دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

Dynamic of Structures

Introduction to Dynamic of Structures

By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

Introduction to Dynamic of Structures

I. هدف اصلی از مطالعه درس دینامیک سازه‌ها

Manhattan Bridge (1909).
Brooklyn Bridge (1883).

آشنایی دانشجویان با مفاهیم پایه، تئوری‌ها و روش‌های دینامیک سازه‌ای است. همچنین یادگیری و انجام آنالیز سازه‌ها تحت اثر بارگذاری دینامیکی و شرایط اولیه (مانند سرعت و جابجایی اولیه).

II. مفاهیم و تعاریف کلی در دینامیک سازه‌ها

دینامیک: واژه دینامیک را می‌توان به طور ساده به عنوان عاملی تعریف کرد که با زمان تغییر می‌کند. بنابراین بار دینامیکی باری است که مقدار، راستا و یا موقعیت آن با زمان تغییر کند. به این ترتیب پاسخ سازه در مقابل بار دینامیکی، مثلا تغییرمکان‌ها و یا تنش‌های ایجاد شده نیز به صورت متغیر زمانی یا دینامیکی است.

نمونه‌هایی از بارگذاری‌های دینامیکی : باد، زلزله، نیروهای ناشی از امواج دریایی، اثر امواج ناشی از انفجار، ارتعاش پل‌ها در اثر بارهای متحرک و ... .

ارتعاش: اگر سازه‌ای تحت اثر بار دینامیکی قرار گیرد از حال سکون خارج شده و به ارتعاش در می‌آید.

ارتعاش‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- **ارتعاش اجباری (Forced Vibration)**: ارتعاش تحت اثر نیرو

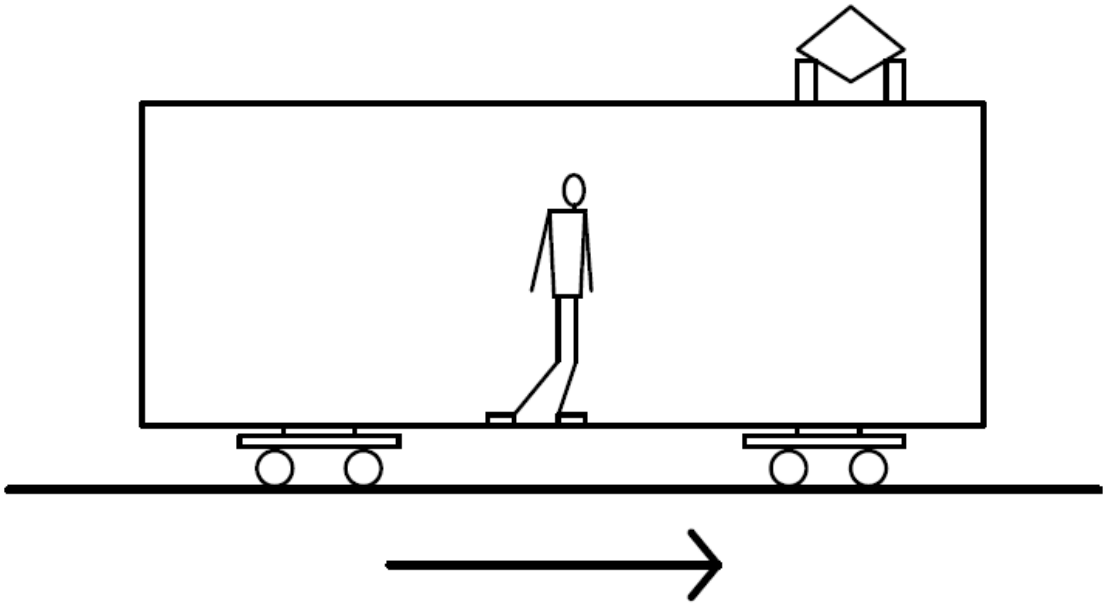
۲- **ارتعاش آزاد (Free Vibration)**: ارتعاش تحت شرایط اولیه.

در دینامیک سازه‌ها منظور از شرایط اولیه، جابجایی و سرعت اولیه می‌باشند.

Introduction to Dynamic of Structures

II. مفاهیم و تعاریف کلی در دینامیک سازه‌ها

در رشته مهندسی عمران اکثر سازه‌ها (ابنیه) تحت اثر نیروهای دینامیکی هستند. نیروهایی که مقدار (شدت)، جهت و احتمالا نقطه اثر آن‌ها با زمان تغییر می‌کنند. البته نرخ تغییرات فوق به حدی است که پدیده ارتعاش که مشخصه اصلی رفتار دینامیکی است در سازه به وجود می‌آید.



III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع سدها

بار دینامیکی ناشی از: زلزله، نیروهای هیدرودینامیکی (پدیده اندرکنش سازه، خاک و آب)، ارتعاش تجهیزات و ماشین‌های نیروگاه

Introduction to Dynamic of Structures

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع پل‌ها

بار دینامیکی ناشی از: زلزله، ترافیک، ترمز وسایل نقلیه، باد، ضربه و جریان رودخانه.

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع سیلوها

بار دینامیکی ناشی از: تخلیه سریع مواد ذخیره شده (Vidange ویدانژ کلمه فرانسوی معادل Emptying)، زلزله و حرکت تسمه‌ها.

Introduction to Dynamic of Structures

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع برج آب

بار دینامیکی ناشی از: زلزله، هیدرودینامیک و باد.

Introduction to Dynamic of Structures

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع توربین بادی

بار دینامیکی ناشی از: زلزله و باد.

Nysted Wind Farm (www.nystedwindfarm.com)

Introduction to Dynamic of Structures

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع اسکله و موج‌شکن

بار دینامیکی ناشی از: امواج دریا، زلزله، برخورد کشتی‌ها، جریان‌های دریایی و باد.

Tyra South – STAR platform

Harald Field (*www.maersk.com*)

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

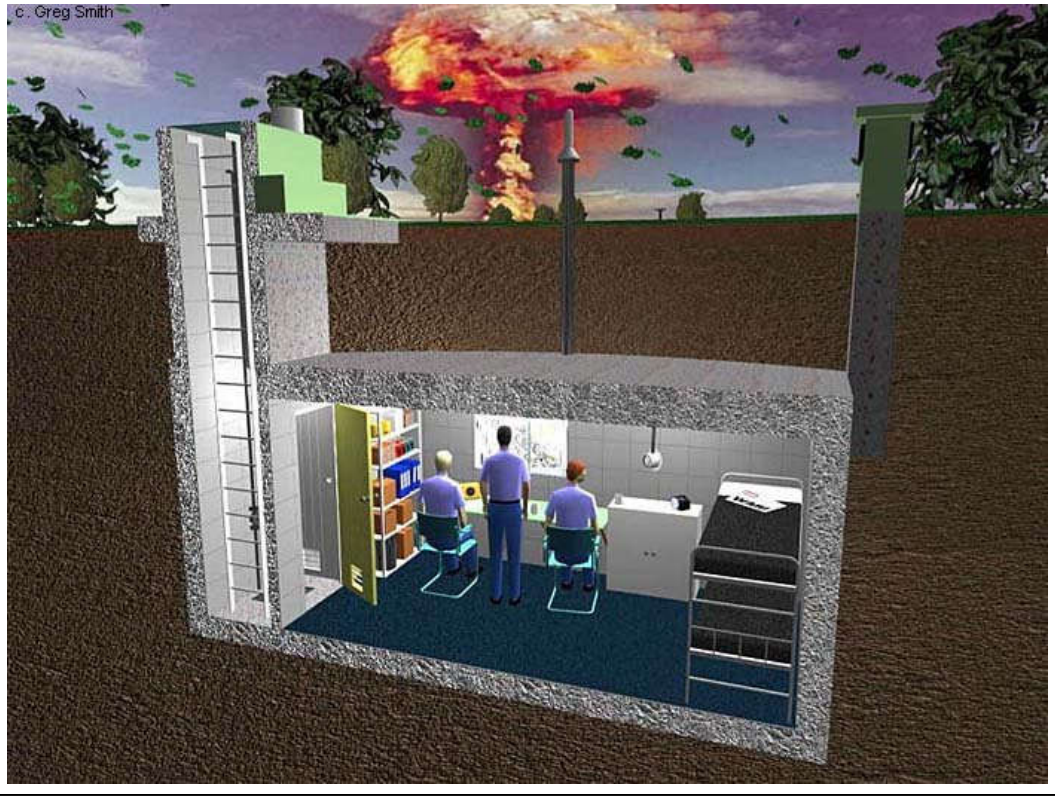
انواع دکل، دودکش و برج‌های خنک‌کننده.

بار دینامیکی ناشی از: زلزله و باد.

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع سازه‌های زیرزمینی (استحکامات) و پناه‌گاه‌ها

بار دینامیکی ناشی از: انفجار، برخورد مستقیم و زلزله.



Introduction to Dynamic of Structures

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع تاسیسات هسته‌ای

بار دینامیکی ناشی از: انفجار هسته‌ای، زلزله و برخورد هواپیما.

Bellefonte Nuclear Generating Station, Alabama , USA

(http://en.wikipedia.org/wiki/Bellefonte_Nuclear_Power_Plant)

Introduction to Dynamic of Structures

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع ورزشگاه‌ها

بار دینامیکی ناشی از: زلزله و تشویق تماشاچیان.

Maracanã Stadium, Rio de Janeiro, Brazil

(http://en.wikipedia.org/wiki/Maracana_stadium)

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع خطوط لوله برای انتقال

بار دینامیکی ناشی از: زلزله و عبور سیال (ضربه قوچ).

Introduction to Dynamic of Structures

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع ساختمان‌های بلند مرتبه

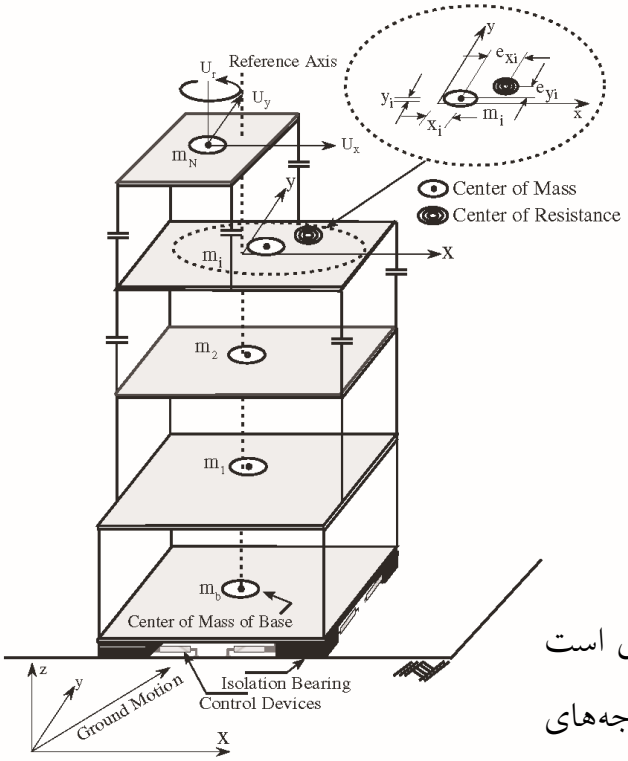
بار دینامیکی ناشی از: زلزله، باد، انفجار و حملات تروریستی

III. مثال‌هایی از سازه‌های عمرانی و بارگذاری دینامیکی

انواع تونل‌ها

بار دینامیکی ناشی از: عبور وسایل نقلیه سنگین (قطار) و زلزله.

IV. مدل‌سازی در دینامیک سازه‌ها و درجات آزادی (DOF: Degree of Freedom)



درجه آزادی (DOF: Degree of Freedom):

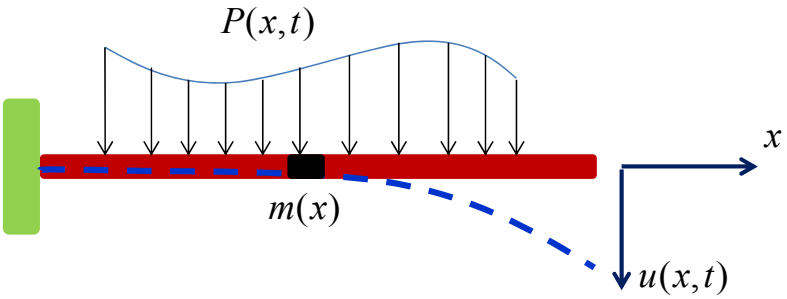
تعداد مولفه‌های مستقل تغییر مکان برای تعیین موقعیت تمامی جرم‌ها نسبت به موقعیت اولیه آن‌ها می‌باشد. در واقع درجه آزادی، پارامترهای مورد نیاز برای مشخص کردن رفتار سازه است. طبیعی است که هر چه تعداد جرم‌های متمرکز و تعداد درجات آزادی بیشتری را در نظر بگیریم، به رفتار واقعی سازه نزدیکتر خواهیم شد.

در حالت کلی یک سیستم پیوسته دارای بی‌نهایت درجه آزادی است اما با انتخاب یک مدل تحلیلی مناسب می‌توان تعداد درجه‌های آزادی را به تعدادی محدود و گاهی حتی یک درجه کاهش داد.

IV. مدل‌سازی در دینامیک سازه‌ها و درجات آزادی (DOF: Degree of Freedom)

مسئله اصلی در دینامیک سازه‌ها، جرم گسترده سازه‌ها می‌باشد. برای هر نقطه یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم در نظر گرفته می‌شود. برای اجتناب از حل بینهایت معادله دیفرانسیل سه روش ساده‌سازی پیشنهاد شده است:

۱- **مدل‌های پیوسته (Distributed or Continues Parameters)**: هر بخش از سازه به صورت مجزا در نظر گرفته شده و جرم هر قسمت به صورت گسترده مدل می‌شود. این روش به دلیل حجم بالای عملیات، کاربرد زیادی ندارد و فقط جنبه تحقیقاتی دارد.

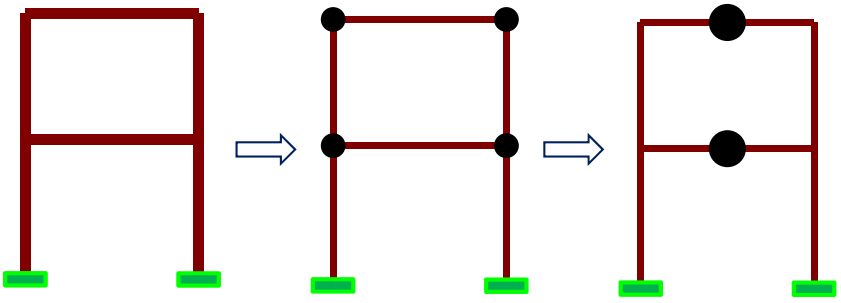


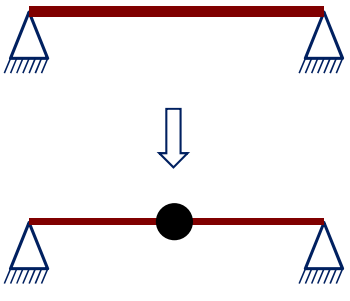
PDE: Partial Differential Equation

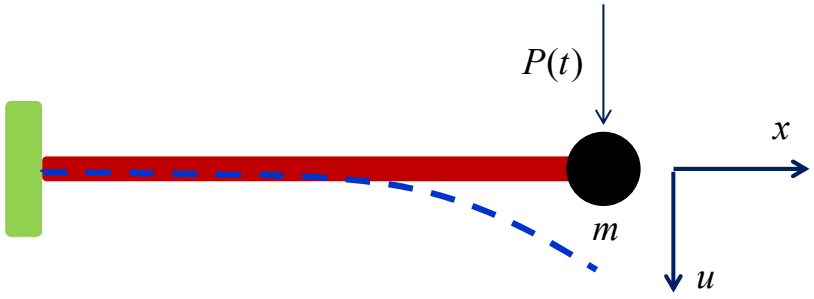
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=P(x,t)$$

IV. مدل‌سازی در دینامیک سازه‌ها و درجات آزادی (DOF: Degree of Freedom)

۲- **روش جرم متمرکز (Lumped Mass)**: جرم سازه را در برخی نقاط به صورت متمرکز فرض می‌گردد.





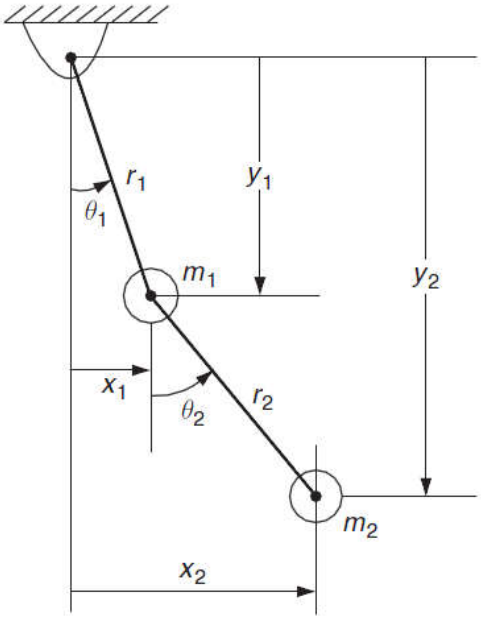


ODE: Ordinary Differential Equation

$$m\ddot{u}+ku=P(t)$$

IV. مدل‌سازی در دینامیک سازه‌ها و درجات آزادی (DOF: Degree of Freedom)

۳- روش مختصات تعمیم‌یافته (Generalized Coordinates):



Double pendulum illustrating generalized coordinates.

در این روش جرم را به حال خود رها کرده و ارتعاش سازه را حدس می‌زنیم. می‌توانیم در این روش به تعداد حداکثر جابجایی‌های ممکن یا محتمل سازه، درجه آزادی در نظر می‌گیریم.

مختصات تعمیم‌یافته θ_1 و θ_2 که مستقل از هم می‌باشند.

مختصات کارتزین x_1 , y_1 , x_2 و y_2 که وابسطه به هم می‌باشند.

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2 \quad and \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r_2^2$$

V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

تفاوت عمده آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی در موارد زیر است:

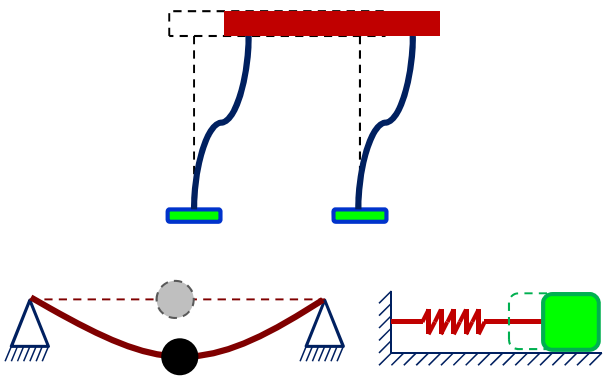
۱- متغیر با زمان (Time Varying)

۲- میرایی (Damping)

۳- وارد شدن نیروهای اینرسی در معادلات تعادل (Inertial Force)

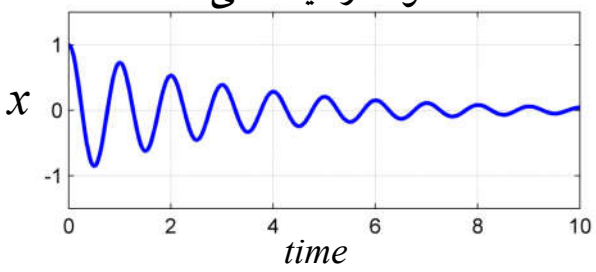
۱- متغیر با زمان: اولین تفاوت قابل توجه، متغیر با زمان بودن مسائل دینامیکی است. در مسائل دینامیکی بارگذاری و در نتیجه پاسخ‌های سازه شامل تغییر مکان‌ها و نیروهای داخلی با زمان تغییر می‌کنند. بنابراین در آنالیز دینامیکی بر خلاف آنالیز استاتیکی نمی‌توان به یک پاسخ ثابت دست یافت؛ بلکه پاسخ را باید در طی زمان و در لحظه‌های متفاوت به دست آورد. در نتیجه آنالیز دینامیکی بسیار وقت‌گیرتر و پیچیده‌تر از آنالیز استاتیکی است (آنالیز تاریخچه زمانی).

V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

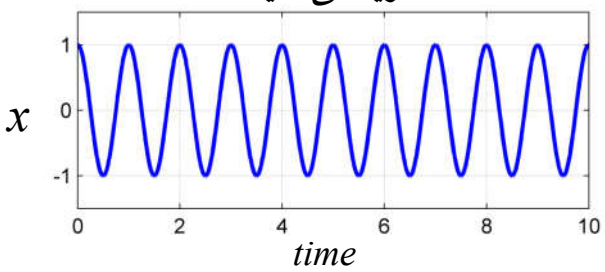


۲- میرایی: پدیده دیگری نیز که در مساله‌های دینامیک سازه دخالت می‌کند میرایی خوانده می‌شود. بخشی از انرژی حرکتی به وسیله میرایی در سازه‌ها اتلاف می‌گردد. عاملی که باعث استهلاک تدریجی ارتعاش آزاد یک سیستم می‌شود را میرایی می‌نامند.

نمونه آزمایشگاهی



مدل ریاضی (ایده‌آل)

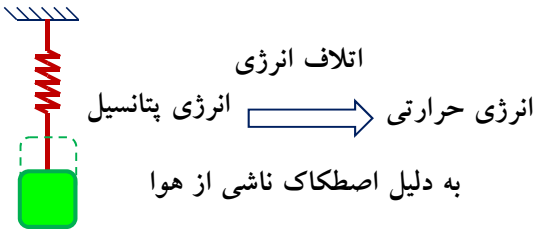


این دو نمودار نشان دهنده عدم وجود یک عامل در محاسبات است. عاملی که باعث استهلاک انرژی و حرکت می‌شود. این عامل میرایی نام دارد.

Introduction to Dynamic of Structures

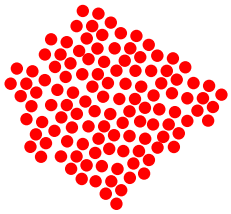
V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

چهار عامل در سازه‌ها باعث ایجاد میرایی می‌شود:



الف- میرایی خارجی: ناشی از اثر عوامل خارجی فضای اطراف سازه مانند هوا است.

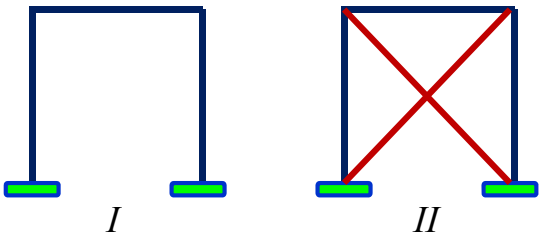
ب- میرایی داخلی: به علت خصوصیات مواد تشکیل دهنده سازه و اینکه ذرات تشکیل دهنده در حرکت می‌خواهند روی هم بلغزند؛ بنابراین اصطکاک تولید می‌شود. این اصطکاک باعث تبدیل انرژی پتانسیل به انرژی حرارتی است. قسمت اعظم میرایی را میرایی از نوع داخلی تشکیل می‌دهد. به این نوع میرایی، میرایی اصطکاکی یا کولومبی نیز گفته می‌شود. مانند اصطکاک در اتصالات فولادی، باز و بسته شدن ترک‌های مویی در بتن و اصطکاک میان عناصر سازه‌ای و غیر سازه‌ای (مانند دیوارهای جداساز).



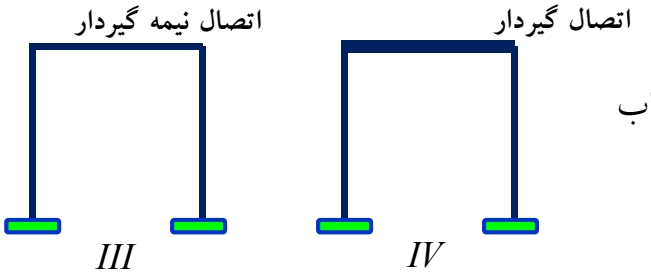
مولکول‌های به هم پیوسته سازه

V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

ج- میرایی سازه‌ای: هر چه قطعات سخت‌تر (به خصوص در نواحی اتصالات) در سازه به کار گرفته شود میرایی کم‌تر است.



میرایی قاب خمشی از قاب مهاربندی شده بیشتر است.

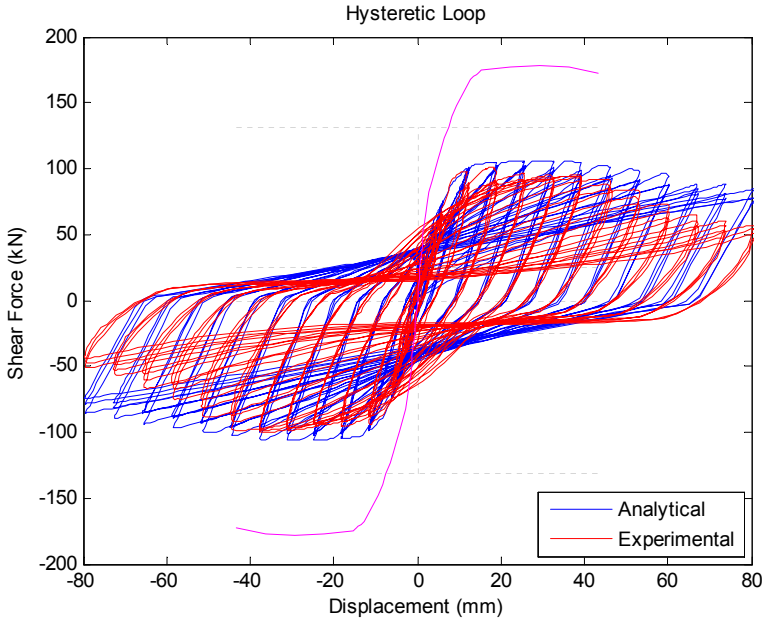


میرایی قاب خمشی با اتصال نیمه گیردار از قاب خمشی با اتصال گیردار بیشتر است.

Introduction to Dynamic of Structures

V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

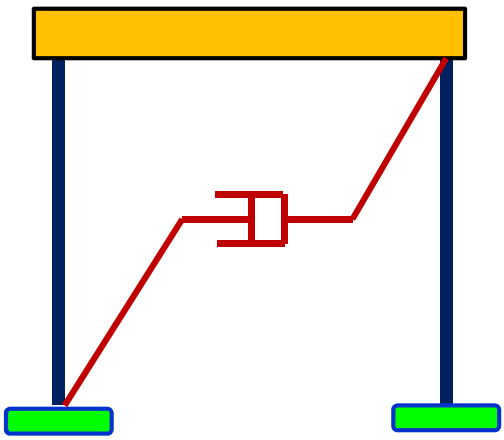
د- میرایی پسماند یا هیسترسیس (Hysteresis): در اثر حرکات رفت و برگشتی سازه انرژی وارد شده به سازه میرا می‌شود. مشروط بر آن که نیرو رفت و برگشتی باشد و مصالح وارد ناحیه غیرخطی شوند.



- نمودار نیرو جابجایی در بارگذاری رفت و برگشتی را منحنی هیسترسیس می‌نامند.
- مساحت محصور شده در منحنی هیسترسیس معرف ظرفیت جذب انرژی جهت استهلاک است. هر چه مساحت بیشتر باشد میرایی پسماند بیشتر است.
- این منحنی‌ها نشان دهنده سختی و زمان جاری شدن است.
- عوامل موثر بر این منحنی‌ها: سیستم سازه‌ای، مواد تشکیل دهنده، نوع اتصالات (Configuration) و اثر میرایی است.
- معمولا در عمل به دلیل اثر پینچینگ (Pinching) نتایج آزمایشگاهی با تئوری قدری متفاوت است؛ و آن به دلیل ایجاد ترک در جوش، لغزش در اتصالات اصطکاکی پیچ‌ها، باز و بسته شدن ترک در بتن و عدم پیوستگی کامل بین آرماتور و بتن می‌باشند.

V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

میرایی که در سازه‌ها وجود دارد متشکل از چهار میرایی اشاره شده است. در عمل در روابط محاسباتی به جای این چهار میرایی از یک میرایی معادل استفاده می‌شود. یک نیروی مجازی ناشی از میرایی (میراگر فرضی) را به سازه وارد می‌کنیم؛ تا نمودارهای ناشی از نتایج تئوری با نتایج آزمایشگاهی منطبق شوند.



نیرویی میراگر فرضی تابعی از سرعت است که آن را میرایی کلاسیک گویند. زیرا میرایی تابعی از اصطکاک بوده و اصطکاک نیز تابعی از سرعت می‌باشد.

$$f_D = C\,\dot{x}$$

f_D : نیرویی میرایی

C : ثابت میراگر که از نتایج آزمایشگاهی به دست می‌آید.
واحد C برابر نیرو تقسیم بر واحد سرعت است.

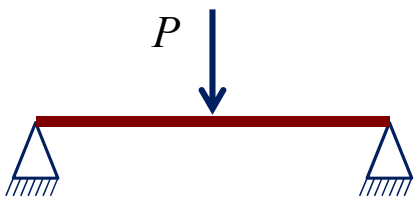
$\dot{x}$: سرعت ایجاد شده در جرم سازه

Introduction to Dynamic of Structures

V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

۳- وارد شدن نیروهای اینرسی در معادلات تعادل: در مسائل دینامیکی از آنجا که تغییرمکان‌ها وابسطه به زمان هستند سبب ایجاد شتاب و سرعت در سازه می‌گردد. برای مقابله با شتاب نیروهای اینرسی ایجاد می‌شوند. نیروهای داخلی سازه نه تنها باید با نیروهای خارجی (ناشی از بارگذاری) بلکه باید با نیروهای اینرسی ناشی از شتاب و نیروی میرایی ناشی از سرعت نیز در تعادل باشد.

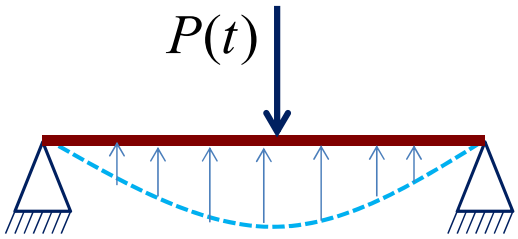
نیروهای اینرسی که در مقابل شتاب‌های سازه مقاومت می‌کنند مهمترین وجه تمایز مسائل دینامیک سازه‌ها می‌باشد.



تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر بار استاتیکی P قرار دارد. لنگر داخلی، برش و تغییر شکل آن به طور مستقیم به بار اعمال شده بستگی دارد و می‌توان آن را با استفاده از اصول تعادل نیروها محاسبه کرد.

V. تفاوت آنالیزهای استاتیکی و دینامیکی

از طرف دیگر اگر مطابق شکل زیر بار P(t) به صورت دینامیکی وارد شود؛ تغییر مکان تیر به شتاب‌هایی که ایجاد کننده نیروهای اینرسی مقاوم در مقابل خود شتاب‌ها است بستگی خواهد داشت. در این حالت لنگر داخلی و برش نه تنها باید در تعادل با نیروهای خارجی وارد شده باشند بلکه باید با نیروی اینرسی ناشی از شتاب‌های تیر نیز در تعادل باشد.



VI. انواع بارگذاری‌ها

بارگذاری‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- **استاتیکی**: بارگذاری که در طول زمان ثابت است.

۲- **دینامیکی**: بارگذاری که تابع زمان است.

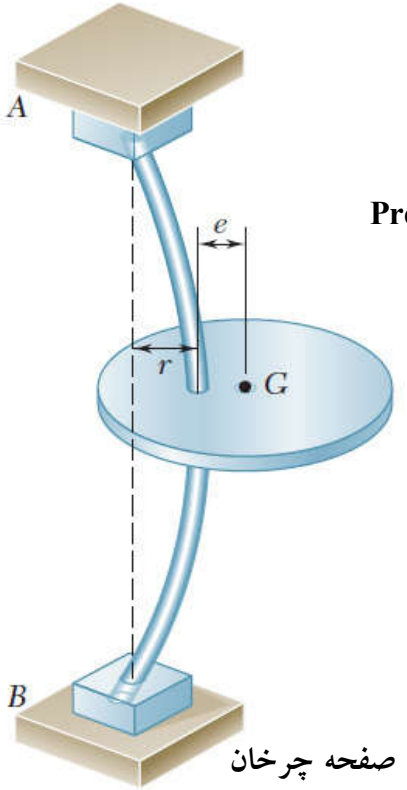
بارگذاری دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- بارگذاری دینامیکی قطعی یا معین

Prescribed (Deterministic) Dynamic Loading

بارگذاری است که مقدار، رفتار و ویژگی‌های آن کاملا معلوم باشد و یا اینکه بتوان آن را با یک رابطه ریاضی معرفی کرد. در این نوع بارگذاری تغییرات بار نسبت به زمان کاملا مشخص است مانند حرکت یک صفحه چرخان و یا نیرویی که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(t) = P_0 \sin(\omega_0 t)$$



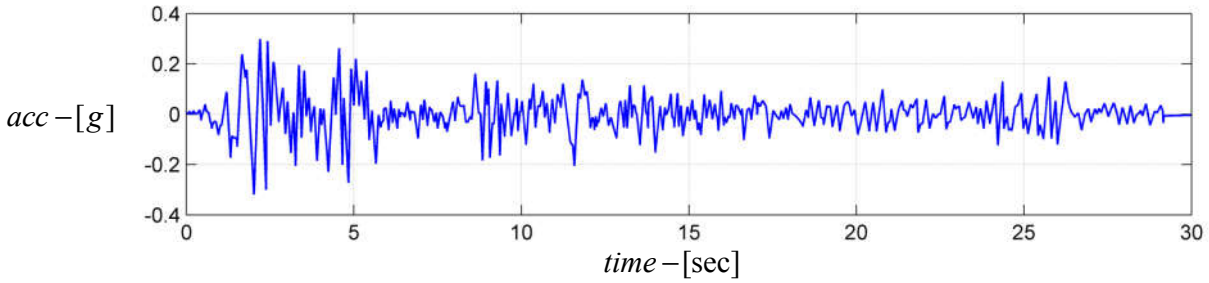
حرکت صفحه چرخان

VI. انواع بارگذاری‌ها

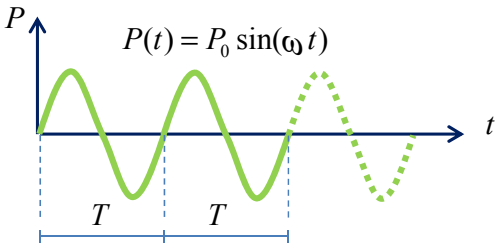
۲- بارگذاری دینامیکی تصادفی یا نامعین: Random Dynamic Loading

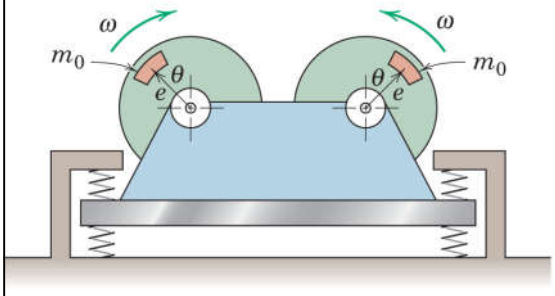
نیروهایی هستند که نمی‌توان آن‌ها را با روابط ریاضی تعیین کرد. در این نوع بارگذاری تغییرات بار نسبت به زمان کاملا مشخص نبوده و به صورت آماری و احتمالاتی بیان می‌شود. مانند نیروی زلزله، نیروی باد و یا اثر امواج دریا. البته می‌توان به صورت تقریبی آن‌ها را تعیین کرد که در این حالت روش‌های عددی مطرح می‌شوند.

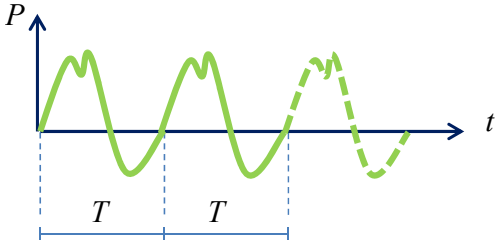
شتاب‌نگاشت زلزله El-Centro



VII. انواع بارگذاری معین





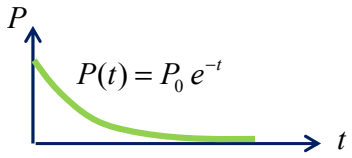


بارگذاری معین به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- **بارهای تناوبی**: نیروهایی هستند که در فواصل زمانی مساوی (زمان تناوب یا پریود) مشخص تکرار می‌شوند مانند نیروهای هارمونیک سینوسی و یا کسینوسی. به طور نمونه می‌توان به اثر جرم خارج از مرکز در یک ماشین چرخان و یا بارگذاری ناشی از فشار هیدرواستاتیک به وجود آمده توسط پره‌های ملخ یک کشتی اشاره کرد.
بعضی از بارهای تناوبی شکل‌های پیچیده‌ای دارند که اغلب می‌توان با استفاده از روش‌های تحلیلی، پاسخ‌های سازه تحت اثر این نوع بارها را به دست آورد (با استفاده از سری فوریه و نوشتن آن‌ها به صورت مجموعه‌ای از بارهای هارمونیکی).

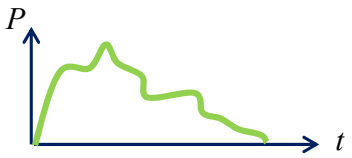
VII.انواع بارگذاری معین

۲- **بارهای غیرتناوبی**: نیرویی که تناوبی نباشد مانند



بارهای غیرتناوبی شامل دو دسته هستند:

a) بار کوتاه مدت ضربه‌ای: مانند بار ناشی از امواج انفجار که به کمک روش‌های ساده و خاصی می‌توان آن‌ها را آنالیز کرد.



b) بار بلند مدت: مانند بار باد که با استفاده از روش‌های تحلیلی دینامیکی و یا روش‌های عددی می‌توان آن‌ها را آنالیز کرد.

VIII.انواع روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها

براساس تقسیم بندی کلی برای انواع بارگذاری دینامیکی دو روش کلی برای محاسبه پاسخ‌های سازه تحت اثر بارگذاری دینامیکی وجود دارد.

۱- **روش قطعی (Deterministic Approach)**: آنالیز پاسخ هر سیستم سازه‌ای تحت بار دینامیکی معین را آنالیز قطعی می‌نامیم.

به طور کلی پاسخ هر نوع بارگذاری دینامیکی برحسب تغییرمکان‌های سازه بیان می‌شود. بنابراین براساس روش آنالیز قطعی، تاریخچه زمانی تغییرمکان ناشی از هر بارگذاری به دست می‌آید. سایر مشخصات سازه مانند تنش‌ها، کرنش‌ها و نیروهای داخلی و ... معمولا در مرحله دوم آنالیز و به کمک تغییرمکان‌هایی که در مرحله قبل به دست آمده‌اند محاسبه می‌شوند.

VIII.انواع روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها

۲- روش غیرقطعی (Nondeterministic Approach): آنالیز پاسخ هر سیستم سازه‌ای تحت بار دینامیکی تصادفی را آنالیز غیرقطعی می‌نامیم.

با انجام آنالیز غیرقطعی، اطلاعات آماری در مورد تغییرمکان‌هایی که ناشی از یک بارگذاری تصادفی است به دست می‌آید. در این روش، تاریخچه زمانی تغییرمکان‌ها تعیین نمی‌شود و سایر مشخصات سازه مانند تنش‌ها، کرنش‌ها و نیروهای داخلی و ... به جای استفاده از نتایج تغییرمکان‌ها به طور مستقیم با استفاده از آنالیز مستقل از نوع غیرقطعی محاسبه می‌شوند.

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

هدف اصلی از آنالیز دینامیکی قطعی سازه، محاسبه تاریخچه زمانی تغییر مکان سازه تحت اثر بار دینامیکی وارده است.

معادلات حرکت (Equations of Motion) : عبارتند از روابطی ریاضی که نشان دهنده تغییر مکان‌های دینامیکی سازه می‌باشند. حل این معادلات حرکت، پاسخ سازه را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد.

روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

۱- استفاده از قانون دوم نیوتن (Newton's Second Law)

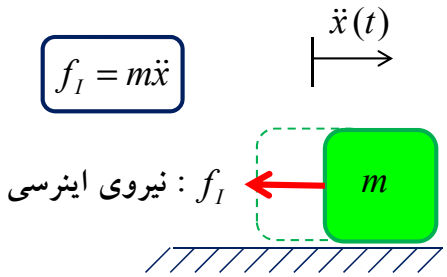
۲- اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work)

۳- روش‌های براساس انرژی (Energy Based Methods)

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

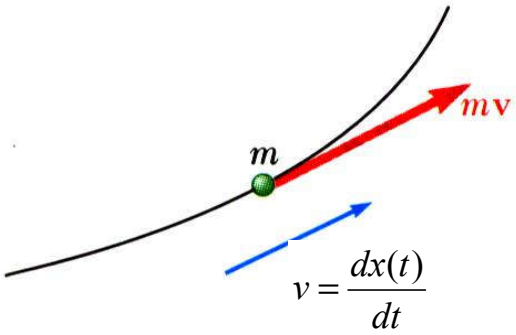
Newton's Second Law

۱- استفاده از قانون دوم نیوتن



اصل دالامبر: هر جسم یک نیروی اینرسی ایجاد می‌کند که متناسب با شتاب آن بوده و در مقابل شتاب نیز مقاومت می‌کند. (نیروی اینرسی همواره در خلاف جهت شتاب است)

قانون دوم نیوتن: میزان تغییرات اندازه حرکت هر جسم برابر است با نیروی وارد آن جسم.



$$\vec{f}(t) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right)$$

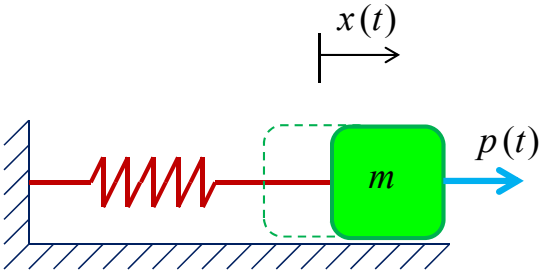
$\vec{f}(t)$: بردار برآیند نیروهای وارده

$\vec{x}(t)$: بردار موقعیت جرم

Introduction to Dynamic of Structures

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

۱- استفاده از قانون دوم نیوتن



$$x = x(t) \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

در اغلب مسائل مطرح در دینامیک سازه‌ها می‌توان فرض کرد که جرم ثابت است و تغییری نمی‌کند.

$$\sum f = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \sum f = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \sum f = m\ddot{x}$$
$$\frac{dm}{dt} = 0$$

عبارت فوق بیان آشنای، نیرو برابر با حاصل ضرب جرم در شتاب است که می‌توان آن را به صورت زیر در نظر گرفت

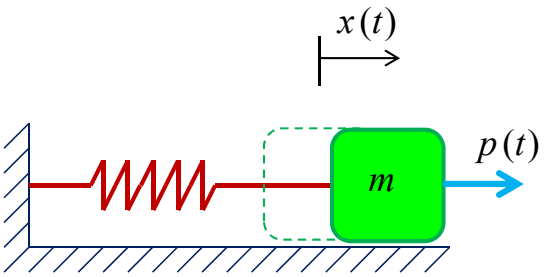
قانون دوم نیوتن : $\sum f = m\ddot{x}$

نیروی اینرسی مقاوم در برابر شتاب : $m\ddot{x} = f_I$

$$\Rightarrow \sum f - m\ddot{x}_I = 0 \Rightarrow \sum F = 0$$

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

۱- استفاده از قانون دوم نیوتن



در رابطه مقابل نیروی f برآیند نیروهای زیر می‌باشد:

a) نیروی الاستیک یا غیر الاستیک مقاوم در برابر تغییر مکان.

b) نیروی میرایی مقاوم در برابر سرعت

c) هر نوع بارگذاری مستقل خارجی

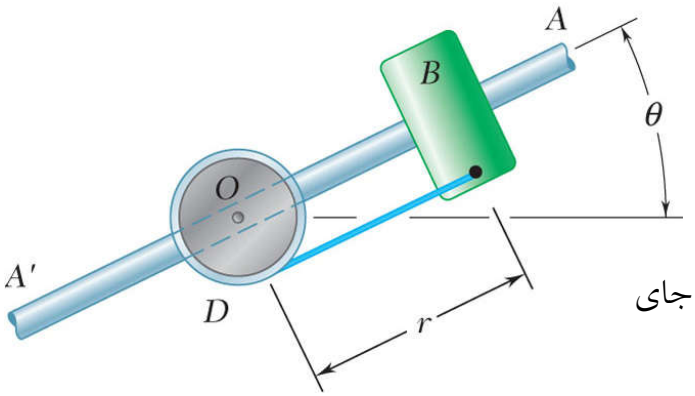
$$\sum f - m\ddot{x}_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum F = 0$$

ملاحظه می‌شود که با لحاظ نمودن نیروی اینرسی، سیستم در هر لحظه در حالت تعادل است. بنابراین در این روش برای استخراج معادلات حرکت با رسم نمودار پیکره آزاد جسم متحرک، با منظور کردن نیروی اینرسی در خلاف جهت حرکت، مجموع نیروهای موثر بر سازه (شامل نیروی اینرسی نیز می‌باشد) مساوی صفر قرار داده می‌شود.

Introduction to Dynamic of Structures

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

۱- استفاده از قانون دوم نیوتن



قانون دوم نیوتن در مورد اجسام صلب در حال دوران به جای معادله تعادل نیرو از معادله تعادل لنگر استفاده می‌شود

$$\theta = \theta(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}(t)$$

I_m : ممان اینرسی جرمی

$\ddot{\theta}$: شتاب زاویه‌ای

قانون دوم نیوتن : $\sum M = I_m \ddot{\theta}$

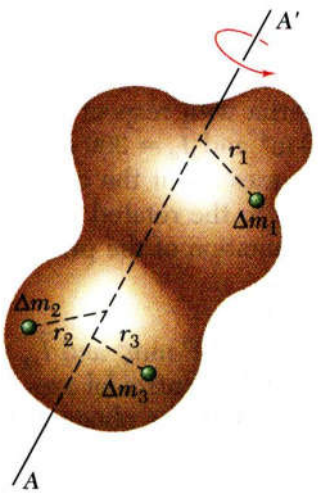
لنگر اینرسی حرکتی : $I_m \ddot{\theta} = M_I$

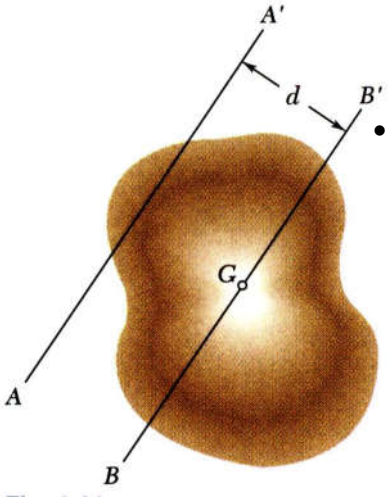
$$\Rightarrow \quad \sum M - I_m \ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum F_m = 0$$

Introduction to Dynamic of Structures

Mass Moment of Inertia

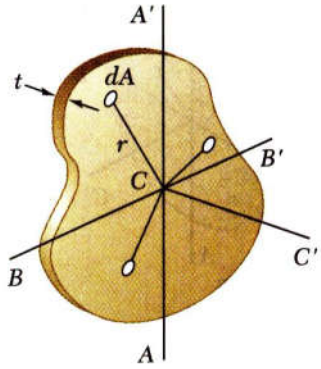
$$I = \int r^2 dm = mass\ moment\ of\ inertia$$





- Generalizing for any axis AA' and a parallel centroidal axis,

$$I_{AA'} = \bar{I}_G + md^2$$

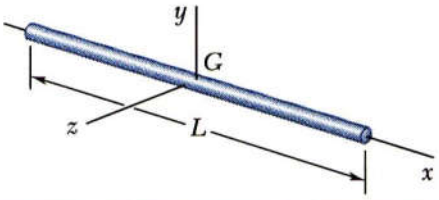


- For the axis CC' which is perpendicular to the plate,

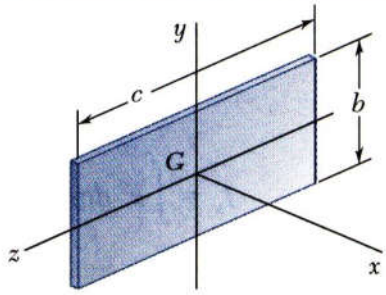
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'}$$

Introduction to Dynamic of Structures

Mass Moment of Inertia



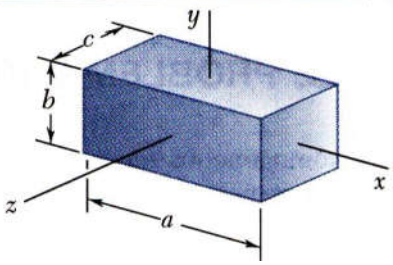
$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$



$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$

$I_y = \frac{1}{12} mc^2$

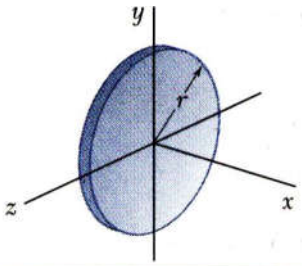
$I_z = \frac{1}{12} mb^2$



$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$

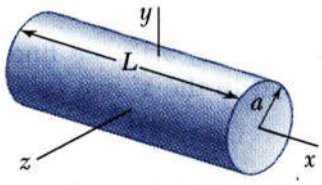
$I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$

$I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$



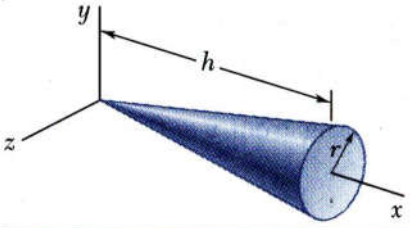
$I_x = \frac{1}{2} mr^2$

$I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$



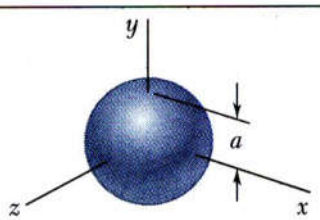
$I_x = \frac{1}{2} ma^2$

$I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$



$I_x = \frac{3}{10} ma^2$

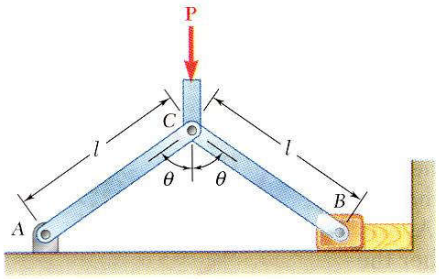
$I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$

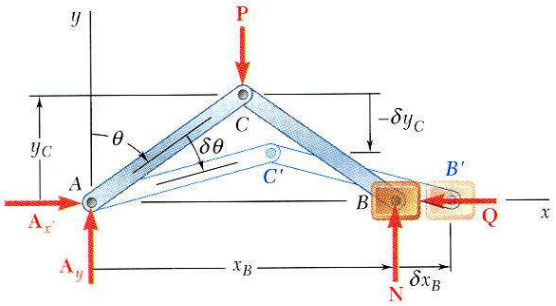


$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

Principle of Virtual Work





۲- استفاده از اصل کار مجازی:

اگر به سیستمی که تحت اثر مجموعه‌ای از نیروها، در حال تعادل است، تغییر مکان مجازی کوچکی اعمال شود که از نظر سینماتیکی قابل قبول باشد (یعنی شرایط مرزی را اقناع کرده و پیوستگی سیستم را از بین نبرد) کل کار انجام شده توسط کلیه نیروها برابر با صفر خواهد بود. طبق این اصل صفر بودن کار انجام شده در طی یک تغییر مکان مجازی کوچک یک عبارت معادل برای بیان تعادل سیستم فراهم می‌کند.

در استاتیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه به علت یک تغییر مکان مجازی کوچک، برابر با صفر است.

در دینامیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه (شامل نیروی اینرسی) به علت یک تغییر مکان مجازی کوچک، برابر با صفر است.

Introduction to Dynamic of Structures

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

۲- استفاده از اصل کار مجازی

در یک سیستم دینامیکی به دست آوردن معادلات حرکت شامل مراحل زیر می‌باشد:

a) ابتدا تمامی نیروهای وارد بر جرم‌های سیستم (شامل نیروهای اینرسی بر طبق اصل دالامبر) تعیین می‌گردد.

b) در هر درجه آزادی سیستم، یک تغییر مکان مجازی مناسب فرض می‌شود.

c) با مساوی قرار دادن کل کار انجام شده برابر با صفر، معادلات حرکت به دست می‌آید.

از مزایای عمده این روش اسکالر بودن جملات کار مجازی است که می‌توان آن‌ها را به طور جبری جمع زد؛ این در حالی است که نیروهای وارد بر سازه برداری بوده و فقط به شکل برداری جمع می‌شوند.

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

Energy Based Methods

۳- روش‌های براساس انرژی

یکی از روش‌های به دست آوردن معادلات حرکت، استفاده از اصل بقای انرژی است. طبق این اصل، مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل همواره ثابت است (این روش بیشتر در رشته مکانیک کاربرد دارد).

$$\mathbf{P + T \approx cte}$$

اصل هامیلتون (Principle of Hamilton): یکی از روش‌های براساس انرژی برای استخراج معادلات حرکت، استفاده از اصل هامیلتون است که در آن از تغییرات انرژی استفاده می‌شود.

اصل هامیلتون بیان می‌کند که تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل به اضافه تغییرات کار انجام یافته توسط نیروهای غیر پایستار باید در طی هر بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر با صفر باشد.

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

۳- روش‌های براساس انرژی – اصل هامیلتون

اصل هامیلتون به زبان ریاضی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\, W_{nc}\, dt = 0$$

که در آن:

T : انرژی جنبشی کل سیستم

V : انرژی پتانسیل سیستم، شامل انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل نیروهای خارجی پاستار (نیروهای ثابت با زمان)

W_{nc} : کار انجام یافته توسط نیروهای غیرپایستار اعمال شده بر سیستم، شامل نیروهای میرایی و هر نیروی خارجی دلخواه

δ : تغییرات در طول بازه زمانی در نظر گرفته شده

با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت به طور مستقیم به دست می‌آیند.

IX. روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها برای تشکیل معادلات حرکت:

۳- روش‌های براساس انرژی- اصل هامیلتون

فرق این روش با روش کار مجازی آن است که نیروهای اینرسی و الاستیک به طور مستقیم در معادلات وارد نمی‌شوند؛ و به جای آن‌ها به ترتیب از تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل استفاده می‌گردد.

بنابراین مزیت این روش استفاده از مقادیر انرژی اسکالر است. در حالی که نیروها و تغییرمکان‌هایی که برای محاسبه کار در روش کار مجازی به کار می‌روند، برخلاف جملات کار که اسکالر می‌باشند، همگی برداری هستند.

اصل هامیلتون را می‌توان برای سیستم‌های استاتیکی نیز به کار برد. در این حالت جمله مربوط به انرژی جنبشی T برابر با صفر است و سایر جمله‌های باقیمانده در انتگرال نسبت به زمان نامتغیر می‌باشند.

بنابراین رابطه به صورت زیر در می‌آید: $\delta(V - W_{nc}) = 0$

که همان اصل مشهور انرژی پتانسیل مینیمم بوده که کاربرد وسیعی در آنالیز استاتیکی دارد.

W_{nc}: کار مربوط به نیروهایی است که متغیر بوده و انرژی آن‌ها زایل (تبدیل به حرارت) می‌شود.

❑ UNITS CONVERSION TABLES

Table 1: Multiples and Submultiples of SI units

Prefix	Symbol	Multiplying Factor	
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
giga	G	10^{9}	1 000 000 000
mega	M	10^{6}	1 000 000
kilo	k	10^{3}	1 000
hecto*	h	10^{2}	100
deca*	da	10	10
deci*	d	10^{-1}	0.1
centi	c	10^{-2}	0.01
milli	m	10^{-3}	0.001
micro	u	10^{-6}	0.000 001
nano	n	10^{-9}	0.000 000 001
pico	p	10^{-12}	0.000 000 000 001
femto	f	10^{-15}	0.000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18}	0.000 000 000 000 000 001

* these prefixes are not normally used

❑ UNITS CONVERSION TABLES

Table 2: Length Units

Millimeters	Centimeters	Meters	Kilometers	Inches	Feet	Yards	Miles
mm	cm	m	km	in	ft	yd	mi
1	0.1	0.001	0.000001	0.03937	0.003281	0.001094	6.21e-07
10	1	0.01	0.00001	0.393701	0.032808	0.010936	0.000006
1000	100	1	0.001	39.37008	3.28084	1.093613	0.000621
1000000	100000	1000	1	39370.08	3280.84	1093.613	0.621371
25.4	2.54	0.0254	0.000025	1	0.083333	0.027778	0.000016
304.8	30.48	0.3048	0.000305	12	1	0.333333	0.000189
914.4	91.44	0.9144	0.000914	36	3	1	0.000568
1609344	160934.4	1609.344	1.609344	63360	5280	1760	1

Table 3: Area Units

Millimeter square	Centimeter square	Meter square	Inch square	Foot square	Yard square
mm^2	cm^2	m^2	in^2	ft^2	yd^2
1	0.01	0.000001	0.00155	0.000011	0.000001
100	1	0.0001	0.155	0.001076	0.00012
1000000	10000	1	1550.003	10.76391	1.19599
645.16	6.4516	0.000645	1	0.006944	0.000772
92903	929.0304	0.092903	144	1	0.111111
836127	8361.274	0.836127	1296	9	1

Introduction to Dynamic of Structures

❑ UNITS CONVERSION TABLES

Table 4: Volume Units

Centimeter cube	Meter cube	Liter	Inch cube	Foot cube	US gallons	Imperial gallons	US barrel (oil)
cm^3	m^3	ltr	in^3	ft^3	US gal	Imp. gal	US brl
1	0.000001	0.001	0.061024	0.000035	0.000264	0.00022	0.000006
1000000	1	1000	61024	35	264	220	6.29
1000	0.001	1	61	0.035	0.264201	0.22	0.00629
16.4	0.000016	0.016387	1	0.000579	0.004329	0.003605	0.000103
28317	0.028317	28.31685	1728	1	7.481333	6.229712	0.178127
3785	0.003785	3.79	231	0.13	1	0.832701	0.02381
4545	0.004545	4.55	277	0.16	1.20	1	0.028593
158970	0.15897	159	9701	6	42	35	1

Table 5: Mass Units

Grams	Kilograms	Metric tonnes	Short ton	Long ton	Pounds	Ounces
g	kg	tonne	shton	Lton	lb	oz
1	0.001	0.000001	0.000001	9.84e-07	0.002205	0.035273
1000	1	0.001	0.001102	0.000984	2.204586	35.27337
1000000	1000	1	1.102293	0.984252	2204.586	35273.37
907200	907.2	0.9072	1	0.892913	2000	32000
1016000	1016	1.016	1.119929	1	2239.859	35837.74
453.6	0.4536	0.000454	0.0005	0.000446	1	16
28	0.02835	0.000028	0.000031	0.000028	0.0625	1

❑ UNITS CONVERSION TABLES

Table 10: High Pressure Units

Bar	Pound/square inch	Kilopascal	Megapascal	Kilogram force/ centimeter square	Millimeter of mercury	Atmospheres
bar	psi	kPa	MPa	kgf/cm^2	mm Hg	atm
1	14.50326	100	0.1	1.01968	750.0188	0.987167
0.06895	1	6.895	0.006895	0.070307	51.71379	0.068065
0.01	0.1450	1	0.001	0.01020	7.5002	0.00987
10	145.03	1000	1	10.197	7500.2	9.8717
0.9807	14.22335	98.07	0.09807	1	735.5434	0.968115
0.001333	0.019337	0.13333	0.000133	0.00136	1	0.001316
1.013	14.69181	101.3	0.1013	1.032936	759.769	1

Table 16: Temperature Conversion Formulas

Degree Celsius (°C)	(°F - 32) x 5/9
	(K - 273.15)
Degree Fahrenheit (°F)	(°C x 9/5) + 32
	(1.8 x K) - 459.67
Kelvin (K)	(°C + 273.15)
	(°F + 459.67) ÷ 1.8