



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها – تمرین

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

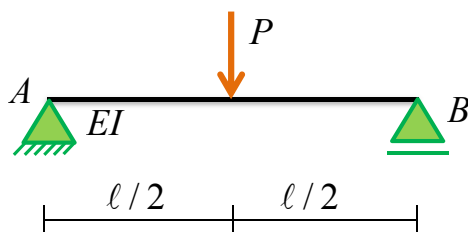
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- مقدار شیب در دو انتهای تیر: $\theta_A = ?$ & $\theta_B = ?$

ب- مقدار خیز در وسط تیر: $y_{(x=\ell/2)} = ?$



$$P = 4 \text{ ton}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg / cm}^2$$

$$I = 1000 \text{ cm}^4$$

$$\ell = 6 \text{ m}$$

پاسخ تمرین ۱-

$$\theta_A = 0.045^{\text{rad}}$$

$$\theta_B = 0.045^{\text{rad}}$$

$$y_C = 9 \text{ cm}$$

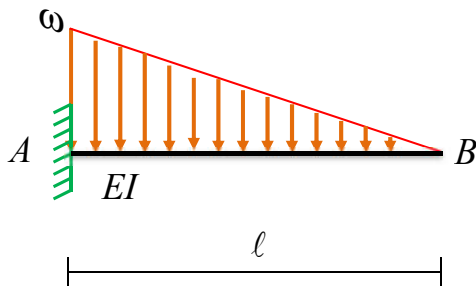
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۲- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- مقدار شیب در انتهای آزاد B.

ب- مقدار خیز در انتهای کنسول.



$$w_0 = 0.4 \text{ ton / m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg / cm}^2$$

$$I = 1000 \text{ cm}^4$$

$$l = 6 \text{ m}$$

پاسخ تمرین ۲-

$$\theta_B = 0.018^{\text{rad}}$$

$$y_B = 8.64 \text{ cm}$$

ETABS File Name: 04-Homework-02.EDB

3

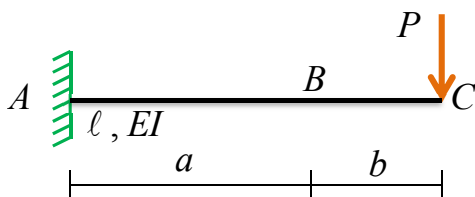
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۳- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B.

ب- مقدار شیب در گره B.



پاسخ تمرین ۳-

$$y_B = \frac{Pa^2(2\ell + b)}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{Pa(\ell + b)}{2EI}$$

4

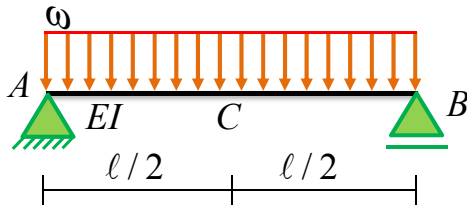
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۴- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره C.

ب- مقدار شیب در گره B.



پاسخ تمرین ۴-

$$y_C = \frac{5w\ell^4}{384EI}$$

$$\theta_B = \frac{w\ell^3}{24EI}$$

5

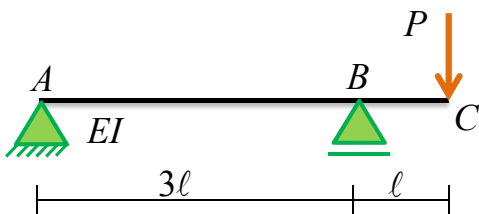
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۵- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در A.

ب- مقدار خیز در گره C.



پاسخ تمرین ۵-

$$\theta_A = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

$$y_C = \frac{4P\ell^3}{3EI}$$

6

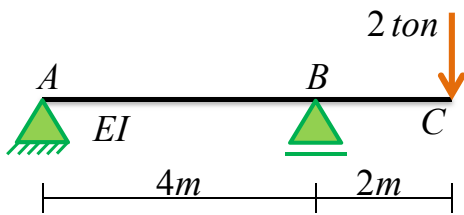
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۶- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در C.

ب- مقدار خیز در گره C.



$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

پاسخ تمرین ۶-

$$\theta_C = 0.0467^{\text{rad}}$$

$$y_C = 0.08 \text{ m}$$

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

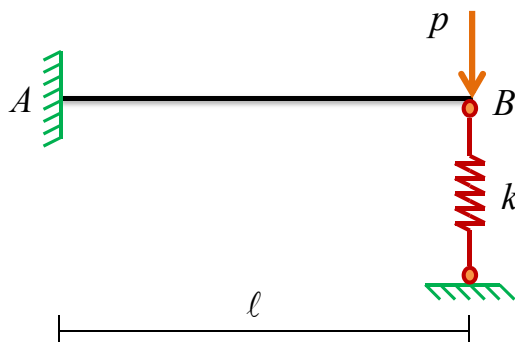
قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۷- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار نیروی ایجاد شده در فنر.

ب- مقدار شیب در B.

ج- مقدار خیز در گره B.



$$p = 2 \text{ ton}$$

$$l = 5 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

$$k = 5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

پاسخ تمرین ۷-

$$f = 1.04 \text{ ton}$$

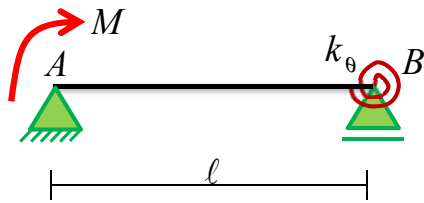
$$\theta_B = 0.06^{\text{rad}}$$

$$y_B = 0.2 \text{ m}$$

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۸- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:



$$M = 3 \text{ ton.m}$$

$$l = 5 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

$$k_\theta = \frac{6EI}{l}$$

الف- مقدار لنگر در فنر پیچشی.

ب- مقدار شیب در B.

پاسخ تمرین ۸-

$$M_\theta = -\frac{M}{3}$$

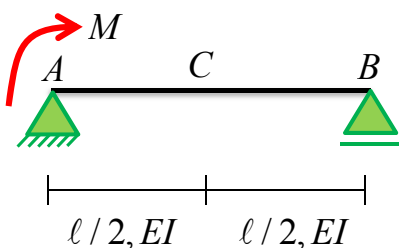
$$\theta_B = \left(\frac{M l}{18EI} \right)^{\text{rad}}$$

9

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۹- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:



الف- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$

ب- مقدار شیب در گره A. $\theta_A = ?$

ج- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$

پاسخ تمرین ۹-

$$y_C = \frac{M l^2}{16EI}$$

$$\theta_A = \frac{M l}{3EI}$$

$$\theta_B = \frac{M l}{6EI}$$

10

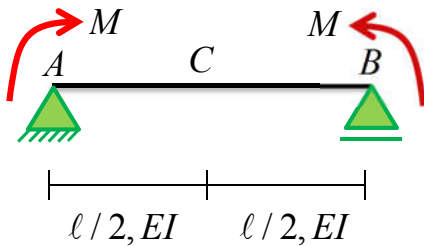
قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۰- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$

ب- مقدار شیب در گره A. $\theta_A = ?$

ج- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



پاسخ تمرین ۱۰-

$$y_C = \frac{M \ell^2}{8EI}$$

$$\theta_A = \frac{M \ell}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{M \ell}{2EI}$$

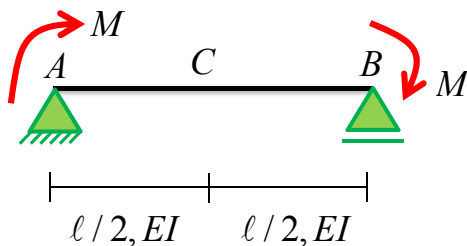
قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۱- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$

ب- مقدار شیب در گره A. $\theta_A = ?$

ج- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



پاسخ تمرین ۱۱-

$$y_C = 0$$

$$\theta_A = \frac{M \ell}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{M \ell}{6EI}$$

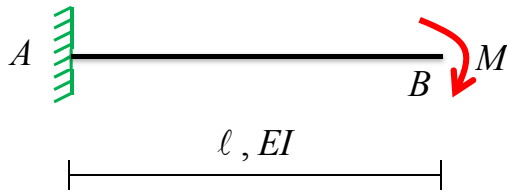
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۲- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



پاسخ تمرین ۱۲-

$$y_B = \frac{M \ell^2}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{M \ell}{EI}$$

13

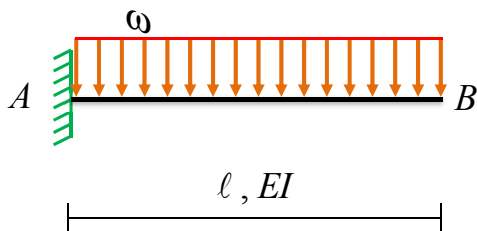
روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۳- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



پاسخ تمرین ۱۳-

$$y_B = \frac{w \ell^4}{8EI}$$

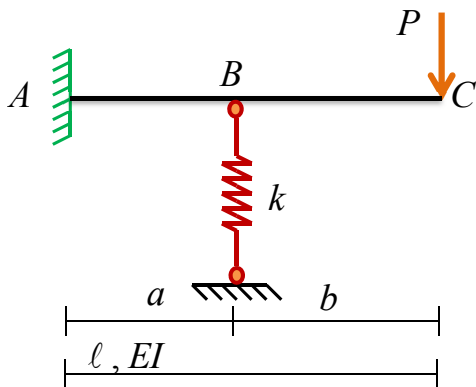
$$\theta_B = \frac{w \ell^3}{6EI}$$

14

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۴- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$



پاسخ تمرین ۱۴-

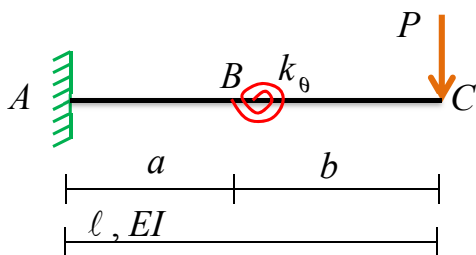
$$y_B = \frac{2pa^3 + 3pba^2}{2ka^3 - 6EI}$$

15

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۵- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



پاسخ تمرین ۱۵-

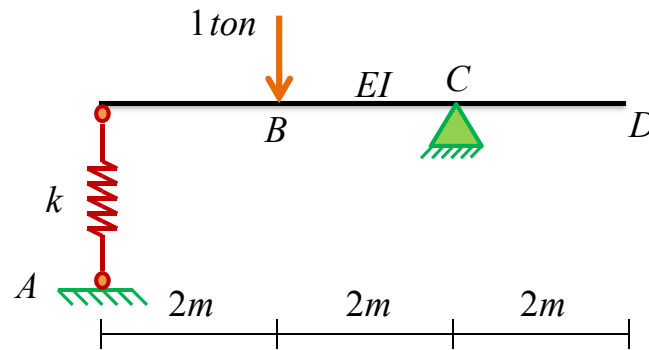
$$\theta_B = \frac{Pa^2 + 2Pba}{2EI - 2k_\theta a}$$

16

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۶- در تیر نشان داده شده مقدار تغییر مکان و شیب در محل نقطه اثر نیروی متمرکز را محاسبه نمایید.



$$EI = 100 \text{ ton.m}^2$$

$$k = 1 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

پاسخ تمرین ۱۶-

$$y_B = 0.2633 \text{ m}$$

$$\theta_B = 0.125^{\text{rad}}$$

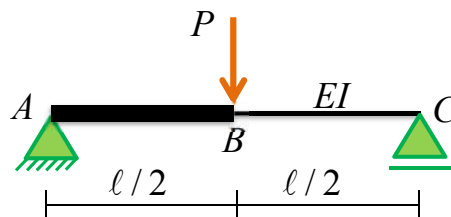
ETABS File Name: 04-Homework-16.EDB

17

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۷- در تیر نشان داده شده مقدار تغییر مکان B و شیب در A را محاسبه نمایید. تیر AB صلب است.



پاسخ تمرین ۱۷-

$$y_B = \frac{P \ell^3}{96EI}$$

$$\theta_A = \frac{P \ell^2}{48EI}$$

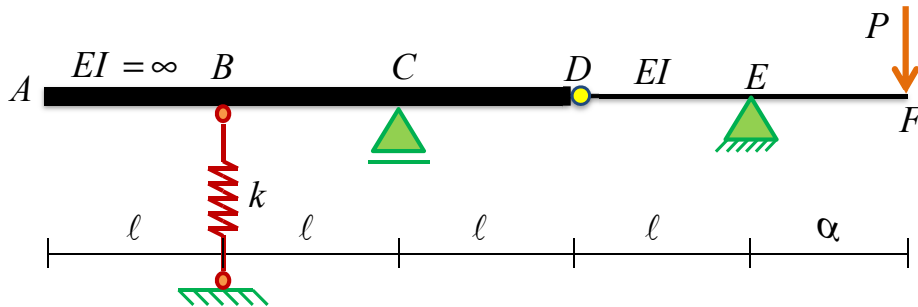
18

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۸- مقدار α را به گونه‌ای تعیین نمایید که خیز در نقاط A و F با هم برابر باشند. تیر AD صلب است.

$$k = \frac{3EI}{\ell^3}$$



پاسخ تمرین ۱۸-

$$\alpha = (\sqrt{3} - 1)\ell$$

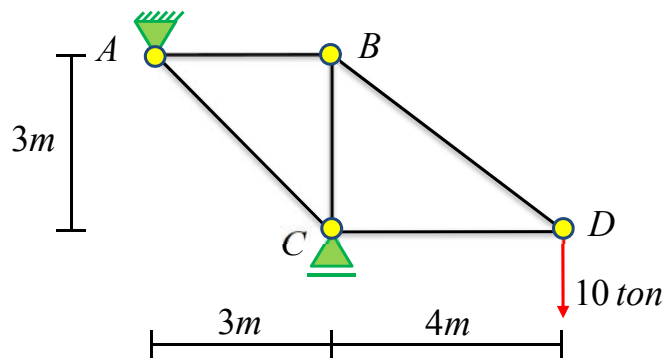
19

روش انرژی در محاسبه تغییرشکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۱۹- در خرپای نشان داده شده جابجایی افقی گره D را محاسبه نمایید.

$$EA = 6 \times 10^4 \text{ (ton)}$$



پاسخ تمرین ۱۹-

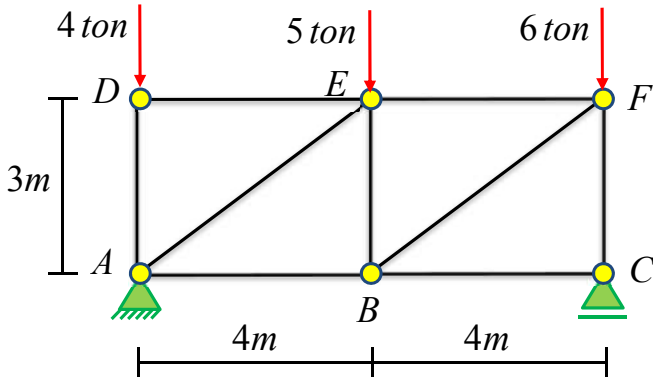
$$\Delta_D = 0.2775 \text{ (cm)}$$

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۲۰- در خرابای نشان داده شده جابجایی نسبی گره E نسبت به C را محاسبه نمایید.

$$EA = 6 \times 10^4 \text{ (ton)}$$



راهنمایی: دو نیروی داخلی برابر، همراستا و مختلف
الجهت F را در راستای قطر EC وارد کنید.

پاسخ تمرین ۲۰-

$$\Delta_{EC} = 0.0855 \text{ (cm)} \quad \swarrow \searrow$$

به هم نزدیک می‌شوند.

روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

قضیه کاستیلیانو (Castigliano Theorem)

تمرین ۲۱- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

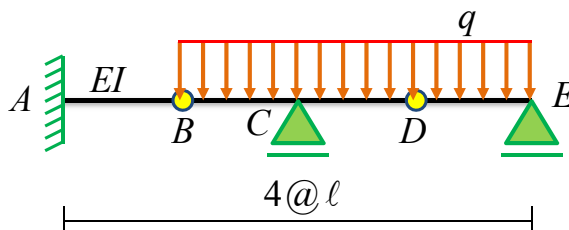
الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

ب- مقدار شیب در گره E. $\theta_E = ?$

$$q = 2 \text{ ton / m}$$

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

$$\ell = 3 \text{ m}$$



پاسخ تمرین ۲۱-

$$y_B = 13.5 \text{ (cm)}$$

$$\theta_E = 0.21375^{\text{rad}}$$