UNIVERSITY
OF
KURDISTAN

تحلیل سازه ها

روش ماتریسی

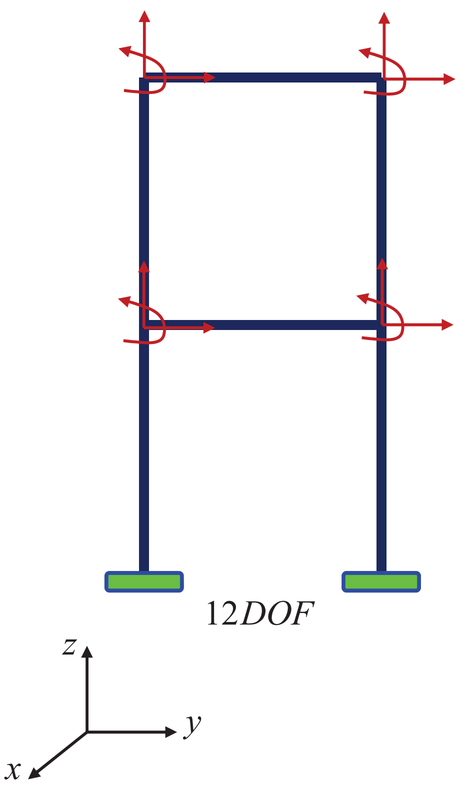
By: Kaveh Karami
Associate Prof. of Structural Engineering

روش ماتریسی

I. مبانی حرکت مدل‌های چند درجه آزاد

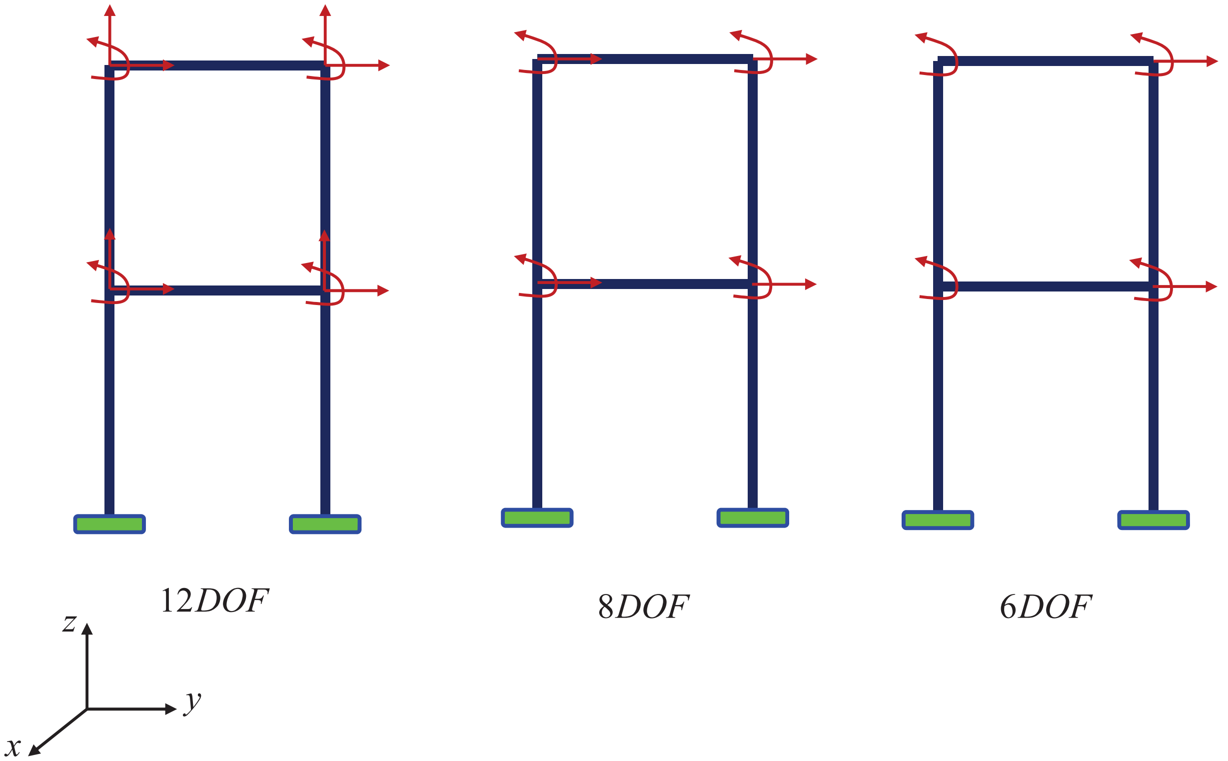
اگر برای سیستمی بیش از یک درجه تغییر مکان قائل شویم، سازه ما چند درجه آزاد خواهد بوددر حالت واقعی در سازه تغییرمکان‌های بسیاری، اعم از دورانی و انتقالی، وجود دارند. تعداد درجات آزادی (مولفه‌های مستقل تغییرمکان) به نظر تحلیل‌گر بستگی دارد. در نظر گرفتن درجات آزادی بیشتر، تقریب بهتری از رفتار سازه را به دست می‌دهد.

سوالی که اینجا مطرح است این که در مدل سازی، چند درجه‌ی آزادی در نظر بگیریم؟



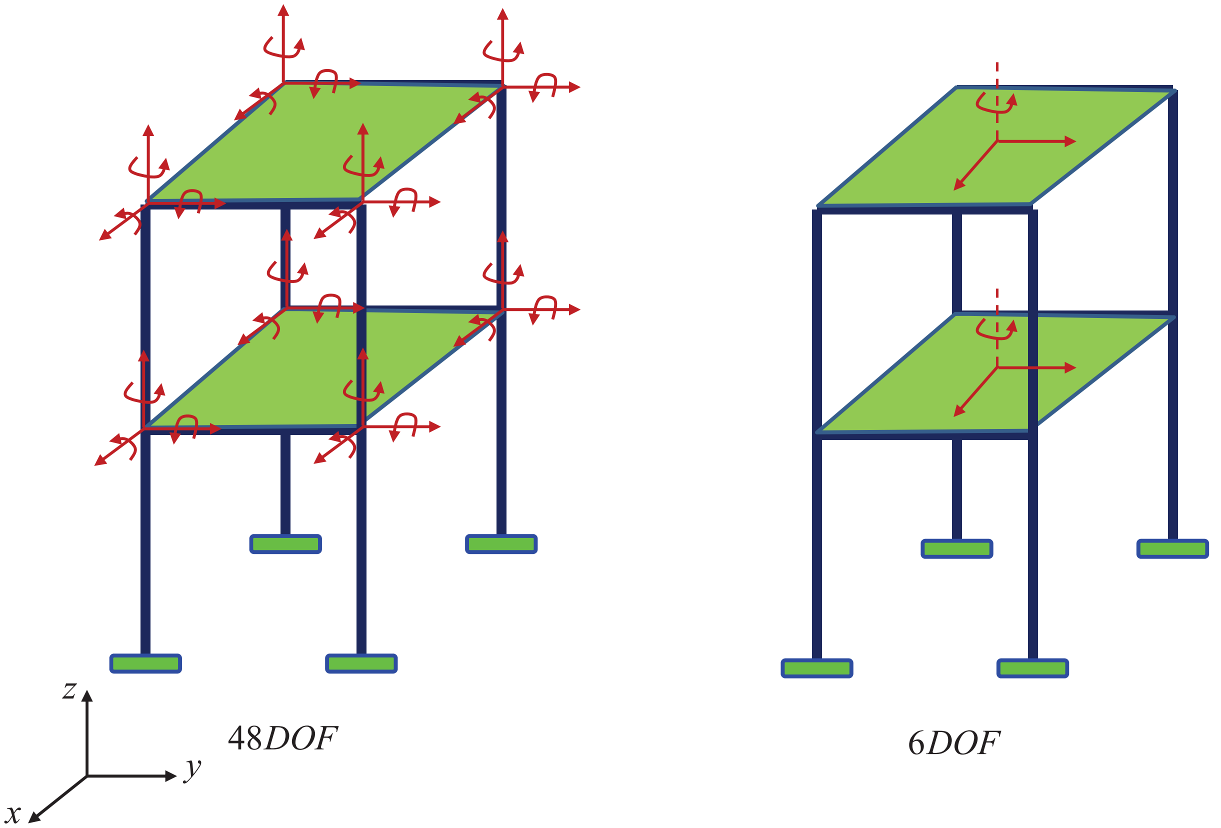
روش ماتریسی

I. مبانی حرکت مدل‌های چند درجه آزاد



روش ماتریسی

I. مبانی حرکت مدل‌های چند درجه آزاد



I. مبانی حرکت مدل‌های چند درجه آزاد

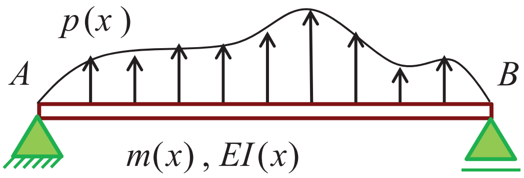
در سیستم‌های پیوسته فرض می‌شود که حرکت سازه توسط تغییرمکان‌های مجموعه‌ای از نقاط مجزا بر روی سازه تعیین شده باشد. در عمل، انتخاب این نقاط بایستی متناظر با مشخصه‌های خاصی از عوامل فیزیکی که دارای تاثیر عمده هستند (نظیر نحوه توزیع بار، جرم و سختی) صورت گیرد؛ و طوری توزیع شده باشند که شکل تغییر مکان را به طور مناسبی توصیف نمایند.

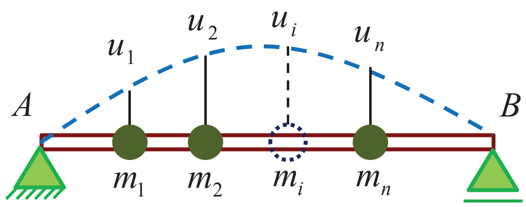
برای یک سیستم n درجه آزادی، معادله حرکت سیستم را می‌توان از رابطه تعادل نیروهای موثر در هر کدام از درجات آزادی آن به دست آورد. در حالت استاتیکی به طور کلی در هر نقطه مانند i دو نوع نیرو می‌تواند وجود داشته باشد:

الف– بار خارجی p_i

و نیروهای ناشی از حرکت:

ب– نیروهای الاستیک f_{Si}





روش ماتریسی

I. مبانی حرکت مدل‌های چند درجه آزاد

نیروی‌های الاستیک متناسب با تغییرمکان می‌باشند و به صورت زیر به دست می‌آیند

که می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

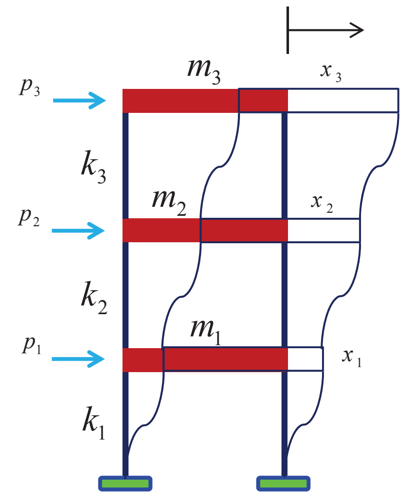
$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{Sn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{f_S\} = [k]\{u\}}$$

$[k]$: ماتریس سختی سازه نامیده می‌شود. که در آن درایه k_{ij} ، i و j اُمین المان ماتریس سختی می‌باشد که برابر است با مقدار نیروی لازم در راستای درجه آزادی i جهت ایجاد تغییر مکان واحد در راستای درجه آزادی j زمانی که از تغییر مکان در راستای سایر درجات آزادی جلوگیری شود. به جای نیرو و جابجایی به ترتیب می‌توان از لنگر و دوران استفاده کرد.

$\{u\}$: بردار تغییر مکان است که بیان‌گر شکل تغییر مکان سازه می‌باشد.

I. مبانی حرکت مدل‌های چند درجه آزاد



مدل قاب برشی

در ساده‌ترین مدل از ساختمان‌های چند طبقه که به نام سازه برشی مرسوم است فرض می‌شود که:

۱) جرم کل سازه در سقف‌ها متمرکز شده باشد.

۲) ستون‌ها بدون جرم باشند.

۳) سیستم سقف‌ها و تیرها صلب (دیافراگم) باشند.

۴) ستون‌ها بدون تغییر شکل محوری در نظر گرفته می‌شوند.

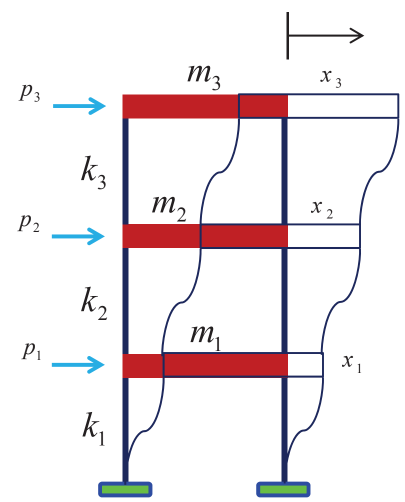
۵) ستون‌ها در مقابل تغییر شکل جانبی انعطاف‌پذیر در نظر گرفته می‌شوند.

۶) تنها درجه‌های آزادی انتقالی در نظر گرفته می‌شود از اثر دوران گره‌ها طرف نظر می‌شود.

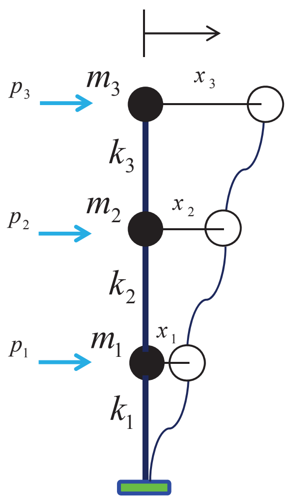
جرم‌های متمرکز در نقاط هم‌تراز با سقف‌ها m_3, m_2, m_1 نشان داده شده‌اند که در آن m_j جرم سقف j اُم است. خواص الاستیک سازه با سختی‌های جانبی k_3, k_2, k_1 مشخص گردیده به طوری که k_j سختی جانبی طبقه j اُم، یعنی نیروی برشی لازم برای ایجاد جابجایی نسبی واحد در آن طبقه، است.

I. مبانی حرکت مدل‌های چند درجه آزاد

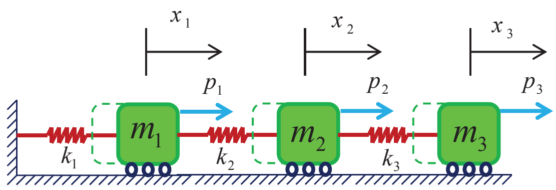
سایر مدل‌های ساده شده سیستم های چند درجه آزاد



مدل قاب برشی



مدل جرم متمرکز



مدل جرم فنر

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

برخی خواص مهم ماتریس سختی

- ماتریس سختی متقارن است. (به کمک قانون بتی قابل اثبات است. قانون بتی: کار انجام شده توسط مجموعه‌ای از نیروها بر روی تغییر مکانی ناشی از یک مجموعه نیروهای دیگر برابر است با کار انجام شده توسط مجموعه نیروهای دوم بر روی تغییر مکان‌های ناشی از مجموعه نیروهای اول $p_a^T u_b = p_b^T u_a$)

- ماتریس سختی ماتریس مثبت – معین است. ماتریس‌های مثبت- معین غیرتکین (غیر منفرد یا دترمینان آن مخالف صفر) بوده و معکوس‌پذیر می‌باشند. (با توجه به اینکه انرژی ذخیره شده در سازه ناشی از تغییر شکل به صورت $U = \frac{1}{2} u^T k u$ می‌باشد و چون این انرژی در یک سازه پایدار همیشه مثبت است بنابرین شرط مثبت معین بودن ماتریس سختی k محقق می‌گردد.)

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

روش‌های تعیین ماتریس سختی عبارت است از:

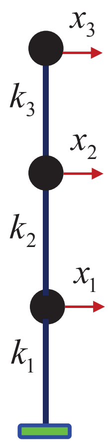
1) روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب سختی
2) روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب نرمی
3) روش المان محدود.

۱) روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب سختی

در این روش به ترتیب در راستای هر کدام از درجات آزادی سازه (درجه آزادی i اُم) تغییر مکان واحد ایجاد کرده و همزمان تغییر مکان در راستای سایر درجات آزادی سازه مقید می‌گردد. نیروهای پدید آمده در راستای درجات آزادی مختلف سازه نشان دهنده عناصر ستونی خاص از ماتریس سختی (ستون i اُم) خواهند بود. با تکرار این عمل برای سایر درجات آزادی سازه، ماتریس سختی کل سازه به دست می‌آید.

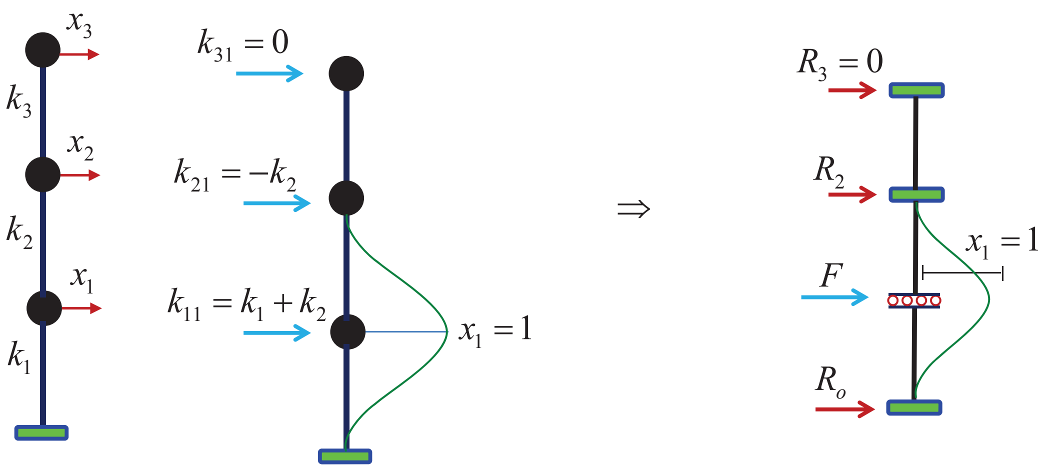
.II محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

مثال ۱– با استفاده از روش مستقیم ماتریس سختی سیستم ۳ درجه آزاد نشان داده شده را محاسبه نمایید.



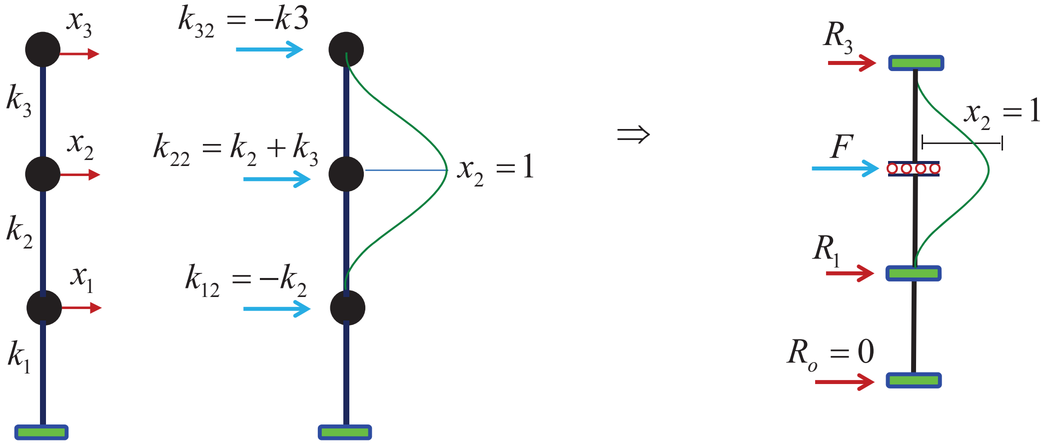
.II محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۱–



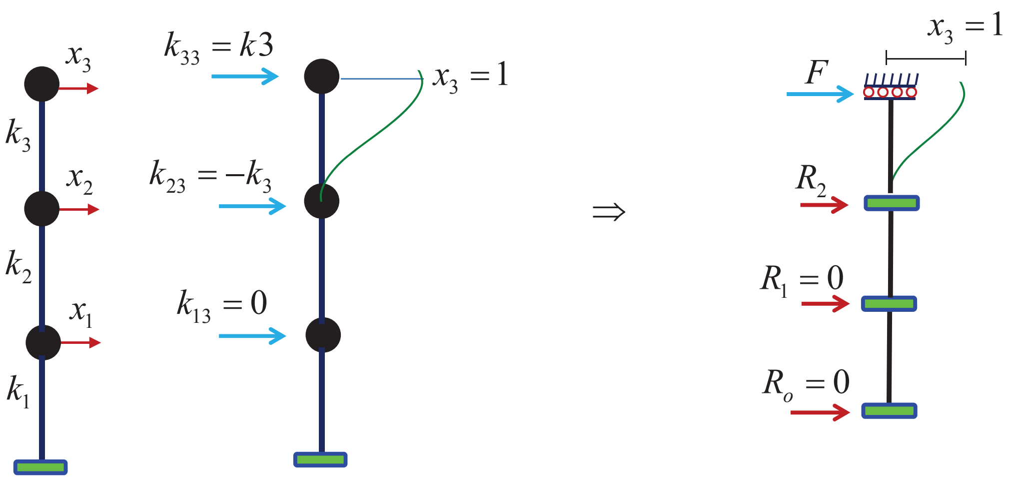
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۱-



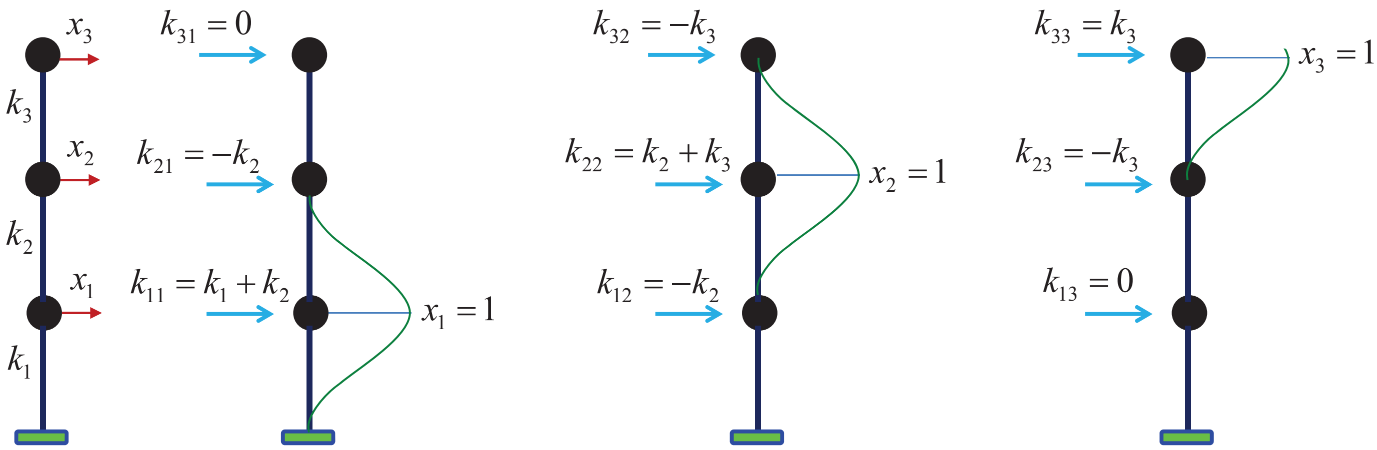
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۱-



II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

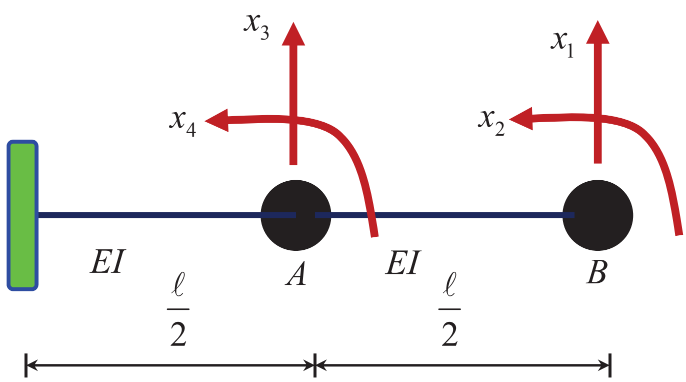
حل مثال ۱-



$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[k]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}$$

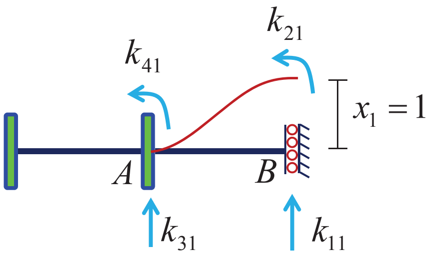
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

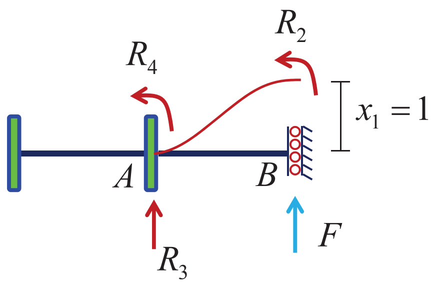
مثال ۲– با استفاده از روش مستقیم ماتریسی سختی سیستم ۴ درجه آزاد نشان داده شده را محاسبه نمایید.



II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

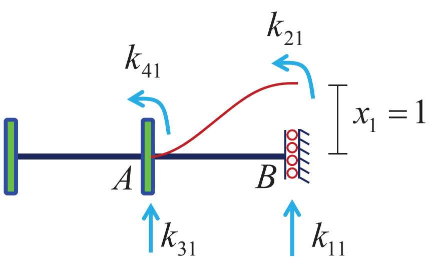
حل مثال ۲-

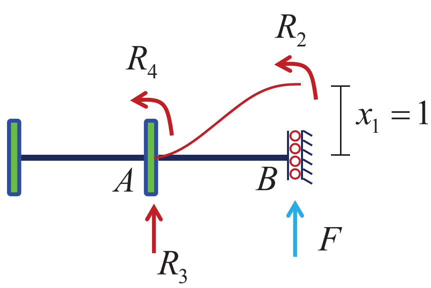


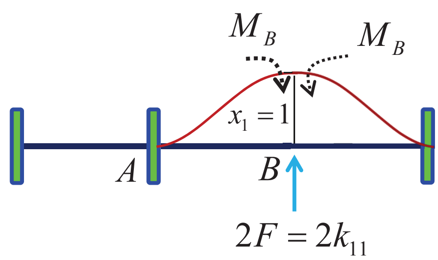


II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۲-

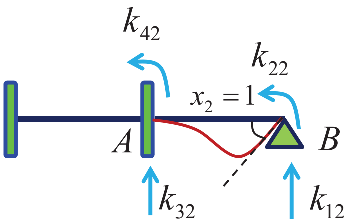


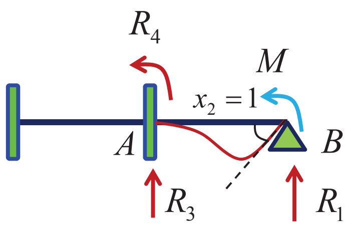


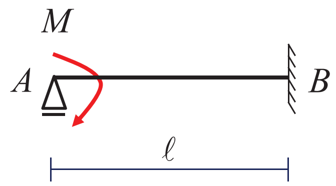


II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۲-





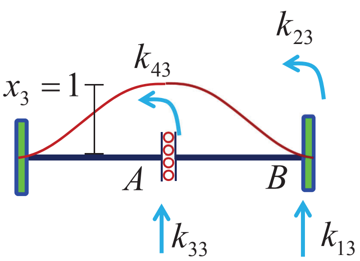


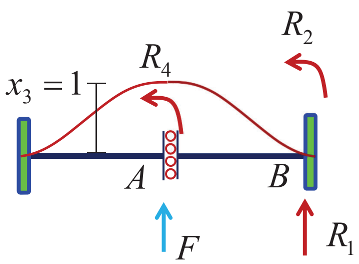
$$M_B = \frac{M}{2} \quad \text{(هم جهت با M)}$$

$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

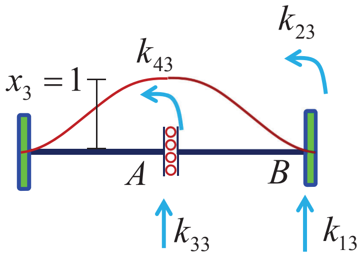
حل مثال ۲-

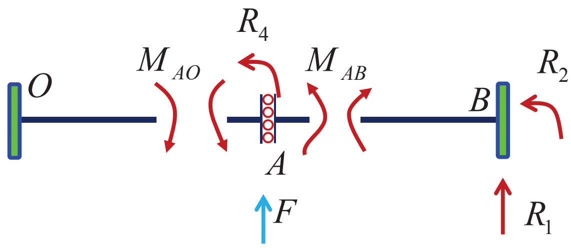




II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

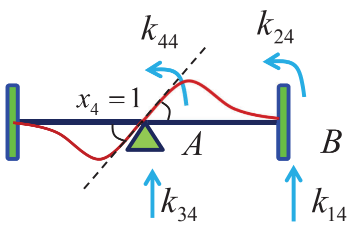
حل مثال ۲-

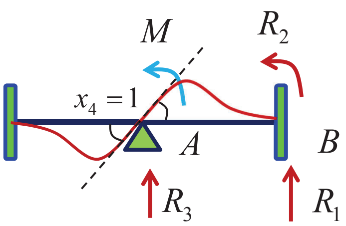


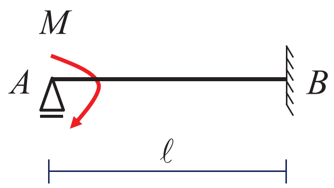


II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۲-







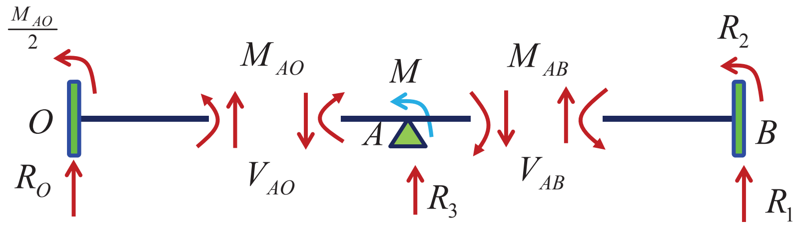
$M_B = \dfrac{M}{2}$ (هم جهت با M)

$\theta_A = \dfrac{M\ell}{4EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = \dfrac{4EI}{\ell}$

روش ماتریسی

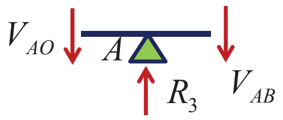
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال ۲-



برش سمت راست

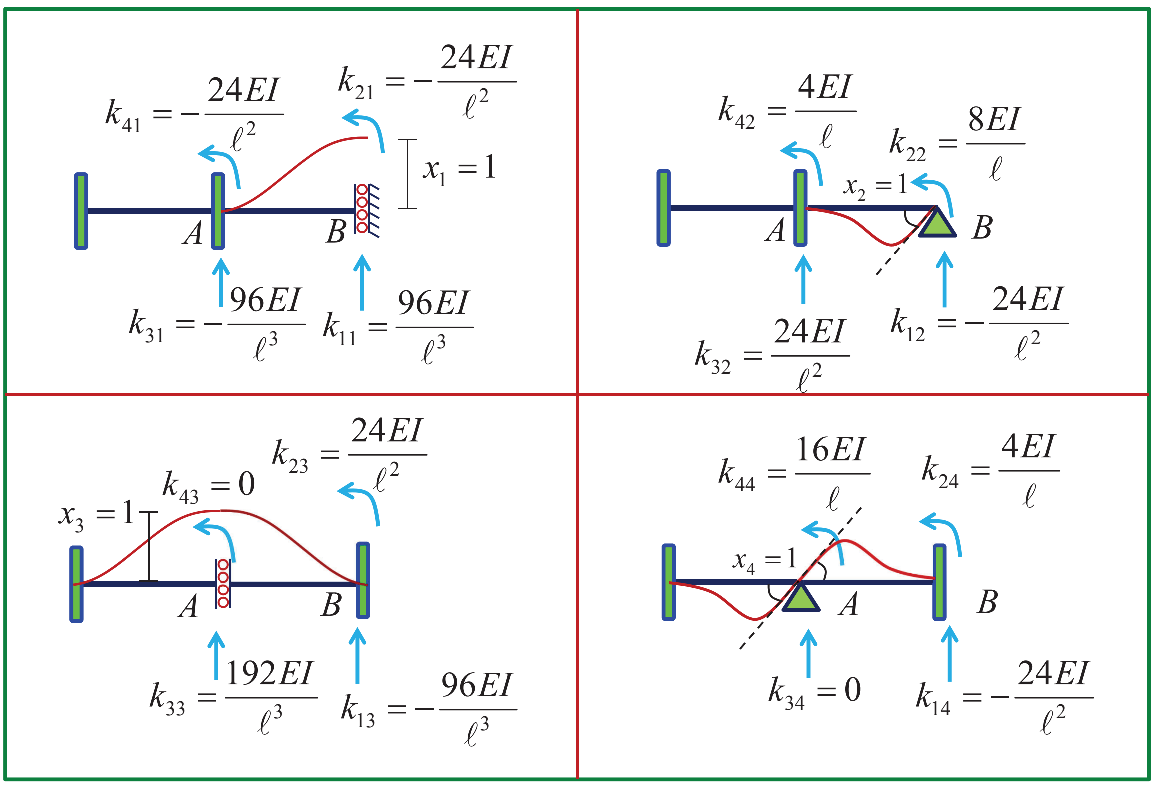
برش سمت چپ



روش ماتریسی

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

حل مثال ۲-



II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

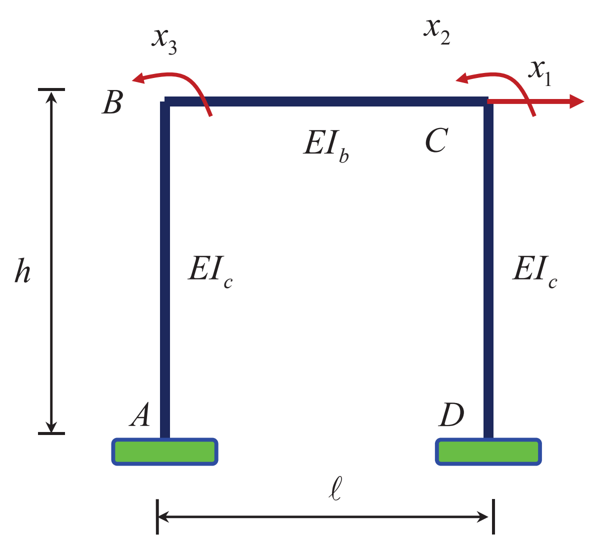
حل مثال ۲-

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{96EI}{\ell^3} & -\frac{24EI}{\ell^2} & -\frac{96EI}{\ell^3} & -\frac{24EI}{\ell^2} \\ -\frac{24EI}{\ell^2} & \frac{8EI}{\ell} & \frac{24EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \\ -\frac{96EI}{\ell^3} & \frac{24EI}{\ell^2} & \frac{192EI}{\ell^3} & 0 \\ -\frac{24EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & \frac{16EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{[k]=\frac{8EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -3\ell & -12 & -3\ell \\ -3\ell & \ell^2 & 3\ell & \frac{1}{2}\ell^2 \\ -12 & 3\ell & 24 & 0 \\ -3\ell & \frac{1}{2}\ell^2 & 0 & 2\ell^2 \end{bmatrix}}$$

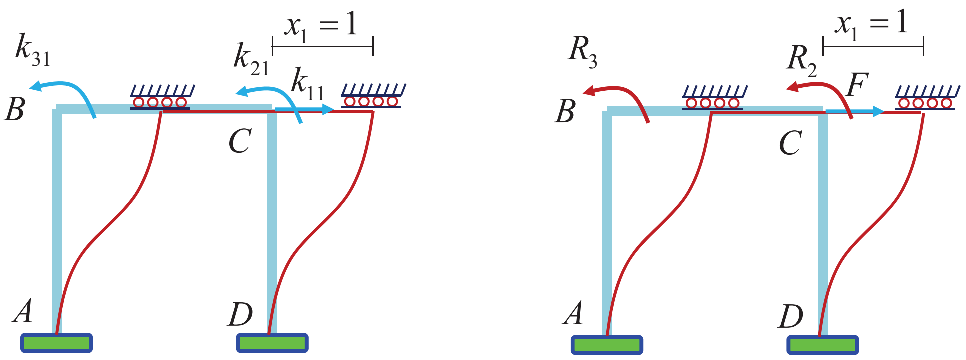
II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

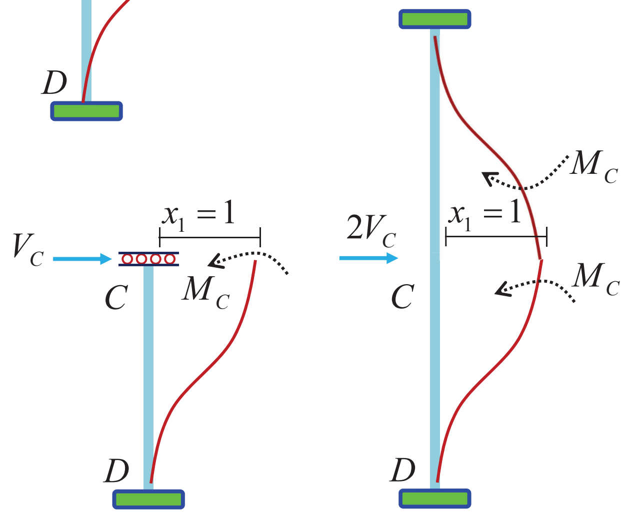
مثال ۳- سختی قاب نشان داده شده با توجه به درجات آزادی مورد نظر را با استفاده از روش مستقیم ماتریس سختی محاسبه نمایید.



II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

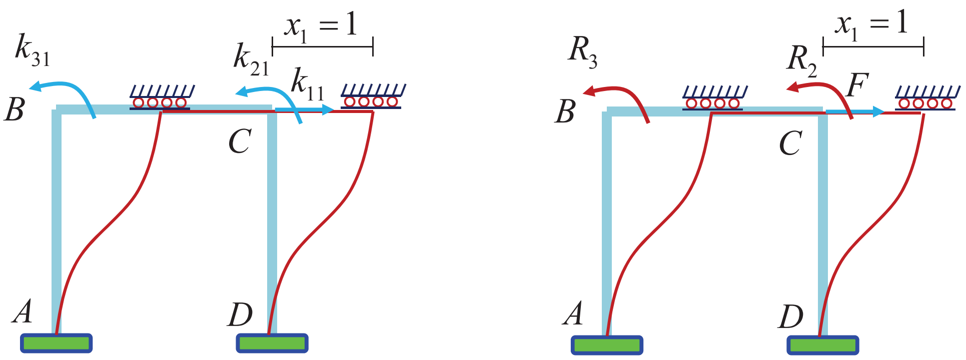
حل مثال ۳-

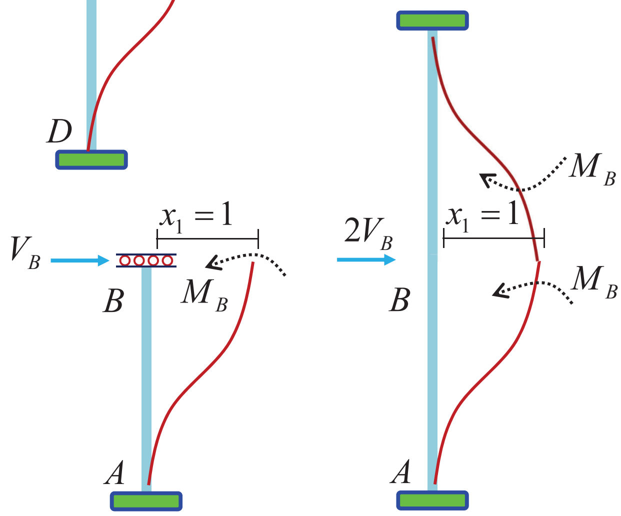




II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

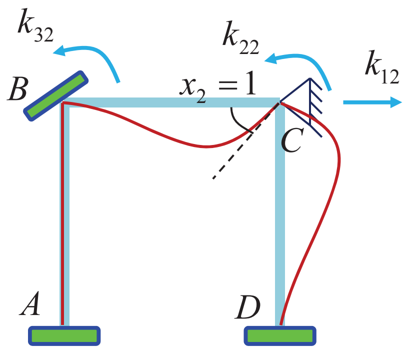
حل مثال ۳-

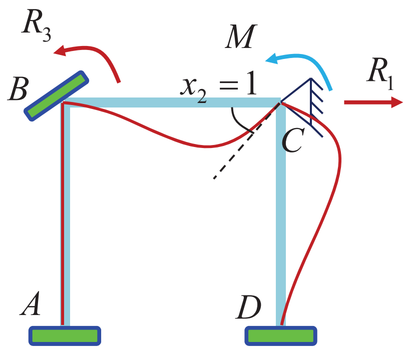


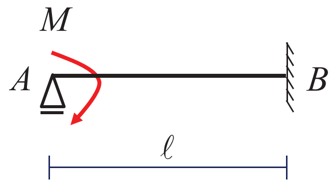


II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۳-

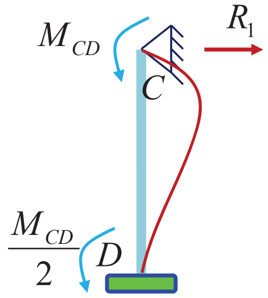






$$M_B=\frac{M}{2}$$ (هم جهت با M)

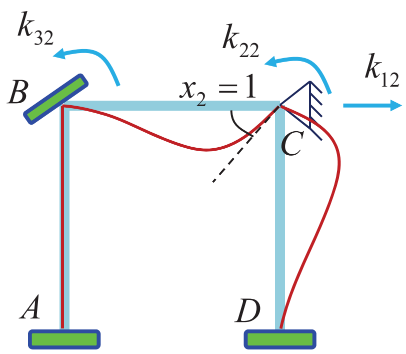
$$\theta_A=\frac{M\ell}{4EI} \Rightarrow k_{\theta_A}=\frac{4EI}{\ell}$$

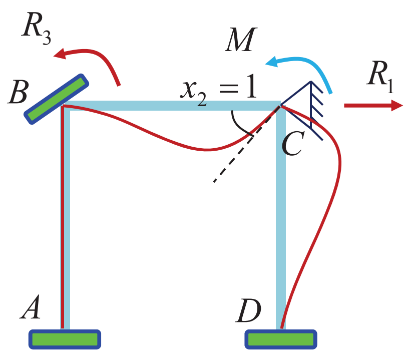


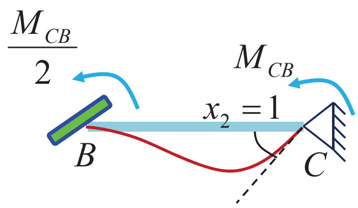
روش ماتریسی

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

حل مثال ۳-



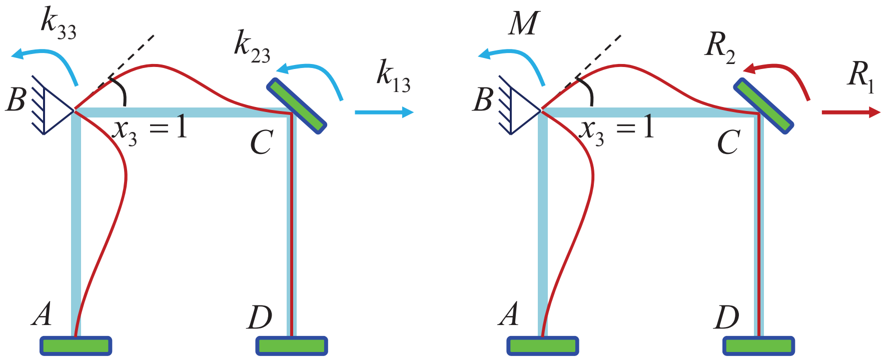


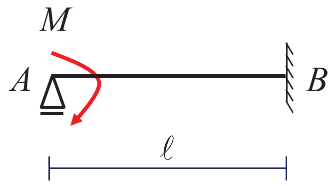


روش ماتریسی

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

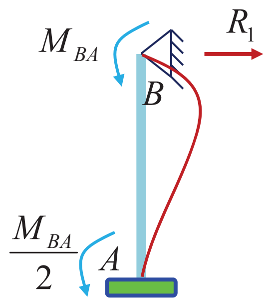
حل مثال ۳-





$$M_B = \frac{M}{2} \quad \text{(هم جهت با M)}$$

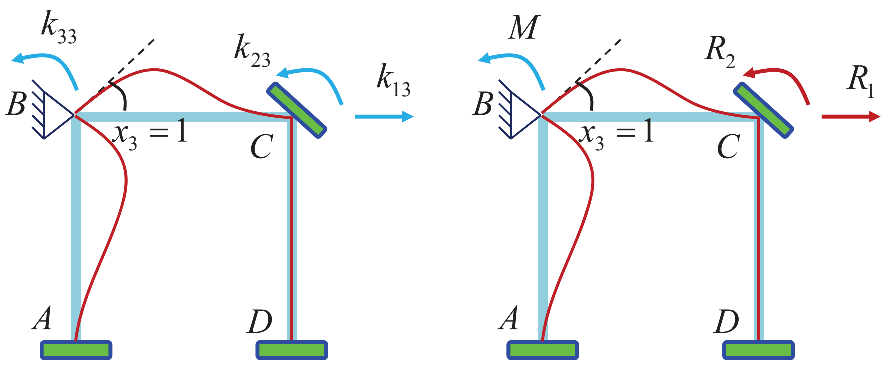
$$\theta_A = \frac{M\ell}{4EI} \Rightarrow k_{\theta_A} = \frac{4EI}{\ell}$$

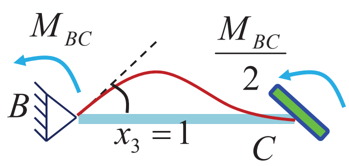


روش ماتریسی

II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای - ماتریس سختی

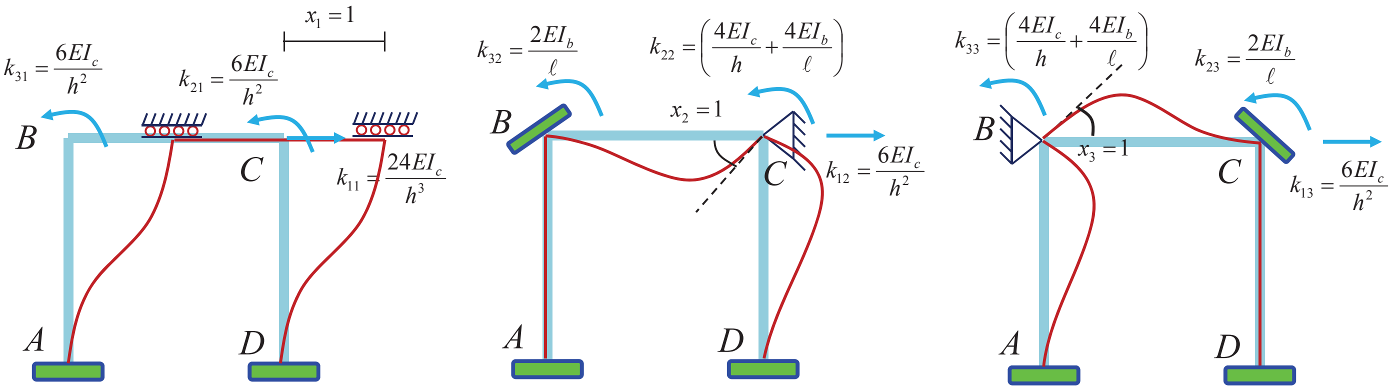
حل مثال ۳-





II. محاسبه ماتریس‌های مشخصه‌های سازه‌ای – ماتریس سختی

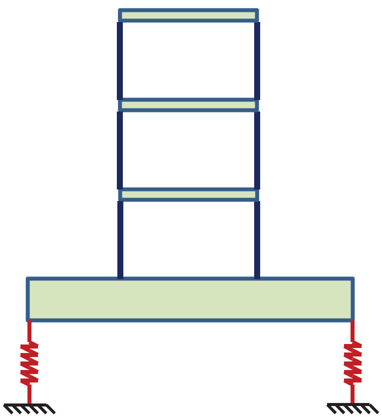
حل مثال ۳-



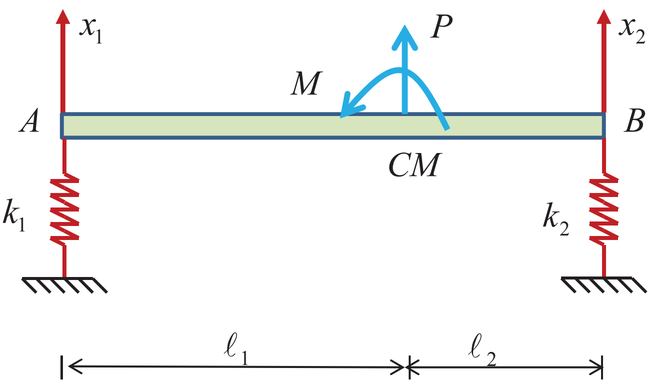
$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{24EI_c}{h^3} & \frac{6EI_c}{h^2} & \frac{6EI_c}{h^2} \\ \frac{6EI_c}{h^2} & \left(\frac{4EI_c}{h}+\frac{4EI_b}{\ell}\right) & \frac{2EI_b}{\ell} \\ \frac{6EI_c}{h^2} & \frac{2EI_b}{\ell} & \left(\frac{4EI_c}{h}+\frac{4EI_b}{\ell}\right) \end{bmatrix}$$

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

مثال ۴– تیر صلب AB بر روی دو فنر قرار دارد. با در نظر گرفتن درجه‌های آزادی نشان داده شده معادله تعادل را به دست آورید. جرم کل میله m و طول کل آن ℓ است.



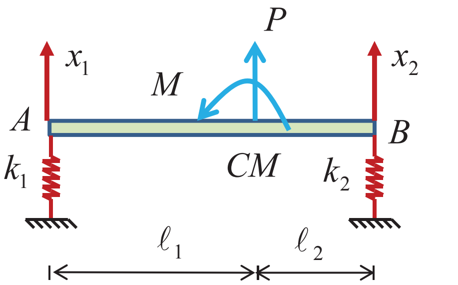
مانند ارتعاش ساختمان روی پی ارتجاعی



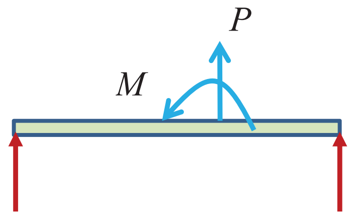
روش ماتریسی

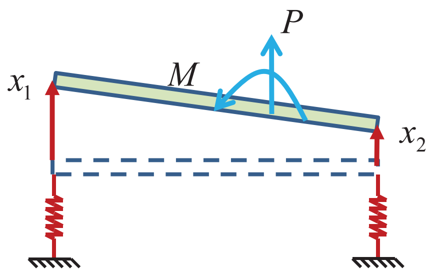
IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

حل مثال ۴-



$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M = 0 \quad \Rightarrow$$





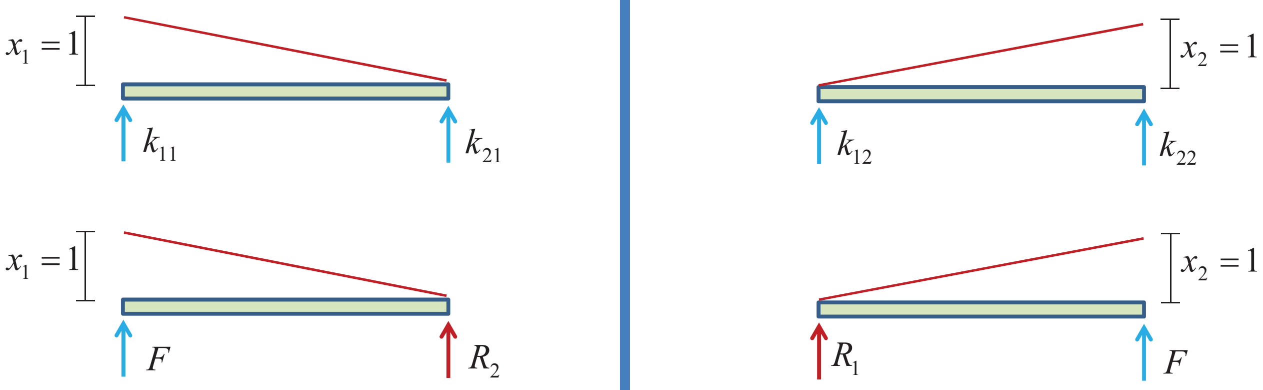
در این حالت سیستم دارای جرم گسترده است. هم حرکت دورانی و هم حرکت انتقالی در میله اتفاق می‌افتد.

روش ماتریسی

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

حل مثال ۴-

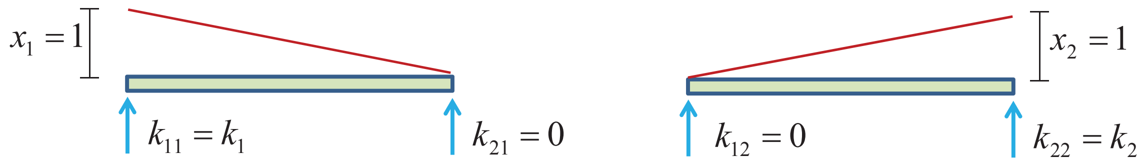
تعیین ماتریس سختی



IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

حل مثال ۴-

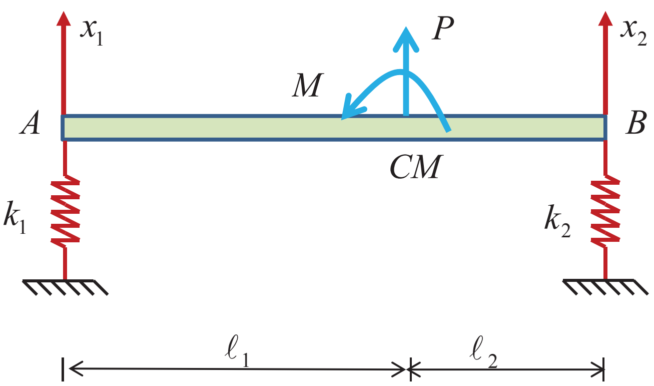
تعیین ماتریس سختی



$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[k] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}}$$

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

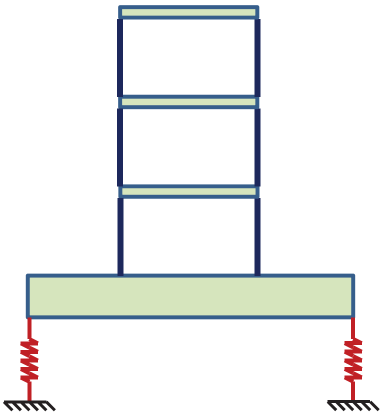
حل مثال ۴- تعیین ماتریس جرم

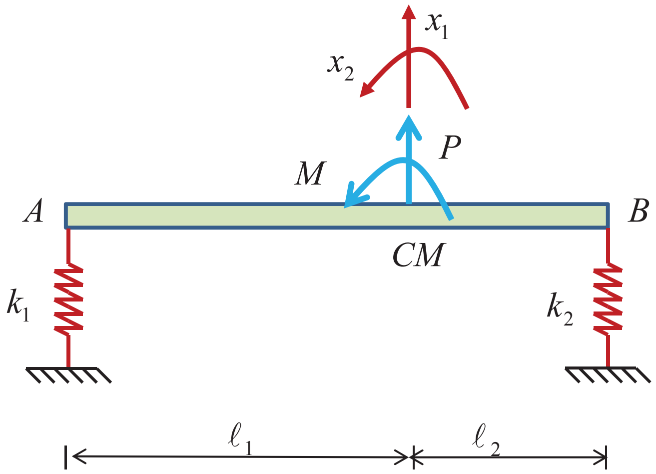


$$\boxed{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M}{\ell} - \frac{\ell_2}{\ell} P \\ -\frac{M}{\ell} - \frac{\ell_1}{\ell} P \end{Bmatrix}}$$

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

مثال ۵- تیر صلب AB بر روی دو فنر قرار دارد. با در نظر گرفتن درجه‌های آزادی نشان داده شده معادله تعادل را به دست آورید. جرم کل میله m و طول کل آن ℓ است.

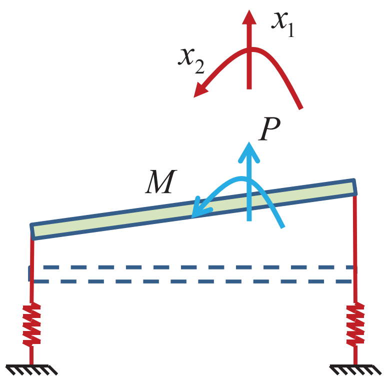




مانند ارتعاش ساختمان روی پی ارتجاعی

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

حل مثال ۵-

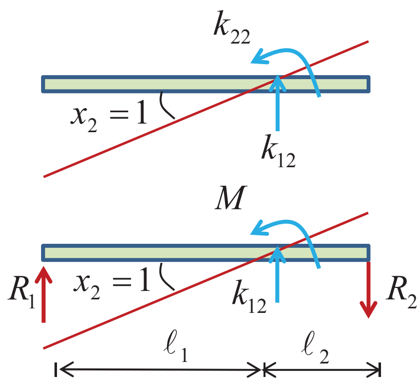


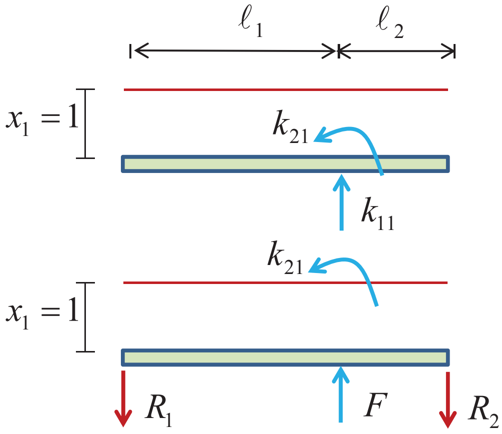
در این حالت سیستم دارای جرم گسترده است. هم حرکت دورانی و هم حرکت انتقالی در میله اتفاق می‌افتد.

روش ماتریسی

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

حل مثال ۵- تعیین ماتریس سختی

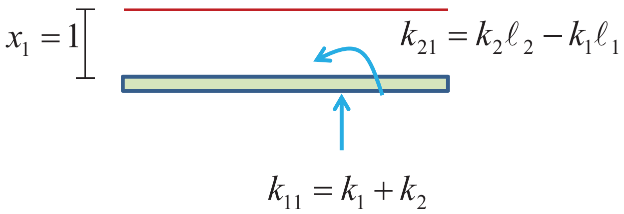


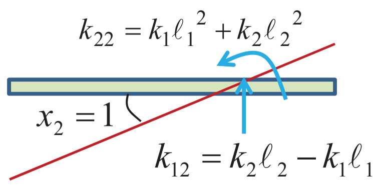


روش ماتریسی

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

حل مثال ۵- تعیین ماتریس سختی

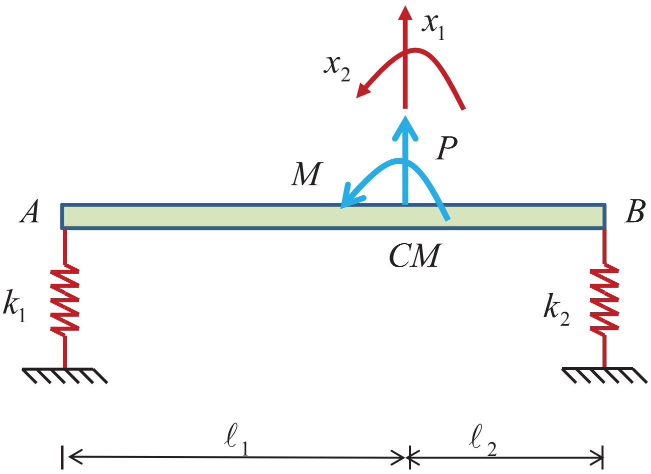




$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[k]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2\ell_2-k_1\ell_1 \\ k_2\ell_2-k_1\ell_1 & k_1\ell_1^2+k_2\ell_2^2 \end{bmatrix}}$$

IV. معادله تعادل سیستم های چند درجه آزاد

حل مثال ۵- تعیین ماتریس جرم

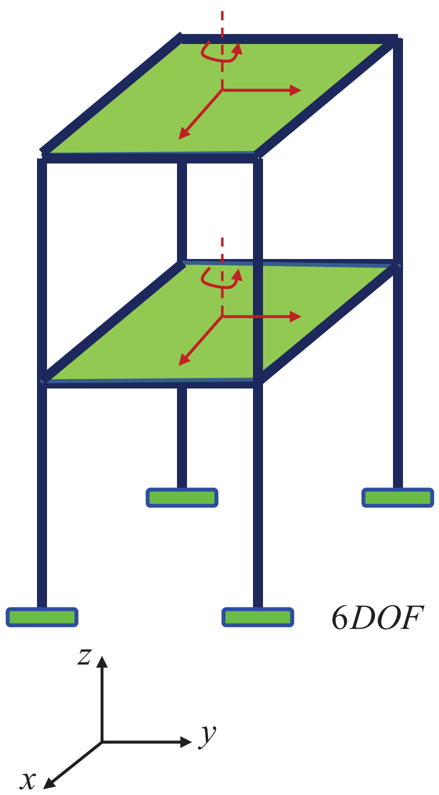


$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2\ell_2-k_1\ell_1 \\ k_2\ell_2-k_1\ell_1 & k_1\ell_1^2+k_2\ell_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix}$$

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

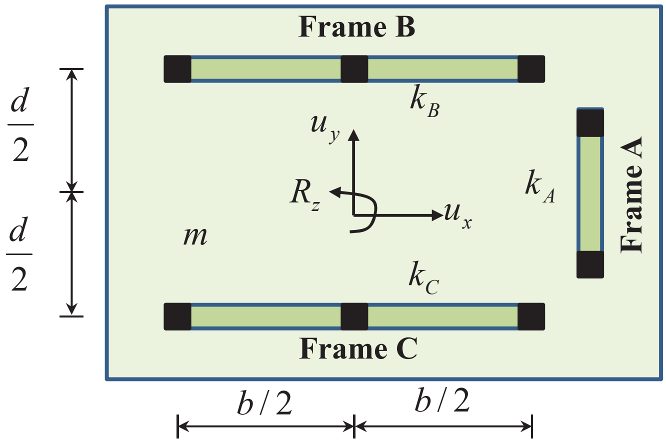
ساختمان در حالت سه بعدی با مدل برشی در هر طبقه دارای سه درجه آزادی است. که دو درجه آزادی آن از نوع انتقالی u_x ,u_y و یک درجه آزادی آن از نوع دورانی با اثر پیچشی R_z است.

نیروی زلزله، نیروی اینرسی است که بر جرم سازه اثر می‌کند. حال اگر مرکز سختی و مرکز جرم بر هم منطبق نباشند سازه حول مرکز سختی تمایل به دوران دارد. در ساختمان‌هایی که عدم تقارن زیادی دارند اثر پیچش می‌تواند تاثیر بسزایی بر سازه داشته باشد.



VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

پلان یک ساختمان یک طبقه مطابق شکل مقابل است:



k_A: سختی قاب A در جهت y

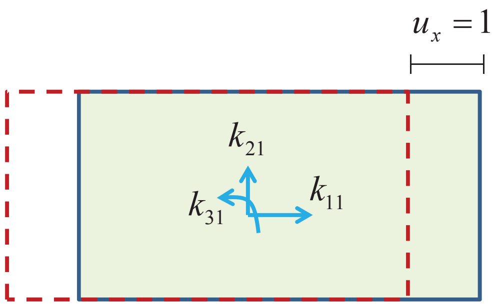
k_B: سختی قاب B در جهت x

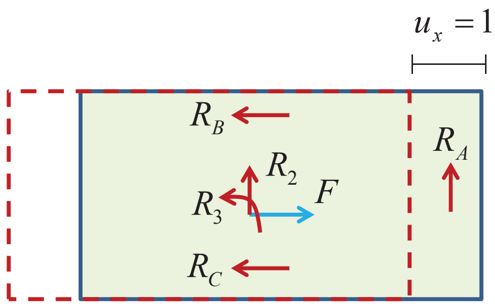
k_C: سختی قاب C در جهت x

m: جرم کل طبقه

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

ماتریس سختی این سازه را می‌توان به روش مستقیم محاسبه کرد





$$\boxed{R_B = k_B \cdot (1) = k_B \quad , \quad R_C = k_C \cdot (1) = k_C \quad , \quad R_A = k_A \cdot (0) = 0}$$

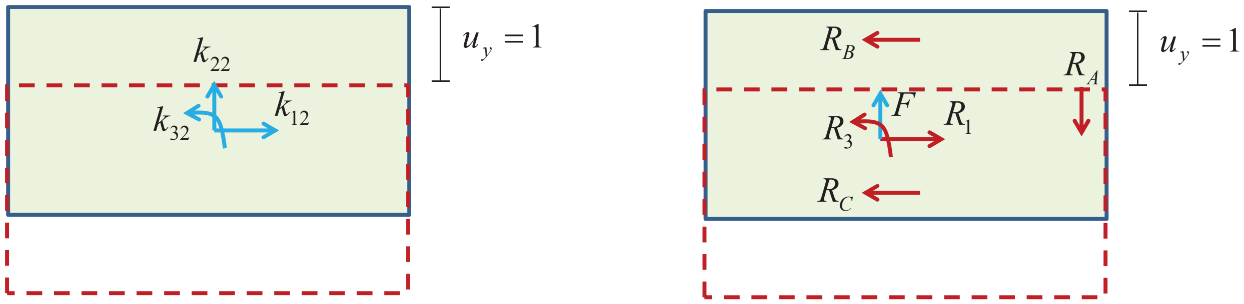
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F = R_B + R_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{11} = F = k_B + k_C}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = -R_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{21} = R_2 = 0}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = R_C \frac{d}{2} - R_B \frac{d}{2} = (k_C - k_B)\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{31} = R_3 = (k_C - k_B)\frac{d}{2}}$$

روش ماتریسی

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



$$\boxed{R_B = k_B \cdot (0) = 0 \quad , \quad R_C = k_C \cdot (0) = 0 \quad , \quad R_A = k_A \cdot (1) = k_A}$$

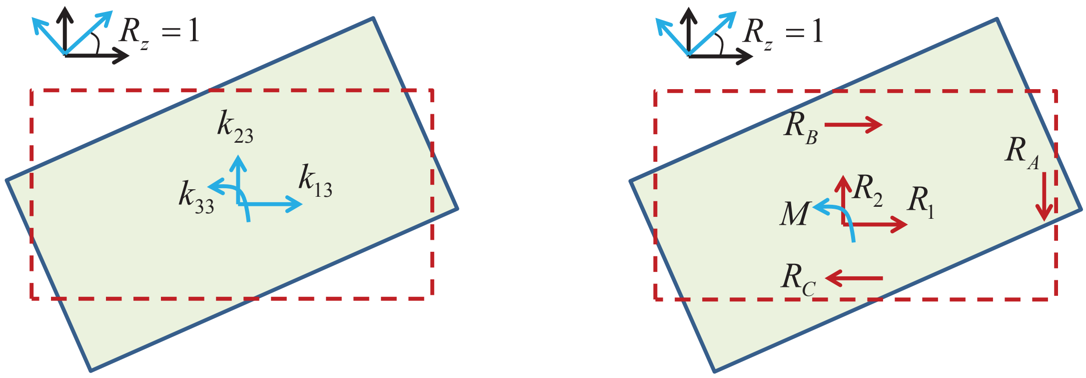
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; R_1 = R_B + R_C = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{k_{12} = R_1 = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F = R_A \;\Rightarrow\; \boxed{k_{22} = F = k_A}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \;\Rightarrow\; R_3 = R_A \frac{b}{2} = (k_A)\frac{b}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{k_{32} = R_3 = (k_A)\frac{b}{2}}$$

روش ماتریسی

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



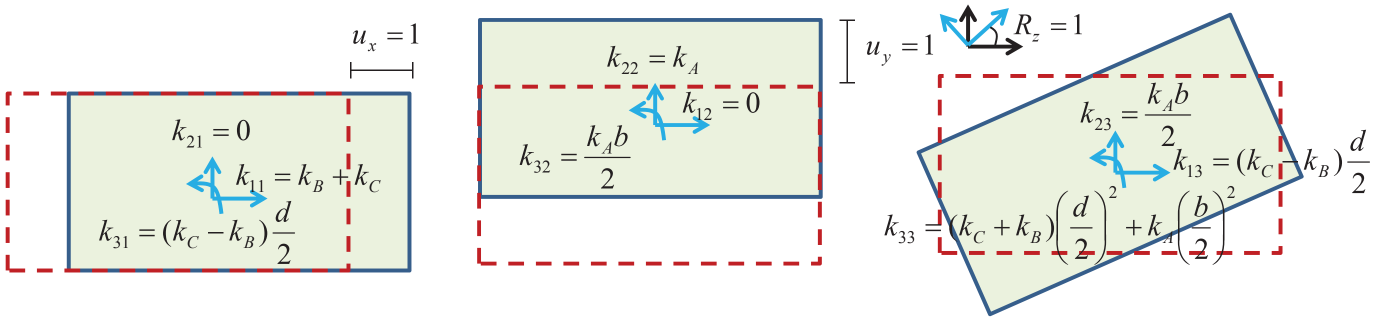
$$\boxed{R_B = k_B \cdot (\frac{d}{2} \times 1) = \frac{k_B d}{2} \quad , \quad R_C = k_C \cdot (\frac{d}{2} \times 1) = \frac{k_C d}{2} \quad , \quad R_A = k_A \cdot (\frac{b}{2} \times 1) = \frac{k_A b}{2}}$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; R_1 = R_C - R_B = \frac{k_C d}{2} - \frac{k_B d}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{k_{13} = R_1 = (k_C - k_B)\frac{d}{2}}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_2 = R_A \;\Rightarrow\; \boxed{k_{23} = R_2 = \frac{k_A b}{2}}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \;\Rightarrow\; M = R_B \frac{d}{2} + R_C \frac{d}{2} + R_A \frac{b}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{k_{33} = M = (k_C + k_B)\left(\frac{d}{2}\right)^2 + k_A \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

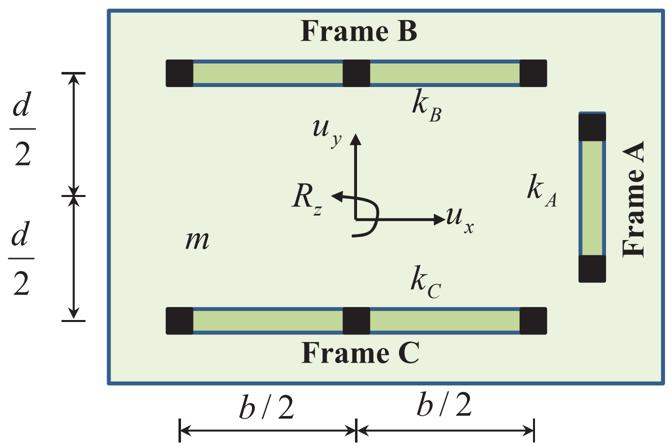
VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



$$[k]_{3\times3} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_x & u_y & R_z \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ R_z \end{array} \end{array} \Rightarrow$$

$$[k]_{3\times3} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_x & u_y & R_z \end{array} & \\ \begin{bmatrix} (k_B + k_C) & 0 & (k_C - k_B)\frac{d}{2} \\ 0 & k_A & \frac{k_A b}{2} \\ (k_C - k_B)\frac{d}{2} & \frac{k_A b}{2} & (k_C + k_B)\left(\frac{d}{2}\right)^2 + k_A\left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ R_z \end{array} \end{array}$$

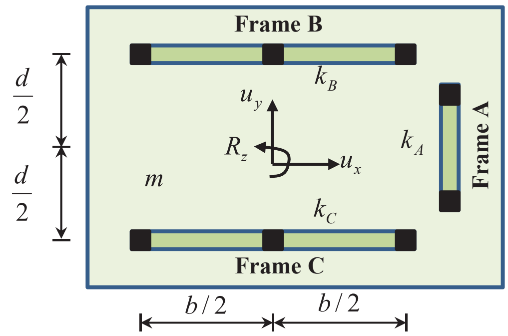
VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



اگر نیروی خارجی در سه درجه آزادی اعمال شود بردار نیروی خارجی به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$\{p(t)\}_{3\times1} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)



در نهایت می‌توان معادله تعادل را تشکیل داد:

$$\left[k\right]_{3\times3}\left\{x\right\}_{3\times1}=\left\{p\right\}_{3\times1}$$

$$\begin{bmatrix} (k_B+k_C) & 0 & (k_C-k_B)\dfrac{d}{2} \\ 0 & k_A & \dfrac{k_A b}{2} \\ (k_C-k_B)\dfrac{d}{2} & \dfrac{k_A b}{2} & (k_C+k_B)\left(\dfrac{d}{2}\right)^2+k_A\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

حالت خاص I: سختی در یک امتداد متقارن اگر سازه در راستای x متقارن باشد

$$if \quad k_B=k_C=k \quad\Rightarrow \quad k_A=k$$

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & \dfrac{kb}{2} \\ 0 & \dfrac{kb}{2} & (2k)\left(\dfrac{d}{2}\right)^2+k\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

می‌توان گفت که معادله حرکت در راستای x، مستقل از دو امتداد دیگر می‌شود و این ناشی از اثر تقارن است. یعنی اگر سازه نسبت به امتداد خاصی متقارن باشد، معادله حرکت در آن امتداد مستقل از درجه‌های آزادی دیگر خواهد بود. این در حالی است که دو معادله دیگر از هم مستقل نبوده و همبسته می‌باشند.

$$\boxed{2ku_x=P_x}$$

$$ku_y+\frac{kb}{2}R_z=P_y$$

$$\frac{kb}{2}u_y+\left((2k)\left(\frac{d}{2}\right)^2+k\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)R_z=M_z$$

VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

حالت خاص II: سختی در دو امتداد متقارن (منطبق بودن مرکز سختی و مرکز جرم)

$if \quad k_B = k_C = k \quad \Rightarrow$ اگر سازه در راستای x متقارن باشد

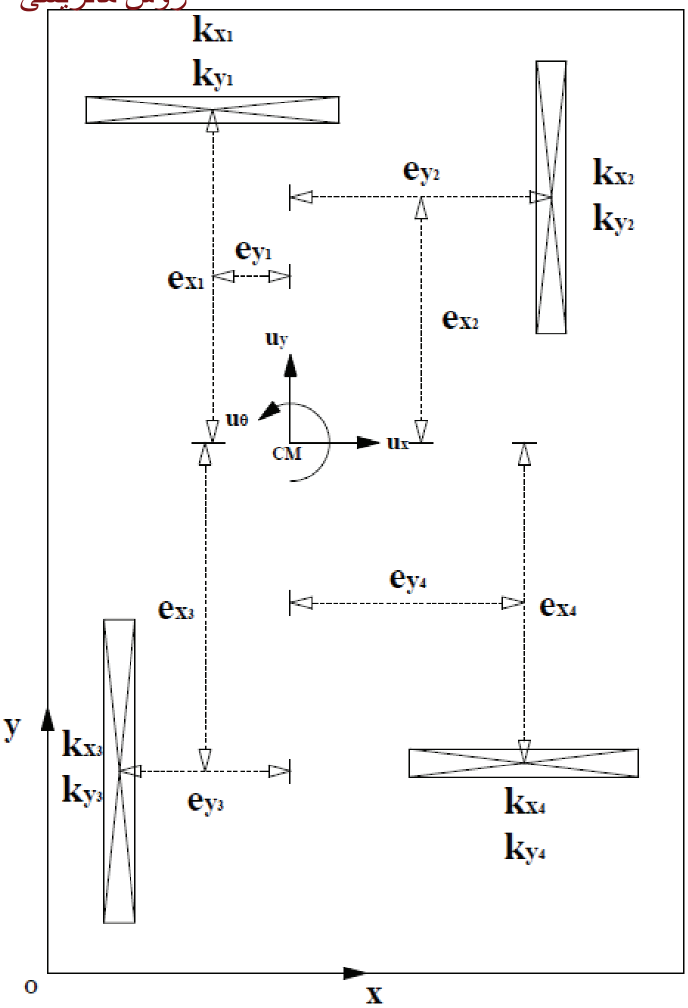
$if \quad \dfrac{b}{2} = 0 \quad , \quad k_A = k \quad \Rightarrow$ قاب A در وسط پلان قرار گیرد. اگر سازه در راستای y متقارن باشد

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{kd^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

در این حالت ماتریس سختی قطری می‌شود. از سه درجه آزادی، دو درجه مستقل شده است در نتیجه درجه آزادی سوم خود به خود مستقل می‌شود. در این حالت سه معادله مستقل از هم به دست می‌آید. حرکت سازه در هر راستا مستقل از سایر راستاها بوده و نسبت به هم مستقل می‌باشند.

$$\boxed{\begin{aligned} 2ku_x &= P_x \\ ku_y &= P_y \end{aligned}}$$

$$\frac{kd^2}{2} R_z = M_z$$



VI. مدل‌سازی ساختمان با پلان نامتقارن (اثر پیچشی)

خروج از مرکزیت (فاصله از مرکز جرم)

$$e_{x_i} = y_i - y_{CM}$$
$$e_{y_i} = x_i - x_{CM}$$
$$a_{x_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_{x_i} \end{bmatrix}$$
$$a_{y_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & e_{y_i} \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی هر المان $[k]_i = a_{x_i}{}^T k_{x_i} a_{x_i} + a_{y_i}{}^T k_{y_i} a_{y_i}$

ماتریس سختی طبقه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$[k] = \sum [k]_i = \begin{array}{c} \\ u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_x & \qquad u_y & \qquad u_\theta \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \sum k_{x_i} & 0 & -\sum k_{x_i} \cdot e_{x_i} \\ 0 & \sum k_{y_i} & \sum k_{y_i} \cdot e_{y_i} \\ -\sum k_{x_i} \cdot e_{x_i} & \sum k_{y_i} \cdot e_{y_i} & \sum k_{x_i} \cdot e_{x_i}{}^2 + \sum k_{y_i} \cdot e_{y_i}{}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر عناصر مقاوم سازه در پلان متقارن باشد

$$[k] = \begin{array}{c} \\ u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_x & \qquad u_y & \qquad u_\theta \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \sum k_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & \sum k_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & \sum k_{x_i} \cdot e_{x_i}{}^2 + \sum k_{y_i} \cdot e_{y_i}{}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$