دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Dynamic of Structures

Single Degree of Freedom Systems: Free Vibration

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

SDOF: Free Vibration

I. سیستم‌های یک درجه آزاد (SDOF)

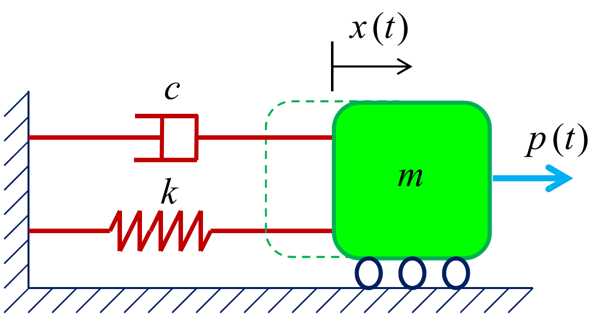
مشخصه‌های فیزیکی اصلی هر سیستم سازه‌ای الاستیک خطی تحت اثر بارهای دینامیکی عبارتند از:

۱- خواص الاستیک (سختی یا نرمی).

۲- مکانیزم اتلاف انرژی یا میرایی.

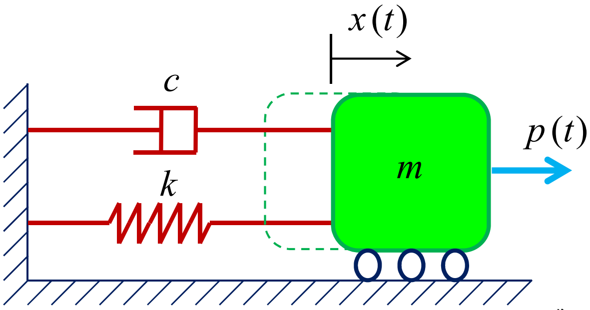
۳- جرم.

۴- بارگذاری یا نیروی خارجی.



در ساده‌ترین مدل تحلیلی از یک سیستم SDOF فرض می‌شود هر کدام از مشخصه‌های فیزیکی فوق در یک المان فیزیکی متمرکز شده باشند.

SDOF: Free Vibration



I. سیستم‌های یک درجه آزاد (SDOF)

در این مدل:

- کل جرم m این سیستم در یک قطعه المان صلب متمرکز شده است.
- غلتک‌ها باعث محدودیت حرکت این سیستم در یک جهت خاص شده است به طوری که مختصه تغییرمکان x می‌تواند موقعیت آن را به طور کامل مشخص نماید.
- مکانیزم اتلاف انرژی نیز توسط میراگر c نشان داده شده است.
- بارگذاری خارجی این سیستم که باعث واکنش دینامیکی آن می‌شود نیروی متغیر با زمان p(t) است.
- مقاومت الاستیک سیستم در مقابل تغییرمکان، توسط یک فنر بدون وزن به سختی k نشان داده شده است.

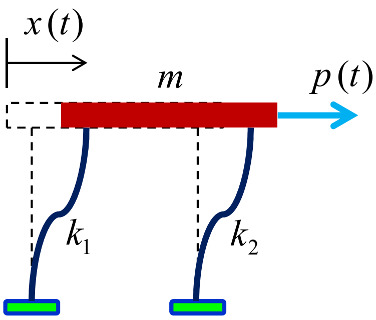
یکی از مزیت‌های مهم سیستم‌های SDOF کاربرد آن در آنالیز سیستم‌های چند درجه آزاد (MDOF) است. به این صورت که می‌توان معادلات همبسته (Coupled) سیستم MDOF را به منظور سادگی به چند معادله SDOF تبدیل کرد. زیرا که در هر معادله سیستم SDOF تنها یک متغیر وجود دارد.

SDOF: Free Vibration

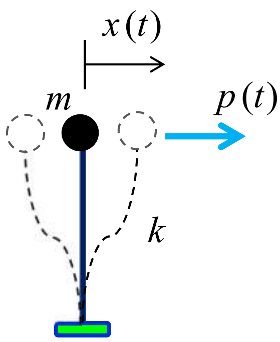
I. سیستم‌های یک درجه آزاد (SDOF)

قابی را در نظر بگیرید که تنها حرکت جانبی آن مد نظر باشد. این مدل یک سیستم SDOF است که آن را مدل قاب برشی می‌نامند. در این مدل جرم در سقف متمرکز می‌باشد. و سقف عملکرد دیافراگم صلب را خواهد داشت.

اگر سختی جانبی (برشی) مجموع ستون‌ها را با k نشان دهیم، قاب فوق را می‌توان به دو روش مدل جرم متمرکز و مدل جرم فنر نیز نمایش داد.

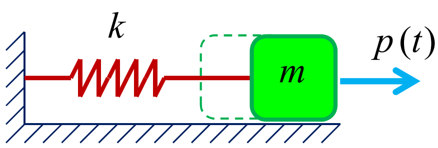


مدل قاب برشی



مدل جرم متمرکز

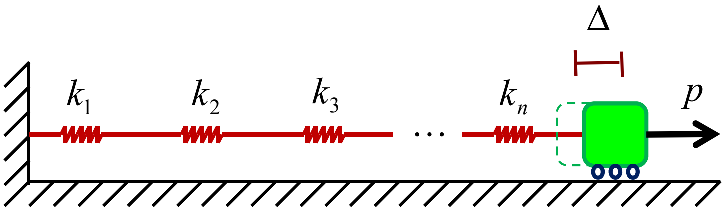
$$\boxed{k = \sum_{i=1}^{n} k_i}$$



مدل جرم فنر

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

الف- سختی معادل فنرهای سری:

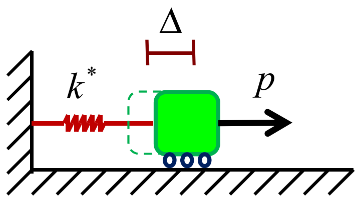


در فنرهای سری، نیروی همه فنرها مساوی و برابر با نیروی وارده است. همچنین تغییر طول مجموع فنرها برابر با مجموع تغییر طول آن‌ها می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= k_1\,\Delta_1 = p \;\Rightarrow\; \Delta_1 = p/k_1\\
F_2 &= k_2\,\Delta_2 = p \;\Rightarrow\; \Delta_2 = p/k_2\\
F_3 &= k_3\,\Delta_3 = p \;\Rightarrow\; \Delta_3 = p/k_3\\
&\;\;\vdots\\
F_n &= k_n\,\Delta_n = p \;\Rightarrow\; \Delta_n = p/k_n
\end{aligned}
$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i \;\Rightarrow\; \Delta = p/k_1 + p/k_2 + p/k_3 + \cdots + p/k_n$$

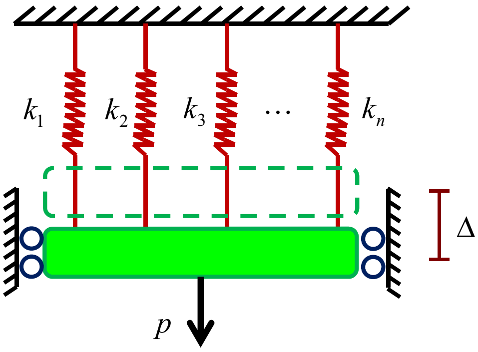
$$\Rightarrow\; \Delta = p\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i} \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{p}{k^*} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{1}{k^*} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}}$$

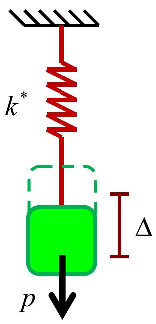


در رابطه فوق k^* سختی فنر معادل است که از سختی تک تک فنرها کمتر می‌باشد.

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

ب- سختی معادل فنرهای موازی:





در فنرهای موازی، تغییر طول همه فنرها با هم مساوی است. همچنین نیروی وارده برابر با مجموع نیروی همه فنرها می‌باشد.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \cdots = \Delta_n = \Delta \qquad p = \sum_{i=1}^{n}F_i \;\Rightarrow\; p = k_1\,\Delta + k_2\,\Delta + k_3\,\Delta + \cdots + k_n\,\Delta$$

$$\Rightarrow\; p = \left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\Delta \;\Rightarrow\; p = k^*\Delta \;\Rightarrow\; \boxed{k^* = \sum_{i=1}^{n}k_i}$$

در ترکیب موازی برای اینکه فنرها تغییر طول مساوی داشته باشند باید نیرو در مرکز سختی فنرها اعمال شود. با توجه به رابطه فوق سختی فنر معادل، مساوی مجموع سختی فنرهای موازی است که از سختی تک تک فنرها بزرگتر است. قابل ذکر است که معمولا فنرها به صورت موازی با یکدیگر ترکیب می‌شوند.

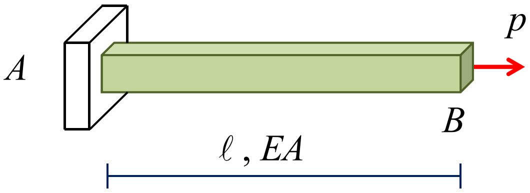
SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

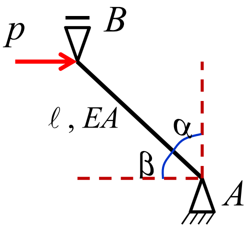
۱- سختی محوری:

سختی محوری میله‌ای به سطح مقطع A ، طول L و مدول الاستیسیته E برابر است با



$$\Delta_B = \frac{p\ell}{EA} \Rightarrow k_B = \frac{EA}{\ell}$$

اگر مطابق شکل روبه‌رو نیروی محوری در راستای میله اعمال نشود سختی افقی میله در نقطه B برابراست با



$$\Delta_B = \frac{p\ell}{EA\sin^2\alpha} \Rightarrow k_B = \frac{EA\sin^2\alpha}{\ell}$$

α زاویه ما بین راستای میله و خط عمود بر راستای نیرو است.

به این نکته توجه شود که سختی مربوط به سختی افقی است. یعنی در حین محاسبه، ما نیروی افقی میله AB را داریم پس باید برای محاسبه نیروی میله AB نیروی افقی میله AB در $\frac{1}{\cos\beta}$ ضرب شود.

$$F_{AB} = \frac{F_{h_{AB}}}{\cos\beta} = \frac{k_B\Delta_B}{\cos\beta} \Rightarrow F_{AB} = \frac{EA\sin^2\alpha}{\ell\cos\beta}\Delta_B$$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

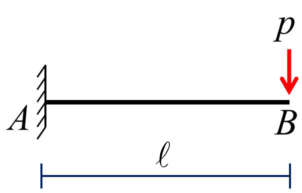
انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۲- سختی خمشی:

سختی خمشی چند تیر که بیشترین کاربرد را در محاسبه تغییرمکان‌ها دارند بررسی می‌کنیم. طول همه تیرها L و صلبیت خمشی آن‌ها EI است.

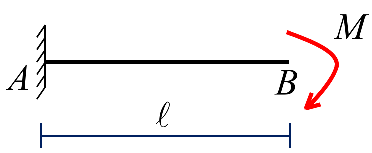
$$\Delta_B = \frac{p\ell^3}{3EI} \Rightarrow k_B = \frac{3EI}{\ell^3}$$

$$\theta_B = \frac{p\ell^2}{2EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{2EI}{\ell^2}$$



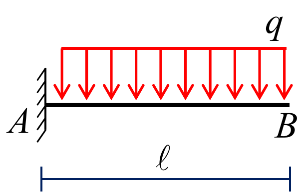
$$\Delta_B = \frac{M\ell^2}{2EI} \Rightarrow k_B = \frac{2EI}{\ell^2}$$

$$\theta_B = \frac{M\ell}{EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{EI}{\ell}$$



$$\Delta_B = \frac{q\ell^4}{8EI} \Rightarrow k_B = \frac{8EI}{\ell^4}$$

$$\theta_B = \frac{q\ell^3}{6EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{6EI}{\ell^3}$$



SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

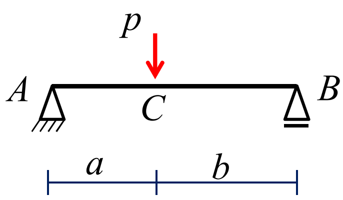
انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۲– سختی خمشی:

$$\Delta_C = \frac{pa^2b^2}{3EI\ell} \quad \Rightarrow \quad k_C = \frac{3EI\ell}{a^2b^2}$$

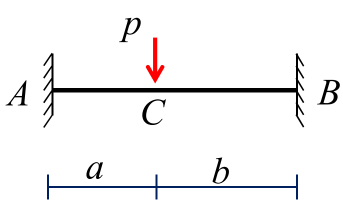
$$\theta_A = \frac{pab(\ell+b)}{6EI\ell} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_A} = \frac{6EI\ell}{ab(\ell+b)}$$

$$\theta_B = \frac{pab(\ell+a)}{6EI\ell} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_B} = \frac{6EI\ell}{ab(\ell+a)}$$



$$\Delta_C = \frac{pa^3b^3}{3EI\ell^3} \quad \Rightarrow \quad k_C = \frac{3EI\ell^3}{a^3b^3}$$

$$M_A = \frac{pab^2}{\ell^2} \quad , \quad M_B = \frac{pa^2b}{\ell^2} \quad , \quad M_C = \frac{2pa^2b^2}{\ell^3}$$



SDOF: Free Vibration

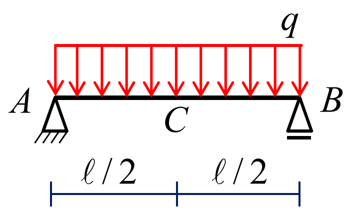
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۲– سختی خمشی:

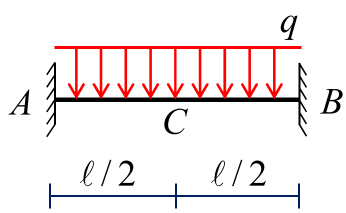
$$\Delta_C = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI} \quad \Rightarrow \quad k_C = \frac{384}{5}\frac{EI}{\ell^4}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{q\ell^3}{24EI} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_A} = k_{\theta_B} = \frac{24EI}{\ell^3}$$



$$\Delta_C = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI} \quad \Rightarrow \quad k_C = 384\frac{EI}{\ell^4}$$

$$M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12} \quad , \quad M_C = \frac{q\ell^2}{24}$$



SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

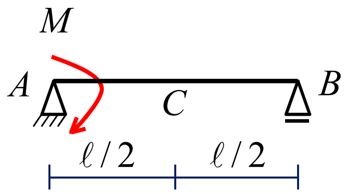
۳- سختی پیچشی:

این نوع سختی پیچشی ناشی از خمش است. سختی پیچشی چند تیر که بیشترین کاربرد را در محاسبه تغییرمکان‌ها دارند بررسی می‌کنیم. طول همه تیرها L و صلبیت خمشی آن‌ها EI است.

$$\Delta_C = \frac{M\ell^2}{16EI} \Rightarrow k_C = \frac{16EI}{\ell^2}$$

$$\theta_A = \frac{M\ell}{3EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = \frac{3EI}{\ell}$$

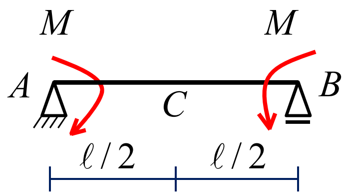
$$\theta_B = \frac{M\ell}{6EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{6EI}{\ell}$$



$$\Delta_C = \frac{M\ell^2}{8EI} \Rightarrow k_C = \frac{8EI}{\ell^2}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{M\ell}{2EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = k_{\theta_B} = \frac{2EI}{\ell}$$

$$M_C = M$$



SDOF: Free Vibration

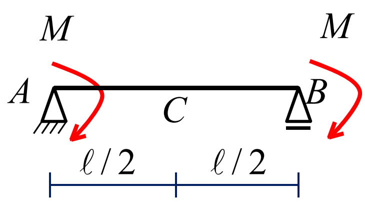
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۳- سختی پیچشی:

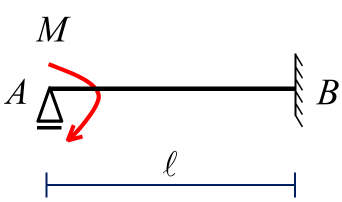
$$\Delta_C = 0 \quad , \quad M_C = 0$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{M\ell}{6EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = k_{\theta_B} = \frac{6EI}{\ell}$$



$$M_B = \frac{M}{2}$$ (هم جهت با M)

$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

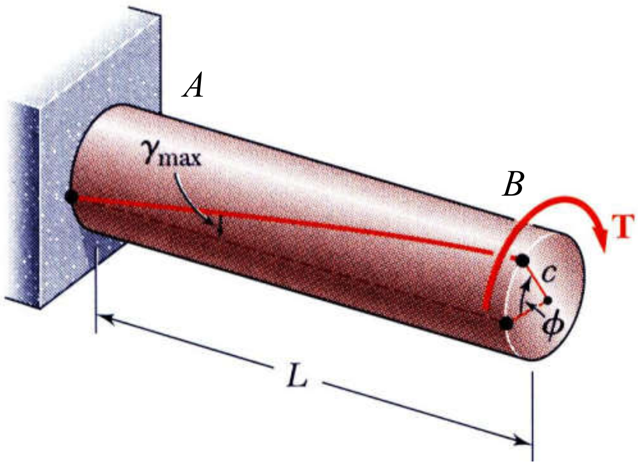


SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۳- سختی پیچشی:



$$\boxed{\phi_B = \frac{T\ell}{GJ} \quad \Rightarrow \quad k_B = \frac{GJ}{\ell}}$$

J : ممان اینرسی قطبی
G : مدول الاستیسیته برشی

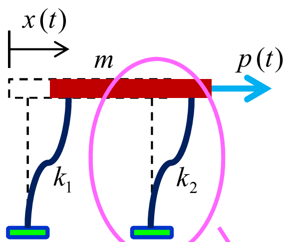
سختی فنرهای انتقالی مانند سختی خمشی ضریبی از $\frac{EI}{\ell^3}$ است که دارای دیمانسیون بار گسترده می‌باشد.

سختی فنرهای پیچشی مانند سختی پیچشی ضریبی از $\frac{EI}{\ell}$ یا $\frac{GJ}{\ell}$ است که دارای دیمانسیون لنگر می‌باشد.

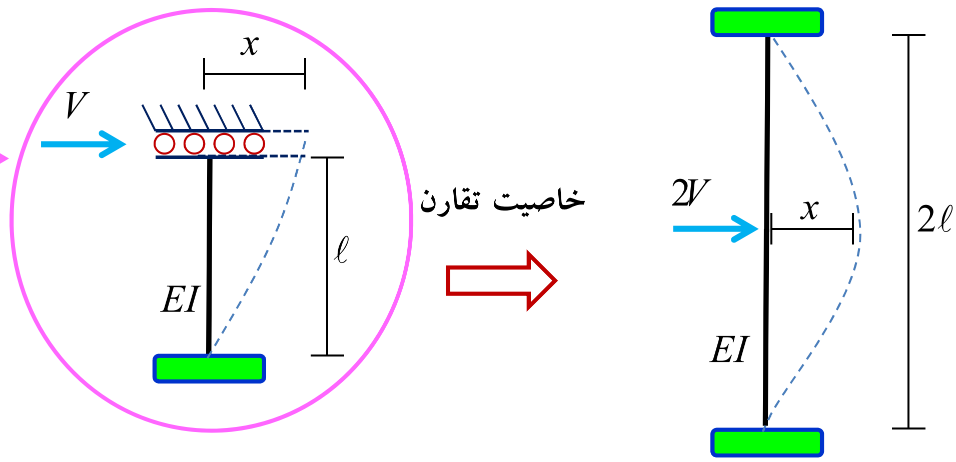
SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

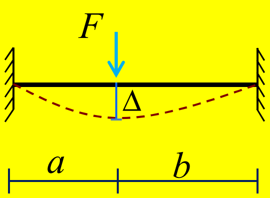
ستون با تکیه‌گاه گیردار: سختی جانبی یک ستون با تکیه‌گاه گیردار در قاب با مدل برشی به صورت زیر محاسبه می‌شود.



مدل قاب برشی با تکیه‌گاه گیردار



یادآوری از تحلیل سازه



$$\boxed{F = \frac{3EI\ell^3}{a^3 b^3}\Delta}$$

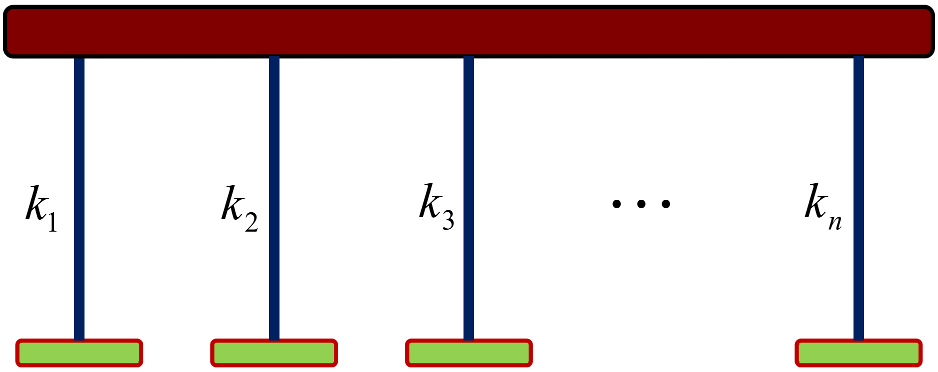
$$\Rightarrow \quad 2V = \frac{3EI\,(2\ell)^3}{\ell^3\ell^3}x \quad \Rightarrow \quad V = \frac{12EI}{\ell^3}x \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{12EI}{\ell^3}}$$

شبیه به رابطه نیروی فنر $\quad F = k\,x$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

سختی جانبی طبقه در یک سیستم SDOF با مدل قاب برشی با تکیه‌گاه‌های گیردار به صورت زیر محاسبه می‌شود

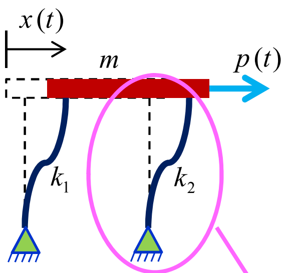


$$\boxed{k = \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{12 E_i I_i}{\ell_i^{\,3}} \right)}$$

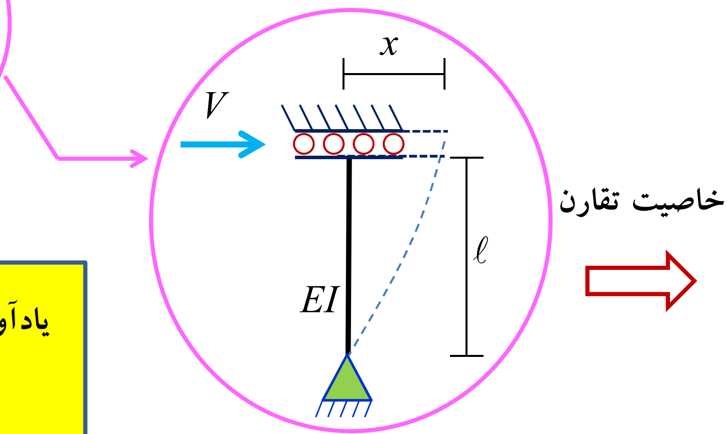
SDOF: Free Vibration

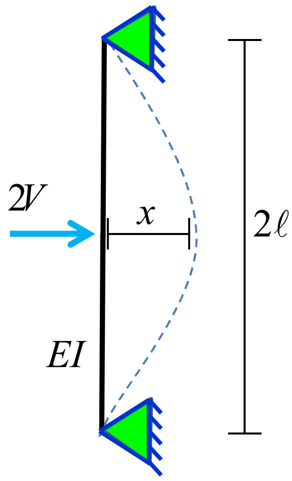
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

ستون با تکیه‌گاه مفصلی: سختی جانبی یک ستون با تکیه‌گاه مفصلی در قاب با مدل برشی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

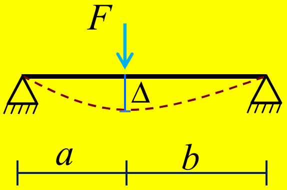


مدل قاب برشی با تکیه‌گاه مفصلی





یادآوری از تحلیل سازه



$$\boxed{F = \frac{3EI\ell}{a^2 b^2}\Delta}$$

$$\Rightarrow \quad 2V = \frac{3EI\,(2\ell)}{\ell^2 \ell^2} x \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3EI}{\ell^3} x$$

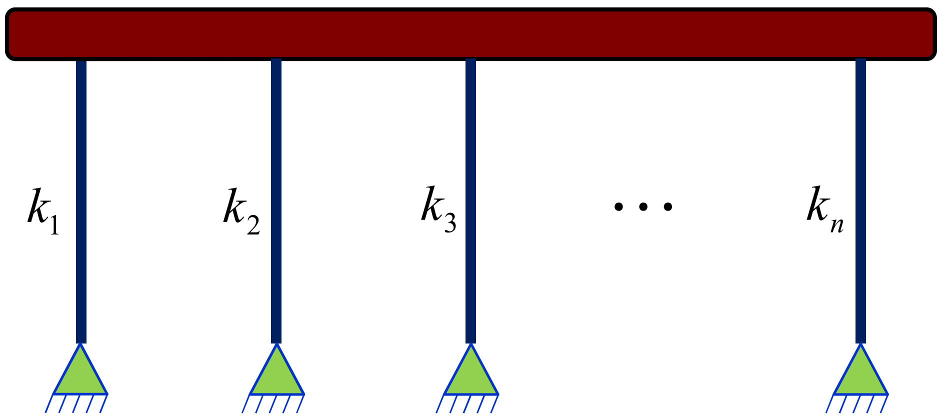
شبیه به رابطه نیروی فنر $\quad F = k\,x$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{3EI}{\ell^3}}$$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

سختی جانبی طبقه در یک سیستم SDOF با مدل قاب برشی با تکیه‌گاه‌های مفصلی به صورت زیر محاسبه می‌شود

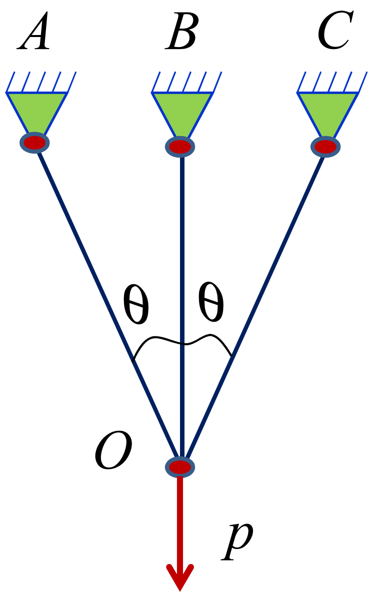


$$k = \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3E_i I_i}{\ell_i^3} \right)$$

SDOF: Free Vibration

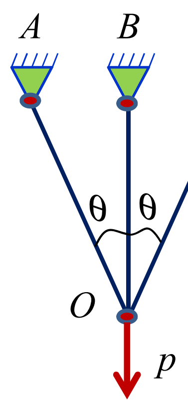
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

مثال-۱: در خرپای نشان داده شده تغییر مکان قائم گره O را محاسبه $(AE = cte \quad , \quad OB = L)$ نمایید.



SDOF: Free Vibration

$(AE = cte \quad , \quad OB = L)$



II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۱:

$$\Rightarrow \boxed{k_{OA} = k_{OC} = \frac{EA\cos^3\theta}{L}} \quad \& \quad \boxed{k_{OB} = \frac{EA}{L}}$$

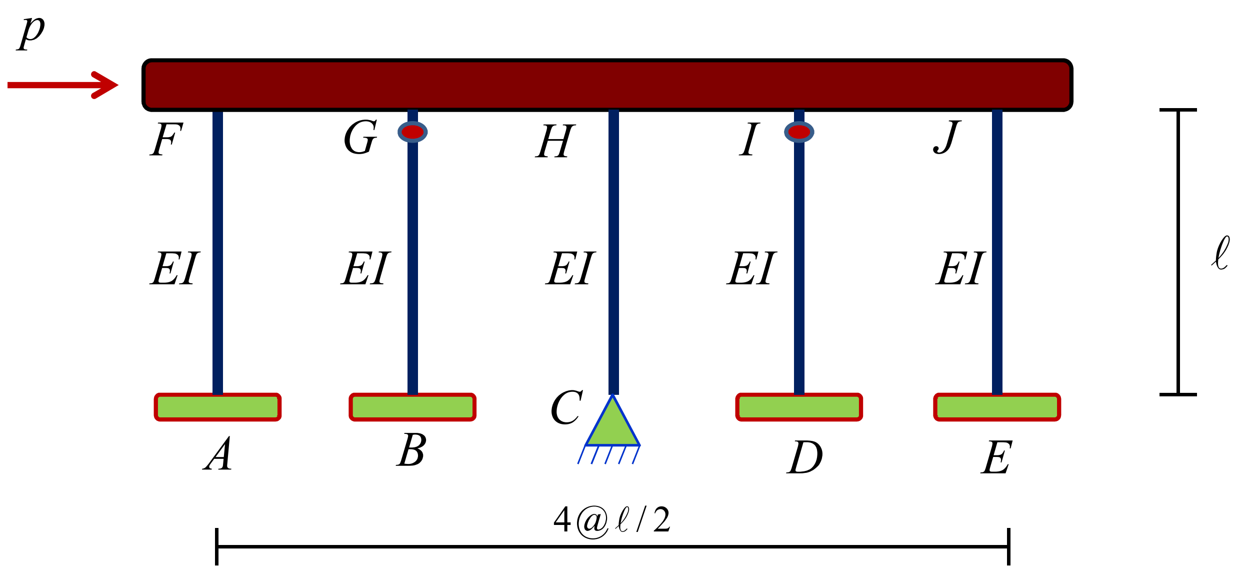
$$\boxed{k^* = \frac{EA}{L}(1+2\cos^3\theta)}$$

$$\boxed{\Delta_O = \frac{pL}{EA(1+2\cos^3\theta)}}$$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

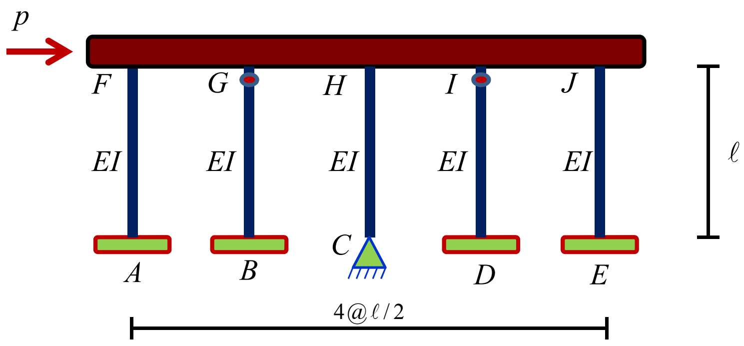
مثال-۲: در قاب زیر تغییر مکان افقی سقف صلب چقدر است؟



SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۲:



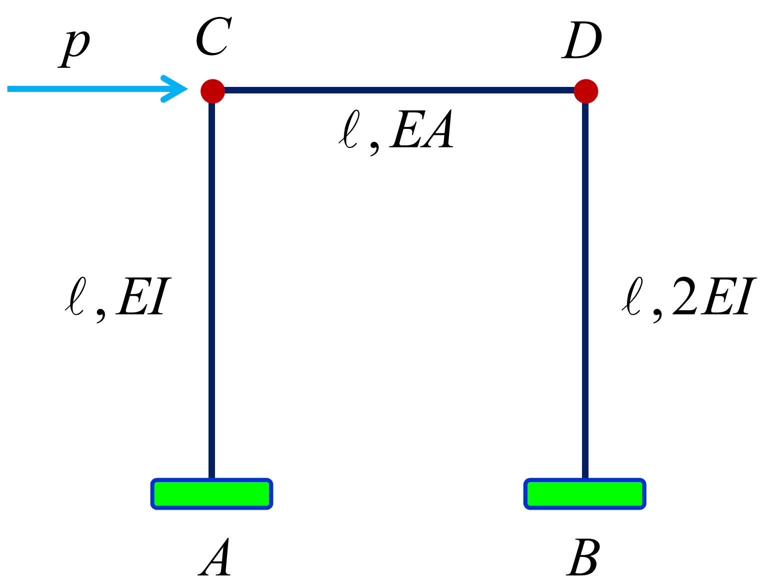
$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{p\ell^3}{33EI}}$$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

مثال-۳: در قاب زیر تغییر مکان افقی گره C چقدر است؟

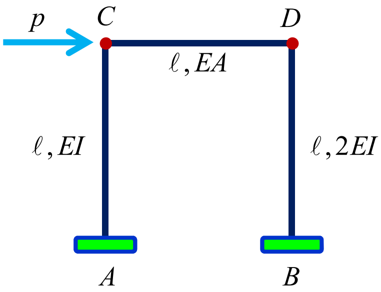
$$\left(I = \frac{A\ell^2}{6} \right)$$



SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۳:



$$k_1 = \frac{AE}{2\ell}$$

$$k_2 = \frac{AE}{\ell}$$

$$\Delta_C = \frac{p\ell}{AE}$$

$$k_{CD} = \frac{AE}{\ell}$$

$$k_{AC} = \frac{AE}{2\ell}$$

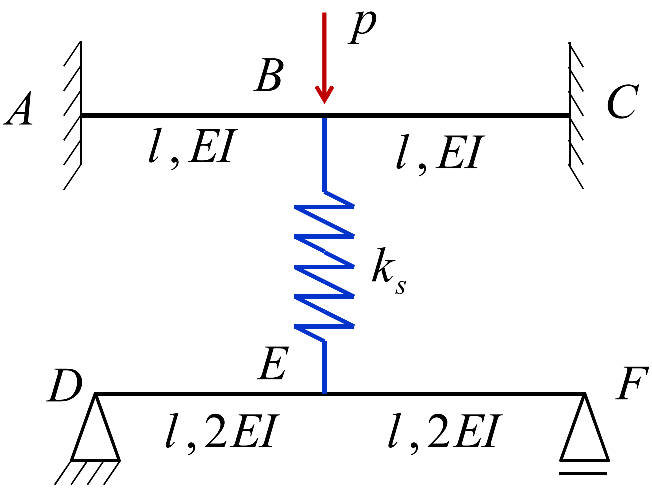
$$k_{BD} = \frac{AE}{\ell}$$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

مثال-۴: در سازه زیر تغییر مکان قائم B و نیروی فنر چقدر است؟

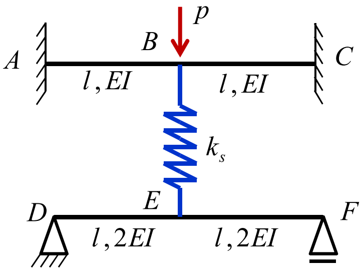
$$\left(k_s = \frac{12EI}{\ell^3}\right)$$



SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۴:



$$k_{AC} = \frac{24EI}{\ell^3}$$

$$k_{DF} = \frac{12EI}{\ell^3}$$

$$k_1 = \frac{6EI}{\ell^3}$$

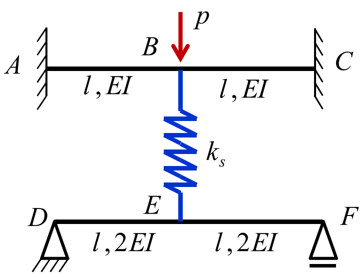
$$k_2 = \frac{30EI}{\ell^3}$$

$$\Delta_B = \frac{p\ell^3}{30EI}$$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

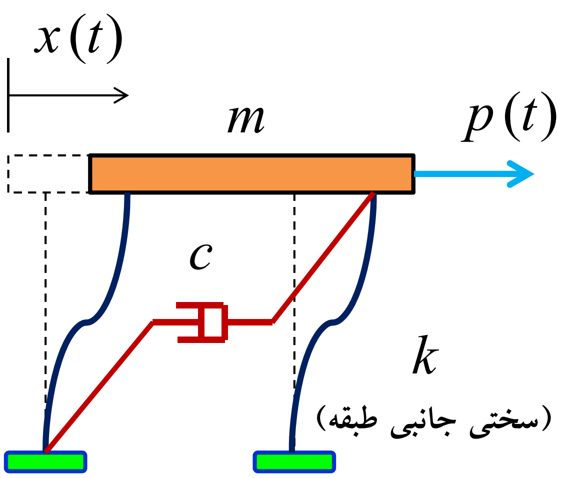
پاسخ مثال-۴:



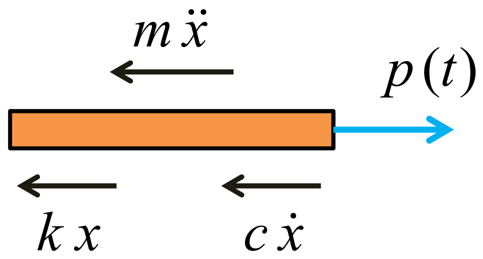
$$F_s = F_1 = \frac{p}{5}$$

SDOF: Free Vibration

III. معادلات حرکت یک سیستم SDOF



در حالت کلی برای به دست آوردن معادله حرکت یک سیستم دینامیکی دیاگرام جسم آزاد جرم m را رسم کرده که باید در حالت تعادل باشد.



$$\sum F = p(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = p(t)}$$

معادلات دینامیک حرکت (Dynamic Equation of Motion)

SDOF: Free Vibration

III. معادلات حرکت یک سیستم SDOF

معادلات دینامیک حرکت (Dynamic Equation of Motion)

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = p(t)$$

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

$f_I(t)$: نیروی اینرسی

$f_D(t)$: نیروی ناشی از میرایی

$f_S(t)$: نیروی ناشی از سختی

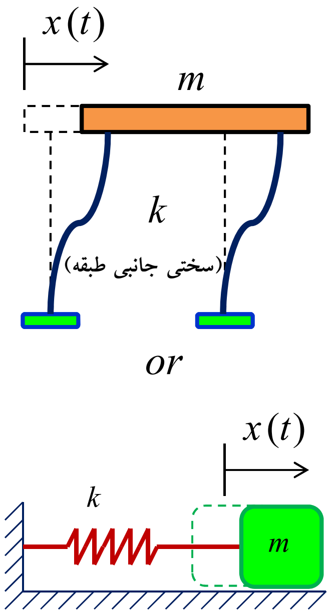
k_{ij} : i و j اُمین المان ماتریس سختی که برابر است با مقدار نیروی لازم در درجه آزادی i جهت ایجاد تغییرشکل واحد در درجه آزادی j است. به جای نیرو و جابجایی به ترتیب می‌توان از ممان و دوران استفاده کرد.

SDOF: Free Vibration

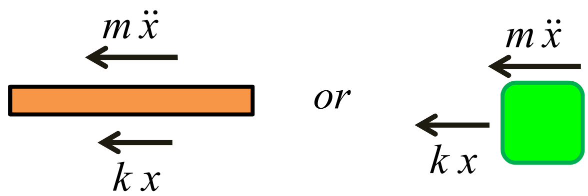
IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:

در ارتعاش آزاد، سازه تحت اثر شرایط اولیه (جابجایی و سرعت اولیه) از حالت سکون خارج شده و به ارتعاش در می‌آید. هدف یافتن جابجایی در هر لحظه از زمان است. برای این کار از قانون دوم نیوتن استفاده کرده و می‌نویسیم:



شرایط اولیه $@t=0\,,\begin{cases}x(0)=x_0\\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0\end{cases}$



$$\sum F=0 \Rightarrow \boxed{m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=0} \quad (1) \quad or \quad I_m\,\ddot{\theta}(t)+k_\theta\,\theta(t)=0$$

برای محاسبه $x(t)$ باید معادله دیفرانسیل (1) را حل کرد.

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:

رابطه (1) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت است. در حالت کلی شکل معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\ddot{x}+a\,\dot{x}+b\,x=0}$$

برای حل این معادله ابتدا معادله مشخصه (مفسر) را تشکیل می‌دهیم.

$$\boxed{z^2+a\,z+b=0}$$

چون معادله مشخصه یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی می‌باشد سه حالت ممکن است اتفاق بیافتد.

$$\Delta=a^2-4b$$

$I.\quad \Delta>0 \quad\Rightarrow\quad z_1\,,z_2 \quad\Rightarrow\quad x=Ae^{z_1 t}+Be^{z_2 t}$

$II.\quad \Delta=0 \quad\Rightarrow\quad z_1=z_2=z$ ریشه مضاعف $\quad\Rightarrow\quad x=(A+B\,t)\,e^{zt}$

$III.\quad \Delta<0 \quad\Rightarrow\quad z=G_1+i\,G_2 \quad\Rightarrow\quad x=e^{G_1 t}(A\cos G_2 t+B\sin G_2 t)$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:

از رابطه (1) می‌توان نتیجه گرفت

$$(1):\quad m\ddot{x}+kx=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0}$$

با تشکیل معادله مشخصه خواهیم داشت

$$z^2+\frac{k}{m}=0 \quad\Rightarrow\quad z^2=-\frac{k}{m} \quad\Rightarrow\quad z=\sqrt{-\frac{k}{m}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{z=i\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$z=G_1+iG_2=i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} G_1=0 \\ G_2=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\omega \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)} \qquad (2)$$

برای به دست آوردن ثابت‌های A و B در معادله (2) باید شرایط اولیه در آن برقرار باشد.

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:

از رابطه (I) می‌توان نتیجه گرفت

$$@t=0,\ \begin{cases} x(0)=x_0 & \text{جابجایی اولیه} \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

$$(2):\quad x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$$

$$(2)\quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dt}=\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t)$$

$$@t=0\quad x(0)=x_0 \quad\Rightarrow\quad x_0=A\cos(0)+B\sin(0) \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=x_0}$$

$$@t=0\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_0=-A\omega\sin(0)+B\omega\cos(0) \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=\frac{\dot{x}_0}{\omega}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{x=x_0\cos(\omega t)+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t)} \qquad (3)$$

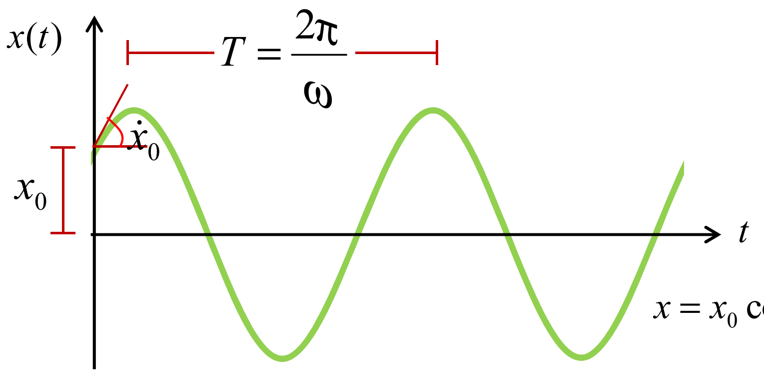
معادله ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF بدون میرایی

با در دست داشتن جابه‌جایی در یک سازه، به سادگی می‌توان پارامترهای دیگری مانند تنش و ... را به دست آورد.

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:



$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$(rad/\sec)$	فرکانس طبیعی یا فرکانس زاویه‌ای (دورانی یا دایره‌ای)
$f = \frac{\omega}{2\pi}$	(دور $/\sec$)	فرکانس یا تعداد دوره‌های تناوب در زمان ۱ ثانیه با واحد Hz
$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$(\sec)$	پریود یا تناوب (زمان یک رفت و برگشت کامل)

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow$ پریود T با سختی k رابطه عکس دارد

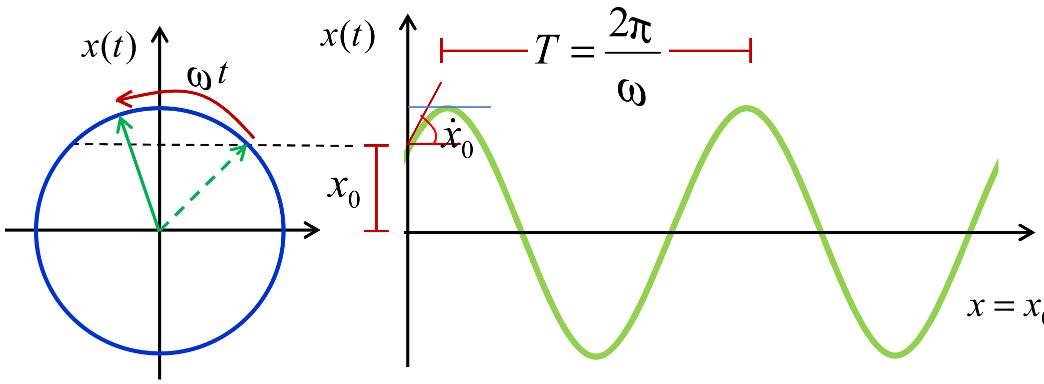
$\Rightarrow T\uparrow \Rightarrow k\downarrow \Rightarrow \omega\downarrow$ سازه نرم

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$ فرکانس ω با سختی k رابطه مستقیم دارد $\Rightarrow \omega\uparrow \Rightarrow k\uparrow \Rightarrow T\downarrow$ سازه سخت

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:



$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

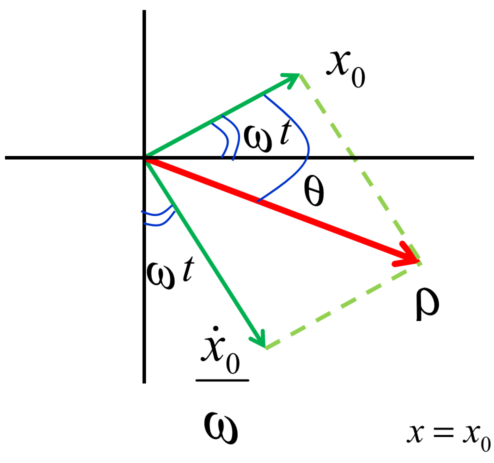
اگر نقطه مادی بر روی دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω دوران کند، پس از زمان t ، زاویه ωt را طی خواهد کرد. تصویر این حرکت بر روی محور x ، همان حرکت رفت و برگشتی خواهد شد.

منظور از فرکانس در این درس عموما فرکانس طبیعی ω می‌باشد. استفاده از واژه طبیعی به این دلیل است که فرکانس و پریود یک چیز ذاتی بوده و مربوط به مشخصات سازه است (ذات خود سازه است چیزی را به سازه اضافه نکردیم سازه خالص یا طبیعی است).

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

الف- بدون وجود میرایی:



معادله ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF بدون میرایی را می‌توان به صورت برداری نیز نشان داد. با توجه به شکل روبه‌رو مقدار x برابر است تصویر دو بردار x_0 و $\frac{\dot{x}_0}{\omega}$ بر روی محور افقی دستگاه مختصات.

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) = \rho \cos(\theta - \omega t)$$

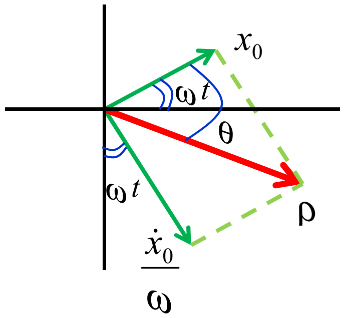
می‌دانیم $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \Rightarrow \boxed{x = \rho \cos(\omega t - \theta)} \quad (4)$

زاویه اختلاف فاز : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0 / \omega}{x_0}\right)$ (Phase Angle)

دامنه جواب یا حداکثر جواب : $\rho = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$ (Amplitude)

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

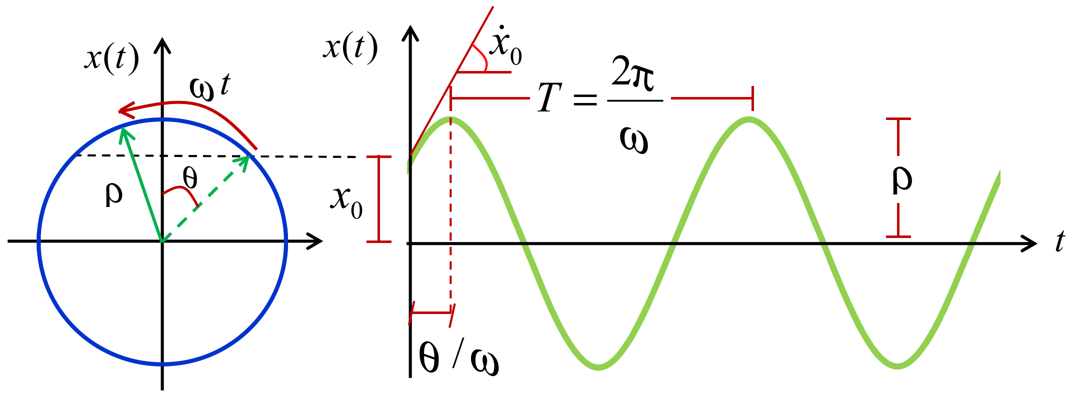
الف- بدون وجود میرایی:



$$\boxed{x = \rho\cos(\omega t - \theta)}$$

نوشتن معادلات به فرمت مقابل این مزیت را دارد که به سادگی می‌توان حداکثر ارتعاش ρ را به دست آورد.

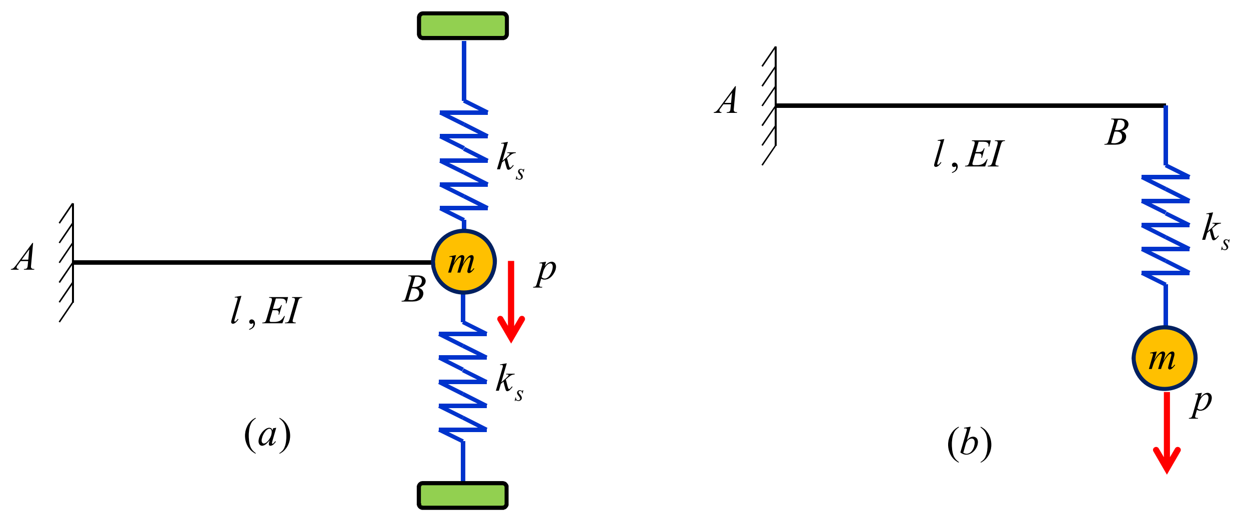
$$if\ \ \cos(\omega t - \theta) = 1 \ \ \Rightarrow\ \ \boxed{@t = \frac{\theta}{\omega}\ \ :\ \ x = x_{max} = \rho}$$



SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

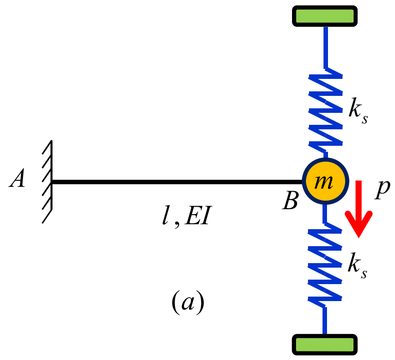
مثال-۵: فرکانس دو سیستم زیر را تعیین نمایید. (از وزن تیر صرف نظر شود)

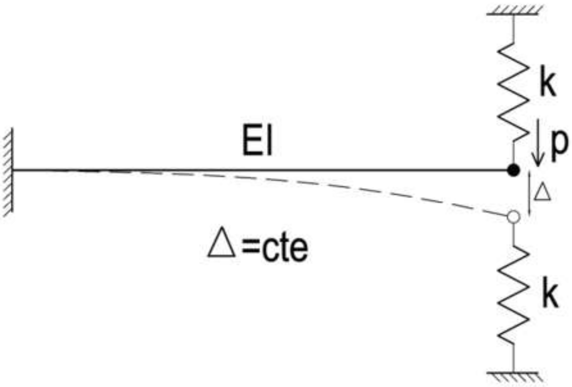


SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۵:



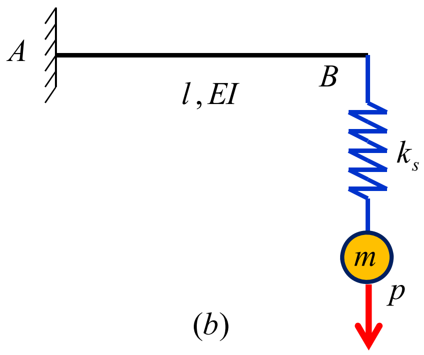


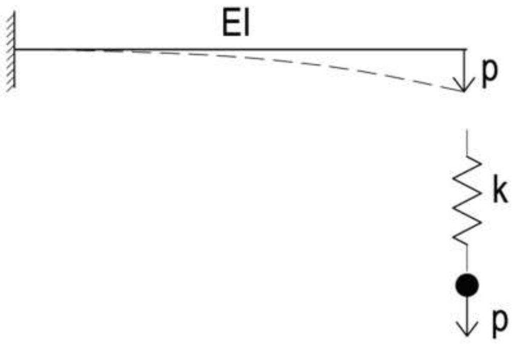
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k_s\ell^3 + 3EI}{m\ell^3}}}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۵:





$$\boxed{k = \frac{3EI\,k_s}{k_s\ell^3 + 3EI}}$$

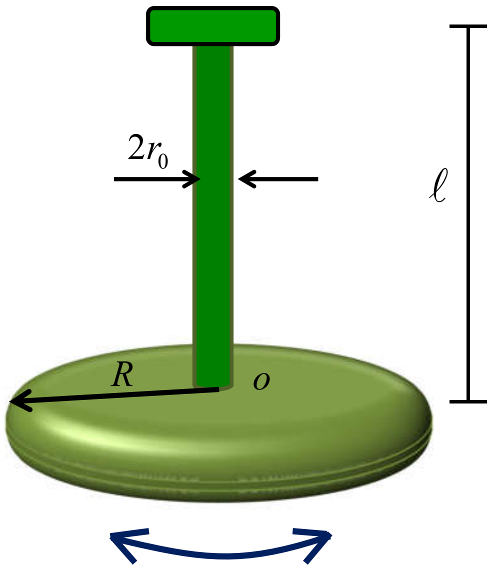
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3EI\,k_s}{(k_s\ell^3 + 3EI)\,m}}}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

مثال-۶: دیسکی تحت شرایط اولیه به ارتعاش در می‌آید. در صورتی که از وزن میله صرف نظر شود و جرم دیسک m باشد؛ معادله ارتعاش آزاد و فرکانس سیستم را تعیین نمایید.

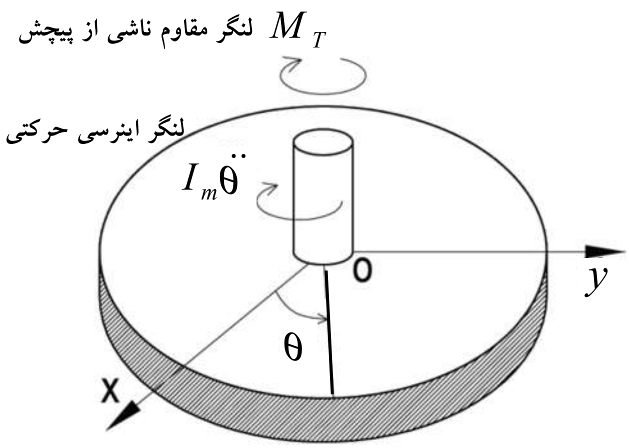
G : مدول الاستیسیته برشی

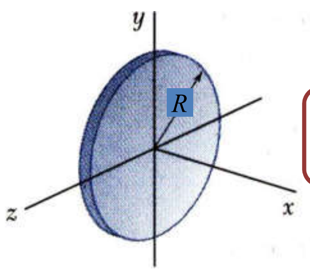


SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۶:





$$\boxed{I_m = I_x = \frac{1}{2}mR^2}$$

I_m : ممان اینرسی جرمی

$J = \dfrac{\pi\, r_0^{\,4}}{2}$: ممان اینرسی قطبی میله نسبت به مرکز آن

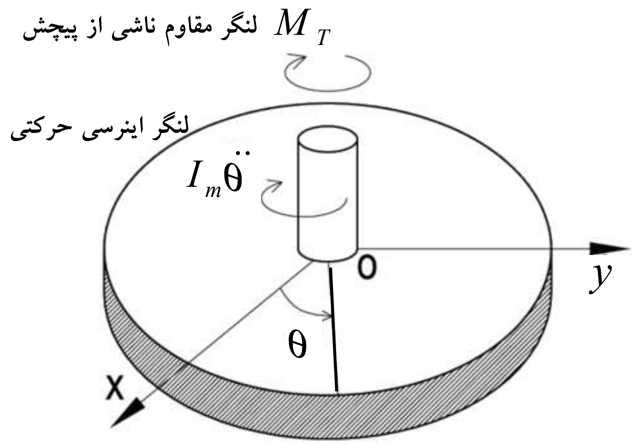
$$\boxed{M_T = \frac{\pi\, G\, r_0^{\,4}}{2\ell}\theta}$$

$$\boxed{mR^2\ddot{\theta} + \frac{\pi\, G\, r_0^{\,4}}{\ell}\theta = 0}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۶:



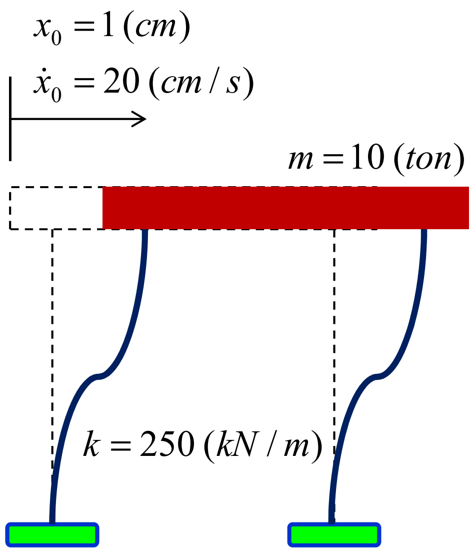
$$\boxed{mR^2\ddot{\theta} + \frac{\pi G r_0^4}{\ell}\theta = 0}$$

$$\boxed{\omega = \frac{r_0^2}{R}\sqrt{\frac{\pi G}{m\ell}}}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

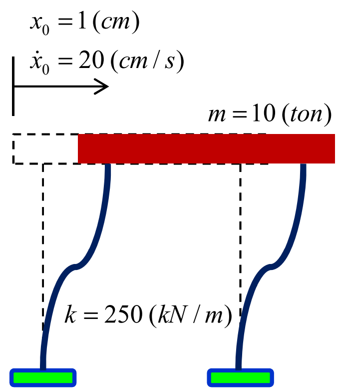
مثال-۷: یک سیستم SDOF بدون میرایی به جرم $10\,ton$ و سختی $250\,kN/m$ دارای حرکت ارتعاش آزاد است. با فرض آن که جابجایی اولیه و سرعت اولیه به ترتیب $1cm$ و $20\,cm/s$ باشد؛ معادله حرکت این سیستم SDOF را تعیین کنید. همچنین حداکثر جابجایی و زاویه اختلاف فاز را به دست آورید.



SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۷:



$$\boxed{x = 0.01\cos(5t) + 0.04\sin(5t)}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۷:

$$\boxed{\rho = 41.23\times10^{-3}\,(m)}$$

$$\boxed{\theta = 1.33\,(rad)}$$

$$\boxed{x = 41.23\times10^{-3}\cos(5t - 1.33)}$$

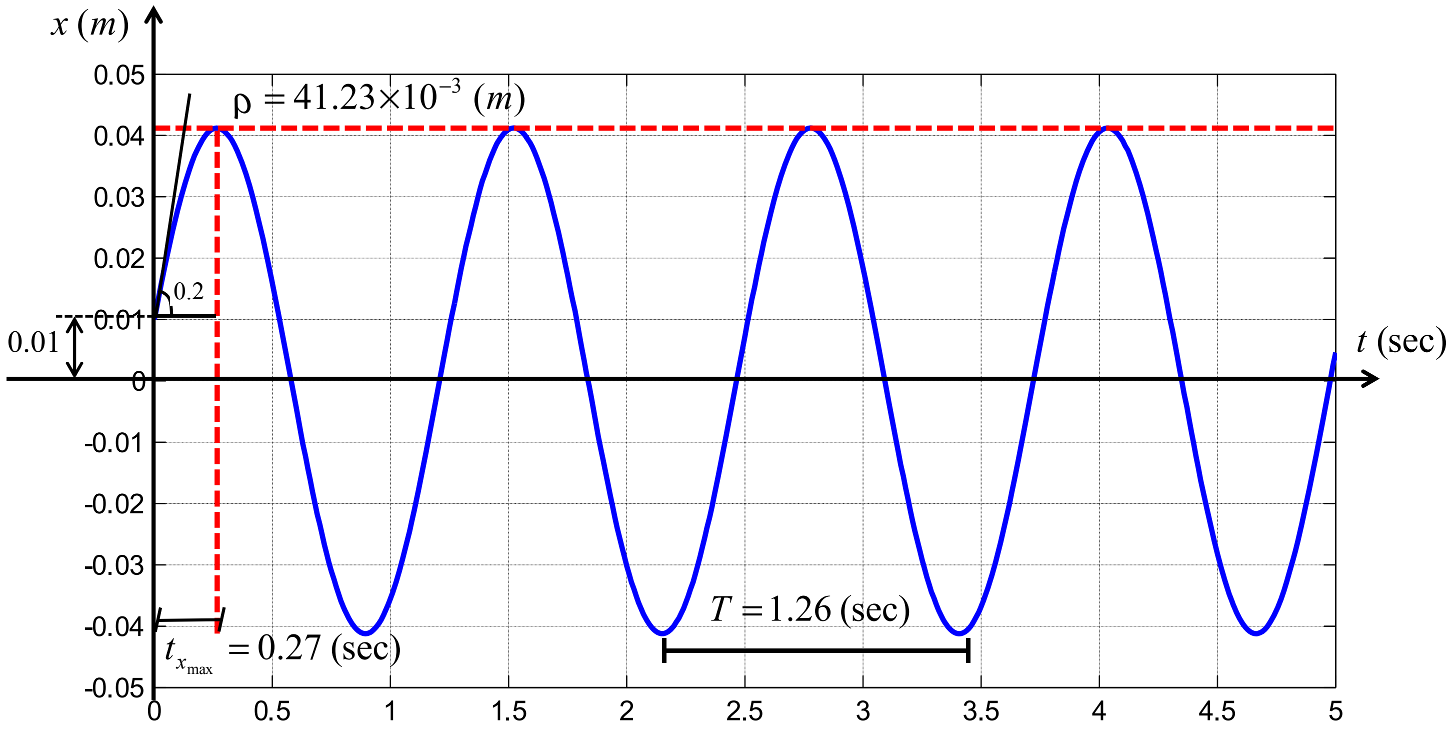
$$\boxed{t_{x_{\max}} = 0.27\,(\sec)}$$

$$\boxed{x_{\max} = \rho = 41.23\times10^{-3}\,(m)}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۷:



پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF بدون میرایی

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال-۷:

Matlab Code (M01.m)

```
clc
clf
clear
format short g

m=10*1e3;
k=250*1e3;
x0=0.01;
v0=0.2;
T=5;

omega=sqrt(k/m);
t=0:0.01:T;
for i=1:length(t)
    x(i)=(x0*cos(omega*t(i)))+(v0/omega)*sin(omega*t(i));
end

R=sqrt((x0^2)+((v0/omega)^2))
Teta=atan(v0/omega/x0)

plot(t,x,'LineWidth',2)
hold on
plot([0 5],[0.04123 0.04123],'--r','LineWidth',2)
hold on
plot([0.266 0.266],[-0.04123 0.04123],'--r','LineWidth',2)
hold off
xlabel('t [sec]','FontSize',12)
ylabel('x [m]','FontSize',12)
grid
```

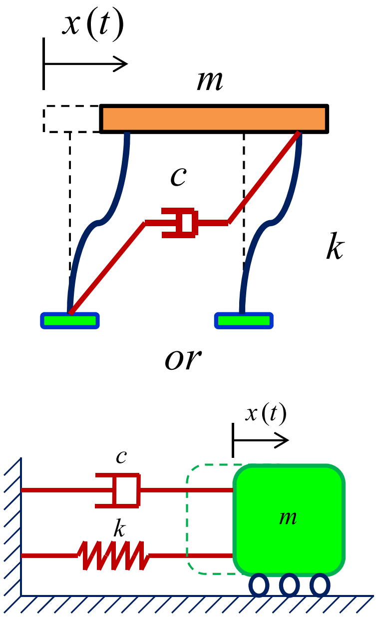
SDOF: Free Vibration

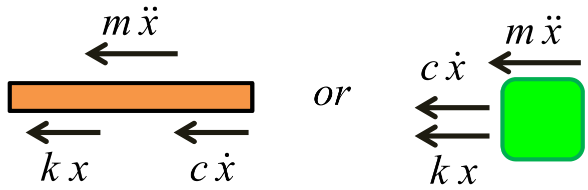
IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی:

برای در نظر گرفتن میرایی ذاتی خود سازه یک میراگر مجازی با میرایی کلاسیک به سازه اضافه می‌شود.

شرایط اولیه $@t=0\,,\begin{cases} x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \end{cases}$





$$\sum F=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\,\ddot{x}(t)+c\,\dot{x}(t)+k\,x(t)=0} \qquad (5)$$

برای محاسبه $x(t)$ باید معادله دیفرانسیل (5) را حل کرد.

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی:

از رابطه (5) می‌توان نتیجه گرفت

$$(5):\quad m\,\ddot{x}+c\,\dot{x}+k\,x=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}+2\xi\omega\,\dot{x}+\omega^2\,x=0}$$

که در آن

$c_{cr}=2m\omega$	ثابت میرایی نظیر حالت میرایی بحرانی
$\xi=\dfrac{c}{c_{cr}}=\dfrac{c}{2m\omega}$	نسبت میرایی یا ضریب میرایی

با تشکیل معادله مشخصه خواهیم داشت

$$z^2+2\xi\omega\,z+\omega^2=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=(2\xi\omega)^2-4(1)(\omega^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta=4\omega^2(\xi^2-1)} \quad \Rightarrow \quad z_{1,2}=\frac{-(2\xi\omega)\pm\sqrt{\Delta}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2}=\frac{-2\xi\omega\pm\sqrt{4\omega^2(\xi^2-1)}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_{1,2}=-\xi\omega\pm\omega\sqrt{\xi^2-1}} \qquad (6)$$

برای جواب‌های z_1 و z_2 در رابطه (6) با توجه به مقدار نسبت میرایی ξ سه حالت ممکن است رخ دهد.

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی - حالت اول $\xi = 1$

$$\boxed{z_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (6)$$

زیر رادیکال صفر باشد یعنی $\xi = 1$ که به آن میرایی بحرانی یا حدی (**Critical Damping**) می‌گویند زیرا:

$$\boxed{\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2m\omega = c_{cr} \quad \text{همان میرایی بحرانی است.}}$$

$$\xi = 1 \overset{(6)}{\Rightarrow} z_{1,2} = -\cancelto{1}{\xi}\omega \pm \omega\sqrt{\cancelto{0}{\xi^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = z = -\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = (A + Bt)e^{-\omega t}} \quad (7)$$

برای به دست آوردن ثابت‌های A و B در معادله (7) باید شرایط اولیه در آن برقرار باشد.

$$@t = 0 \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = (A + B(0))e^{-\omega(0)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = x_0}$$

$$@t = 0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_0 = Be^{-\omega(0)} - \omega(A + B(0))e^{-\omega(0)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \omega x_0 + \dot{x}_0}$$

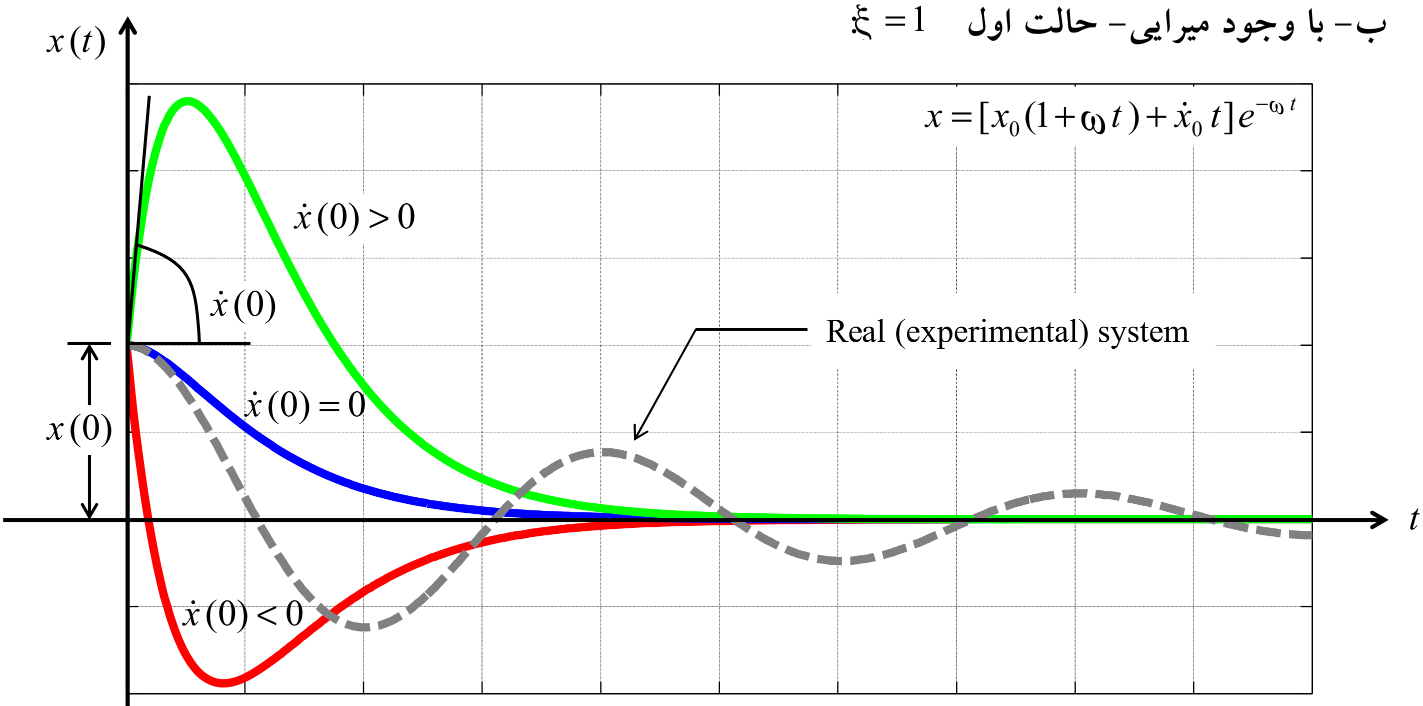
با جایگذاری مقادیر A و B در رابطه (7) خواهیم داشت

معادله ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF با میرایی بحرانی

$$\boxed{x = [x_0(1 + \omega t) + \dot{x}_0 t]e^{-\omega t}} \quad (8)$$

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی - حالت اول $\xi = 1$

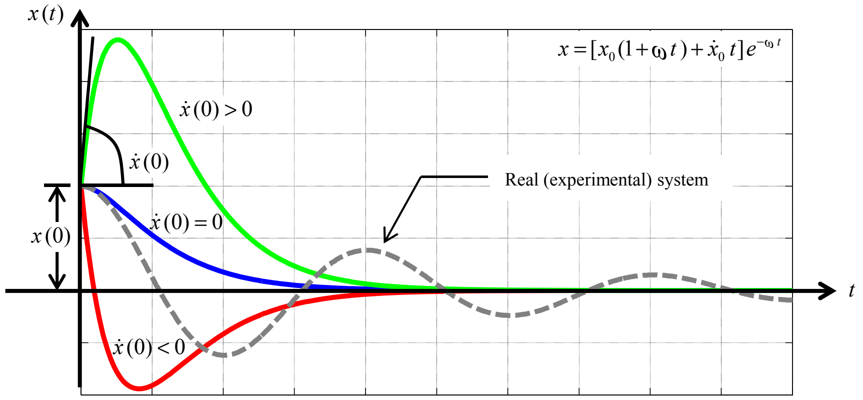


پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم دارای میرایی بحرانی

با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت که حالت میرایی بحرانی $\xi = 1$ نماینده خوبی برای حالت واقعی نمی‌باشد

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت اول $\xi = 1$



پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم دارای میرایی بحرانی

همان‌طور که از نمودار پیدا است پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم با میرایی بحرانی هیچ‌گونه نوسانی حول محور تغییرمکان صفر ندارد. و به دلیل قسمت نمایی معادله که دارای توان منفی $e^{-\omega t}$ است پاسخ خیلی سریع به سمت صفر میل می‌کند.

میرایی بحرانی، کمترین مقدار میرایی است که به ازای آن، هیچ نوسانی در پاسخ ارتعاش آزاد سیستم به وجود نمی‌آید. به عبارت دیگر میرایی بحرانی عبارت است از، کمترین مقدار میرایی لازم برای حذف نوسان‌ها در پاسخ ارتعاش آزاد سازه.

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت دوم $\xi > 1$:

$$\boxed{z_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (6)$$

اگر میرایی بزرگتر از حالت بحرانی باشد آن را میرایی فوق بحرانی یا میرایی زیاد (**Over damped**) می‌گویند در این حالت $\xi > 1$است:

$$\xi > 1 \overset{(6)}{\Rightarrow} z_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \Rightarrow x = Ae^{(-\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2-1})t} + Be^{(-\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2-1})t}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^{-\xi\omega t}\left(Ae^{(\omega\sqrt{\xi^2-1})t} + Be^{(-\omega\sqrt{\xi^2-1})t}\right)} \quad (9)$$

با اعمال شرایط اولیه و به دست آوردن مقادیر A و B و با جایگذاری آن‌ها در رابطه (9) خواهیم داشت

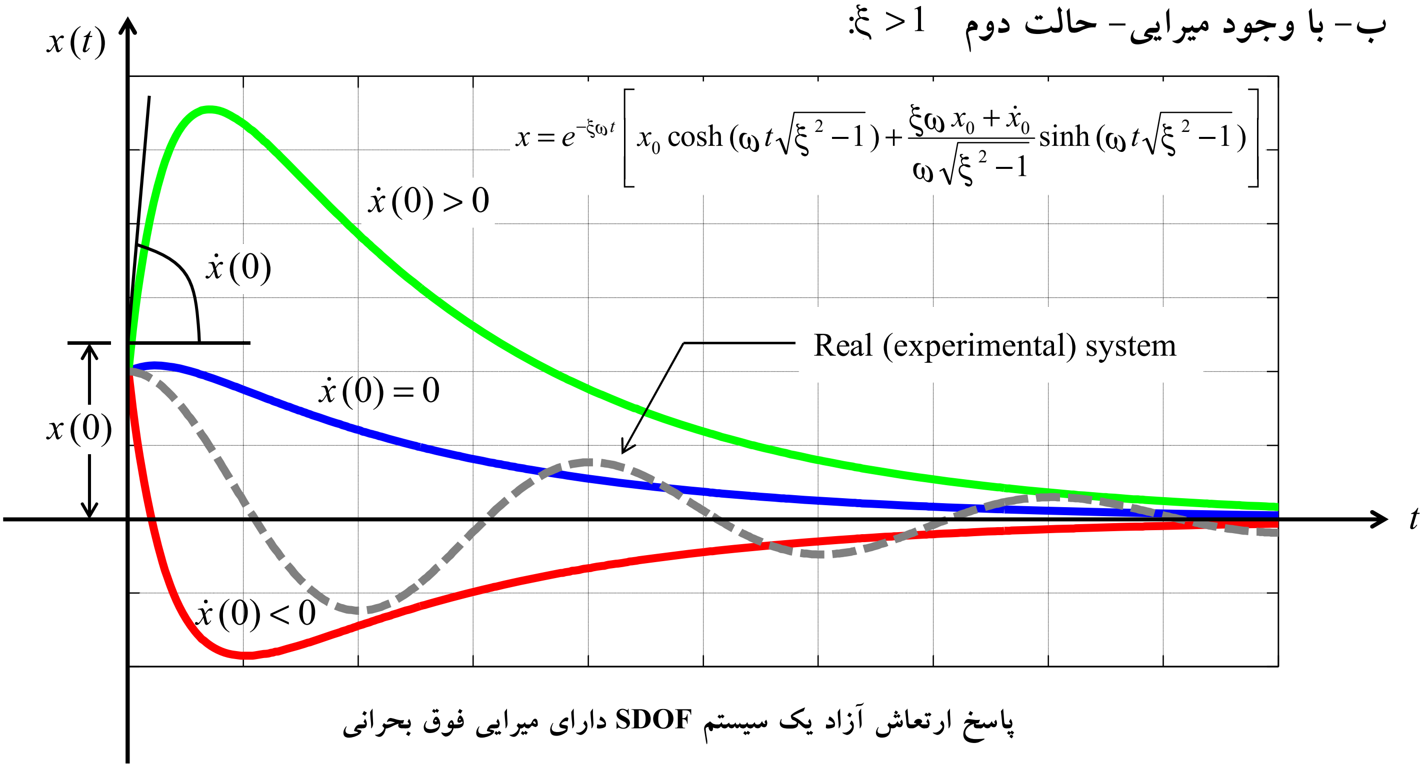
$$\boxed{x = e^{-\xi\omega t}\left[x_0 \cosh(\omega t\sqrt{\xi^2 - 1}) + \frac{\xi\omega x_0 + \dot{x}_0}{\omega\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh(\omega t\sqrt{\xi^2 - 1})\right]} \quad (10)$$

معادله ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF با میرایی فوق بحرانی

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت دوم $\xi > 1$:



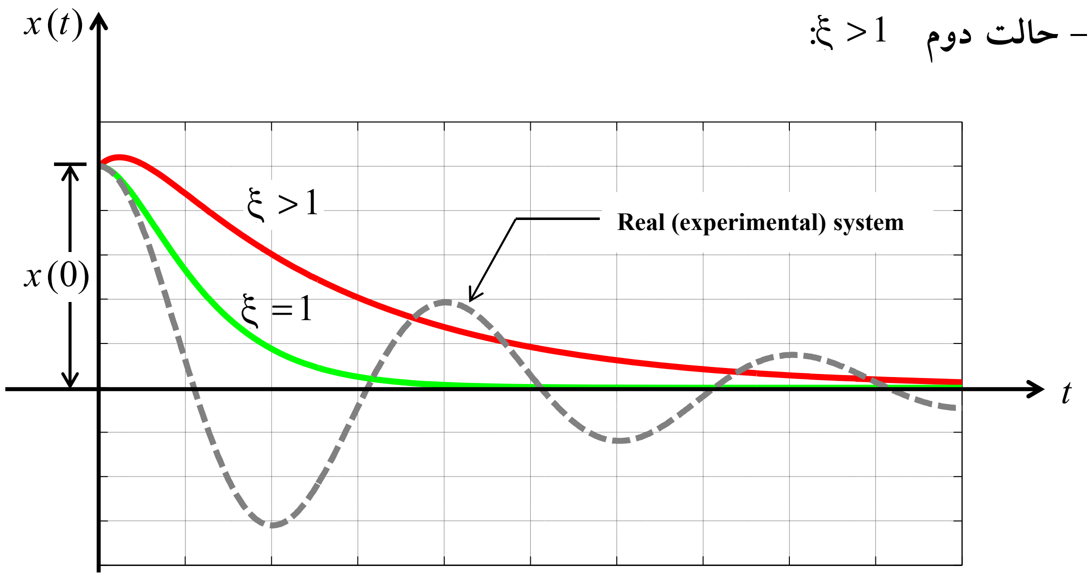
پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF دارای میرایی فوق بحرانی

با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت که حالت میرایی فوق بحرانی $\xi > 1$ نماینده خوبی برای حالت واقعی نمی‌باشد

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت دوم $\xi > 1$:



مقایسه پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF دارای میرایی بحرانی و فوق بحرانی

پاسخ یک سیستم با میرایی فوق بحرانی، به صورت نوسانی نبوده بلکه شبیه حرکت یک سیستم با میرایی بحرانی است؛ با این تفاوت که به علت افزایش نسبت میرایی، سیستم با سرعت کمتری به حالت سکون بر می‌گردد. لازم به ذکر است که سیستم‌های میرا شونده فوق بحرانی در سازه‌های مهندسی عمران متداول نمی‌باشد.

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت سوم $\xi < 1$:

$$\boxed{z_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}} \qquad (6)$$

زیر رادیکال منفی باشد یعنی $\xi < 1$ که به آن میرایی زیر بحرانی (**Under Damping**) یا میرایی کم می‌گویند:

$$\xi < 1 \;\Rightarrow\; \xi^2 < 1 \;\overset{(6)}{\Rightarrow}\; z_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{(-1)(1-\xi^2)} \;\Rightarrow\; z_{1,2} = \underbrace{-\xi\omega}_{G_1} \pm i\underbrace{\omega\sqrt{1-\xi^2}}_{G_2}$$

$$\Rightarrow\; x = e^{G_1 t}(A\cos G_2 t + B\sin G_2 t) \;\Rightarrow\; \boxed{x = e^{-\xi\omega t}[A\cos(\omega_D\, t) + B\sin(\omega_D\, t)]} \qquad (11)$$

که در آن

ω_D : فرکانس نظیر حالت میرایی کم یا فرکانس طبیعی دایره‌ای میرا شونده (Damped Natural Circular Frequency) می‌نامند.

$$\boxed{\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}}$$

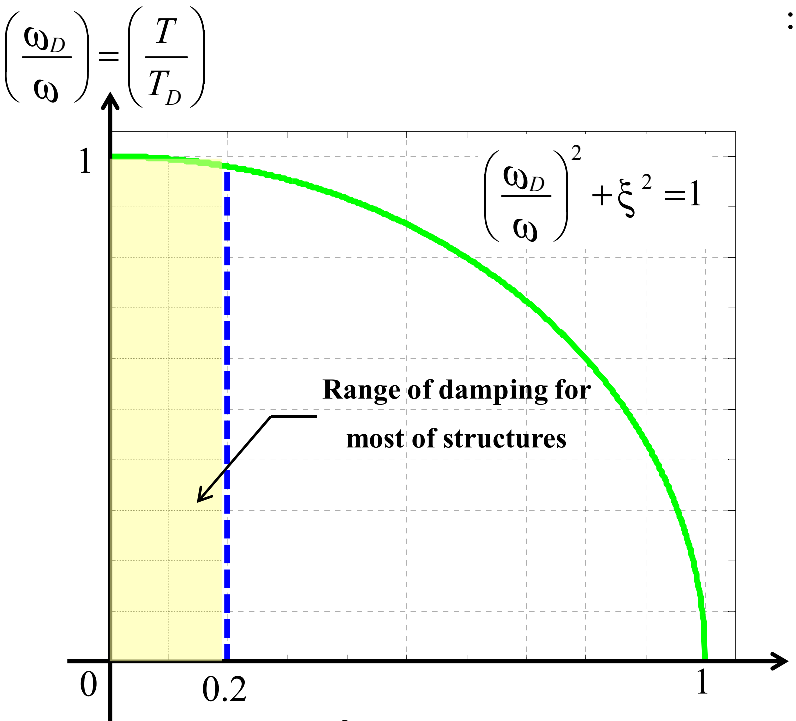
T_D : پریود نظیر حالت میرایی کم (زمان تناوب دینامیکی) یا پریود میرا شده (Damped Period)

$$\boxed{T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت سوم $\xi < 1$:



رابطه بین نسبت $\frac{\omega_D}{\omega}$ و ξ

با توجه به نسبت‌های میرایی که در سیستم‌های سازه‌ای عادی با آن روبه‌رو هستیم $(\xi < 20\%)$ ، مقدار فرکانس طبیعی دایره‌ای میرا شونده (ω_D) با توجه به نمودار نشان داده شده اختلاف کمی با فرکانس طبیعی دایره‌ای نامیرا (ω) دارد.

$$\boxed{if \quad \xi < 20\% \;\Rightarrow\; \begin{matrix} \omega_D \cong \omega \\ T_D \cong T \end{matrix}}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی - حالت سوم $\xi < 1$:

RECOMMENDED DAMPING VALUES

Stress Level	Type and Condition of Structure	Critical Damping (%)
Working stress, no more than about yield point	Vital piping	1 to 2
	Welded steel, prestressed concrete, well reinforced concrete (only slight cracking)	2 to 3
	Reinforced concrete with considerable cracking	3 to 5
	Bolted and / or riveted steel, wood structures with nailed or bolted joints	5 to 7
At or just below yield point	Vital piping	2 to 3
	Welded steel, prestressed concrete (without complete loss in prestress)	5 to 7
	Prestressed concrete with no prestress left	7 to 10
	Reinforced concrete	7 to 10
	Bolted and / or riveted steel, wood structures, with bolted joints	10 to 15
	Wood structures with nailed joints	15 to 20

N. M. Newmark and W. J. Hall, Earthquake Spectra and Design, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی - حالت سوم $\xi < 1$:

$$\boxed{x = e^{-\xi\omega t}[A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)]} \qquad (11)$$

برای به دست آوردن ثابت‌های A و B در معادله (11) باید شرایط اولیه در آن برقرار باشد.

$$@t=0 \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = x_0}$$

$$@t=0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_0 = -\xi\,\omega\,A + B\omega_D \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\dot{x}_0 + x_0\,\xi\,\omega}{\omega_D}}$$

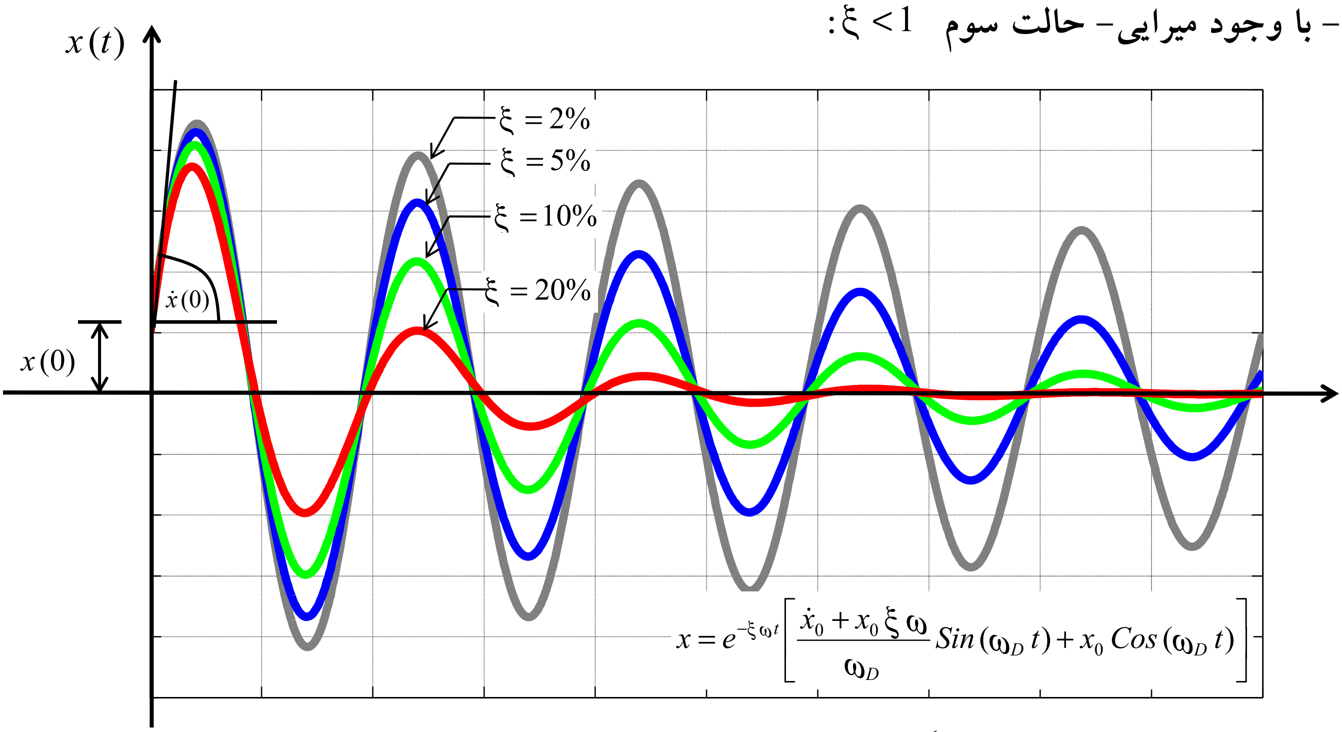
با جایگذاری مقادیر A و B در رابطه (11) خواهیم داشت

معادله ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF با میرایی زیر بحرانی

$$\boxed{x = e^{-\xi\omega t}\left[\frac{\dot{x}_0 + x_0\,\xi\,\omega}{\omega_D} Sin(\omega_D t) + x_0\,Cos(\omega_D t)\right]} \qquad (12)$$

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت سوم $\xi < 1$:



مقایسه پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF با ضریب‌های میرایی زیر بحرانی متفاوت

با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت که حالت میرایی زیر بحرانی $\xi < 1$ نماینده خوبی برای حالت واقعی می‌باشد

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت سوم $\xi < 1$:

معادله ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF با میرایی زیر بحرانی را می‌توان مشابه با حالت بدون میرایی به صورت برداری نیز نشان داد.

$$\boxed{x = \rho\, e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta)} \qquad (13)$$

دامنه جواب : $\rho = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_D}\right)^2}$

زاویه اختلاف فاز : $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{x_0 \omega_D}\right)$

کاهش پوش : $e^{-\xi \omega t}$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت سوم $\xi < 1$:

نوشتن معادلات به فرمت مقابل این مزیت را دارد که به سادگی می‌توان حداکثر ارتعاش را به دست آورد.

$$\boxed{x = \rho\, e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)} \qquad (13)$$

ارتعاش ماکزیمم زمانی اتفاق می‌افتد که سرعت برای بار اول صفر شود در نتیجه:

$$(13) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = -\rho\, e^{-\xi\omega t}[\xi\,\omega \cos(\omega_D t - \theta) + \omega_D \sin(\omega_D t - \theta)]} \qquad (14)$$

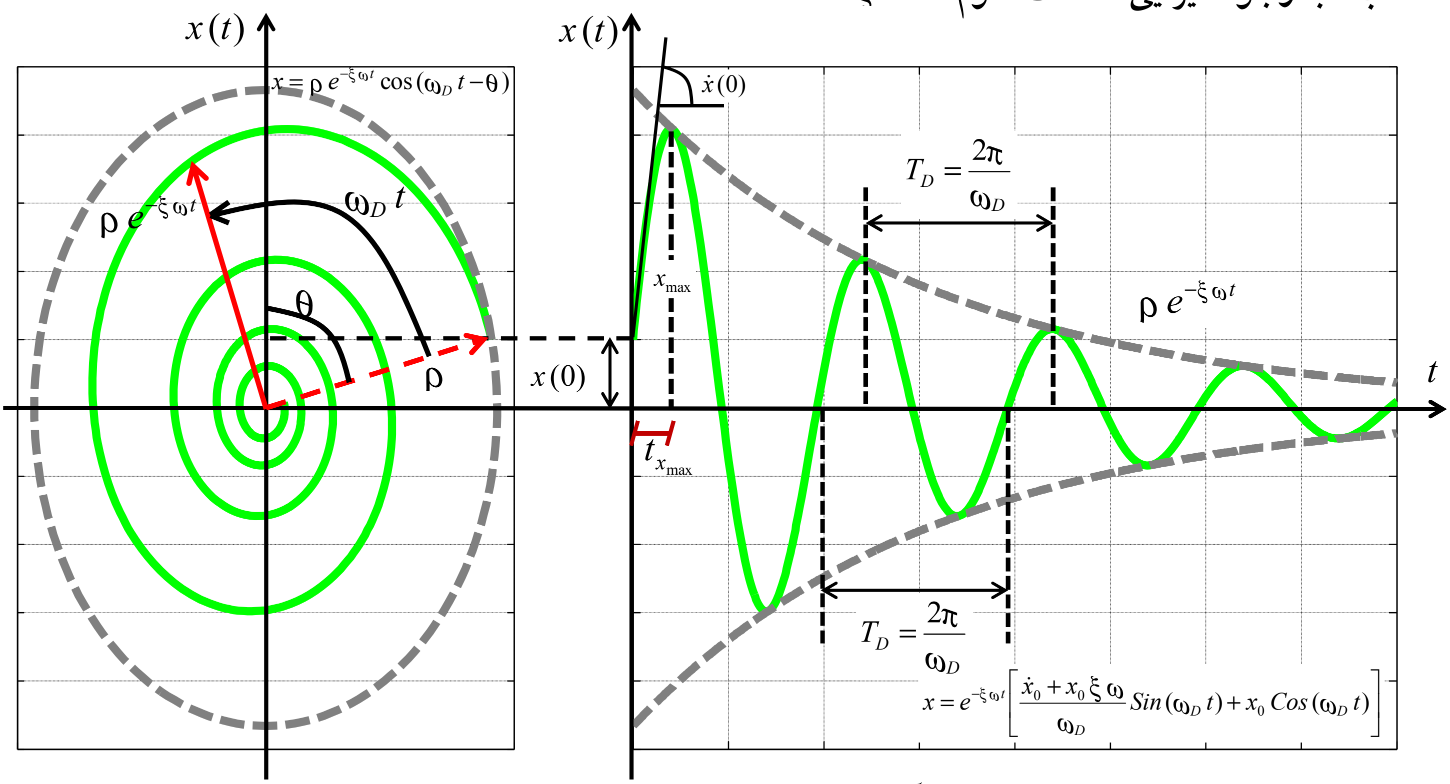
$$@x_{\max}: \quad \dot{x} = 0 \quad \overset{(14)}{\Rightarrow} \quad \xi\,\omega \cos(\omega_D t - \theta) + \omega_D \sin(\omega_D t - \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{x_{\max}} = \frac{\theta}{\omega} - \frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \qquad (15)$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت سوم $\xi < 1$:

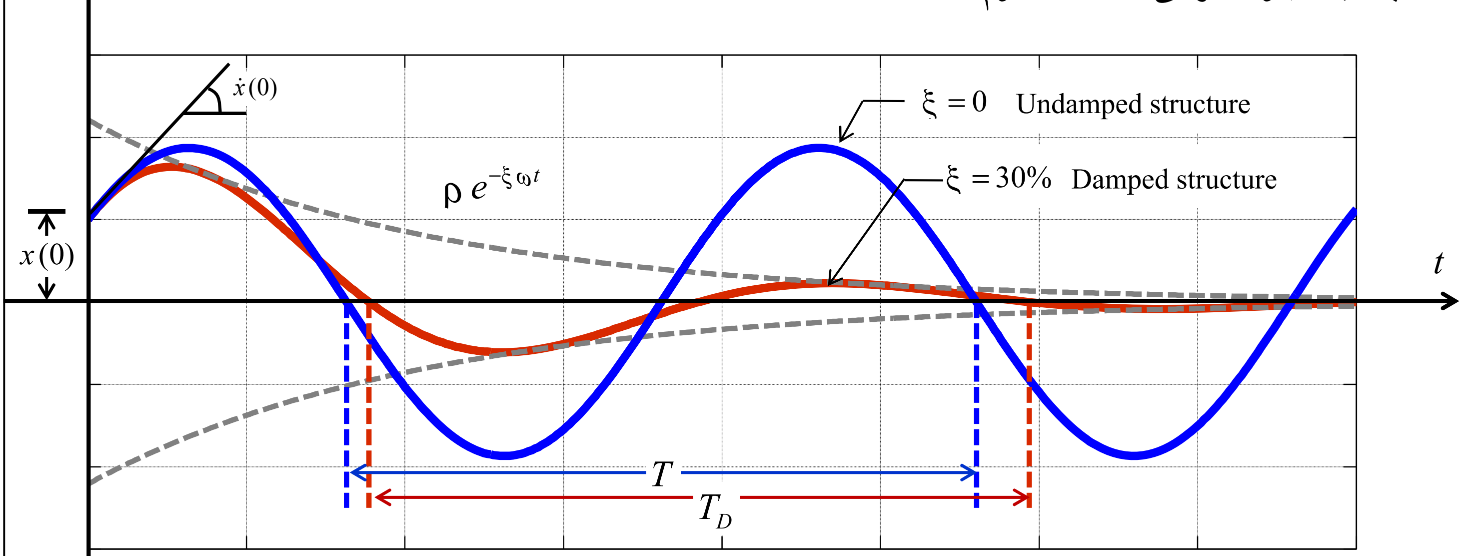


پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم SDOF دارای میرایی زیر بحرانی

SDOF: Free Vibration

.IV ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

ب- با وجود میرایی- حالت سوم $\xi < 1$:



مقایسه پاسخ ارتعاش آزاد سیستم میرا شونده و نامیرا

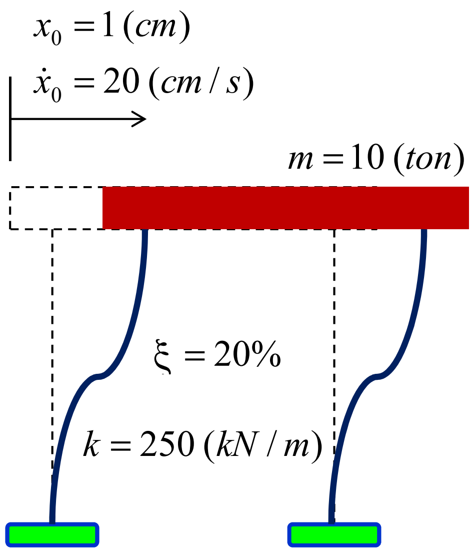
$$\boxed{\xi \uparrow \;\Rightarrow\; \omega_D < \omega \;\Rightarrow\; T_D > T}$$

در ارتعاش نامیرا دامنه ارتعاش ثابت است. اما در ارتعاش میرا دامنه ارتعاش در هر تناوب کوچکتر می‌شود.

SDOF: Free Vibration

.IV ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

مثال-۸: یک سیستم SDOF به جرم $10\,ton$ ، سختی $250\,kN/m$ و ضریب میرایی $\xi = 20\%$ دارای حرکت ارتعاش آزاد است. با فرض آن که جابجایی اولیه و سرعت اولیه به ترتیب $1cm$ و $20\,cm/s$ باشد؛ معادله حرکت این سیستم SDOF را تعیین کنید. همچنین حداکثر جابجایی و زاویه اختلاف فاز را به دست آورید.



SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

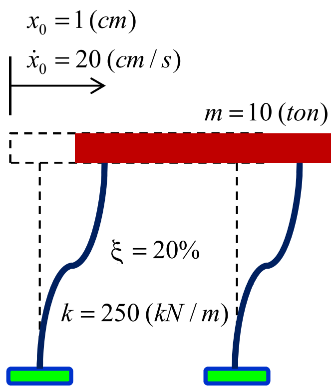
پاسخ مثال ۸–:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250\times10^3\ (N/m)}{10\times10^3\ (kg)}} \Rightarrow \boxed{\omega = 5\ (rad/s)}$$

حتی با ضریب میرایی 20%

$$\Rightarrow \boxed{\omega_D = 4.9\ (rad/s) \approx \omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_D = 1.282\ (\text{sec})}$$



$$\boxed{x = e^{-t}\left[0.043\, Sin\,(4.9\,t) + 0.01\, Cos\,(4.9\,t)\right]}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال ۸–:

$$\boxed{\rho = 0.044m}$$

$$\boxed{\theta = 1.34\ (rad)}$$

$$\boxed{x(t) = 0.044\, e^{-t} \cos\,(4.9\,t - 1.34)}$$

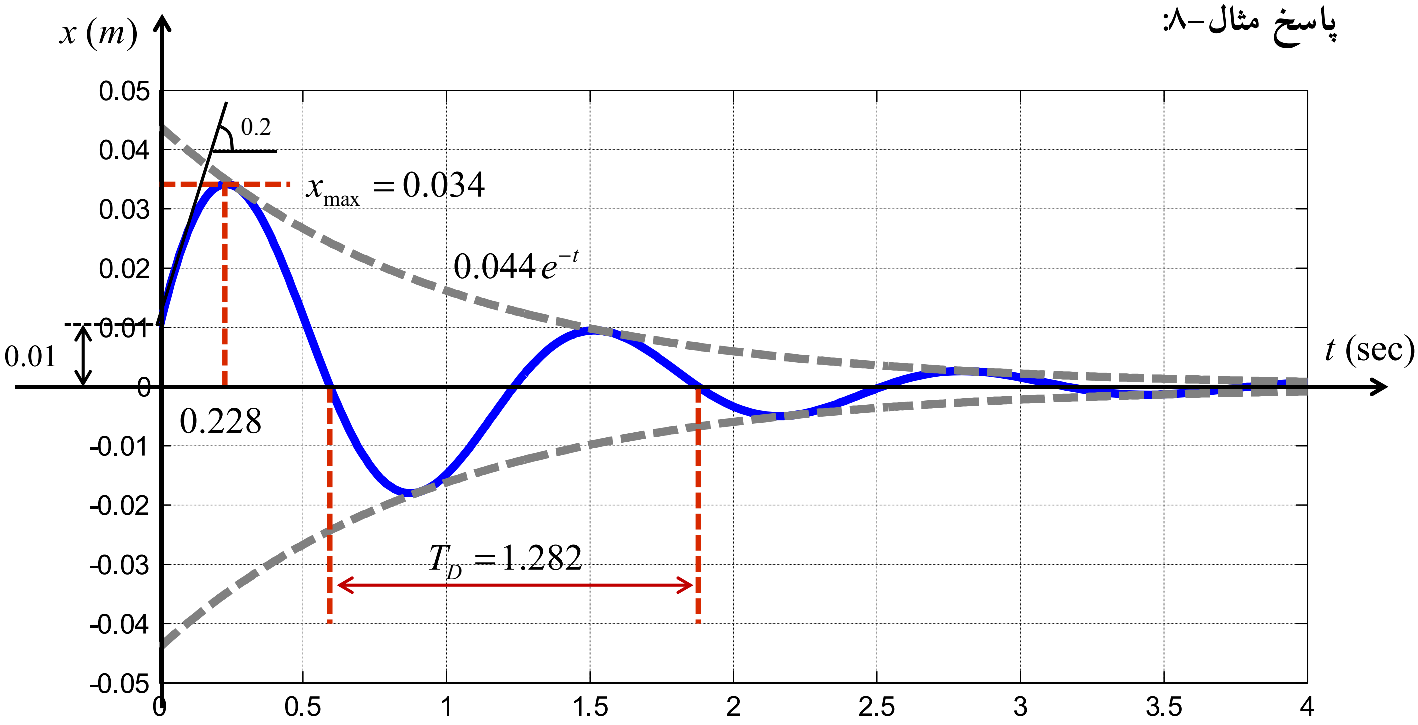
$$\boxed{t_{x_{max}} = 0.228\ (\text{sec})}$$

$$\boxed{x_{max} = 0.034\ (m)}$$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

پاسخ مثال–۸:



پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF دارای ضریب میرایی $\xi = 20\%$

SDOF: Free Vibration

IV. ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

Matlab Code (M09.m)

پاسخ مثال–۸:

```
clc
clf
clear
format short g
m=10*1e3;
k=250*1e3;
x0=0.01;
v0=0.2;
xi=0.2;
omega=sqrt(k/m);
T=4;
t=0:0.01:T;
omegaD=omega*sqrt(1-xi^2);
TD=2*pi/omegaD
ro=sqrt(((x0)^2)+(((v0+xi*omega*x0)/omegaD)^2));
teta=atan((v0+xi*omega*x0)/(x0*omegaD));
for i=1:length(t)
    x1(i)=(exp(-xi*omega*t(i)))*((x0*cos(omegaD*t(i)))+((v0+xi*omega*x0)/omegaD)*sin(omegaD*t(i)));
    x2(i)=ro*exp(-xi*omega*t(i));
    x3(i)=-ro*exp(-xi*omega*t(i));
end
```

SDOF: Free Vibration

.IV ارتعاش آزاد (Free Vibration) یک سیستم SDOF

Matlab Code (M09.m)

پاسخ مثال-۸:

```
t0=(teta/omega)-(1/omega)*atan(xi*omega/omegaD)
xt0=ro*exp(-t0)*cos(omegaD*t0-teta)
plot(t,x1,'b','LineWidth',3)
hold on
plot(t,x2,'--r','LineWidth',3)
hold on
plot(t,x3,'--r','LineWidth',3)
hold on
plot([t0 t0],[0 xt0],'--r','LineWidth',2)
hold on
plot([0 2*t0],[xt0 xt0],'--r','LineWidth',2)
hold on
plot([0.5945 0.5945],[0 -0.04],'--r','LineWidth',2)
hold on
plot([1.8771 1.8771],[0 -0.04],'--r','LineWidth',2)
hold off
grid
```


SDOF: Free Vibration

.V روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

مشخصات میرایی واقعی در سیستم‌های سازه‌ای عادی بسیار پیچیده است و تعیین آن مشکل می‌باشد. به طور متداول میرایی سازه‌های واقعی را برحسب نسبت‌های میرایی ویسکوز معادل ξ بیان می‌کنند. که بیان‌گر شدت میرایی نظیر شرایط ارتعاش آزاد است.

معمولا در آزمایشگاه به دو روش می‌توان نسبت میرایی را تعیین کرد:

1) روش کاهش لگاریتمی

2) روش نیم دامنه

هر دو روش براساس رابطه ارتعاش آزاد سیستم SDOF با میرایی زیر بحرانی می‌باشد.

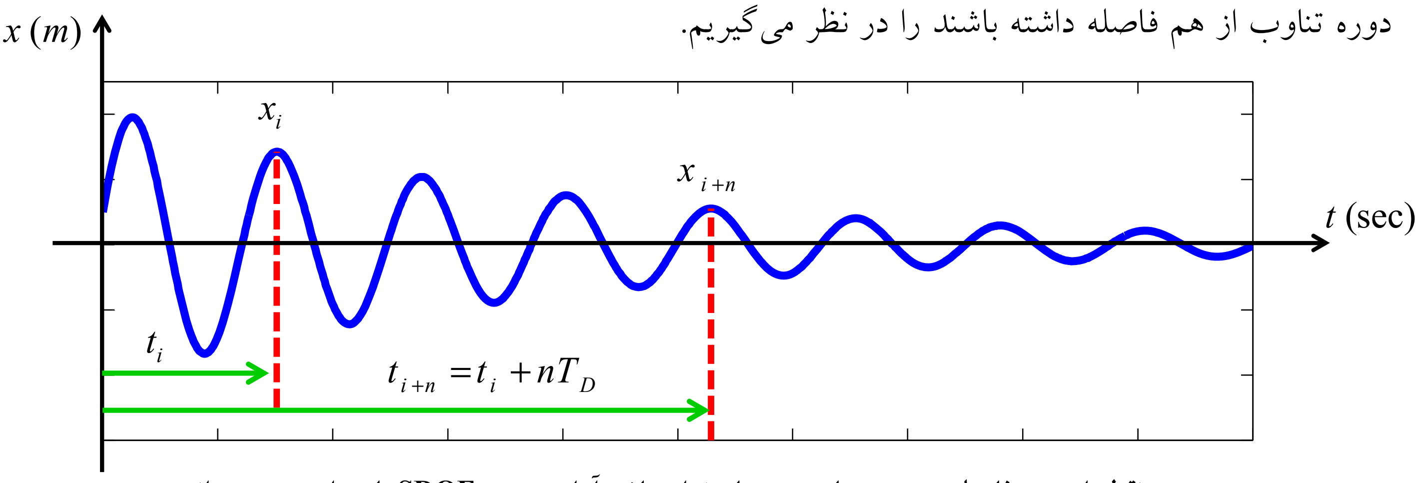
$$\boxed{x = \rho\, e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta)}$$

SDOF: Free Vibration

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

1) روش کاهش لگاریتمی

در نمودار پاسخ جابجایی ارتعاش آزاد سیستم SDOF دارای میرایی زیر بحرانی دو نقطه اوج را به طوری که n دوره تناوب از هم فاصله داشته باشند را در نظر می‌گیریم.



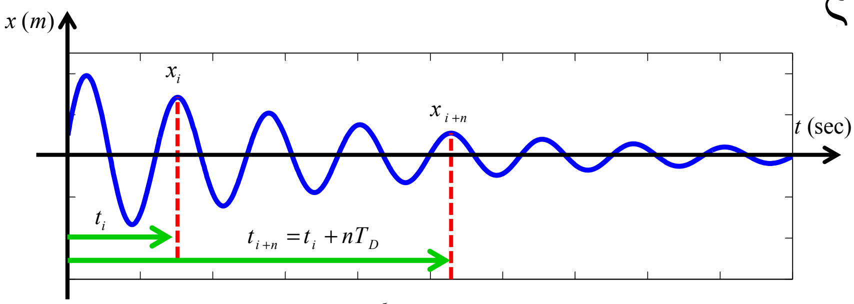
دو نقطه اوج به فاصله n دوره تناوب در پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF با میرایی زیر بحرانی

$$\boxed{\begin{aligned} @\quad t_i &\xrightarrow{(13)} x_i = \rho e^{-\xi\omega t_i}\cos(\omega_D t_i - \theta) \\ @\quad t_{i+n} &\xrightarrow{(13)} x_{i+n} = \rho e^{-\xi\omega t_{i+n}}\cos(\omega_D t_{i+n} - \theta) \end{aligned}} \qquad (16)$$

SDOF: Free Vibration

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

1) روش کاهش لگاریتمی



دو نقطه اوج به فاصله n دوره تناوب در پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF با میرایی زیر بحرانی

$$(16) \Rightarrow x_{i+n} = \rho e^{-\xi\omega(t_i + nT_D)}\cos(\omega_D(t_i + nT_D) - \theta) \Rightarrow x_{i+n} = \rho e^{-\xi\omega(t_i + T_D)}\cos(\omega_D(t_i + \frac{2n\pi}{\omega_D}) - \theta)$$

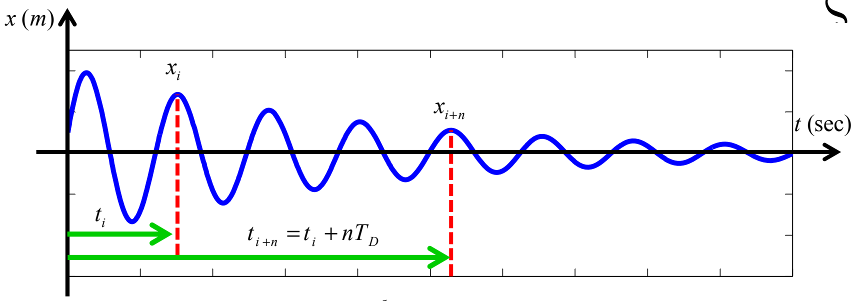
$$\Rightarrow x_{i+n} = \rho e^{-\xi\omega(t_i + nT_D)}\cos(\omega_D t_i - \theta + 2n\pi) \Rightarrow \boxed{x_{i+n} = \rho e^{-\xi\omega(t_i + nT_D)}\cos(\omega_D t_i - \theta)} \qquad (17)$$

$$(16)\ \&\ (17) \Rightarrow \frac{x_i}{x_{i+n}} = \frac{\rho e^{-\xi\omega t_i}\cos(\omega_D t_i - \theta)}{\rho e^{-\xi\omega(t_i + nT_D)}\cos(\omega_D t_i - \theta)} = \frac{e^{-\xi\omega t_i}}{e^{-\xi\omega(t_i + nT_D)}} \Rightarrow \boxed{\frac{x_i}{x_{i+n}} = e^{\xi\omega nT_D}} \qquad (18)$$

SDOF: Free Vibration

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

1) روش کاهش لگاریتمی



دو نقطه اوج به فاصله n دوره تناوب در پاسخ ارتعاش آزاد سیستم SDOF با میرایی زیر بحرانی

$$(18) \Rightarrow \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right) = \xi\,\omega\,nT_D \Rightarrow \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right) = \xi\,\omega\frac{2n\pi}{\omega_D} \Rightarrow \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right) = \xi\,\omega\frac{2n\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$$

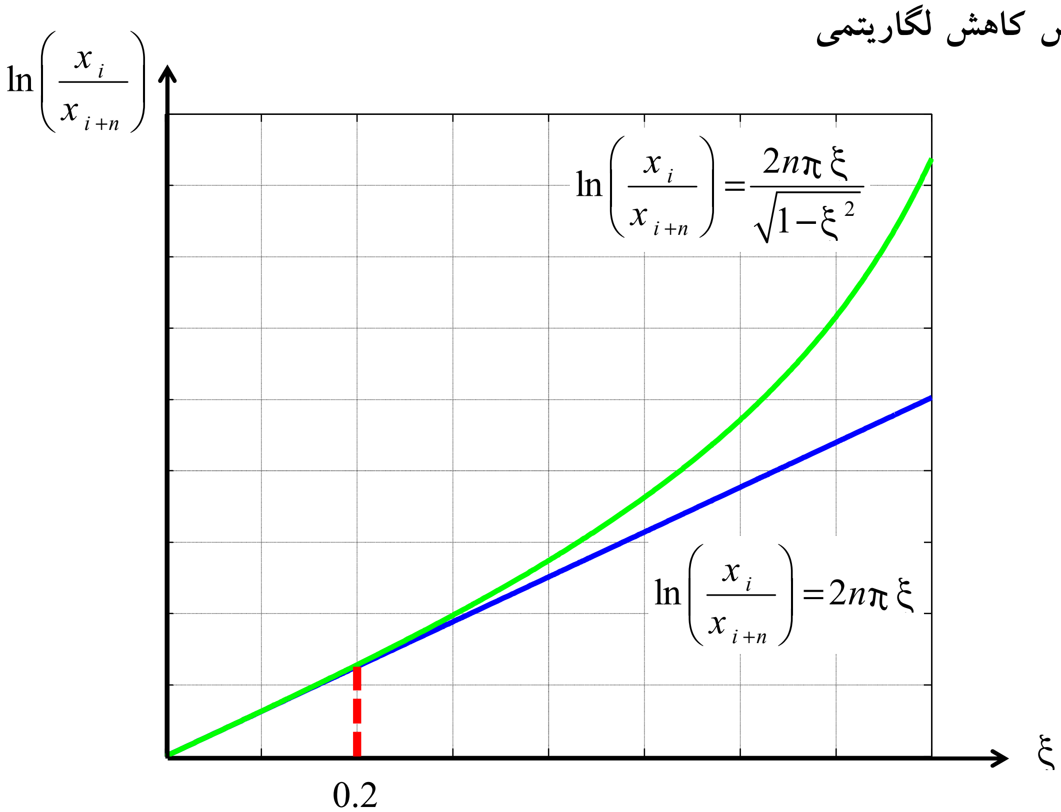
$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right) = \frac{2n\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (19)$$

$$for\quad \xi \le 0.2 \Rightarrow \sqrt{1-\xi^2} \approx 1 \overset{(19)}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right) = 2n\pi\,\xi \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2n\pi}\ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right)} \quad (20)$$

SDOF: Free Vibration

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

1) روش کاهش لگاریتمی



تطابق خوب رابطه دقیق و تقریبی برای ضریب میرایی کمتر از 20%

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

1) روش نیم دامنه

این روش در سیستم‌هایی که مقدار استهلاک (میرایی) آن‌ها بسیار کم ($\xi < 0.1\%$) است مناسب می‌باشد.

با استفاده از بسط تیلور می‌توان رابطه (20) را به صورت زیر نوشت:

یادآوری:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$(20) \quad \Rightarrow \quad \frac{x_i}{x_{i+n}} = 1 + 2n\pi\xi + \frac{(2n\pi\xi)^2}{2} + \frac{(2n\pi\xi)^3}{6} + \cdots$$

برای مقادیر کوچک ضریب میرایی ξ ، با تقریب خوب می‌توان بسط سری فوق را به دو جمله اول آن محدود کرد. در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x_i}{x_{i+n}} = 1 + 2n\pi\xi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{x_i}{x_{i+n}} - 1\right)} \quad (21)$$

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

روابط (19)، (20) و (21) را می‌توان برحسب شتاب نیز بیان کرد:

$$\boxed{\ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right) = \frac{2n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (19) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln\left(\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_{i+n}}\right) = \frac{2n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \& \quad T_D = \frac{t_{i+n} - t_i}{n}} \quad (22)$$

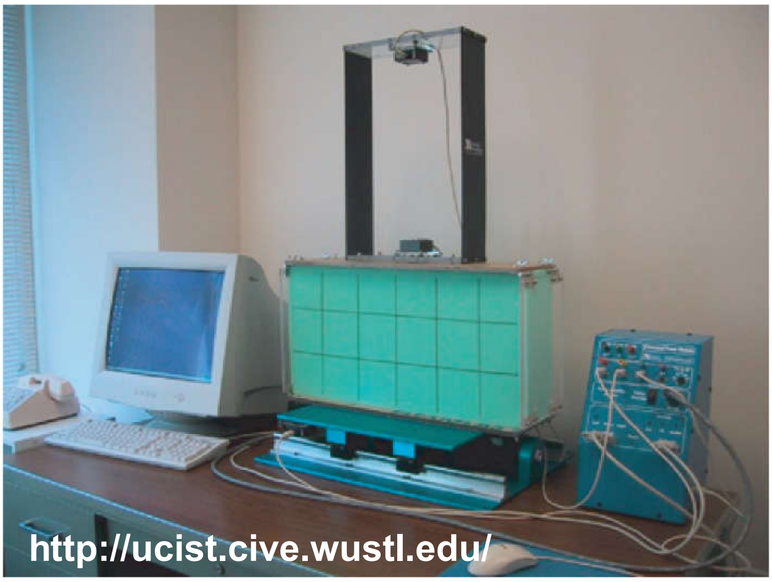
$$\boxed{\xi = \frac{1}{2n\pi}\ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right)} \quad (20) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = \frac{1}{2n\pi}\ln\left(\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_{i+n}}\right) \quad \& \quad T_D = \frac{t_{i+n} - t_i}{n}} \quad (23)$$

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{x_i}{x_{i+n}} - 1\right)} \quad (21) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_{i+n}} - 1\right) \quad \& \quad T_D = \frac{t_{i+n} - t_i}{n}} \quad (24)$$

SDOF: Free Vibration

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

مثال-۹: نتایج مربوط به اندازه‌گیری دو نقطه اوج از پاسخ شتاب ارتعاش آزاد سیستم SDOF نشان داده شده در جدول زیر آمده است. زمان تناوب و ضریب میرایی سیستم مورد نظر را تعیین نمایید.



Peak	Time, t_i (sec)	Peak, $\ddot{u}_i$ (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

SDOF: Free Vibration

V. روش‌های تعیین نسبت میرایی ξ

پاسخ مثال-۹:

Peak	Time, t_i (sec)	Peak, $\ddot{u}_i$ (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

$$\boxed{T_D = 0.273\ (\text{sec})}$$

$$\boxed{\xi = 3.96\%}$$

SDOF: Free Vibration

VI. انرژی در ارتعاش آزاد

انرژی ورودی به یک سیستم SDOF به ازای اعمال تغییر مکان اولیه x_0 و سرعت اولیه $\dot{x}_0$ برابر است با:

$$\boxed{E_{Input} = \frac{1}{2} k\, x_0^{\,2} + \frac{1}{2} m\, \dot{x}_0^{\,2}} \qquad (25)$$

در هر لحظه دلخواه t از ارتعاش، انرژی کل سیستم شامل انرژی جنبشی (E_K)، ناشی از شتاب ایجاد شده در جرم، و انرژی پتانسیل (E_S)، ناشی از انرژی کرنشی سازه تغییرشکل‌یافته، می‌باشد:

$$\boxed{\begin{aligned} E_K(t) &= \frac{1}{2} m\, \dot{x}_{(t)}^{\,2} \\ E_S(t) &= \frac{1}{2} k\, x_{(t)}^{\,2} \end{aligned}} \qquad (26)$$

SDOF: Free Vibration

VI. انرژی در ارتعاش آزاد

الف) سیستم SDOF بدون میرایی

در سیستم SDOF بدون میرایی داریم

$$if \quad \xi = 0 \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad x_{(t)} = x_0 \cos(\omega\, t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega\, t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_{(t)} = -\omega\, x_0 \sin(\omega\, t) + \dot{x}_0 \cos(\omega\, t)$$

در سیستم بدون میرایی همواره انرژی کل سازه در هر لحظه با مقدار انرژی ورودی به سیستم برابر است

$$\boxed{E_K(t) + E_S(t) = E_{Input} = cte} \qquad (27)$$

که در آن مقادیر E_K و E_S با جایگذاری رابطه‌های جابجایی و سرعت سیستم SDOF بدون میرایی به صورت می‌آید:

$$\boxed{E_K(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left[-x_0 \sin(\omega\, t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega\, t) \right]^2 \quad , \quad E_S(t) = \frac{1}{2} k \left[x_0 \cos(\omega\, t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega\, t) \right]^2} \qquad (28)$$

قابل ملاحظه است که انرژی کل، مستقل از زمان بوده و همواره مساوی انرژی ورودی است (همان اصل بقای انرژی در سیستم بدون میرایی در حال ارتعاش).

SDOF: Free Vibration

VI. انرژی در ارتعاش آزاد

الف) سیستم SDOF با میرایی

در سیستم SDOF با میرایی داریم

$$(13) \quad \Rightarrow \quad x_{(t)} = \rho\, e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_{(t)} = -\rho\, e^{-\xi \omega t} [\xi\, \omega \cos(\omega_D t - \theta) + \omega_D \sin(\omega_D t - \theta)]$$

با توجه به رابطه‌های سرعت و جابجایی برای سیستم SDOF دارای میرایی، انرژی جنبشی و پتانسیل با استفاده از رابطه (26) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\boxed{\begin{aligned} E_K(t) &= \frac{1}{2} m\rho^2 e^{-2\xi \omega t} [\xi\, \omega \cos(\omega_D t - \theta) + \omega_D \sin(\omega_D t - \theta)]^2 \\ E_S(t) &= \frac{1}{2} k\rho^2 e^{-2\xi \omega t} [\cos(\omega_D t - \theta)]^2 \end{aligned}} \qquad (29)$$

از رابطه (29) می‌توان نتیجه گرفت که

$$(29) \quad \Rightarrow \quad if \quad t \to \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} E_K(\infty) &= 0 \\ E_S(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

SDOF: Free Vibration

VI. انرژی در ارتعاش آزاد

الف) سیستم SDOF با میرایی

به علت استهلاک انرژی ناشی از میرایی، انرژی کل به صورت تابعی از زمان کاهش خواهد یافت

$$E(t) = E_K(t) + E_S(t) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2} \rho^2 e^{-2\xi \omega t} \left(m [\xi\, \omega \cos(\omega_D t - \theta) + \omega_D \sin(\omega_D t - \theta)]^2 + k [\cos(\omega_D t - \theta)]^2 \right)} \qquad (30)$$

مقدار کاهش انرژی به علت میرایی در فاصله زمانی 0 تا t برابر است با:

$$E_D(t) = \int_0^x f_D(t)\, dx = \int_0^x c\dot{x}\, dx = \int_0^t c\dot{x}\, (\dot{x}\, dt) \quad \Rightarrow \quad E_D(t) = \int_0^t c\dot{x}^2 dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_D(t) = \int_0^t c\rho^2 e^{-2\xi \omega t} [\xi\, \omega \cos(\omega_D t - \theta) + \omega_D \sin(\omega_D t - \theta)]^2 dt} \qquad (31)$$

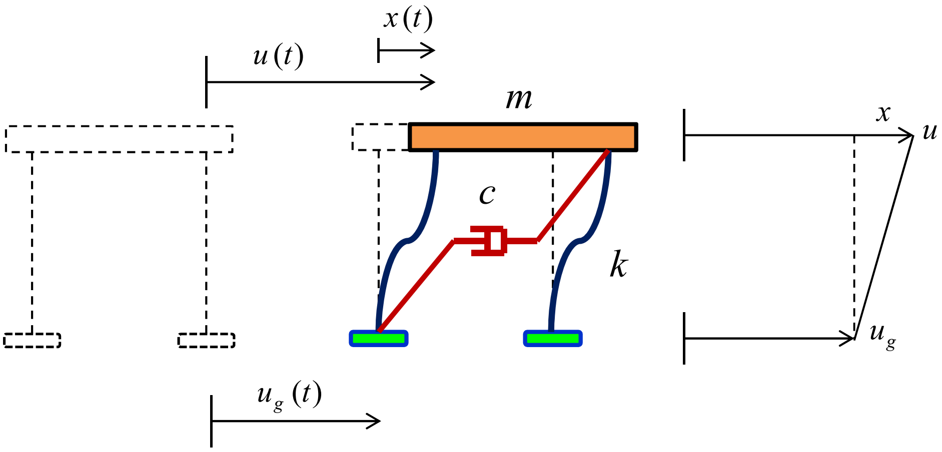
با میل کردن t به سمت بینهایت در رابطه (31)، انرژی مستهلک شده مساوی انرژی ورودی شده و انرژی باقیمانده صفر می‌گردد

SDOF: Free Vibration

VII.اثر زلزله بر سازه‌ها

با جابجایی زمین، سازه جابجا می‌شود. علاوه بر این نیز خود سازه نیز جابجایی (تغییر مکان) خواهد داشت.

جابجایی کل سازه ترکیبی از جابجایی زمین و جابجایی ناشی از ارتجاعی بودن سازه است:



$$\boxed{u(t) = u_g(t) + x(t)} \quad (32)$$

که در آن

$u(t)$: جابجایی کل سازه

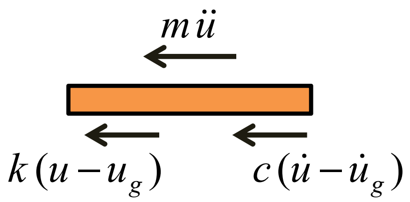
$u_g(t)$: جابجایی زمین در اثر زلزله

$x(t)$: جابجایی محلی (Local Displacement) ناشی از تغییر شکل سازه

اگر سازه صلب باشد جابجایی کل برابر با فقط جابجایی زمین خواهد بود زیرا سازه تغییر شکل ندارد.

SDOF: Free Vibration

VII.اثر زلزله بر سازه‌ها



معادله حرکت برای دیاگرام جسم آزاد به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u}(t) + c[\dot{u}(t) - \dot{u}_g(t)] + k[u(t) - u_g(t)] = 0} \quad (33)$$

$$(32) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{u}(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{x}(t) \\ \dot{u}(t) - \dot{u}_g(t) = \dot{x}(t) \\ u(t) - u_g(t) = x(t) \end{cases} \quad \overset{(33)}{\Rightarrow} \quad m[\ddot{u}_g(t) + \ddot{x}(t)] + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

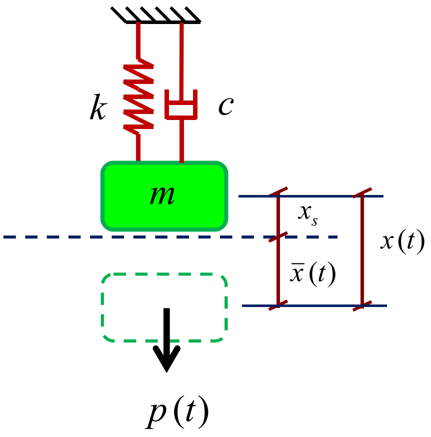
معادله حرکت سازه در اثر زلزله

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{u}_g(t)} \quad (34)$$

با توجه به رابطه (34) اثر زلزله بر سازه برابر است با جرم در شتاب زمین $m\ddot{u}_g(t)$

SDOF: Free Vibration

VIII.اثر نیروی وزن در معادله ارتعاش



در سیستم روبه‌رو نیروی خارجی $p(t)$ و نیروی وزن W به جرم m اعمال می‌گردد. جابجایی کل $x(t)$ از مجموع جابجایی استاتیکی x_s و جابجایی دینامیکی $\bar{x}(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{x(t)=\bar{x}(t)+x_s} \quad (35)$$

که در آن

$$x_s=\frac{W}{k}=cte$$

با نوشتن معادله تعادل خواهیم داشت:

$$\sum F=0 \quad \Rightarrow$$

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k\,x(t)=p(t)+W \quad \overset{(35)}{\Rightarrow} \quad m[\ddot{\bar{x}}(t)+\cancelto{0}{\ddot{x}_s}]+c[\dot{\bar{x}}(t)+\cancelto{0}{\dot{x}_s}]+k[\bar{x}(t)+x_s]=p(t)+k\,x_s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{\bar{x}}(t)+c\dot{\bar{x}}(t)+k\,\bar{x}(t)=p(t)} \quad (36)$$

با توجه به رابطه به دست آمده نیروی وزن وارد معادله ارتعاش نمی‌شود.