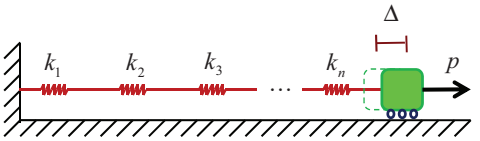
SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

الف- سختی معادل فنرهای سری:

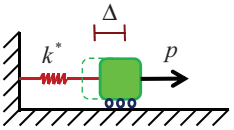


در فنرهای سری، نیروی همه فنرها مساوی و برابر با نیروی وارده است. همچنین تغییر طول مجموع فنرها برابر با مجموع تغییر طول آن‌ها می‌باشد.

$$F_1 = k_1\Delta_1 = p \Rightarrow \Delta_1 = p/k_1$$
$$F_2 = k_2\Delta_2 = p \Rightarrow \Delta_2 = p/k_2$$
$$F_3 = k_3\Delta_3 = p \Rightarrow \Delta_3 = p/k_3$$
$$\vdots$$
$$F_n = k_n\Delta_n = p \Rightarrow \Delta_n = p/k_n$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i \Rightarrow \Delta = p/k_1 + p/k_2 + p/k_3 + \cdots + p/k_n$$

$$\Rightarrow \Delta = p\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i} \Rightarrow \Delta = \frac{p}{k^*} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{k^*} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}}$$

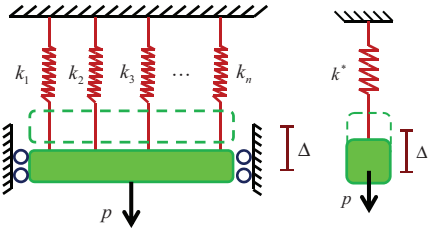


در رابطه فوق k^* سختی فنر معادل است که از سختی تک تک فنرها کمتر می‌باشد.

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

ب- سختی معادل فنرهای موازی:



در فنرهای موازی، تغییر طول همه فنرها با هم مساوی است. همچنین نیروی وارده برابر با مجموع نیروی همه فنرها می‌باشد.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \cdots = \Delta_n = \Delta \qquad p = \sum_{i=1}^{n}F_i \Rightarrow p = k_1\Delta + k_2\Delta + k_3\Delta + \cdots + k_n\Delta$$

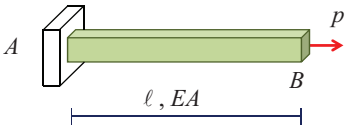
$$\Rightarrow p = \left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\Delta \Rightarrow p = k^*\Delta \Rightarrow \boxed{k^* = \sum_{i=1}^{n}k_i}$$

در ترکیب موازی برای اینکه فنرها تغییر طول مساوی داشته باشند باید نیرو در مرکز سختی فنرها اعمال شود. با توجه به رابطه فوق سختی فنر معادل، مساوی مجموع سختی فنرهای موازی است که از سختی تک تک فنرها بزرگتر است. قابل ذکر است که معمولا فنرها به صورت موازی با یکدیگر ترکیب می‌شوند.

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

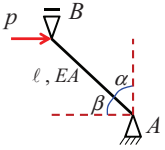


۱- سختی محوری:

سختی محوری میله‌ای به سطح مقطع A ، طول L و مدول الاستیسیته E برابر است با

$$\Delta_B = \frac{p\ell}{EA} \Rightarrow k_B = \frac{EA}{\ell}$$

اگر مطابق شکل روبه‌رو نیروی محوری در راستای میله اعمال نشود سختی افقی میله در نقطه B برابراست با



$$\Delta_B = \frac{p\ell}{EA\sin^2\alpha} \Rightarrow k_B = \frac{EA\sin^2\alpha}{\ell}$$

α زاویه ما بین راستای میله و خط عمود بر راستای نیرو است.

به این نکته توجه شود که سختی مربوط به سختی افقی است. یعنی در حین محاسبه، ما نیروی افقی میله AB را داریم پس باید برای محاسبه نیروی میله AB نیروی افقی میله AB در $\frac{1}{\cos\beta}$ ضرب شود.

$$F_{AB} = \frac{F_{h_{AB}}}{\cos\beta} = \frac{k_B\Delta_B}{\cos\beta} \Rightarrow F_{AB} = \frac{EA\sin^2\alpha}{\ell\cos\beta}\Delta_B$$

SDOF: Free Vibration

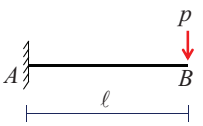
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

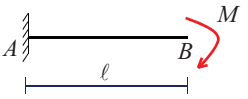
۲- سختی خمشی:

سختی خمشی چند تیر که بیشترین کاربرد را در محاسبه تغییرمکان‌ها دارند بررسی می‌کنیم. طول همه تیرها L و صلبیت خمشی آن‌ها EI است.

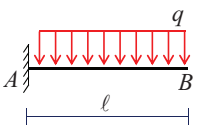
$$\Delta_B = \frac{p\ell^3}{3EI} \Rightarrow k_B = \frac{3EI}{\ell^3}$$
$$\theta_B = \frac{p\ell^2}{2EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{2EI}{\ell^2}$$



$$\Delta_B = \frac{M\ell^2}{2EI} \Rightarrow k_B = \frac{2EI}{\ell^2}$$
$$\theta_B = \frac{M\ell}{EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{EI}{\ell}$$



$$\Delta_B = \frac{q\ell^4}{8EI} \Rightarrow k_B = \frac{8EI}{\ell^4}$$
$$\theta_B = \frac{q\ell^3}{6EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{6EI}{\ell^3}$$



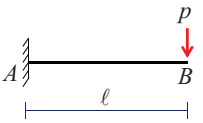
SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

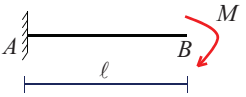
انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۲- سختی خمشی:

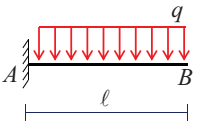
$$\Delta_B = \frac{p\ell^3}{3EI} \Rightarrow k_B = \frac{3EI}{\ell^3}$$
$$\theta_B = \frac{p\ell^2}{2EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{2EI}{\ell^2}$$



$$\Delta_B = \frac{M\ell^2}{2EI} \Rightarrow k_B = \frac{2EI}{\ell^2}$$
$$\theta_B = \frac{M\ell}{EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{EI}{\ell}$$



$$\Delta_B = \frac{q\ell^4}{8EI} \Rightarrow k_B = \frac{8EI}{\ell^4}$$
$$\theta_B = \frac{q\ell^3}{6EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{6EI}{\ell^3}$$



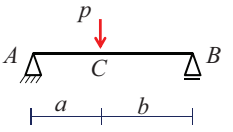
SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

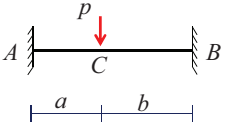
انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۲- سختی خمشی:

$$\Delta_C = \frac{pa^2b^2}{3EI\ell} \Rightarrow k_C = \frac{3EI\ell}{a^2b^2}$$
$$\theta_A = \frac{pab(\ell+b)}{6EI\ell} \Rightarrow k_{\theta_A} = \frac{6EI\ell}{ab(\ell+b)}$$
$$\theta_B = \frac{pab(\ell+a)}{6EI\ell} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{6EI\ell}{ab(\ell+a)}$$



$$\Delta_C = \frac{pa^3b^3}{3EI\ell^3} \Rightarrow k_C = \frac{3EI\ell^3}{a^3b^3}$$
$$M_A = \frac{pab^2}{\ell^2} \quad , \quad M_B = \frac{pa^2b}{\ell^2} \quad , \quad M_C = \frac{2pa^2b^2}{\ell^3}$$



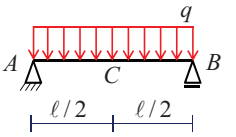
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۲- سختی خمشی:

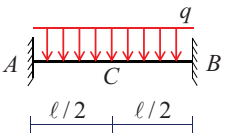
$$\Delta_C = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI} \Rightarrow k_C = \frac{384}{5}\frac{EI}{\ell^4}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{q\ell^3}{24EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = k_{\theta_B} = \frac{24EI}{\ell^3}$$



$$\Delta_C = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI} \Rightarrow k_C = 384\frac{EI}{\ell^4}$$

$$M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12} \quad , \quad M_C = \frac{q\ell^2}{24}$$



SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

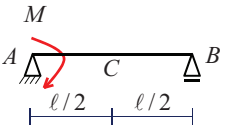
۳- سختی پیچشی:

این نوع سختی پیچشی ناشی از خمش است. سختی پیچشی چند تیر که بیشترین کاربرد را در محاسبه تغییرمکان‌ها دارند بررسی می‌کنیم. طول همه تیرها L و صلبیت خمشی آن‌ها EI است.

$$\Delta_C = \frac{M\ell^2}{16EI} \Rightarrow k_C = \frac{16EI}{\ell^2}$$

$$\theta_A = \frac{M\ell}{3EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = \frac{3EI}{\ell}$$

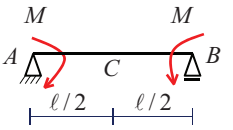
$$\theta_B = \frac{M\ell}{6EI} \Rightarrow k_{\theta_B} = \frac{6EI}{\ell}$$



$$\Delta_C = \frac{M\ell^2}{8EI} \Rightarrow k_C = \frac{8EI}{\ell^2}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{M\ell}{2EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = k_{\theta_B} = \frac{2EI}{\ell}$$

$$M_C = M$$



SDOF: Free Vibration

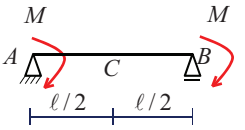
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۳- سختی پیچشی:

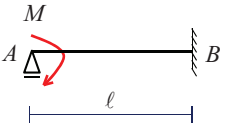
$$\Delta_C = 0 \quad , \quad M_C = 0$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{M\ell}{6EI} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_A} = k_{\theta_B} = \frac{6EI}{\ell}$$



$$M_B = \frac{M}{2} \quad \text{(هم جهت با M)}$$

$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \quad \Rightarrow \quad k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

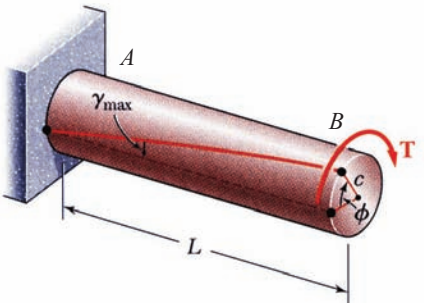


SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

انواع سختی‌های مورد استفاده در این روش

۳- سختی پیچشی:



$$\phi_B = \frac{T\ell}{GJ} \quad \Rightarrow \quad k_B = \frac{GJ}{\ell}$$

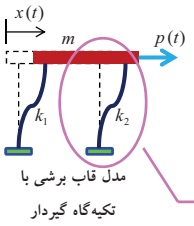
J : ممان اینرسی قطبی
G : مدول الاستیسیته برشی

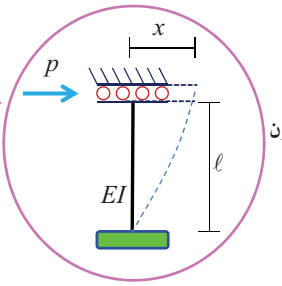
سختی فنرهای انتقالی مانند سختی خمشی ضریبی از $\frac{EI}{\ell^3}$ است که دارای دیمانسیون بار گسترده می‌باشد.

سختی فنرهای پیچشی مانند سختی پیچشی ضریبی از $\frac{EI}{\ell}$ یا $\frac{GJ}{\ell}$ است که دارای دیمانسیون لنگر می‌باشد.

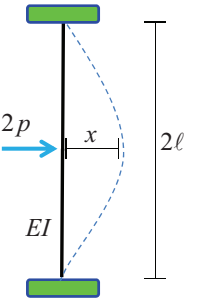
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

ستون با تکیه‌گاه گیردار: سختی جانبی یک ستون با تکیه‌گاه گیردار در قاب با مدل برشی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

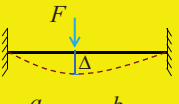




خاصیت تقارن



یادآوری از تحلیل سازه



$$F = \frac{3EI\ell^3}{a^3 b^3}\Delta$$

$$\Rightarrow \quad 2p = \frac{3EI(2\ell)^3}{\ell^3 \ell^3}x \quad \Rightarrow \quad p = \frac{12EI}{\ell^3}x$$

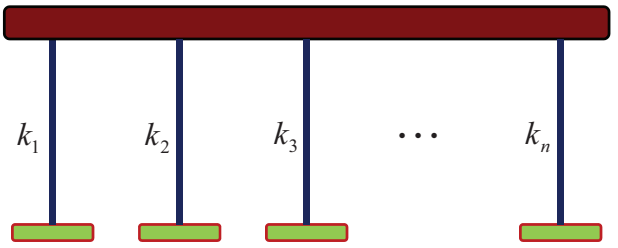
$$\Rightarrow \quad k = \frac{12EI}{\ell^3}$$

شبیه به رابطه نیروی فنر $F = k\,x$

SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

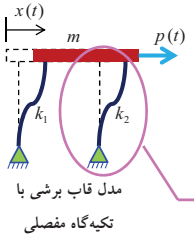
سختی جانبی طبقه در یک سیستم SDOF با مدل قاب برشی با تکیه‌گاه‌های گیردار به صورت زیر محاسبه می‌شود



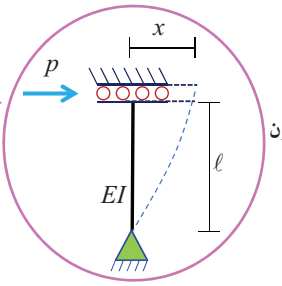
$$k = \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{12E_i I_i}{\ell_i^{\,3}} \right)$$

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

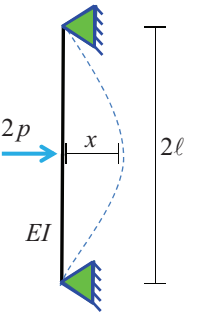
ستون با تکیه‌گاه مفصلی: سختی جانبی یک ستون با تکیه‌گاه مفصلی در قاب با مدل برشی به صورت زیر محاسبه می‌شود.



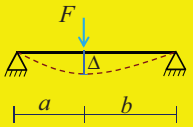
مدل قاب برشی با تکیه‌گاه مفصلی



خاصیت تقارن



یادآوری از تحلیل سازه



$$F = \frac{3EI\ell}{a^2 b^2}\Delta$$

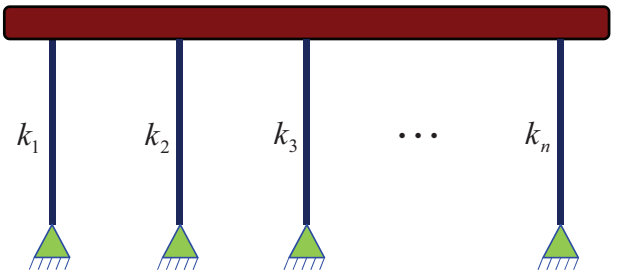
$$\Rightarrow \quad 2p = \frac{3EI(2\ell)}{\ell^2 \ell^2}x \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3EI}{\ell^3}x$$

شبیه به رابطه نیروی فنر $F = k\,x$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{3EI}{\ell^3}$$

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

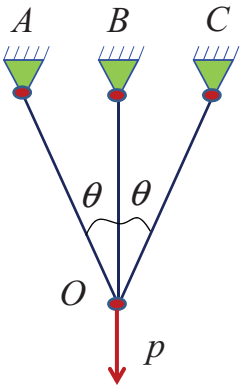
سختی جانبی طبقه در یک سیستم SDOF با مدل قاب برشی با تکیه‌گاه‌های مفصلی به صورت زیر محاسبه می‌شود



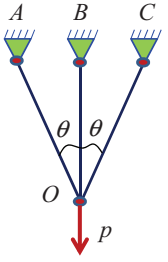
$$k = \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3E_i I_i}{\ell_i^{\,3}} \right)$$

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

مثال-۱: در خرپای نشان داده تغییر مکان قائم گره O را محاسبه نمایید. $(AE = cte \quad , \quad OB = L)$



$(AE = cte \quad , \quad OB = \ell)$

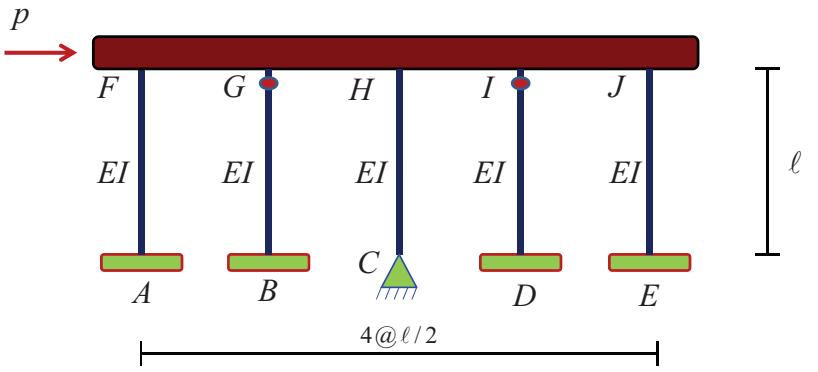


II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۱:

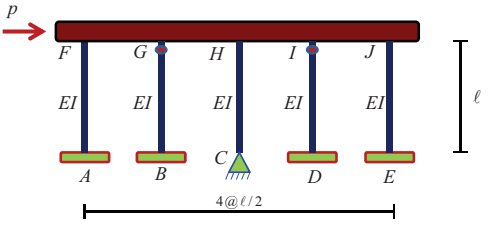
II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

مثال-۲: در قاب زیر تغییر مکان افقی سقف صلب چقدر است؟



II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

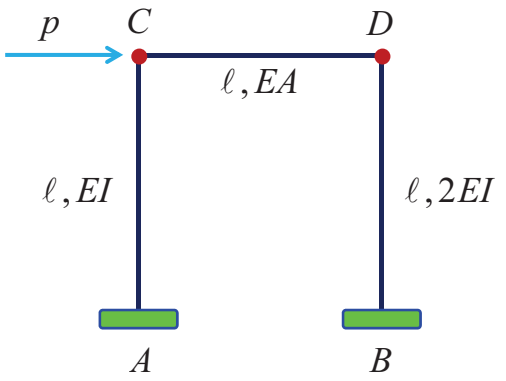
پاسخ مثال-۲:



II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

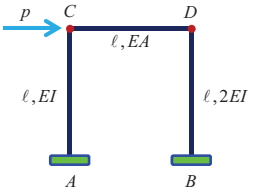
مثال-۳: در قاب زیر تغییر مکان افقی گره C چقدر است؟

$\left(I = \frac{A\ell^2}{6}\right)$



II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۳:

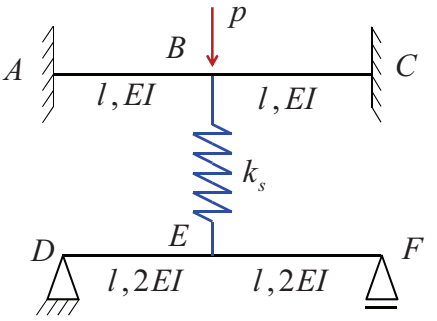


SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

مثال-۴: در سازه زیر تغییر مکان قائم B و نیروی فنر چقدر است؟

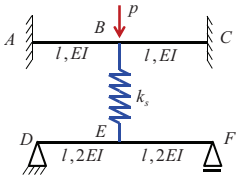
$\left(k_s = \frac{12EI}{\ell^3}\right)$



SDOF: Free Vibration

II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۴:



II. محاسبه سختی با استفاده از تکنیک مدل‌سازی با فنر

پاسخ مثال-۴: