فقط در چهار حالت زیر می‌توان جواب خصوصی معادله (I) را به دست آورد.

حالت اول: اگر در معادله (I)، $f(t)$ به فرم یک چند جمله‌ای از درجه n باشد. جواب خصوصی را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_p(t) = t^s (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0)$$

یک چند جمله‌ای کامل از درجه n

که در آن s تعداد ریشه‌های صفر معادله مفسر $(z^2 + az + b = 0)$ می‌باشد.

3

یادآوری: حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین

حالت دوم: اگر در معادله (I)، $f(t)$ به فرم $f(t) = Q(t)e^{pt}$ باشد؛ که در آن $Q(t)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است. آنگاه جواب خصوصی را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم:

$$x_p(t) = t^s e^{pt} (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0)$$

یک چند جمله‌ای کامل از درجه n

که در آن n درجه چندجمله‌ای $Q(t)$ و s تعداد ریشه‌های مساوی p معادله مفسر $(z^2 + az + b = 0)$ می‌باشد.

حالت سوم: اگر در معادله (I)، $f(t)$ به فرم $f(t) = Q_1(t)\cos(qt) + Q_2(t)\sin(qt)$ و $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ دو چند جمله‌ای باشند. آنگاه جواب خصوصی را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم:

$$x_p(t) = t^s [G_1(t)\cos(qt) + G_2(t)\sin(qt)]$$

که در آن s تعداد ریشه‌های مساوی $+iq$ معادله مفسر $(z^2 + az + b = 0)$ و $G_1(t)$ و $G_2(t)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه n می‌باشند که n بزرگترین درجه بین $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ است.

4

یادآوری: حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین

حالت چهارم: اگر در معادله (I)، $f(t)$ به فرم $f(t) = e^{pt}[Q_1(t)\cos(qt) + Q_2(t)\sin(qt)]$ و $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ دو چند جمله‌ای باشند. آنگاه جواب خصوصی را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم:

$$x_p(t) = t^s e^{pt} [G_1(t)\cos(qt) + G_2(t)\sin(qt)]$$

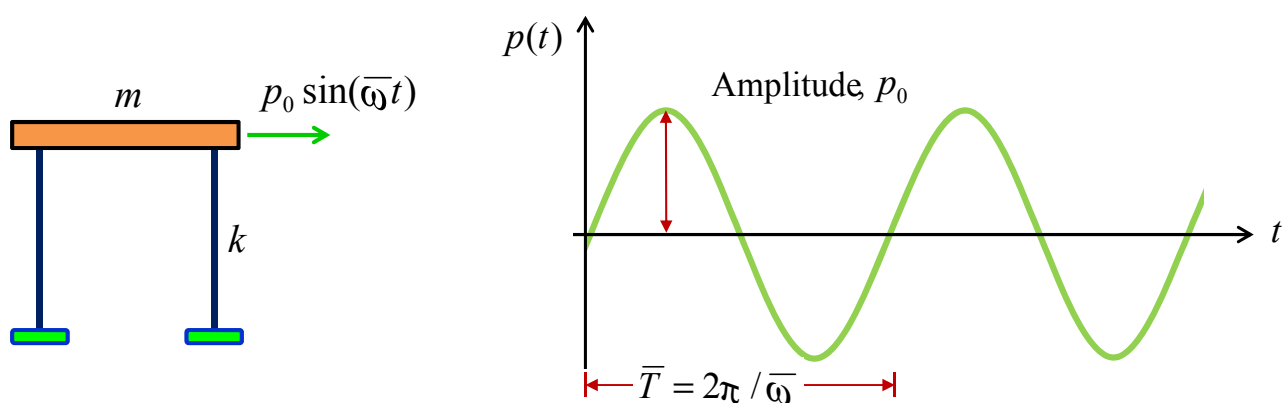
که در آن s تعداد ریشه‌های مساوی $p+iq$ معادله مفسر $(z^2 + az + b = 0)$ و $G_1(t)$ و $G_2(t)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه n می‌باشند که n بزرگترین درجه بین $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ است.

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

نیروهای سینوسی (کسینوسی)، مدل‌های مناسبی برای نیروهای واقعی موجود در طبیعت از قبیل زلزله، انفجار و موج دریا می‌باشد. زیرا به کمک سری‌های فوریه می‌توان این نیروها را به شکل سینوس و کسینوس نوشت.

در شکل نشان داده شده بارگذاری $p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t)$ بر سیستم SDOF بدون میرایی اعمال می‌شود؛ که در آن $\bar{\omega}$ فرکانس نیروی خارجی (تحریک خارجی) است و مستقل از فرکانس سازه ω می‌باشد.



نمودار نیروی هارمونیک سینوسی

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

معادله حرکت سیستم در رابطه (1) به صورت زیر نوشته می شود:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (3)$$

جواب عمومی رابطه (3) همان پاسخ ارتعاش آزاد یک

$$x_c = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4)$$

سیستم SDOF بدون میرایی است

جواب خصوصی رابطه (3) بر اساس حالت سوم حل معادله های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب های نامعین به دست می آید. معادله مفسر رابطه (3) به صورت زیر نوشته می شود:

$$z^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega, \quad \text{if } \bar{\omega} \neq \omega \Rightarrow s = 0$$

7

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

با توجه به فرم نیروی خارجی در رابطه (3) $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ برابر است با

$$f(t) = Q_1(t) \cos(qt) + Q_2(t) \sin(qt) \Rightarrow \begin{cases} Q_1(t) = 0 \\ Q_2(t) = p_0 \end{cases}$$
$$p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t)$$

با توجه به درجه $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ بزرگترین درجه آنها $n=0$ می باشد در نتیجه $G_1(t)$ و $G_2(t)$ مقدار ثابتی دارند و جواب خصوصی رابطه (3) به صورت زیر است

$$x_p(t) = G_1 \cos(\bar{\omega} t) + G_2 \sin(\bar{\omega} t) \quad (5)$$

جواب خصوصی در نظر گرفته شده در رابطه (5) و مشتقات آن باید در معادله حرکت رابطه (3) برقرار باشد.

$$(5) \Rightarrow \dot{x}_p(t) = \bar{\omega} [-G_1 \sin(\bar{\omega} t) + G_2 \cos(\bar{\omega} t)] \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow \ddot{x}_p(t) = -\bar{\omega}^2 [G_1 \cos(\bar{\omega} t) + G_2 \sin(\bar{\omega} t)] = -\bar{\omega}^2 x_p(t) \quad (7)$$

8

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

(3), (5) & (7) $\Rightarrow$

$$-m\bar{\omega}^2 [G_1 \cos(\bar{\omega} t) + G_2 \sin(\bar{\omega} t)] + k [G_1 \cos(\bar{\omega} t) + G_2 \sin(\bar{\omega} t)] = p_0 \sin(\bar{\omega} t)$$

$$\Rightarrow (-m\bar{\omega}^2 G_1 + kG_1) \cos(\bar{\omega} t) + (-m\bar{\omega}^2 G_2 + kG_2) \sin(\bar{\omega} t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (8)$$

باید ضریب‌های سینوس و کسینوس در دو طرف رابطه (8) یکسان باشد.

$$(8) \Rightarrow \begin{cases} -m\bar{\omega}^2 G_1 + kG_1 = 0 \\ -m\bar{\omega}^2 G_2 + kG_2 = p_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1 = 0 \\ G_2 = \frac{p_0}{-m\bar{\omega}^2 + k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad \beta = \bar{\omega} / \omega} \quad (9)$$

جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(5) \& (9) \Rightarrow \boxed{x_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\bar{\omega} t)} \quad (10) \quad \beta = \bar{\omega} / \omega : \text{نسبت فرکانس}$$

9

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

به کمک جواب‌های عمومی و خصوصی به دست آمده به ترتیب در روابط (4) و (10) جواب کلی معادله (1) به دست می‌آید:

$$(4) \& (10) \Rightarrow \boxed{x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\bar{\omega} t)} \quad (11)$$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب ثابت A و B تعیین می‌گردد:

$$@t=0 \quad x(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = A \cos(0) + B \sin(0) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(0) \Rightarrow \boxed{A = x_0} \quad (12)$$

$$@t=0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow \dot{x}_0 = -A\omega \sin(0) + B\omega \cos(0) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \bar{\omega} \cos(0) \Rightarrow \boxed{B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{p_0}{k} \frac{\beta}{1 - \beta^2}} \quad (13)$$

10

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

با جاگذاری ضرایب ثابت A و B در رابطه (11) خواهیم داشت:

$$(11), (12) \& (13) \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} - \frac{p_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\bar{\omega} t) \quad (14)$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF بدون میرایی ناشی از
بار سینوسی در حالت $\bar{\omega} \neq \omega_0$

پاسخ کلی (Total Response)
 $x(t) = x_T(t) + x_S(t)$

پاسخ گذرا (Transient Response)

$$x_T(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} - \frac{p_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \right) \sin(\omega_0 t)$$

وابسته به شرایط اولیه و نیروی خارجی

پاسخ دائمی (Steady state Response)

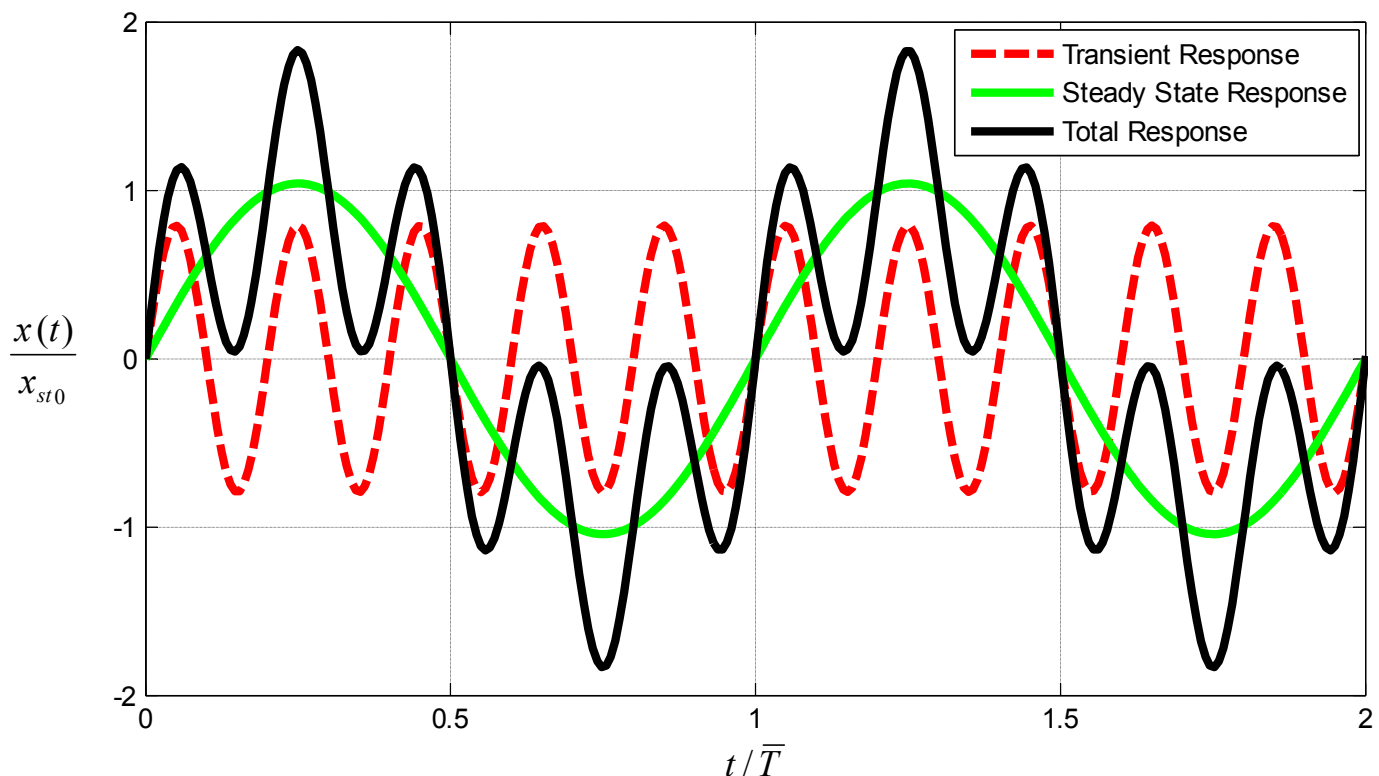
$$x_S(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\bar{\omega} t)$$

وابسته به نیروی خارجی

11

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 0.2$ و شرایط اولیه $\dot{x} = \omega_0 p_0 / k, x_0 = 0$

12

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

معادله حرکت سیستم در رابطه (3) دوباره اینجا آمده است

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (3)$$

جواب خصوصی رابطه (3) برای حالتی که $\bar{\omega} = \omega$ باشد به صورت زیر نوشته می شود:

$$z^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega, \quad \text{if } \bar{\omega} = \omega \Rightarrow s = 1$$

$$x_p(t) = G_1 t \cos(\omega t) + G_2 t \sin(\omega t) \quad (15)$$

جواب خصوصی در نظر گرفته شده در رابطه (15) و مشتقات آن باید در معادله حرکت رابطه (3) برقرار باشد.

$$(15) \Rightarrow \dot{x}_p(t) = [G_2 - G_1 \omega t] \sin(\omega t) + [G_1 + G_2 \omega t] \cos(\omega t) \quad (16)$$

$$(16) \Rightarrow \ddot{x}_p(t) = [-2G_1 \omega - G_2 \omega^2 t] \sin(\omega t) + [2G_2 \omega - G_1 \omega^2 t] \cos(\omega t) \quad (17)$$

13

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

(3), (15) & (17) $\Rightarrow$

$$[-2G_1 \omega m - G_2 \omega^2 m t + k G_2 t] \sin(\omega t) + [2G_2 \omega m - G_1 \omega^2 m t + k G_1 t] \cos(\omega t) = p_0 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow [-2G_1 \omega] \sin(\omega t) + [2G_2 \omega] \cos(\omega t) = \frac{p_0}{m} \sin(\omega t) \quad (18)$$

باید ضریب های سینوس و کسینوس در دو طرف رابطه (18) یکسان باشد.

$$(18) \Rightarrow \begin{aligned} 2G_2 \omega &= 0 & G_2 &= 0 \\ -2G_1 \omega &= \frac{p_0}{m} & G_1 &= -\frac{p_0}{2m\omega} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} G_2 &= 0 \\ G_1 &= -\frac{p_0}{2k} \omega \end{aligned}} \quad (19)$$

جواب خصوصی به صورت زیر به دست می آید:

$$(15) \& (19) \Rightarrow x_p(t) = -\frac{p_0}{2k} \omega t \cos(\omega t), \quad \bar{\omega} = \omega \quad (20)$$

14

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

به کمک جواب‌های عمومی و خصوصی به دست آمده به ترتیب در روابط (4) و (20) جواب کلی معادله (1) به دست می‌آید:

$$(4) \& (20) \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - \frac{p_0}{2k} \omega t \cos(\omega t) \quad (21)$$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب ثابت A و B تعیین می‌گردد:

$$@t=0 \quad x(0)=x_0 \Rightarrow x_0 = A \cos(0) + B \sin(0) - \frac{p_0}{2k} \omega (0) \cos(0) \Rightarrow A = x_0 \quad (22)$$

$$@t=0 \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \Rightarrow \dot{x}_0 = B\omega \cos(0) - \frac{p_0}{2k} \omega \cos(0) + \frac{p_0}{2k} \omega^2 (0) \sin(0) \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{p_0}{2k} \quad (23)$$

با جاگذاری ضرایب ثابت A و B در رابطه (21) خواهیم داشت:

$$(21), (22) \& (23) \Rightarrow x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{p_0}{2k} \right] \sin(\omega t) + \left[x_0 - \frac{p_0}{2k} \omega t \right] \cos(\omega t) \quad (24)$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF بدون میرایی ناشی از بار سینوسی در حالت $\bar{\omega} = \omega$

15

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

اگر از اثرات دینامیکی در معادله حرکت، رابطه (3)، صرف‌نظر شود پاسخ تغییرشکل استاتیکی در هر لحظه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) \Rightarrow x_{st}(t) = \frac{p_0}{k} \sin(\bar{\omega} t) \quad (25)$$

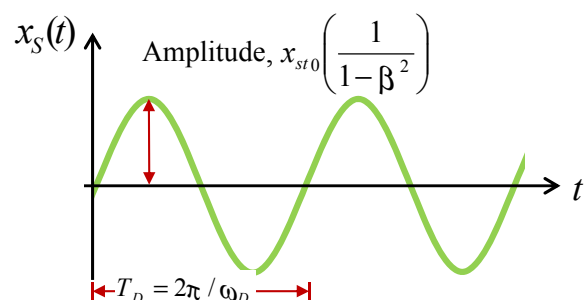
ماکزیمم تغییرشکل استاتیکی برابر است با

$$\text{if } \sin(\bar{\omega} t) = 1 \Rightarrow x_{st \max} = x_{st0} = \frac{p_0}{k} \quad (26)$$

با استفاده از (26) رابطه پاسخ دائمی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(14) \& (26) \Rightarrow$$

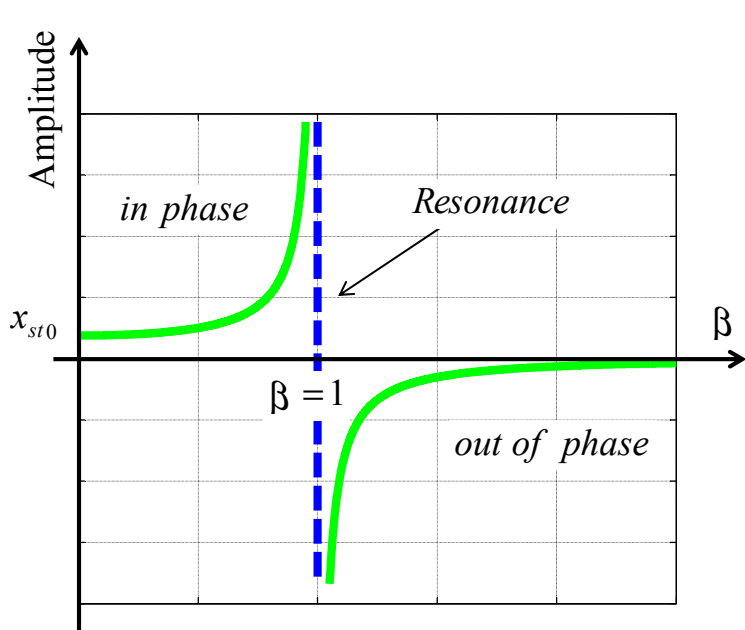
$$x_s(t) = x_{st0} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \sin(\bar{\omega} t) \quad (27)$$



16

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی



اگر $\omega > \bar{\omega}$ در این صورت

$$\beta < 1 \Rightarrow \text{Amplitude} > 0$$

این حالت را هم فاز (in phase) می نامند و نشان دهنده آن است که جهت جابجایی با جهت نیرو یکی است.

اگر $\omega < \bar{\omega}$ در این صورت

$$\beta > 1 \Rightarrow \text{Amplitude} < 0$$

این حالت را غیر هم فاز (out of phase) می نامند و نشان دهنده آن است که جهت جابجایی با جهت نیرو مخالف است.

تغییرات دامنه پاسخ دائمی برای نسبت فرکانس های مختلف

17

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت بدون میرایی

$$x_s(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (28) \quad \text{پاسخ دائمی در رابطه (27) را می توان به صورت برداری نوشت}$$

که در آن

$$\rho = \frac{x_{st0}}{|1 - \beta^2|} \quad \theta = \begin{cases} 0^\circ & \omega > \bar{\omega} \\ 180^\circ & \omega < \bar{\omega} \end{cases} \quad (29)$$

ρ : حداکثر جابجایی دینامیکی

θ : زاویه فاز (Phase angle)

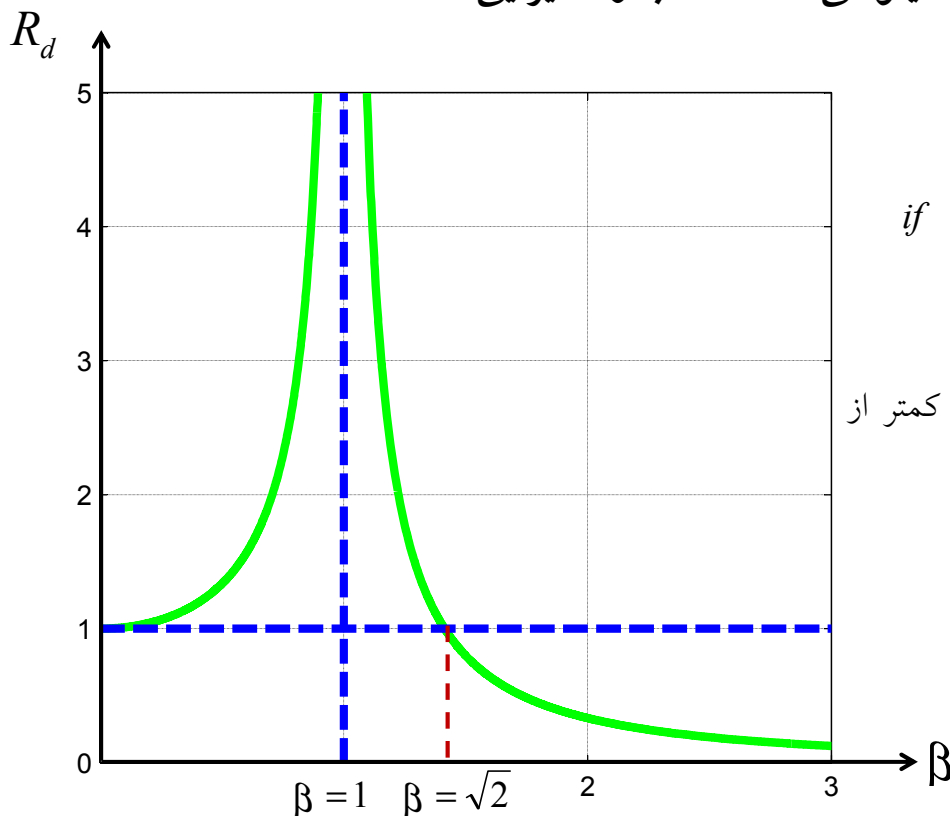
ضریب بزرگنمایی دینامیکی (Dynamic magnification factor)

$$R_d = \frac{\text{حداکثر جابجایی دینامیکی}}{\text{حداکثر جابجایی استاتیکی}} = \frac{\rho}{x_{st0}} \Rightarrow R_d = \frac{1}{|1 - \beta^2|} \quad (30) \quad \text{ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت بدون میرایی (بدون بُعد)}$$

18

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی



یعنی $\bar{\omega} > \sqrt{2} \omega$ ($\beta > \sqrt{2}$) if

$$\Rightarrow R_d < 1$$

یعنی حداکثر جابجایی دائمی دینامیکی کمتر از حداکثر جابجایی استاتیکی است

نمودار تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای نسبت فرکانس‌های مختلف

19

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

با اعمال شرایط اولیه صفر رابطه‌های (14) و (24) به صورت زیر می‌باشند:

$$@t=0 \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF بدون میرایی ناشی از بار سینوسی در دو حالت

$$(14) \Rightarrow x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} [\sin(\bar{\omega} t) - \beta \sin(\omega t)] \quad , \quad (\bar{\omega} \neq \omega) \quad (31)$$

$$(24) \Rightarrow x(t) = \frac{p_0}{2k} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)] \quad , \quad (\bar{\omega} = \omega) \quad (32)$$

20

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

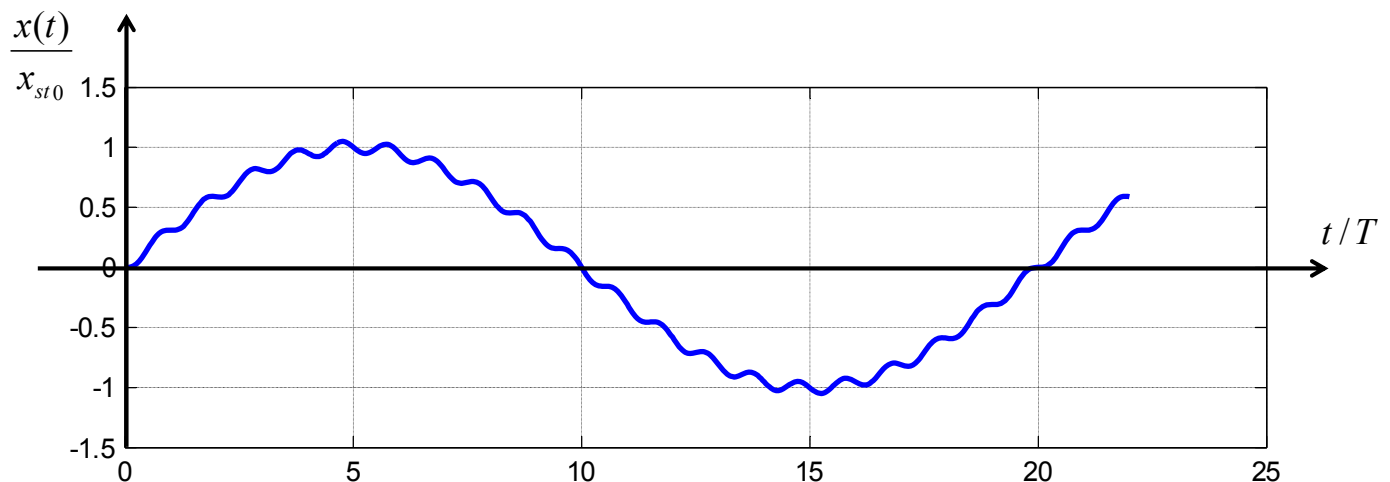
$$\bar{\omega} \ll \omega \Rightarrow \beta \ll 1 \Rightarrow R_d \rightarrow 1$$

حالت خاص I ($\bar{\omega} \ll \omega$)

حالتی که فرکانس بار بسیار کمتر از فرکانس سازه باشد (یعنی نیرو به آرامی تغییر کند)؛ در نتیجه حداکثر جابجایی

دینامیکی برابر است با حداکثر جابجایی استاتیکی

$$(31) \Rightarrow \frac{x(t)}{x_{st0}} \approx \sin\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{t}{T}\right) - \beta \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta \ll 1$ و شرایط اولیه صفر

21

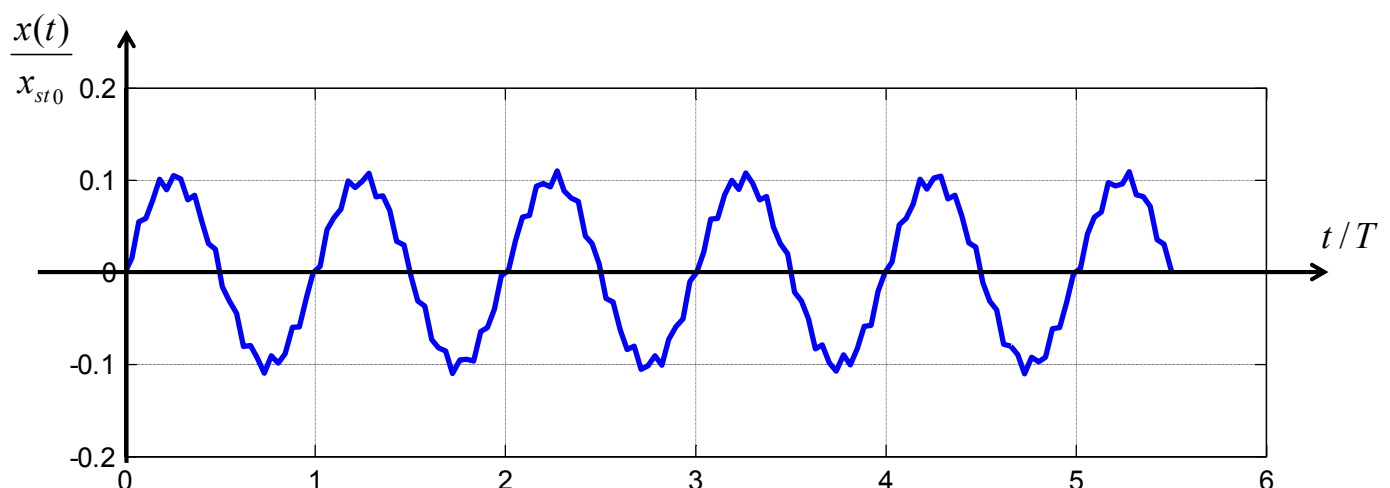
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

حالت خاص II ($\bar{\omega} \gg \omega$)

$$\bar{\omega} \gg \omega \Rightarrow \beta \rightarrow \infty \Rightarrow R_d \rightarrow 0$$

حالتی که فرکانس بار بسیار بزرگتر از فرکانس سازه باشد. در نتیجه تغییر شکل ارتعاشی برای نیروهای با سرعت نوسان زیاد، بسیار کوچک است.



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta \gg 1$ و شرایط اولیه صفر

22

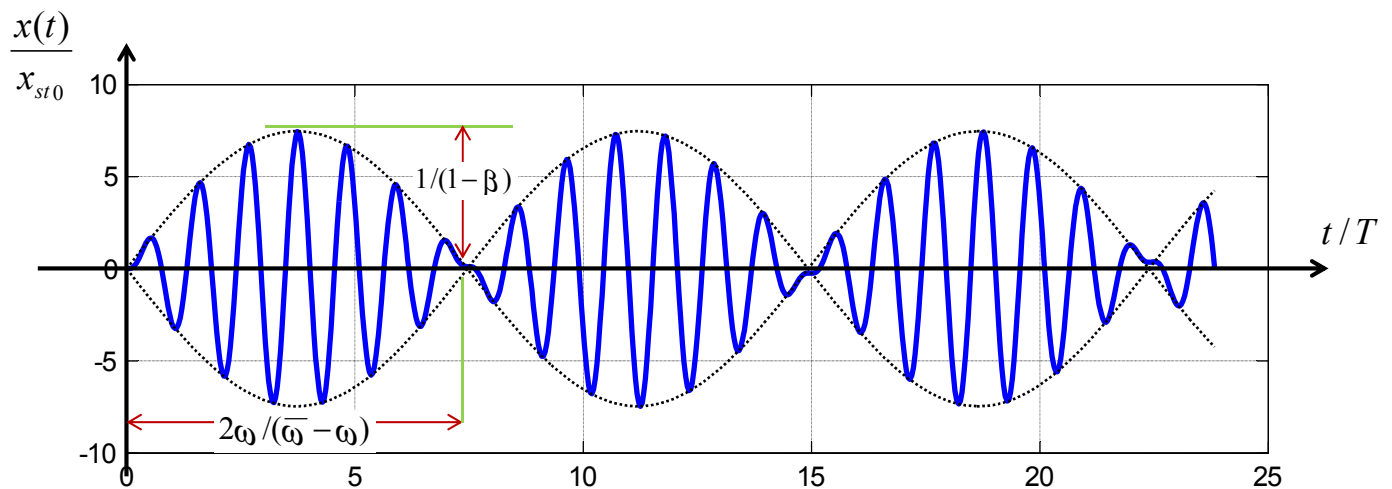
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

حالت خاص (III) $\bar{\omega} \rightarrow \omega$

$$\bar{\omega} \rightarrow \omega \quad (\text{for example } \bar{\omega} = 0.866\omega) \Rightarrow \beta \rightarrow 1 \Rightarrow R_d \uparrow$$

هم فاز شدن و غیرهم فاز شدن دو مولفه پاسخ در زمان های مختلف باعث ایجاد پدیده ضربان (Beating) می گردد.



پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta \rightarrow 1$ و شرایط اولیه صفر

23

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی

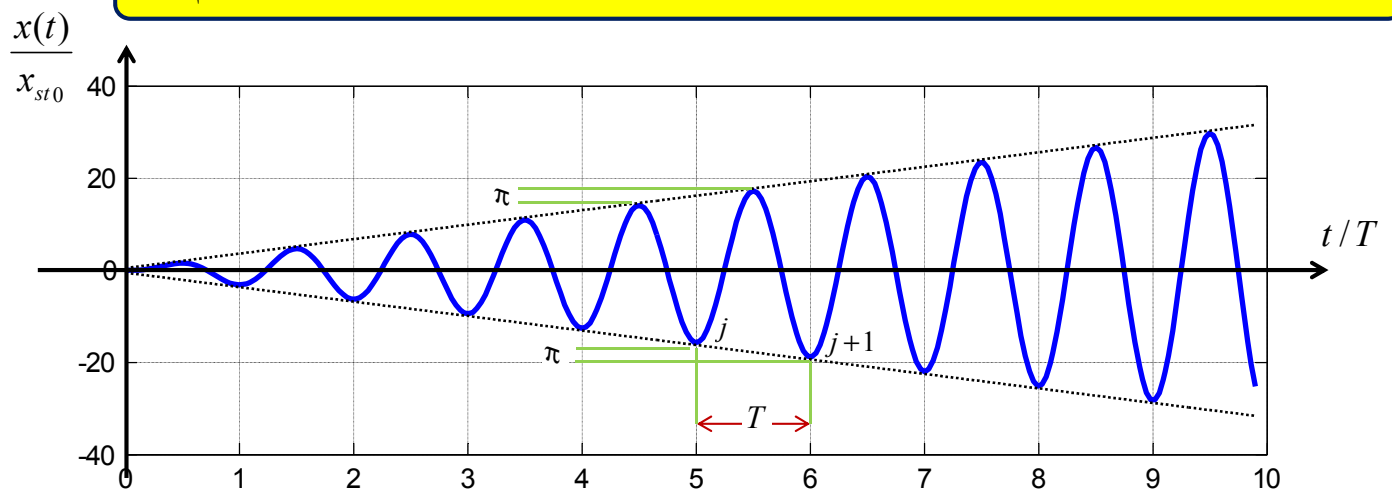
حالت خاص (IV) $\bar{\omega} = \omega$

$$\bar{\omega} = \omega \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow R_d \rightarrow \infty$$

یعنی حداکثر جابجایی دینامیکی خیلی بزرگتر از حداکثر جابجایی استاتیکی است

حالتی که فرکانس نیروی خارجی با فرکانس سازه برابر شود حالت تشدید یا همگامی (Resonance) رخ می دهد.

فرکانس تشدید (Frequency Resonant): فرکانس نیرویی است که در آن R_d مقدار ماکزیمم دارد.

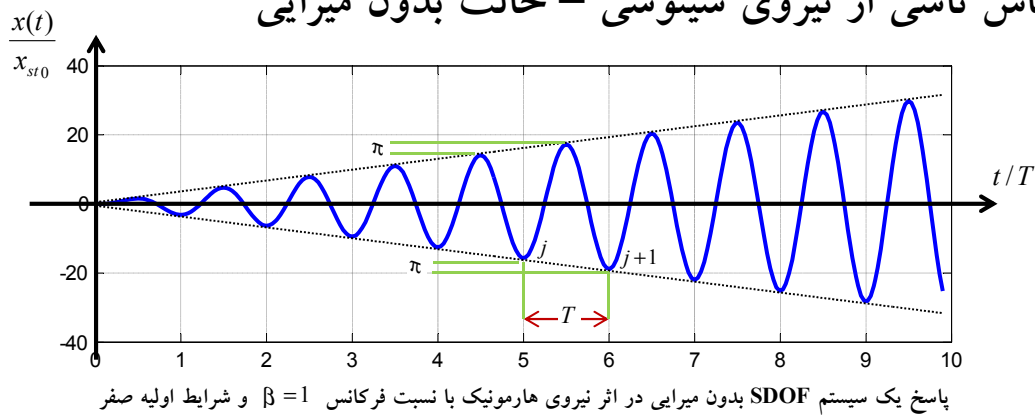


پاسخ یک سیستم SDOF بدون میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 1$ و شرایط اولیه صفر

24

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

II. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت بدون میرایی



$$\begin{aligned} @ \quad t = (j - \frac{1}{2})T &\Rightarrow x_{(j)} / x_{st0} = \pi \\ @ \quad t = (j + \frac{1}{2})T &\Rightarrow x_{(j+1)} / x_{st0} = \pi \end{aligned} \Rightarrow \frac{x_{(j+1)} - x_{(j)}}{x_{st0}} = \pi$$

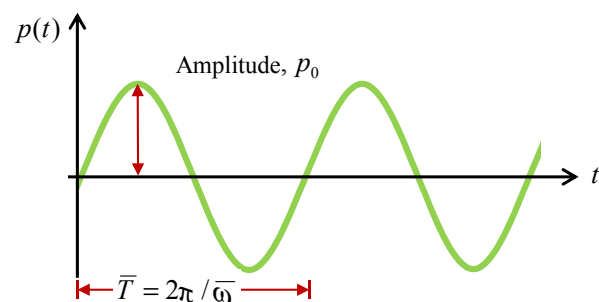
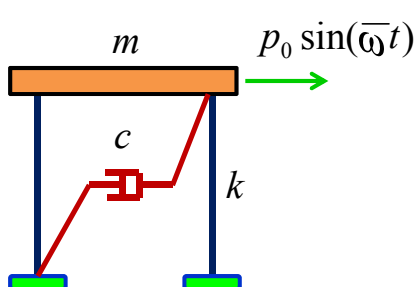
برای سیستم‌های نامیرا فرکانس تشدید برابر با ω است به طوری که در این فرکانس مقدار R_d نامحدود می‌باشد. اما در واقعیت تغییر شکل ارتعاشی سریعا نامحدود نمی‌شود بلکه به آرامی نامحدود می‌گردد. همچنین نتایج مربوط به تشدید در حالت واقعی زمانی برقرار است که سازه در ناحیه خطی رفتار نماید زیرا

$$in \text{ nonlinear} \Rightarrow k \downarrow \Rightarrow \omega \neq cte \Rightarrow \bar{\omega} \neq \omega$$

25

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی



نمودار نیروی هارمونیک سینوسی

معادله حرکت یک سیستم SDOF با میرایی از رابطه کلی (1) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (33)$$

رابطه (33) یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد که جواب آن از دو بخش تشکیل می‌گردد.

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

26

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

جواب عمومی رابطه (33) همان پاسخ ارتعاش آزاد یک

$$x_c = e^{-\xi \omega_D t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] \quad (34)$$

سیستم SDOF با میرایی است

جواب خصوصی رابطه (33) بر اساس حالت سوم حل معادله‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش ضریب‌های نامعین به دست می‌آید. معادله مفسر رابطه (33) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$z^2 + 2\xi \omega z + \omega^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -\xi \omega \pm i \omega_D, \quad \text{if } \bar{\omega} \neq \omega_D \Rightarrow s = 0$$

جواب خصوصی رابطه (33) برای حالتی که $\bar{\omega} \neq \omega_D$ باشد شبیه رابطه (5) است:

$$x_p(t) = G_1 \cos(\bar{\omega} t) + G_2 \sin(\bar{\omega} t) \quad (5)$$

27

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

جواب خصوصی در رابطه (5) و مشتقات آن (6) و (7) باید در معادله حرکت رابطه (33) برقرار باشد.

$$(5), (6), (7) \& (33) \Rightarrow$$

$$[-m \bar{\omega}^2 G_1 + c \bar{\omega} G_2 + k G_1] \cos(\bar{\omega} t) + [-m \bar{\omega}^2 G_2 - c \bar{\omega} G_1 + k G_2] \sin(\bar{\omega} t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (35)$$

باید ضریب‌های سینوس و کسینوس در دو طرف رابطه (35) یکسان باشد.

$$(35) \Rightarrow \begin{aligned} (k - m \bar{\omega}^2) G_1 + c \bar{\omega} G_2 &= 0 \\ -c \bar{\omega} G_1 + (k - m \bar{\omega}^2) G_2 &= p_0 \end{aligned} \quad \text{if } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}, \frac{c}{k} = \frac{2\xi}{\omega}, \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \quad (36)$$

$$G_1 = \frac{-2\xi\beta}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \frac{p_0}{k}$$

$$G_2 = \frac{1-\beta^2}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \frac{p_0}{k}$$

جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(5) \& (36) \Rightarrow x_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} [(1-\beta^2) \sin(\bar{\omega} t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega} t)] \quad (37)$$

28

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

به کمک جواب‌های عمومی و خصوصی به دست آمده به ترتیب در روابط (34) و (37) جواب کلی معادله (33) به دست می‌آید:

(34) & (37) $\Rightarrow$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_D t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} [(1-\beta^2) \sin(\bar{\omega} t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega} t)] \quad (38)$$

پاسخ ارتعاش سیستم SDOF با میرایی ناشی از بار سینوسی در حالت $\bar{\omega} \neq \omega_D$

با اعمال شرایط اولیه ضرایب ثابت A و B تعیین می‌گردد:

$$@t=0 \quad x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0 + \frac{2\xi\beta}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \frac{p_0}{k} \quad (39)$$

$$@t=0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0 - \xi\omega_D x_0}{\omega_D} + \frac{p_0}{k\omega_D} \frac{2\xi^2\beta\omega_D - (1-\beta^2)\bar{\omega}}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}$$

29

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ کلی (Total Response)

$$x(t) = x_T(t) + x_S(t)$$

پاسخ گذرا (Transient Response)

$$x_T(t) = e^{-\xi\omega_D t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)]$$

(وابسته به شرایط اولیه و نیروی خارجی)

دامنه آن به دلیل عامل میرایی در اثر گذر زمان کاهش می‌یابد. به همین دلیل به آن پاسخ گذرا گفته می‌شود.

پاسخ دائمی (Steady State Response)

$$x_S(t) = \frac{p_0}{k} \frac{(1-\beta^2) \sin(\bar{\omega} t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega} t)}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2}$$

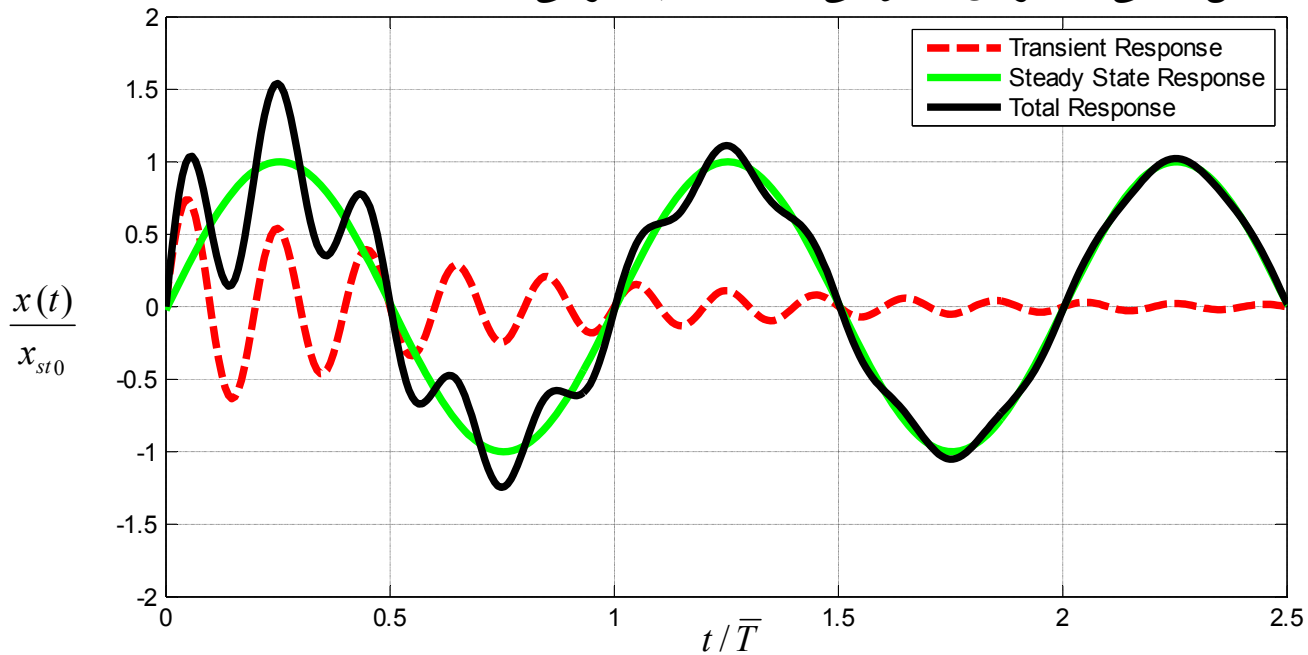
(وابسته به نیروی خارجی)

تا زمانی که نیرو بر سازه اعمال گردد پاسخ دائمی به صورت ثابت با زمان جریان خواهد داشت.

30

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی



پاسخ یک سیستم SDOF با میرایی در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 0.2$ و شرایط اولیه $\dot{x} = \omega_0 p_0 / k, x_0 = 0$

در خیلی از کارهای عملی فقط قسمت دائم جواب را در نظر می‌گیرند. برای این منظور زمان کافی باید موجود باشد تا قسمت گذرا ناپدید شود. (در حدود ۷ ثانیه جواب‌های گذرا کوچک است)

31

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

$$x_s(t) = \frac{p_0}{k} \frac{(1 - \beta^2) \sin(\bar{\omega} t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega} t)}{(2\xi\beta)^2 + (1 - \beta^2)^2}$$

قسمت دائم جواب را می‌توان به صورت برداری نوشت:

$$x_s(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (40)$$

که در آن

$$\rho = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} \Rightarrow \rho = \frac{p_0}{k} \left[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (41)$$

ρ : حداکثر جابجایی دینامیکی

θ : زاویه فاز (Phase angle)

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right) \quad (42)$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی (Dynamic magnification factor)

$$R_d = \frac{\text{حداکثر جابجایی دینامیکی}}{\text{حداکثر جابجایی استاتیکی}} = \frac{\rho}{x_{st0}} \Rightarrow R_d = \left[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (43)$$

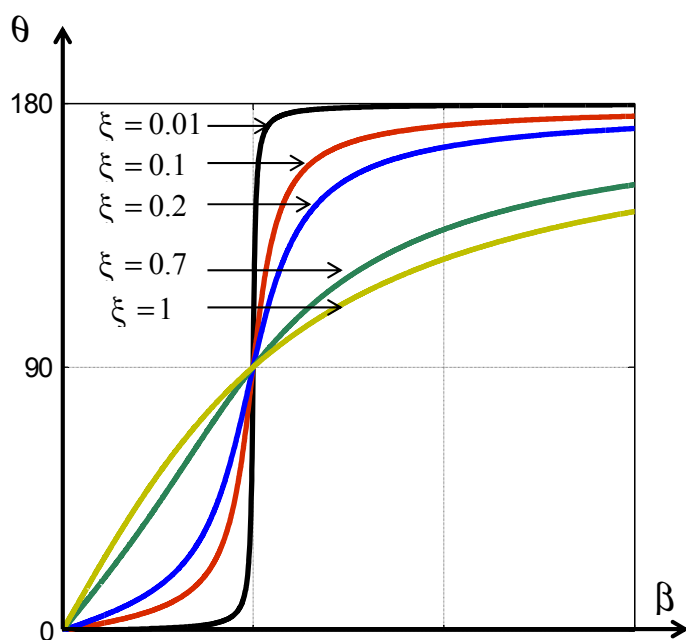
ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت با میرایی (بدون بُعد)

32

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

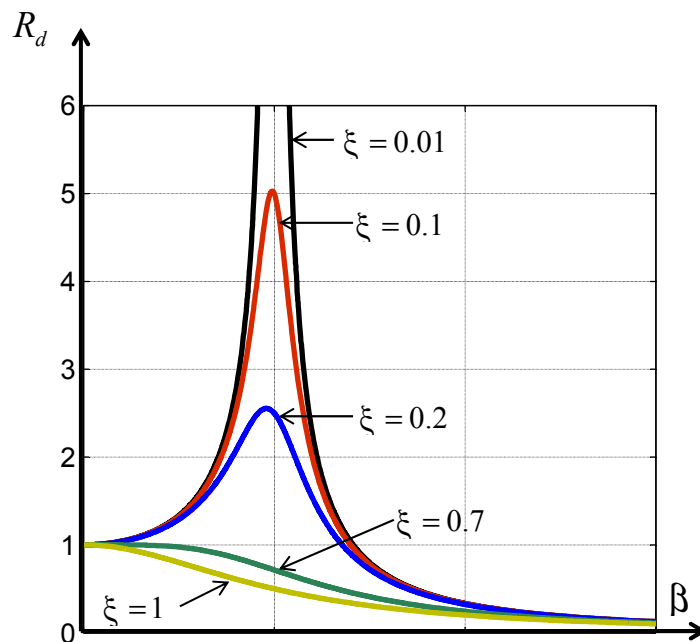
III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ضریب بزرگنمایی دینامیکی و زاویه فاز بستگی به دو پارامتر ضریب میرایی و نسبت فرکانس دارند.



نمودار نسبت فرکانس - زاویه فاز یک سیستم SDOF با

میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک



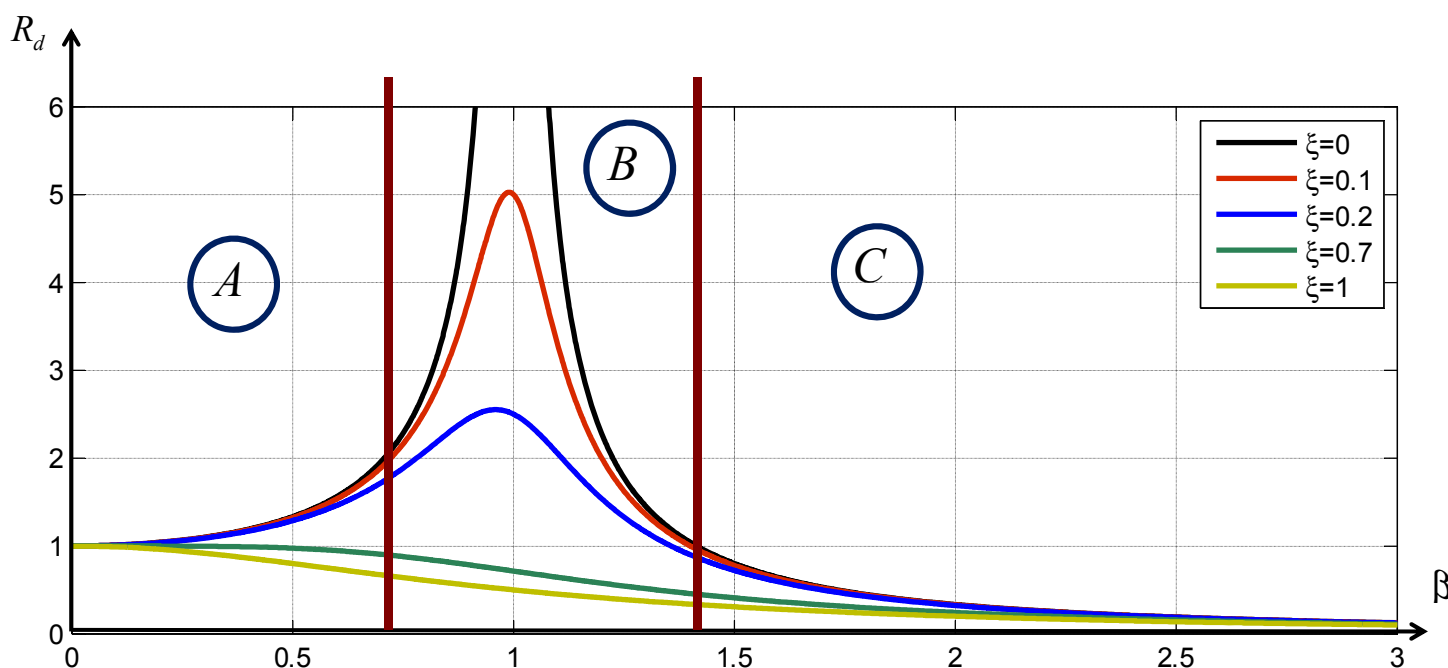
نمودار نسبت فرکانس - ضریب بزرگنمایی یک سیستم

SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک

33

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی



ناحیه بندی نمودار نسبت فرکانس - ضریب بزرگنمایی یک سیستم SDOF با میرایی‌های متفاوت در اثر نیروی هارمونیک:

A ناحیه سخت، B ناحیه تشدید و C ناحیه نرم.

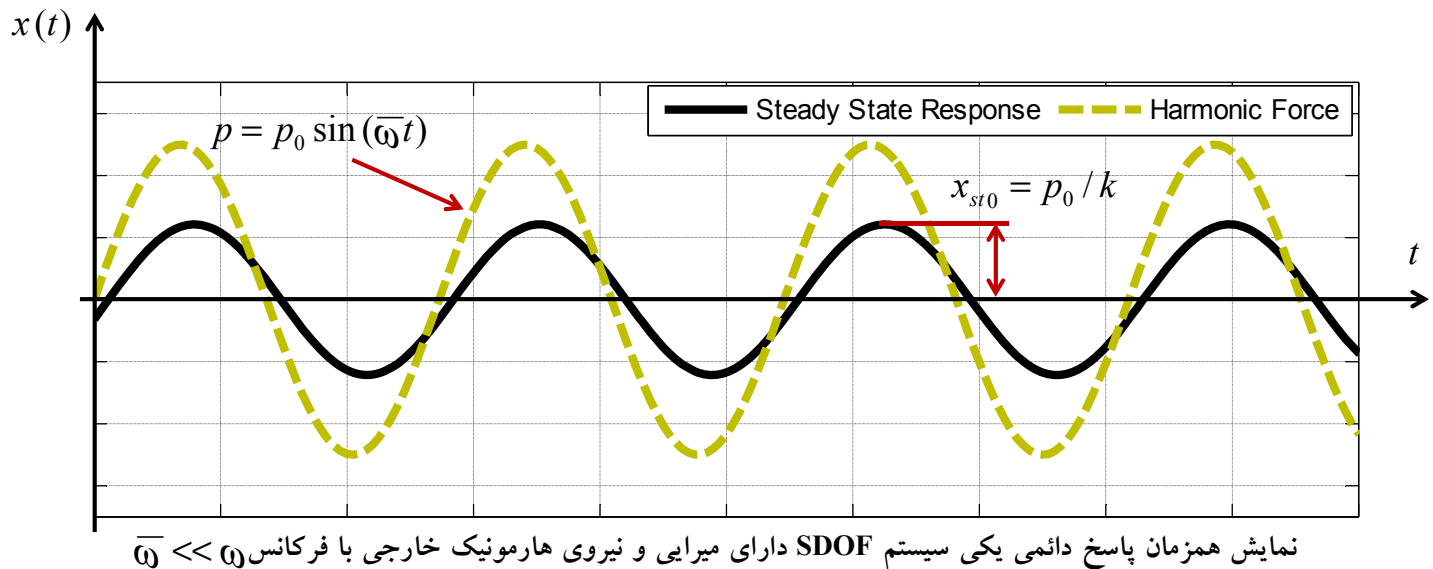
34

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ناحیه A: در ناحیه سخت فرکانس محرک کمتر از فرکانس سیستم می‌باشد. در واقع سازه آنچنان سخت است که اگر آن را از پایه با شتاب α حرکت دهیم؛ قسمت بالای سازه نیز با همان شتاب α حرکت می‌کند. در این حالت اثر رفتار دینامیکی قابل اغماض بوده و جابجایی استاتیکی و دینامیکی به هم نزدیک می‌باشند و ضریب بزرگ نمایی دینامیکی اندکی بزرگتر از یک است.

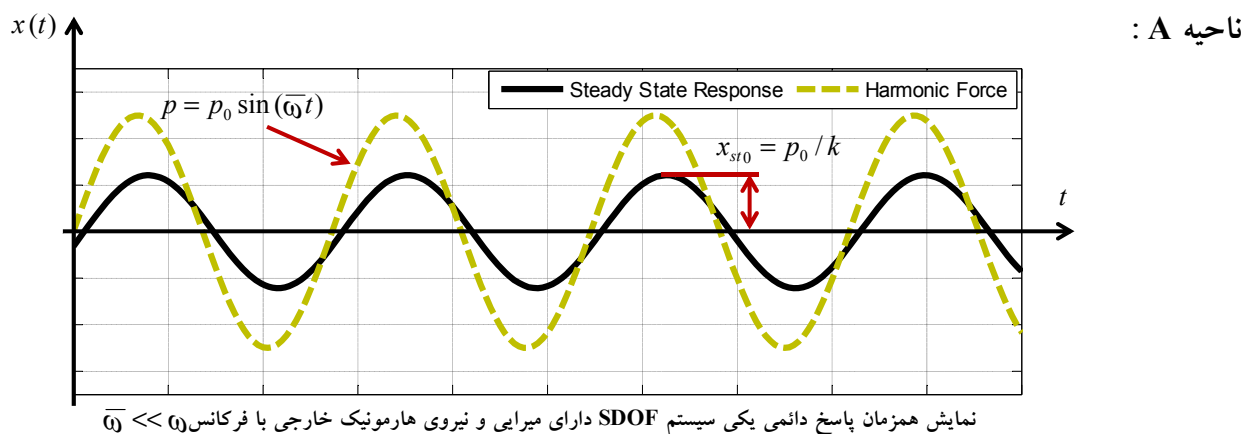
ارتعاش هم فاز $\text{if } \bar{\omega} \ll \omega \Rightarrow \beta \ll 1 \Rightarrow R_d \rightarrow 1 \ \& \ \theta \rightarrow 0$



35

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی



ناحیه A:

نکات مهم در ناحیه A:

- تغییر مکان با نیرو هم فاز است.
- دامنه تغییر مکان به سختی k بستگی دارد.
- رفتار تحت کنترل سختی (Stiffness Control) می‌باشد. بهتر است سازه سخت طراحی گردد.
- بار سینوسی وارده به آرامی اعمال شده $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \rightarrow 0$ و نظیر یک بار استاتیکی عمل می‌کند.

36

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

ناحیه B: در ناحیه تشدید به علت نزدیک بودن فرکانس محرک و فرکانس طبیعی سازه، حالت تشدید اتفاق می‌افتد و هنگامی که فرکانس‌ها با هم برابر باشند. مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت تشدید برابر است با:

$$(43) \quad \beta=1 \Rightarrow R_{d\text{res}} = \frac{1}{2\xi} \quad (44)$$

مقدار ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی برابر است با:

$$\frac{dR_d}{d\beta} = 0 \quad (43) \Rightarrow \beta_{\text{peak}} = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow R_{d\text{max}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (45)$$

در سیستم‌های با ضریب میرایی کم، مقدار ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی همان مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت تشدید است:

$$\sqrt{1-\xi^2} \approx 1 \Rightarrow R_{d\text{max}} \approx R_{d\text{res}} = \frac{1}{2\xi}$$

37

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی – حالت با میرایی

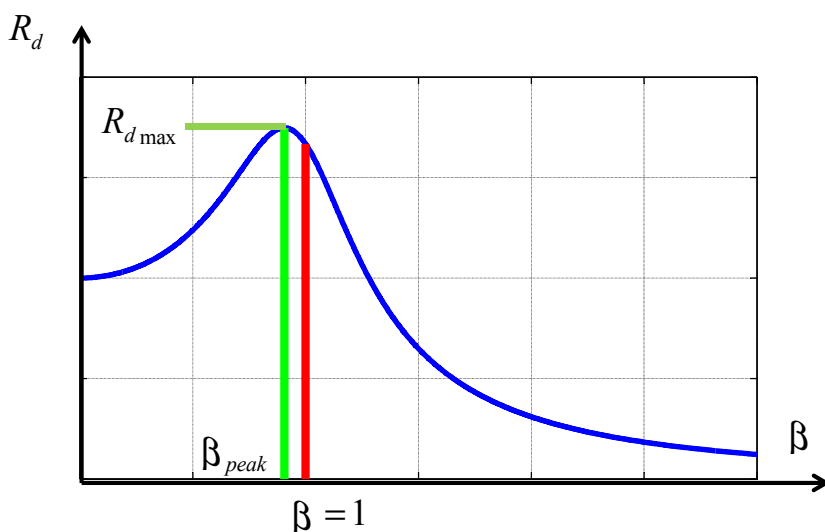
ناحیه B:

برای مثال برای یک سازه فولادی با ضریب میرایی 0.01 ضریب بزرگنمایی دینامیکی در حالت تشدید

برابر است با

$$R_{d\text{Resonance}} = \frac{1}{2(0.01)} = 50$$

یعنی اگر سازه تحت اثر یک نیروی معین در حالت استاتیکی 1 cm جابجایی داشته باشد؛ در حالت تشدید 50 cm جابجایی دارد. بنابراین ناحیه تشدید از اهمیت زیادی برخوردار است و نقاط مجاور نقطه تشدید هم از ضریب بزرگنمایی دینامیکی بالایی برخوردار می‌باشند.



مقایسه ضریب بزرگنمایی دینامیکی بین حالت ماکزیمم و حالت تشدید

38

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ناحیه B :

اگر کل جواب (دائم و گذرا) را در حالت تشدید و شرایط اولیه صفر در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\text{for } x_0 = \dot{x}_0 = 0 \quad \& \quad \bar{\omega} = \omega \quad \stackrel{(38)}{\Rightarrow}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{p_0}{k} \left(e^{-\xi\omega t} [\cos(\omega_D t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t)] - [\cos(\omega t)] \right) \quad (46)$$

در سیستم‌های با ضریب میرایی کم می‌توان از اثر عبارت سینوسی در رابطه (46) صرف نظر کرده و $\omega_D \approx \omega$ در نتیجه :

$$(46) \Rightarrow \underbrace{x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos(\omega t)}_{\text{منحنی پوش}} \quad \text{or} \quad \underbrace{x(t) = \frac{p_0}{c\omega} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos(\omega t)}_{\text{منحنی پوش}} \quad (47)$$

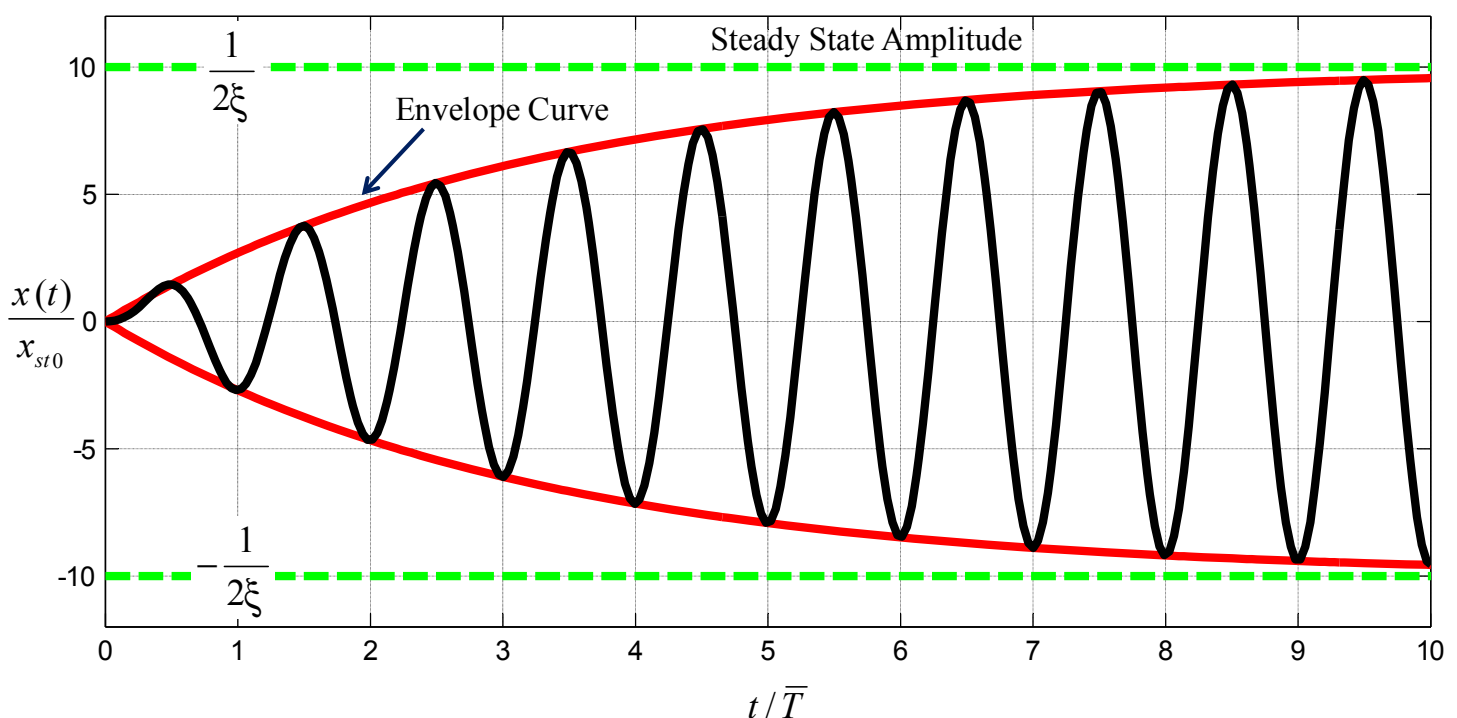
براساس رابطه (47) در ناحیه B میرایی تعیین کننده است و بیشترین نقش را در کاهش پاسخ دینامیکی دارد. بنابراین در مهندسی سازه، شیوه‌های افزایش ظرفیت جذب و استهلاک انرژی ارتعاشی از اهمیت خاصی برخوردار است.

39

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ناحیه B :



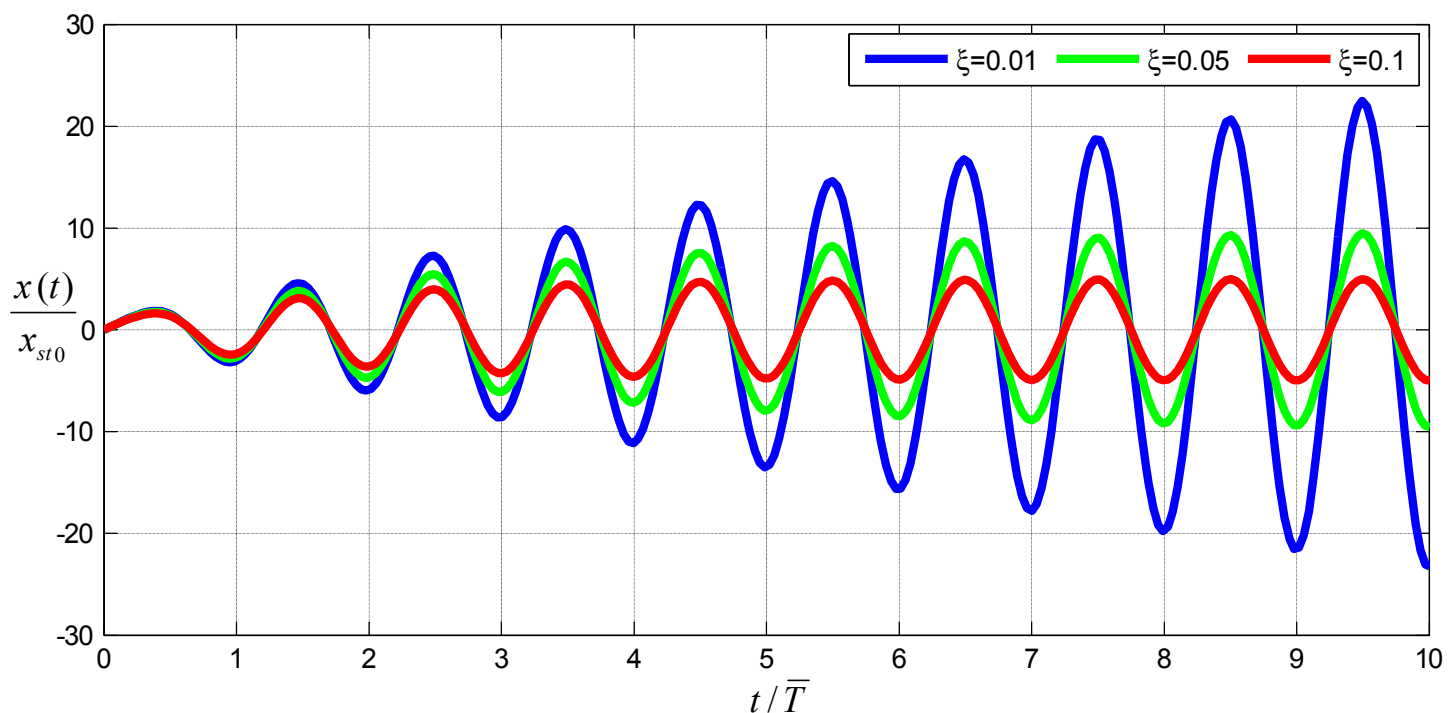
پاسخ یک سیستم SDOF با میرایی 0.05 در اثر نیروی هارمونیک با نسبت فرکانس $\beta = 1$ و شرایط اولیه $\dot{x} = x_0 = 0$

40

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ناحیه B :



پاسخ سه سیستم SDOF با میرایی‌های 0.01، 0.05 و 0.1 در اثر نیروی هارمونیک با نسبت

فرکانس $\beta = 1$ و شرایط اولیه $\dot{x} = \omega_0 p_0 / k, x_0 = 0$

41

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ناحیه B :

محاسبه ز آمین دامنه بعد از j بار دروره تناوب.

$$@ \quad t = jT \quad \stackrel{(47)}{\Rightarrow} \quad x(jT) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi \frac{2\pi}{T} jT} - 1) \cos\left(\frac{2\pi}{T} jT\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(jT) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} (e^{-2\pi\xi j} - 1)} \quad (48)$$

$$\rho_{res} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \Rightarrow$$

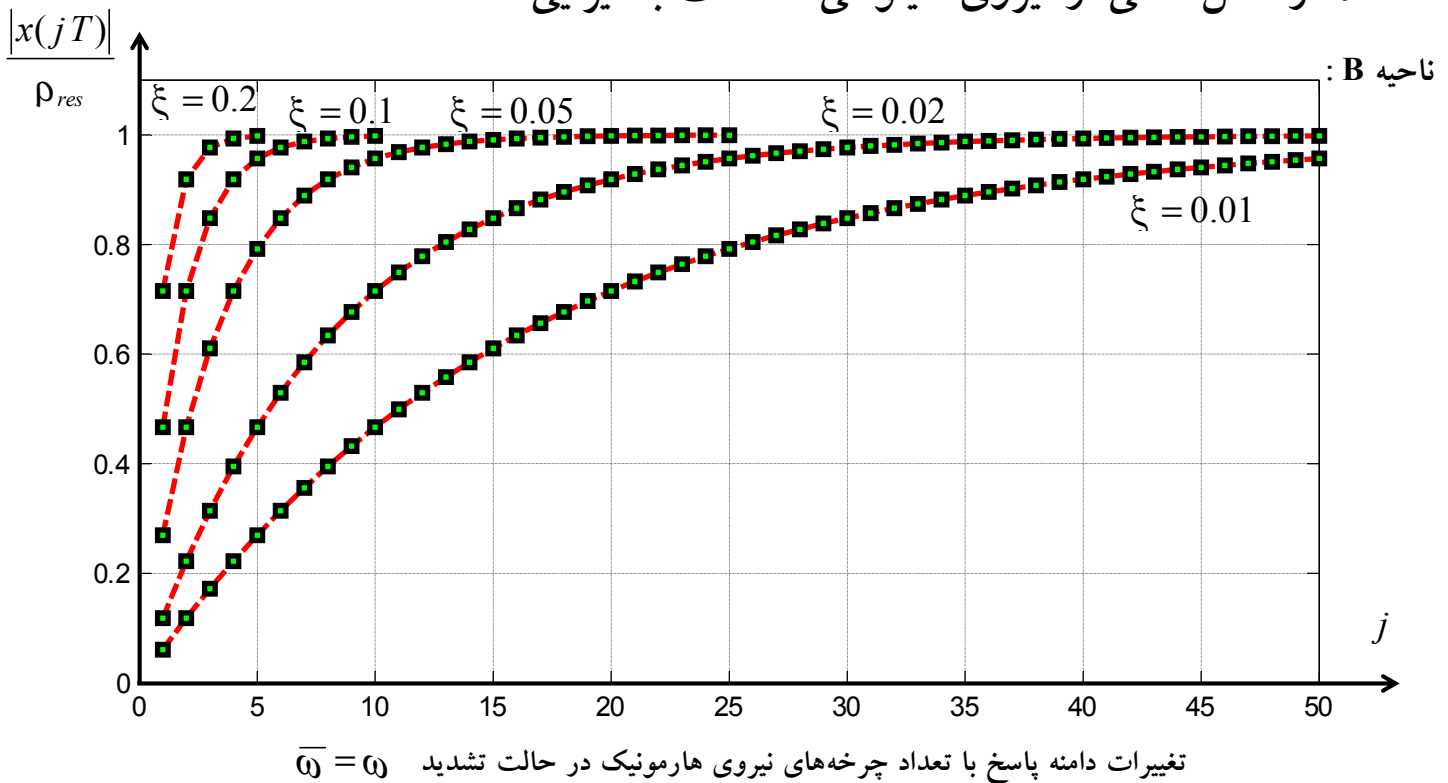
$$(48) \Rightarrow \boxed{\frac{|x(jT)|}{\rho_{res}} = 1 - e^{-2\pi\xi j}} \quad (49) \quad \text{که در زمان زیاد این نسبت به سمت یک میل می‌کند.}$$

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که در سیستم‌های با ضریب میرایی متفاوت بعد از چند سیکل حرکت رفت و برگشتی در حالت تشدید به دامنه ارتعاش ماکزیمم می‌رسیم.

42

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی



نمودار نشان می‌دهد که در سیستم‌های با میرایی زیاد، با تعداد سیکل‌های کمتر بارگذاری، دامنه پاسخ

به سمت مقدار ماکزیمم میل می‌کند و بر عکس.

43

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ناحیه C : با افزایش فرکانس نیروی محرک، وارد ناحیه نرم می‌شویم؛ جایی که بارگذاری آنقدر سریع است که سازه آن را حس نمی‌کند. به عبارت دیگر، همین که سازه شروع به واکنش نماید و جابجایی آغاز شود جهت نیرو عوض شده و حرکت معکوس می‌گردد. در نتیجه جابجایی از حالت استاتیکی کمتر می‌شود. به همین علت است که سازه‌هایی که زمان تناوب بالایی دارند (یعنی ω آن‌ها کوچک است) شتاب‌های حاصل از زلزله را که مقدارشان بزرگ اما زمان تناوب آن‌ها کم باشد (یعنی $\bar{\omega}$ بزرگ است) حس نمی‌کنند. زیرا سرعت بارگذاری آن چنان زیاد است که پاسخ در ناحیه نرم قرار می‌گیرد.

ارتعاش غیر هم فاز $\text{if } \bar{\omega} \gg \omega \Rightarrow \beta \gg 1 \Rightarrow R_d \rightarrow 0 \ \& \ \theta \rightarrow \pi$

$$(40) \Rightarrow x_s(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

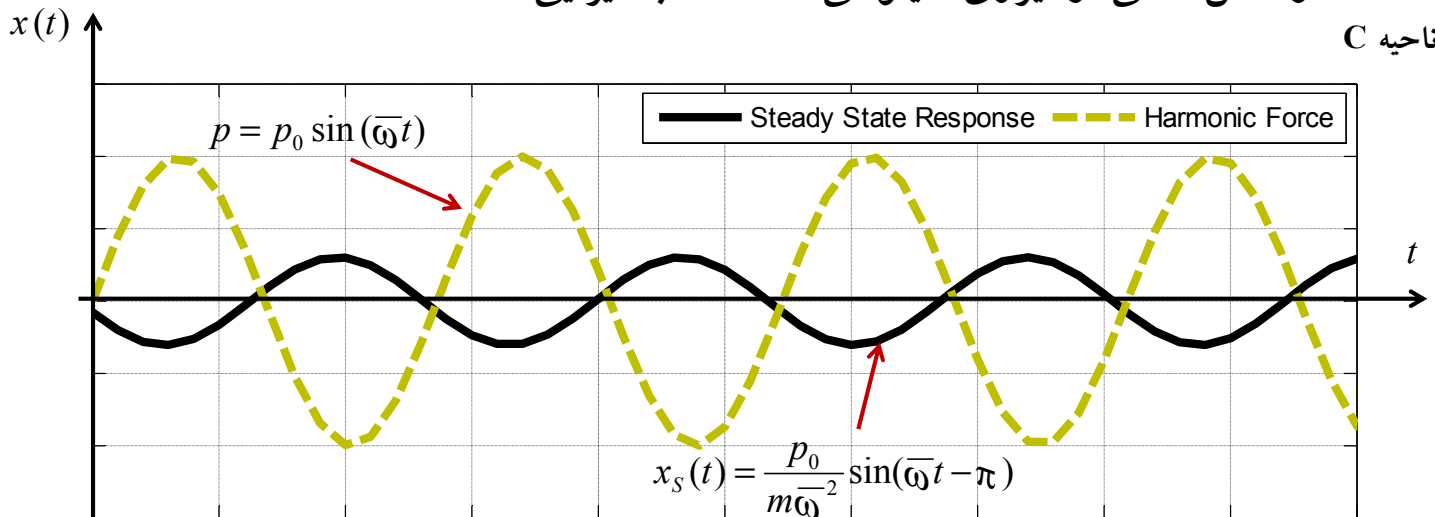
$$= \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\beta^4 - 2\beta^2 + 1 + 4\xi^2\beta^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \approx \frac{p_0}{k} \frac{1}{\beta^2} \sin(\bar{\omega}t - \pi) \Rightarrow x_s(t) = \frac{p_0}{m\bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega}t - \pi) \quad (49)$$

44

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

ناحیه C



نمایش همزمان پاسخ دائمی یکی سیستم SDOF دارای میرایی و نیروی هارمونیک خارجی با فرکانس $\omega \gg \omega_n$

نکات مهم در ناحیه C :

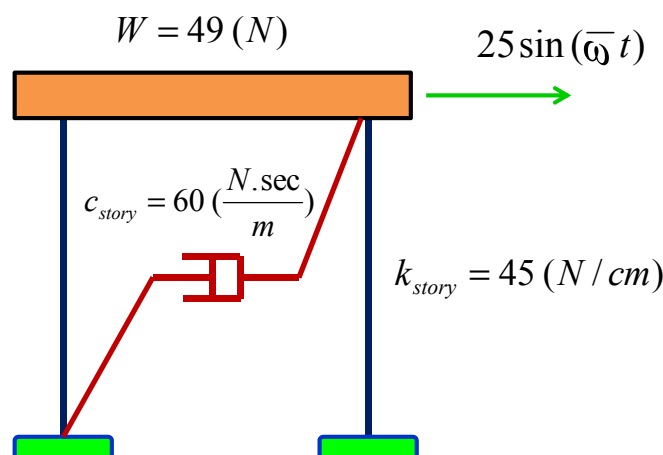
- تغییر مکان با نیرو 180 درجه اختلاف فاز دارند (در خلاف جهت هم می باشند).
- دامنه تغییر مکان به جرم (اینرسی) $\frac{p_0}{m\omega}$ بستگی دارد.
- رفتار تحت کنترل اینرسی (Inertia Control) می باشد. بنابراین بهتر است سازه سنگین طراحی گردد.

45

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

مثال-۱: سیستم SDOF نشان داده شده در شکل تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد. الف) پاسخ دینامیکی ماکزیمم و همچنین پاسخ دینامیکی ماکزیمم متناظر با حالت تشدید را محاسبه نمایید. ب) پاسخ دینامیکی ماکزیمم را در حالتی که $\omega = 15 \text{ (rad/sec)}$ را تعیین کنید.



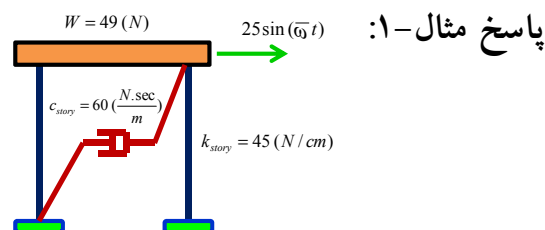
46

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

$$\omega_0 = 30 \text{ (rad / s)}$$

$$\xi = 0.2$$



$$R_{d \max} = 2.552$$

$$\rho_{\max} = 1.418 \times 10^{-2} \text{ (m)} \Rightarrow \rho_{\max} = 1.418 \text{ (cm)}$$

$$R_{d \text{ Resonance}} = 2.5$$

$$\rho_{\text{res}} = 1.389 \times 10^{-2} \text{ (m)} \Rightarrow \rho_{\text{res}} = 1.389 \text{ (cm)}$$

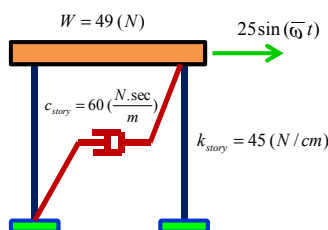
چون ضریب میرایی 20 درصد قابل ملاحظه است ضریب بزرگنمایی در دو حالت آنچنان بزرگ نمی باشد.

47

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ مثال-۱:



$$\beta = 0.5$$

$$\Rightarrow \rho = 0.72 \times 10^{-2} \text{ (m)} \Rightarrow \rho = 0.72 \text{ (cm)}$$

48

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

مثال-۲: تیر بدون وزن AB در اثر لرزش ناشی از یک دستگاه موتور دوار در حال ارتعاش می‌باشد. وزن کل این موتور W است. جرم m با خروج از مرکزیت e جهت تنظیم حرکت موتور بر روی آن نصب شده است. دامنه ارتعاش تیر را با در نظر گرفتن قسمت دایم پاسخ سیستم به دست آورید.

$$W = 72000 \text{ (N)}$$

$$f = 300 \text{ (rpm)}$$

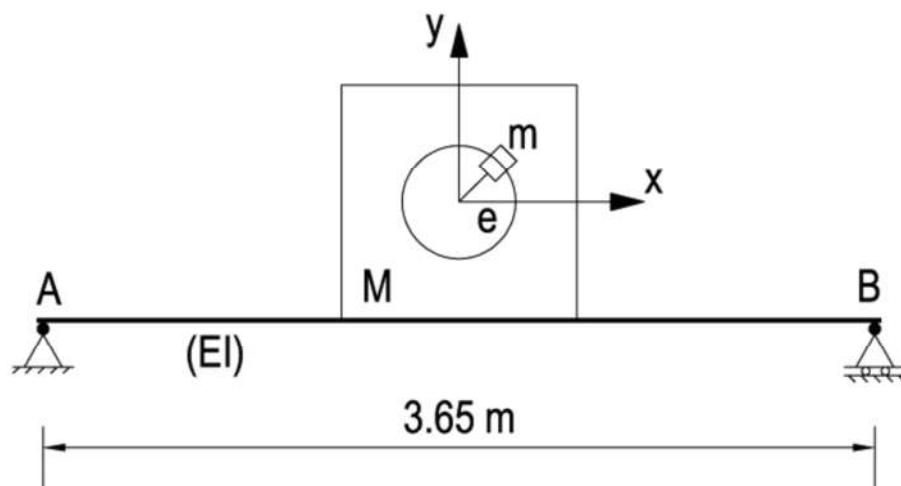
$$m = \frac{180}{9.806} \text{ (kg)}$$

$$e = 25.4 \text{ (cm)}$$

$$E_{beam} = 21 \times 10^6 \text{ (N/cm}^2\text{)}$$

$$I = 5300 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$\xi = 10\%$$

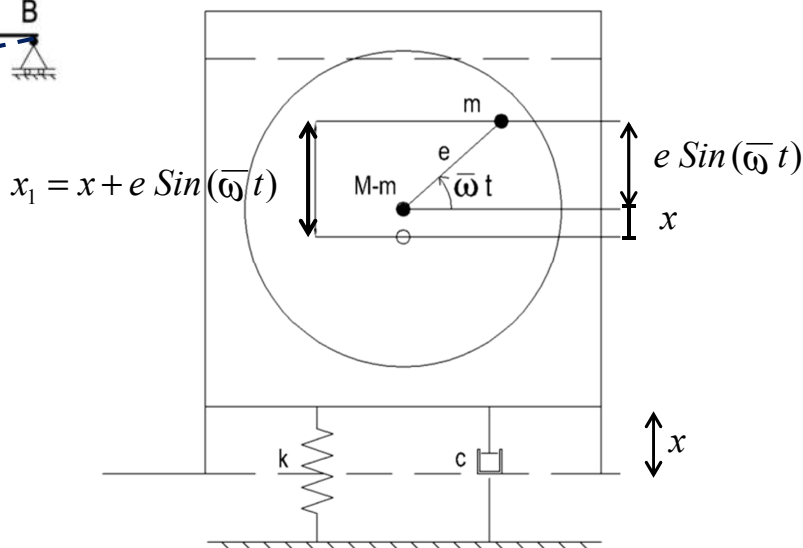
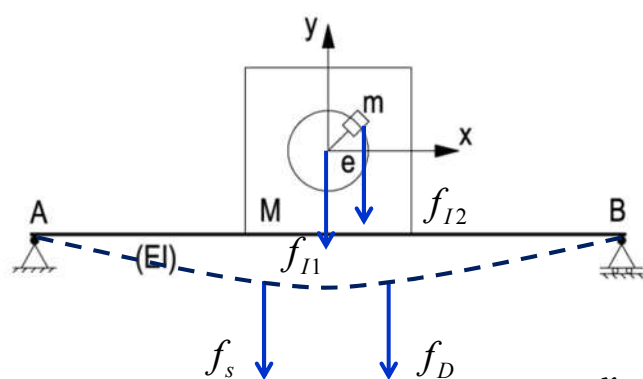


49

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ مثال-۲:



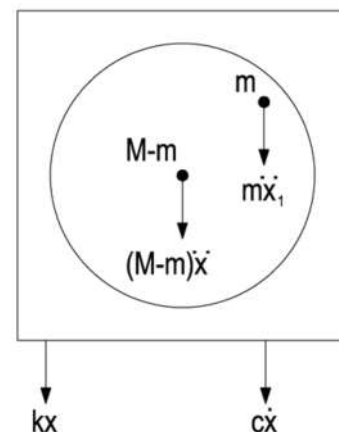
مدل دیاگرام جسم آزاد

50

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ مثال-۲:



دیاگرام جسم آزاد مدل

$$M \ddot{x} + c \dot{x} + k x = \underbrace{m e \bar{\omega}^2}_{p_0} \sin(\bar{\omega} t)$$

51

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ مثال-۲:

$$M \ddot{x} + c \dot{x} + k x = p_0 \sin(\bar{\omega} t)$$

$$p_0 = m e \bar{\omega}^2$$

$$\bar{\omega} = 31.41 \text{ (rad / sec)}$$

$$k = 1098.64 \times 10^4 \text{ (N / m)}$$

$$\omega = 38.68 \text{ (rad / sec)}$$

$$\beta = 0.811$$

$$p_0 = 4598 \text{ (N)}$$

$$\Rightarrow \rho = 1.1 \times 10^{-3} \text{ (m)}$$

52

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

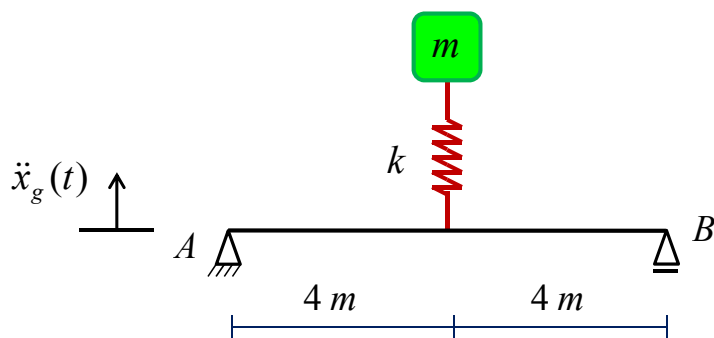
III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

مثال-۳: تیر نشان داده شده وزنه‌ای را در وسط دهانه خود بر روی فنری تحمل می‌کند. اگر از وزن تیر صرف نظر شود، با فرض آن که تیر تحت شتاب پایه قائم $\ddot{x}_g(t) = 0.35g \sin(5t)$ قرار گیرد مطلوب است تعیین:

الف- زمان تناوب طبیعی ارتعاش تیر.

ب- جابجایی و سرعت وزنه در لحظه $t=2$ sec

ج- واکنش تکیه‌گاهی در لحظه $t=2$ sec



$$m = 400 \text{ (ton)}$$

$$E_{\text{beam}} = 21 \times 10^6 \text{ (N / cm}^2\text{)}$$

$$I = 25170 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$\xi = 10\%$$

$$k_{\text{spring}} = 5393.3 \text{ (kN / m)}$$

53

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ مثال-۳:

$$k_{\text{spring}} = 5393.3 \text{ (kN / m)}$$

$$k_{\text{beam}} = 4955.3 \text{ (kN / m)}$$

$$k = 2582.5 \text{ (kN / m)}$$

$$\omega = 2.54 \text{ (rad / sec)}$$

$$T = 2.47 \text{ (sec)}$$

54

SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ مثال-۳:

$$p_0 = -1372.84 \text{ (kN)}$$

$$\beta = 1.97$$

$$\theta = -0.136^{\text{rad}}$$

$$\rho = -0.1828 \text{ (m)}$$

55

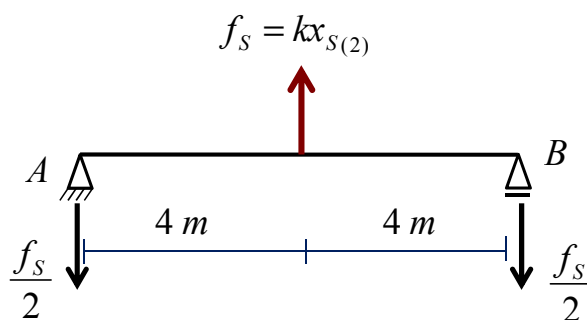
SDOF: Response to Harmonic and Periodic Excitations

III. ارتعاش ناشی از نیروی سینوسی - حالت با میرایی

پاسخ مثال-۳:

$$x_{S(2)} = 11.91 \text{ (cm)}$$

$$\dot{x}_{S(2)} = 69.25 \text{ (cm / sec)}$$



$$R_A = R_B = 153.79 \text{ (kN)}$$

56