دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

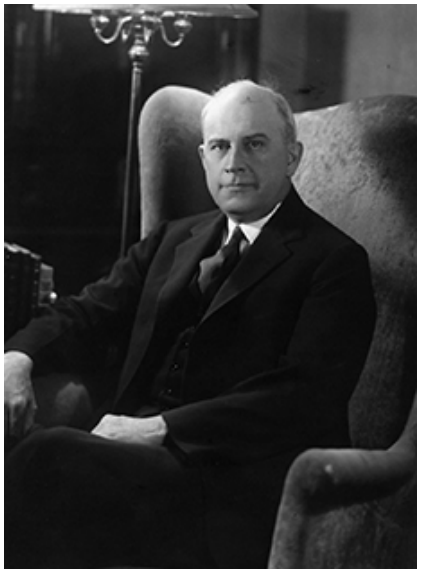
روش پخش لنگر

(Moment Distribution Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

روش پخش لنگر توسط پروفسور Hardy Cross در سال 1930 ارائه شد. روش پخش لنگر (هاری کراس) یک روش تکرار شونده برای تحلیل قاب‌ها و تیرهای پیوسته نامعین استاتیکی است. قبل از توسعه روش‌های ماتریسی و نرم‌افزارهای تحلیلی، این روش یکی از کاربردی‌ترین تکنیک‌ها در مهندسی عمران بود. روش پخش لنگر در واقع یک فرم عددی و تکرار شونده از روابط شیب-افت است که بدون حل دستگاه معادلات همزمان انجام می‌شود.



Hardy Cross (1885–1959)
استاد دانشگاه Illinois

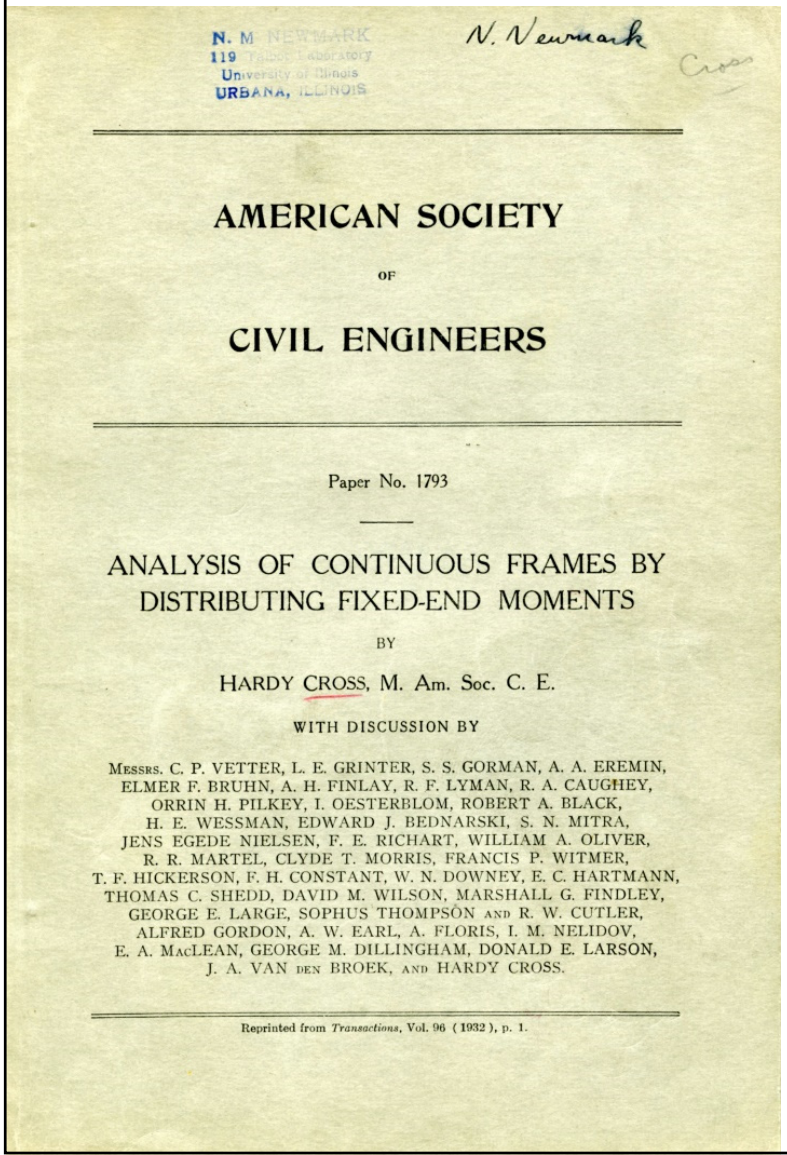
Hardy Cross در 10 فوریه 1885 در ایالت ویرجینیا متولد شد. او در خانواده‌ای فرهنگی و اهل سیاست رشد کرد. ابتدا تحصیلات خود را در رشته علوم انسانی گذراند و در 17 سالگی به عنوان شاگرد اول فارغ‌التحصیل شد. نکته مهم در شکل‌گیری شخصیت او این است که پیشینه‌اش صرفا فنی نبود؛ او آموزش کلاسیک دیده بود و بعدها در سخنرانی‌هایش از فلسفه و متون کلاسیک استفاده می‌کرد. این ترکیب نگاه انسانی و فنی، بعدها در رویکرد تحلیلی او به مهندسی تأثیر عمیقی گذاشت. پس از مدتی تدریس ریاضیات و زبان، وارد مؤسسه فناوری ماساچوست (MIT) و در 1908 مدرک مهندسی عمران گرفت، سپس کارشناسی ارشد خود را از دانشگاه هاروارد دریافت کرد.

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

در سال های 1920 تا 1930 چند تحول مهم رخ داد. گسترش استفاده از بتن‌آرمه، افزایش قاب‌های پیوسته و سازه‌های نامعین و رشد ساختمان‌های مرتفع و پل‌های چند دهانه. در آن زمان تنها روش‌های موجود شامل روش نیرو و روش شیب-افت بود. تحلیل این سازه‌ها نیازمند حل هزاران معادله همزمان بود. تحلیل سازه‌های نامعین به یک چالش عملی تبدیل شده بود. در آن زمان اگر مهندسی می‌خواست یک پل بزرگ یا ساختمان بلند را طراحی کند، باید چندین هزار معادله همزمان را به صورت دستی حل می‌کرد. در عصر پیش از کامپیوتر، این مسئله عملا یک مانع بزرگ مهندسی محسوب می‌شد.

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پروفسور هاردی کراس متوجه شد که روابط شیب-افت را می‌توان به شکل یک فرآیند تکراری عددی نوشت که نیاز به حل مستقیم دستگاه معادلات نداشته باشد. فقط با عملیات جمع و ضرب ساده اجرا شود و از خاصیت تعادل گره‌ها استفاده کند. او این روش را ابتدا برای تحلیل قاب‌های پیوسته در مقاله‌ای در سال 1930 منتشر کرد. این روش تا دهه 1960 متداول‌ترین روش دستی تحلیل قاب‌ها بود و مبنای توسعه روش سختی مستقیم شد.


N. M. NEWMARK
119 Talbot Laboratory
University of Illinois
URBANA, ILLINOIS

N. Newmark

AMERICAN SOCIETY

OF

CIVIL ENGINEERS

Paper No. 1793

ANALYSIS OF CONTINUOUS FRAMES BY DISTRIBUTING FIXED-END MOMENTS

BY

HARDY CROSS, M. Am. Soc. C. E.

WITH DISCUSSION BY

MESSRS. C. P. VETTER, L. E. GRINTER, S. S. GORMAN, A. A. EREMIN, ELMER F. BRUHN, A. H. FINLAY, R. F. LYMAN, R. A. CAUGHEY, ORRIN H. PILKEY, I. OESTERBLOM, ROBERT A. BLACK, H. E. WESSMAN, EDWARD J. BEDNARSKI, S. N. MITRA, JENS EGEDE NIELSEN, F. E. RICHART, WILLIAM A. OLIVER, R. R. MARTEL, CLYDE T. MORRIS, FRANCIS P. WITMER, T. F. HICKERSON, F. H. CONSTANT, W. N. DOWNEY, E. C. HARTMANN, THOMAS C. SHEDD, DAVID M. WILSON, MARSHALL G. FINDLEY, GEORGE E. LARGE, SOPHUS THOMPSON AND R. W. CUTLER, ALFRED GORDON, A. W. EARL, A. FLORIS, I. M. NELIDOV, E. A. MACLEAN, GEORGE M. DILLINGHAM, DONALD E. LARSON, J. A. VAN DEN BROEK, AND HARDY CROSS.

Reprinted from *Transactions*, Vol. 96 (1932), p. 1.

فرضیات اساسی روش پخش لنگر:

- رفتار خطی و الاستیک
- تغییرمکان‌های کوچک
- تحلیل خمشی (معمولاً بدون تغییرشکل محوری)

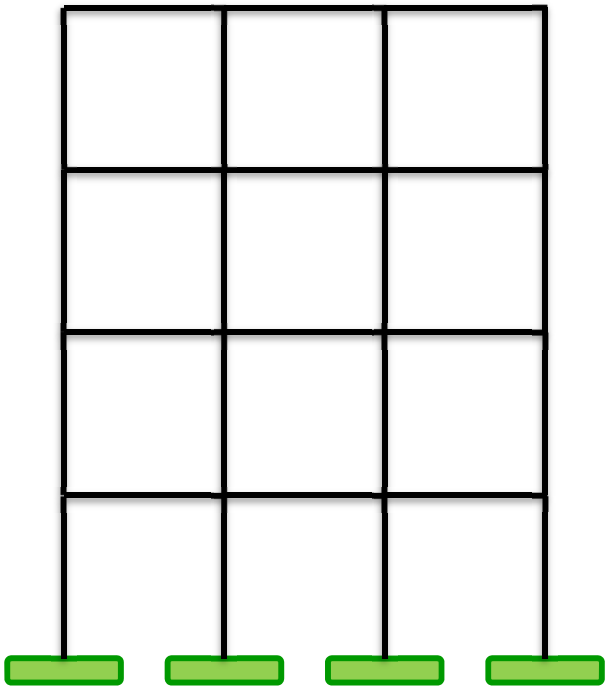
ایده اصلی روش

در هر گره مجموع لنگرهای انتهایی باید برابر صفر باشد. اگر گره‌ای نامتعادل باشد:

1. مقدار عدم تعادل (Unbalanced Moment) محاسبه می‌شود.
2. این لنگر بین اعضای متصل توزیع می‌شود.
3. نیمی از لنگر اصلاحی به انتهای دیگر عضو منتقل می‌شود.

این فرآیند تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد.

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



قاب خمشی سه دهانه چهار طبقه را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم به روش نیرو این قاب را آنالیز نماییم خواهیم داشت:

مجهولات
- داخلی : $3\times 9 = 27$
- خارجی : $3\times 4 = 12$

$\Rightarrow \quad 27+12=\boxed{39}$

معادلات
- معادلات تعادل ایستایی $= 3$
- معادلات مشروط 0

$\Rightarrow \boxed{3}$

$$DOI_{total} = \text{تعداد مجهولات کل} - \text{تعداد معادلات کل} = 39-3=\boxed{36}$$

یعنی باید همزمان دستگاه 36 معادله 36 مجهول حل شود.

اگر بخواهیم همان قاب را به روش شیب-افت آنالیز نماییم خواهیم داشت:

مجهولات
- درجات آزادی دورانی 16
- درجات آزادی انتقای 4

$\Rightarrow \quad 16+4=\boxed{20}$

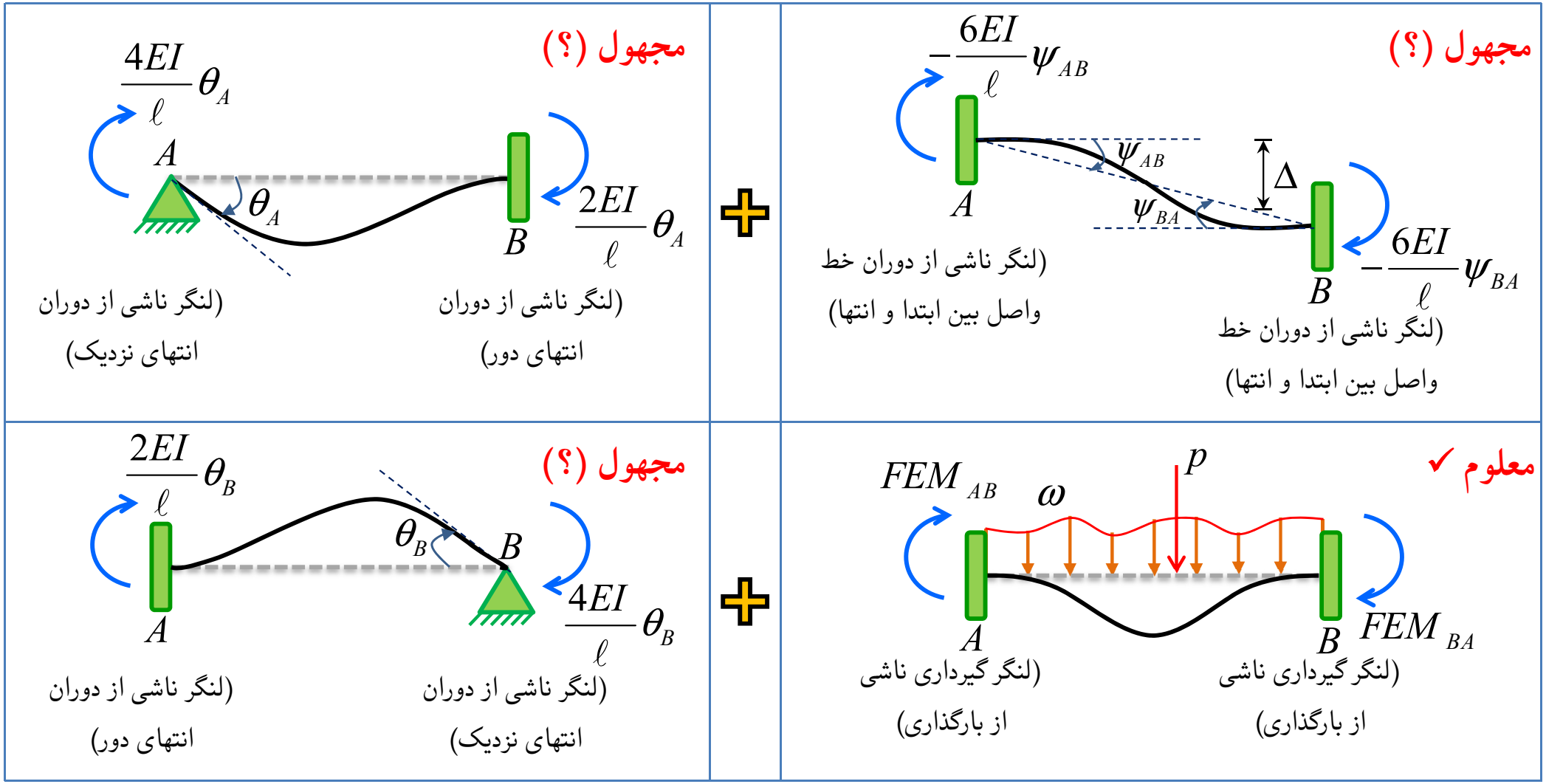
یعنی باید همزمان دستگاه 20 معادله 20 مجهول حل شود.

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

براساس روابط شیب-افت لنگر انتهایی هر عضو ترکیبی از چهار لنگر است:

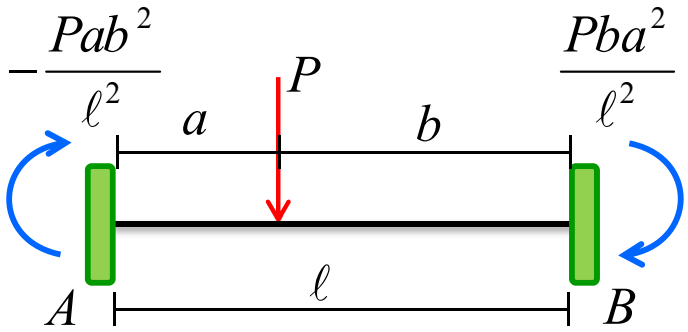
$$M_{AB} = \frac{4EI}{\ell}\theta_A + \frac{2EI}{\ell}\theta_B - \frac{6EI}{\ell}\psi_{AB} + FEM_{AB}$$

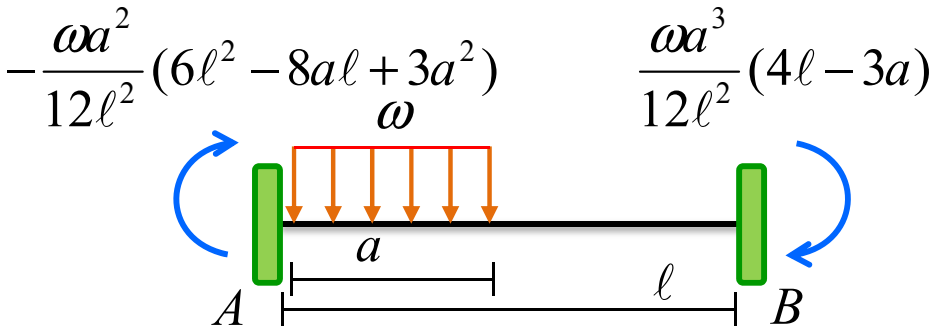
$$M_{BA} = \frac{4EI}{\ell}\theta_B + \frac{2EI}{\ell}\theta_A - \frac{6EI}{\ell}\psi_{BA} + FEM_{BA} \quad (1)$$

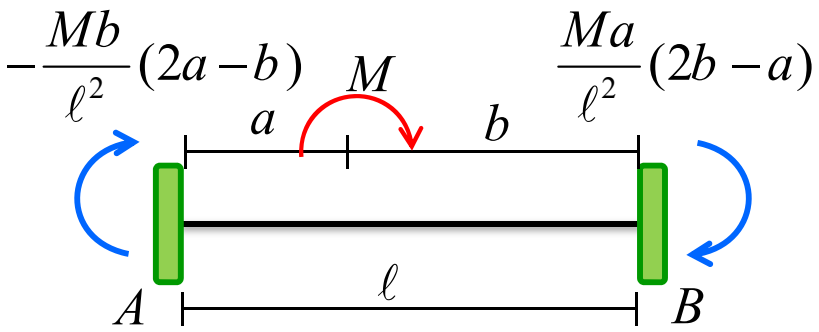


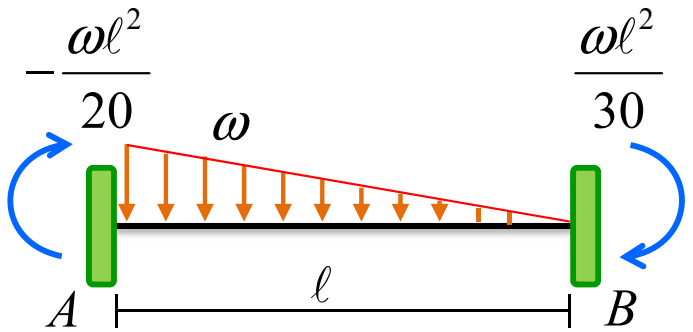
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

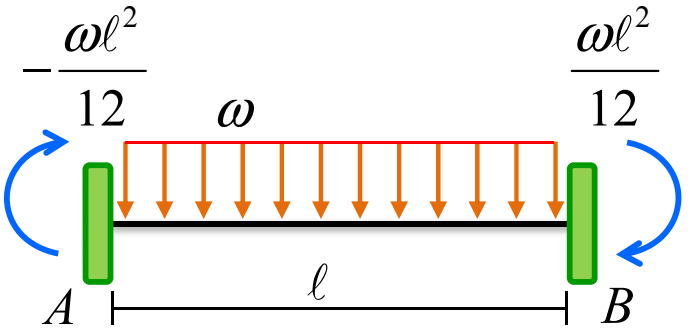
لنگرهای گیرداری تعدادی از بارگذاری‌های پرکاربرد.

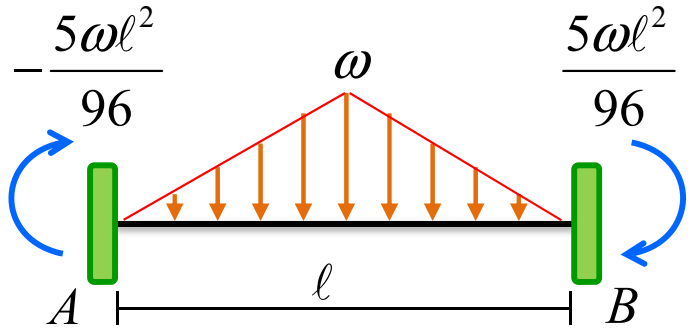








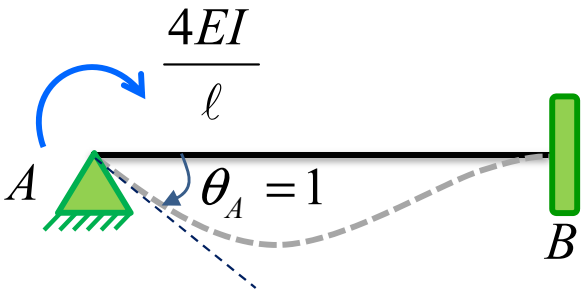




روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تعاریف اولیه

1- سختی دورانی مطلق (Member Stiffness):



مقدار لنگر لازم در شکل مقابل که باید در A اثر داد تا گره A به اندازه واحد دوران نماید.

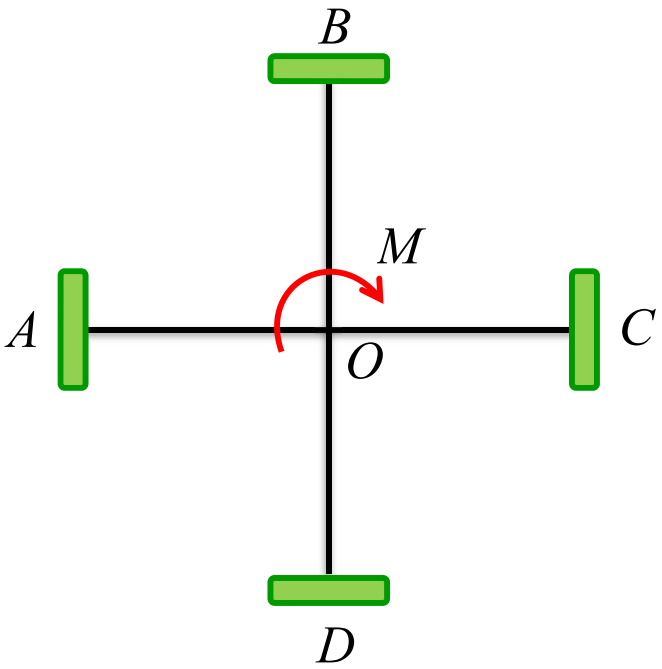
$$k' = \frac{4EI}{\ell} \qquad (2)$$

k' : سختی دورانی مطلق

به نسبت $\frac{EI}{\ell}$ نیز ضریب سختی (k) می‌گویند. بنابراین:

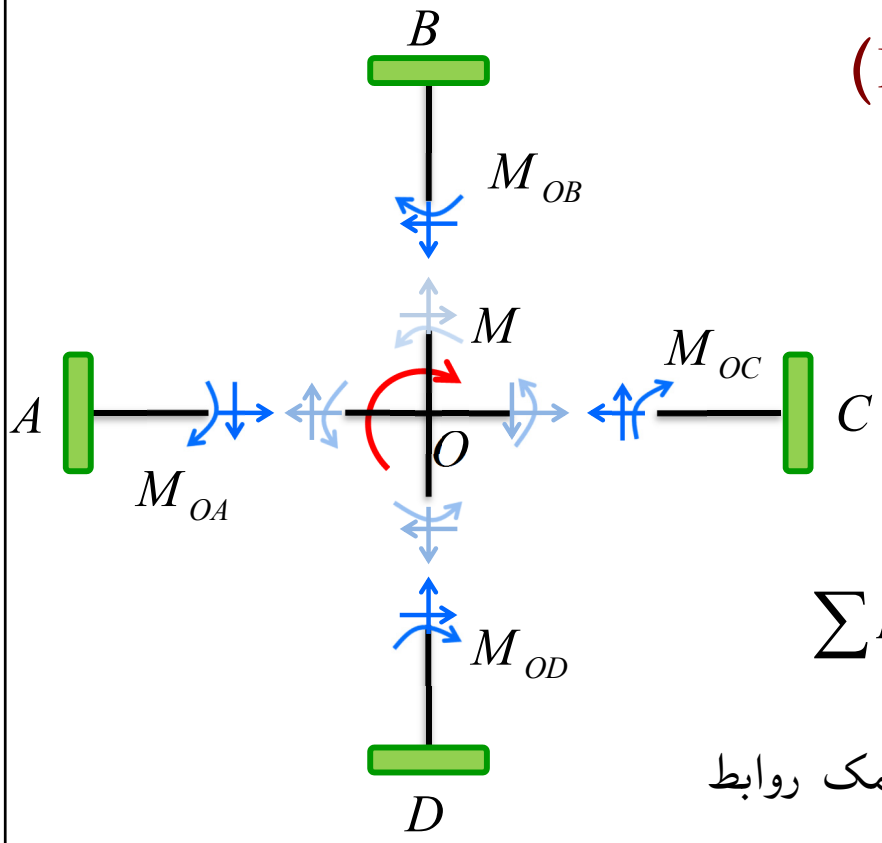
$$k' = 4k \qquad (3)$$

2- ضریب پخش (Distribution Factor):



نسبت سهم لنگر هر عضو در اتصال O از لنگر کل M را ضریب پخش آن عضو می‌نامند. اتصال O در سازه نشان داده شده را در نظر بگیرید.

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



تعاریف اولیه

2- ضریب پخش (Distribution Factor):

با بررسی تعادل در اتصال O خواهیم داشت:

$$\sum M_O = M \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{OA} + M_{OB} + M_{OC} + M_{OD} = M} \quad (4)$$

با محاسبه مقادیر لنگر ابتدای اعضای وارده در اتصال O به کمک روابط شیب-افت نتیجه می‌شود:

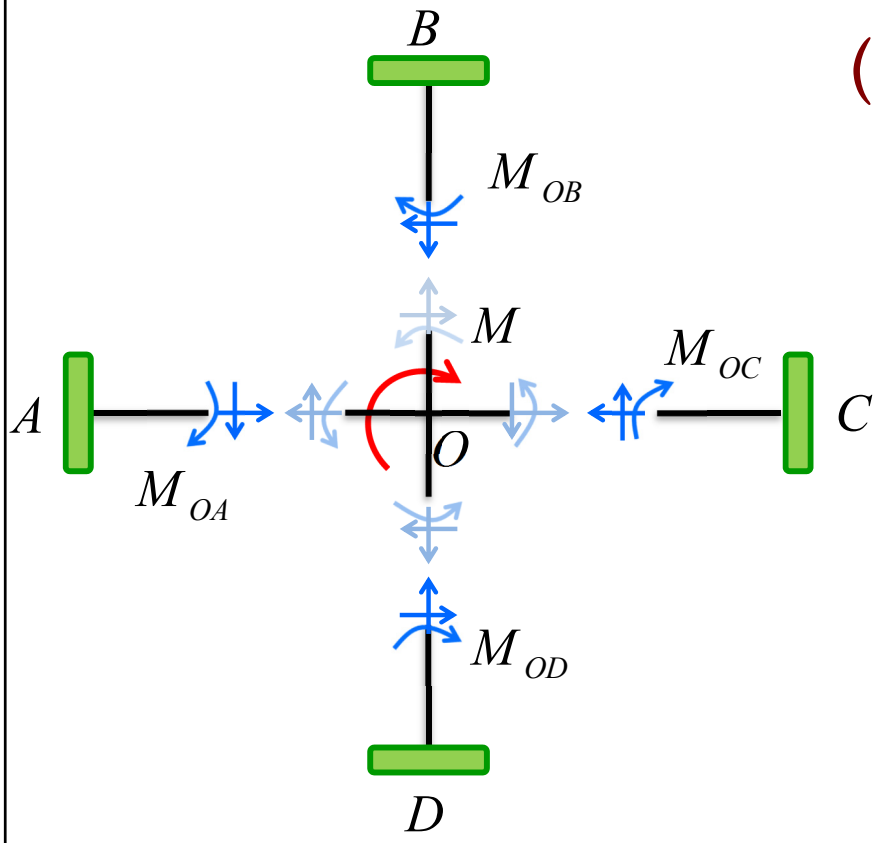
$$M_{OA} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{OA}\left(2\theta_O + \theta_A^{0} - 3\psi_{OA}^{0}\right) + FEM_{OA}^{0} \quad \Rightarrow \quad M_{OA} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{OA}\theta_O \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{M_{OA} = k'_{OA}\theta_O} \quad (5.1)$$

$$M_{OB} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{OB}\left(2\theta_O + \theta_B^{0} - 3\psi_{OB}^{0}\right) + FEM_{OB}^{0} \quad \Rightarrow \quad M_{OB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{OB}\theta_O \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{M_{OB} = k'_{OB}\theta_O} \quad (5.2)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تعاریف اولیه

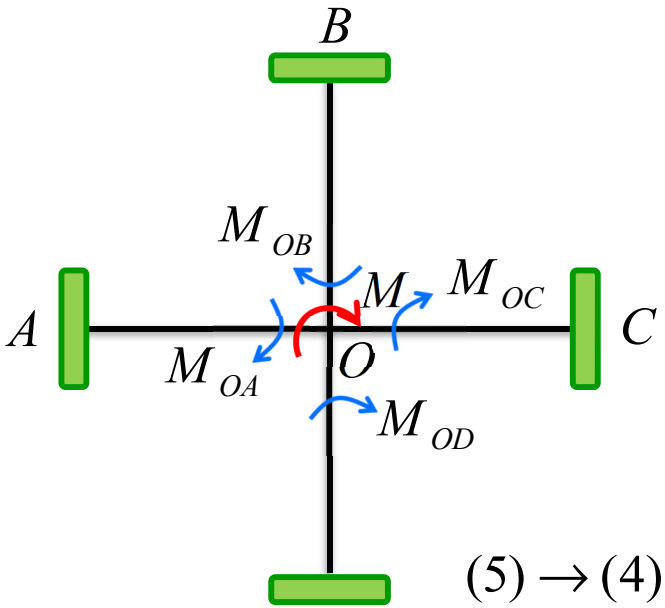
2- ضریب پخش (Distribution Factor):



$$M_{OC}=2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{OC}\left(2\theta_O+\theta_C-3\psi_{OC}\right)+FEM_{OC}\Rightarrow M_{OC}=\left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{OC}\theta_O\overset{(2)}{\Rightarrow}\boxed{M_{OC}=k'_{OC}\theta_O}\quad(5.3)$$

$$M_{OD}=2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{OD}\left(2\theta_O+\theta_D-3\psi_{OD}\right)+FEM_{OD}\Rightarrow M_{OD}=\left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{OD}\theta_O\overset{(2)}{\Rightarrow}\boxed{M_{OD}=k'_{OD}\theta_O}\quad(5.4)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



تعاریف اولیه

2- ضریب پخش (Distribution Factor):

با جایگذاری روابط (5) در رابطه (4) خواهیم داشت:

$$(5) \rightarrow (4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{k'_{OA}\theta_O + k'_{OB}\theta_O + k'_{OC}\theta_O + k'_{OD}\theta_O = M} \quad (6)$$

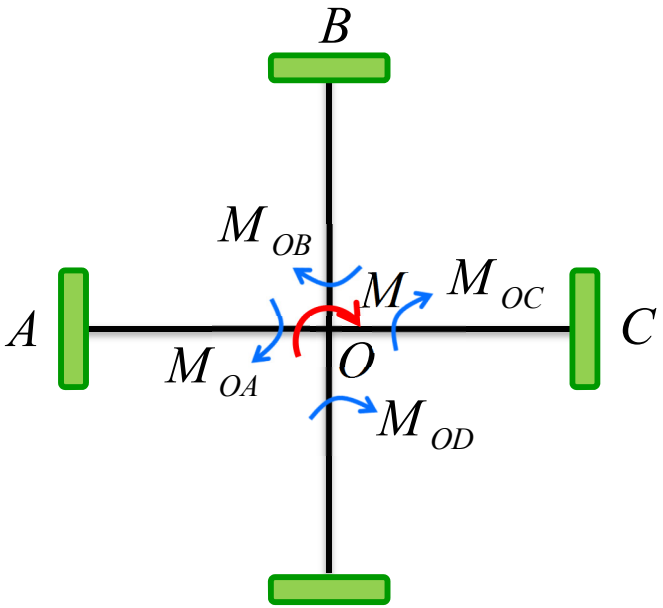
با حل رابطه (6):

$$(6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_O = \frac{M}{k'_{OA} + k'_{OB} + k'_{OC} + k'_{OD}}} \quad (7)$$

مجموع سختی‌های اعضای وارد بر گره O برابر به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\boxed{\sum k'_{Oi} = k'_{OA} + k'_{OB} + k'_{OC} + k'_{OD}} \quad (8)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



تعاریف اولیه

2- ضریب پخش (Distribution Factor):

با جایگذاری روابط (8) در رابطه (7) خواهیم داشت:

$$(8)\rightarrow(7) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_O = \frac{M}{\sum k'_{Oi}}} \qquad (9)$$

با تعیین دوران گره O اکنون می‌توان مقادیر لنگر ابتدای اعضای متصل به گره O را با جایگذاری رابطه (9) در روابط (5) به دست آورد:

$$(9)\rightarrow(5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} M_{OA} &= \frac{k'_{OA}}{\sum k'_{Oi}} M \qquad & M_{OC} &= \frac{k'_{OC}}{\sum k'_{Oi}} M \\ M_{OB} &= \frac{k'_{OB}}{\sum k'_{Oi}} M \qquad & M_{OD} &= \frac{k'_{OD}}{\sum k'_{Oi}} M \end{aligned}} \qquad (10)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

تعاریف اولیه

2- ضریب پخش (Distribution Factor):

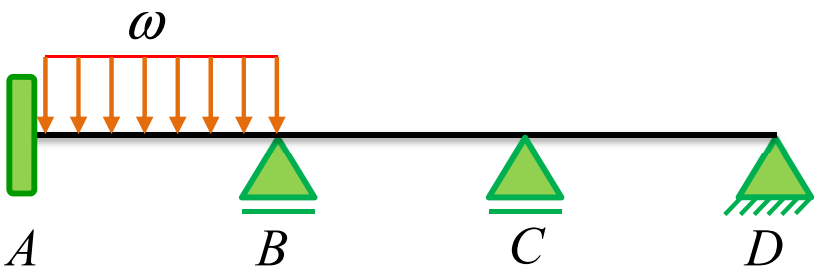
$$M_{Oj} = \frac{k'_{Oj}}{\sum k'_{Oi}} M \quad \Rightarrow \quad \text{(ضریب پخش عضو } j \text{ اُم در گره O)} \quad \boxed{D_{Oj} = \frac{k'_{Oj}}{\sum k'_{Oi}}} \qquad (11)$$

$$\text{ضریب پخش عضو } (D_{Oj}) = \frac{k'_{Oj} \text{ سختی عضو در گره موردنظر}}{\sum k'_{Oi} \text{ جمع سختی تمامی اعضای متصل به آن گره}}$$

همواره مجموع ضرایب پخش تمامی اعضای متصل به یک گره برابر با 1 است:

$$\boxed{\sum D_{Oj} = 1} \qquad (12)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



تعاریف اولیه

2- ضریب پخش (Distribution Factor):

حالت خاص 1: اتصال مفصلی

در تیر نشان داده شده گره D در انتهای سازه به صورت تکیه‌گاه مفصلی است. برای محاسبه ضریب پخش خواهیم داشت

$$D)\quad DC:Hinged \Rightarrow k'_{DC}:k'_{Hinged} \Rightarrow k'_{DC}:0 \overset{(11)}{\Rightarrow} \frac{k'_{DC}}{0+k'_{DC}}:\frac{0}{0+k'_{DC}} \Rightarrow \boxed{1}:0$$

نکته: ضریب پخش عضویی که به تکیه‌گاه مفصلی در انتهای سازه متصل است برابر با یک می‌باشد.

حالت خاص 2: اتصال گیردار

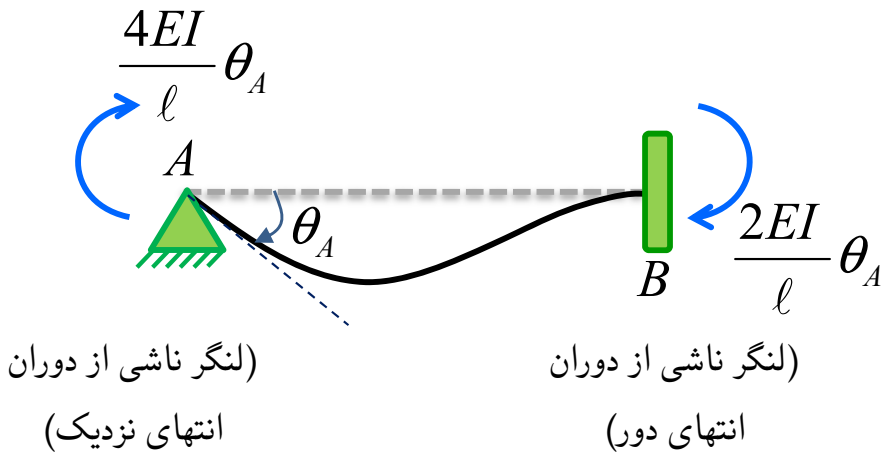
در تیر نشان داده شده گره A در انتهای سازه به صورت تکیه‌گاه گیردار است. برای محاسبه ضریب پخش خواهیم داشت

$$A)\quad Fixed:AB \Rightarrow k'_{Fixed}:k'_{AB} \Rightarrow \infty:k'_{AB} \overset{(11)}{\Rightarrow} \frac{\infty}{\infty+k'_{AB}}:\frac{k'_{AB}}{\infty+k'_{AB}} \Rightarrow 1:\boxed{0}$$

نکته: ضریب پخش عضویی که به تکیه‌گاه گیردار در انتهای سازه متصل است برابر با صفر می‌باشد.

تعاریف اولیه

3- ضریب انتقال (Carry Over Factor):



نسبت لنگر ناشی از دوران انتهای دور به لنگر ناشی از دوران انتهای نزدیک را ضریب انتقال می‌نامند.

$$COF_{AB} = \frac{\frac{2EI}{\ell}\theta_A}{\frac{4EI}{\ell}\theta_A} = \frac{1}{2} \qquad (13)$$

COF: ضریب انتقال

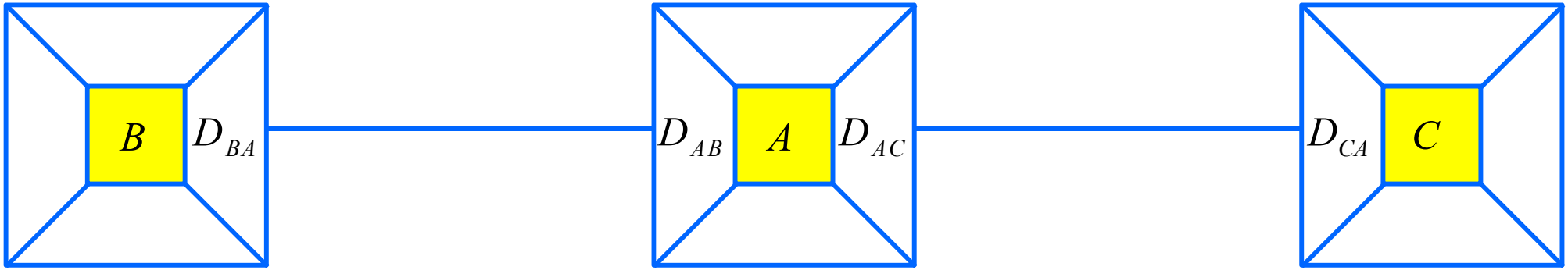
این بدان معنی است که اگر لنگر در گره A به دست آمد، بدون نیاز به محاسبه، مقدار لنگر در گره B نصف مقدار لنگر در گره A خواهد بود.

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مراحل گام به گام:

گام اول: محاسبه سختی دورانی مطالق (یا ضریب سختی) هر عضو و همچنین محاسبه ضرایب پخش برای هر عضو. مقادیر ضریب پخش برای هر عضو، بر روی شمای محاسباتی در کنار گره عضو مورد نظر نوشته می‌شود.

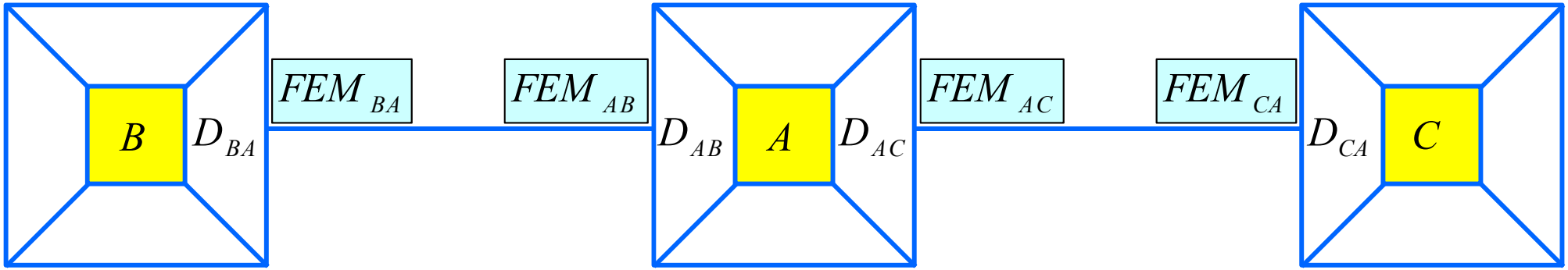


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مراحل گام به گام:

گام دوم: محاسبه لنگرهای گیرداری ناشی از بارگذاری و نوشتن مقادیر آن‌ها در کنار هر عضو در محل گره مربوط به آن بر روی شمای محاسباتی.

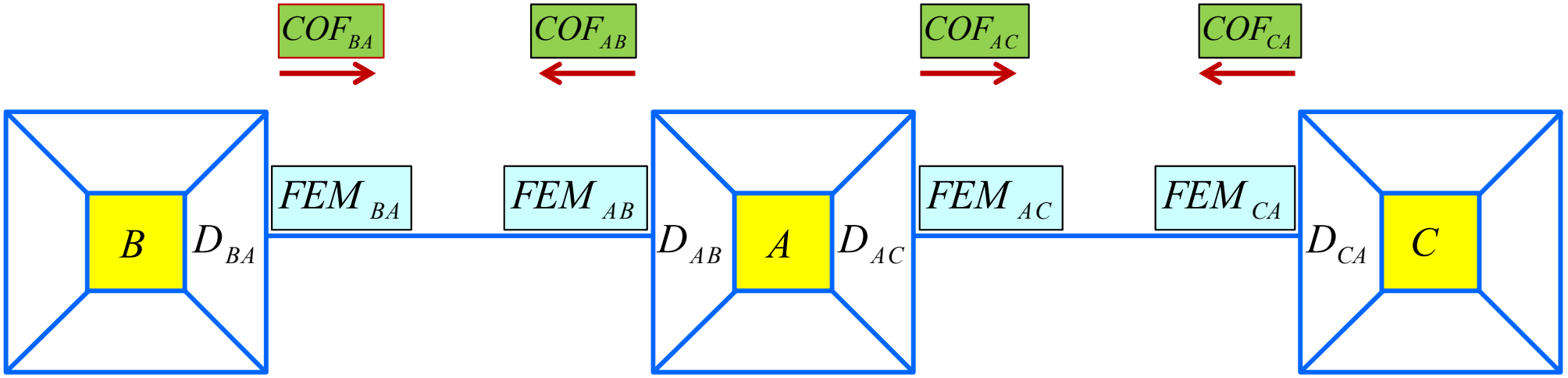


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مراحل گام به گام:

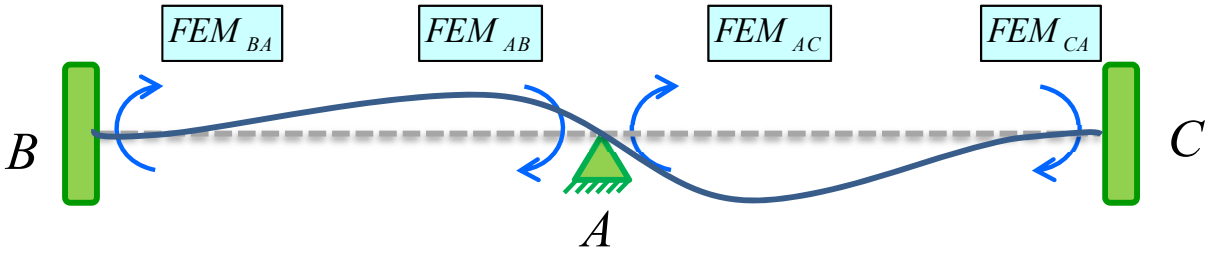
گام سوم: مشخص کردن ضرایب انتقال برای هر عضو. (نکته: در قاب‌هایی که اعضای آن منشوری بوده یعنی مقطع آن در طول عضو تغییر نمی‌کند ضریب انتقال $\frac{1}{2}$ بوده و در نتیجه نیازی به نوشتن ضرایب انتقال در شمای محاسباتی نیست)



سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مراحل گام به گام:

گام چهارم: شروع پخش لنگر.



- ابتدا از یک گره دلخواه (به طور مثال گره A) شروع می‌نماییم. در این حالت فرض بر این است که همه گره‌ها به استثنای گره مورد نظر گیردار می‌باشند.
- به عبارت دیگر دوران کلیه گره‌ها به استثنای گره مورد نظر صفر است.
- سپس لنگرهای گیرداری اعضای متصل به آن گره را با هم جمع می‌کنیم. در حالت کلی صفر نخواهد شد پس بنابراین لنگر $M_{Unbalanced}$ نامتعادل در گره به وجود خواهد آمد.

$$\sum M_A = FEM_{AB} + FEM_{AC} \neq 0 = M_{Unbalanced}$$

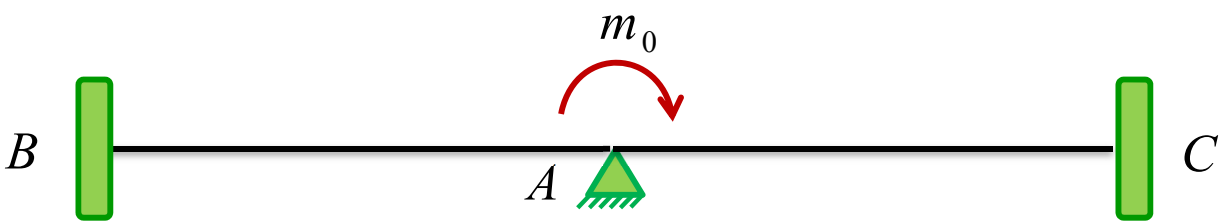
- به منظور تعادل آن گره باید در محل آن گره، لنگرمتعادل کننده‌ای در خلاف جهت لنگر نامتعادل اعمال می‌کنیم.

$$M_{Balanced} = (FEM_{AB} + FEM_{AC}) \times (-1)$$

سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مراحل گام به گام:

ادامه گام چهارم: شروع پخش لنگر.



- در صورتی که در آن گره لنگر خارجی متمرکز نیز موجود باشد در این حالت پس از محاسبه جمع لنگرهای گیرداری و تغییر دادن علامت مقدار لنگر به دست آمده، لنگر خارجی متمکز را نیز در صورتی که علامت آن ساعتگرد باشد به آن اضافه می‌کنیم. در این حالت لنگر متعادل کننده‌ای که باید به گره وارد کنیم تا تعادل برقرار شود به صورت زیر به دست می‌آید:

اگر جهت لنگر متمرکز خارجی ساعتگرد باشد

$$M_{Balanced} = (FEM_{AB} + FEM_{AC}) \times (-1) + m_0$$

اگر جهت لنگر متمرکز خارجی پاد ساعتگرد باشد

$$M_{Balanced} = (FEM_{AB} + FEM_{AC}) \times (-1) - m_0$$

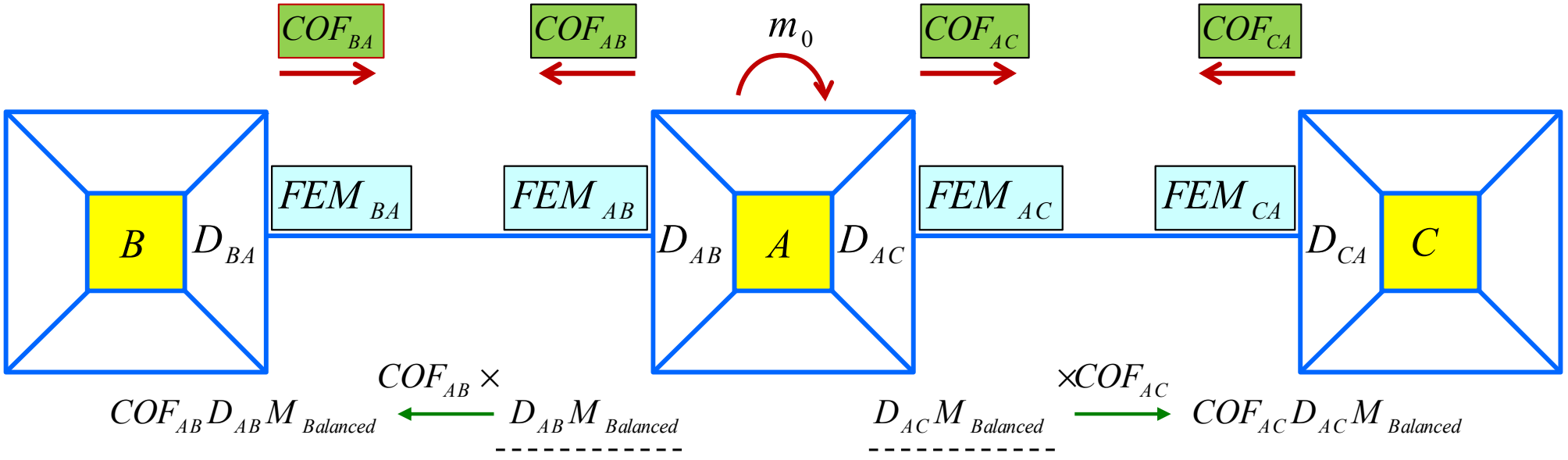
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مراحل گام به گام:

ادامه گام چهارم: شروع پخش لنگر.

- لنگر متعادل کننده را بین اعضای متصل به آن گره براساس ضرایب پخش اعضا توزیع می‌کنیم. مقدار لنگر توزیع شده را بر روی شمای محاسباتی در کنار عضو مربوطه یادداشت می‌کنیم. گره مورد نظر به تعادل می‌رسد.



- لنگر پخش شده در ابتدای نزدیک هر عضو با توجه به ضریب انتقال اعضا به انتهای دور نیز منتقل می‌شود.

سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

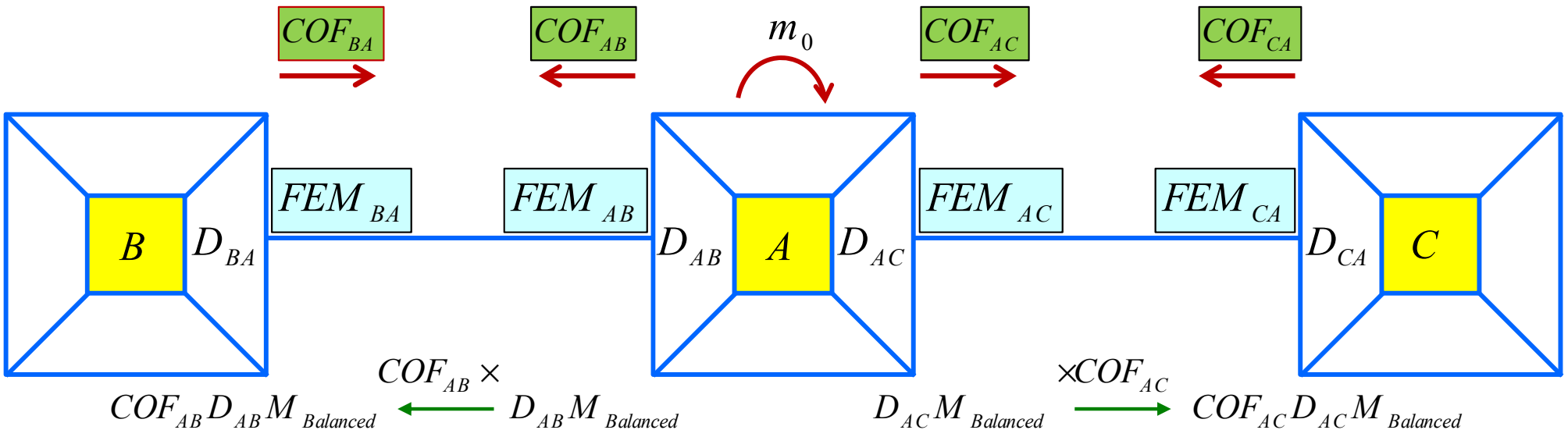
مراحل گام به گام:

گام پنجم: بررسی تعادل در گره‌های دیگر. برای این منظور به گره دیگری می رویم. در محل این گره تمامی لنگرهای نامتعادل را محاسبه می کنیم. در دور اول پخش، لنگرهای نامتعادل می‌توانند شامل لنگرهای زیر باشد:

1- لنگرهای گیرداری اعضا.

2- لنگرهای انتقال یافته از دیگر اعضا.

3- لنگرهای خارجی متمرکز وارد بر آن گره.



سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مراحل گام به گام:

ادامه گام پنجم : اما در دوم به بعد، لنگر نامتعادل فقط می‌تواند شامل لنگرهای انتقال یافته از دیگر اعضا باشد.

پس از محاسبه لنگر نامتعادل علامت آن را تغییر داده و بین اعضا پخش می‌کنیم. در ادامه، لنگرهای انتقالی به انتهای دور اعضا را نیز محاسبه کرده و در کنار گره مربوطه یادداشت می‌کنیم.

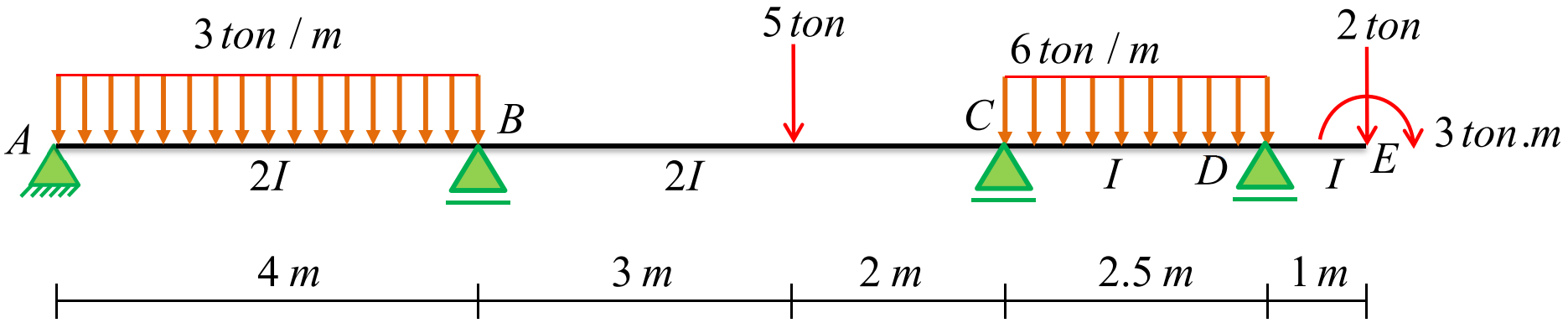
گام ششم: انجام گام پنجم برای سایر گره‌ها و تکرار این عمل تا در نهایت لنگر نامتعادل در گره‌ها نزدیک صفر گردد.

گام هفتم: محاسبه لنگرهای انتهایی هر عضو. لنگر هر عضو در هر گره از جمع **لنگر گیرداری**، **لنگرهای پخش شده در هر دور**، **لنگرهای انتقالی از انتهای دیگر عضو** حاصل می‌گردد.

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

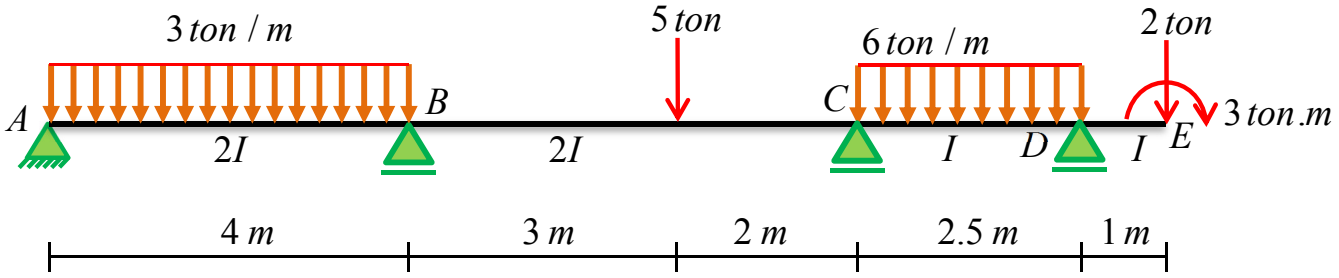
مثال 1- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$

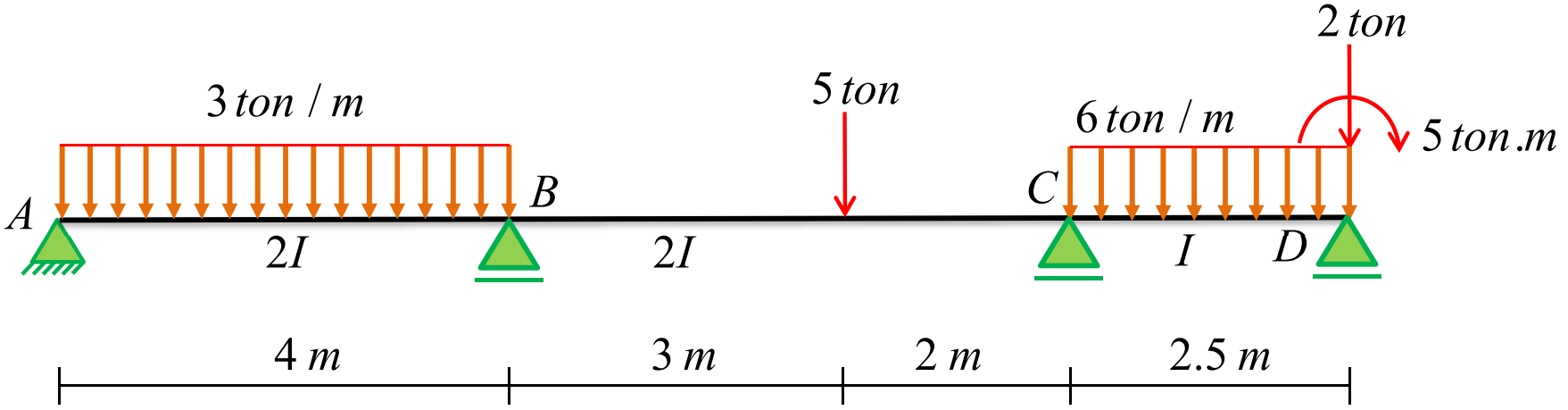


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-

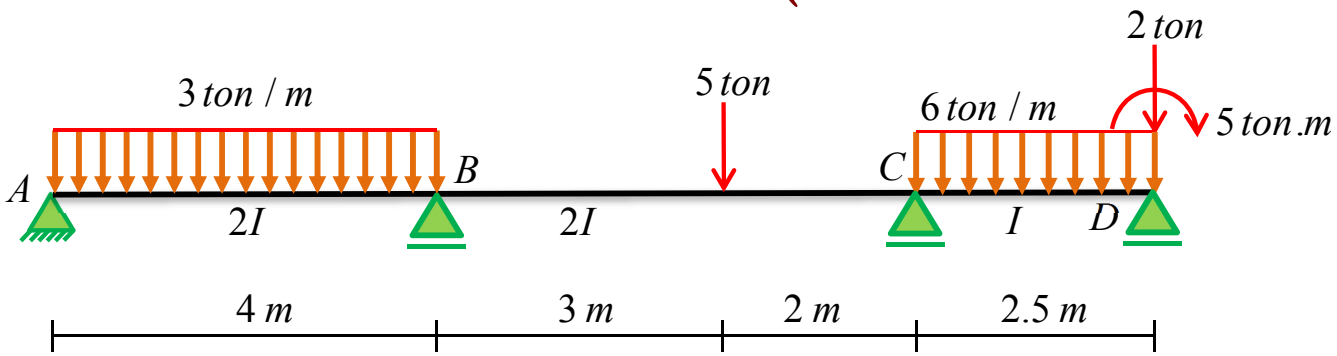


نکته: از آن‌جایی که کنسول یک سازه معین است از این رو لنگر و نیروی معادل کنسول را به گره D منتقل نموده و کنسول وارد حل معادلات شیب-افت نمی‌شود.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

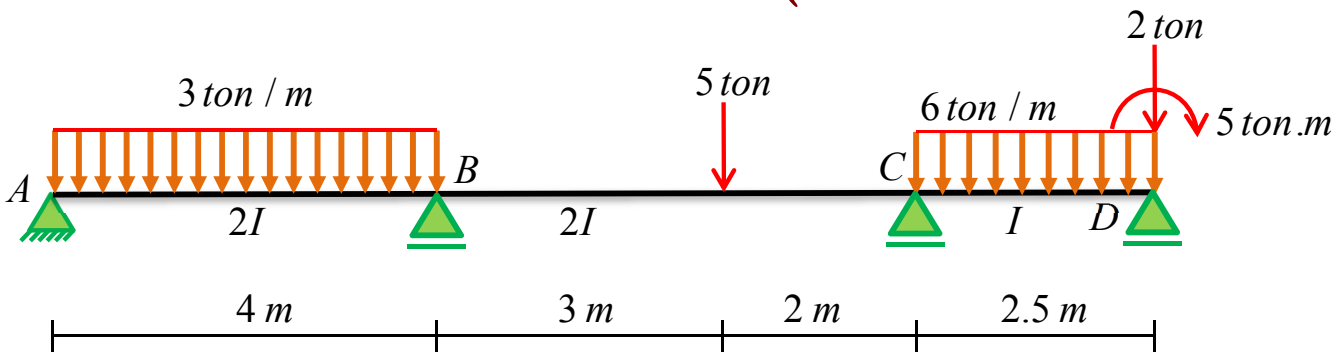
پاسخ مثال 1-



محاسبه ضرایب پخش اعضا:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-



محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -4\,ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -2.4\,ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{CB} = 3.6\,ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -3.125\,ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1- شروع پخش لنگر:

A		B		C		D
0.03971	←	0.07943				
0.96029	→	0.48015	0.06354 →	0.03177	0.03747 →	0.01873
–0.13338	←	–0.26675	–0.21340 →	–0.10670	0.10275 ←	0.20549
0.13338	→	0.06669	0.01873 ←	0.03747	–0.05138 →	–0.02569
–0.01659	←	–0.03318	–0.02569 ←	–0.05138	0.01285 ←	0.02569
0.01659	→	0.0083	–0.02655 →	–0.01327		
0		4.33 *ton.m*	–4.33 *ton.m*	2.41 *ton.m*	–2.41 *ton.m*	5 *ton.m*

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1- شروع پخش لنگر:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1- شروع پخش لنگر:

گره B دور دوم : $(0.08125-0.22422)\times(-1)=0.14297\times$

$\frac{5}{9}=0.07943\times\rightarrow 0.5=0.03971$

$\frac{4}{9}=0.06354\times\rightarrow 0.5=0.03177$

گره A دور دوم : $(-1+0.03971)\times(-1)=0.96029\times\rightarrow 1=0.96029\times\rightarrow 0.5=0.48015$

گره B دور سوم : $(0.48015)\times(-1)=-0.48015\times$

$\frac{5}{9}=-0.26675\times\rightarrow 0.5=-0.13338$

$\frac{4}{9}=-0.21340\times\rightarrow 0.5=-0.10670$

گره C دور سوم : $(0.03177-0.10670)\times(-1)=0.07493\times$

$\frac{1}{2}=0.03747\times\rightarrow 0.5=0.01873$

$\frac{1}{2}=0.03747\times\rightarrow 0.5=0.01873$

گره D دور دوم : $(-0.22422+0.01873)\times(-1)=0.20549\times\rightarrow 1=0.20549\times\rightarrow 0.5=0.10275$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1- شروع پخش لنگر:

گره C دور چهارم : $(0.10275)\times(-1) = -0.10275 \times$

$\frac{1}{2} = \boxed{-0.05138} \times \longrightarrow 0.5 = \boxed{-0.02569}$

$\frac{1}{2} = \boxed{-0.05138} \times \longrightarrow 0.5 = \boxed{-0.02569}$

گره A دور سوم : $(-0.13338)\times(-1) = 0.13338 \times \longrightarrow 1 = \boxed{0.13338} \times \longrightarrow 0.5 = \boxed{0.06669}$

گره B دور سوم :

$(0.06669 + 0.01873 - 0.02569)\times(-1) = -0.05973 \times$

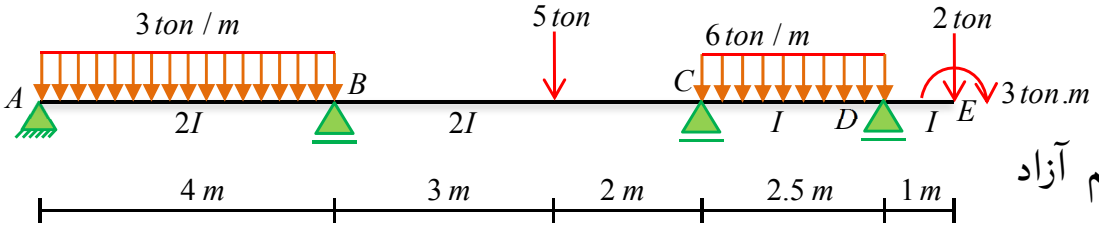
$\frac{5}{9} = \boxed{-0.03318} \times \longrightarrow 0.5 = \boxed{-0.01659}$

$\frac{4}{9} = \boxed{-0.02655} \times \longrightarrow 0.5 = \boxed{-0.01327}$

گره D دور سوم : $(-0.02569)\times(-1) = 0.02569 \times \longrightarrow 1 = \boxed{0.02569} \times \longrightarrow 0.5 = \boxed{0.01285}$

گره A دور چهارم : $(-0.01659)\times(-1) = 0.01659 \times \longrightarrow 1 = \boxed{0.01659} \times \longrightarrow 0.5 = \boxed{0.0083}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



پاسخ مثال 1- برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

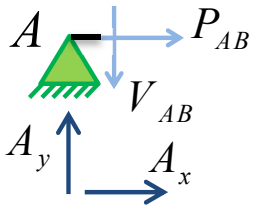


Fig 2

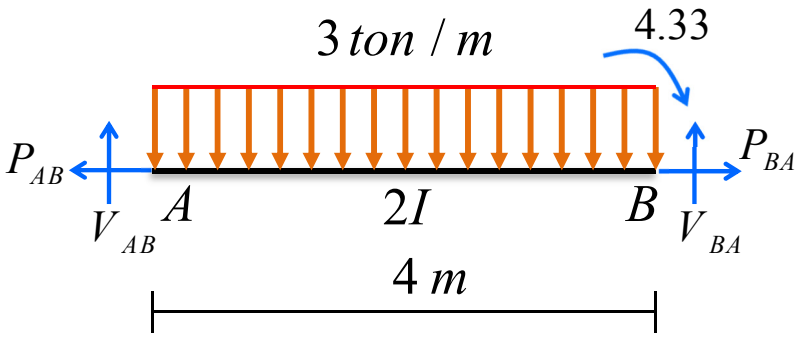


Fig 3

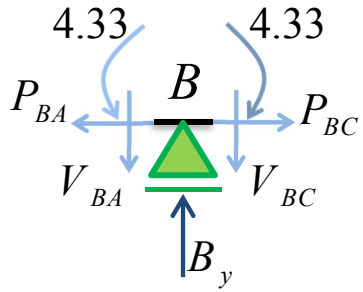


Fig 4

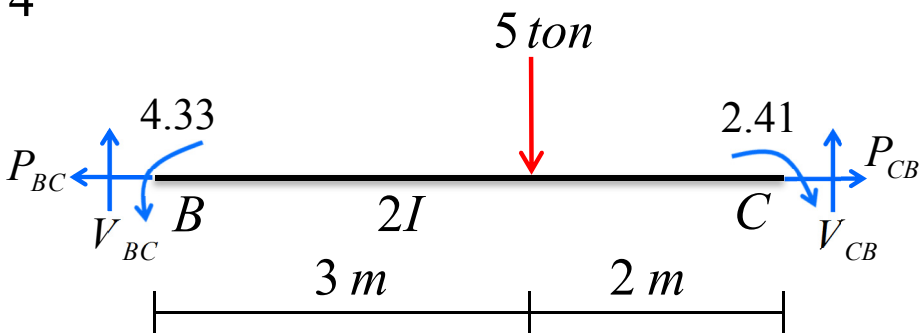


Fig 5

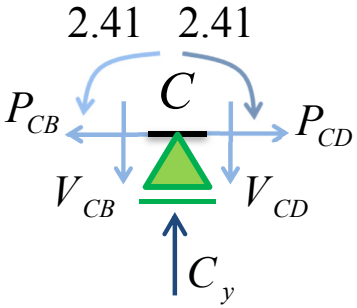


Fig 6

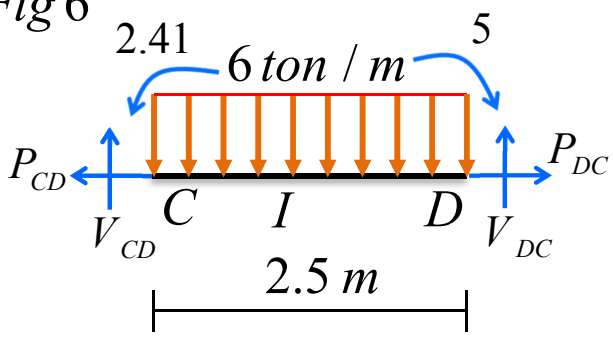


Fig 7

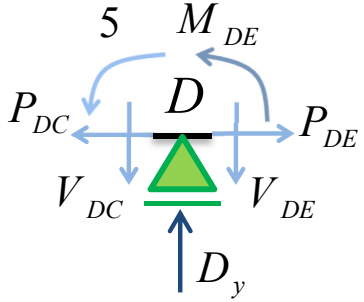
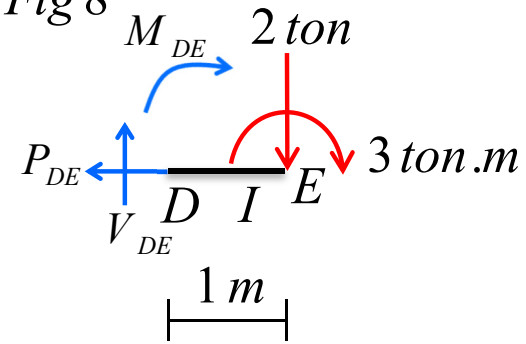


Fig 8

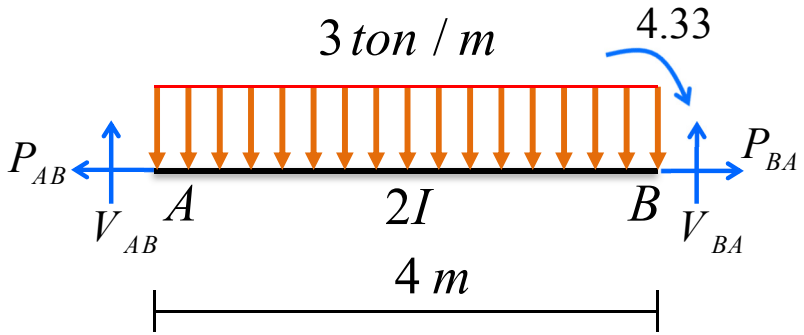


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-

با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

Fig 2

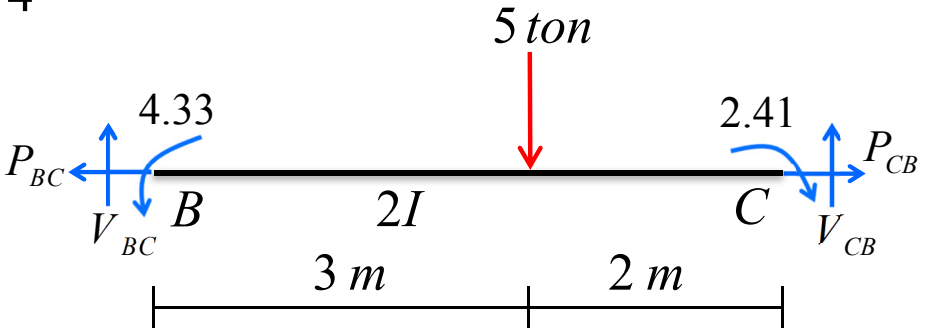


$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -(3\times 4)\times(\frac{4}{2}) - 4.33 + V_{BA}\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = 7.083\, ton} \quad (1.9)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{AB} - (3\times 4) + V_{BA} = 0 \quad \overset{(1.9)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{AB} = 4.918\, ton} \quad (1.10)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

Fig 4



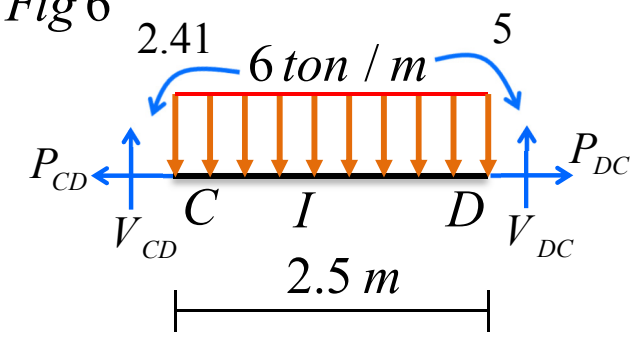
$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -5\times 3 - 2.41 + 4.33 + V_{CB}\times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = 2.616\, ton} \quad (1.11)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} - 5 + V_{CB} = 0 \quad \overset{(1.11)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = 2.384\, ton} \quad (1.12)$$

پاسخ مثال 1-

با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:

Fig 6

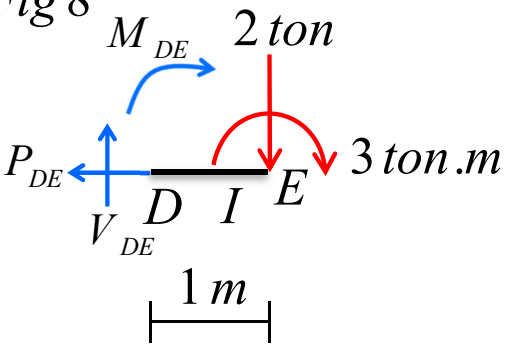


$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -(6\times 2.5)\times(\frac{2.5}{2}) - 5 + 2.41 + V_{DC}\times 2.5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{DC} = 8.536\, ton} \quad (1.13)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD} - (6\times 2.5) + V_{DC} = 0 \overset{(1.13)}{\Rightarrow} \boxed{V_{CD} = 6.464\, ton} \quad (1.14)$$

با بررسی شکل (8) نتیجه می‌شود:

Fig 8



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{DE} - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{DE} = 2\, ton} \quad (1.15)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{DE} = 0} \quad (1.16)$$

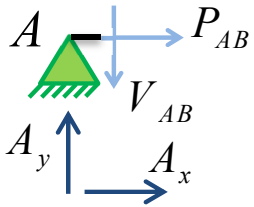
$$(1.16) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{DC} &= P_{CD} = 0 \\ P_{BC} &= P_{CB} = 0 \\ P_{AB} &= P_{BA} = 0 \end{aligned}} \quad (1.17)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1

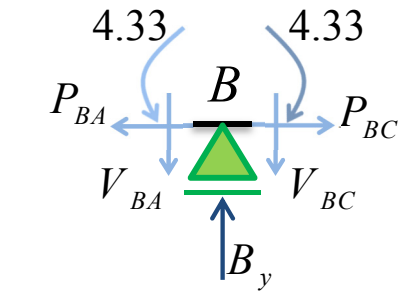


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(1.17)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(1.10)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 4.918\,ton}$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

Fig 3



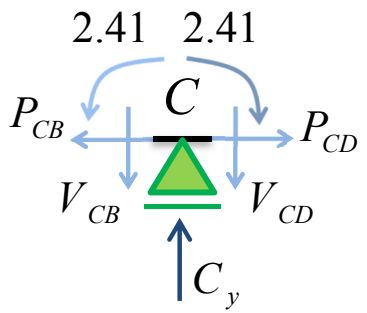
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(1.9)\ \&\ (1.12)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 9.467\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

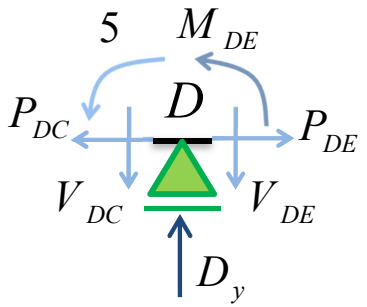
Fig 5



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} + V_{CD} \overset{(1.11)\,\&\,(1.14)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 9.08\,ton}$$

با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:

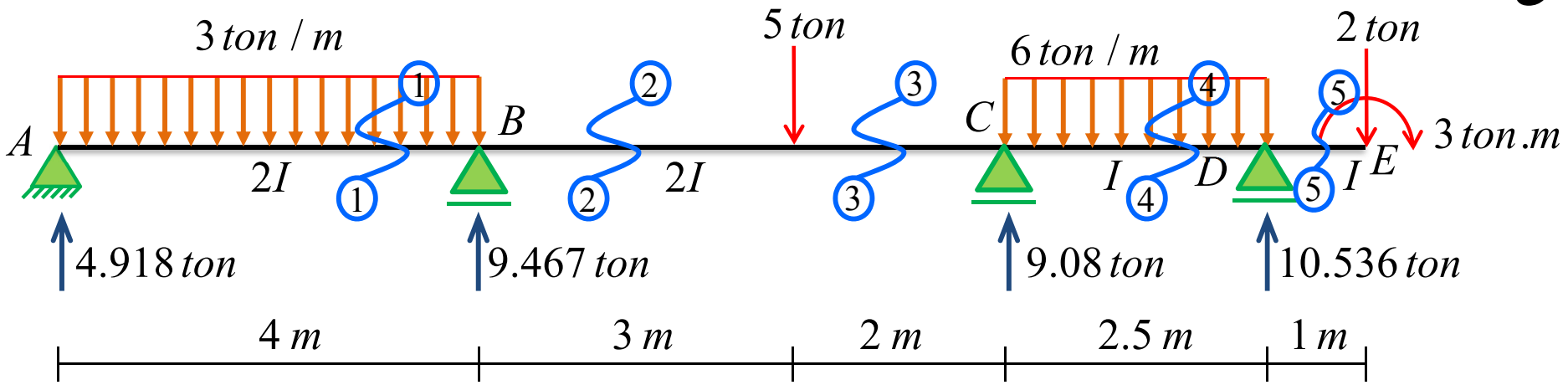
Fig 7

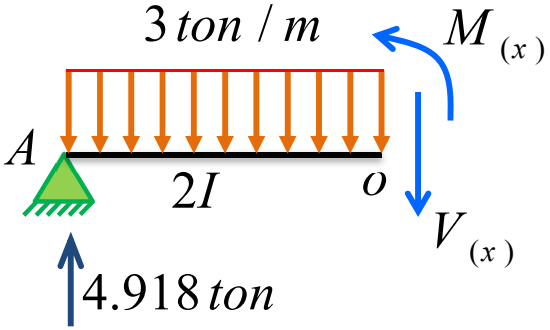


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y = V_{DC} + V_{DE} \overset{(1.13)\,\&\,(1.15)}{\Rightarrow} \boxed{D_y = 10.536\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + (3\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 4.918\times x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 4.918x}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - (3\times x) + 4.918 = 0$$

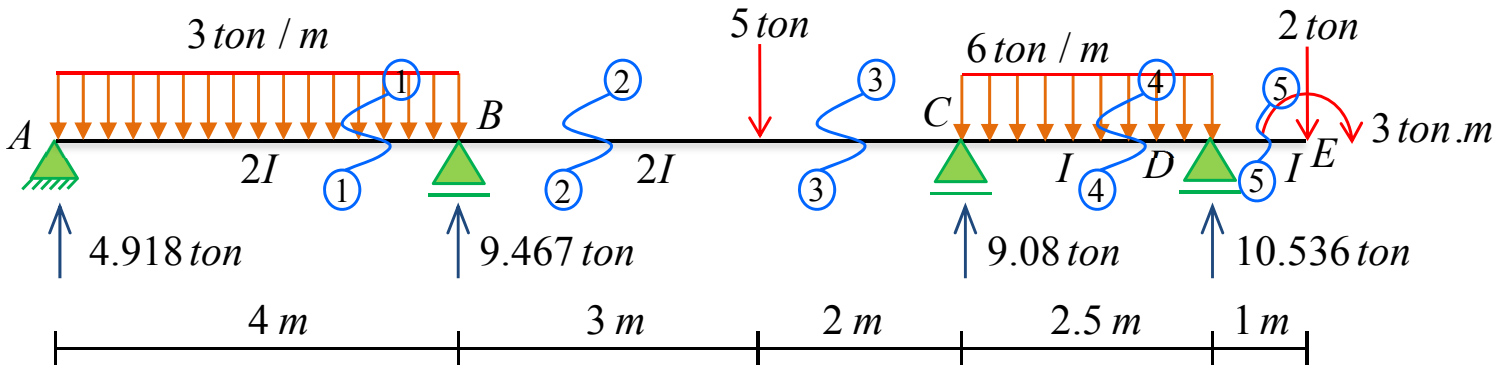
$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -3x + 4.918}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 4.918 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1.64m}$$

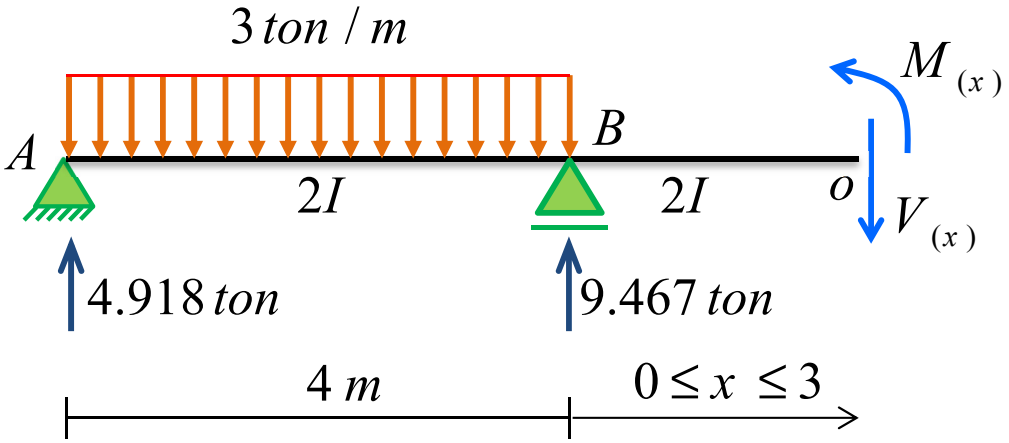
$$M_{(x=1.64)} = -1.5(1.64)^2 + 4.918(1.64) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x=1.64)} = 4.03\, ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



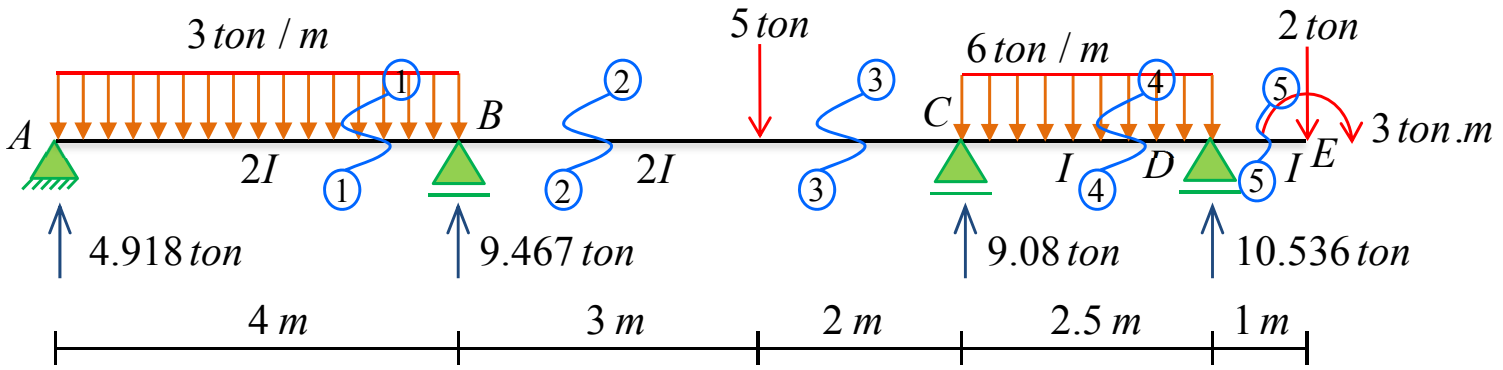
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_{(x)} + (3\times 4)\times\left(\frac{4}{2}+x\right) - 4.918\times(4+x) - 9.467\times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 2.385x - 4.328}$$

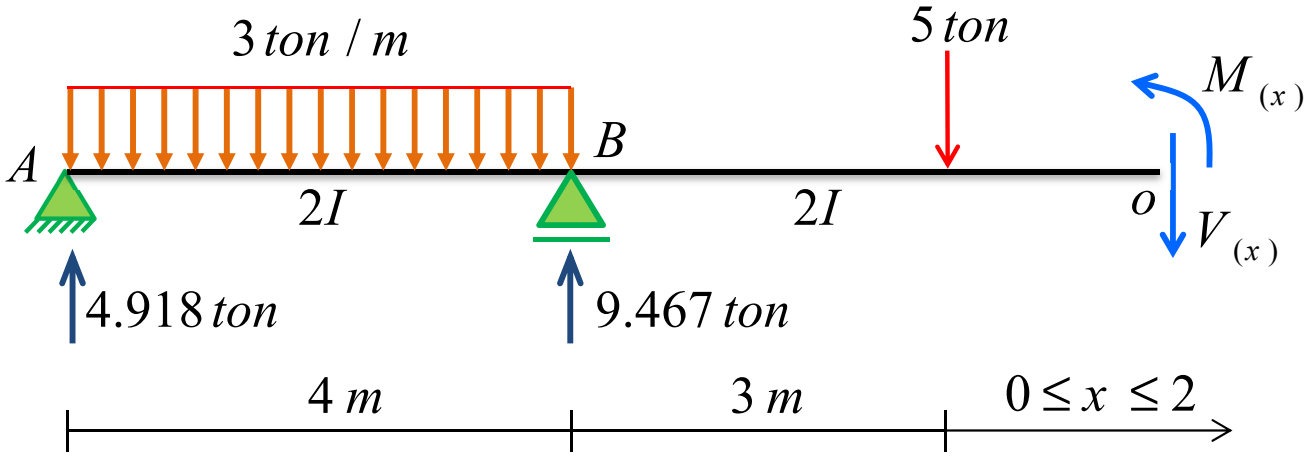
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - (3\times 4) + 4.918 + 9.467 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 2.385}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:



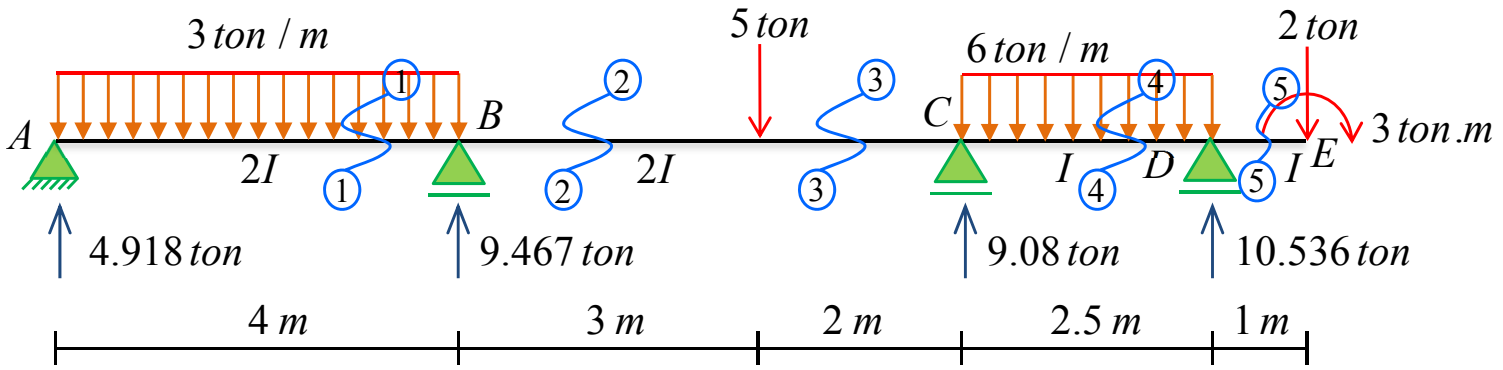
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_{(x)} + (3\times 4)\times(5+x) + 5\times x - 4.918\times(7+x) - 9.467\times(3+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -2.615x + 2.827}$$

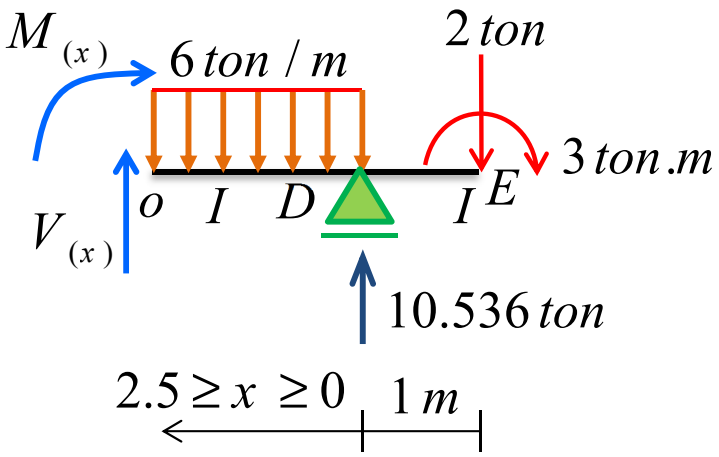
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - (3\times 4) - 5 + 4.918 + 9.467 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -2.615}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 4-4 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-M_{(x)} - (6\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 2\times(1+x) - 3 + 10.536\times x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -3x^2 + 8.536x - 5}$$

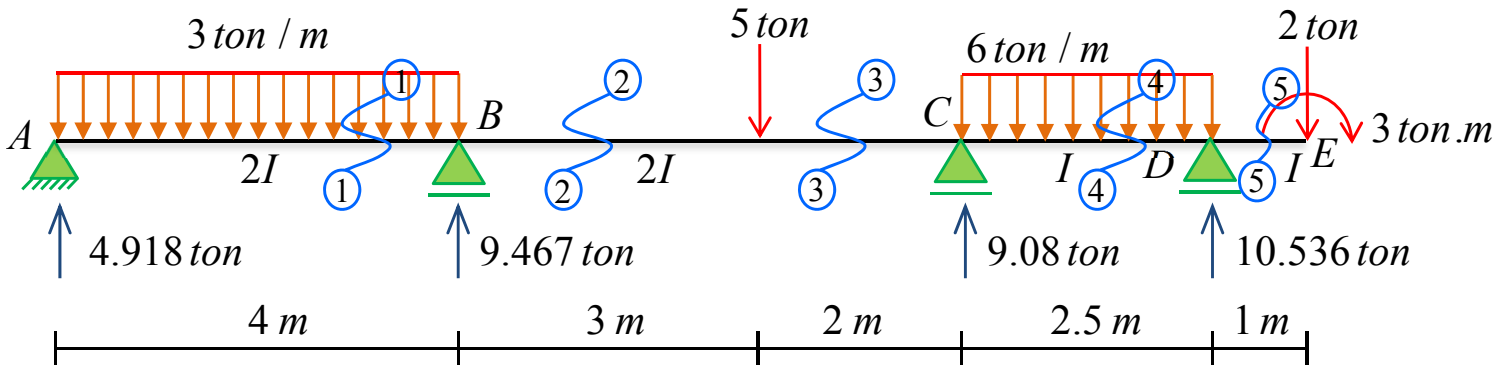
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} - (6\times x) - 2 + 10.536 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 6x - 8.536}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 8.536 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1.42m}$$

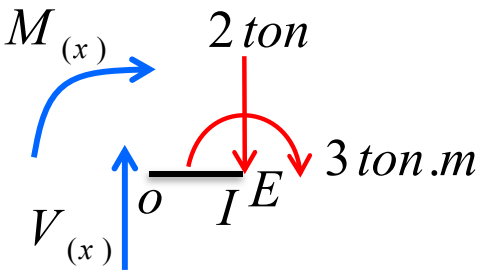
$$M_{(x=1.42)} = -3x^2 + 8.536x - 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x=1.42)} = 1.07\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 5-5 خواهیم داشت:



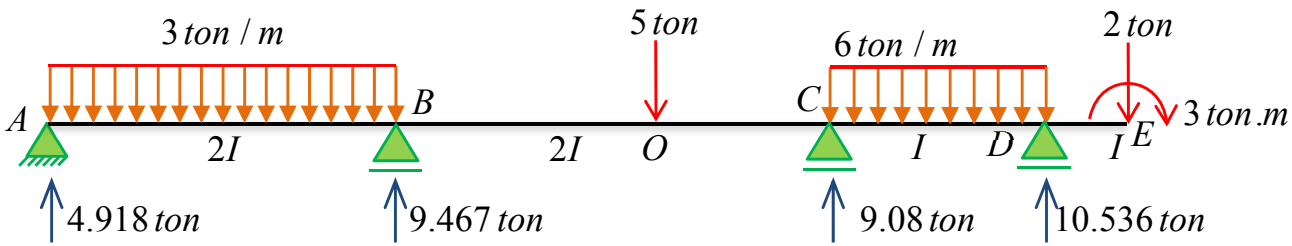
$$1 \geq x \geq 0$$

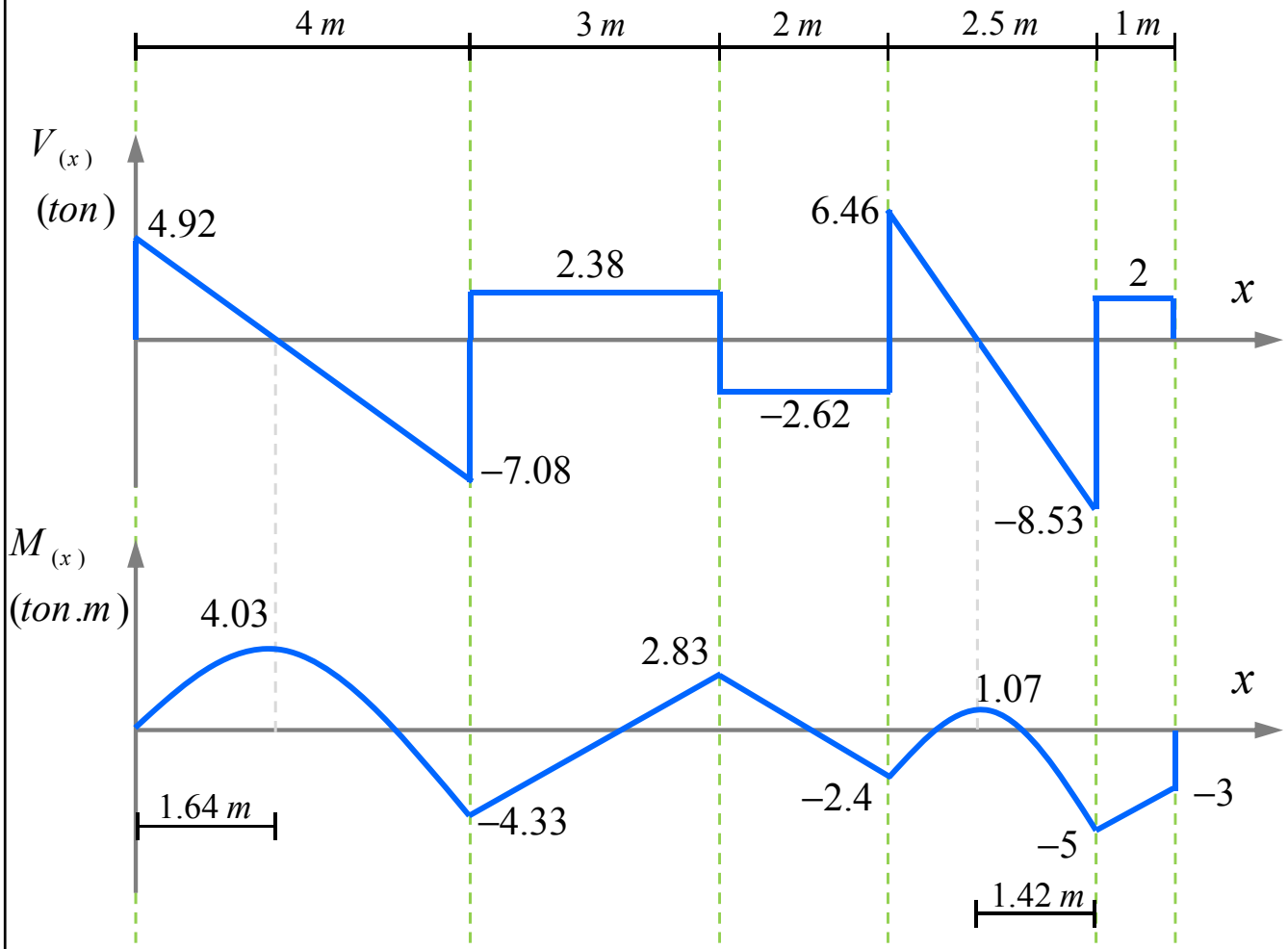
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - 2 \times x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -2x - 3}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 2\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 1-



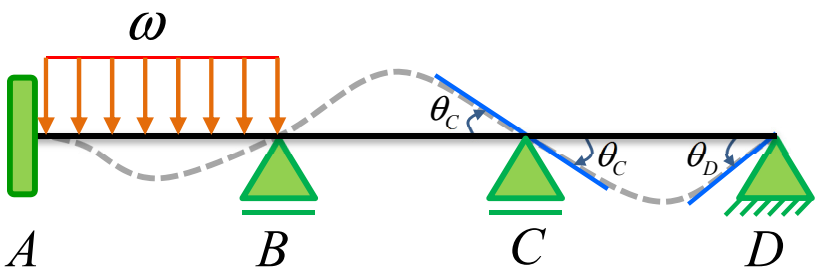


$$
\begin{aligned}
&AB: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -3x + 4.918 \\
&BO: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = 2.385 \\
&OC: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -2.615 \\
&DC: \quad 2.5 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = 6x - 8.536 \\
&ED: \quad 1 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = 2\,ton
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&AB: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -1.5x^2 + 4.918x \\
&BO: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = 2.385x - 4.328 \\
&OC: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -2.615x + 2.827 \\
&DC: \quad 2.5 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -3x^2 + 8.536x - 5 \\
&ED: \quad 1 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -2x - 3
\end{aligned}
$$

ETABS File Name: **08-Example-01.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



سختی‌های اصلاح شده

1- انتهای دور مفصلی:

در تیر سرتاسری نشان داده شده، گره C دو عضو CD و CB به آن متصل شده است. گره‌های D و B که به صورت اتصال مفصلی می‌باشند نقش انتهای دور را برای گره C بازی می‌کنند. اما تفاوت اتصال مفصلی D با اتصال مفصلی در B آن است که مقدار لنگر در گره D (حتی در صورت وجود کنسول) چون در انتهای سازه است معلوم می‌باشد.

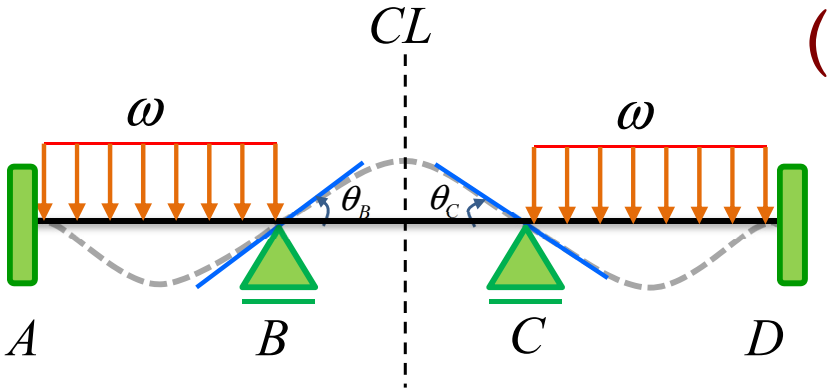
از این رو با نوشتن معادلات شیب-افت برای عضو CD خواهیم داشت:

$$M_{DC}=2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{DC}\left(2\theta_D+\theta_C-3\psi_{DC}\right)+FEM_{DC}=0 \Rightarrow \boxed{\theta_D=-\frac{\theta_C}{2}} \quad (14)$$

(15)

$$M_{CD}=2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CD}\left(2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD}\right)+FEM_{CD} \overset{(14)}{\Rightarrow} M_{CD}=2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CD}\times\left(\frac{3}{2}\theta_C\right) \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{M_{CD}=\frac{3}{4}k'_{CD}\theta_C}$$

نکته: هرگاه انتهای دور عضوی مفصلی باشد به جای سختی مطلق می‌توان از ضریب اصلاح $\frac{3}{4}$ استفاده نمود. یعنی سختی در ضریب $\frac{3}{4}$ ضرب گردد. در این حالت نیازی به انتقال لنگر از سمت گره مورد نظر به سمت مفصل نمی‌باشد.



سختی‌های اصلاح شده

2- تقارن مستقیم:

در تیر سرتاسری نشان داده شده وسط عضو BC بر روی محور تقارن مستقیم قرار دارد. در تقارن مستقیم هم سازه و هم بارگذاری نسبت به یک محور تقارن مرکزی، تقارن دارد. در نتیجه تغییرشکل سازه نیز نسبت به محور مرکزی تقارن دارد.

با توجه به منحنی تغییرشکل سازه می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\theta_C = -\theta_B \qquad (16)$$

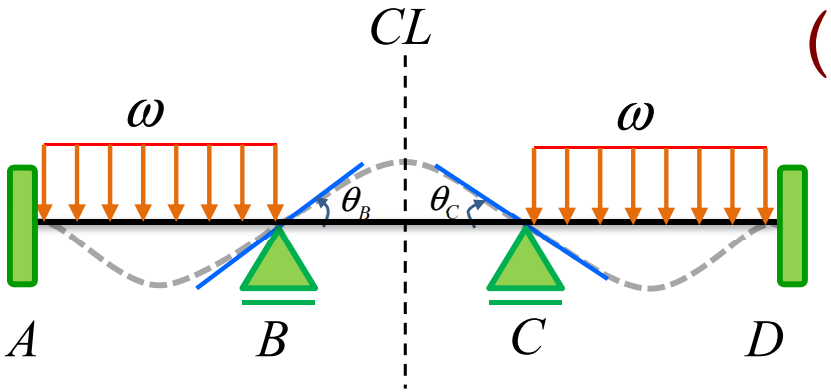
از این رو با نوشتن معادلات شیب-افت برای عضو BC خواهیم داشت:

$$M_{BC} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} \qquad (17)$$

(θ_C و FEM_{BC} برابر صفر)

$$\overset{(16)}{\Rightarrow} \quad M_{BC} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC} \times (\theta_B) \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \boxed{M_{BC} = \frac{1}{2}k'_{BC}\theta_B}$$

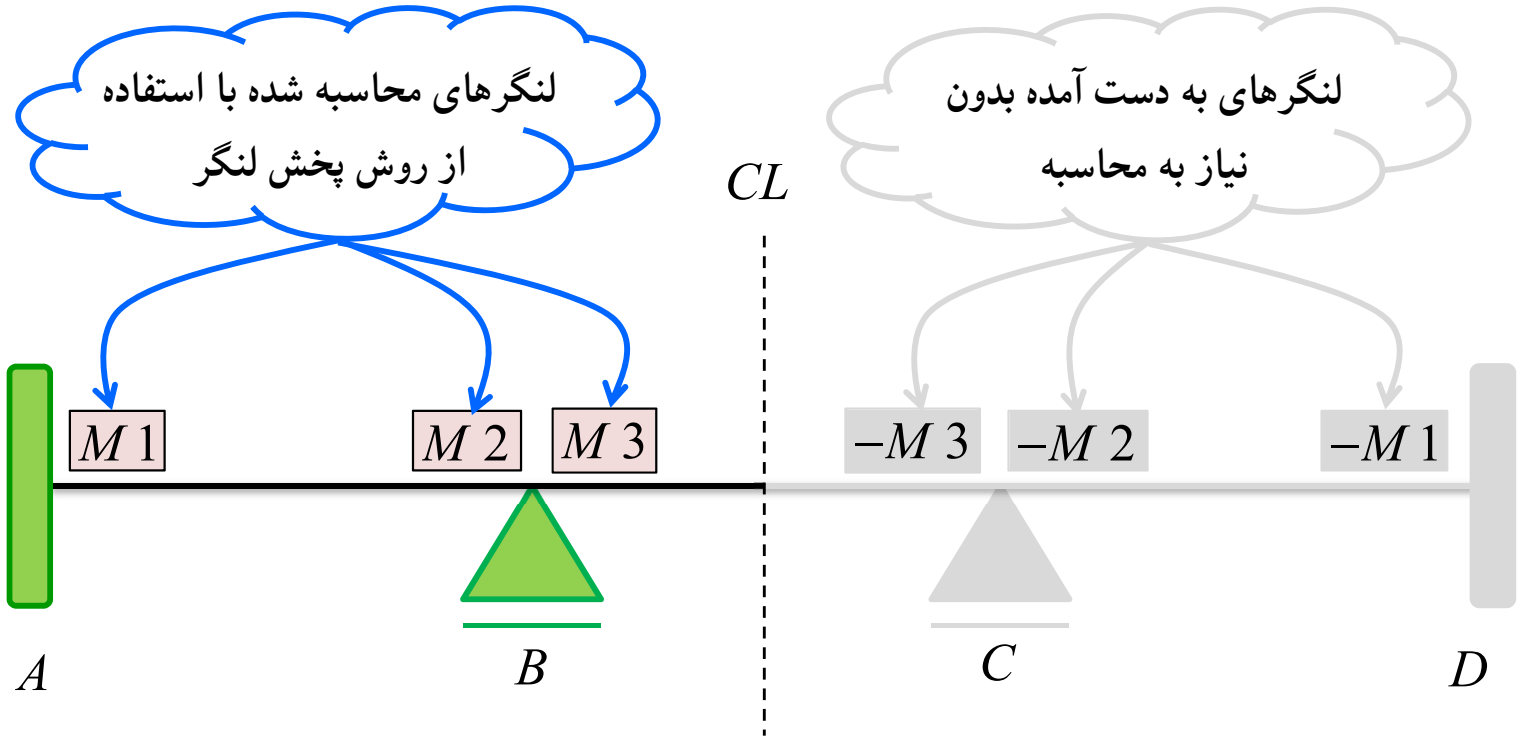
نکته: هرگاه وسط عضوی بر روی محور تقارن مستقیم قرار گیرد به جای سختی مطلق می‌توان از ضریب اصلاح $\frac{1}{2}$ استفاده نمود. یعنی سختی در ضریب $\frac{1}{2}$ ضرب گردد. در این حالت نیازی به انتقال لنگر از سمت گره مورد نظر به سمت انتهای دیگر نمی‌باشد.



سختی‌های اصلاح شده

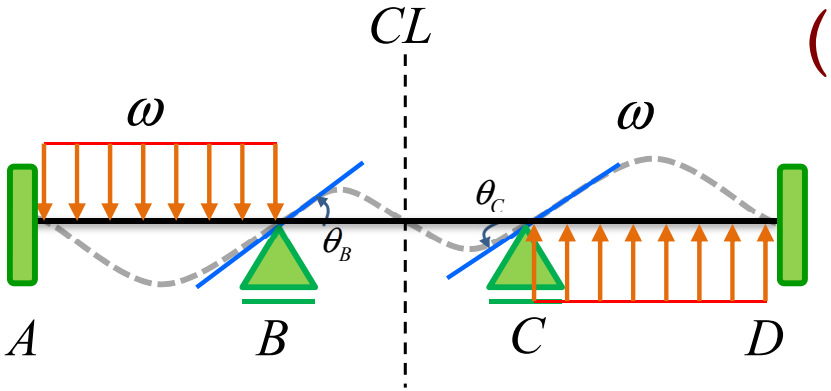
2- تقارن مستقیم:

با بکارگیری سختی اصلاح شده در حالت تقارن مستقیم، نصف سازه آنالیز می‌گردد. نکته بسیار مهم آن‌که محاسبه لنگر گیرداری و ضریب سختی برای عضوی که بر روی محور تقارن مستقیم قرار دارد براساس طول اولیه عضو صورت می‌گیرد نه نصف طول عضو.



سختی‌های اصلاح شده

3- تقارن معکوس:



در تیر سرتاسری نشان داده شده وسط عضو BC بر روی محور تقارن معکوس قرار دارد. در تقارن معکوس سازه نسبت به یک محور تقارن مرکزی متقارن اما بارگذاری پاد متقارن است (اگر سازه 180 درجه حول محور تقارن مرکزی دوران نماید و با سازه در حالت اولیه جمع شود بارگذاری صفر می‌گردد) . در نتیجه تغییرشکل سازه نیز نسبت به محور مرکزی تقارن دارد.

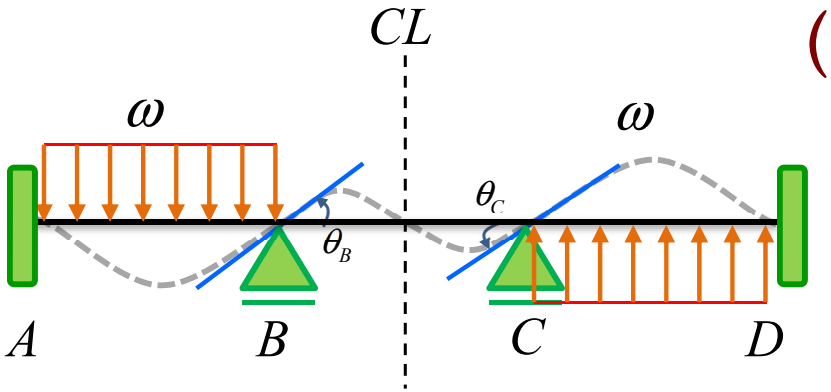
با توجه به منحنی تغییرشکل سازه می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\theta_C = \theta_B \qquad (18)$$

از این رو با نوشتن معادلات شیب-افت برای عضو BC خواهیم داشت:

$$M_{BC} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} \xrightarrow{(18)} M_{BC} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC} \times (3\theta_B) \xrightarrow{(2)} \boxed{M_{BC} = \frac{3}{2}k'_{BC}\theta_B} \qquad (19)$$

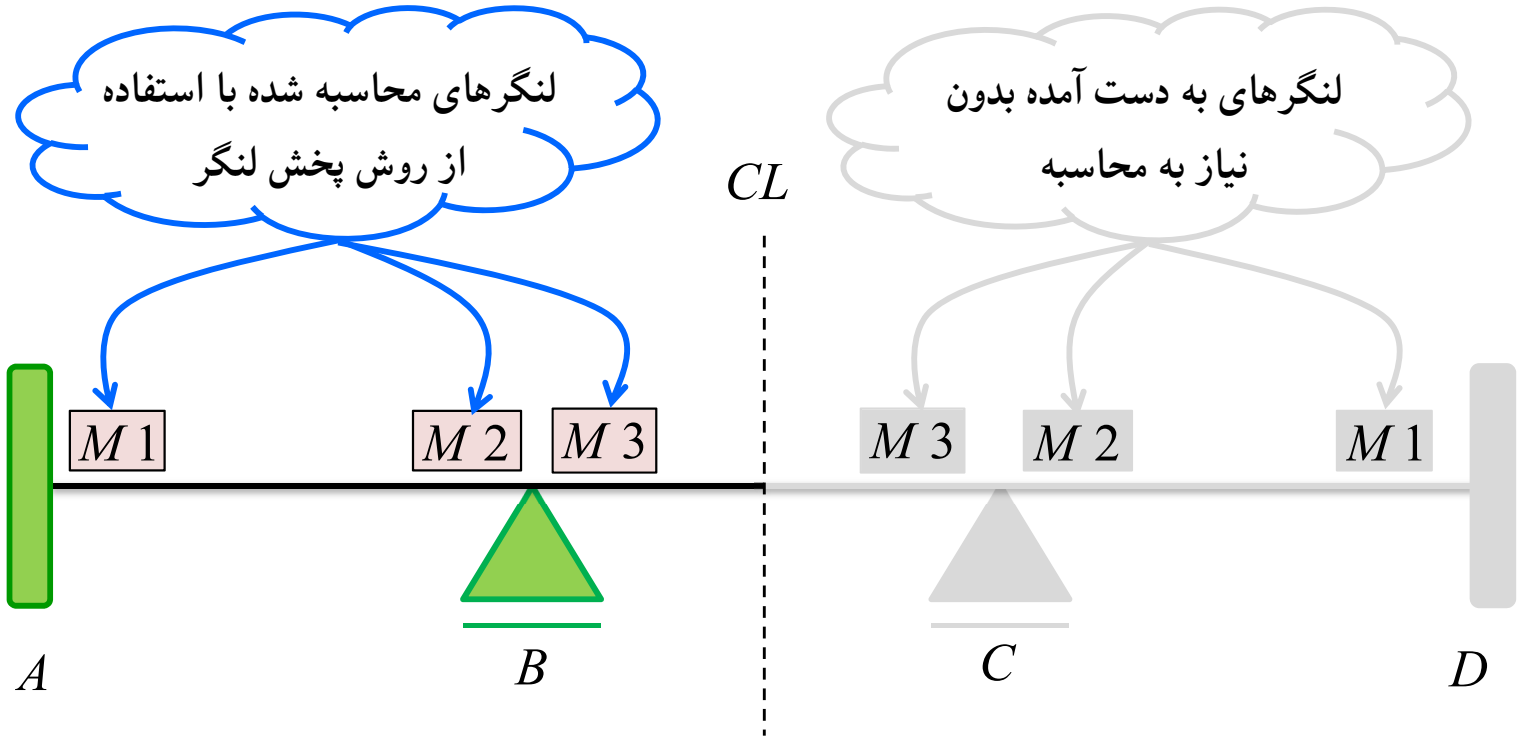
نکته: هرگاه وسط عضوی بر روی محور تقارن معکوس قرار گیرد به جای سختی مطلق می‌توان از ضریب اصلاح $\frac{3}{2}$ استفاده نمود. یعنی سختی در ضریب $\frac{3}{2}$ ضرب گردد. در این حالت نیازی به انتقال لنگر از سمت گره مورد نظر به سمت انتهای دیگر نمی‌باشد.



سختی‌های اصلاح شده

2- تقارن معکوس:

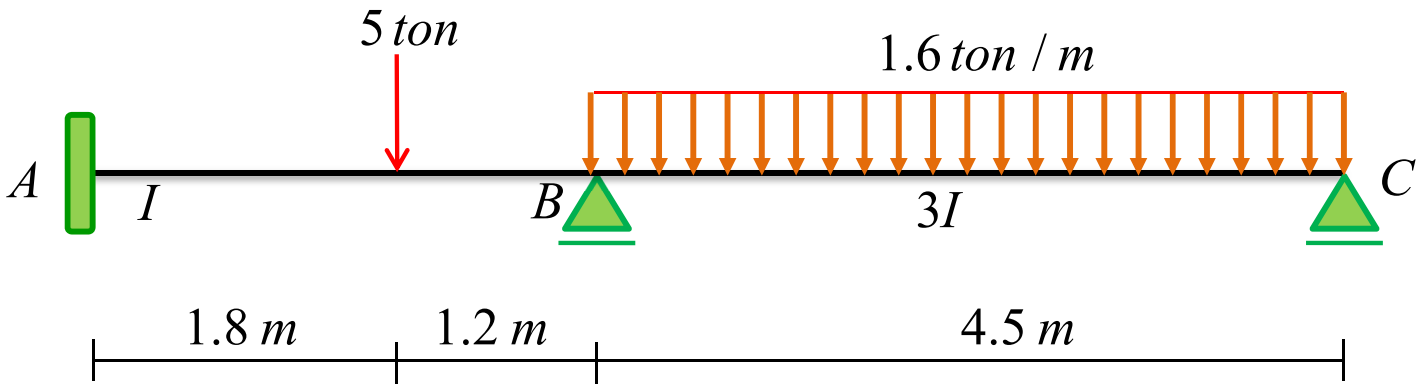
با بکارگیری سختی اصلاح شده در حالت تقارن معکوس، نصف سازه آنالیز می‌گردد. نکته بسیار مهم آن‌که محاسبه لنگر گیرداری و ضریب سختی برای عضوی که بر روی محور تقارن معکوس قرار دارد براساس طول اولیه عضو صورت می‌گیرد نه نصف طول عضو.



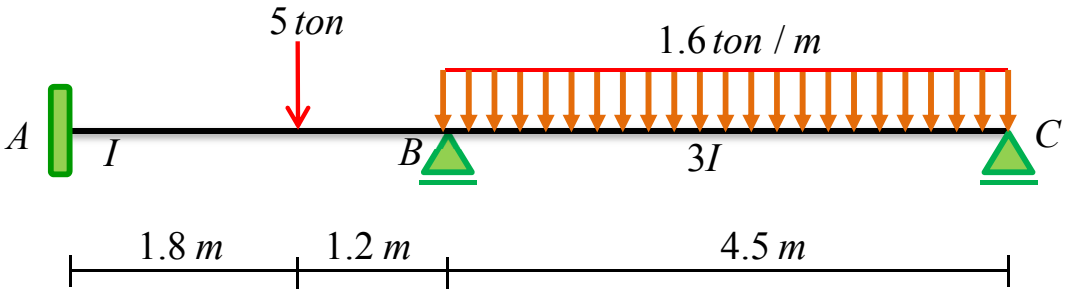
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

مثال 2- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ ton.m^2$$



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



پاسخ مثال 2-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

محاسبه لنگرهای گیرداری:

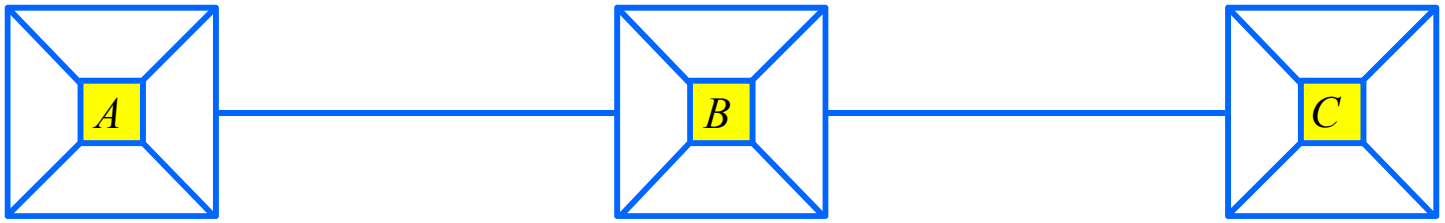
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = -1.44\ ton.m}$$

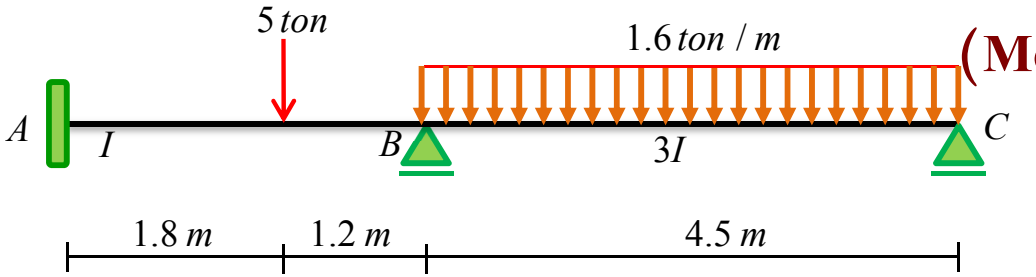
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BA} = 2.16\ ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -2.7\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2- شروع پخش لنگر:





پاسخ مثال 2-

برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

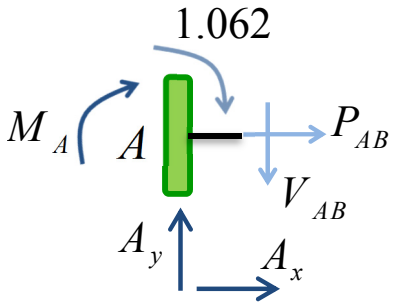


Fig 2

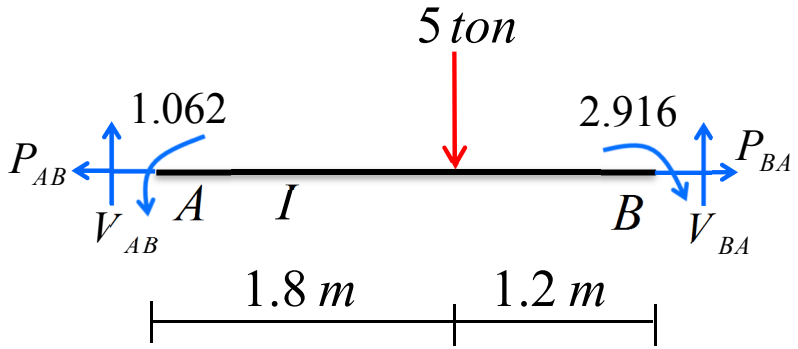


Fig 3

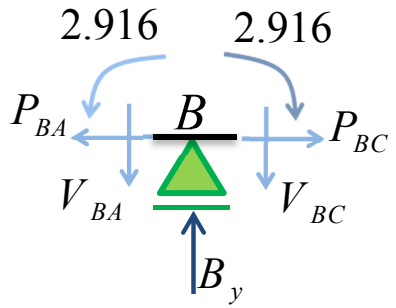


Fig 4

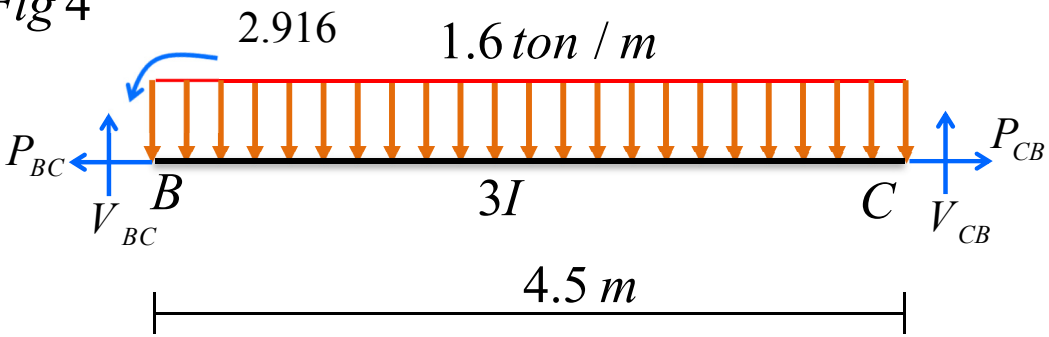
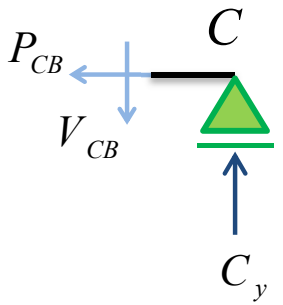


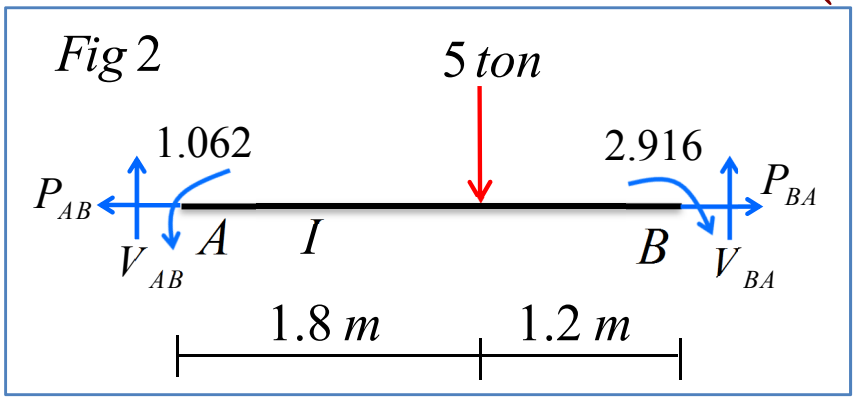
Fig 5



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2-

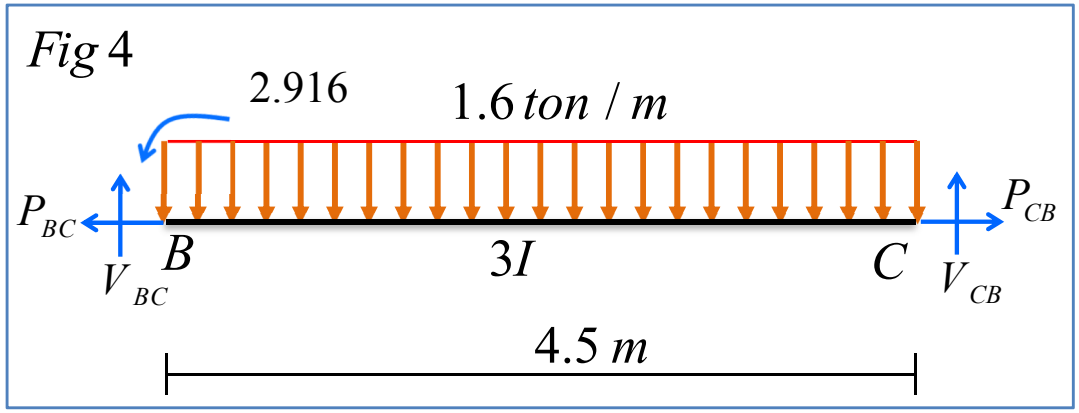
با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -5\times1.8-2.916+1.062+V_{BA}\times3=0 \Rightarrow \boxed{V_{BA}=3.618\,ton} \quad (2.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB}-5+V_{BA}=0 \overset{(2.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB}=1.382\,ton} \quad (2.2)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -(1.6\times4.5)\times\left(\frac{4.5}{2}\right)+2.916+V_{CB}\times4.5=0 \Rightarrow \boxed{V_{CB}=2.952\,ton} \quad (2.3)$$

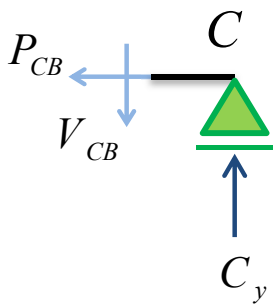
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC}-(1.6\times4.5)+V_{CB}=0 \overset{(2.3)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC}=4.248\,ton} \quad (2.4)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

Fig 5



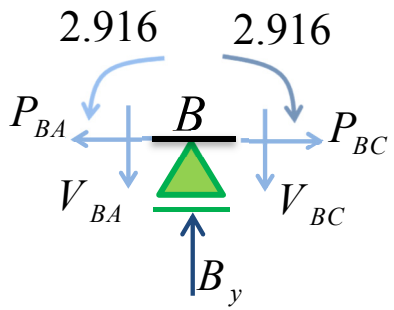
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{CB} = 0} \qquad (2.5)$$

$$(2.5) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{BC} &= P_{CB} = 0 \\ P_{AB} &= P_{BA} = 0 \end{aligned}} \qquad (2.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} \overset{(2.3)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 2.952\, ton}$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

Fig 3



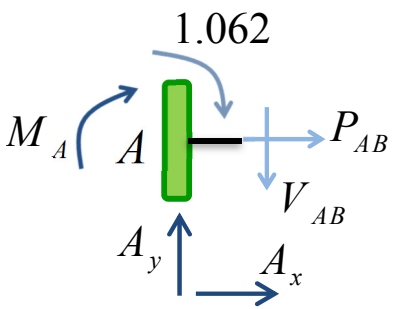
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(2.1)\,\&\,(2.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 7.866\, ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2-

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1



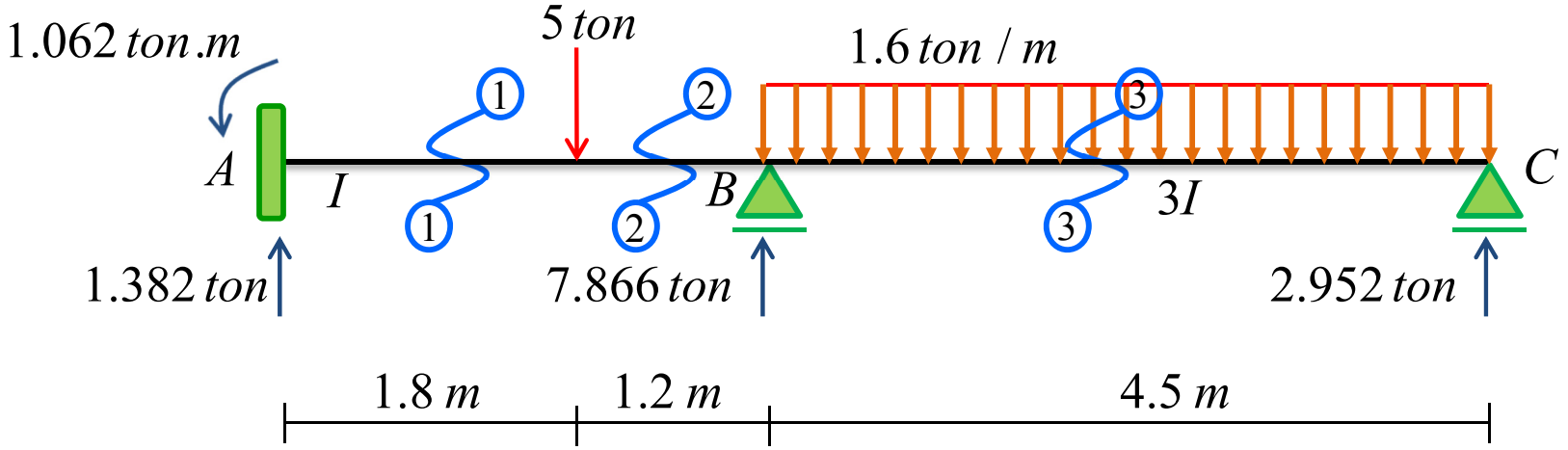
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(2.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 1.382\ ton}$$

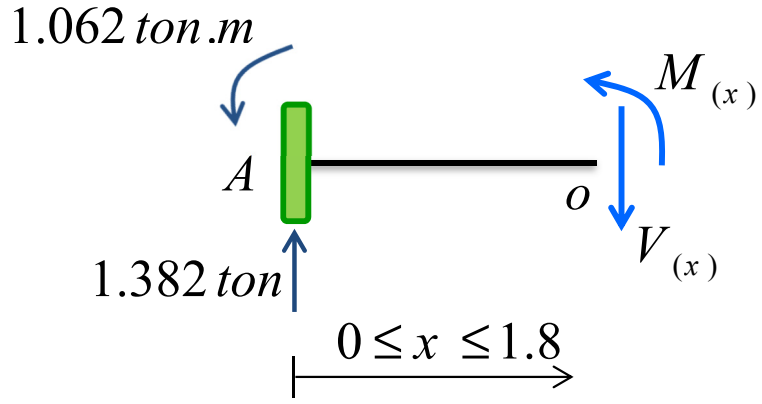
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(2.6)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 1.062 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -1.062\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} - 1.382 \times x + 1.062 = 0$$

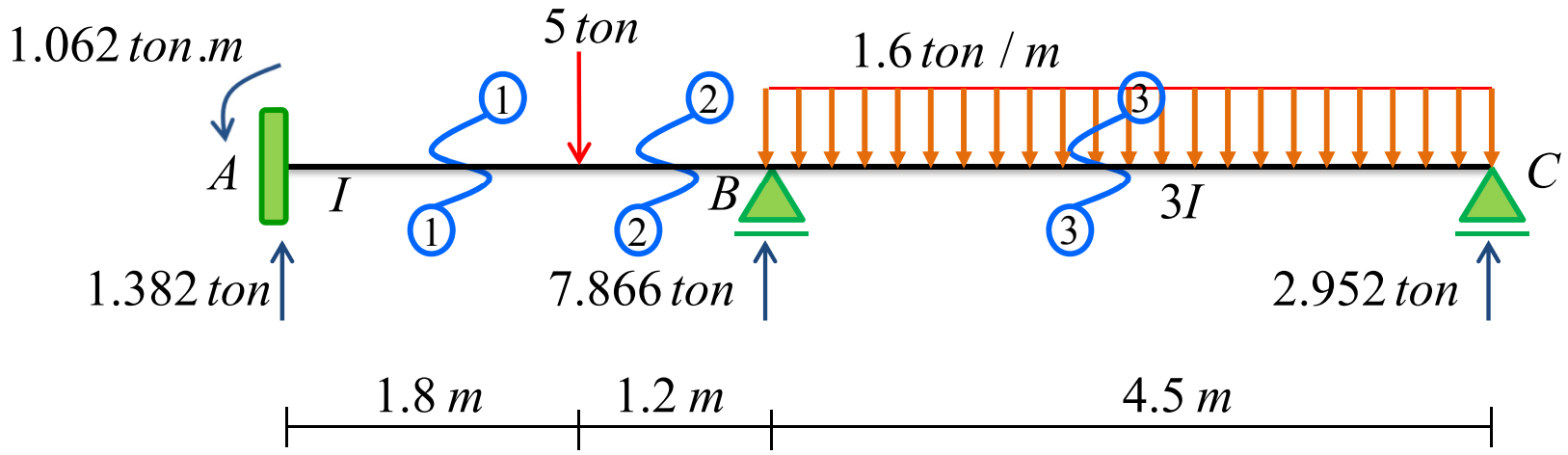
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 1.382x - 1.062}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} + 1.382 = 0$$

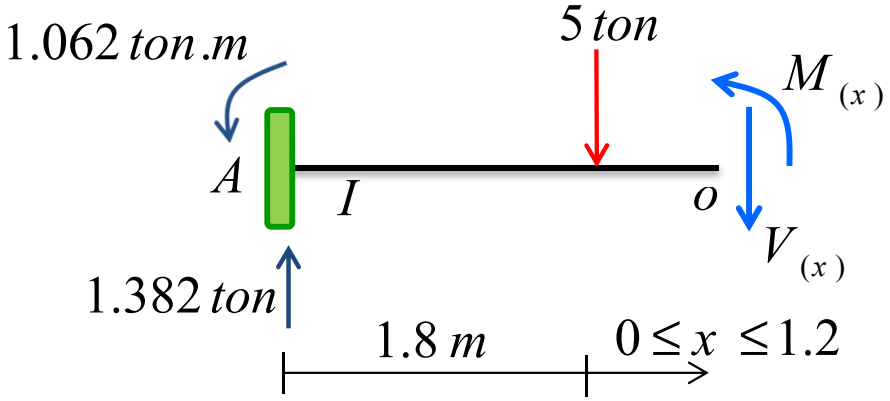
$$\Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 1.382}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

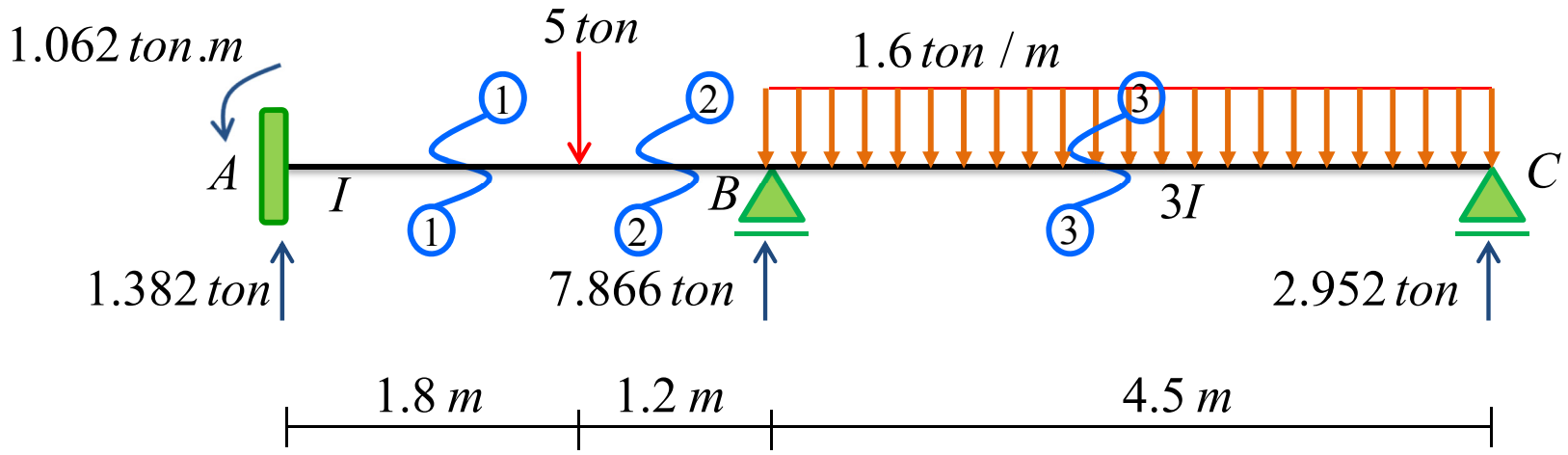


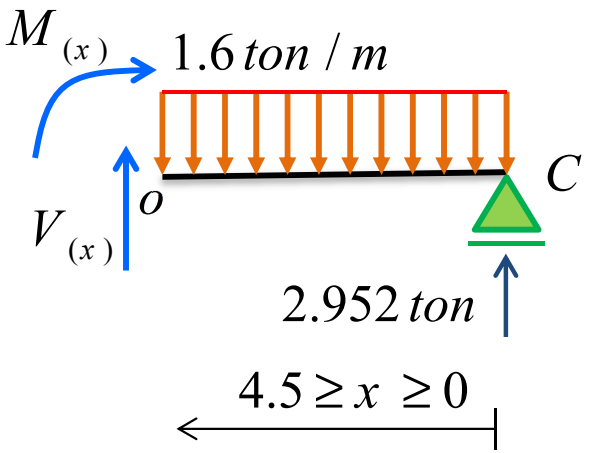
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 5 \times x - 1.382 \times (1.8 + x) + 1.062 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -3.618x + 1.4256}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - 5 + 1.382 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -3.618}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2-





با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - (1.6 \times x) \times \left(\frac{x}{2}\right) + 2.952 \times x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -0.8x^2 + 2.952x}$$

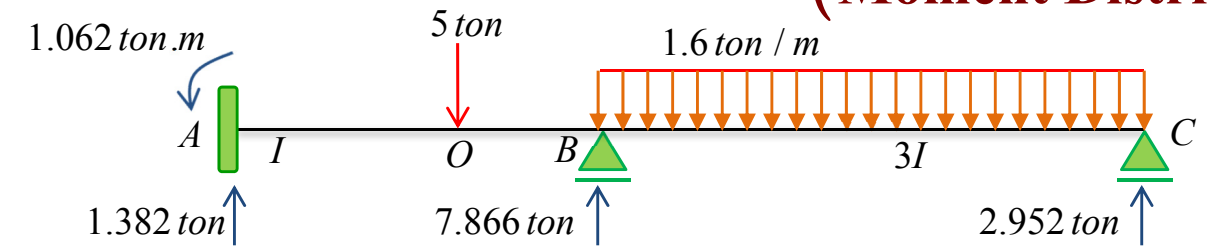
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} - 1.6 \times x + 2.952 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 1.6x - 2.952}$$

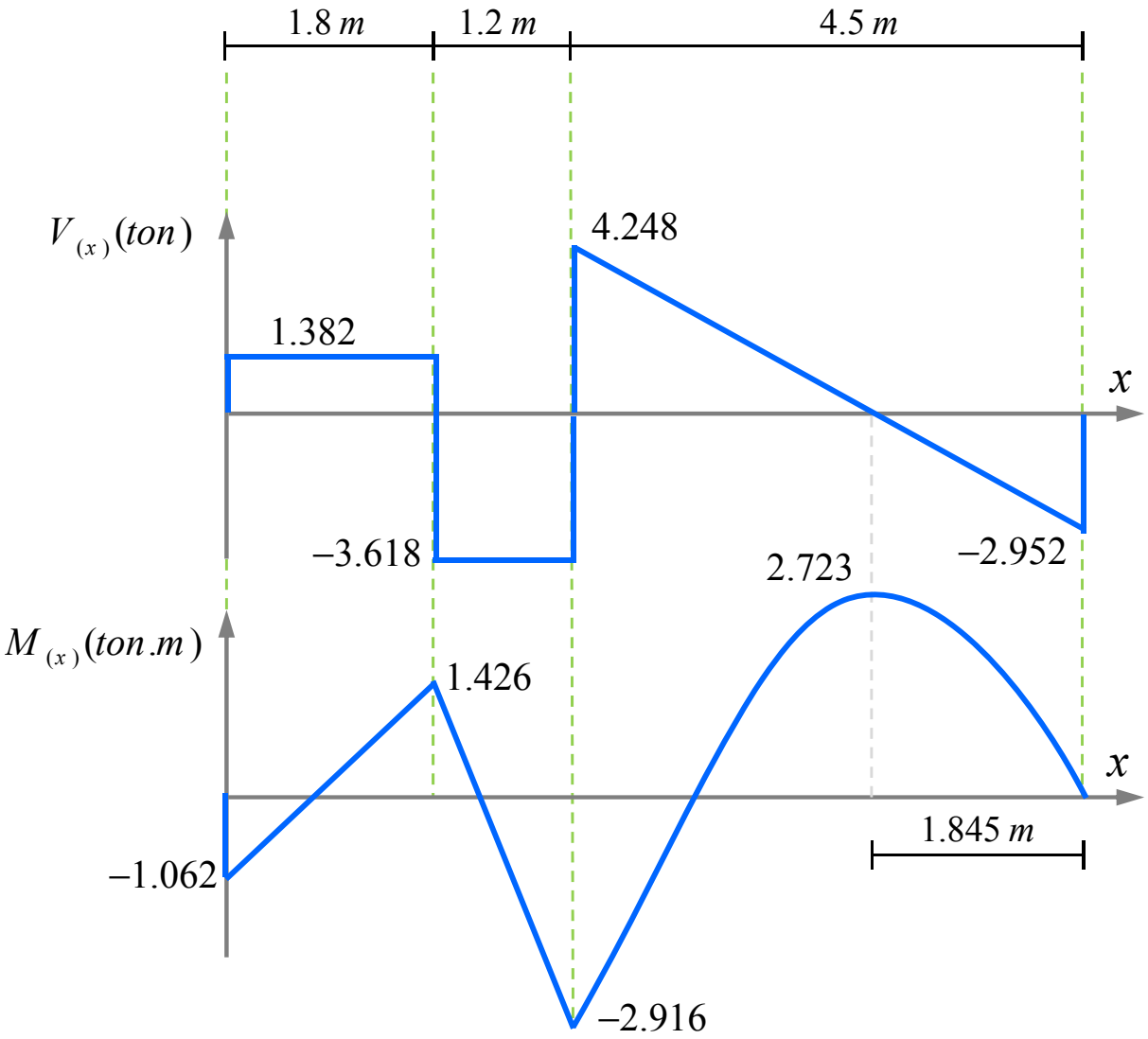
$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1.6x - 2.952 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1.845\ m}$$

$$M_{(x=1.845)} = -0.8(1.845)^2 + 2.952(1.845) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x=1.845)} = 2.723\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 2-





$$AO: \quad 0 \le x \le 1.8 \quad V_{(x)} = 1.382$$

$$OB: \quad 0 \le x \le 1.2 \quad V_{(x)} = -3.618$$

$$CB: \quad 4.5 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = 1.6x - 2.952$$

$$AO: \quad 0 \le x \le 1.8 \quad M_{(x)} = 1.382x - 1.062$$

$$OB: \quad 0 \le x \le 1.2 \quad M_{(x)} = -3.618x + 1.4256$$

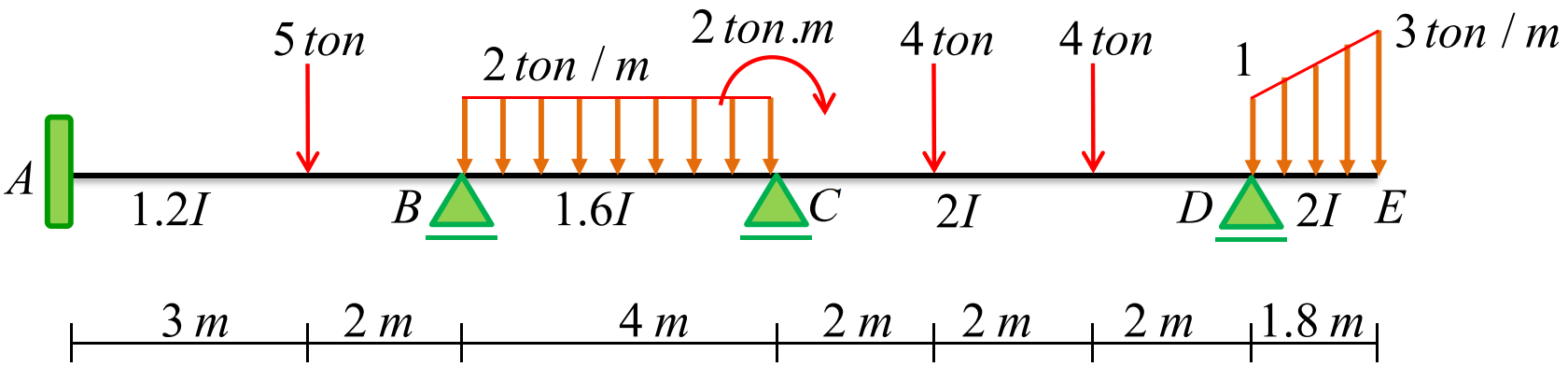
$$CB: \quad 4.5 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -0.8x^2 + 2.952x$$

ETABS File Name: **08-Example-02.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

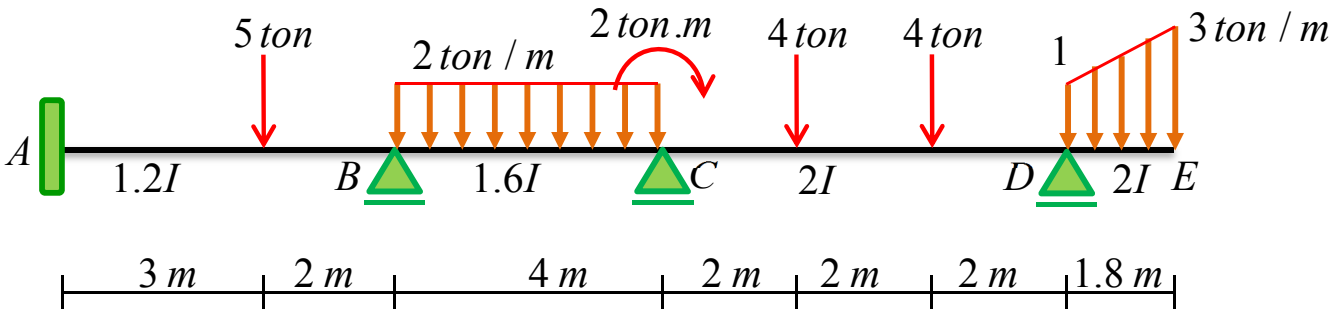
مثال 3- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ ton.m^2$$

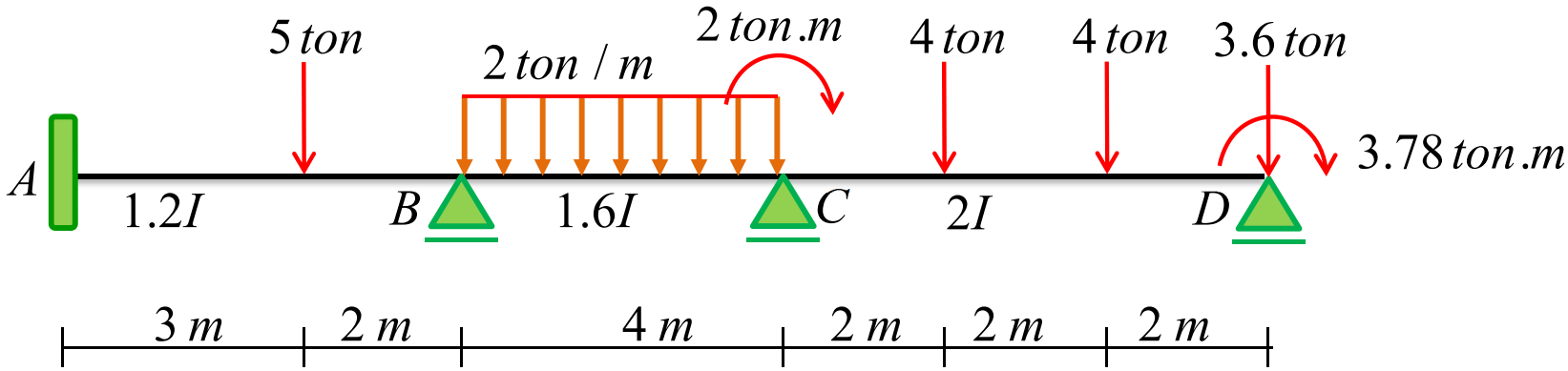


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

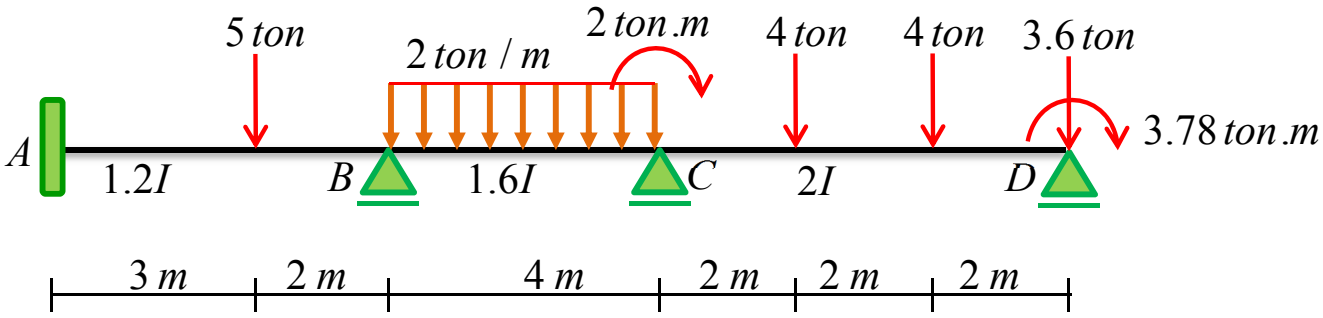
پاسخ مثال 3-



نکته: از آن‌جایی که کنسول یک سازه معین است از این رو لنگر و نیروی معادل کنسول را به گره D منتقل نموده و کنسول وارد حل معادلات شیب-افت نمی‌شود.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

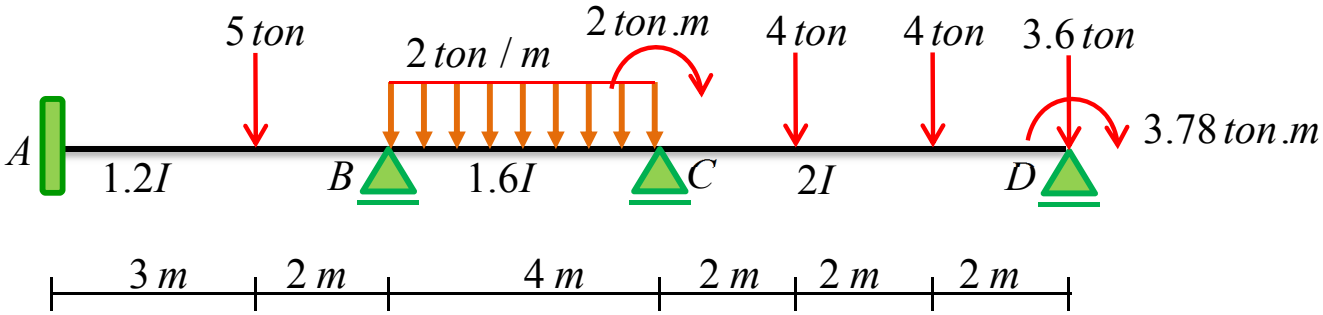


پاسخ مثال 3-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-



محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = -2.4\ ton.m}$$

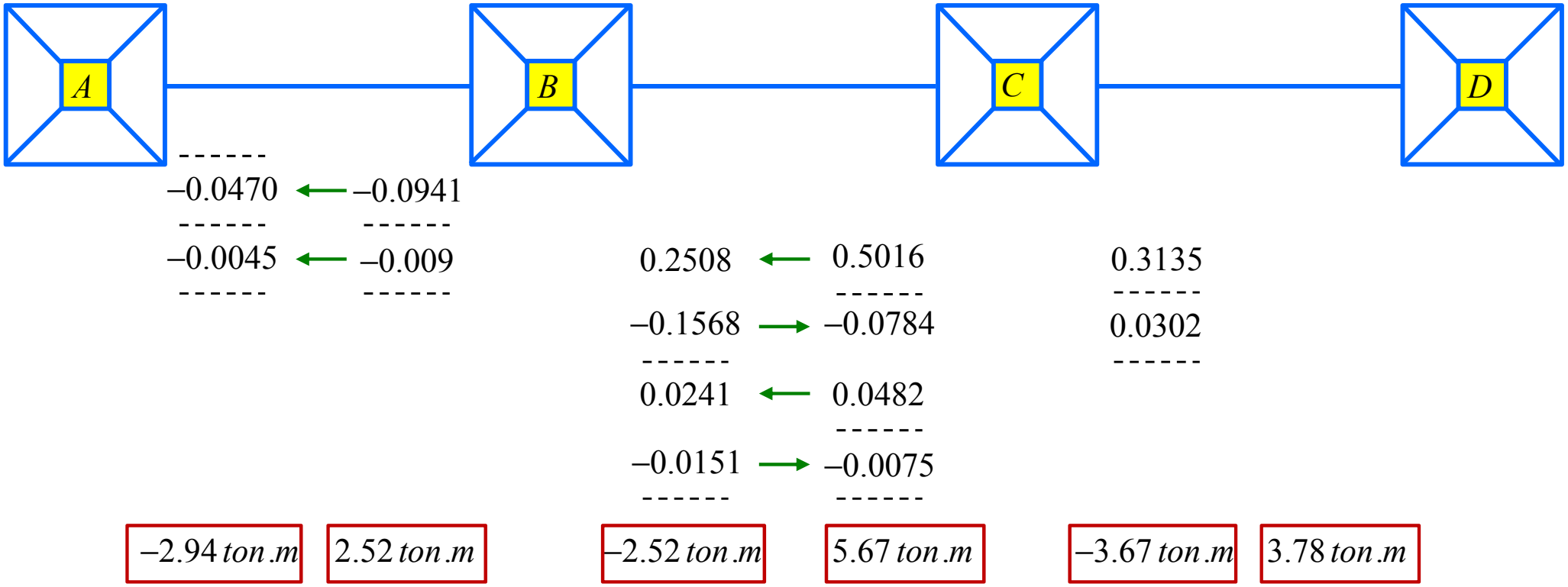
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BA} = 3.6\ ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{8}{3}\ ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{48}{9}\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3- شروع پخش لنگر:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-

گره B دور دوم: $(0.2508)\times(-1) = -0.2508 \times$

- $\frac{3}{8} = -0.0941 \times \rightarrow 0.5 = -0.0470$
- $\frac{5}{8} = -0.1568 \times \rightarrow 0.5 = -0.0784$

گره C دور سوم: $(-0.0784)\times(-1) = 0.0784 \times$

- $\frac{8}{13} = 0.0482 \times \rightarrow 0.5 = 0.0241$
- $\frac{5}{13} = 0.0302$

گره B دور سوم: $(0.0241)\times(-1) = -0.0241 \times$

- $\frac{3}{8} = -0.009 \times \rightarrow 0.5 = -0.0045$
- $\frac{5}{8} = -0.0151 \times \rightarrow 0.5 = -0.0075$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3- برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

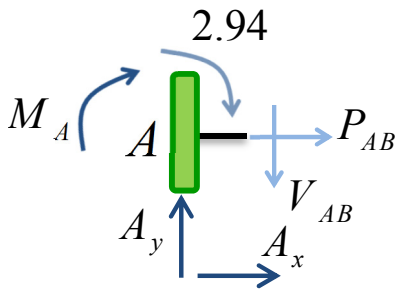


Fig 2

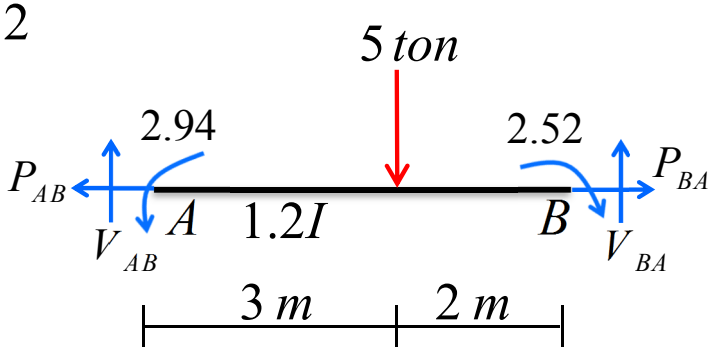


Fig 3

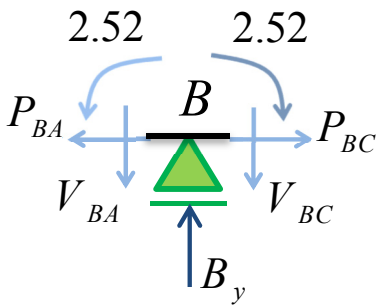


Fig 4

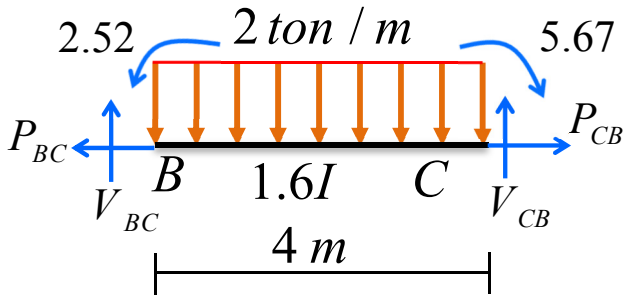


Fig 5

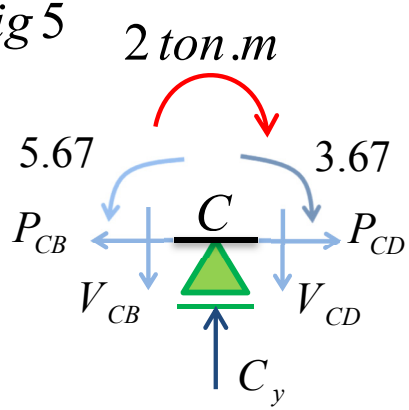


Fig 6

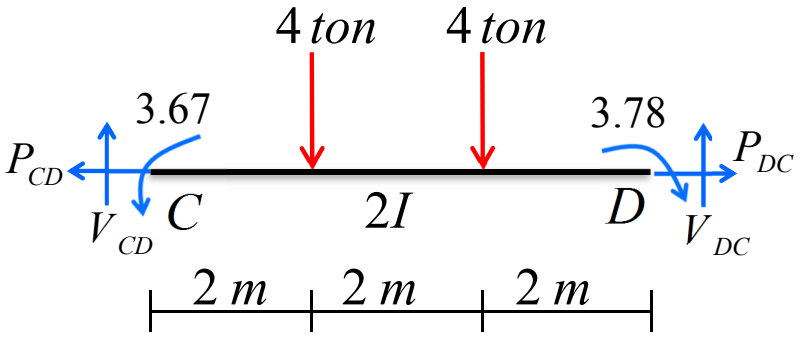
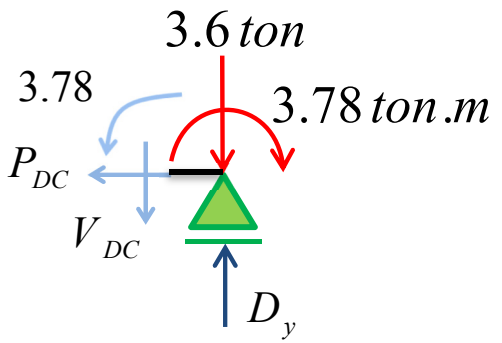


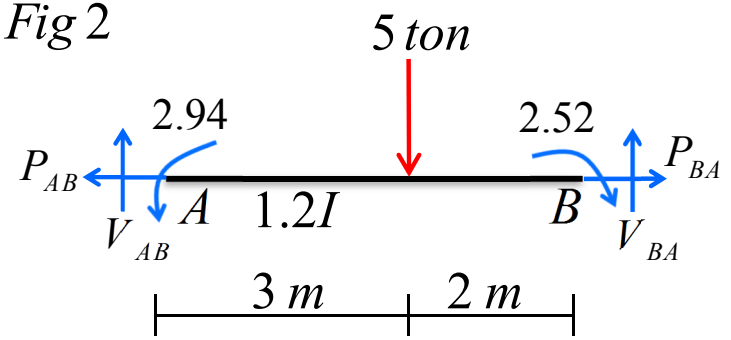
Fig 7



پاسخ مثال 3-

با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

Fig 2

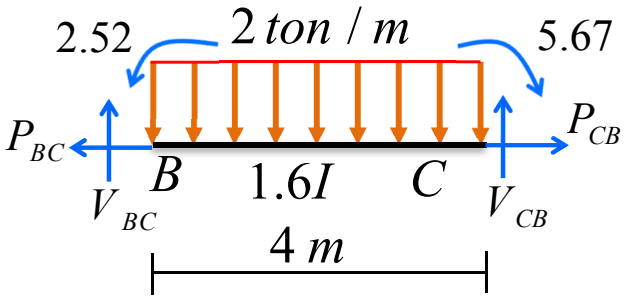


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -5\times 3 - 2.52 + 2.94 + V_{BA}\times 5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 2.916\, ton} \qquad (3.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - 5 + V_{BA} = 0 \overset{(3.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 2.084\, ton} \qquad (3.2)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

Fig 4



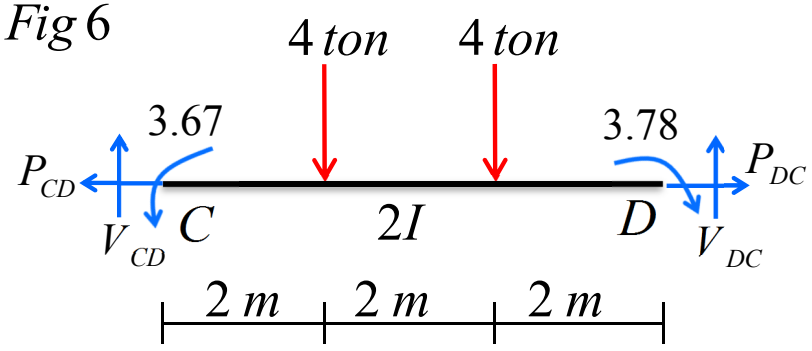
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -(2\times 4)\times\left(\frac{4}{2}\right) + 2.52 - 5.67 + V_{CB}\times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = 4.788\, ton} \qquad (3.3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} - (2\times 4) + V_{CB} = 0 \overset{(3.3)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 3.213\, ton} \qquad (3.4)$$

پاسخ مثال 3-

با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:

Fig 6

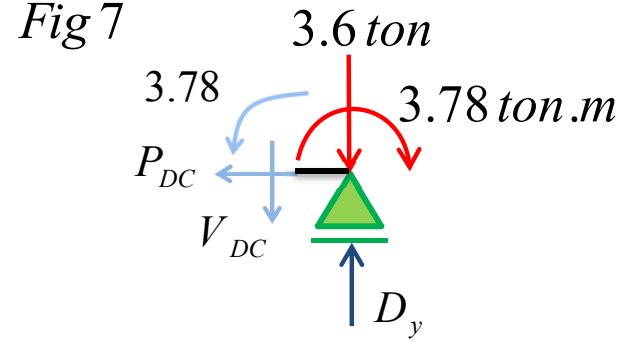


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -4\times2-4\times4-3.78+3.67+V_{DC}\times6=0 \Rightarrow \boxed{V_{DC}=4.018\,ton} \quad (3.5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD}-4-4+V_{DC}=0 \overset{(3.5)}{\Rightarrow} \boxed{V_{CD}=3.982\,ton} \quad (3.6)$$

با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:

Fig 7



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{DC}=0} \quad (3.7)$$

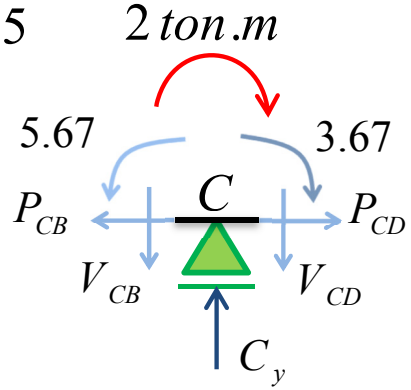
$$(3.7) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{DC}&=P_{CD}=0\\ P_{CB}&=P_{BC}=0\\ P_{AB}&=P_{BA}=0 \end{aligned}} \quad (3.8)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y - V_{DC} - 3.6 = 0 \overset{(3.5)}{\Rightarrow} \boxed{D_y = 7.618\,ton}$$

پاسخ مثال 3-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

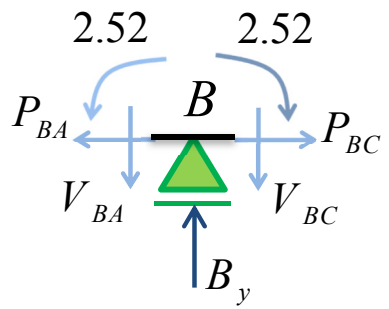
Fig 5



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} + V_{CD} \overset{(3.3)\,\&\,(3.6)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 8.77\ ton}$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

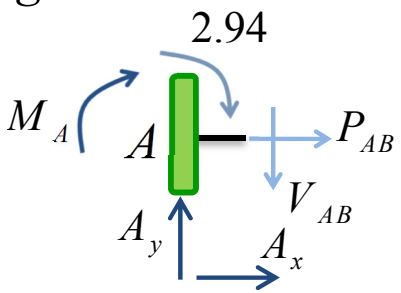
Fig 3



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(3.1)\,\&\,(3.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 6.129\ ton}$$

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1



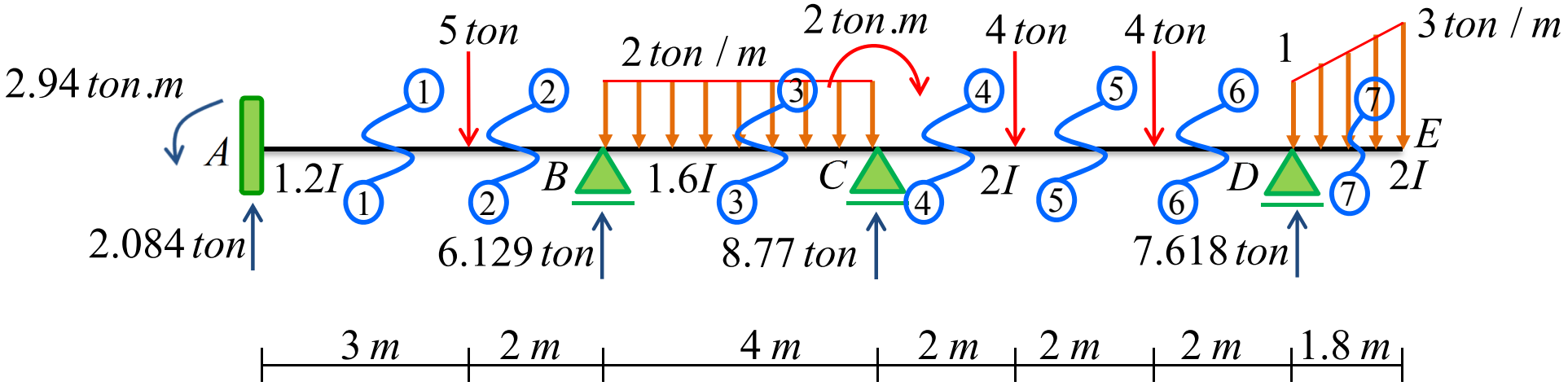
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(3.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 2.084\ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(3.8)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

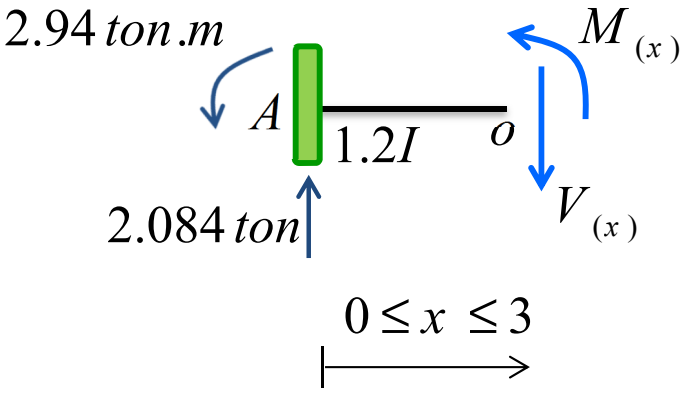
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 2.94 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -2.94\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:



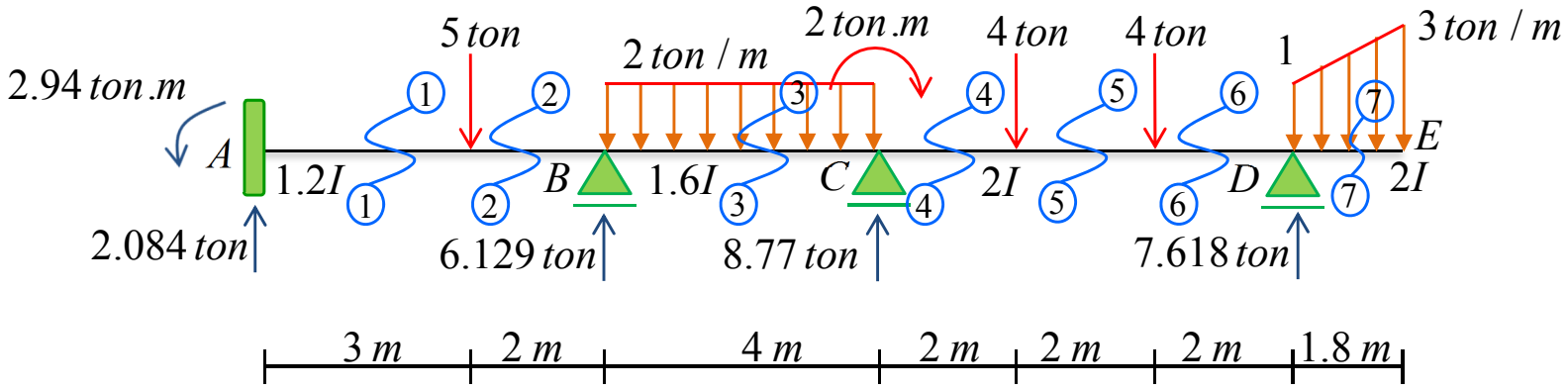
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 2.94 - 2.084 \times x = 0$$

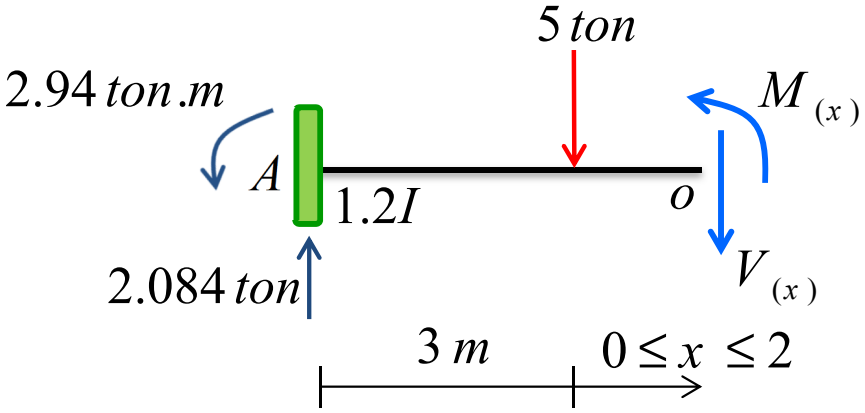
$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 2.084x - 2.94}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} + 2.084 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 2.084\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-





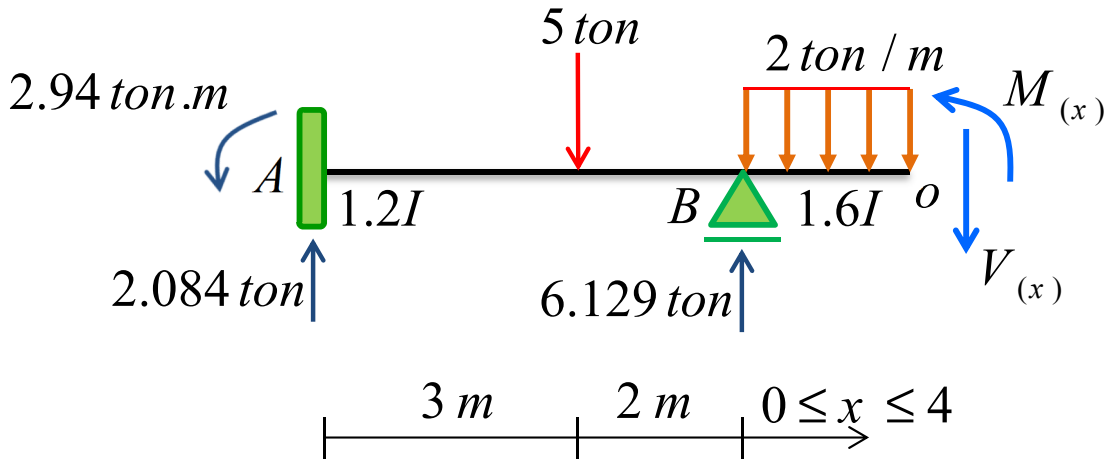
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 2.94 + 5 \times x - 2.084 \times (3 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -2.916x + 3.312}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - 5 + 2.084 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -2.916\ ton}$$

پاسخ مثال 3-

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 2.94 + 5\times(2+x) - 2.084\times(5+x) - 6.129\times x + 2\times x \times \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 3.213x - 2.52}$$

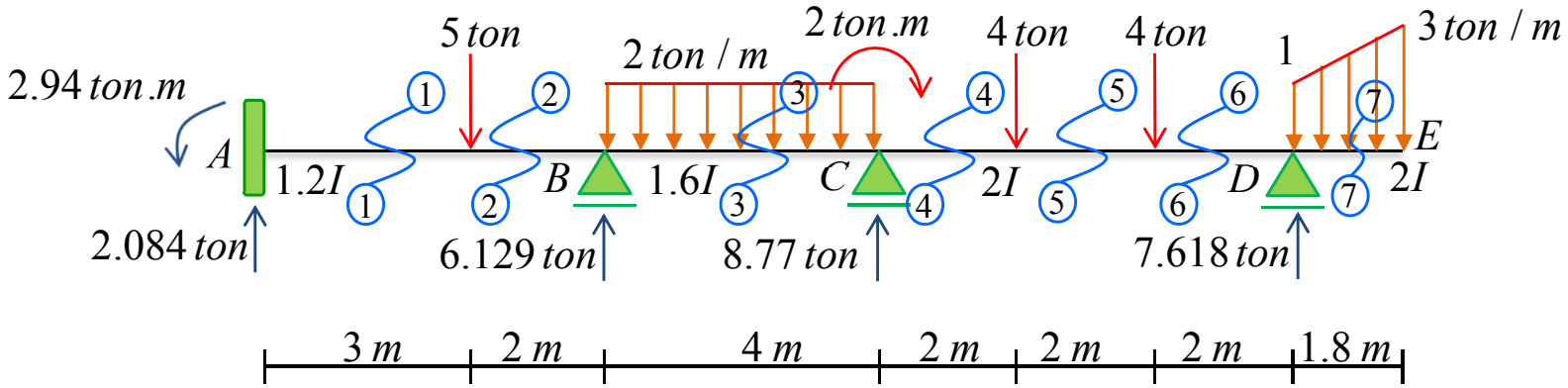
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - 2\times x + 6.129 - 5 + 2.084 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -2x + 3.213}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 3.213 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1.607m}$$

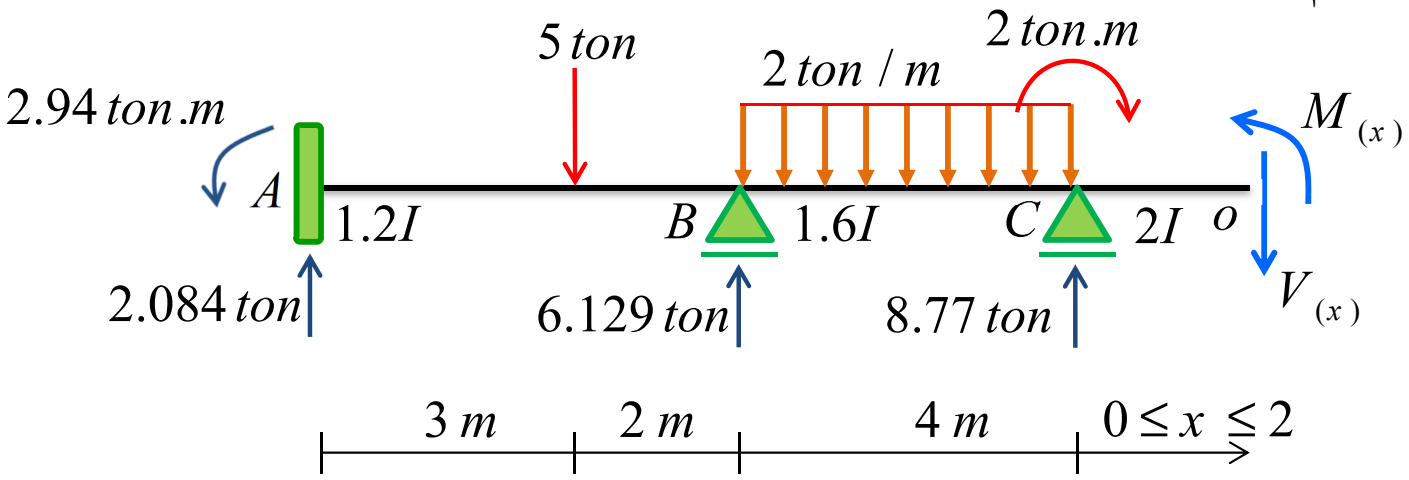
$$M_{(x=1.607)} = -(1.607)^2 + 3.213(1.607) - 2.52 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x=1.607)} = 0.061 ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 4-4 خواهیم داشت:



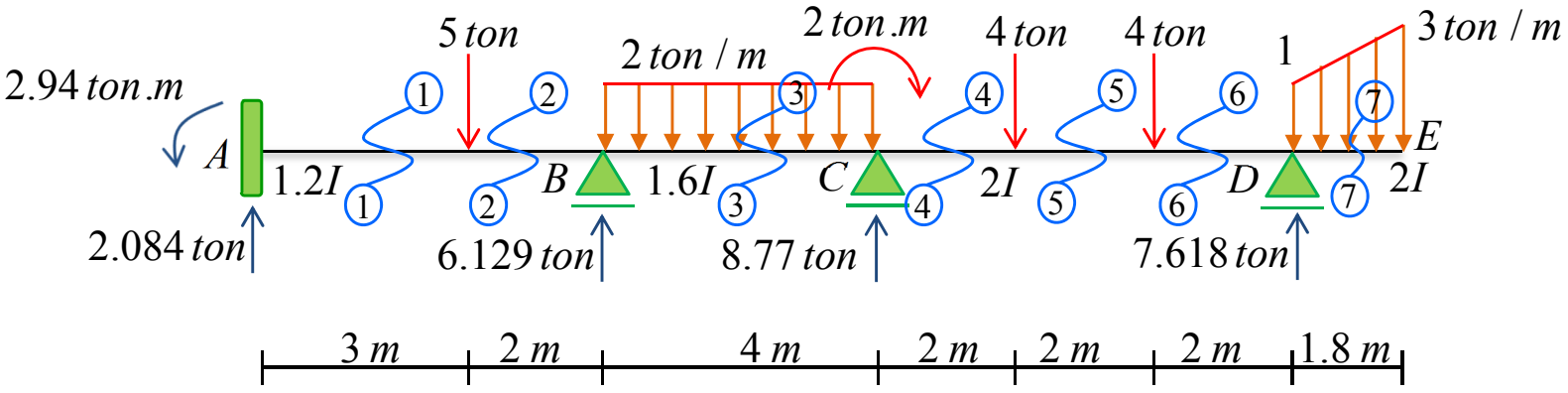
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 2 - 8.77\times x + 2\times 4\times(2+x) - 6.129\times(4+x) + 5\times(6+x)$$

$$+ 2.94 - 2.084\times(9+x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 3.983x - 3.668}$$

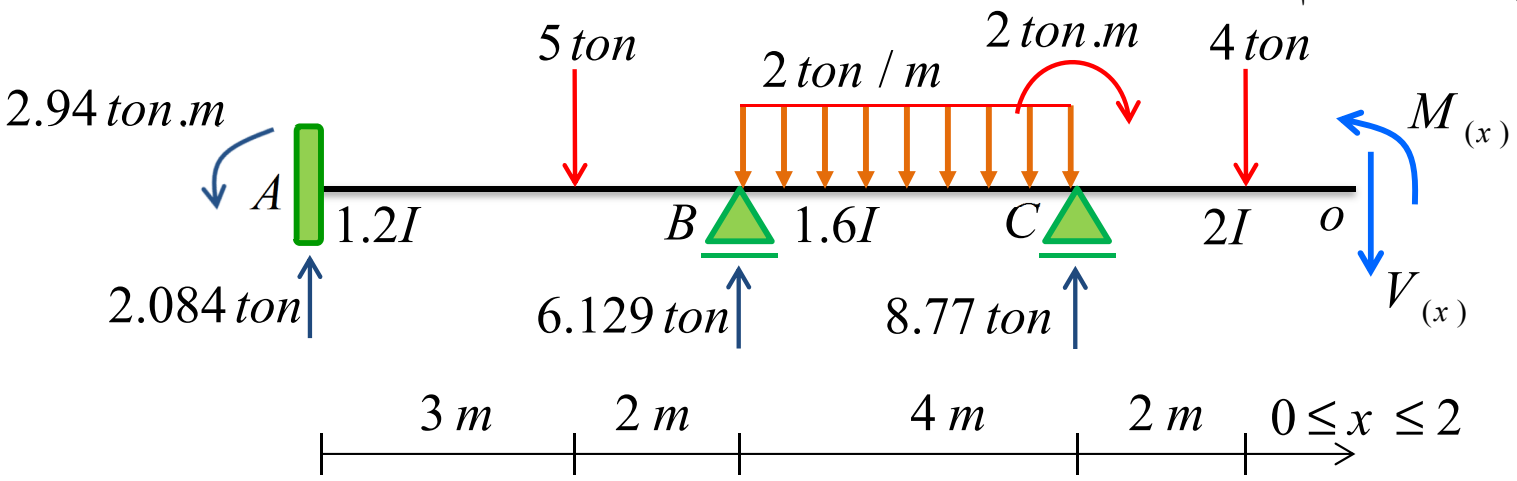
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 8.77 - 2\times 4 + 6.129 - 5 + 2.084 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 3.983\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 5-5 خواهیم داشت:

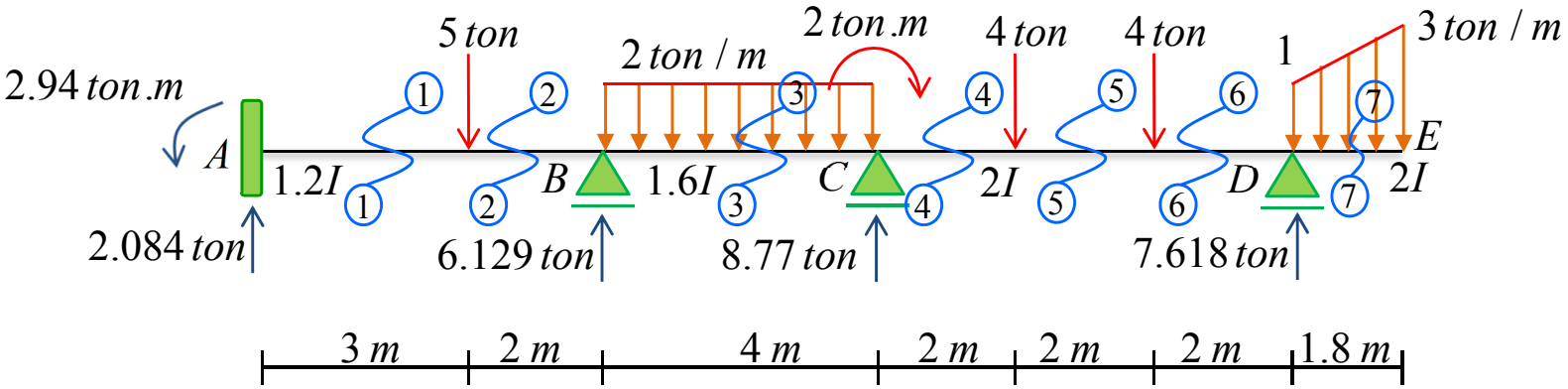


$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 4\times x - 2 - 8.77\times(2+x) + 2\times 4\times(4+x) - 6.129\times(6+x) + 5\times(8+x)$$
$$+ 2.94 - 2.084\times(11+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -0.017x + 4.298}$$

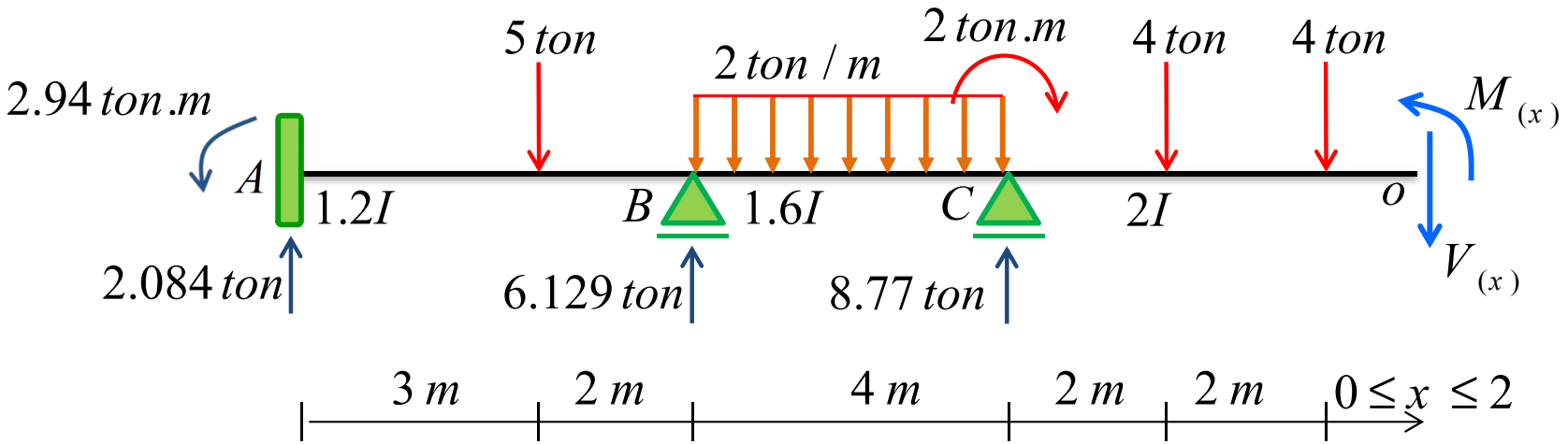
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - 4 + 8.77 - 2\times 4 + 6.129 - 5 + 2.084 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -0.017}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 6-6 خواهیم داشت:

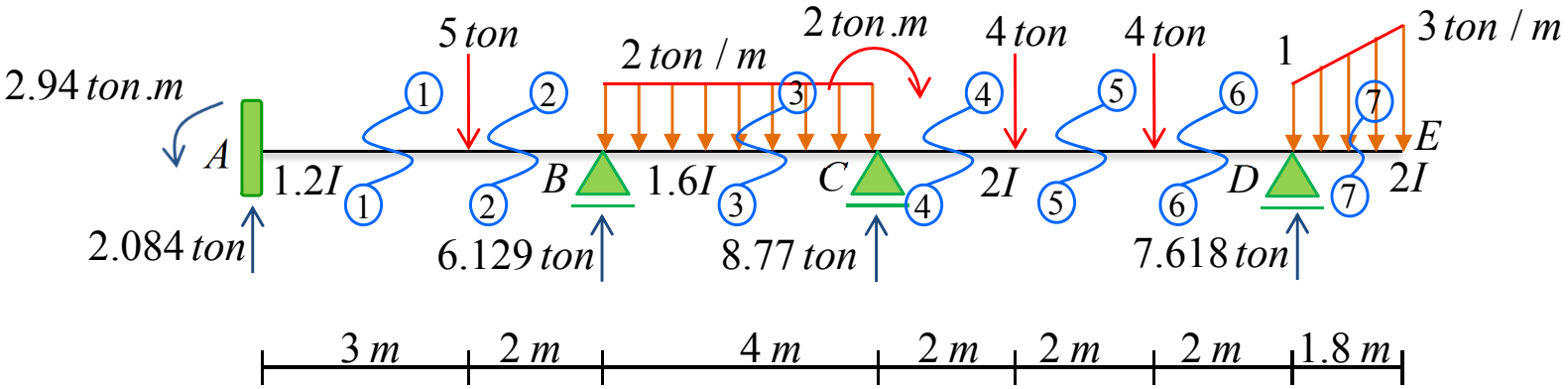


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 4\times x + 4\times(2+x) - 2 - 8.77\times(4+x) + 2\times 4\times(6+x) - 6.129\times(8+x)$$
$$+ 5\times(10+x) + 2.94 - 2.084\times(13+x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -4.017x + 4.264}$$

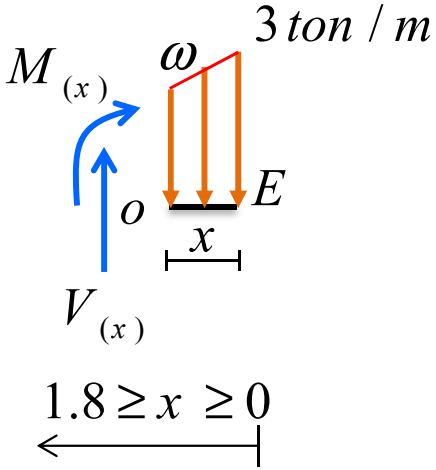
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 4 - 4 + 8.77 - 2\times 4 + 6.129 - 5 + 2.084 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -4.017\ ton}$$

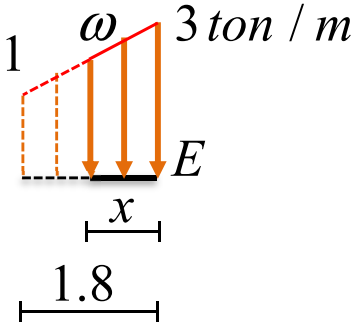
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 7-7 خواهیم داشت:





قضیه تالس $\Rightarrow$

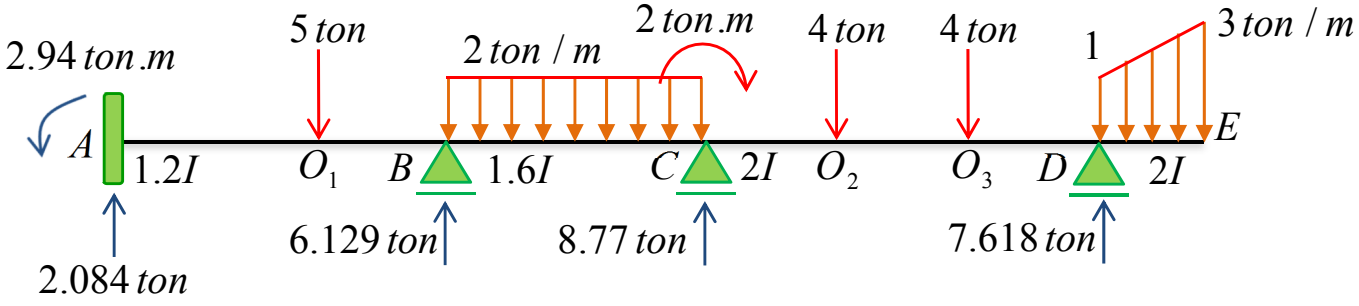
$$\frac{\omega-1}{3-1}=\frac{1.8-x}{1.8} \Rightarrow \boxed{\omega=3-\frac{x}{0.9}}$$

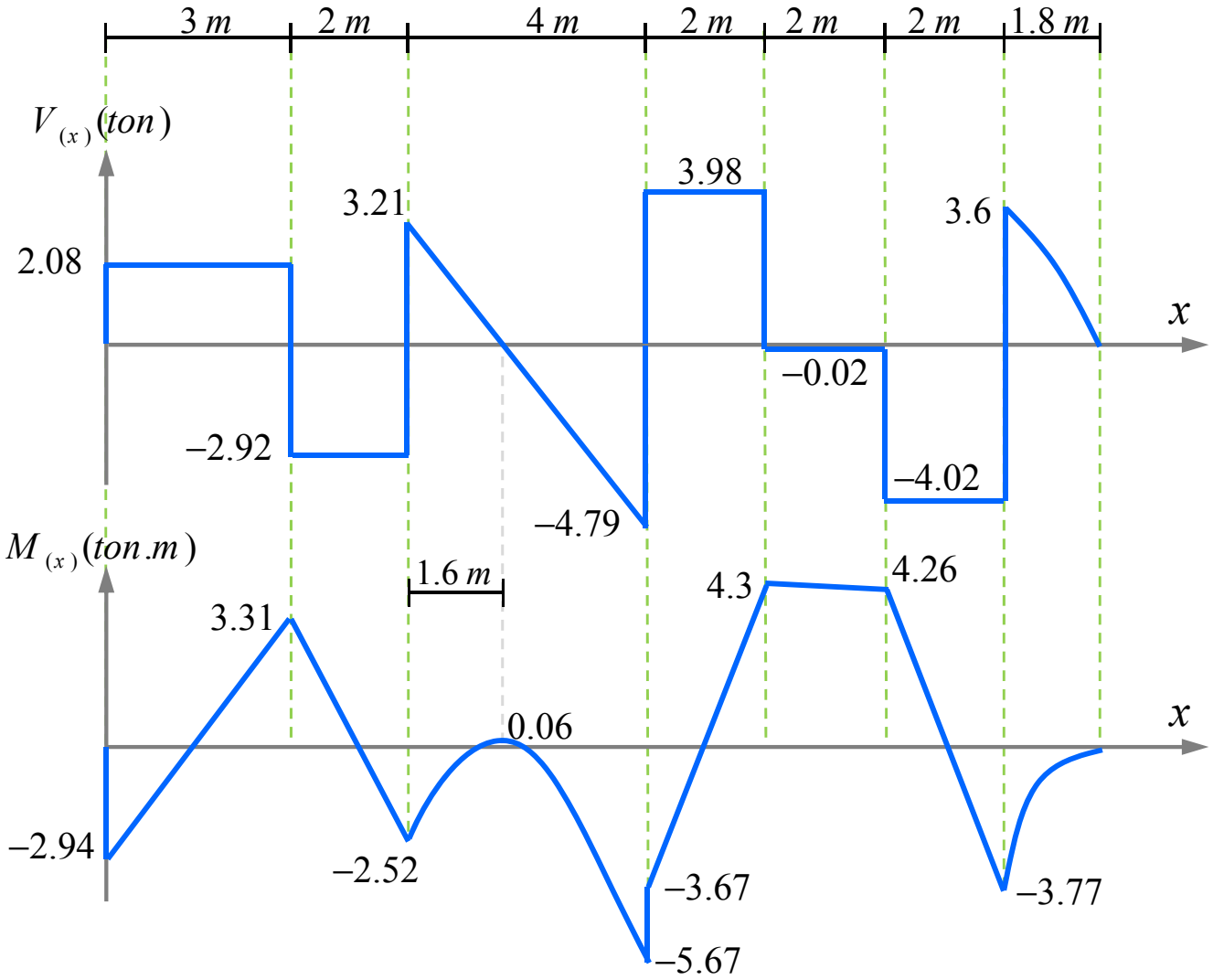
$$\sum M_o=0 \Rightarrow -M_{(x)}-\left(3-\frac{x}{0.9}\right)\times x\times\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(3-\left(3-\frac{x}{0.9}\right)\right)x\times\frac{2}{3}x=0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)}=\frac{5x^3}{27}-\frac{3x^2}{2}}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow V_{(x)}-\frac{1}{2}\left(3-\frac{x}{0.9}+3\right)\times x=0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)}=-\frac{x^2}{1.8}+3x}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 3-





$AO_1: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = 2.084\,ton$

$O_1B: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -2.916\,ton$

$BC: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -2x + 3.213$

$CO_2: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 3.983\,ton$

$O_2O_3: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -0.017\,ton$

$O_3D: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -4.017\,ton$

$ED: \quad 1.8 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = -\frac{x^2}{1.8} + 3x$

$AO_1: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = 2.084x - 2.94$

$O_1B: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -2.916x + 3.312$

$BC: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -x^2 + 3.213x - 2.52$

$CO_2: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 3.983x - 3.668$

$O_2O_3: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -0.017x + 4.298$

$O_3D: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -4.017x + 4.264$

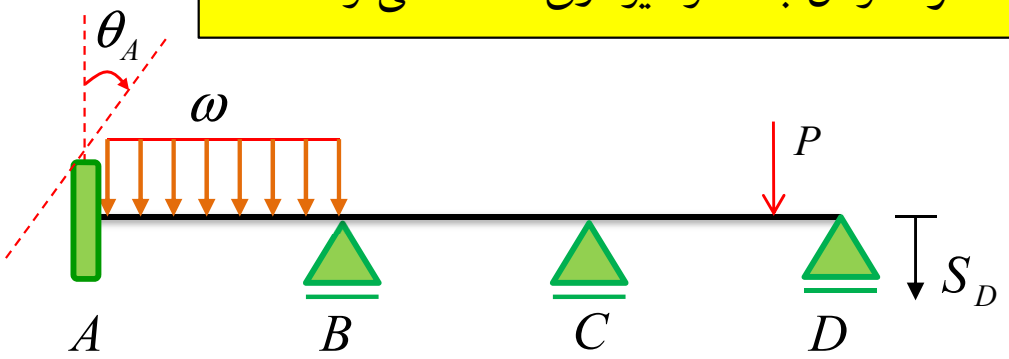
$ED: \quad 1.8 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = \frac{5x^3}{27} - \frac{3x^2}{2}$

ETABS File Name: **08-Example-03.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

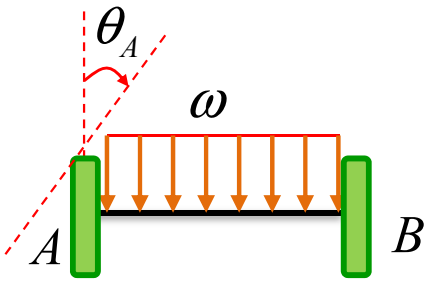
اثر حرکت تکیه‌گاهی

نکته: در حالتی که در سازه نشست یا دوران تکیه‌گاهی ایجاد شود اثر آن به لنگر گیرداری اضافه می‌گردد.



به طور مثال در شکل زیر تکیه‌گاه گیردار A به اندازه θ_A دوران داشته است. همچنین تکیه‌گاه D نیز در راستای قائم به اندازه S_D نشست دارد.

برای محاسبه لنگر گیرداری تیرهای AB و CD رابطه شیب-افت برای این تیرها در حالت گیردار بودن تکیه‌گاه‌های ابتدا و انتهای نوشته می‌شود. در حالتی که در تیر حرکت تکیه‌گاهی وجود داشته باشد لنگر گیرداری برابر با $\bar{M}_{AB}$ است که به صورت زیر محاسبه می‌گردد:



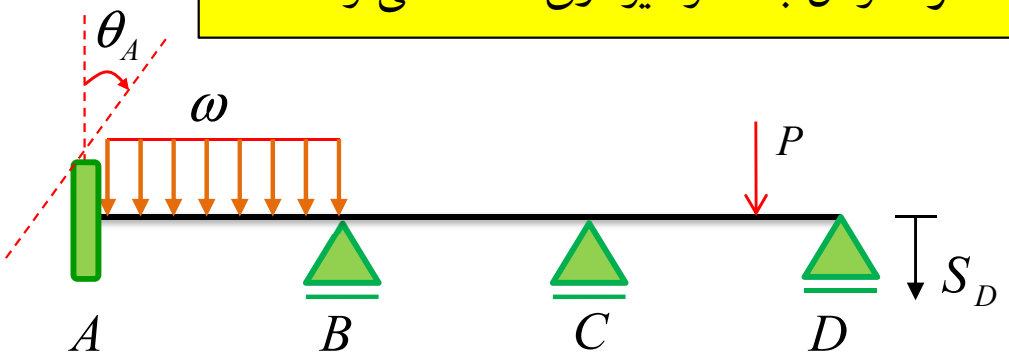
$$\bar{M}_{AB} = \frac{4EI}{\ell}\theta_A + \frac{2EI}{\ell}\overset{0}{\theta_B} - \frac{6EI}{\ell}\overset{0}{\psi_{AB}} + FEM_{AB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{AB} = \frac{4EI}{\ell}\theta_A + FEM_{AB}}$$

$$\bar{M}_{BA} = \frac{4EI}{\ell}\overset{0}{\theta_B} + \frac{2EI}{\ell}\theta_A - \frac{6EI}{\ell}\overset{0}{\psi_{BA}} + FEM_{BA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{BA} = \frac{2EI}{\ell}\theta_A + FEM_{BA}}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

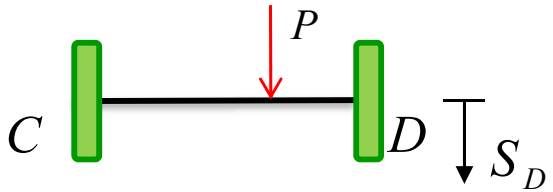
اثر حرکت تکیه‌گاهی

نکته: در حالتی که در سازه نشست یا دوران تکیه‌گاهی ایجاد شود اثر آن به لنگر گیرداری اضافه می‌گردد.



به طور مثال در شکل زیر تکیه‌گاه گیردار A به اندازه θ_A دوران داشته است. همچنین تکیه‌گاه D نیز در راستای قائم به اندازه S_D نشست دارد.

برای محاسبه لنگر گیرداری تیرهای AB و CD رابطه شیب-افت برای این تیرها در حالت گیردار بودن تکیه‌گاه‌های ابتدا و انتهای نوشته می‌شود. در حالتی که در تیر حرکت تکیه‌گاهی وجود داشته باشد لنگر گیرداری برابر با $\bar{M}_{AB}$ است که به صورت زیر محاسبه می‌گردد:



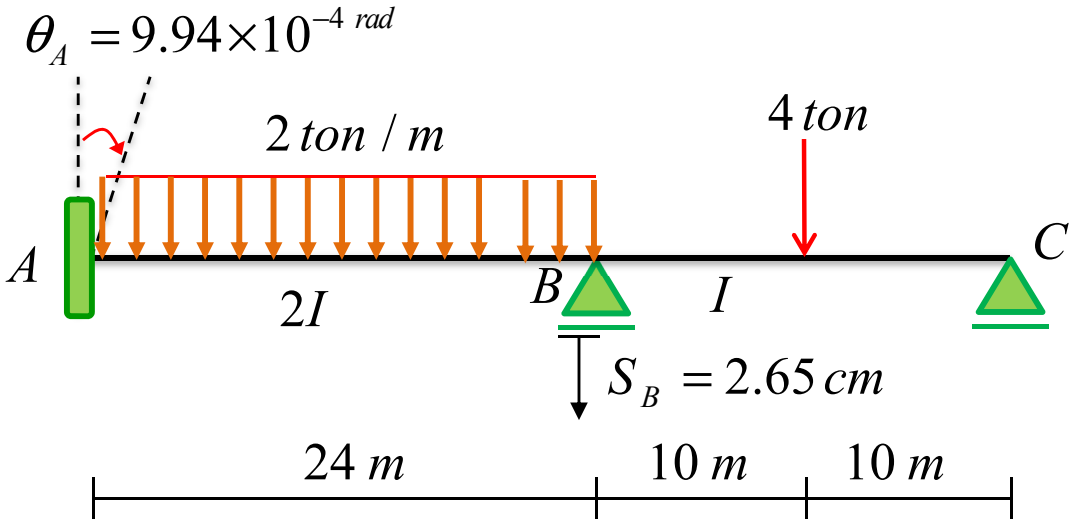
$$\bar{M}_{CD} = \frac{4EI}{\ell}\overset{0}{\theta_C} + \frac{2EI}{\ell}\overset{0}{\theta_D} - \frac{6EI}{\ell}\psi_{CD} + FEM_{CD} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{CD} = -\frac{6EI}{\ell}\psi_{CD} + FEM_{CD}}$$

$$\bar{M}_{DC} = \frac{4EI}{\ell}\overset{0}{\theta_D} + \frac{2EI}{\ell}\overset{0}{\theta_C} - \frac{6EI}{\ell}\psi_{DC} + FEM_{DC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{DC} = -\frac{6EI}{\ell}\psi_{DC} + FEM_{DC}}$$

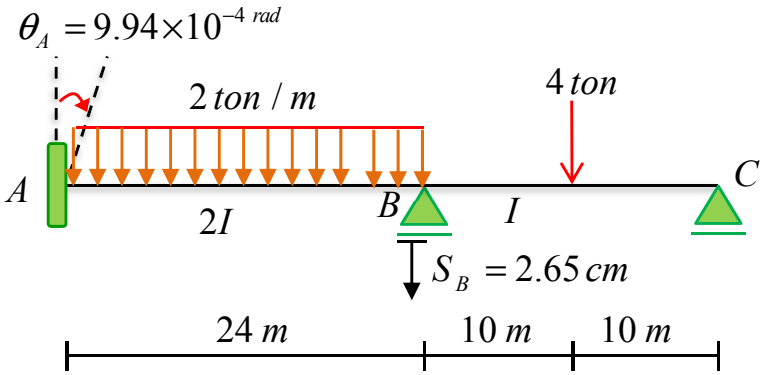
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

مثال 4- در تیر نشان داده شده تکیه‌گاه A به اندازه $\theta_A = 9.94\times10^{-4}\ rad$ رادیان در جهت ساعتگرد دوران داشته است و علاوه بر آن تکیه‌گاه B نیز به اندازه $S_B = 2.65\,cm$ در جهت قائم به سمت پایین نشست می‌کند. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 125.79\times10^{3}\ \ ton.m^{2}$$



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



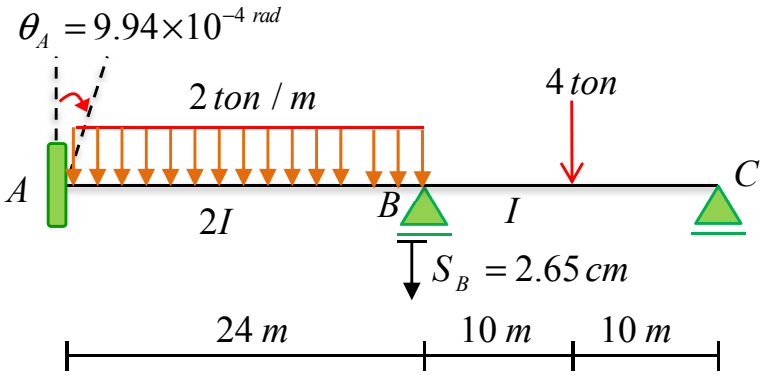
پاسخ مثال 4-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{AB} = -123.768\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



پاسخ مثال 4-

محاسبه لنگرهای گیرداری:

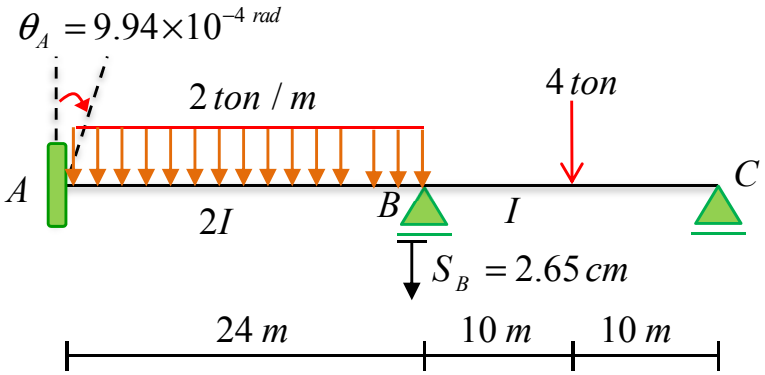
$$\bar{M}_{BA} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_A - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BA}\psi_{BA} + FEM_{BA}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BA} = 47.393\ ton.m}$$

$$\bar{M}_{BC} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_C - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{BC} + FEM_{BC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BC} = 40.002\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



پاسخ مثال 4-

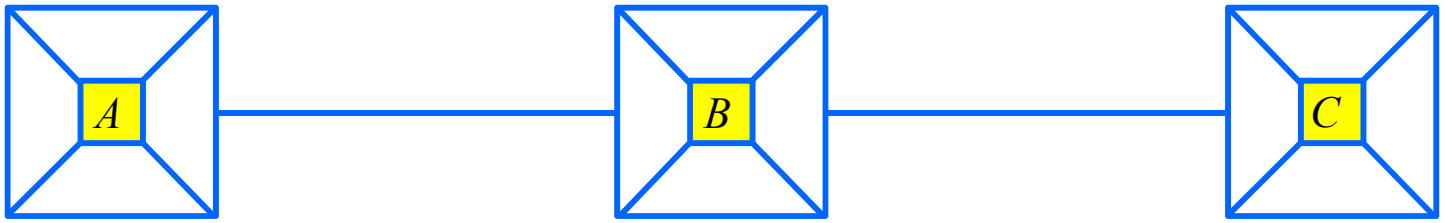
محاسبه لنگرهای گیرداری:

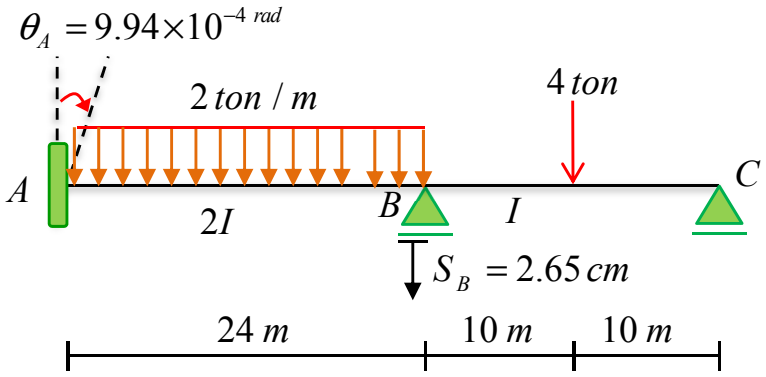
$$\bar{M}_{CB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_C + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{CB} + FEM_{CB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{CB} = 60.002\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 4- شروع پخش لنگر:





پاسخ مثال 4-

برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

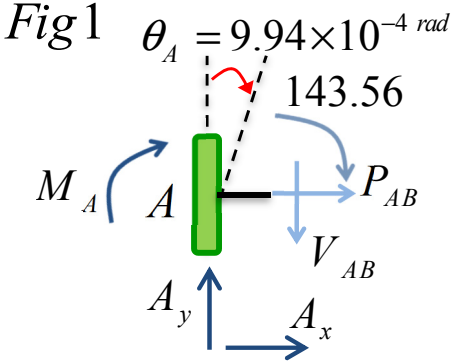


Fig 2

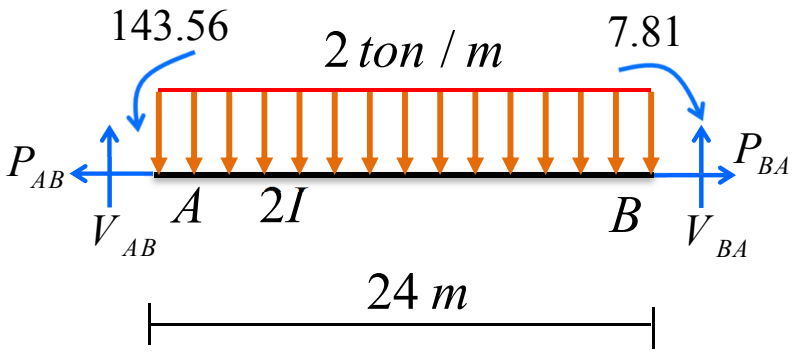


Fig 3

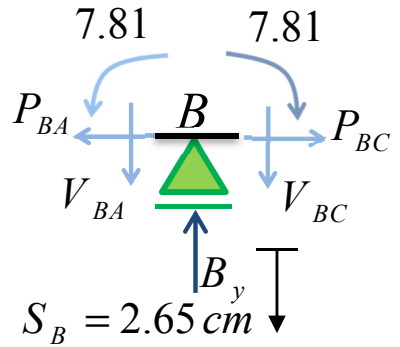


Fig 4

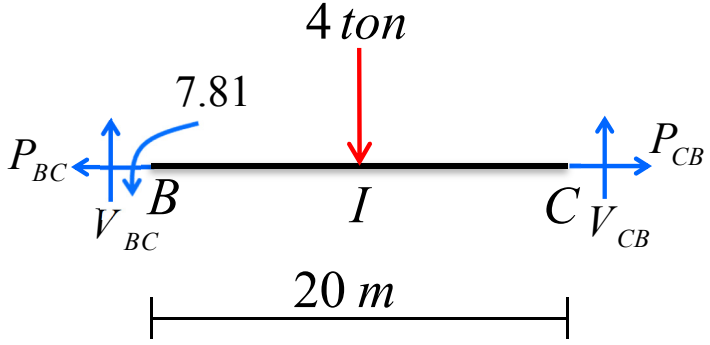
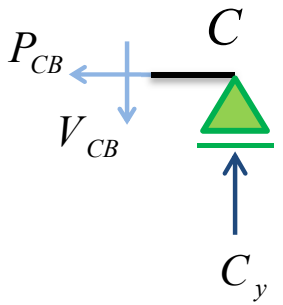


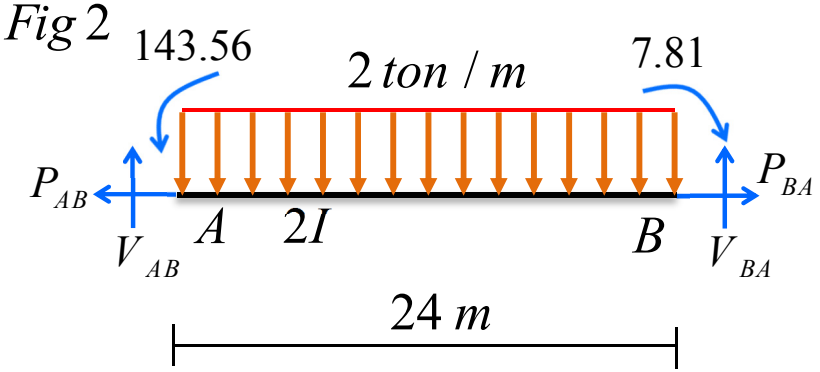
Fig 5



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 4-

Fig 2

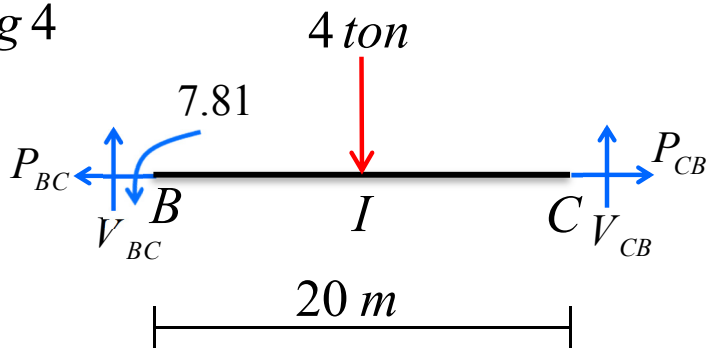


با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 143.56 - 2\times 24\times 12 - 7.81 + V_{BA}\times 24 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 18.34\, ton} \quad (4.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - 2\times 24 + V_{BA} = 0 \overset{(4.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 29.66\, ton} \quad (4.2)$$

Fig 4



با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 7.81 - 4\times 10 + V_{CB}\times 20 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = 1.61\, ton} \quad (4.3)$$

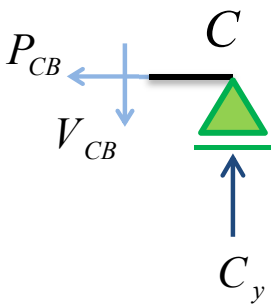
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} - 4 + V_{CB} = 0 \overset{(4.3)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 2.39\, ton} \quad (4.4)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 4-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

Fig 5



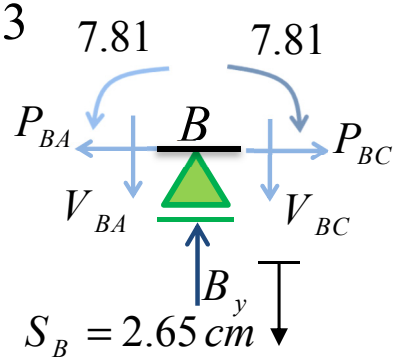
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{CB} = 0} \qquad (4.5)$$

$$(4.5) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{BC} &= P_{CB} = 0 \\ P_{AB} &= P_{BA} = 0 \end{aligned}} \qquad (4.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} \overset{(4.3)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 1.61\,ton}$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

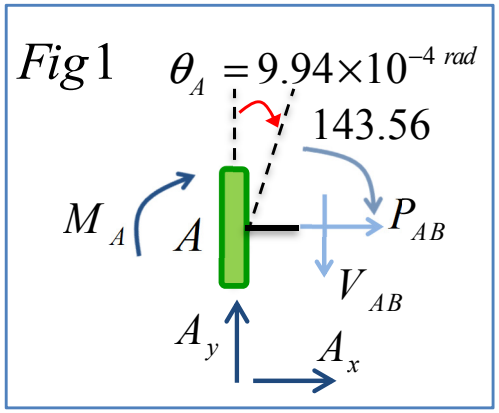
Fig 3



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(4.1)\,\&\,(4.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 20.73\,ton}$$

پاسخ مثال 4-

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:



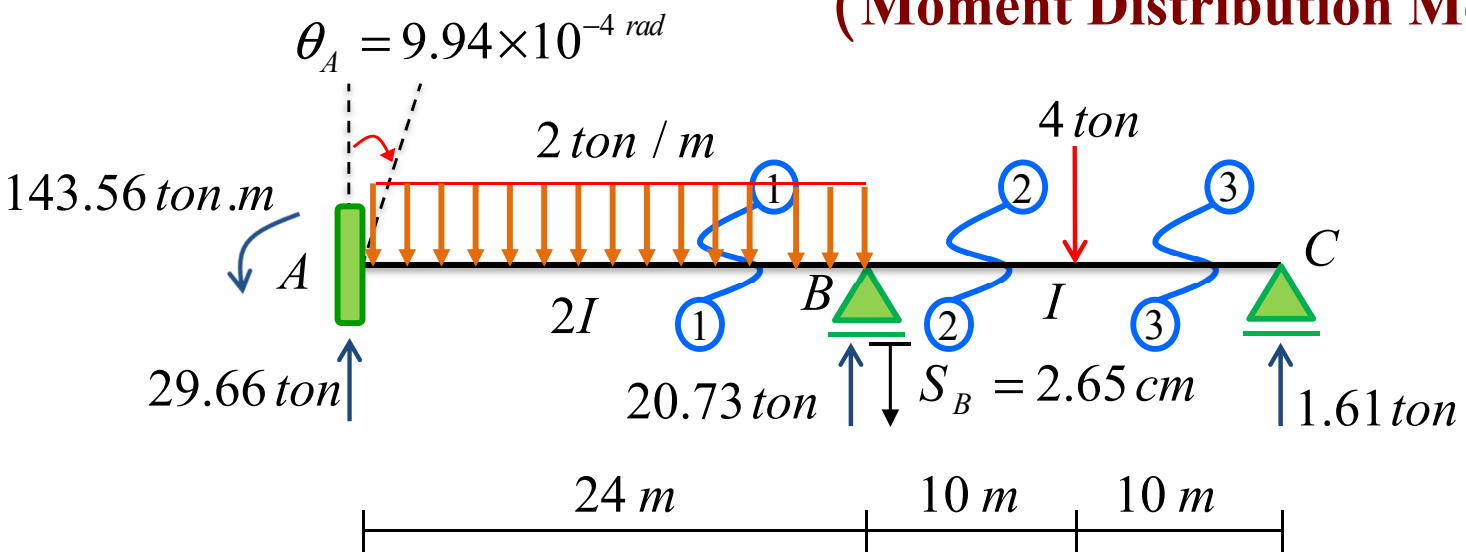
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(4.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 29.66\ ton}$$

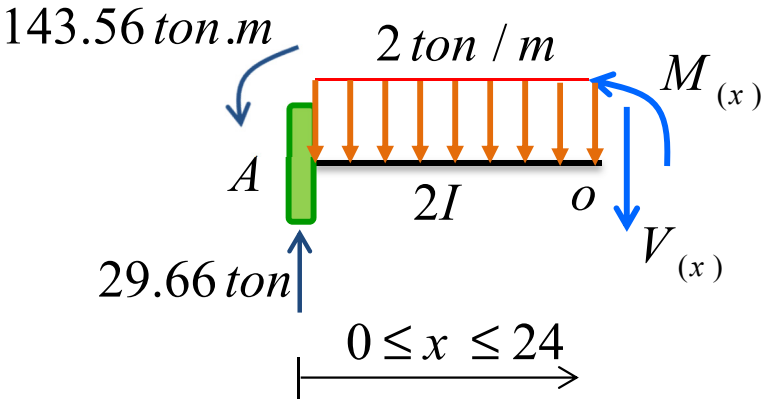
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(4.6)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 143.56 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -143.56\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 4-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 2\times x \times \frac{x}{2} + 143.56 - 29.66\times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 29.66x - 143.56}$$

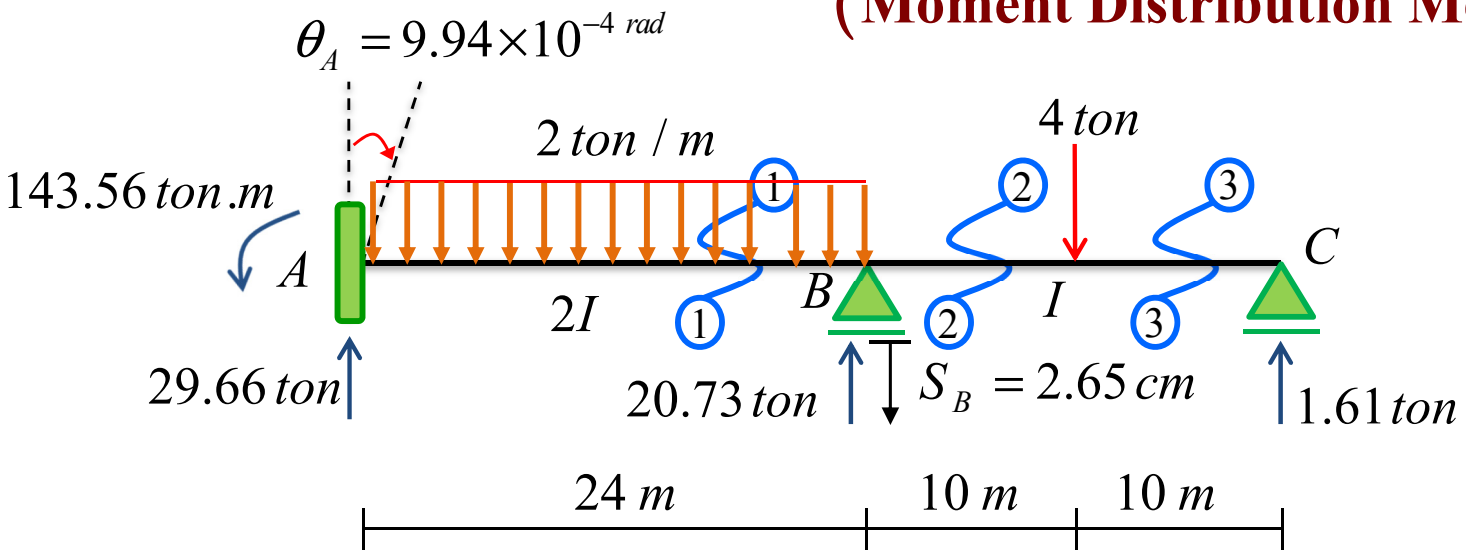
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 2\times x + 29.66 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2x + 29.66}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = 0 \Rightarrow -2x + 29.66 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 14.83\ m}$$

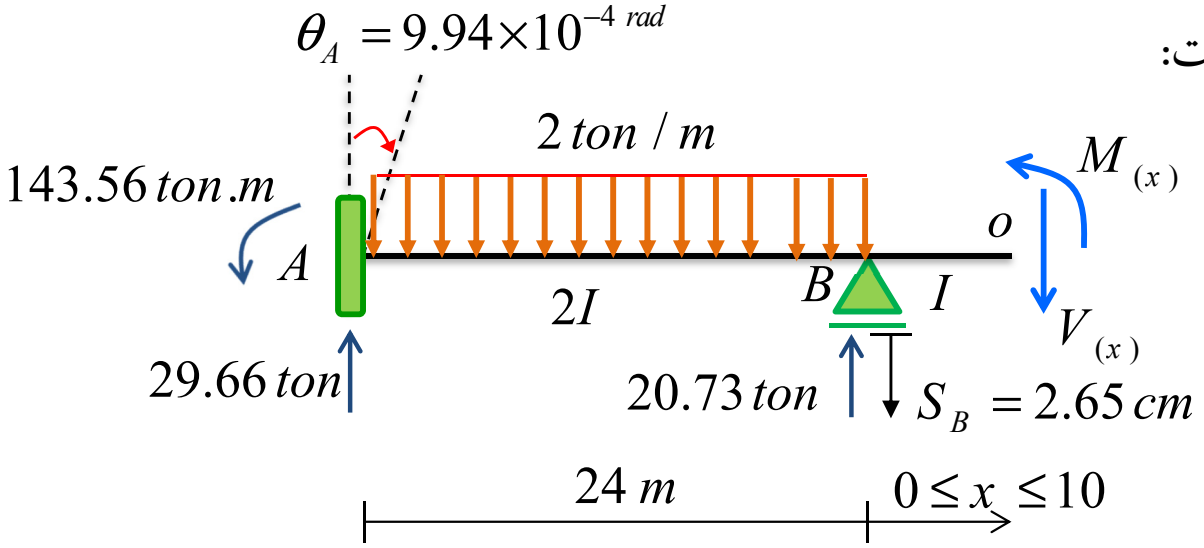
$$M_{(x=14.83)} = -(14.83)^2 + 29.66(14.83) - 143.56 \Rightarrow \boxed{M_{(x=14.83)} = 76.37\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 4-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



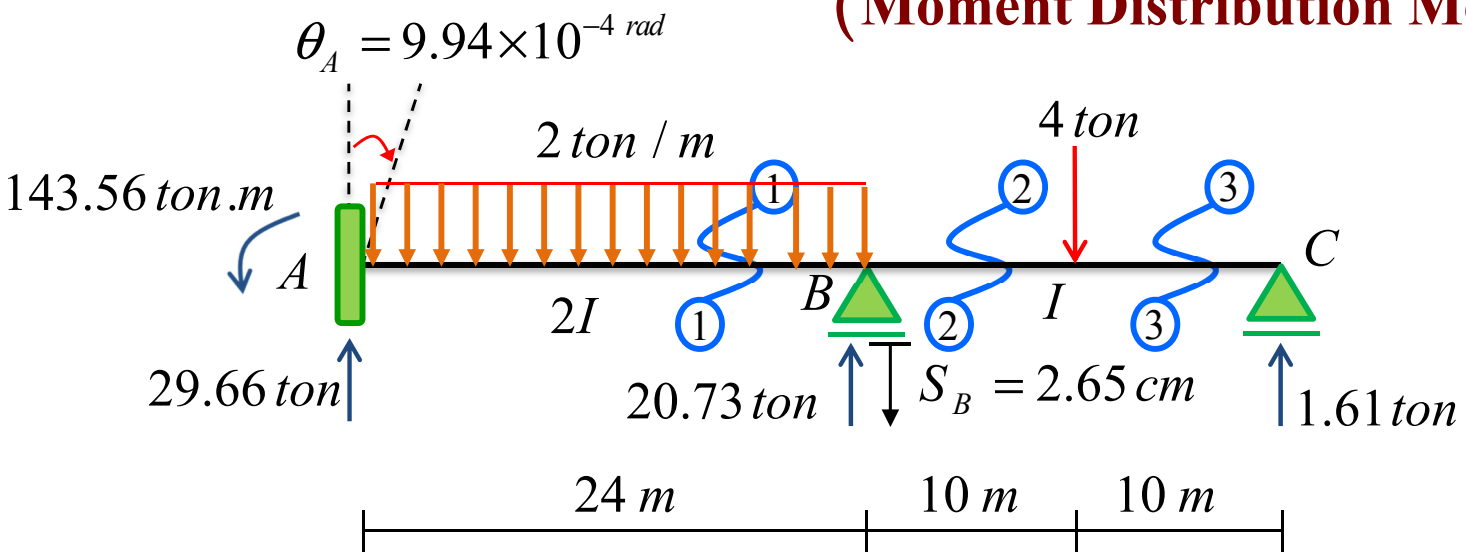
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 20.73\times x + 2\times24\times(12+x) - 29.66\times(24+x) + 143.56 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2.39x - 7.72}$$

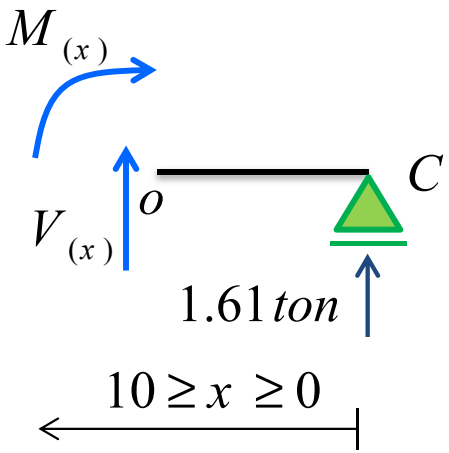
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 20.73 - 2\times24 + 29.66 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2.39\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 4-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:

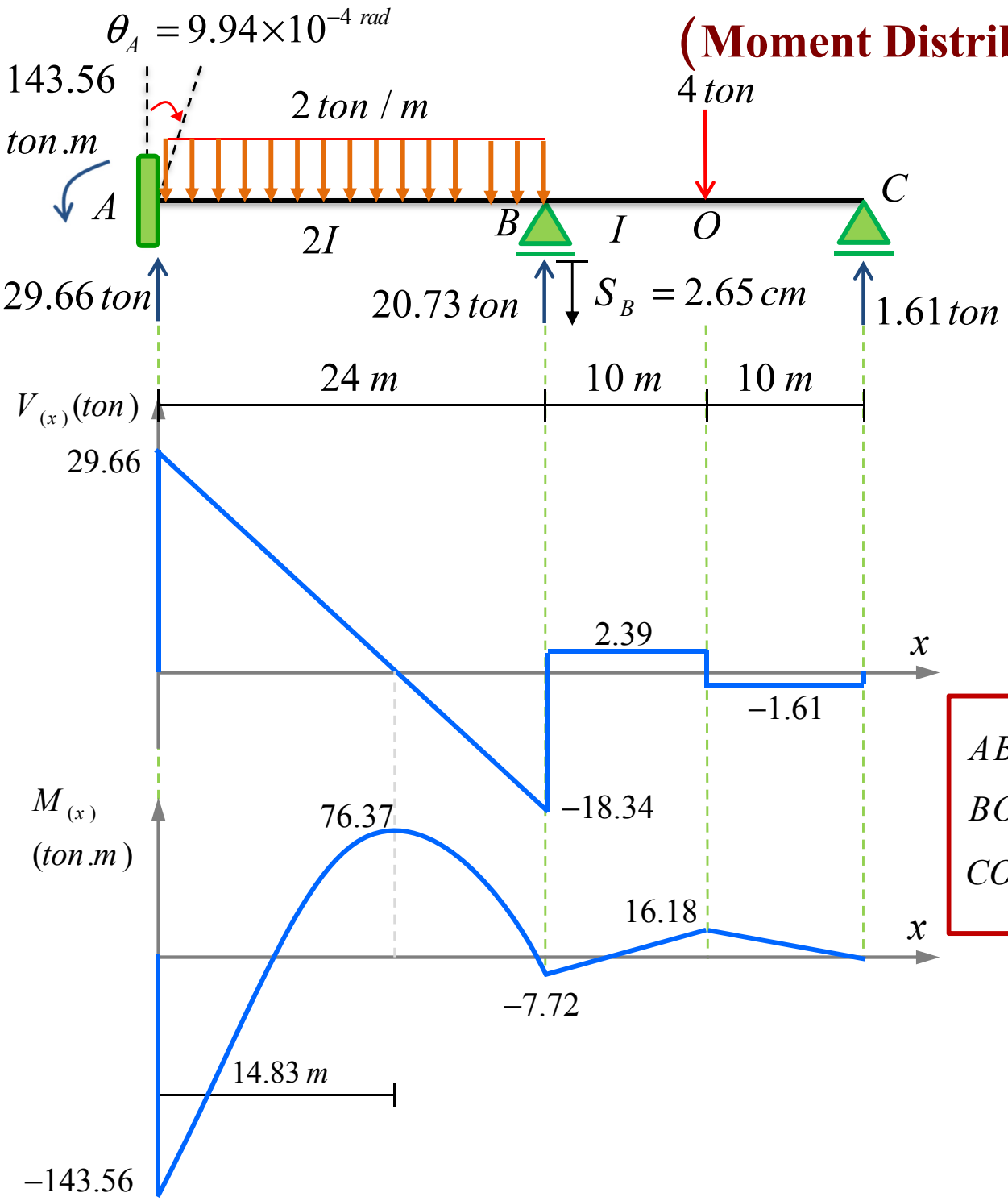


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 1.61\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 1.61x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 1.61 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -1.61\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 4-



$$AB: \quad 0 \le x \le 24 \quad V_{(x)} = -2x + 29.66$$

$$BO: \quad 0 \le x \le 10 \quad V_{(x)} = 2.39\ ton$$

$$CO: \quad 10 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = -1.61\ ton$$

$$AB: \quad 0 \le x \le 24 \quad M_{(x)} = -x^2 + 29.66x - 143.56$$

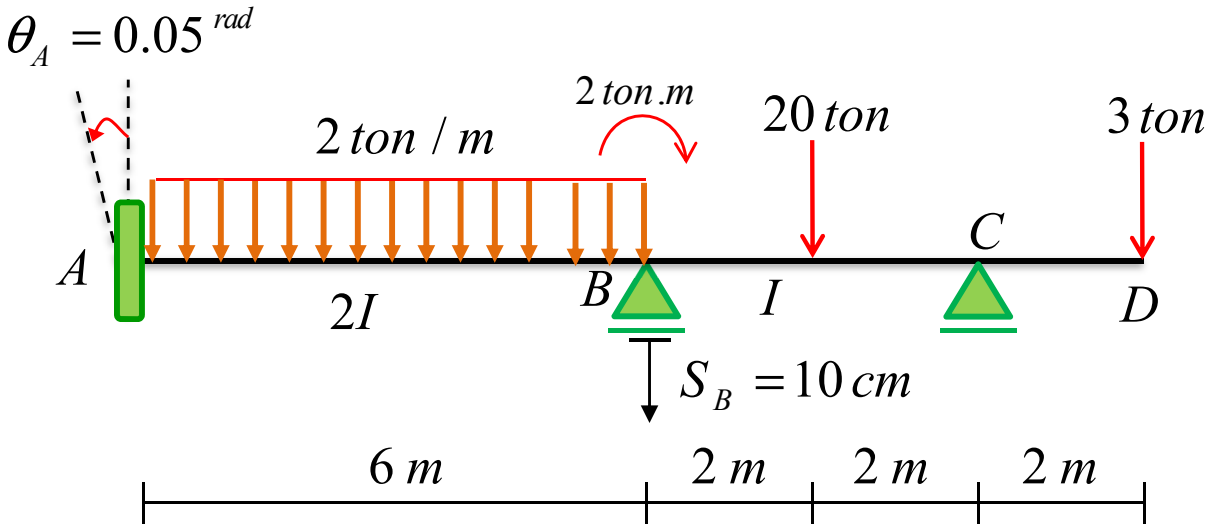
$$BO: \quad 0 \le x \le 10 \quad M_{(x)} = 2.39x - 7.72$$

$$CO: \quad 10 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = 1.61x$$

ETABS File Name: **08-Example-04.EDB**

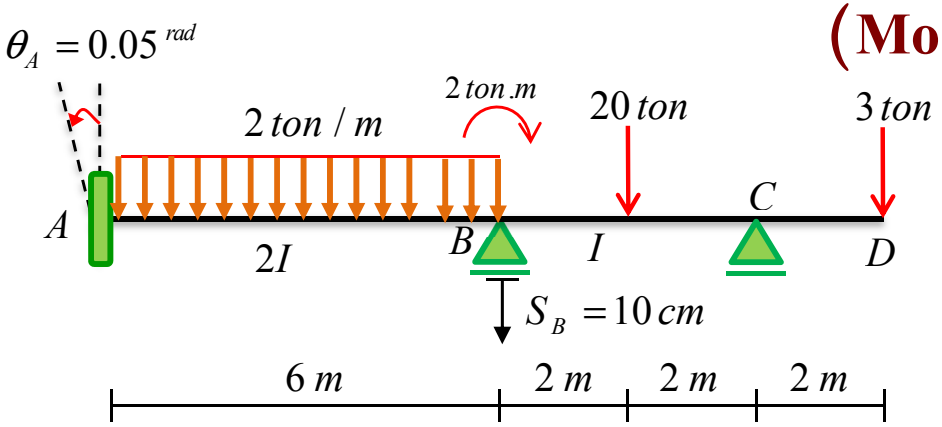
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

مثال 5- در تیر نشان داده شده تکیه‌گاه A به اندازه $\theta_A = 0.05^{rad}$ در جهت پاد ساعتگرد دوران داشته است و علاوه بر آن تکیه‌گاه B نیز به اندازه $S_B = 10\,cm$ در جهت قائم به سمت پایین نشست می‌کند. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید. $EI = 200\ ton.m^2$

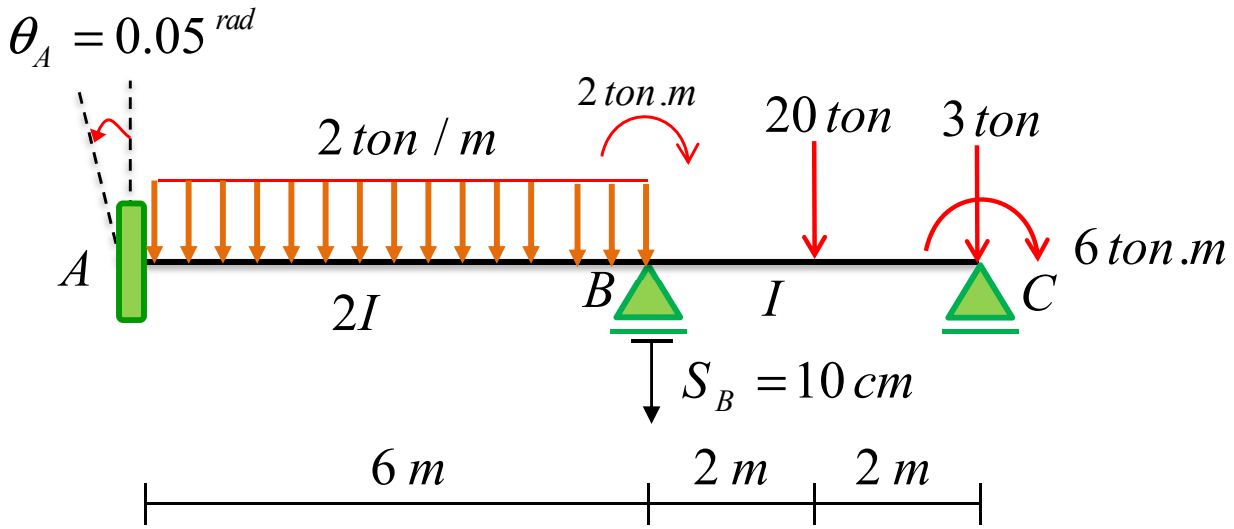


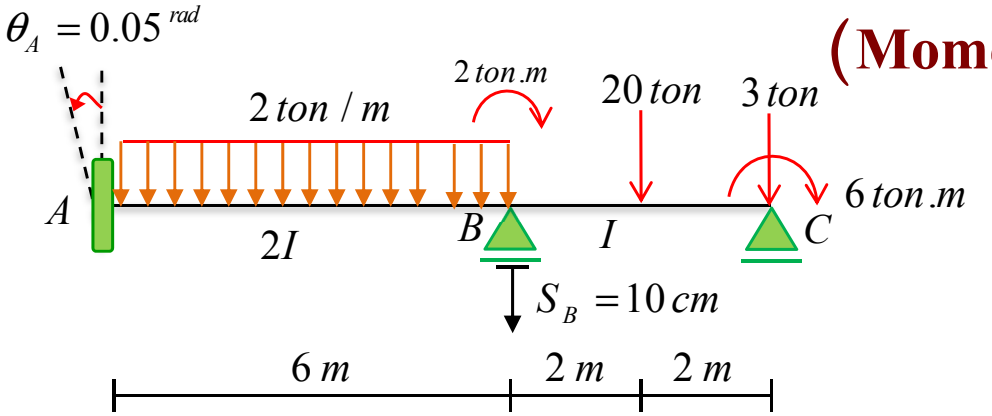
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-



نکته: از آن‌جایی که کنسول یک سازه معین است از این رو لنگر و نیروی معادل کنسول را به گره D منتقل نموده و کنسول وارد حل معادلات شیب-افت نمی‌شود.





پاسخ مثال 5-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

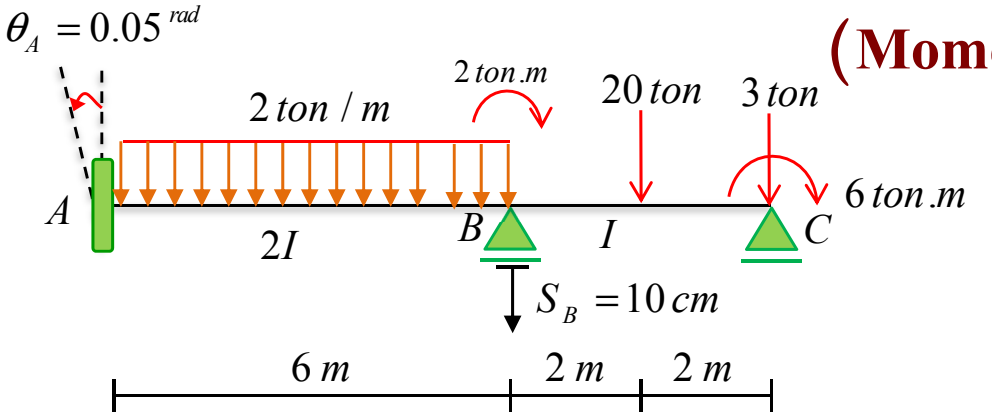
محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{AB} = -26\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-

محاسبه لنگرهای گیرداری:



$$\bar{M}_{BA} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_A - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BA}\psi_{BA} + FEM_{BA}$$

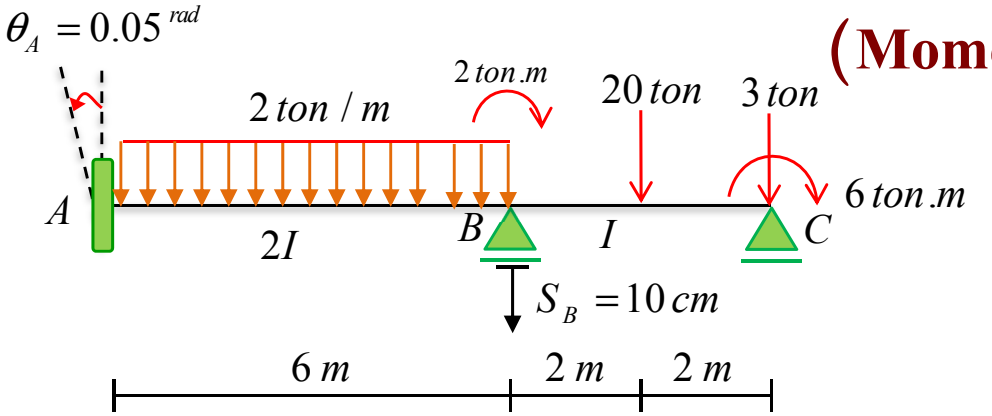
$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BA} = -\frac{22}{3}\ ton.m}$$

$$\bar{M}_{BC} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_C - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{BC} + FEM_{BC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BC} = -2.5\ ton.m}$$

پاسخ مثال 5-

محاسبه لنگرهای گیرداری:

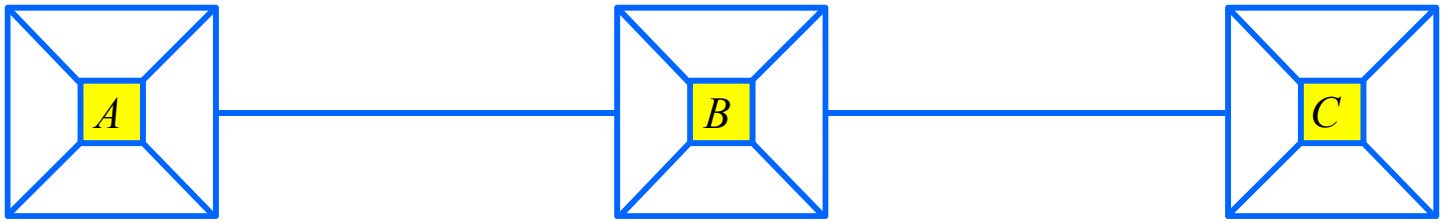


$$\bar{M}_{CB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_C + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{CB} + FEM_{CB}$$

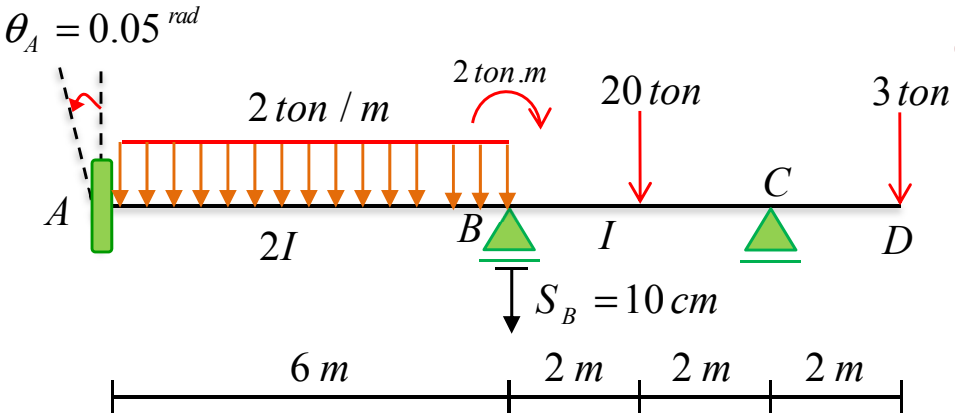
$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{CB} = 17.5\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5- شروع پخش لنگر:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



پاسخ مثال 5-

برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

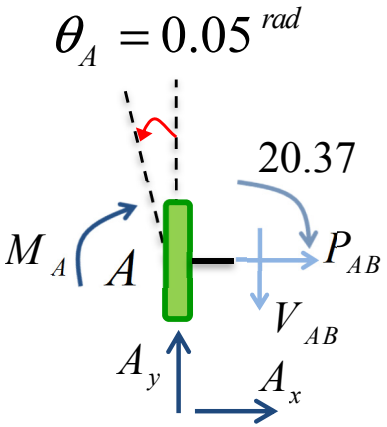


Fig 2

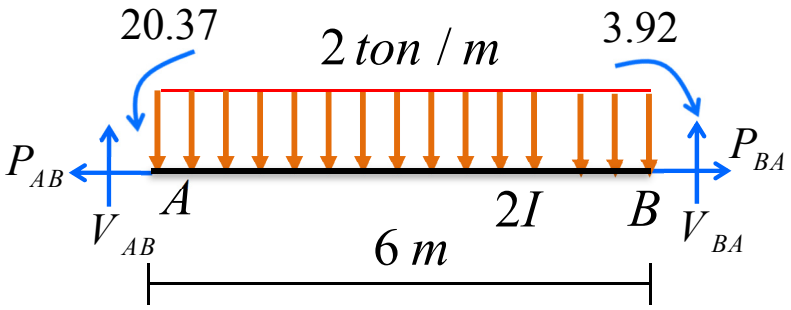


Fig 3

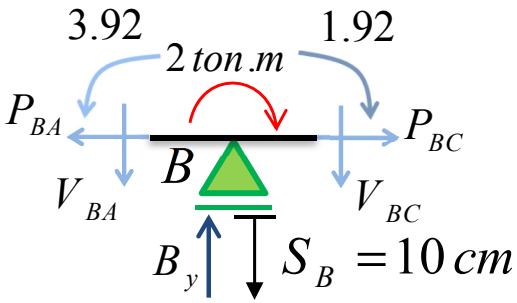


Fig 4

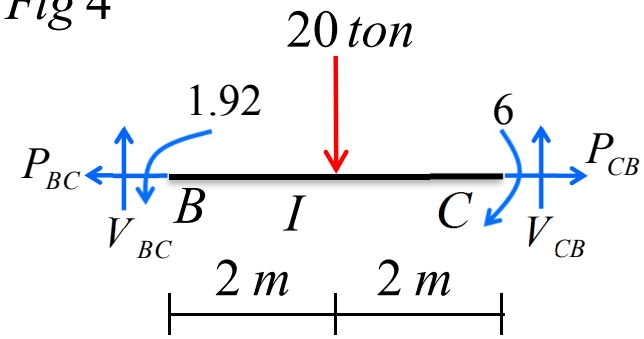


Fig 5

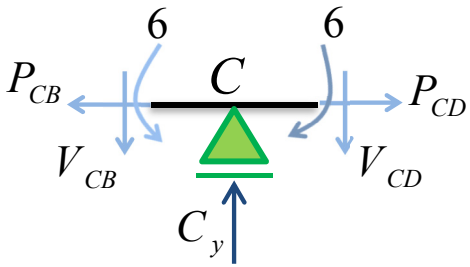
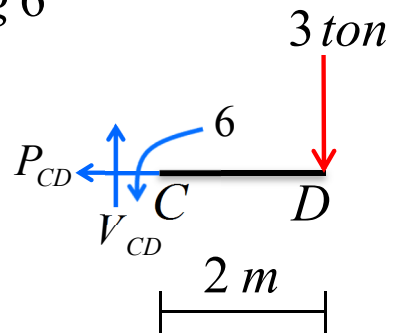


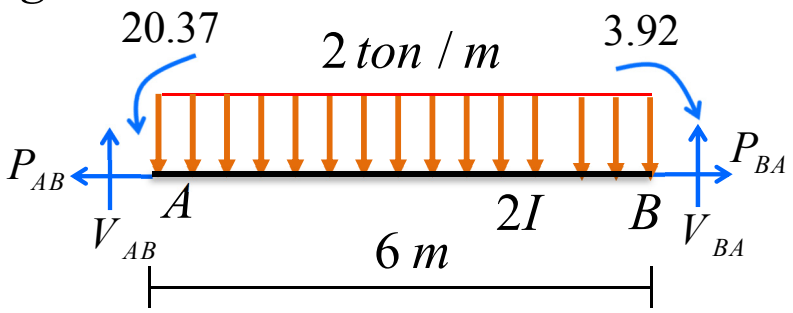
Fig 6



پاسخ مثال 5-

با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

Fig 2

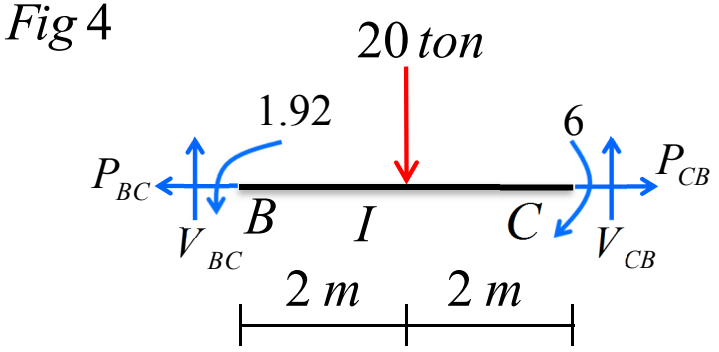


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -3.92 - 2\times 6\times \frac{6}{2} + 20.37 + V_{BA}\times 6 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 3.26\,ton} \quad (5.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - 2\times 6 + V_{BA} = 0 \overset{(5.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 8.74\,ton} \quad (5.2)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

Fig 4



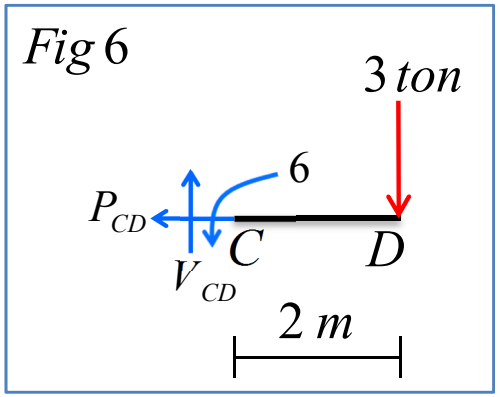
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -6 - 20\times 2 + 1.92 + V_{CB}\times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = 11.02\,ton} \quad (5.3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} - 20 + V_{CB} = 0 \overset{(5.3)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 8.98\,ton} \quad (5.4)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-

با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:

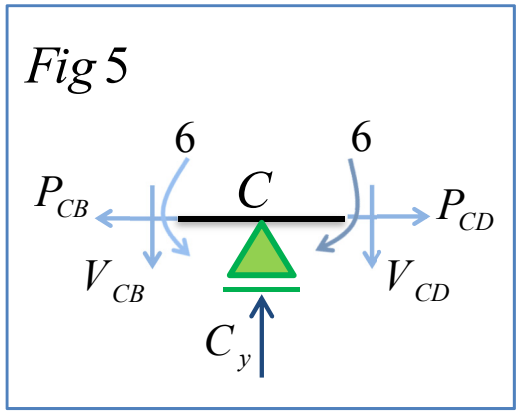


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{CD} = 0} \qquad (5.5)$$

$$(5.5) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} P_{BC} = P_{CB} = 0 \\ P_{AB} = P_{BA} = 0 \end{matrix}} \qquad (5.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD} - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CD} = 3\,ton} \qquad (5.7)$$

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:



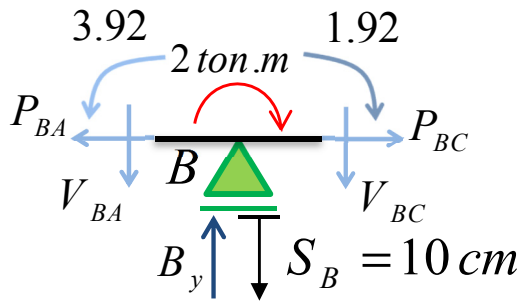
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} + V_{CD} \overset{(5.3)\,\&\,(5.7)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 14.02\,ton} \qquad (5.8)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

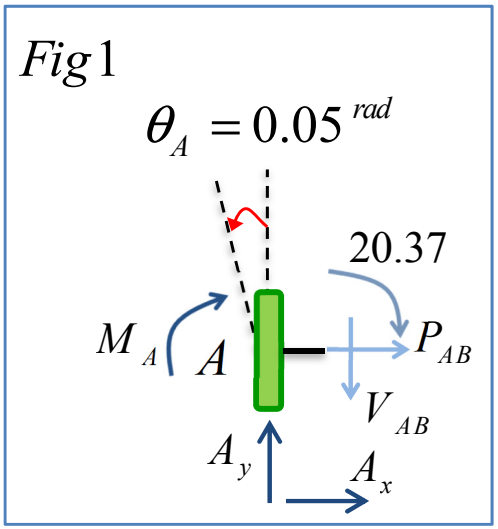
Fig 3



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(5.1)\,\&\,(5.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 12.24\,ton} \quad (5.9)$$

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1

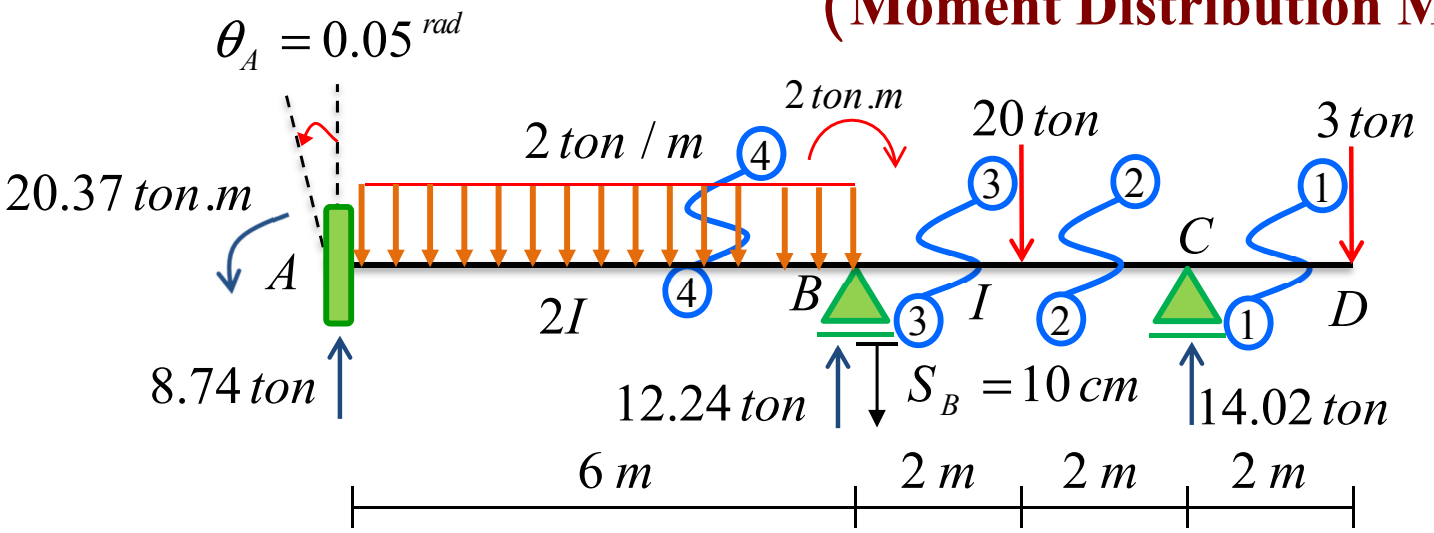


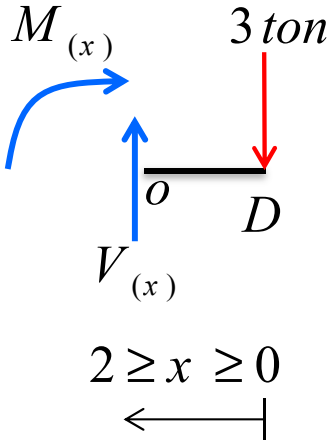
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(5.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 8.74\,ton} \quad (5.10)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(5.6)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0} \quad (5.11)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 20.37 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -20.37\,ton.m} \quad (5.12)$$

پاسخ مثال 5-





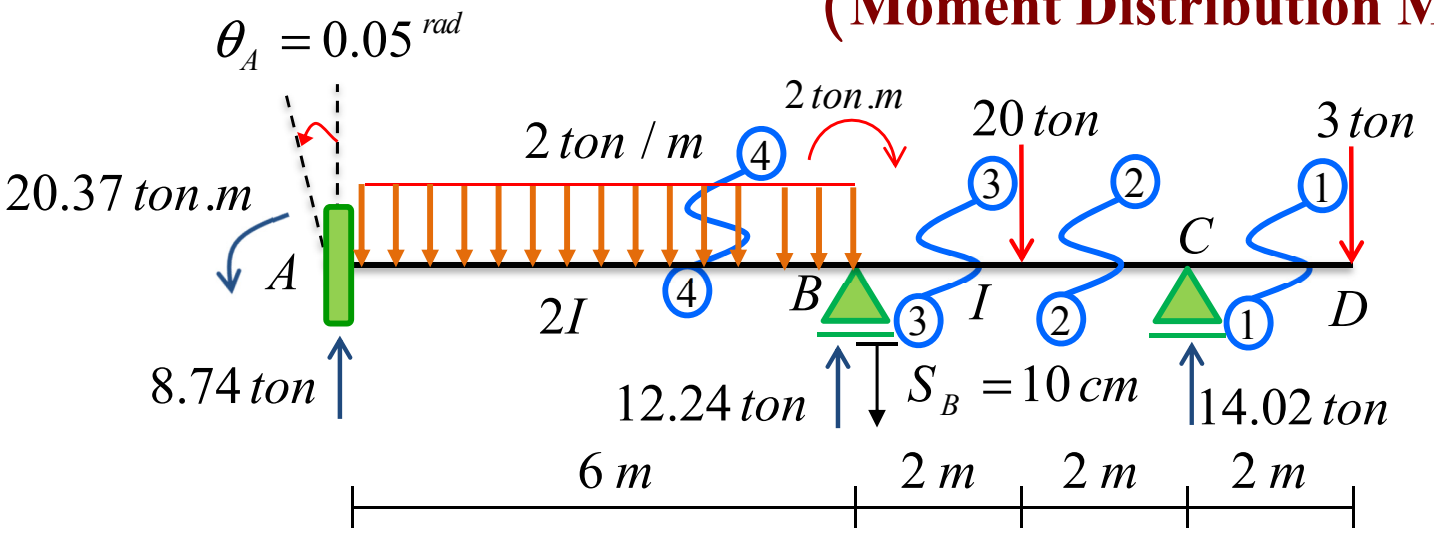
با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - 3 \times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -3x}$$

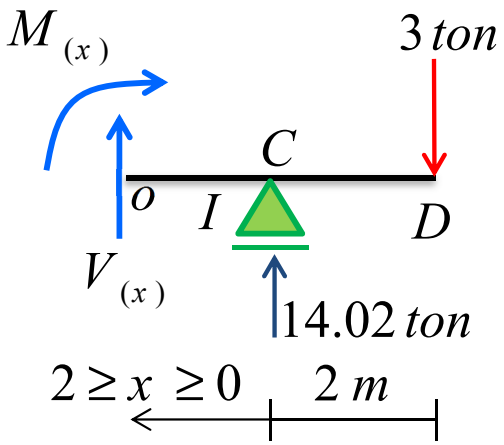
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 3\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 2-2 خواهیم داشت:

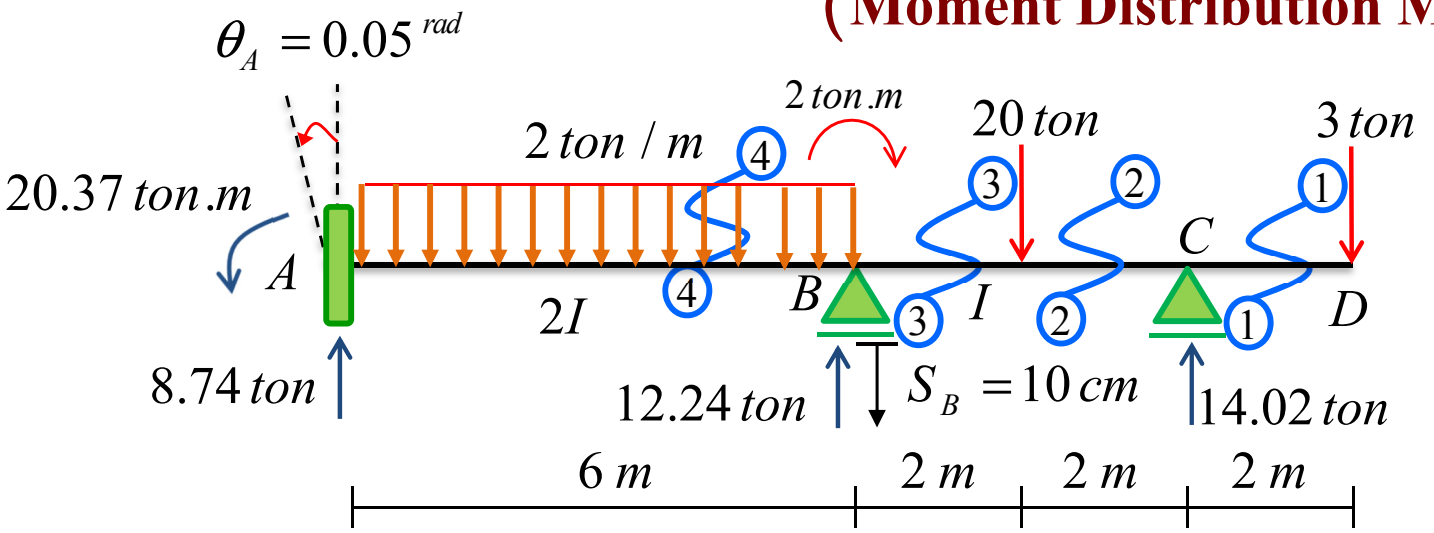


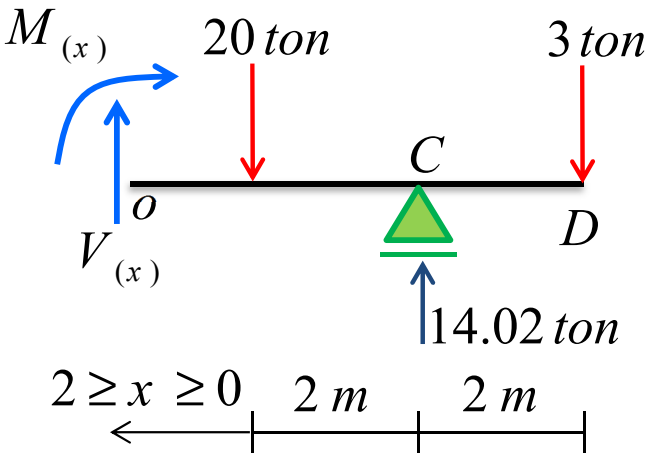
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - 3\times(2+x) + 14.02\times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 11.02x - 6}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} + 14.02 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -11.02\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-





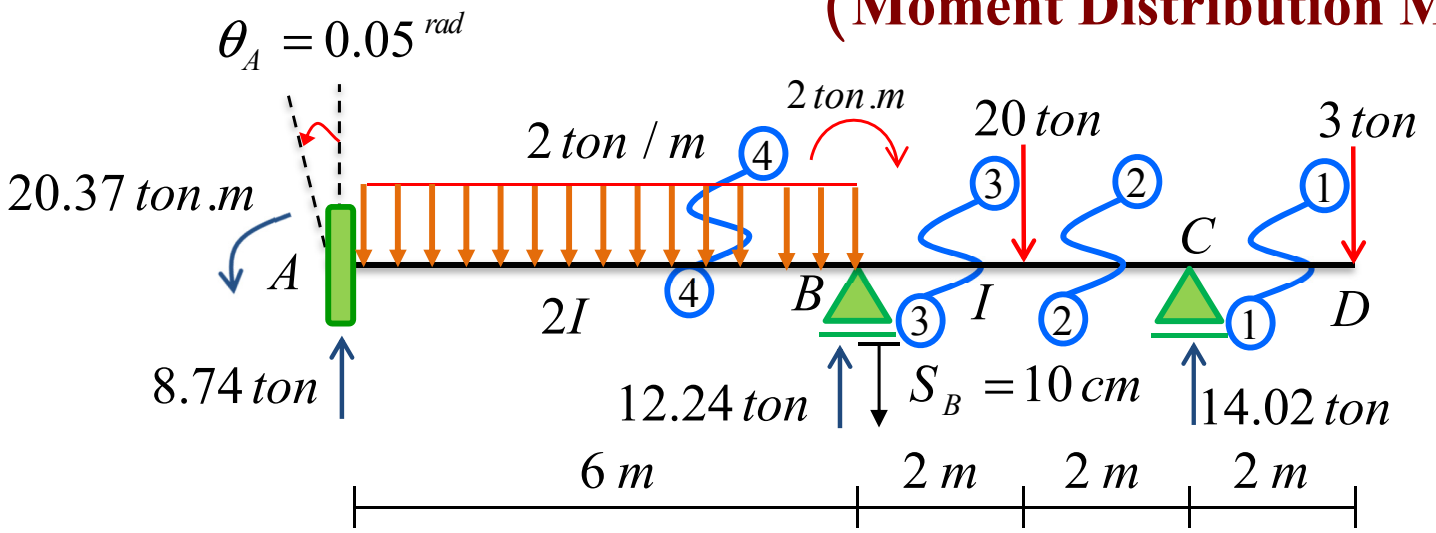
با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:

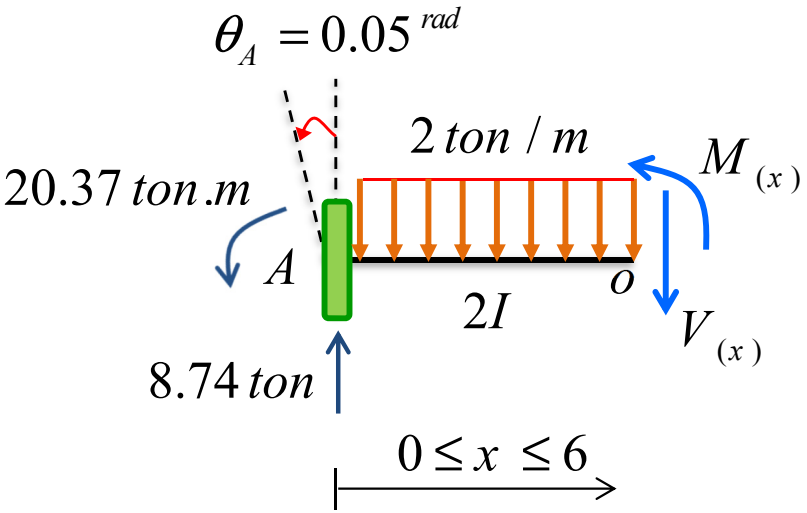
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 3\times(4+x) + 14.02\times(2+x) - 20\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -8.98x + 16.04}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 20 + 14.02 - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 8.98\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 4-4 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 2\times x \times \frac{x}{2} + 20.37 - 8.74\times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 8.74x - 20.37}$$

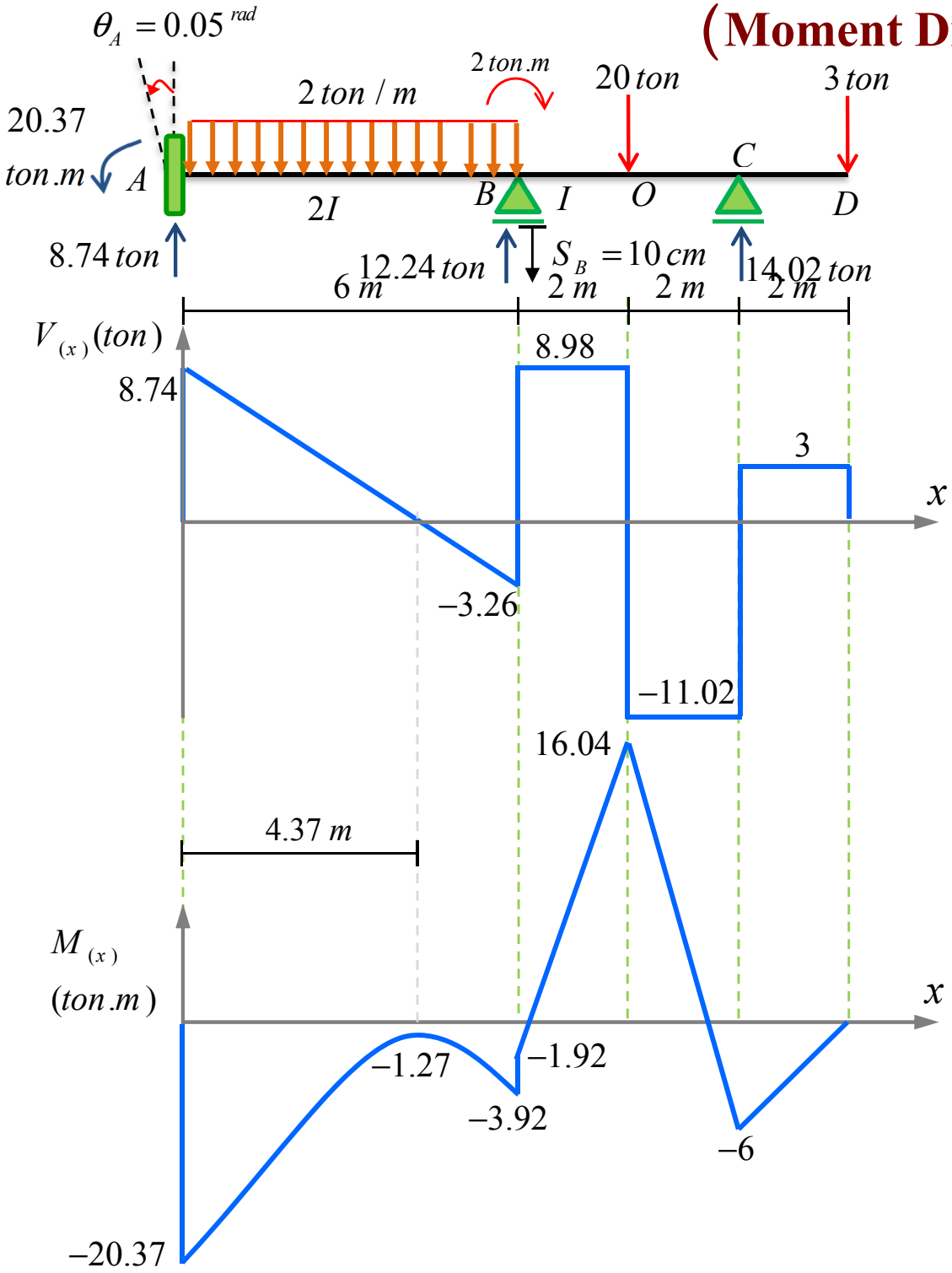
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 2\times x + 8.74 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2x + 8.74}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = 0 \Rightarrow -2x + 8.74 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4.37\ m}$$

$$M_{(x=4.37)} = -(4.37)^2 + 8.74(4.37) - 20.37 \Rightarrow \boxed{M_{(x=4.37)} = -1.27\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 5-



$$AB: \quad 0 \le x \le 6 \quad V_{(x)} = -2x + 8.74$$

$$OB: \quad 2 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = 8.98\ ton$$

$$CO: \quad 2 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = -11.02\ ton$$

$$DC: \quad 2 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = 3\ ton$$

$$AB: \quad 0 \le x \le 6 \quad M_{(x)} = -x^2 + 8.74x - 20.37$$

$$OB: \quad 2 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -8.98x + 16.04$$

$$CO: \quad 2 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = 11.02x - 6$$

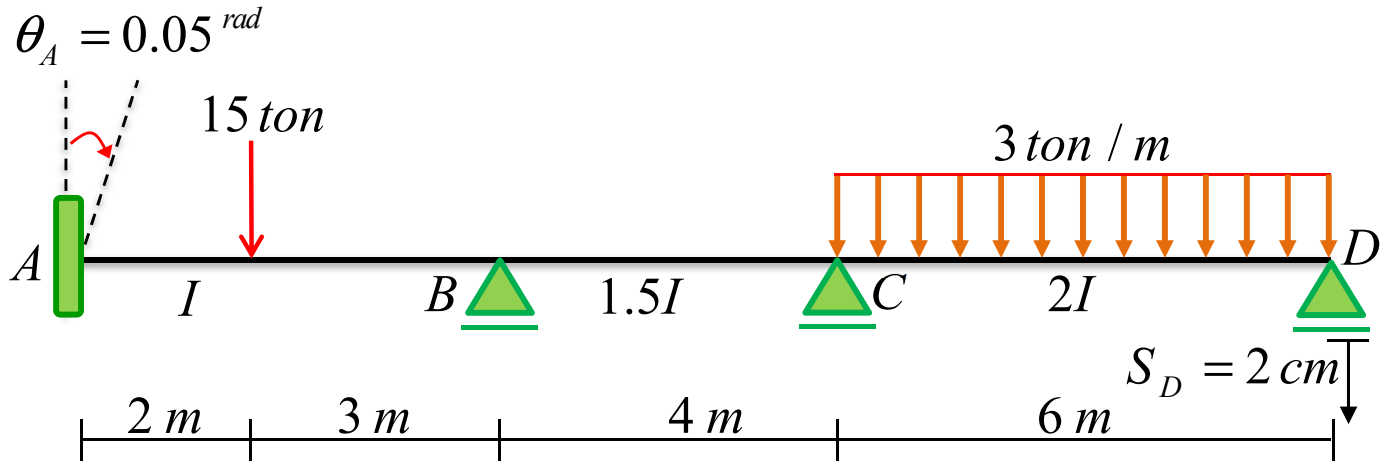
$$DC: \quad 2 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -3x$$

ETABS File Name: **08-Example-05.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

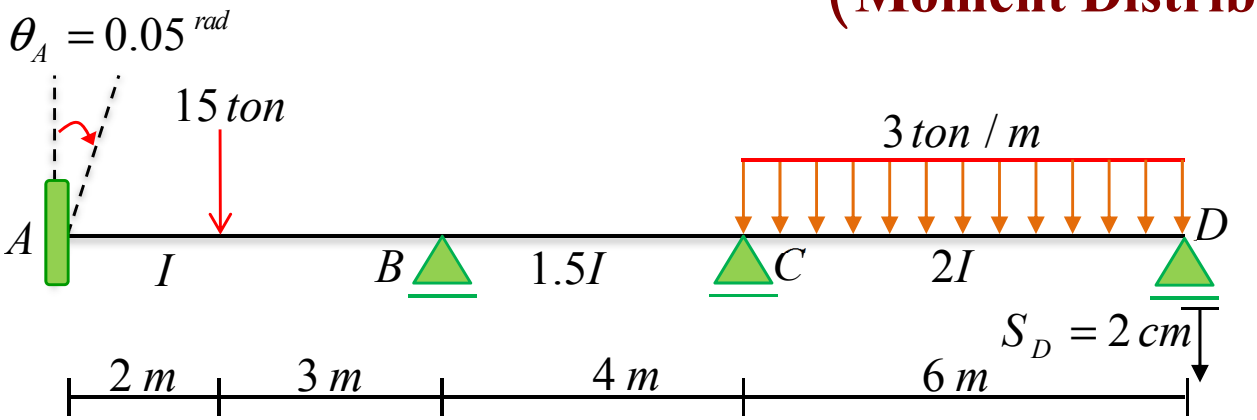
مثال 6- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ ton.m^2$$



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

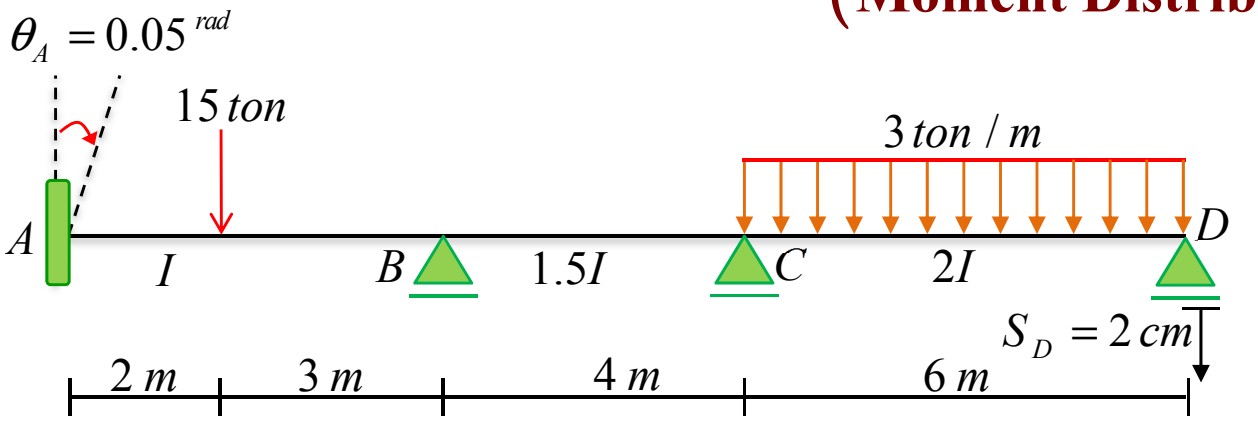
پاسخ مثال 6-



محاسبه ضرایب پخش اعضا:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-



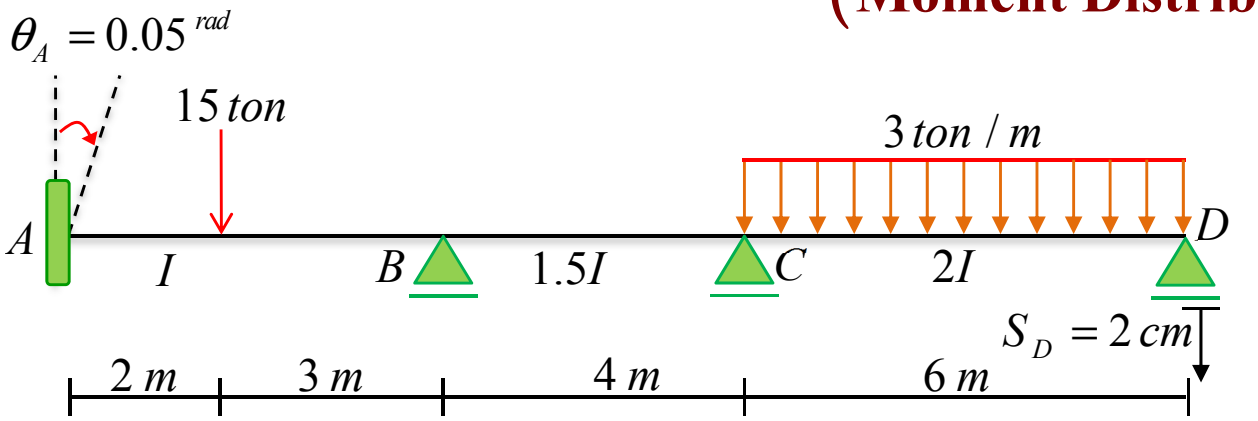
محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\bar{M}_{BA} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_A - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BA}\psi_{BA} + FEM_{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{BA} = 11.2\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-



محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\bar{M}_{CD} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{CD}\theta_C + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{CD}\theta_D - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{CD}\psi_{CD} + FEM_{CD}$$

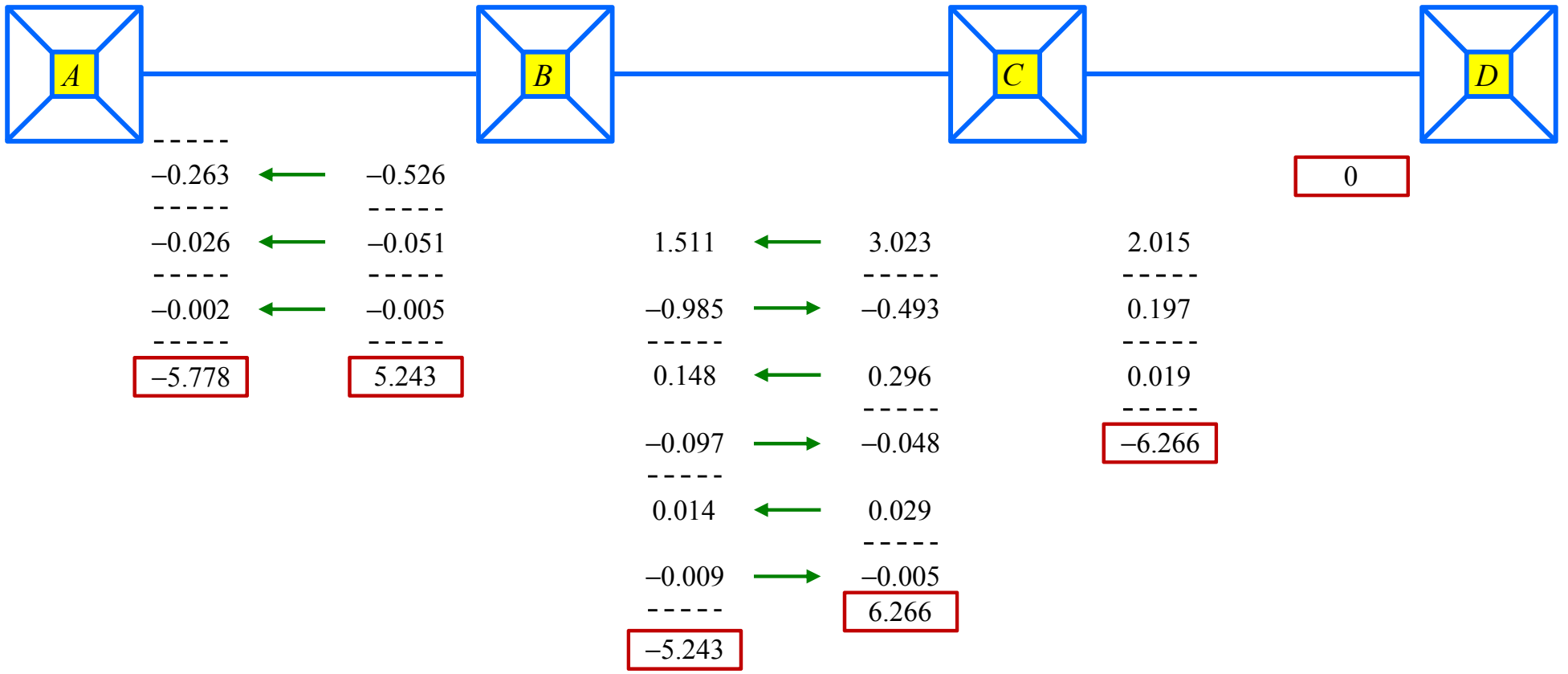
$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{CD} = -\frac{31}{3}\ ton.m}$$

$$\bar{M}_{DC} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{DC}\theta_D + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{DC}\theta_C - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{DC}\psi_{DC} + FEM_{DC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{DC} = \frac{23}{3}\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6- شروع پخش لنگر:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-

گره C دور دوم : $(-5.038)\times(-1)=5.038\times$

$0.6=\boxed{3.023}\times\rightarrow 0.5=\boxed{1.511}$

$0.4=\boxed{2.015}$

گره B دور دوم : $(1.511)\times(-1)=-1.511\times$

$\frac{8}{23}=\boxed{-0.526}\times\rightarrow 0.5=\boxed{-0.263}$

$\frac{15}{23}=\boxed{-0.985}\times\rightarrow 0.5=\boxed{-0.493}$

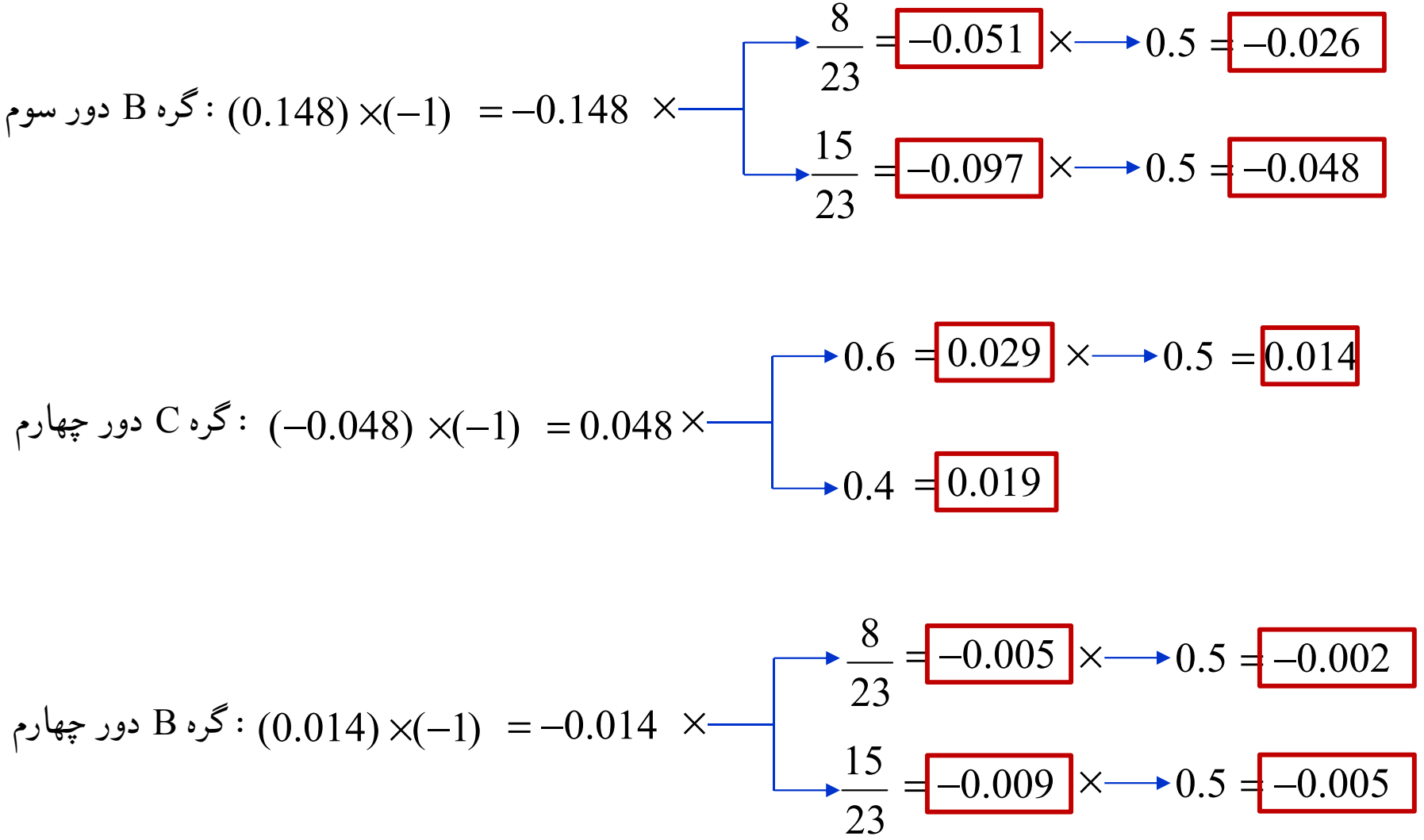
گره C دور سوم : $(-0.493)\times(-1)=0.493\times$

$0.6=\boxed{0.296}\times\rightarrow 0.5=\boxed{0.148}$

$0.4=\boxed{0.197}$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6- برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

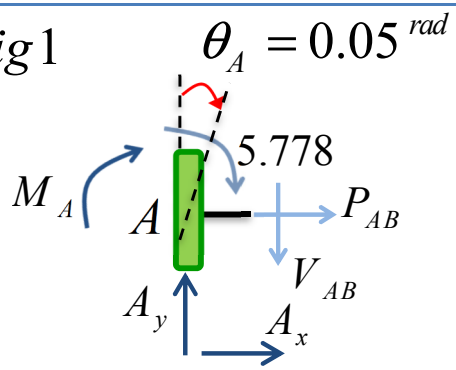


Fig 2

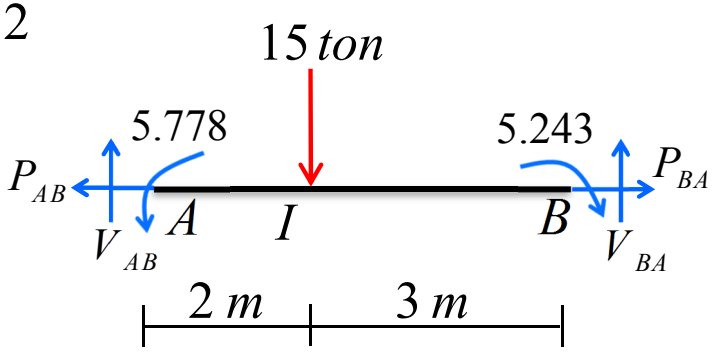


Fig 3

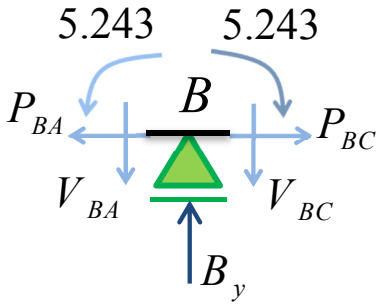


Fig 4

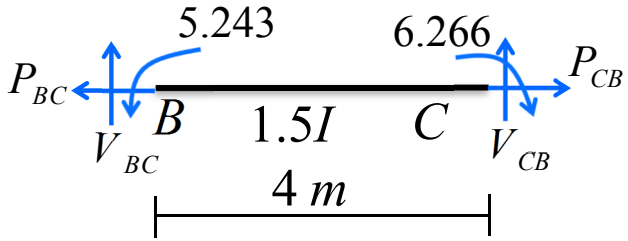


Fig 5

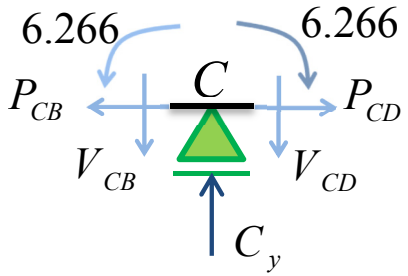


Fig 6

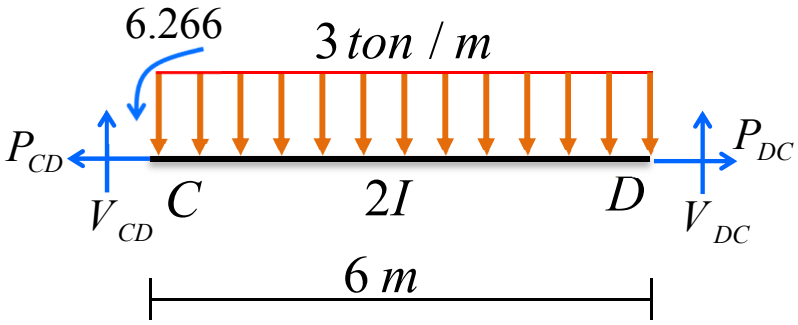
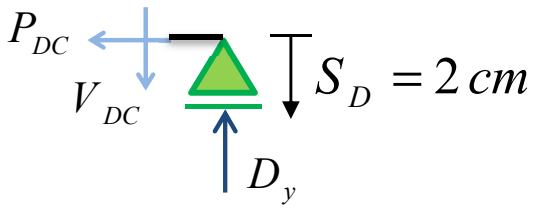


Fig 7

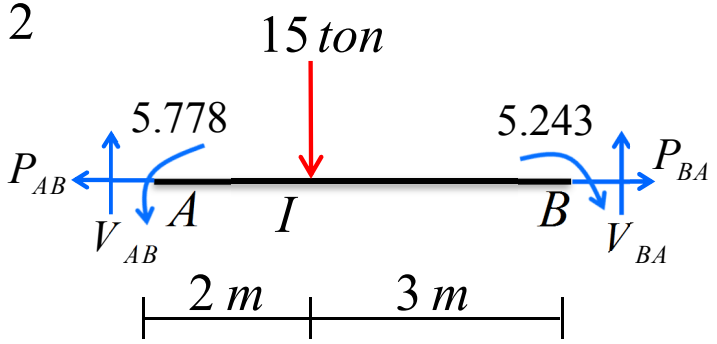


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-

با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

Fig 2

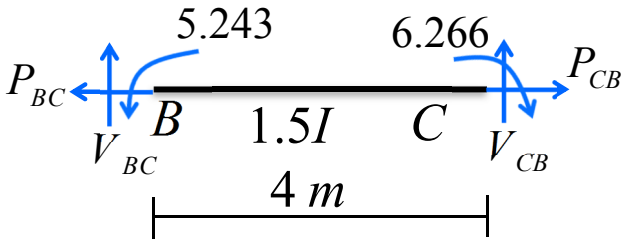


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -15\times 2 - 5.243 + 5.778 + V_{BA}\times 5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 5.893\, ton} \qquad (6.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - 15 + V_{BA} = 0 \overset{(6.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 9.107\, ton} \qquad (6.2)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

Fig 4



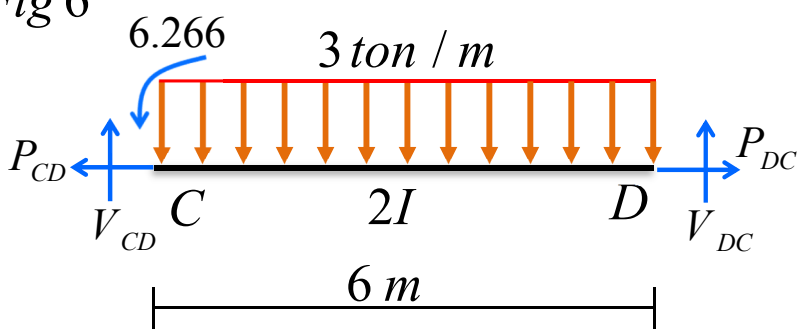
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 5.243 - 6.266 + V_{CB}\times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = 0.256\, ton} \qquad (6.3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} + V_{CB} = 0 \overset{(6.3)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = -0.256\, ton} \qquad (6.4)$$

پاسخ مثال 6-

با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:

Fig 6

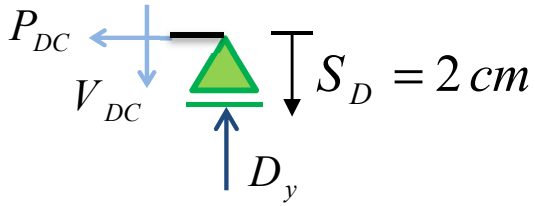


$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -3\times 6\times\frac{6}{2}+6.266+V_{DC}\times 6=0 \Rightarrow \boxed{V_{DC}=7.956\,ton} \quad (6.5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD}-3\times 6+V_{DC}=0 \overset{(6.5)}{\Rightarrow} \boxed{V_{CD}=10.044\,ton} \quad (6.6)$$

با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:

Fig 7



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{DC}=0} \quad (6.7)$$

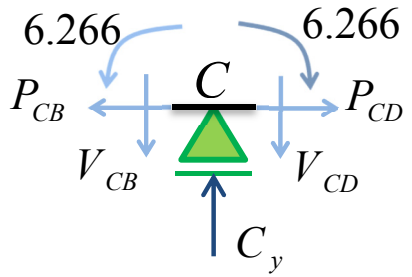
$$(6.7) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{DC}&=P_{CD}=0\\ P_{CB}&=P_{BC}=0\\ P_{AB}&=P_{BA}=0\end{aligned}} \quad (6.8)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y - V_{DC}=0 \overset{(6.5)}{\Rightarrow} \boxed{D_y=7.956\,ton}$$

پاسخ مثال 6-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

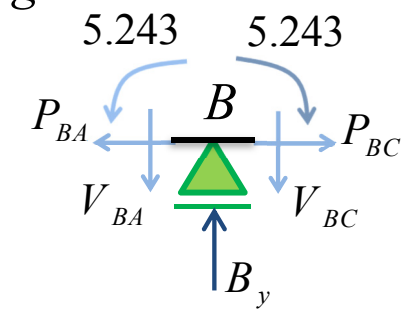
Fig 5



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} + V_{CD} \overset{(6.3)\,\&\,(6.6)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 10.30\ ton}$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

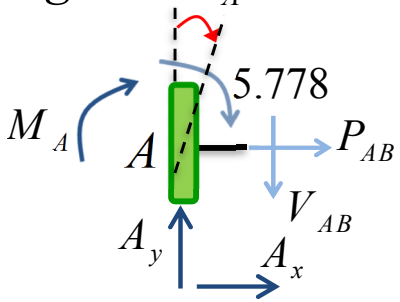
Fig 3



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(6.1)\,\&\,(6.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 5.637\ ton}$$

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1 $\theta_A = 0.05\ rad$



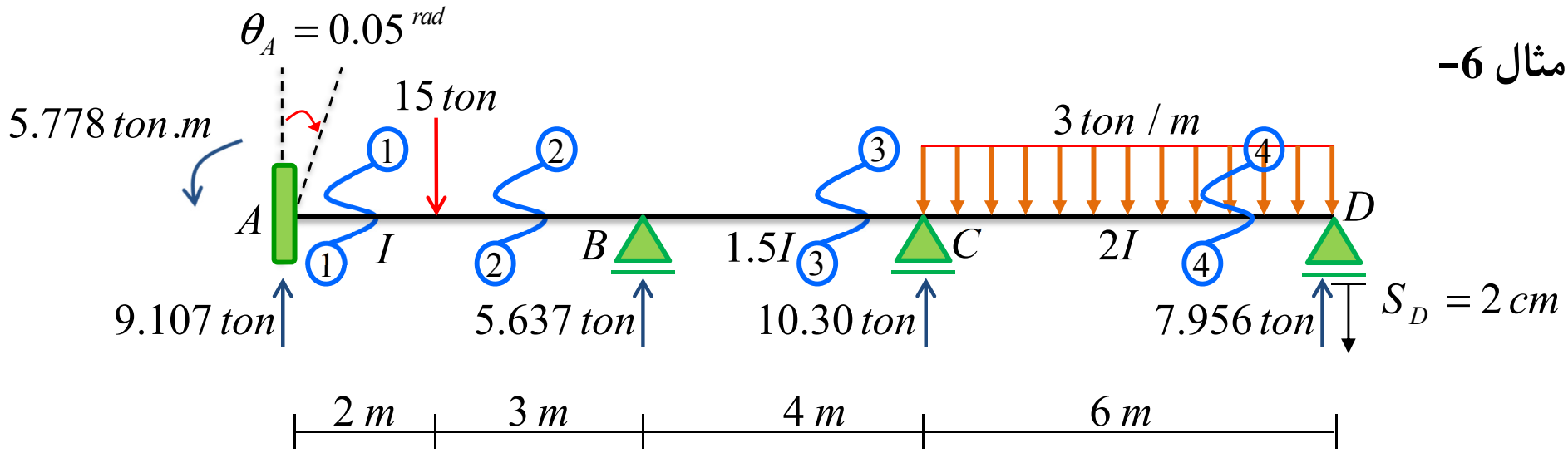
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(6.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 9.107\ ton}$$

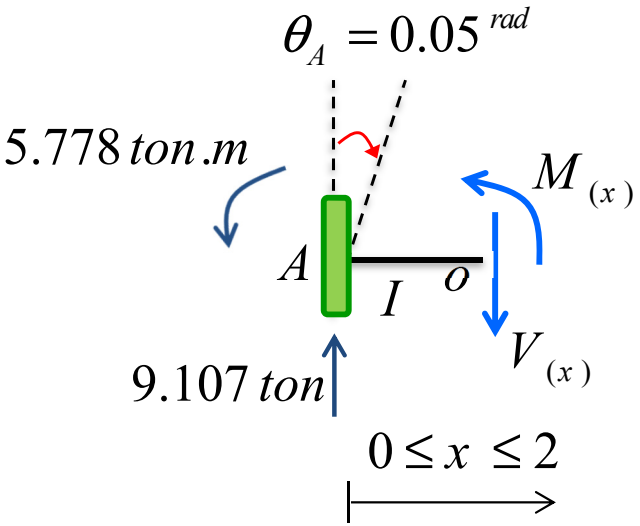
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(6.8)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 5.78 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -5.778\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

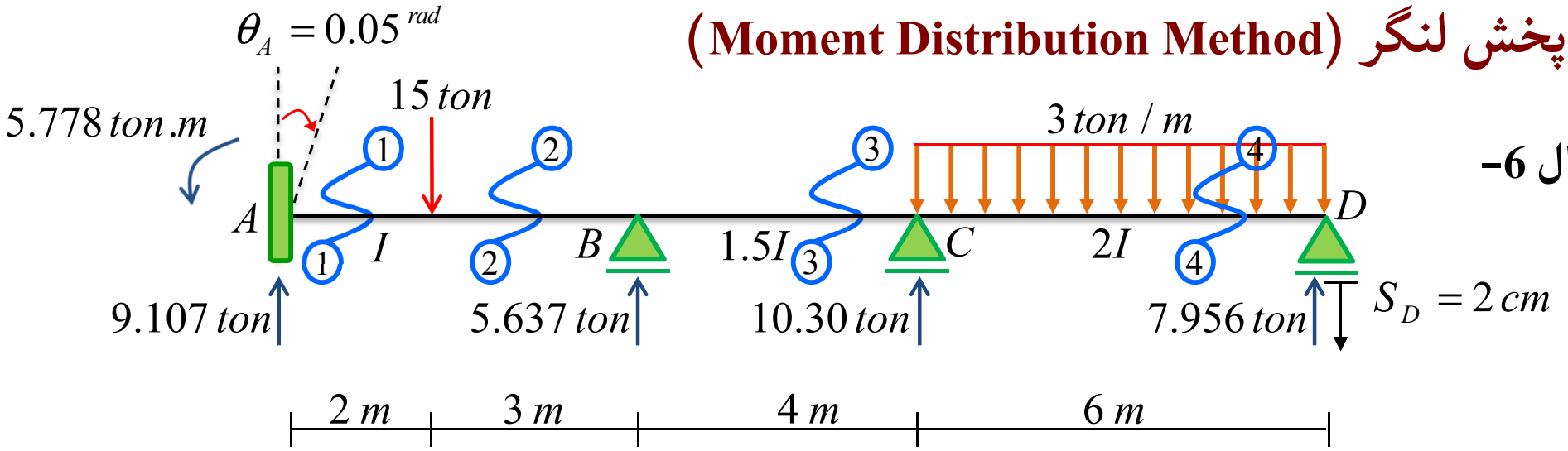
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 5.778 - 9.107 \times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 9.107x - 5.778}$$

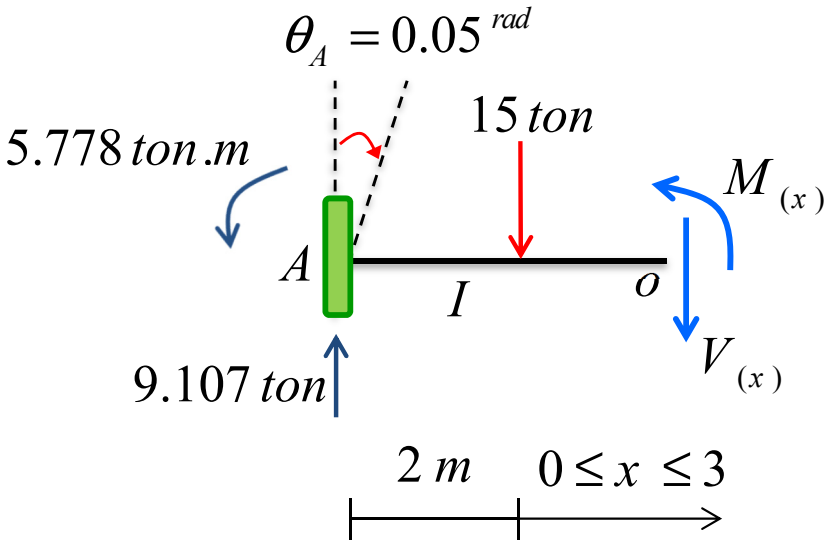
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 9.107 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 9.107\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-



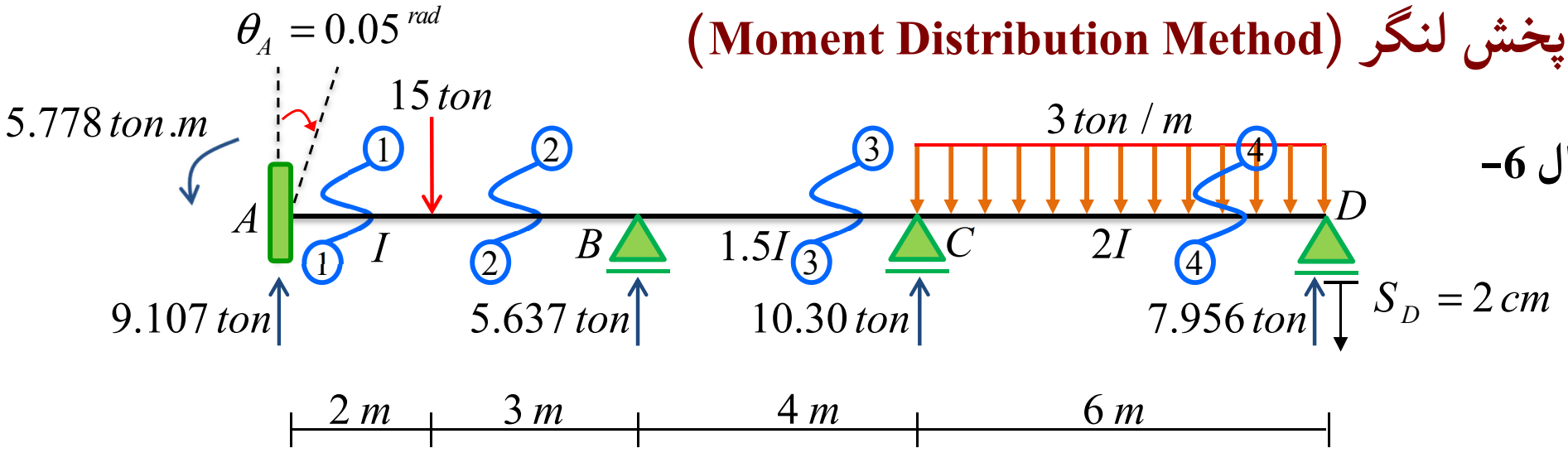
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



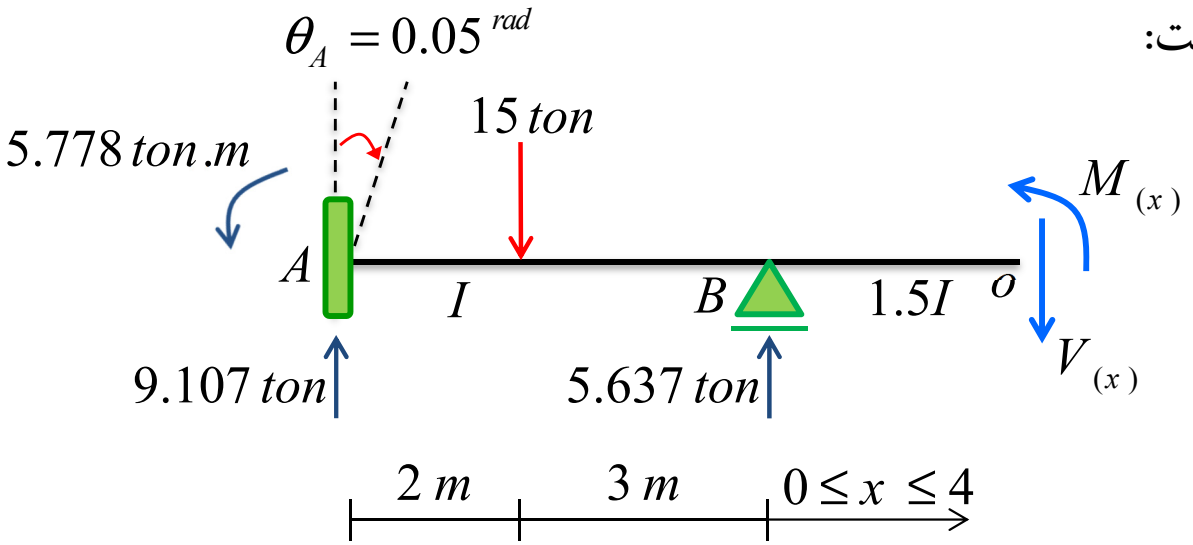
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 15 \times x + 5.778 - 9.107 \times (2 + x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -5.893x + 12.436}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 9.107 - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5.893\ ton}$$

پاسخ مثال 6-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:

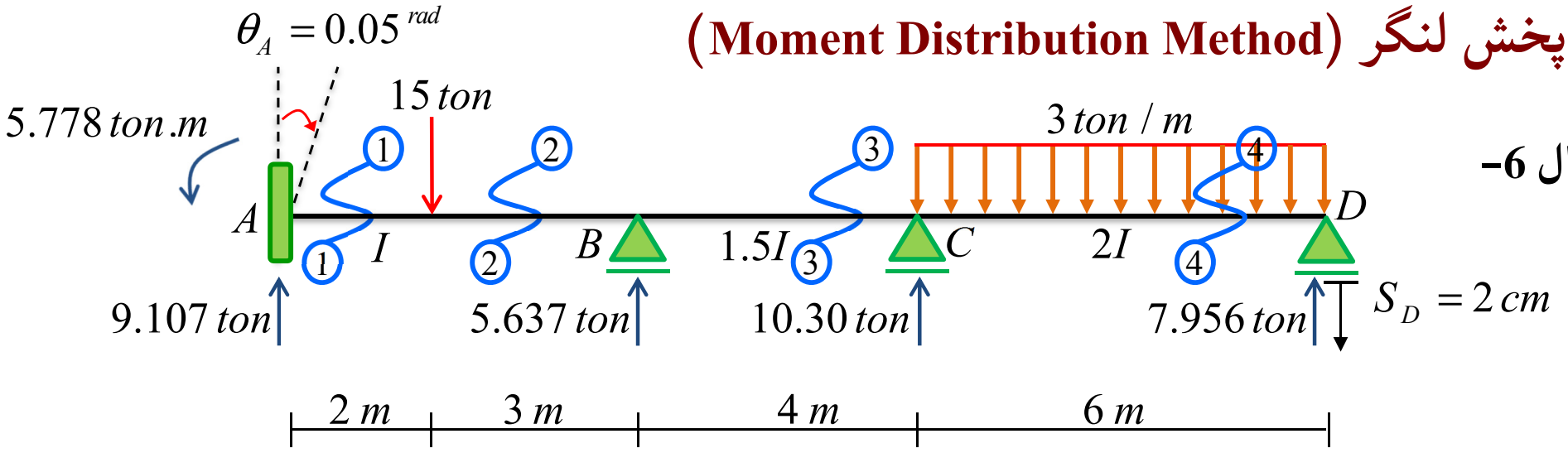


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 5.637 \times x + 15 \times (3+x) + 5.778 - 9.107 \times (5+x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -0.256x - 5.243}$$

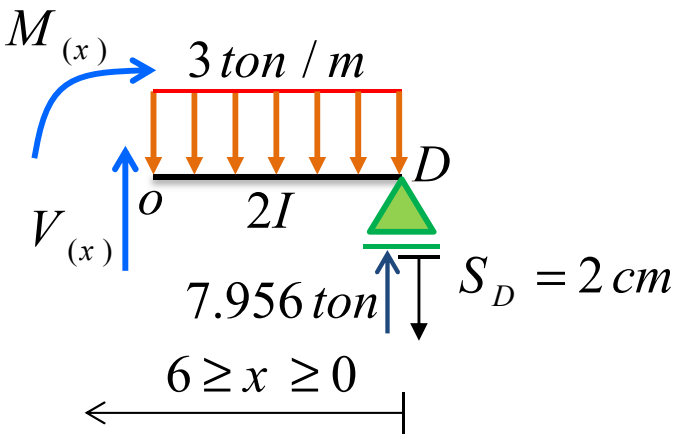
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 5.637 - 15 + 9.107 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -0.256\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 4-4 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 3\times x \times \frac{x}{2} + 7.956 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 7.956x}$$

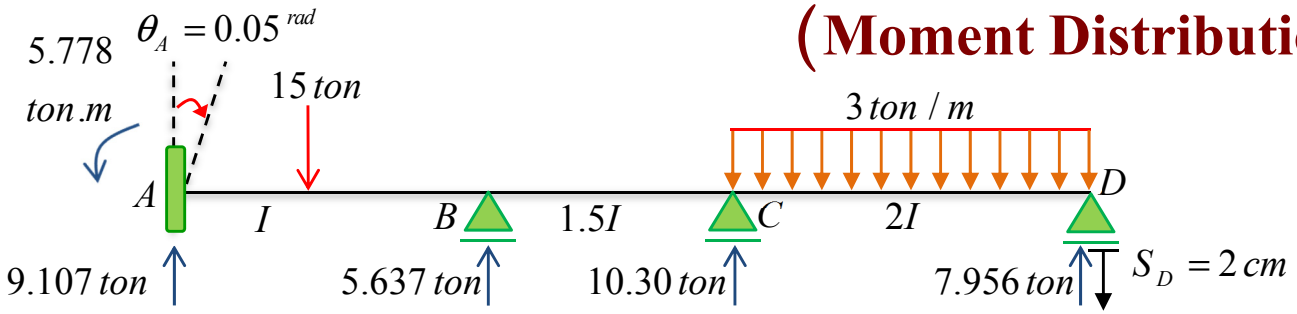
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 3\times x + 7.956 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 3x - 7.956}$$

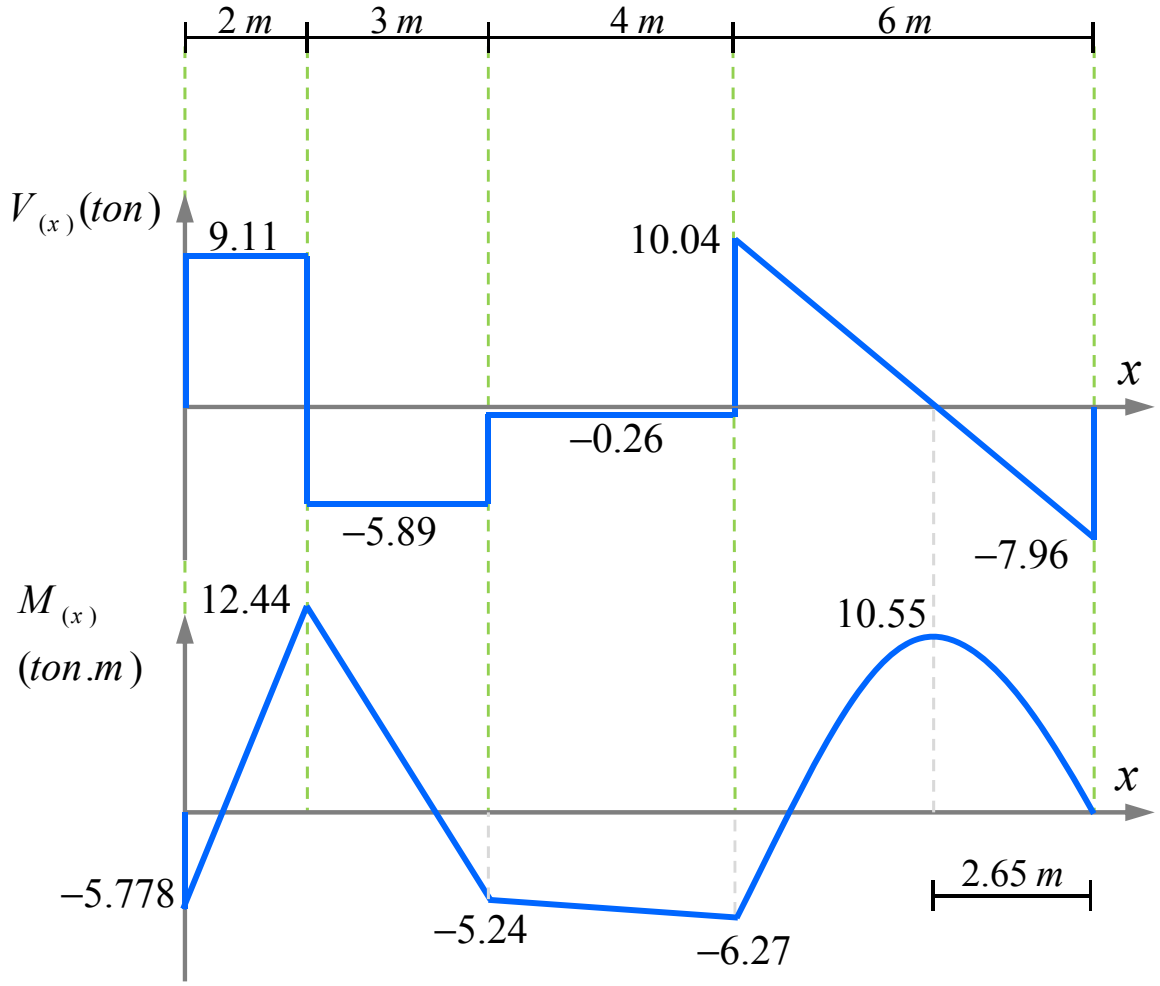
$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = 0 \Rightarrow 3x - 7.956 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2.652\ m}$$

$$M_{(x=2.652)} = -1.5(2.652)^2 + 7.956(2.652) \Rightarrow \boxed{M_{(x=2.652)} = 10.550\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 6-





$$AO: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 9.107\ ton$$
$$OB: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = -5.893\ ton$$
$$BC: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -0.256\ ton$$
$$DC: \quad 6 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = 3x - 7.956$$

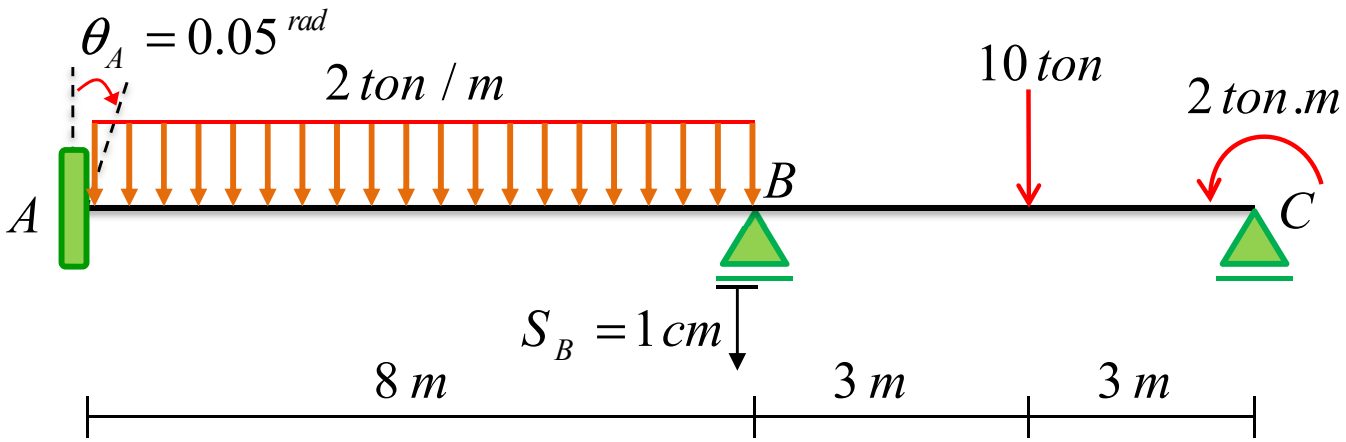
$$AO: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 9.107x - 5.778$$
$$OB: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = -5.893x + 12.436$$
$$BC: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -0.256x - 5.243$$
$$DC: \quad 6 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -1.5x^2 + 7.956x$$

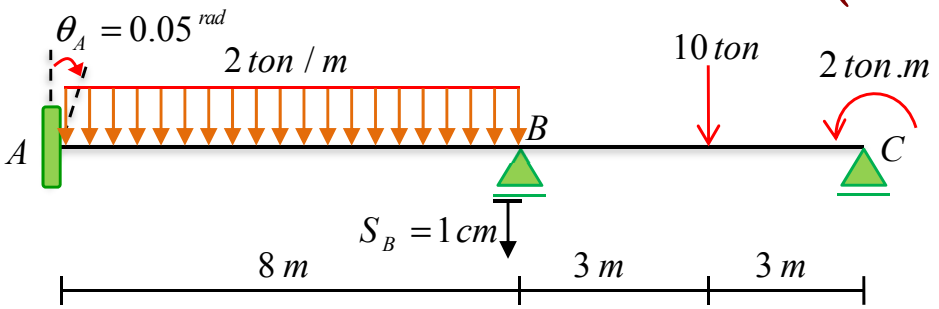
ETABS File Name: **08-Example-06.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

مثال 7- در تیر نشان داده شده تکیه‌گاه A به اندازه $\theta_A = 0.05^{rad}$ رادیان در جهت ساعتگرد دوران داشته است و علاوه بر آن تکیه‌گاه B نیز به اندازه $S_B = 1cm$ در جهت قائم به سمت پایین نشست می‌کند. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200\ ton.m^2$$





پاسخ مثال 7-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

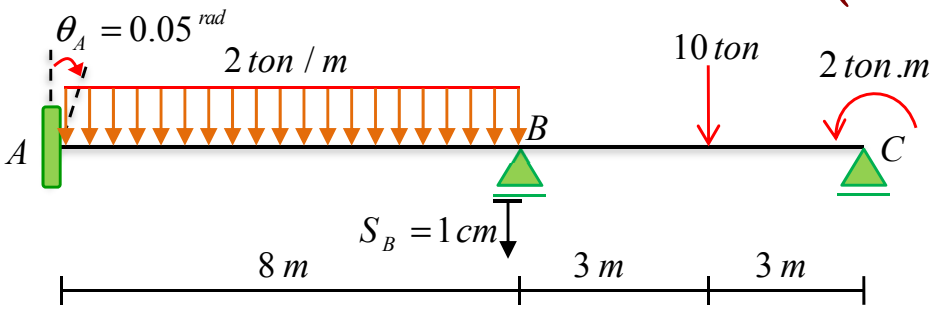
محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{AB} = -\frac{281}{48}}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7-

محاسبه لنگرهای گیرداری:



$$\bar{M}_{BA} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_A - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BA}\psi_{BA} + FEM_{BA}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BA} = \frac{623}{48}\,ton.m}$$

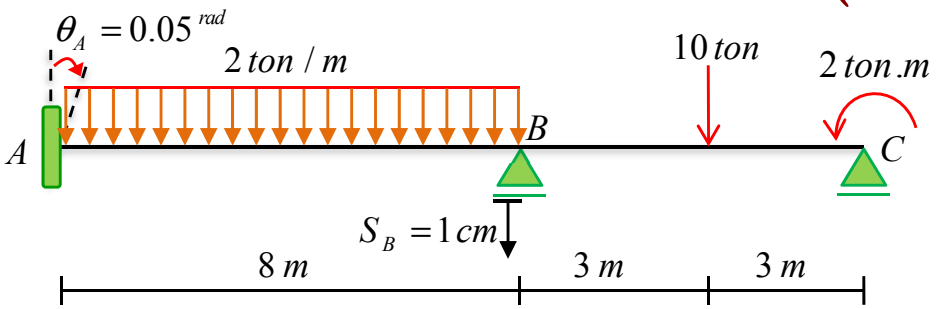
$$\bar{M}_{BC} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_C - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{BC} + FEM_{BC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BC} = -\frac{43}{6}\,ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7-

محاسبه لنگرهای گیرداری:

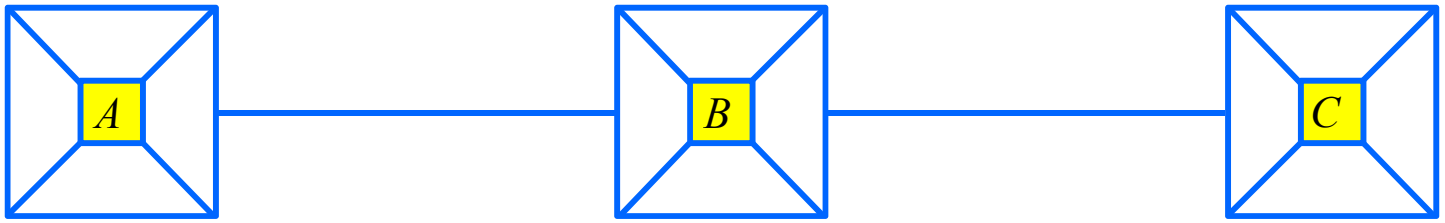


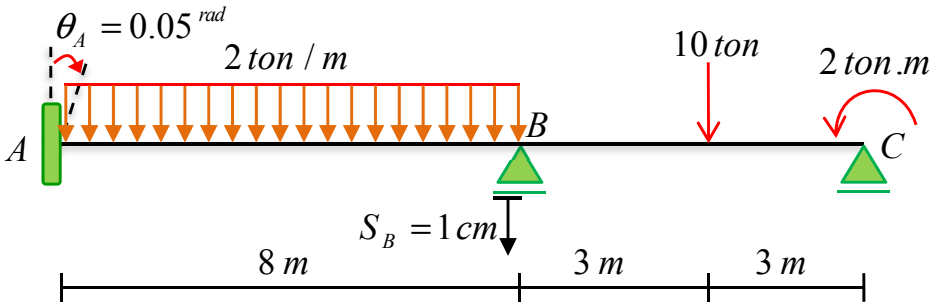
$$\bar{M}_{CB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_C + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{CB} + FEM_{CB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{CB} = \frac{47}{6}\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7- شروع پخش لنگر:





پاسخ مثال 7-

برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

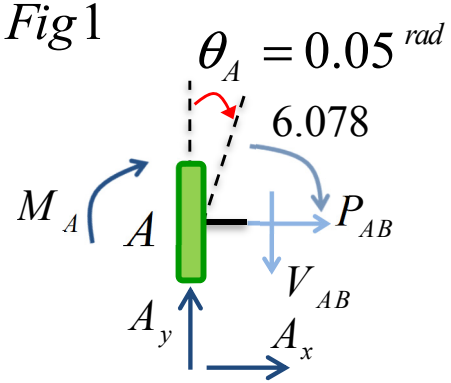


Fig 2

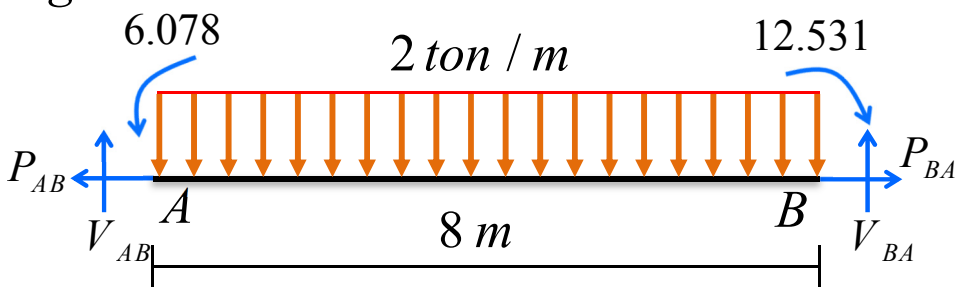


Fig 3

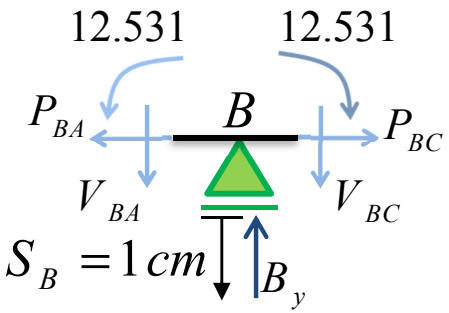


Fig 4

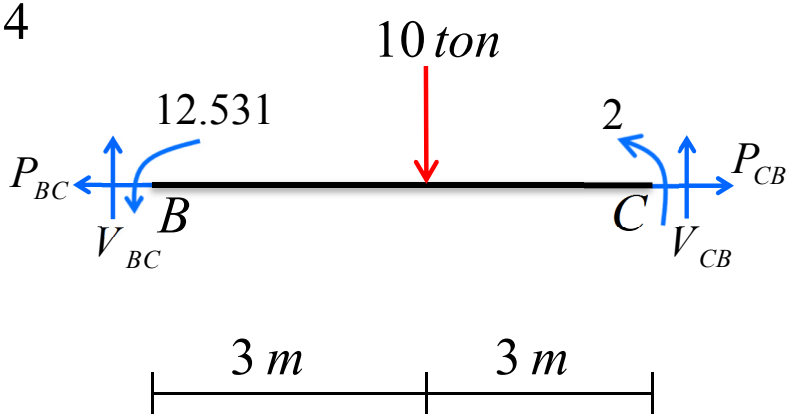
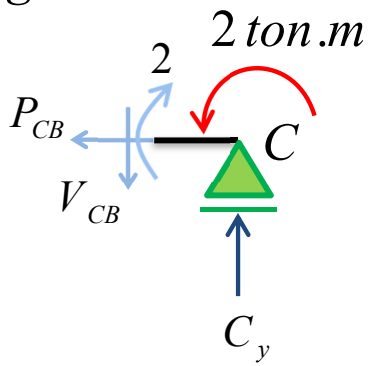


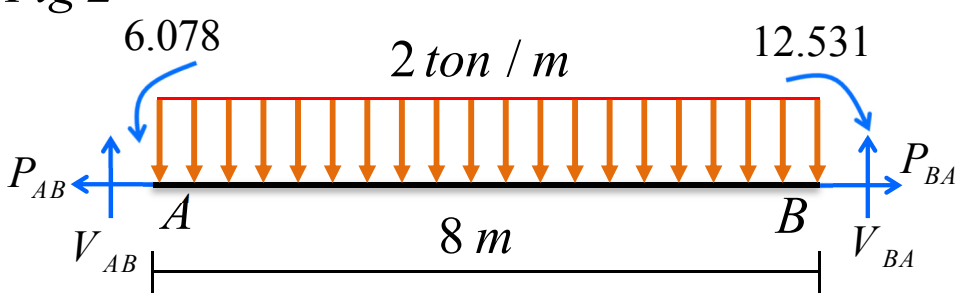
Fig 5



پاسخ مثال 7-

با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

Fig 2

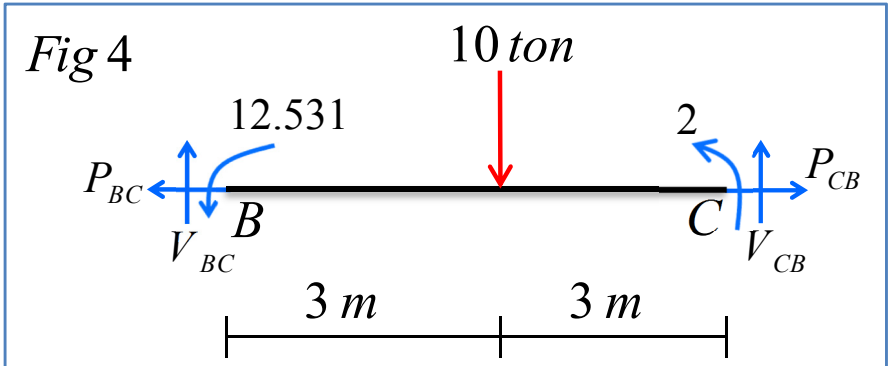


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -12.531 - 2\times 8\times 4 + 6.078 + V_{BA}\times 8 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 8.807\, ton} \quad (7.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - 2\times 8 + V_{BA} = 0 \overset{(7.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 7.193\, ton} \quad (7.2)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

Fig 4



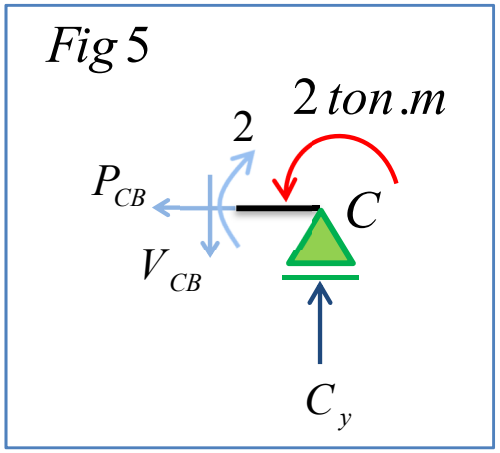
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 12.531 + 2 - 10\times 3 + V_{CB}\times 6 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = 2.578\, ton} \quad (7.3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} - 10 + V_{CB} = 0 \overset{(7.3)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 7.422\, ton} \quad (7.4)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

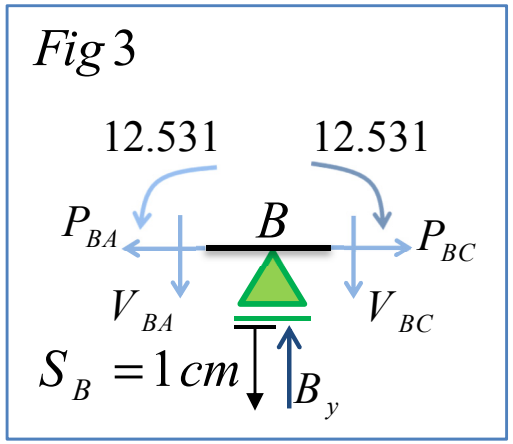


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{CB} = 0} \qquad (7.5)$$

$$(7.5) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{BC} &= P_{CB} = 0 \\ P_{AB} &= P_{BA} = 0 \end{aligned}} \qquad (7.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} \overset{(7.3)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 2.578\, ton}$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

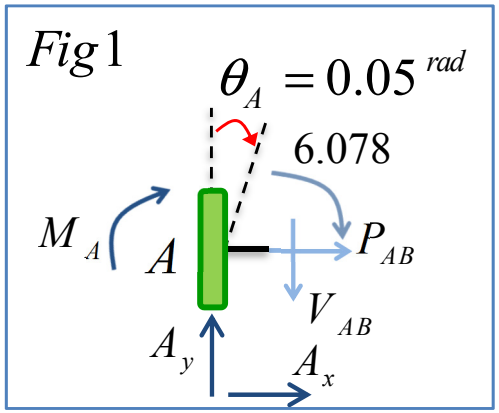


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(7.1)\ \&\ (7.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 16.229\, ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7-

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:



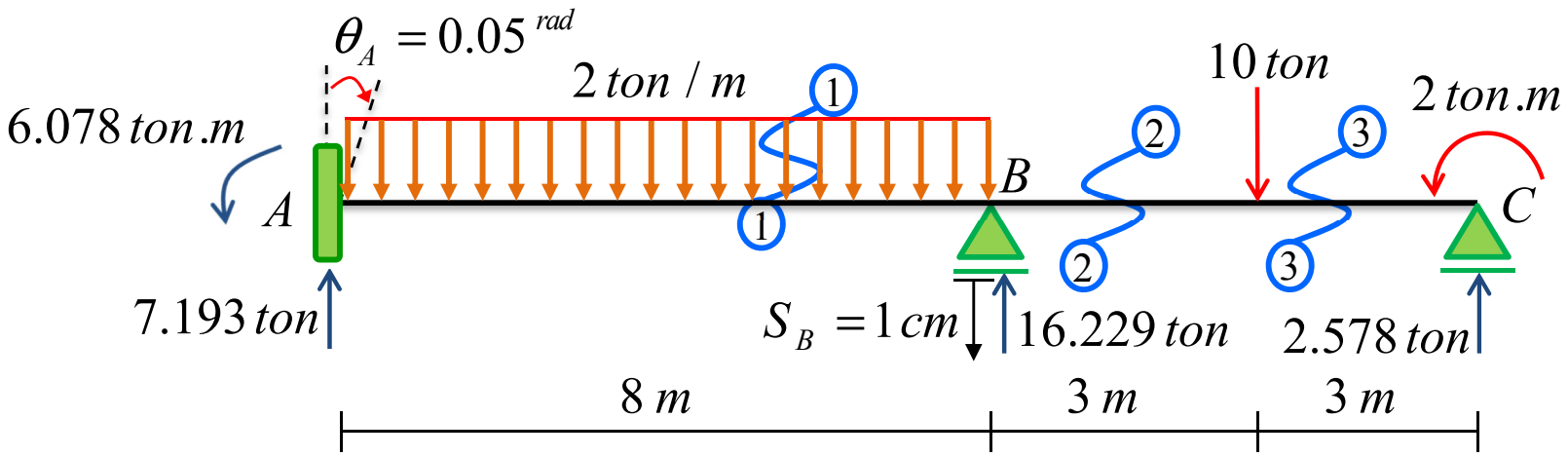
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(7.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 7.193\ ton}$$

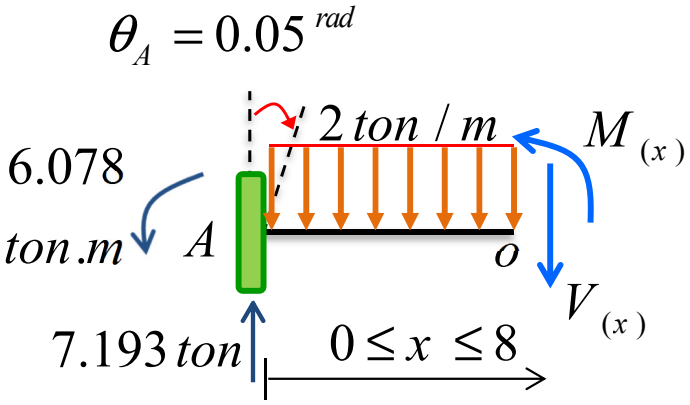
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(7.6)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 6.078 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -6.078\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 2\times x \times \frac{x}{2} + 6.078 - 7.193\times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 7.193x - 6.078}$$

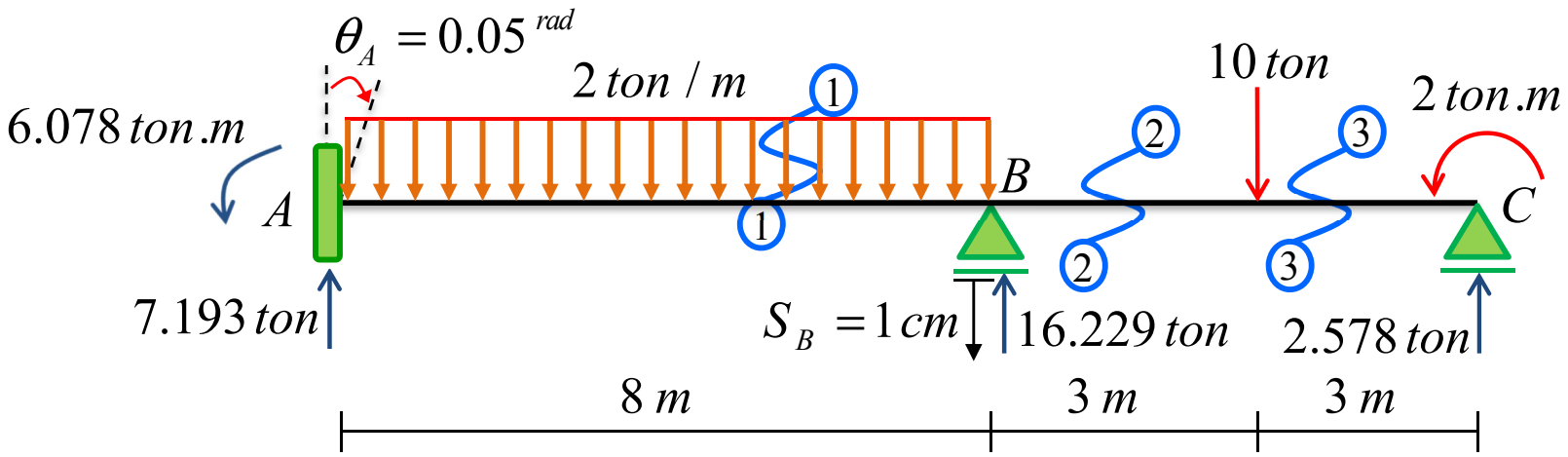
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 2\times x + 7.193 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2x + 7.193}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = 0 \Rightarrow -2x + 7.193 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3.597\ m}$$

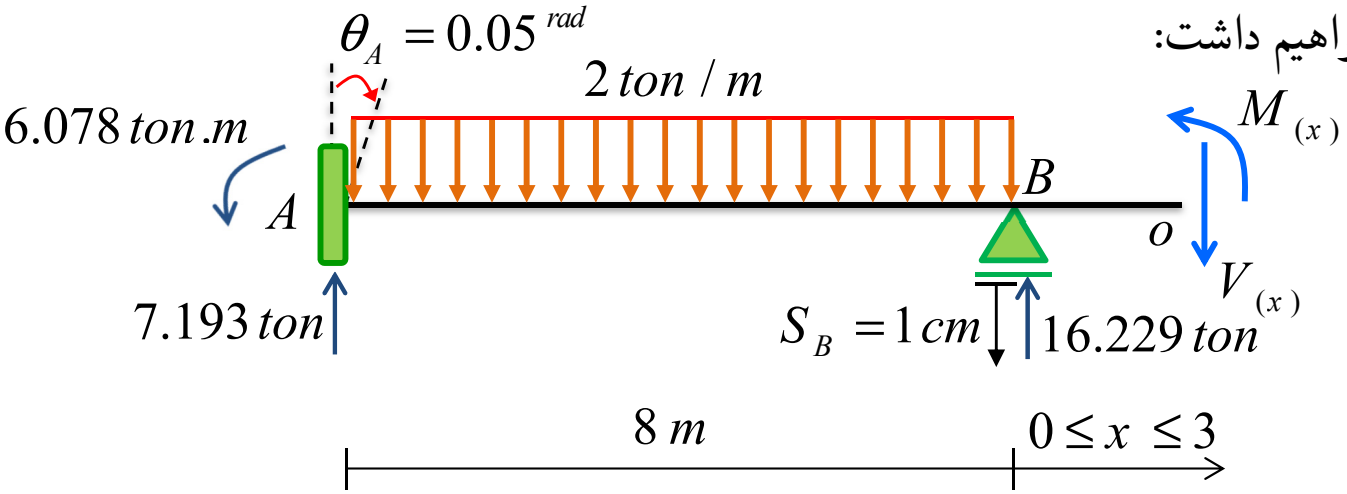
$$M_{(x=3.597)} = -(3.597)^2 + 7.193(3.597) - 6.078 \Rightarrow \boxed{M_{(x=3.597)} = 6.857\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

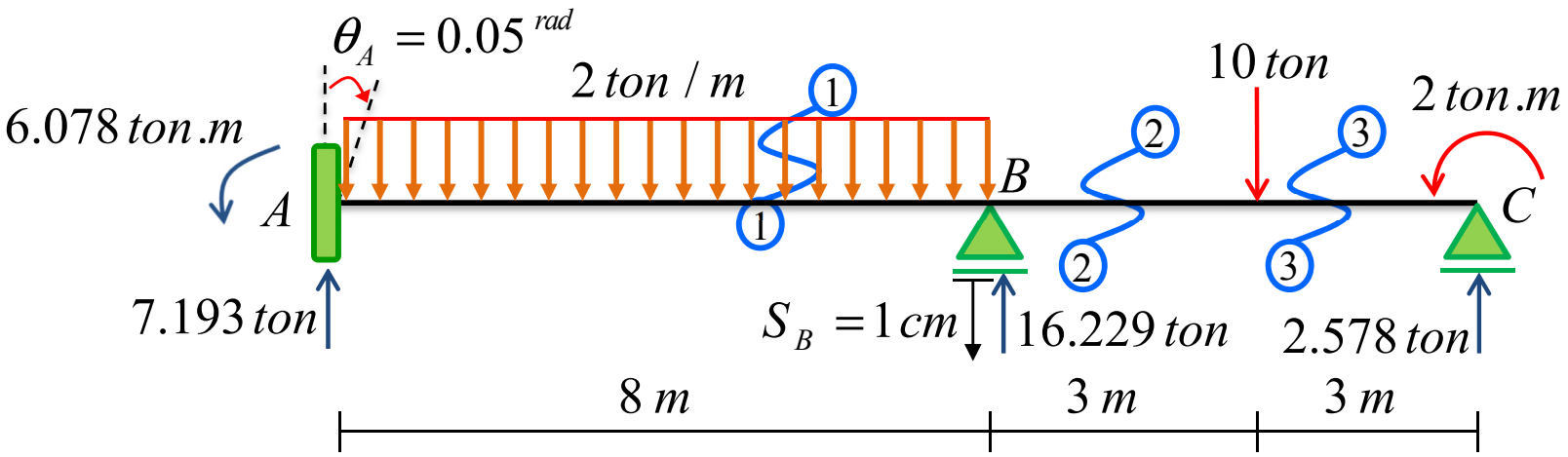


$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} - 16.229 \times x + 2 \times 8 \times (4 + x) - 7.193 \times (8 + x) + 6.078 = 0$$

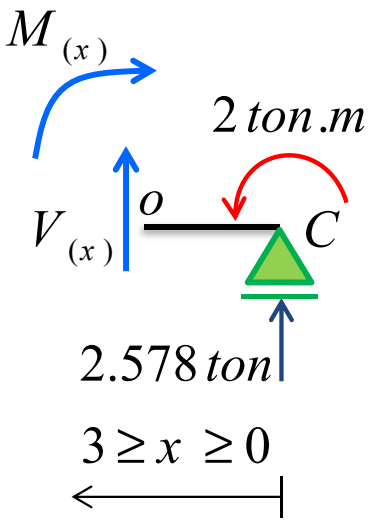
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 7.422x - 12.534}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} + 16.229 - 2 \times 8 + 7.193 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 7.422\ ton}$$

پاسخ مثال 7-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 3-3 خواهیم داشت:

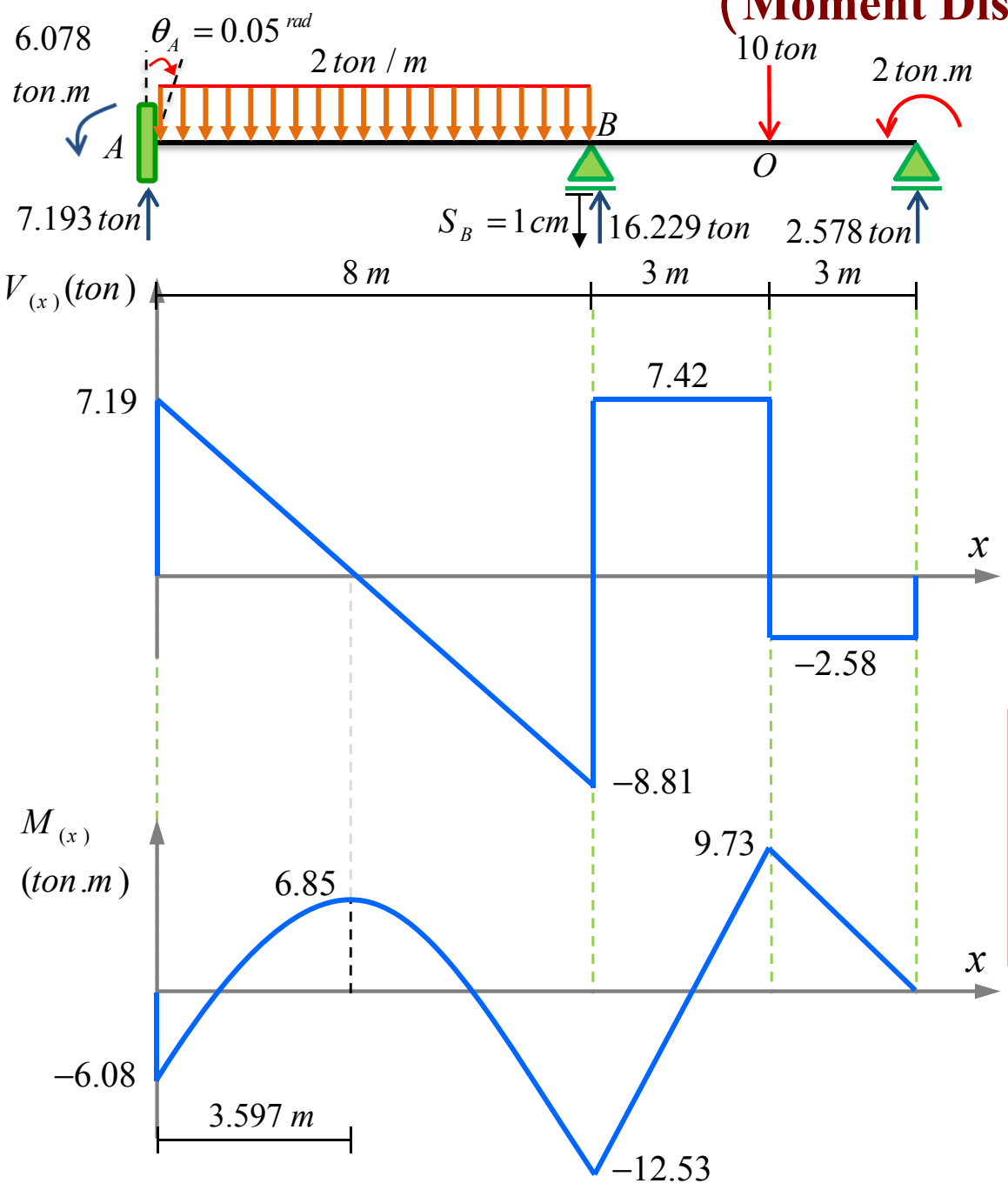


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 2 + 2.578 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2.578x + 2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 2.578 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2.578\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 7-



$$AB: \quad 0 \le x \le 8 \quad V_{(x)} = -2x + 7.193$$

$$BO: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = 7.422\,ton$$

$$CO: \quad 3 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = -2.578\,ton$$

$$AB: \quad 0 \le x \le 8 \quad M_{(x)} = -x^2 + 7.193x - 6.078$$

$$BO: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = 7.422x - 12.534$$

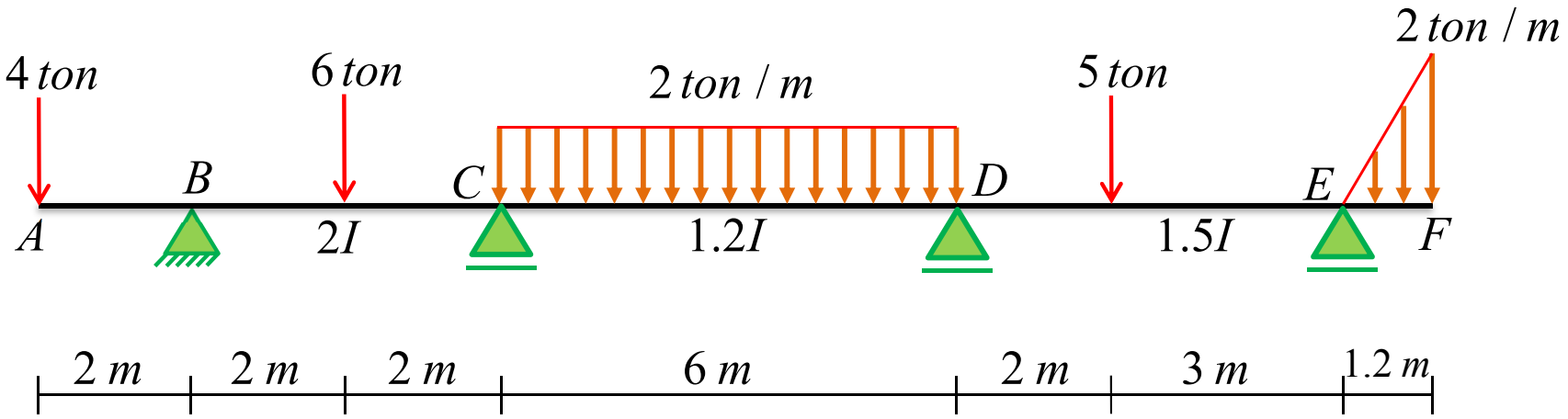
$$CO: \quad 3 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = 2.578x + 2$$

ETABS File Name: **08-Example-07.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

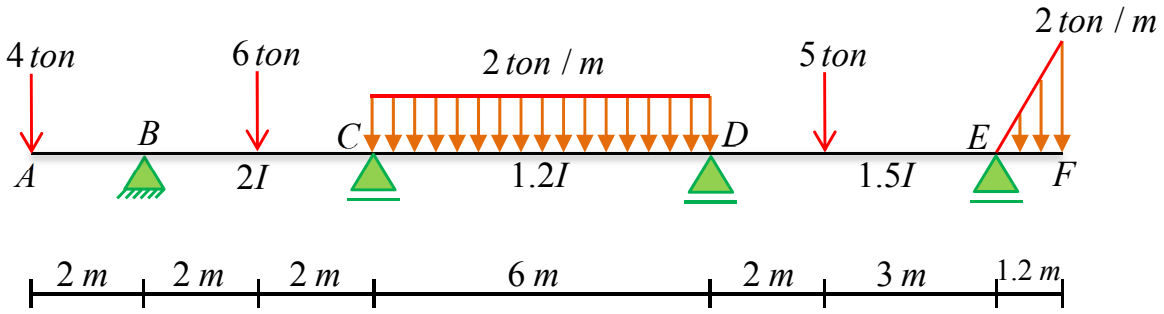
مثال 8- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$

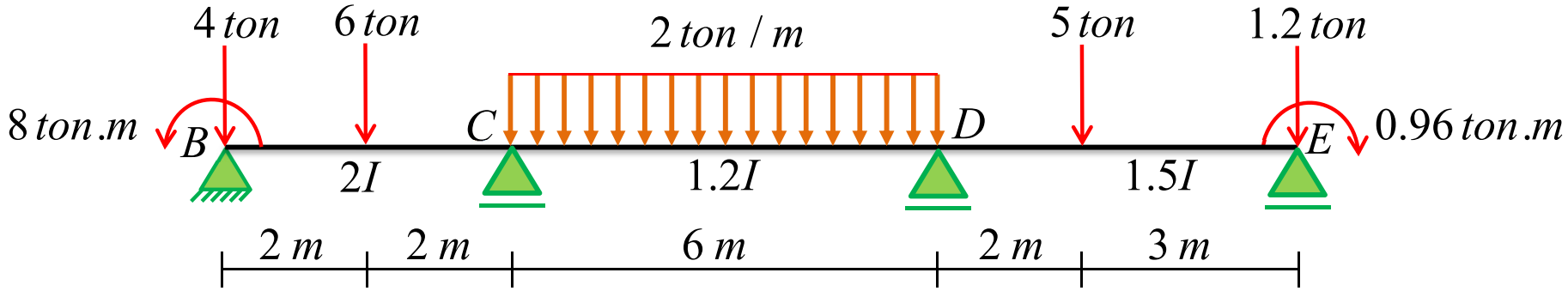


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-

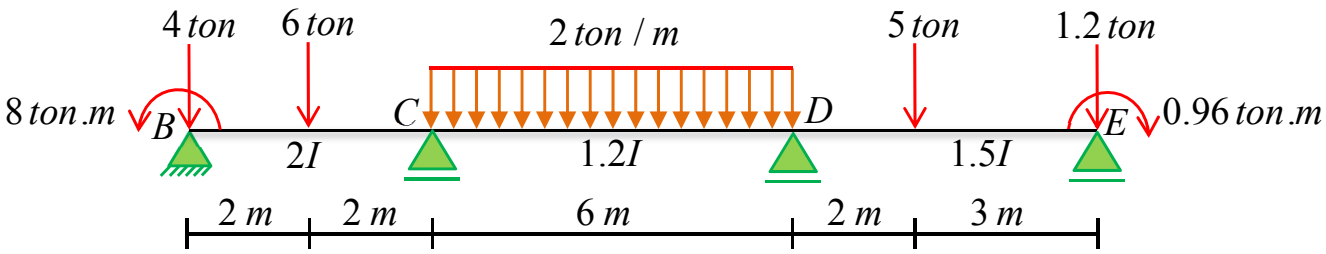


نکته: از آن‌جایی که کنسول یک سازه معین است از این رو لنگر و نیروی معادل کنسول‌ها را به گره‌های B و E منتقل نموده و کنسول‌ها وارد حل معادلات شیب-افت نمی‌شود.



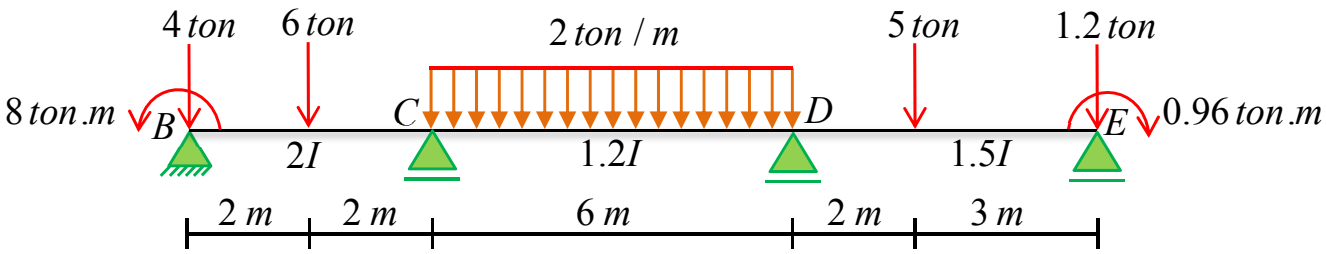
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-



محاسبه ضرایب پخش اعضا:

پاسخ مثال 8-



محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -3\ ton.m}$$

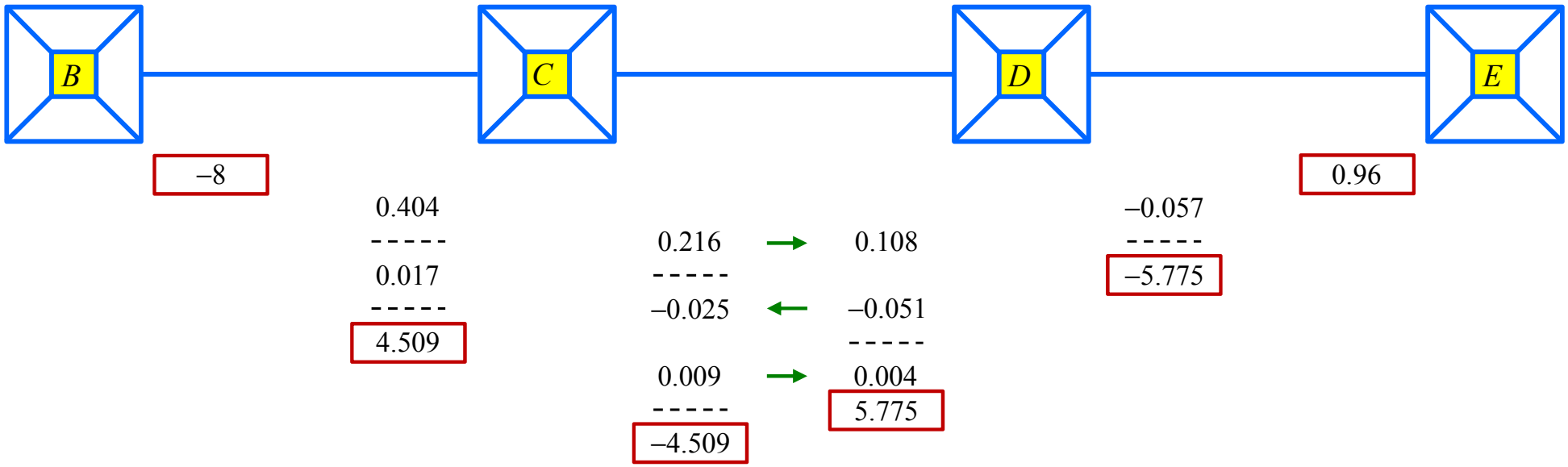
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -6\ ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{DE} = -3.6\ ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{CB} = 2.4\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8- شروع پخش لنگر:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8- شروع پخش لنگر:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8- شروع پخش لنگر:

گره C دور دوم : $(-0.62)\times(-1)=0.62\times$

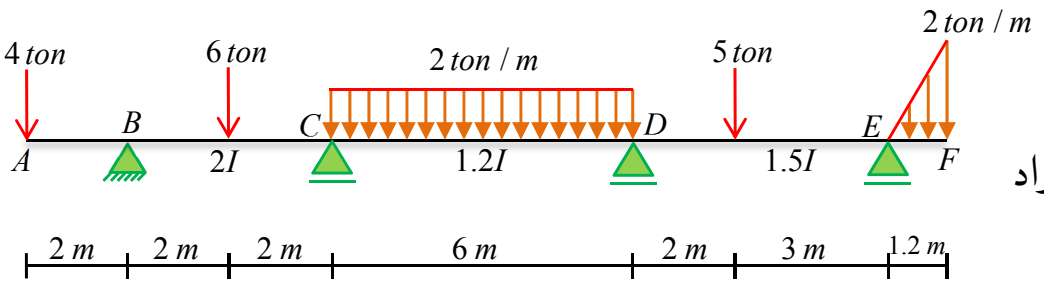
- $\frac{15}{23}=0.404$
- $\frac{8}{23}=0.216\times\rightarrow 0.5=0.108$

گره D دور دوم : $(0.108)\times(-1)=-0.108\times$

- $\frac{8}{17}=-0.051\times\rightarrow 0.5=-0.025$
- $\frac{9}{17}=-0.057$

گره C دور سوم : $(-0.025)\times(-1)=0.025\times$

- $\frac{15}{23}=0.017$
- $\frac{8}{23}=0.009\times\rightarrow 0.5=0.004$



پاسخ مثال 8- برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

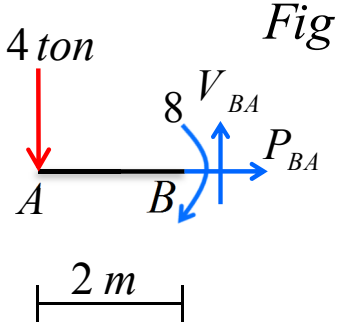


Fig 2

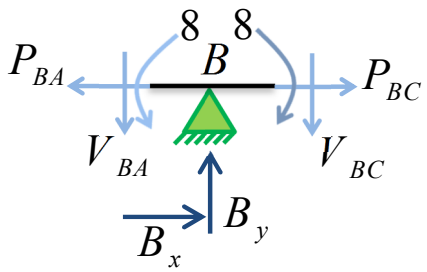


Fig 3

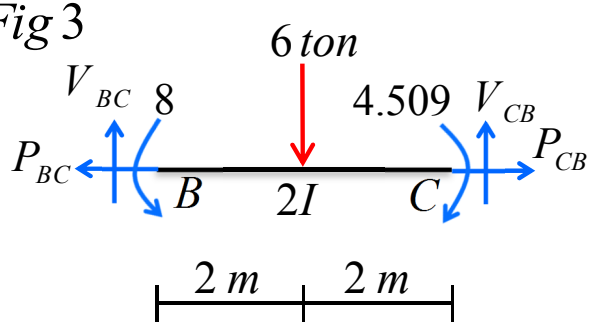


Fig 4

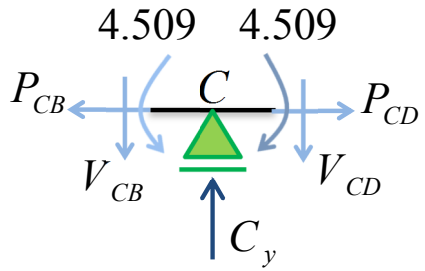


Fig 5

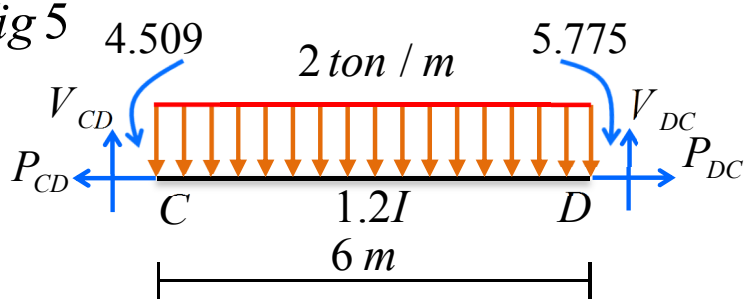


Fig 6

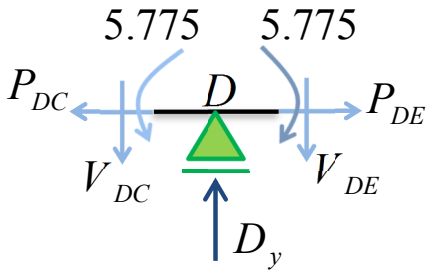


Fig 7

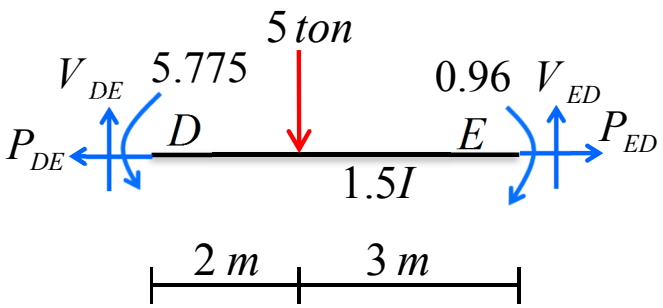


Fig 8

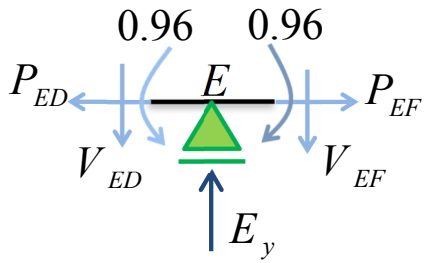
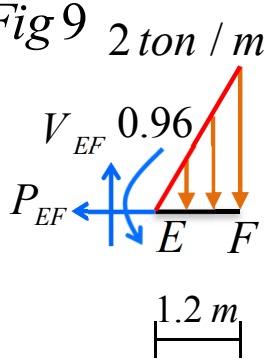


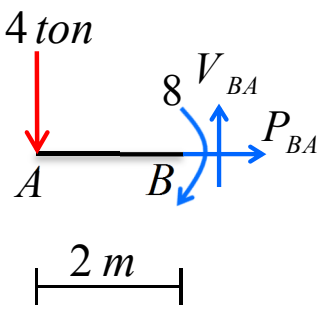
Fig 9



پاسخ مثال 8-

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1

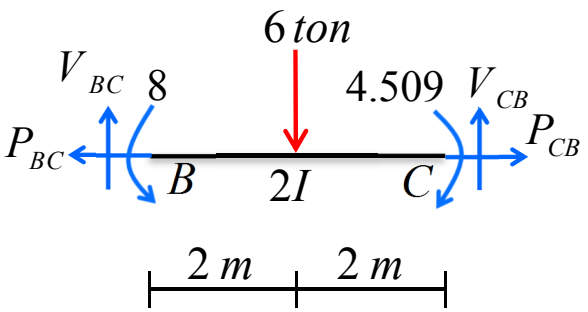


$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + V_{BA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = 4\ ton} \qquad (8.1)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{BA} = P_{AB} = 0} \qquad (8.2)$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

Fig 3

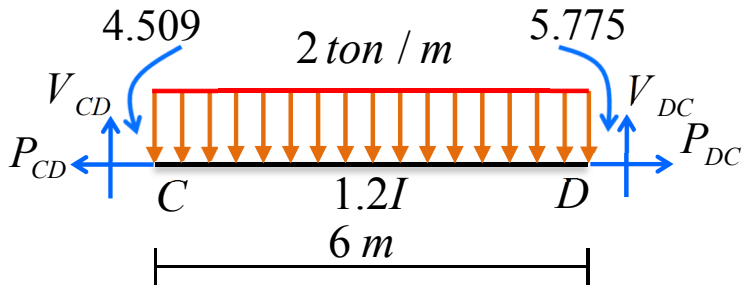


$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 6\times 2 - 4.509 + V_{CB}\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = 2.127\ ton} \qquad (8.3)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} - 6 + V_{CB} = 0 \quad \overset{(8.3)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = 3.873\ ton} \qquad (8.4)$$

پاسخ مثال 8-

Fig 5



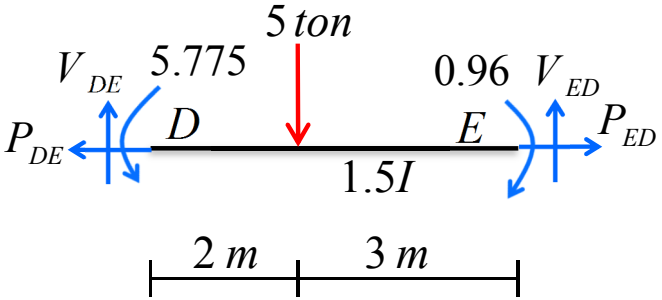
با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad 4.509 - (2\times 6)\times\left(\frac{6}{2}\right) - 5.775 + V_{DC}\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{DC} = 6.211\,ton} \qquad (8.5)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} - (2\times 6) + V_{DC} = 0 \quad \overset{(8.5)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{CD} = 5.789\,ton} \qquad (8.6)$$

با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:

Fig 7



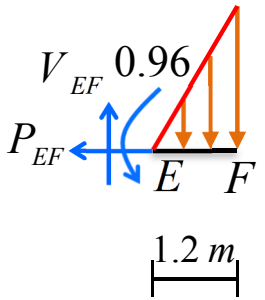
$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 5.775 - 5\times 2 - 0.96 + V_{ED}\times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{ED} = 1.037\,ton} \qquad (8.7)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DE} - 5 + V_{ED} = 0 \quad \overset{(8.7)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{DE} = 3.963\,ton} \qquad (8.8)$$

پاسخ مثال 8-

با بررسی شکل (9) نتیجه می‌شود:

Fig 9

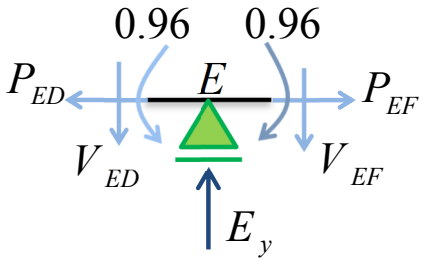


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{EF} - \frac{1}{2}\times 1.2\times 2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{EF} = 1.2\ ton} \quad (8.9)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{EF} = 0} \quad (8.10)$$

با بررسی شکل (8) نتیجه می‌شود:

Fig 8



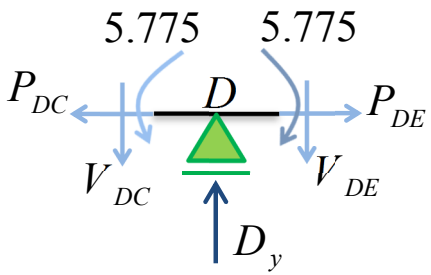
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{ED} + P_{EF} = 0 \overset{(8.10)}{\Rightarrow} \boxed{P_{ED} = P_{DE} = 0} \quad (8.11)$$

$$(8.11) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{DC} &= P_{CD} = 0 \\ P_{BC} &= P_{CB} = 0 \end{aligned}} \quad (8.12)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{ED} - V_{EF} + E_y = 0 \overset{(8.7)\&(8.9)}{\Rightarrow} \boxed{E_y = 2.237\ ton} \quad (8.13)$$

پاسخ مثال 8-

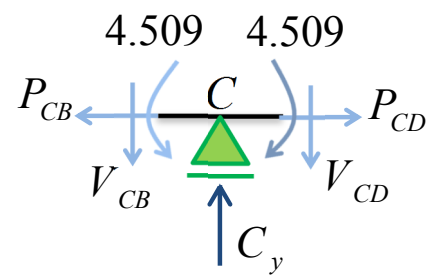
Fig 6



با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{DC} - V_{DE} + D_y = 0 \overset{(8.5)\&(8.8)}{\Rightarrow} \boxed{D_y = 10.174\, ton} \quad (8.14)$$

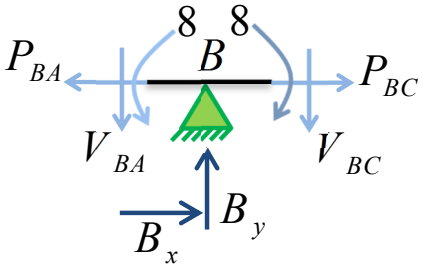
Fig 4



با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{CB} - V_{CD} + C_y = 0 \overset{(8.3)\&(8.6)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 7.916\, ton} \quad (8.15)$$

Fig 2



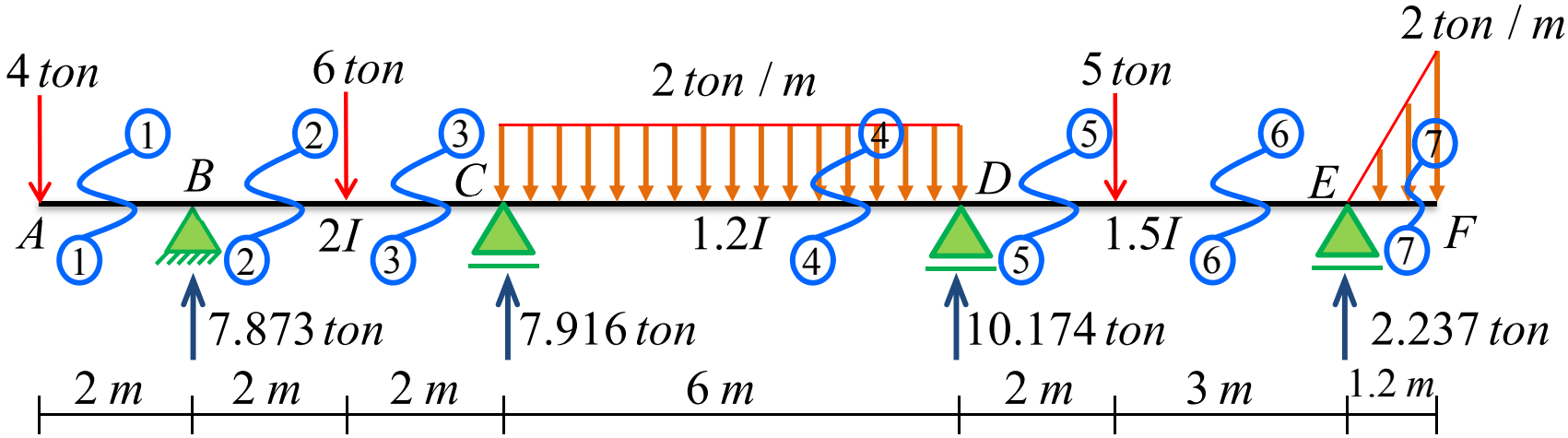
با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

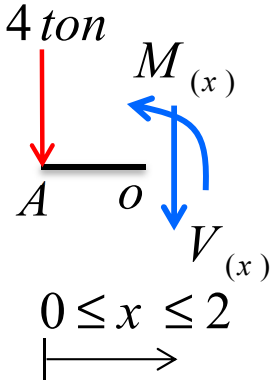
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{BA} - V_{BC} + B_y = 0 \overset{(8.1)\&(8.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 7.873\, ton} \quad (8.16)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0} \quad (8.17)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-

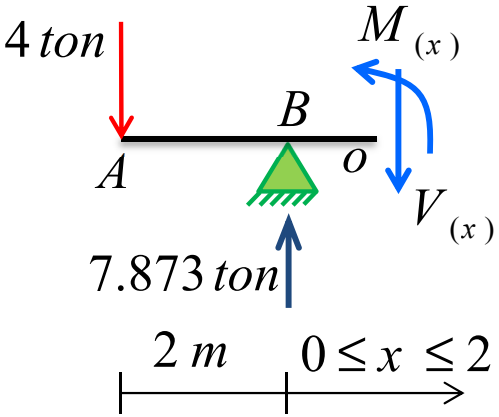




با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 4 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -4x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -4\ ton}$$



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

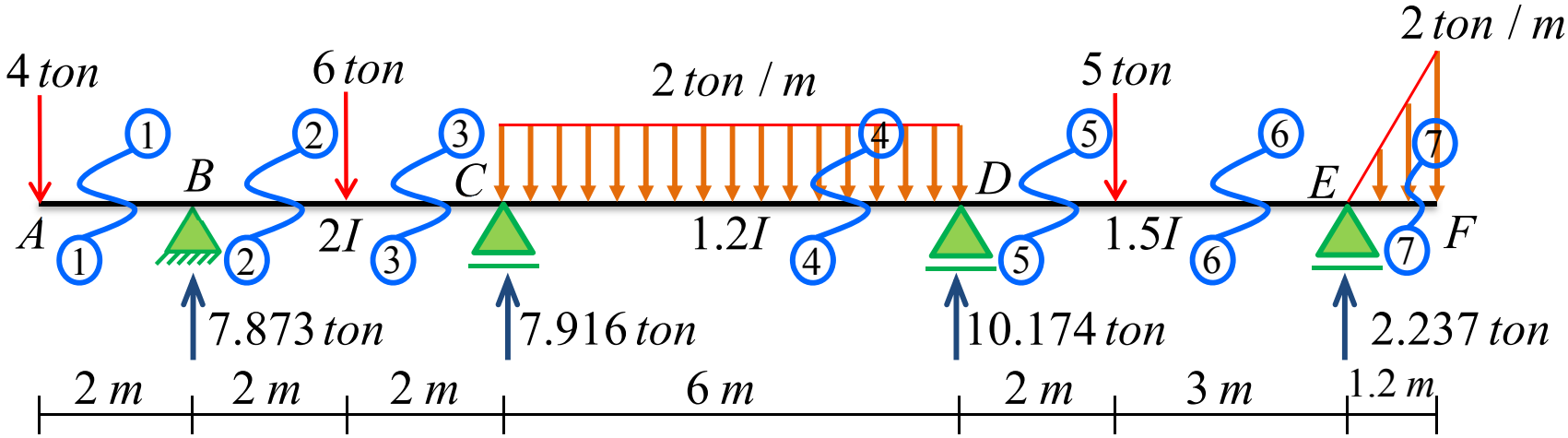
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 7.873 \times x + 4 \times (2 + x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 3.873x - 8}$$

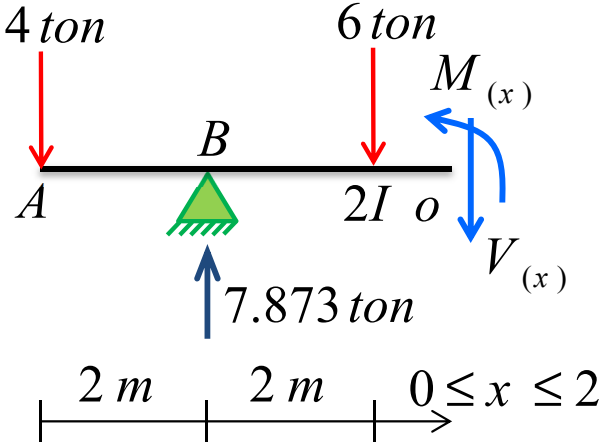
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 7.873 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 3.873\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:

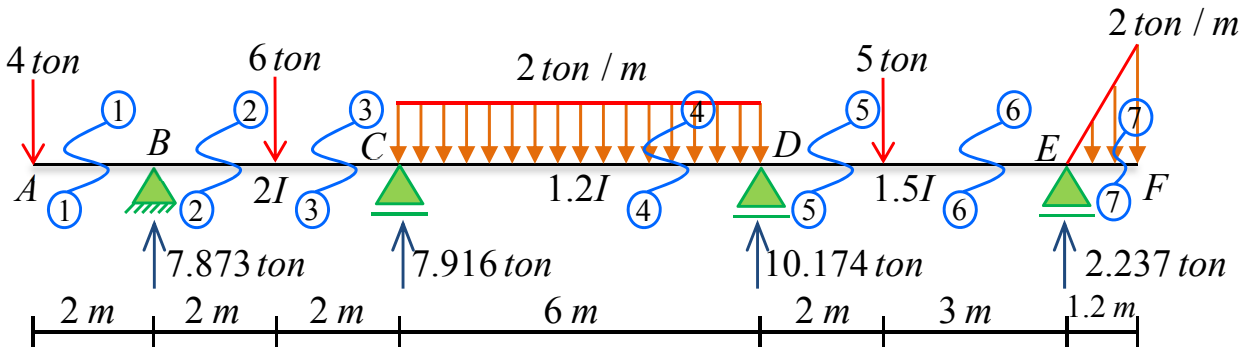


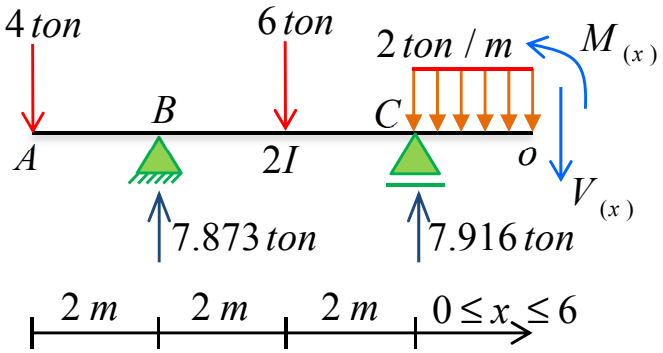
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 6\times x - 7.873\times(2+x) + 4\times(4+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -2.127x - 0.254}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - 6 + 7.873 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -2.127\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 4-4 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (2\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 7.916\times x + 6\times(2+x) - 7.873\times(4+x) + 4\times(6+x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 5.789x - 4.508}$$

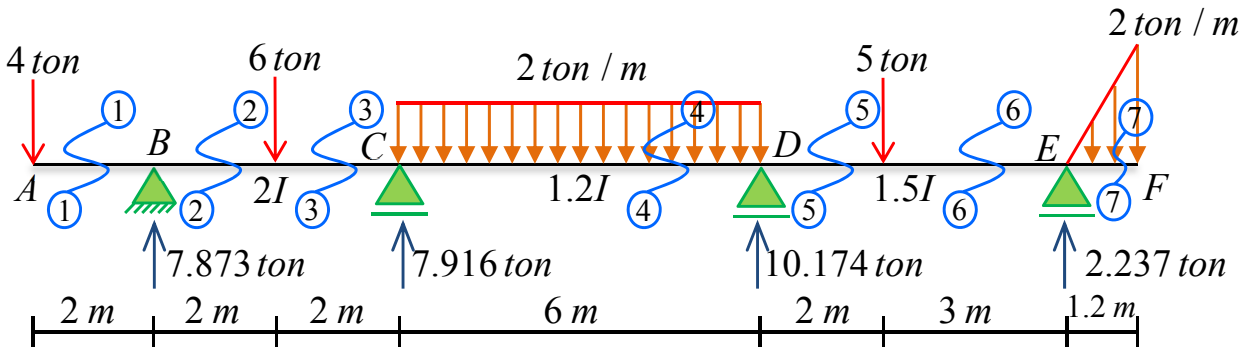
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 2\times x + 7.916 - 6 + 7.873 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2x + 5.789}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = 0 \Rightarrow -2x + 5.789 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2.895m}$$

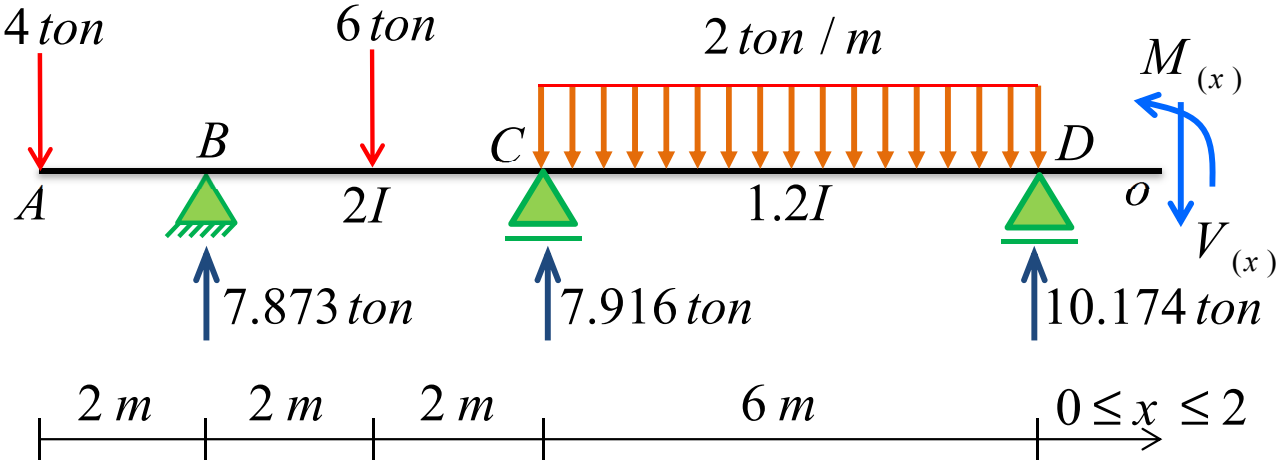
$$M_{(x=2.895)} = -(2.895)^2 + 5.789(2.895) - 4.508 \Rightarrow \boxed{M_{(x=2.895)} = 3.87\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 5-5 خواهیم داشت:



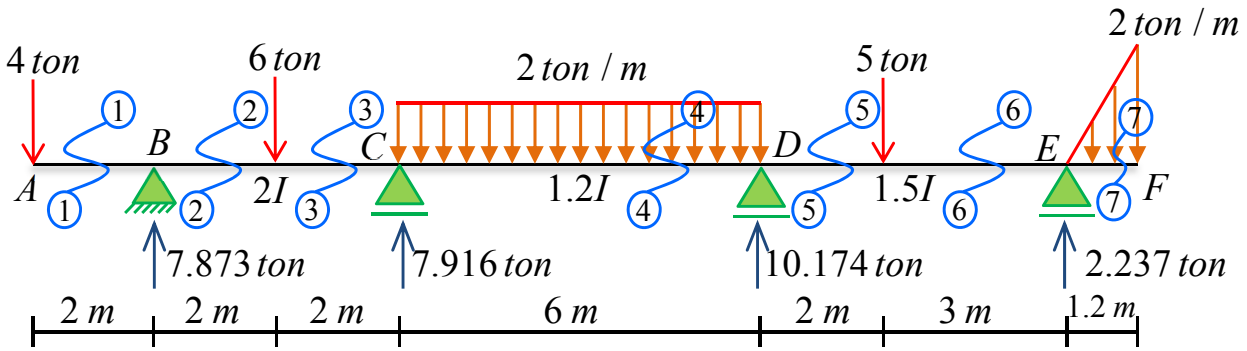
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 10.174\times x + 2\times 6\times(3+x) - 7.916\times(6+x) + 6\times(8+x) - 7.873\times(10+x) + 4\times(12+x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 3.963x - 5.774}$$

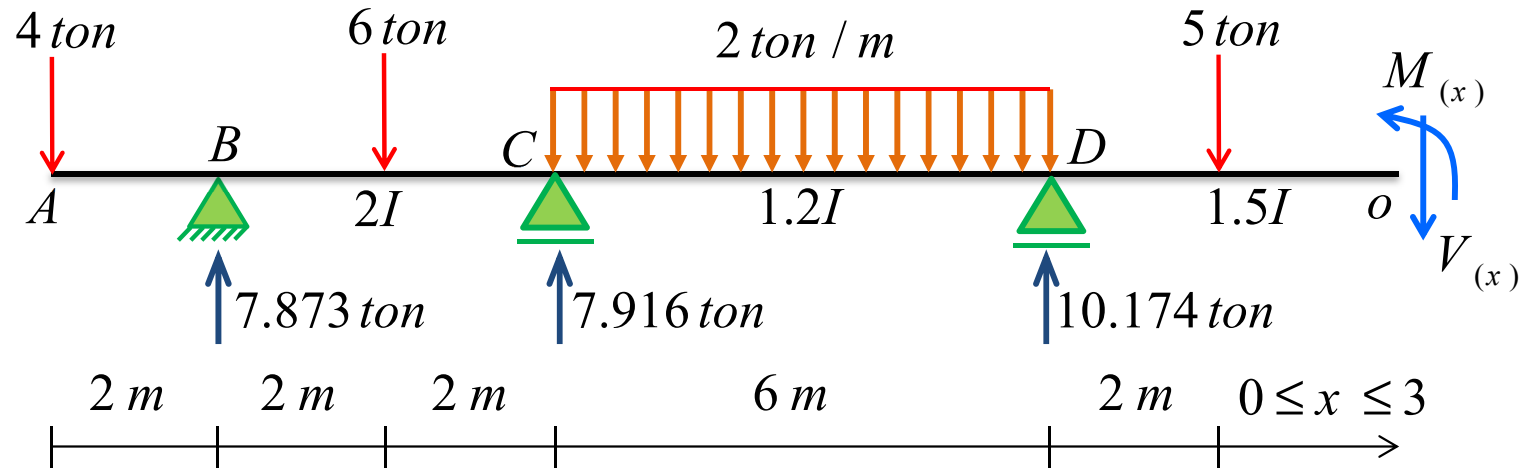
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 10.174 - 2\times 6 + 7.916 - 6 + 7.873 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 3.963\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 6-6 خواهیم داشت:



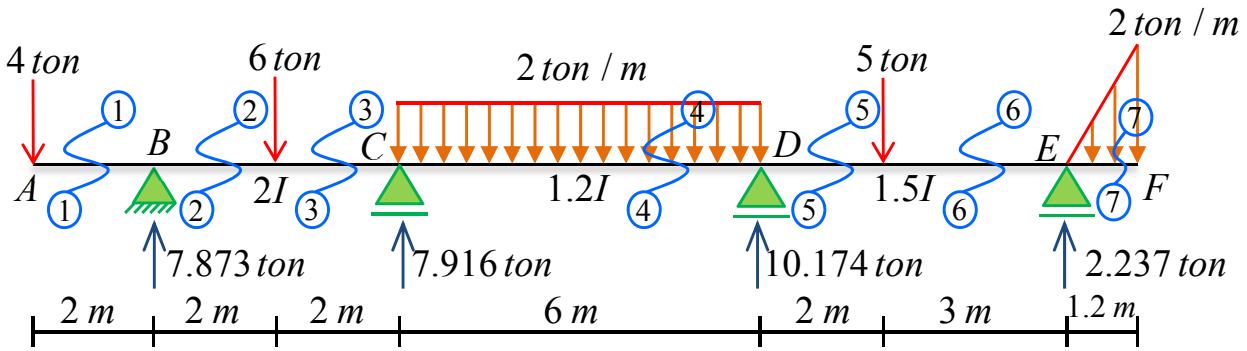
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 5\times x - 10.174\times(2+x) + 2\times 6\times(5+x) - 7.916\times(8+x) + 6\times(10+x) - 7.873\times(12+x) + 4\times(14+x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.037x + 2.152}$$

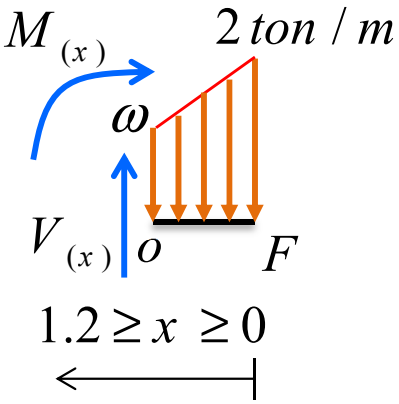
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 5 + 10.174 - 2\times 6 + 7.916 - 6 + 7.873 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -1.037\ ton}$$

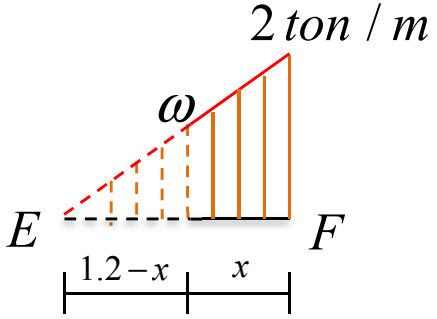
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 7-7 خواهیم داشت:





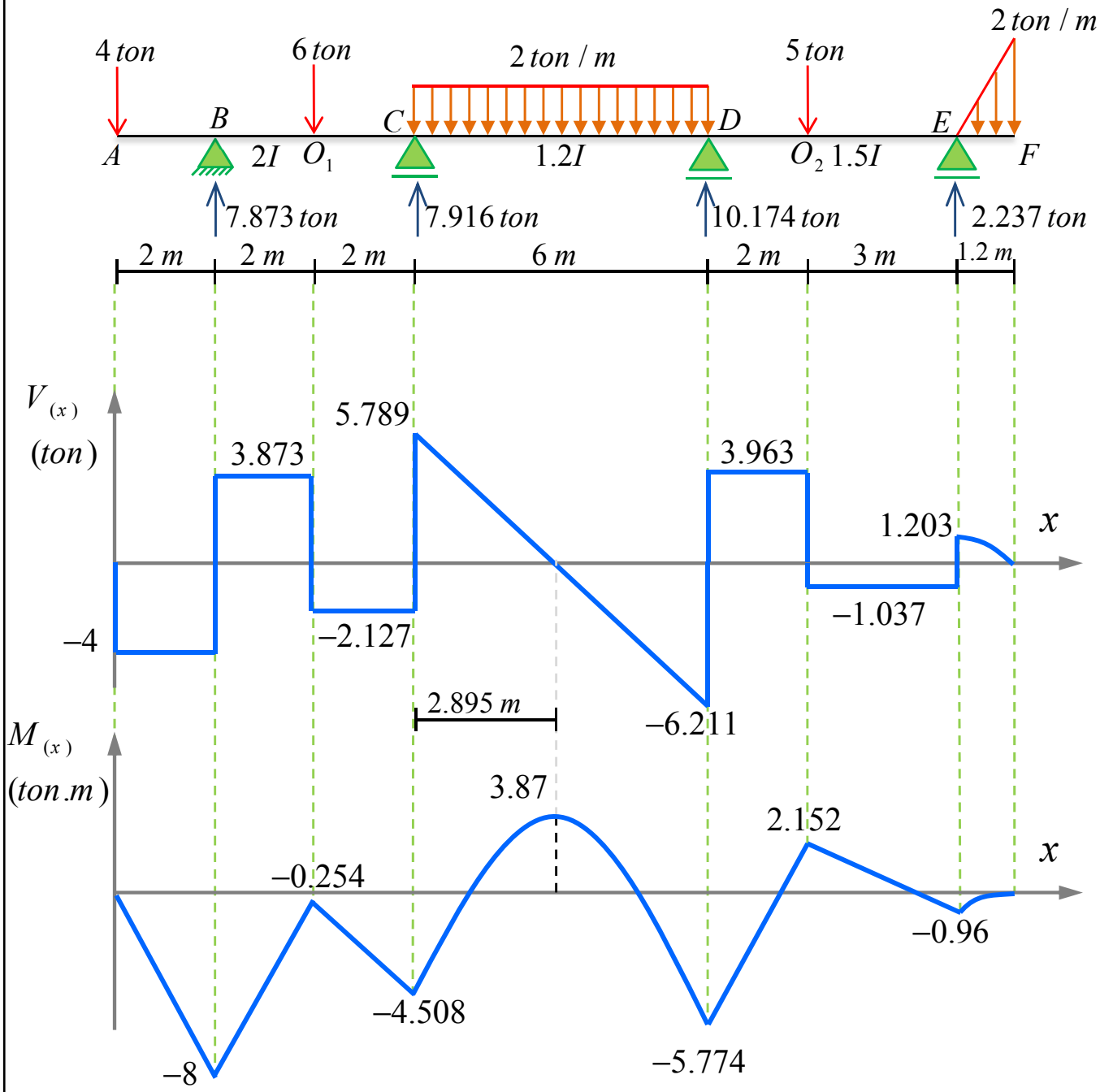
قضیه تالس : $\frac{1.2-x}{1.2}=\frac{\omega}{2} \Rightarrow \boxed{\omega=2-1.67x}$

$$\sum M_o=0 \Rightarrow -M_{(x)}-(2-1.67x)\times x\times\frac{x}{2}-\frac{1}{2}(1.67x)\times x\times\frac{2}{3}x=0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)}=0.277x^3-x^2}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow V_{(x)}-(2-1.67x)\times x-\frac{1}{2}(1.67x)\times x=0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)}=-0.831x^2+2x}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 8-



$AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -4\,ton$

$BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 3.873\,ton$

$O_1C: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -2.127\,ton$

$CD: \quad 0 \le x \le 6 \quad V_{(x)} = -2x + 5.789$

$DO_2: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 3.963\,ton$

$O_2E: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = -1.037\,ton$

$FE: \quad 1.2 \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = -0.831x^2 + 2x$

$AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -4x$

$BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 3.873x - 8$

$O_1C: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -2.127x - 0.254$

$CD: \quad 0 \le x \le 6 \quad M_{(x)} = -x^2 + 5.789x - 4.508$

$DO_2: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 3.963x - 5.774$

$O_2E: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = -1.037x + 2.152$

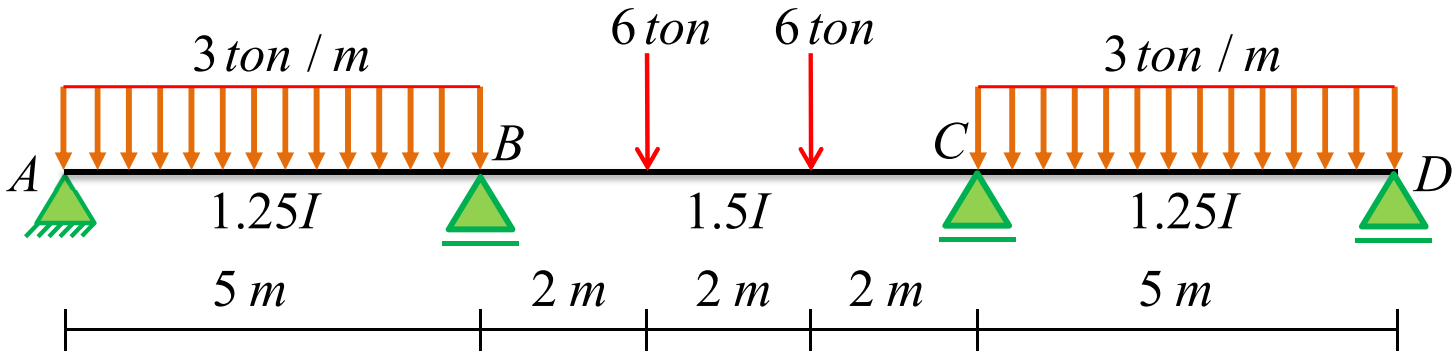
$FE: \quad 1.2 \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = 0.277x^3 - x^2$

ETABS File Name: **08-Example-08.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

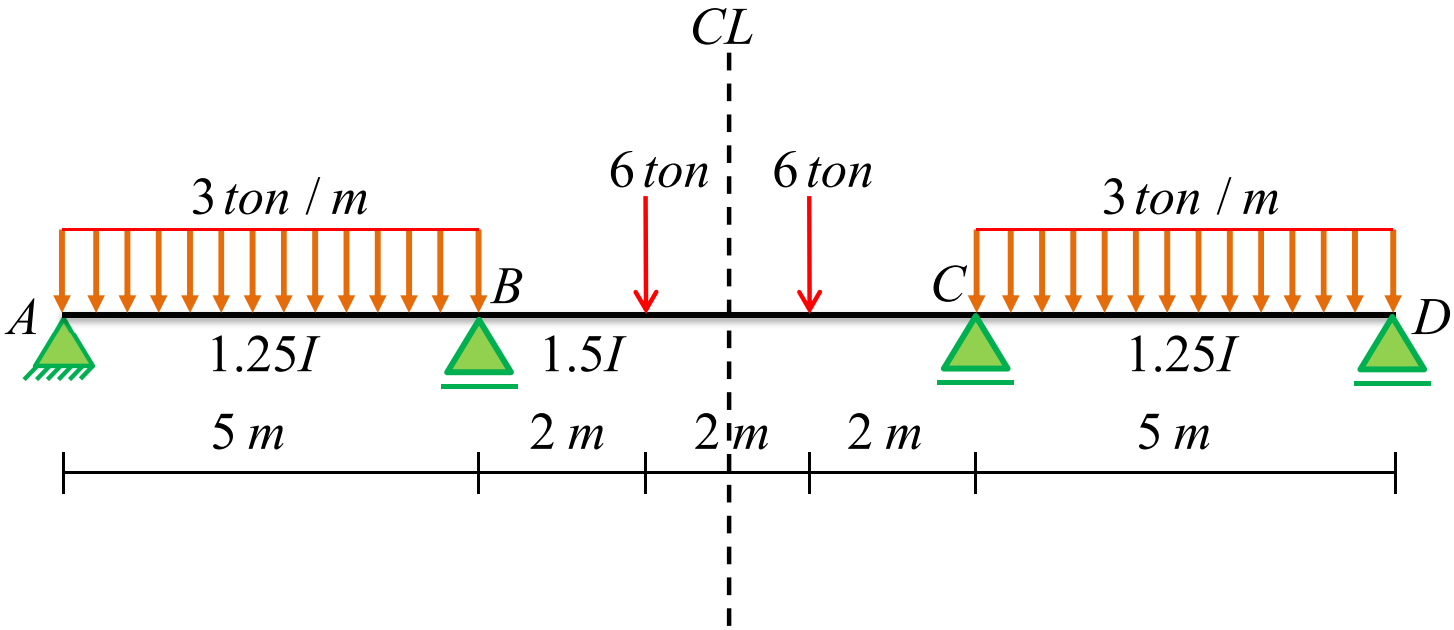
مثال 9- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$



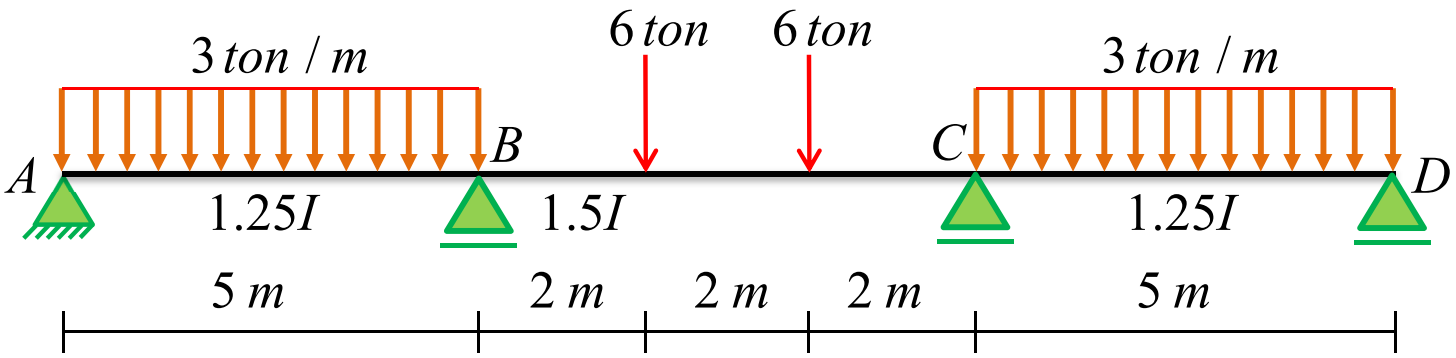
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 9-



محاسبه ضرایب پخش اعضا:

پاسخ مثال 9-



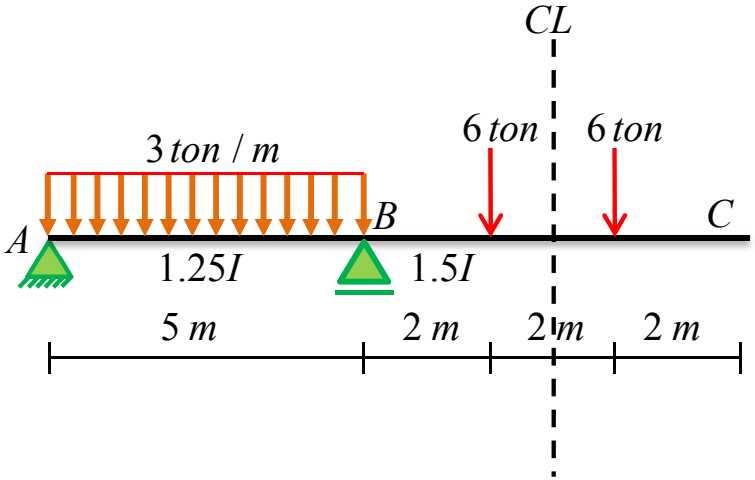
محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -6.25\,ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -8\,ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 9- شروع پخش لنگر:



پاسخ مثال 9- برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

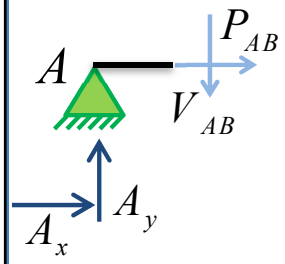


Fig 2

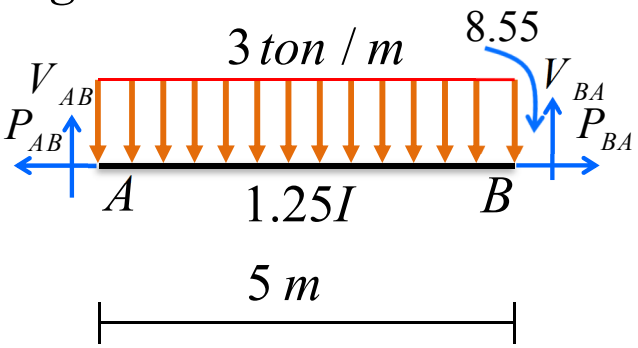


Fig 3

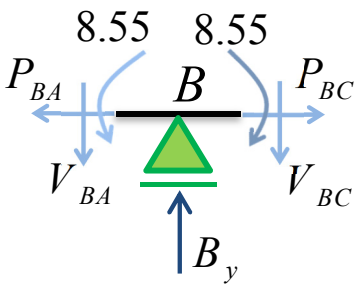
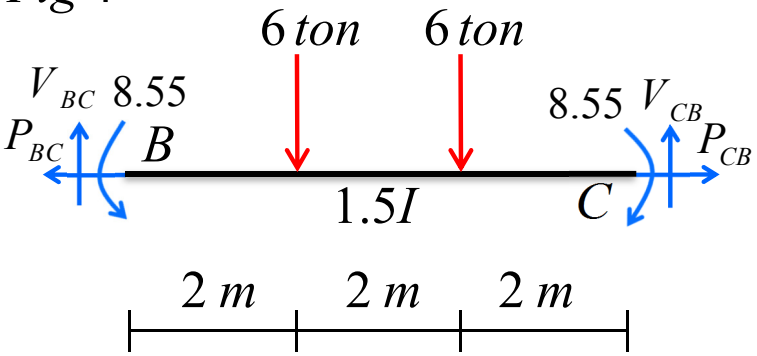
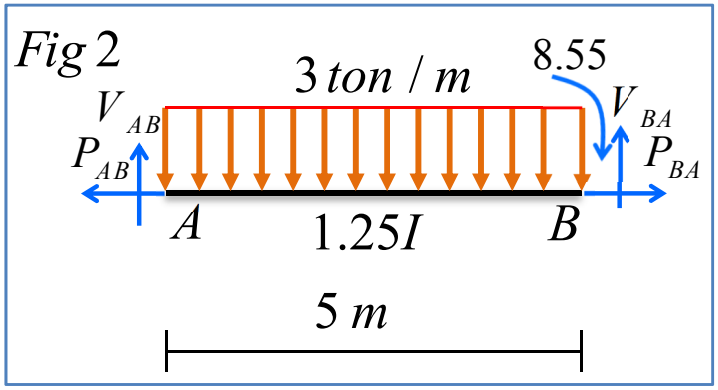


Fig 4



پاسخ مثال 9-

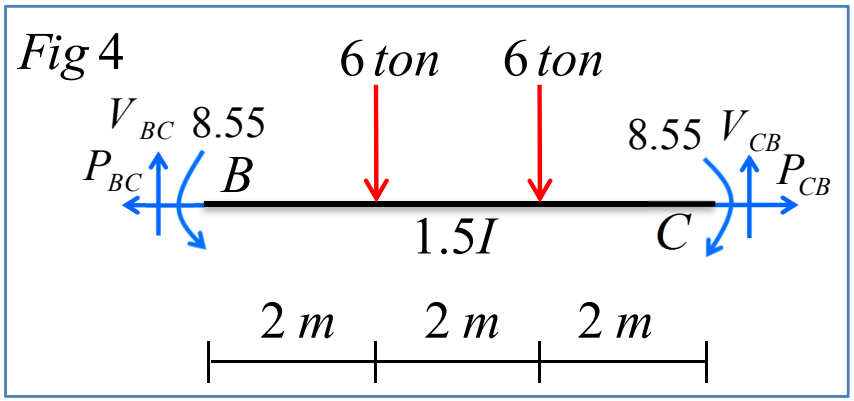
با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -(3\times 5)\times\left(\frac{5}{2}\right) - 8.55 + V_{BA}\times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = 9.21\,ton} \qquad (9.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{AB} - (3\times 5) + V_{BA} = 0 \quad \overset{(9.1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{AB} = 5.79\,ton} \qquad (9.2)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 8.55 - 6\times 2 - 6\times 4 - 8.55 + V_{CB}\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = 6\,ton} \qquad (9.3)$$

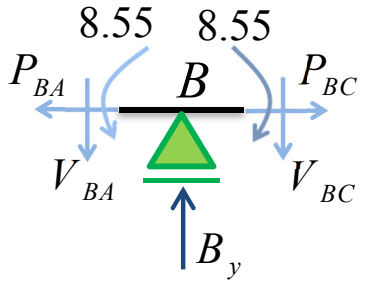
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} - 6 - 6 + V_{CB} = 0 \quad \overset{(9.3)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = 6\,ton} \qquad (9.4)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 9-

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

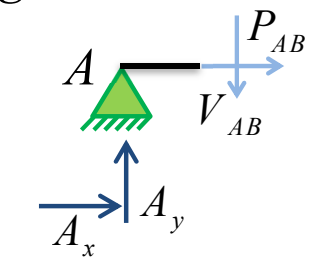
Fig 3



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{BA} - V_{BC} + B_y = 0 \overset{(9.1)\&(9.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 15.21\,ton} \quad (9.5)$$

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1

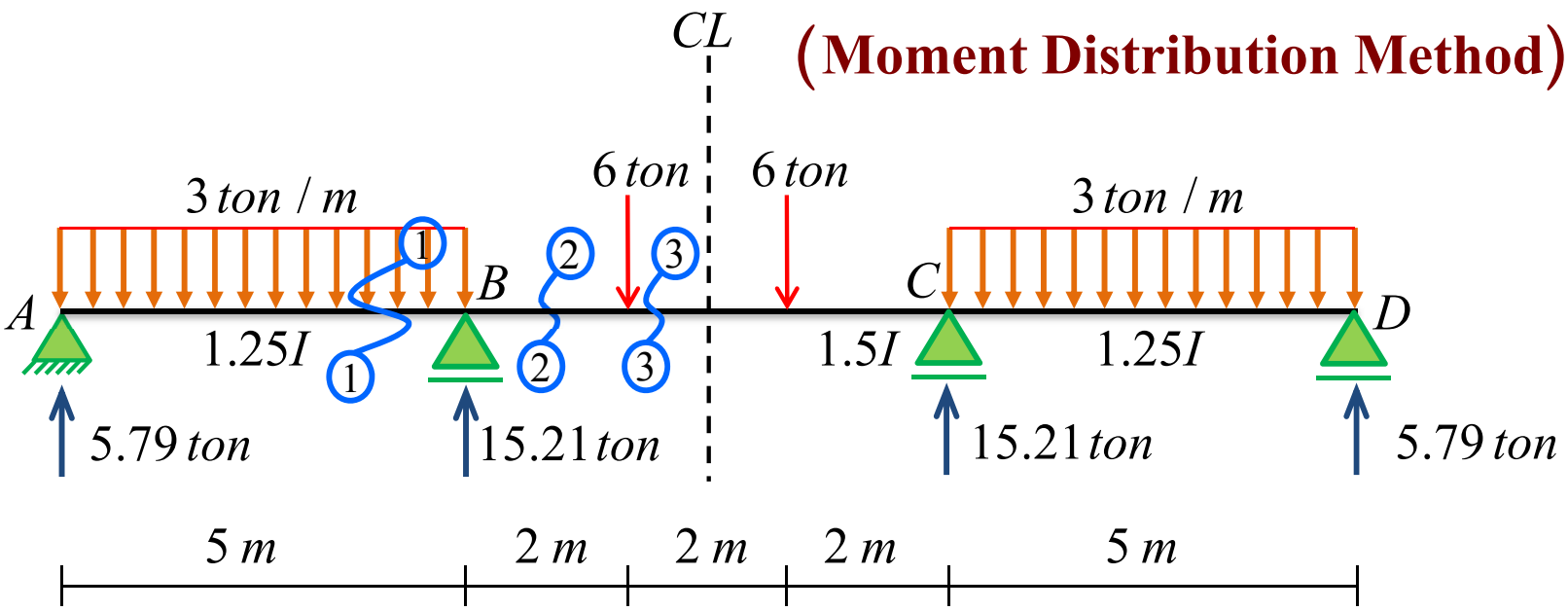


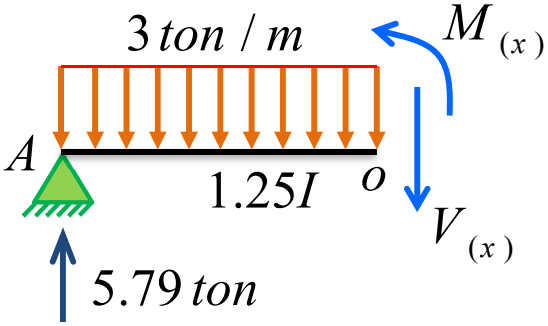
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{AB} + A_y = 0 \overset{(9.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 5.79\,ton} \quad (9.6)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0} \quad (9.7)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 9-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + (3\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 5.79\times x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 5.79x}$$

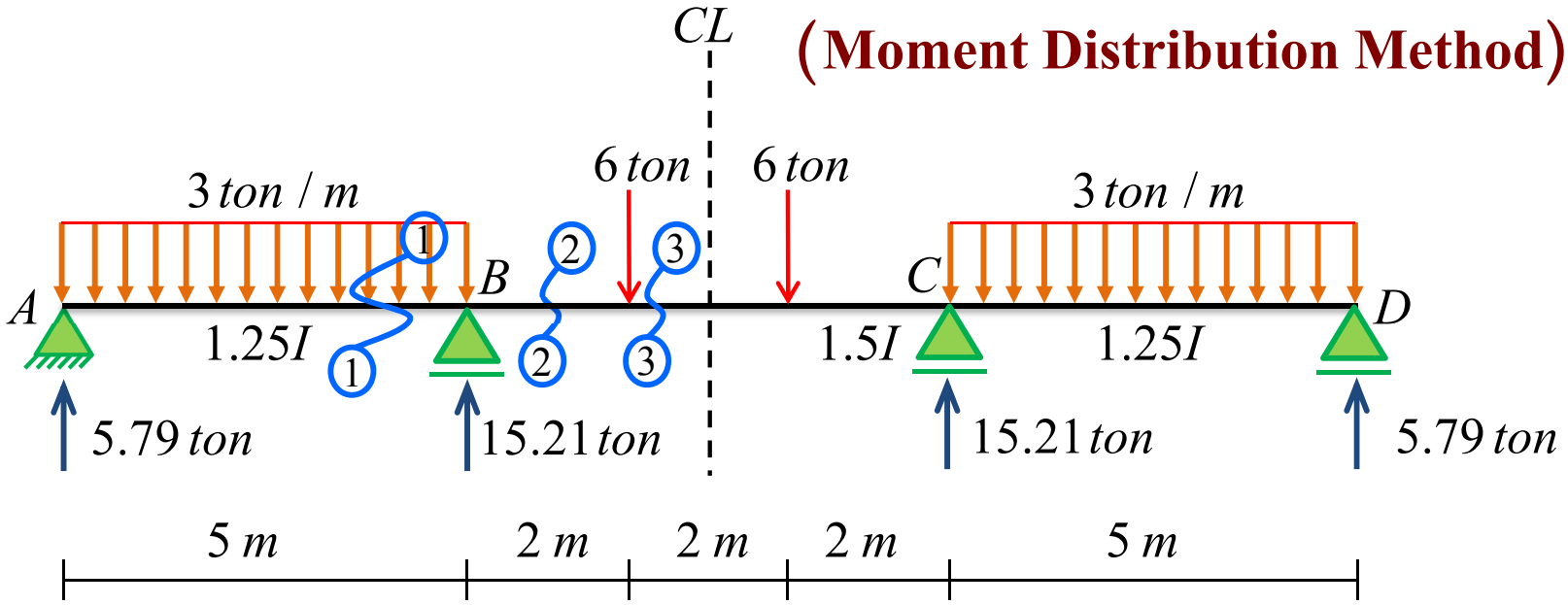
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - (3\times x) + 5.79 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -3x + 5.79}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 5.79 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1.93m}$$

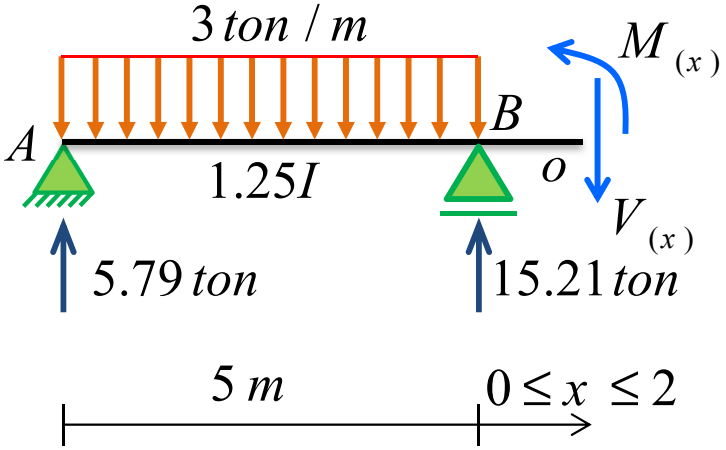
$$M_{(x=1.93)} = -1.5(1.93)^2 + 5.79(1.93) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x=1.93)} = 5.578\, ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 9-



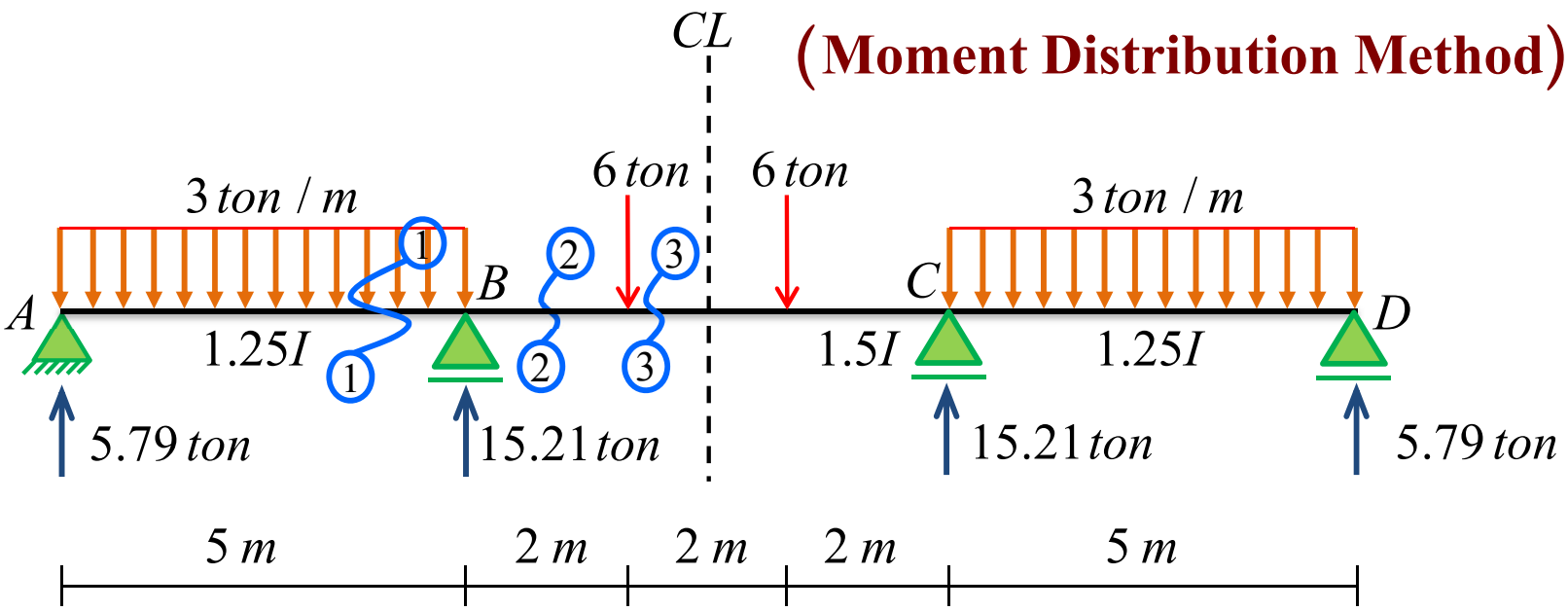
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



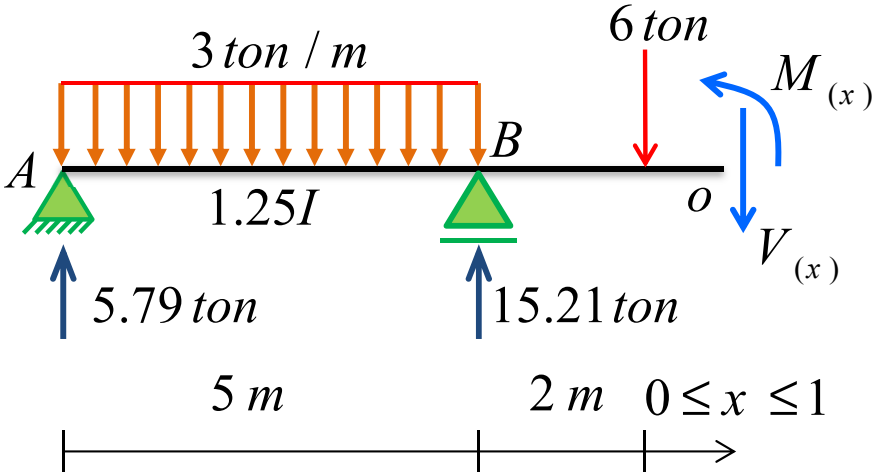
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} - 15.21 \times x + (3 \times 5) \times (2.5 + x) - 5.79 \times (5 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 6x - 8.55}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} + 15.21 - (3 \times 5) + 5.79 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 6\,ton}$$

پاسخ مثال 9-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:

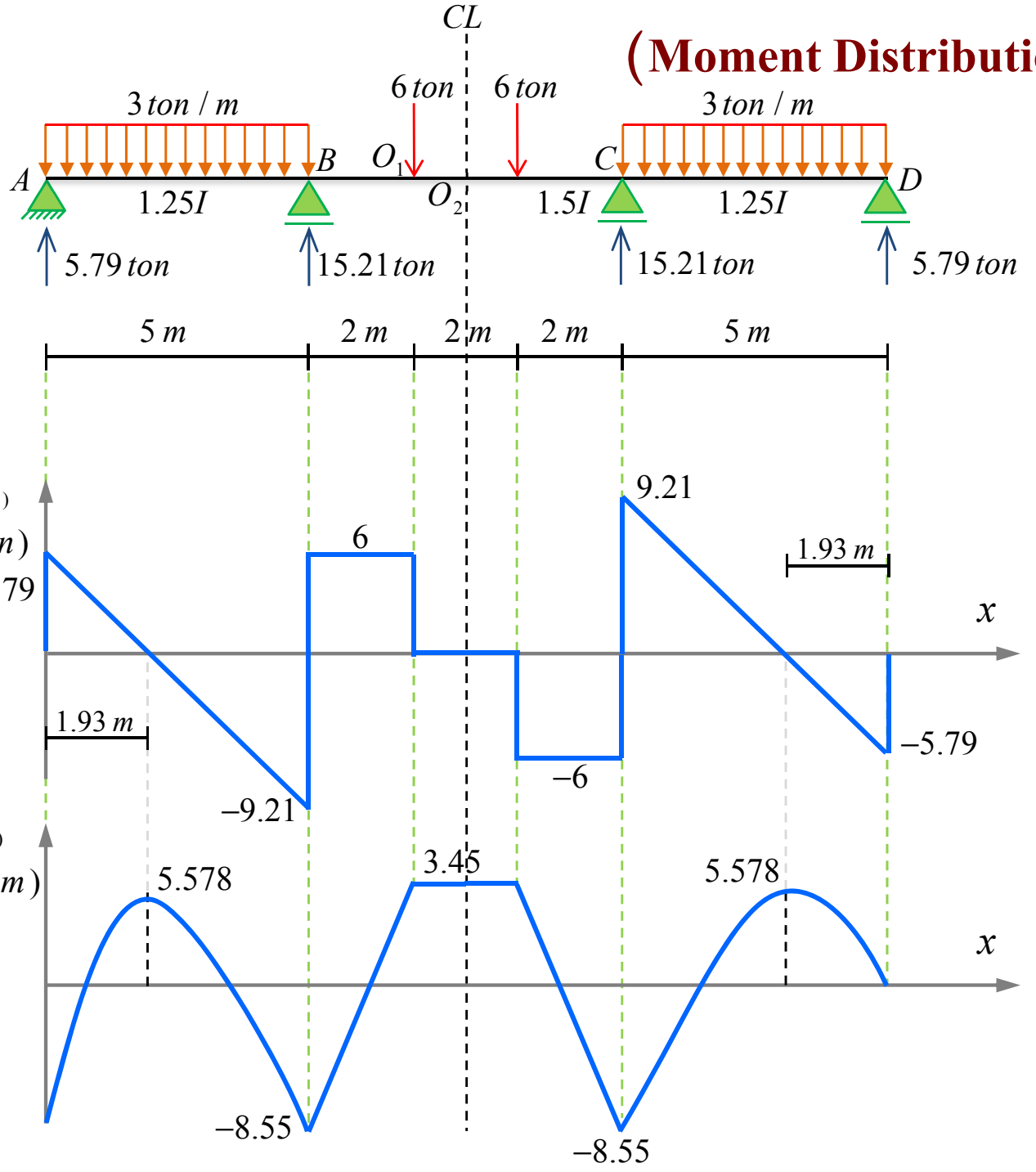


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 6\times x - 15.21\times(2+x) + (3\times 5)\times(4.5+x) - 5.79\times(7+x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 3.45\, ton.m}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 6 + 15.21 - (3\times 5) + 5.79 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 0}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 9-



نمودار نیروی برشی تقارن معکوس دارد.

$$AB: \quad 0 \le x \le 5 \quad V_{(x)} = -3x + 5.79$$
$$BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 6\,ton$$
$$O_1O_2: \quad 0 \le x \le 1 \quad V_{(x)} = 0$$

نمودار لنگر تقارن مستقیم دارد.

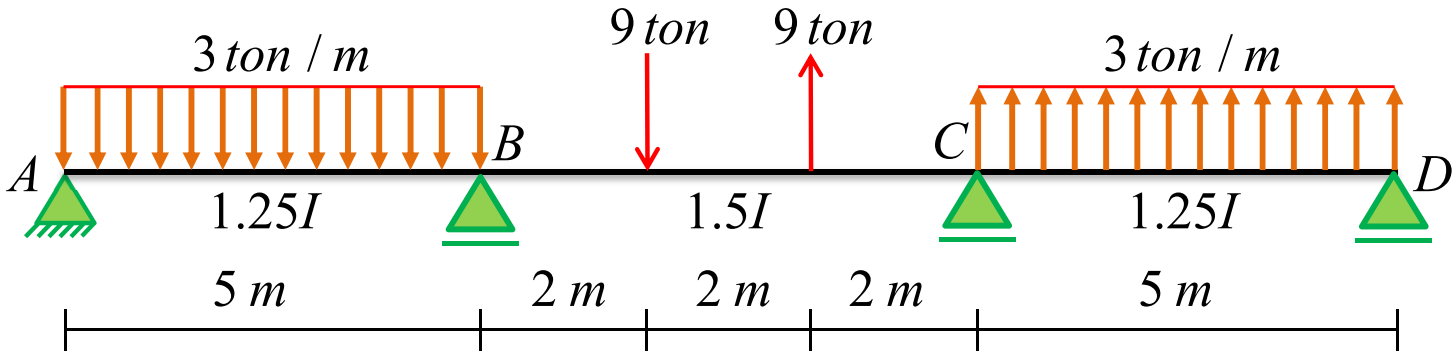
$$AB: \quad 0 \le x \le 5 \quad M_{(x)} = -1.5x^2 + 5.79x$$
$$BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 6x - 8.55$$
$$O_1O_2: \quad 0 \le x \le 1 \quad M_{(x)} = 3.45\,ton.m$$

ETABS File Name: **08-Example-09.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

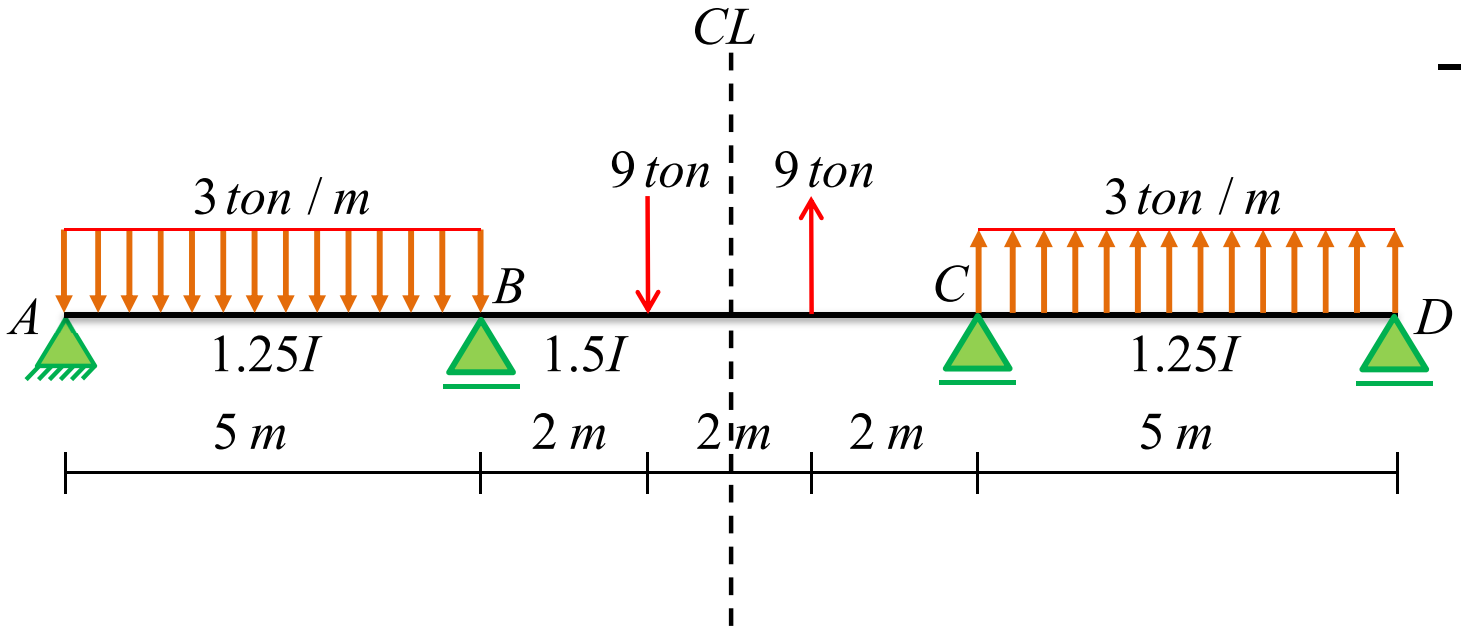
مثال 10- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$



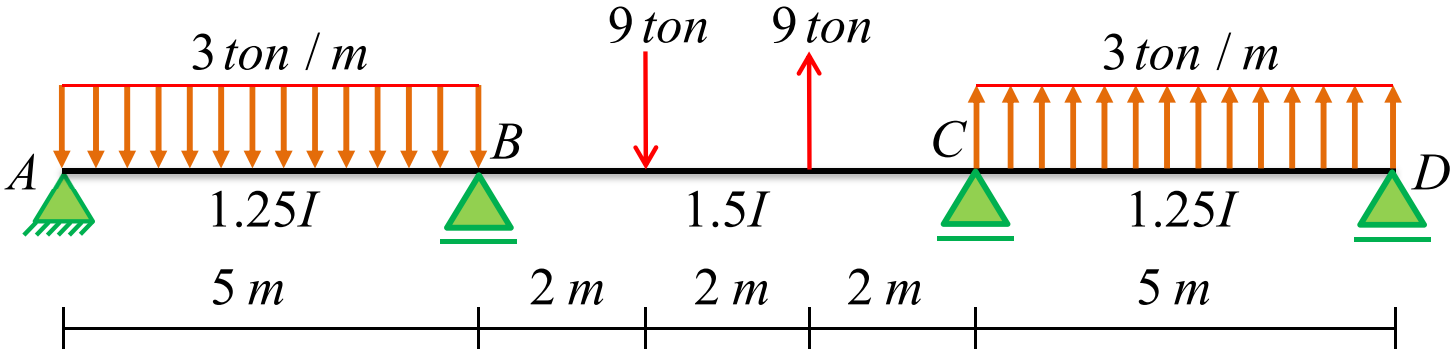
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 10-



محاسبه ضرایب پخش اعضا:

پاسخ مثال 10-



محاسبه لنگرهای گیرداری:

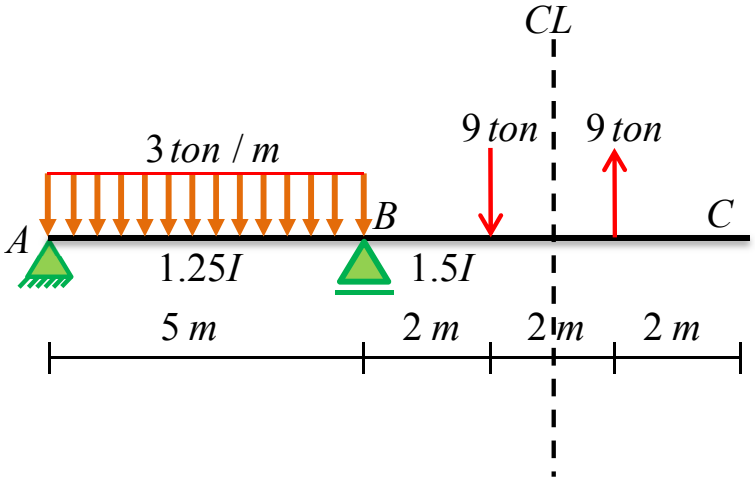
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -6.25\, ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -4\, ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 10- شروع پخش لنگر:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



پاسخ مثال 10-برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

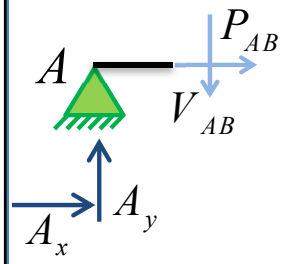


Fig 2

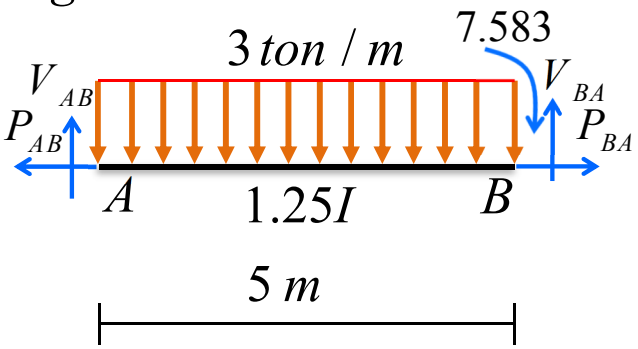


Fig 3

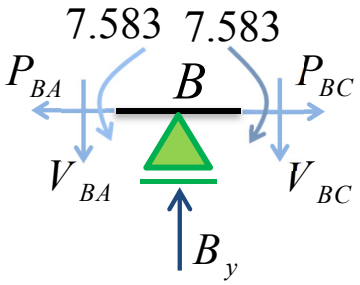
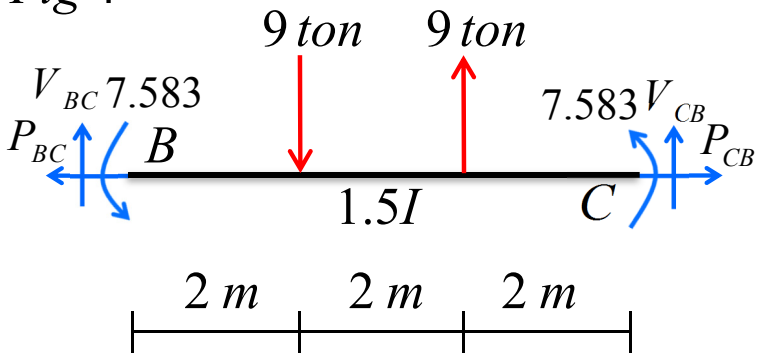
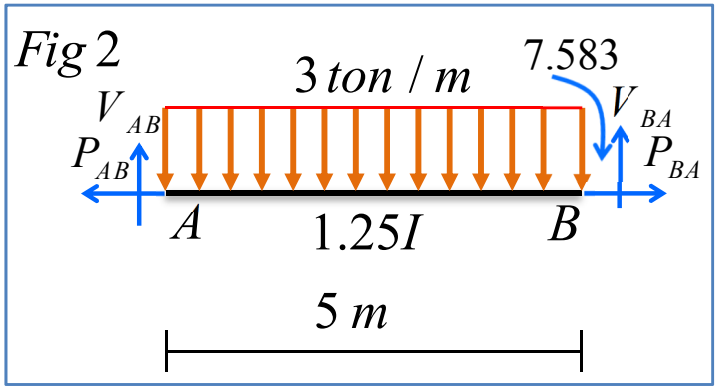


Fig 4



پاسخ مثال 10-

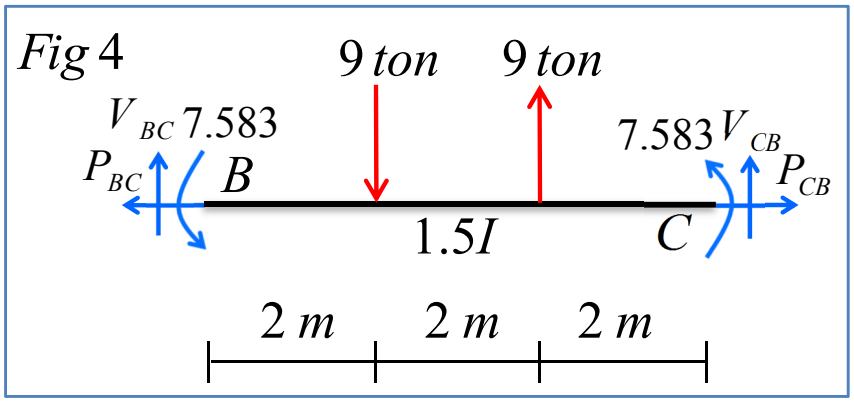
با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(3\times5)\times\left(\frac{5}{2}\right) - 7.583 + V_{BA}\times5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 9.017\,ton} \quad (10.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - (3\times5) + V_{BA} = 0 \overset{(10.1)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 5.983\,ton} \quad (10.2)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

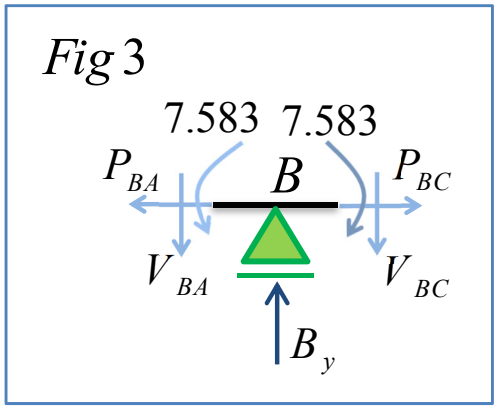


$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 7.583 - 9\times2 + 9\times4 + 7.583 + V_{CB}\times6 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = -5.528\,ton} \quad (10.3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} - 9 - 9 + V_{CB} = 0 \overset{(10.3)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 5.528\,ton} \quad (10.4)$$

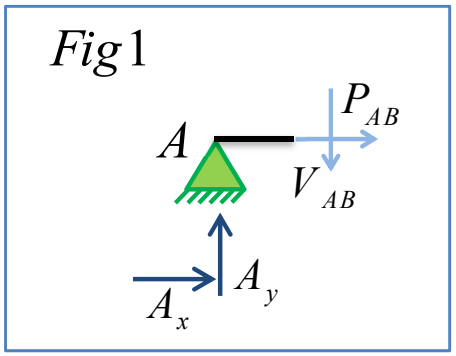
پاسخ مثال 10-

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{BA} - V_{BC} + B_y = 0 \overset{(10.1)\&(10.4)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 14.545\, ton} \quad (10.5)$$

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

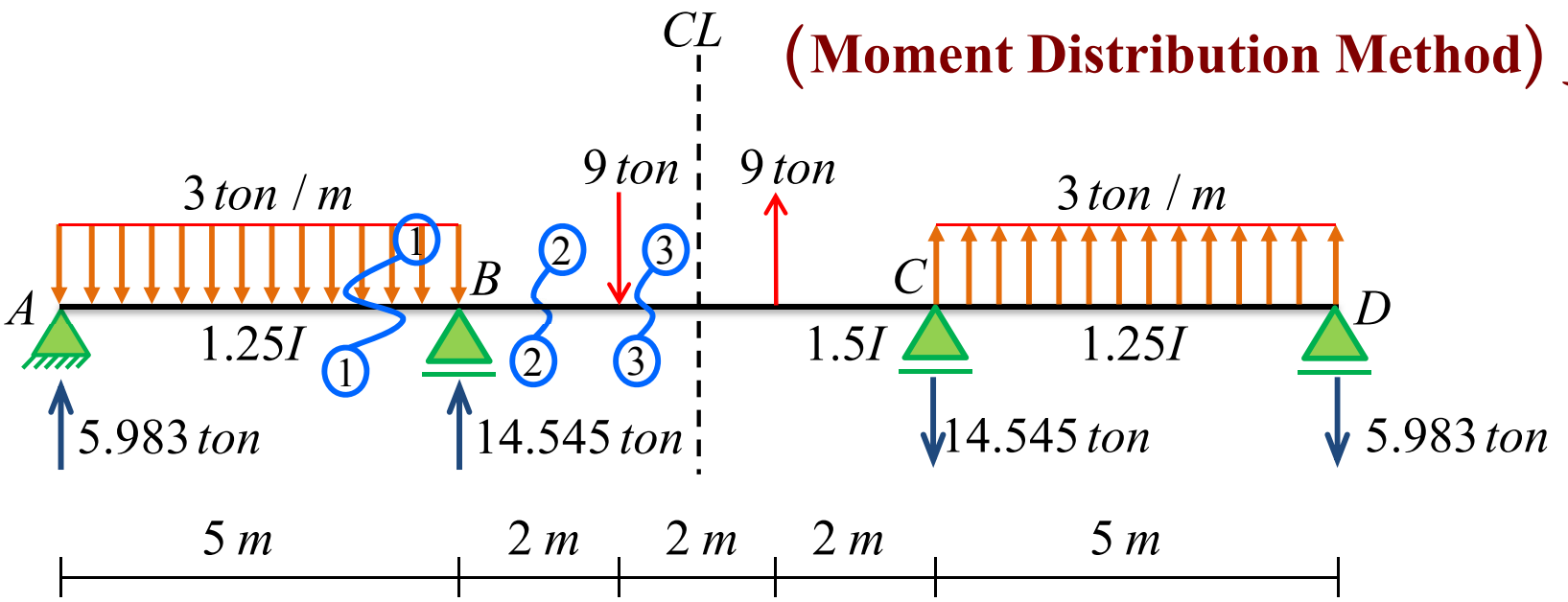


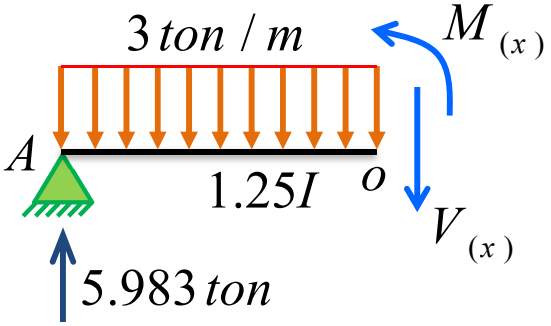
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{AB} + A_y = 0 \overset{(10.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 5.983\, ton} \quad (10.6)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0} \quad (10.7)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 10-





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 1-1 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + (3\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 5.983\times x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 5.983x}$$

$0 \le x \le 5$

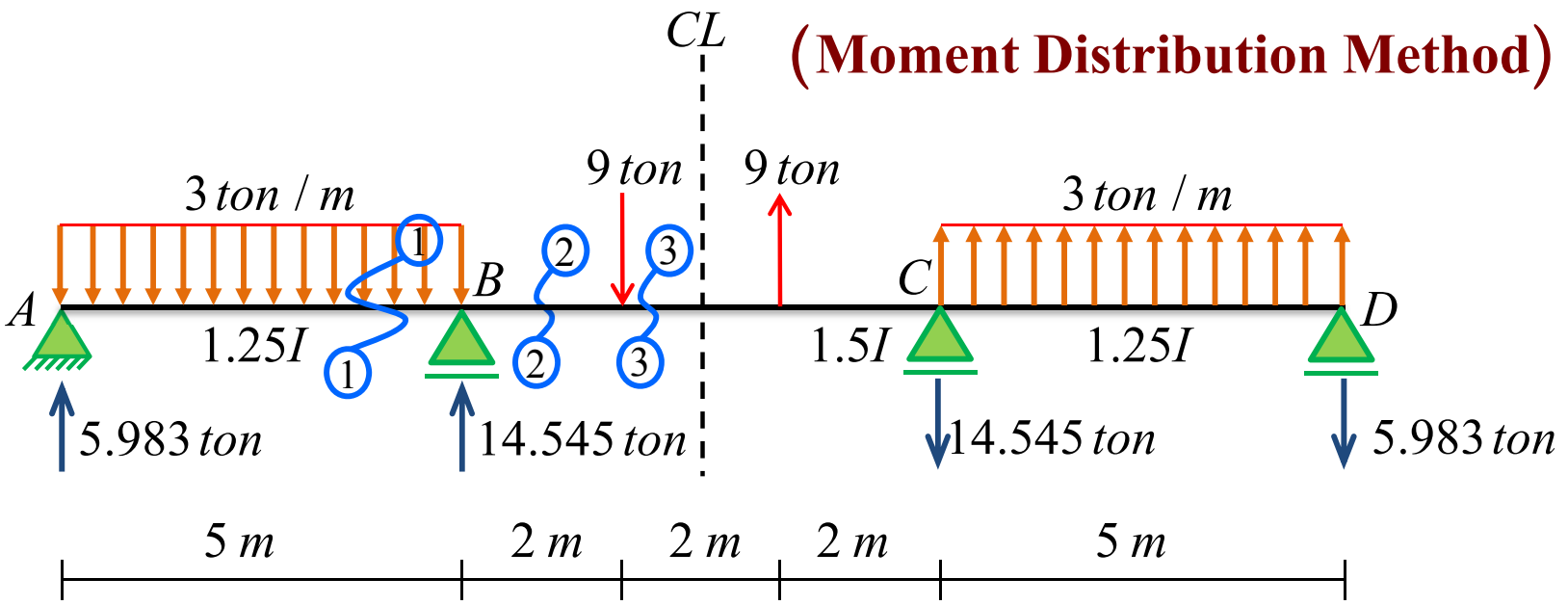
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - (3\times x) + 5.983 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -3x + 5.983}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 5.983 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1.994m}$$

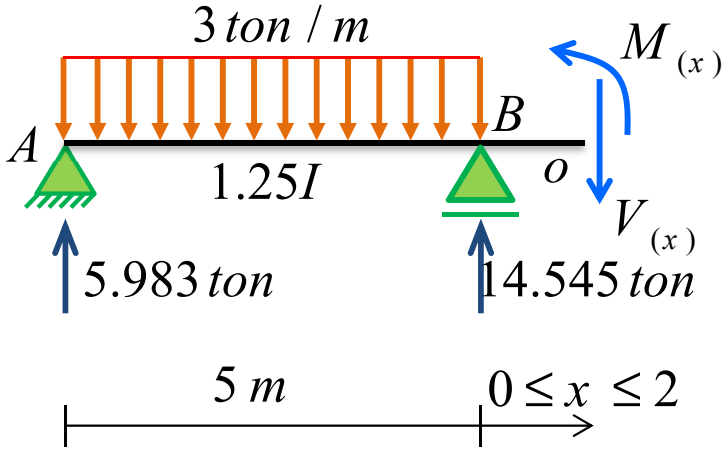
$$M_{(x=1.994)} = -1.5(1.994)^2 + 5.983(1.994) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x=1.994)} = 5.966\, ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 10-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:

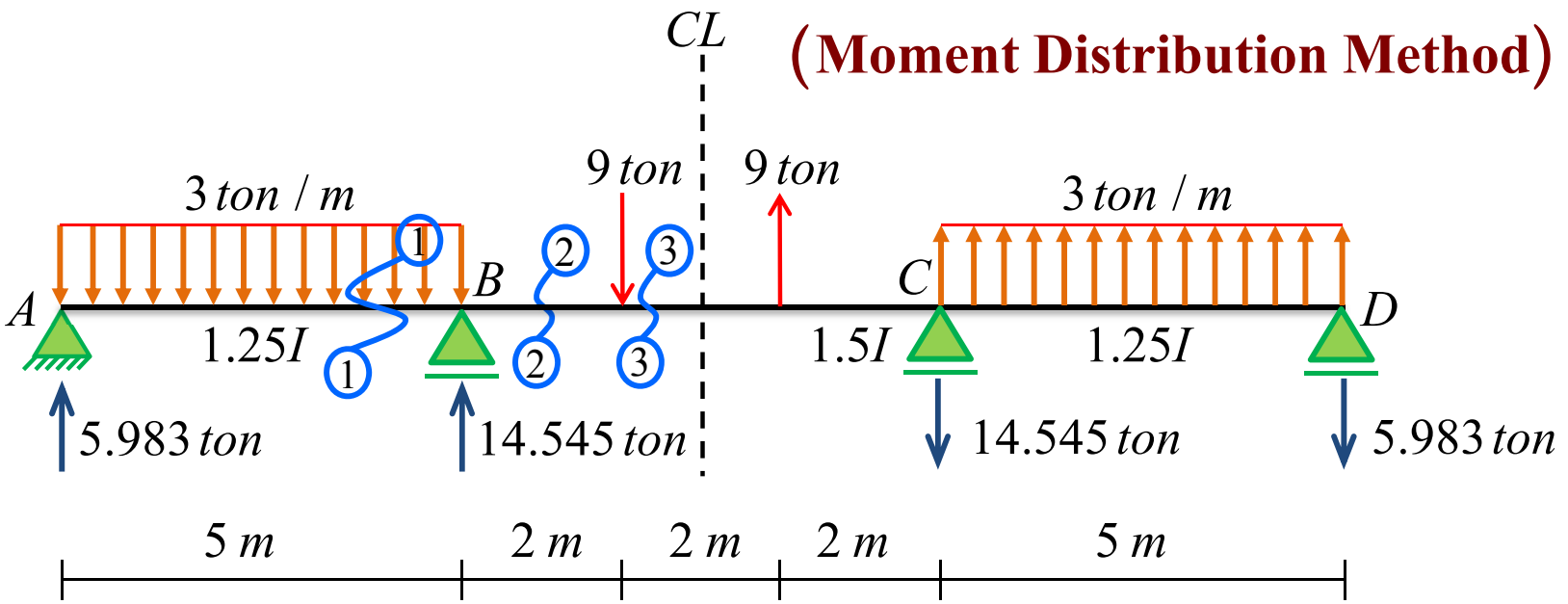


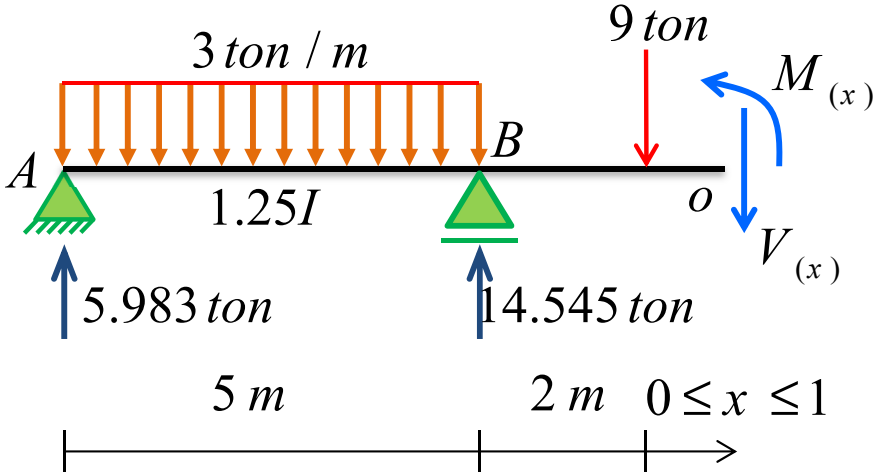
$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} - 14.545\times x + (3\times 5)\times(2.5+x) - 5.983\times(5+x) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = 5.528x - 7.585}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -V_{(x)} + 14.545 - (3\times 5) + 5.983 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{(x)} = 5.528\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 10-





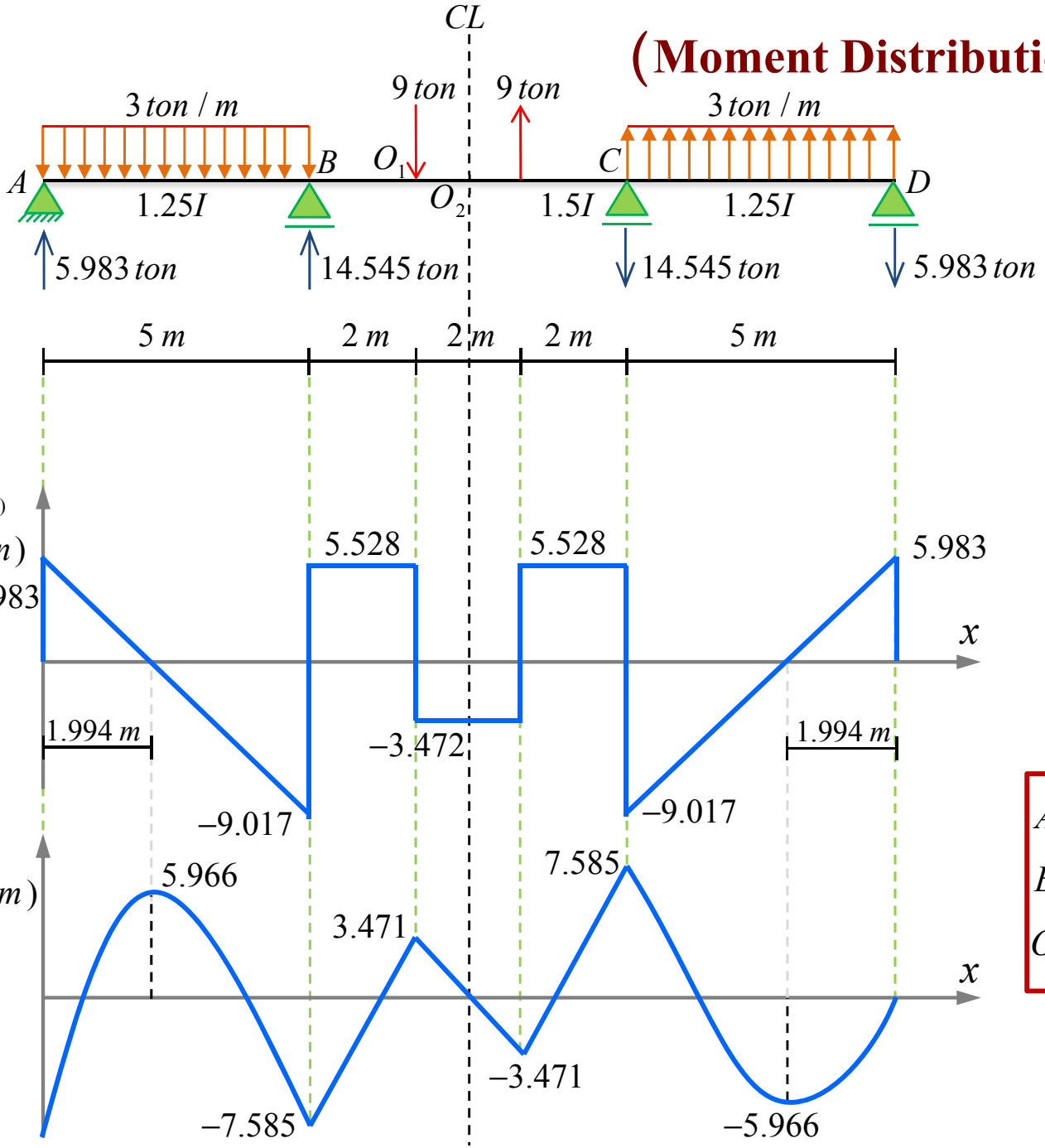
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} + 9\times x - 14.545\times(2+x) + (3\times 5)\times(4.5+x) - 5.983\times(7+x) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = -3.472x + 3.471}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -V_{(x)} - 9 + 14.545 - (3\times 5) + 5.983 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{(x)} = -3.472\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 10-



نمودار نیروی برشی تقارن مستقیم دارد.

$$AB: \quad 0 \le x \le 5 \quad V_{(x)} = -3x + 5.983$$
$$BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 5.528\ ton$$
$$O_1O_2: \quad 0 \le x \le 1 \quad V_{(x)} = -3.472\ ton$$

نمودار لنگر تقارن معکوس دارد.

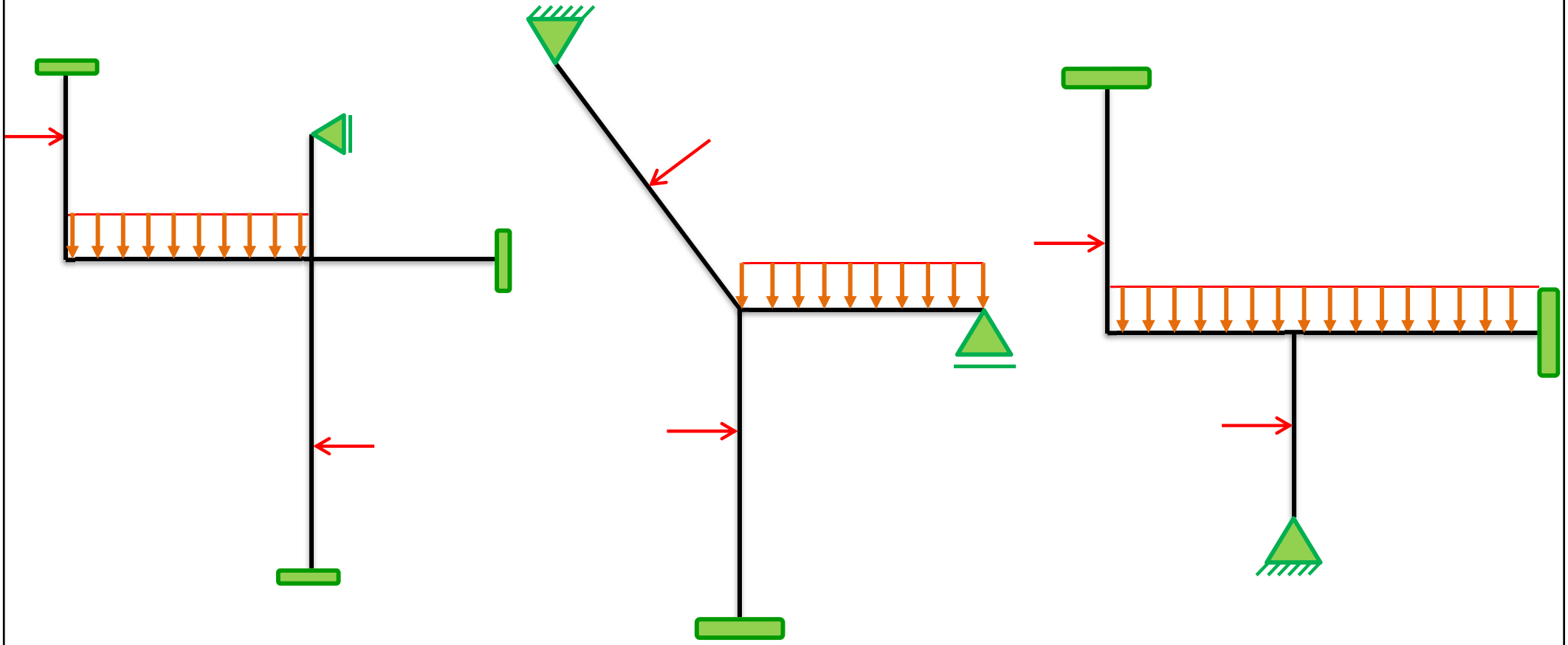
$$AB: \quad 0 \le x \le 5 \quad M_{(x)} = -1.5x^2 + 5.983x$$
$$BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 5.528x - 7.585$$
$$O_1O_2: \quad 0 \le x \le 1 \quad M_{(x)} = -3.472x + 3.471$$

ETABS File Name: **08-Example-10.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

در قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی، آنالیز سازه به روش پخش لنگر تفاوت چندانی با تیرهای سرتاسری ندارد. فقط اعضای مورب یا قائم باعث می‌شود در شمای محاسباتی علاوه بر محاسبات افقی یک سری محاسبات به صورت قائم نیز نوشته شود.

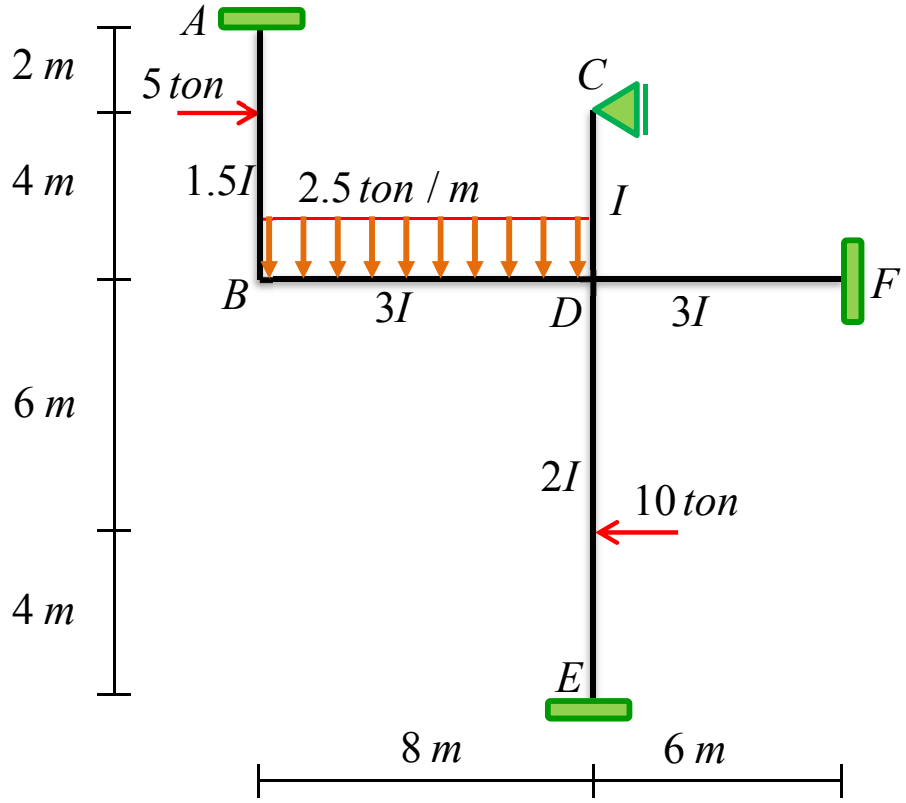


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مثال 11- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$

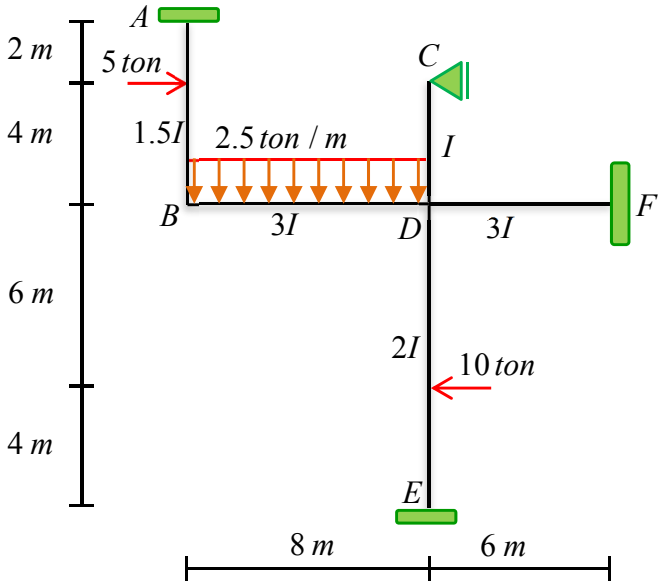


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

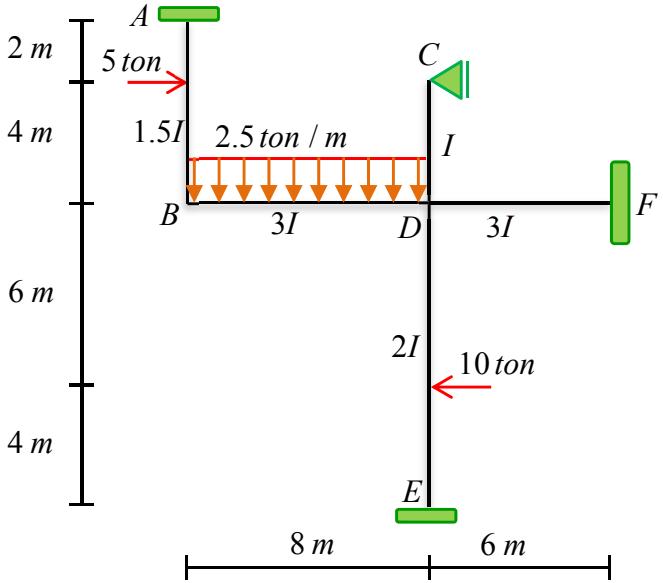
محاسبه ضرایب پخش اعضا:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

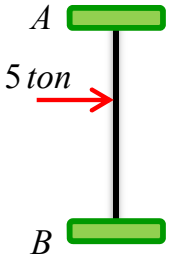
الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

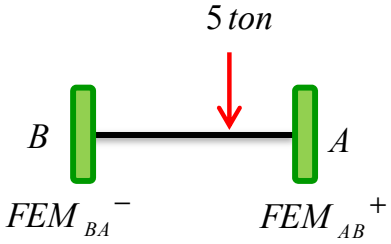


محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BD} = -FEM_{DB} = -\frac{40}{3}\,ton.m}$$



در جهت متعارف بارگذاری چرخانده شود



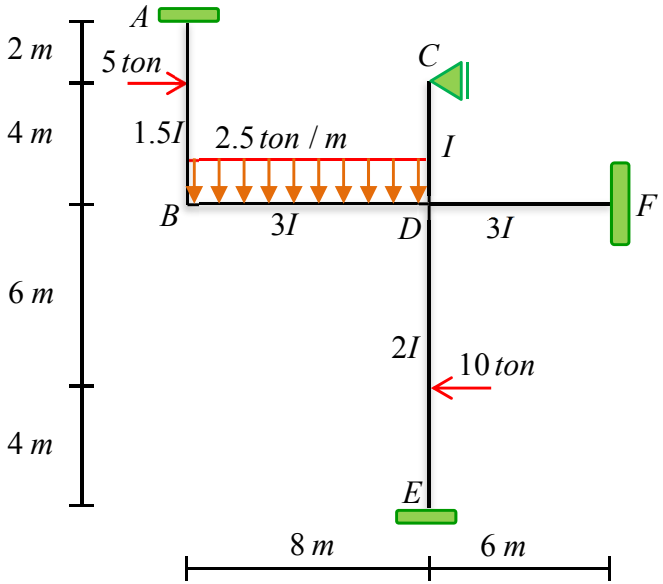
$$\Rightarrow \boxed{FFM_{BA} = -\frac{20}{9}\,ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = \frac{40}{9}\,ton.m}$$

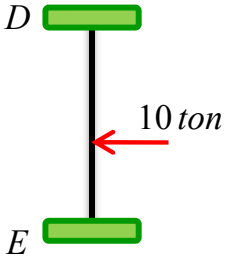
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

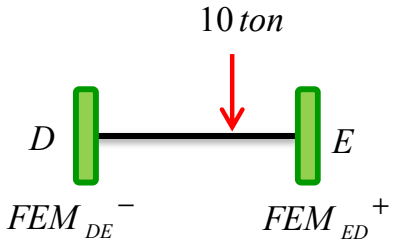
پاسخ مثال 11-



محاسبه لنگرهای گیرداری:



در جهت متعارف بارگذاری چرخانده شود



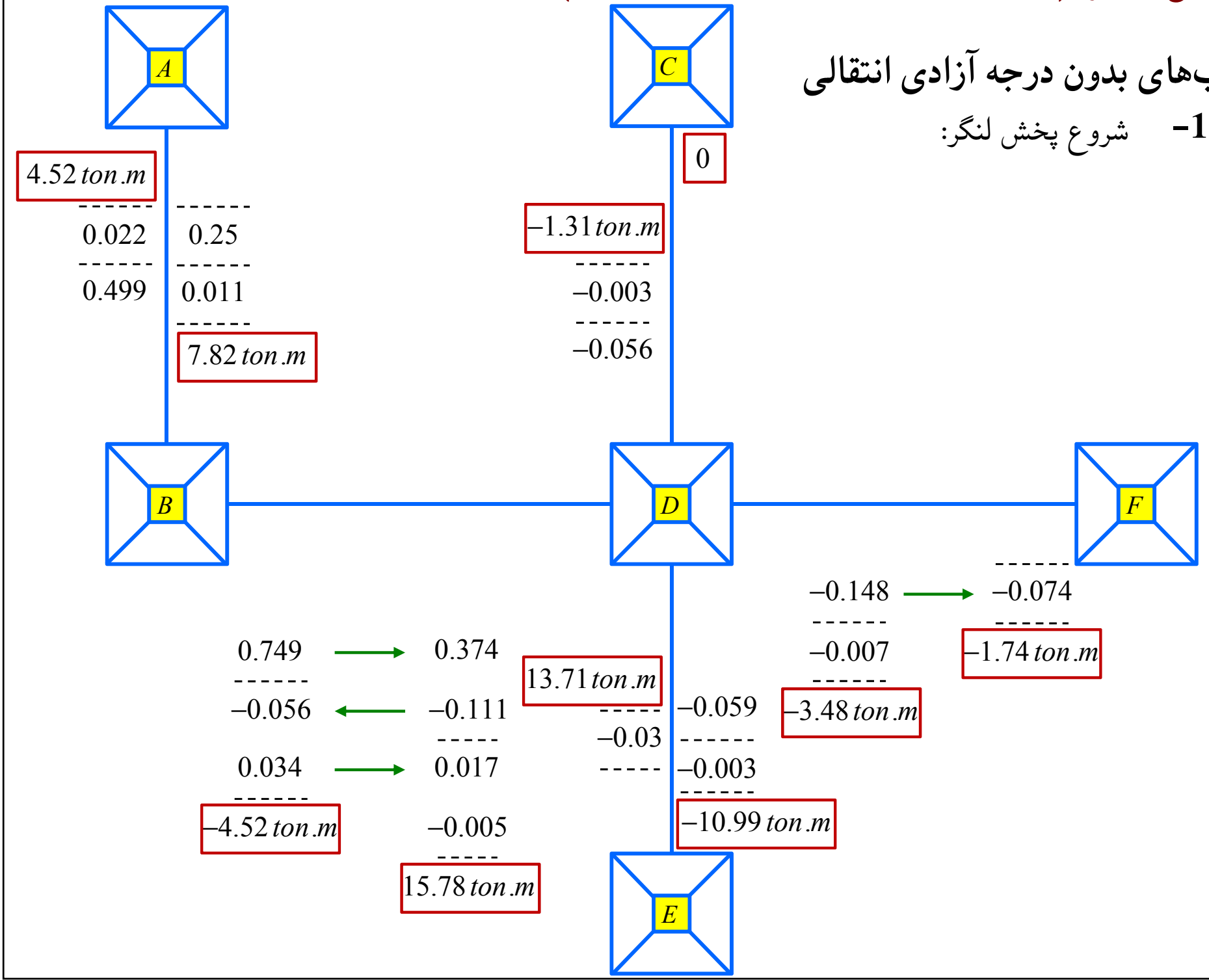
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{DE} = -9.6\, ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{ED} = 14.4\, ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

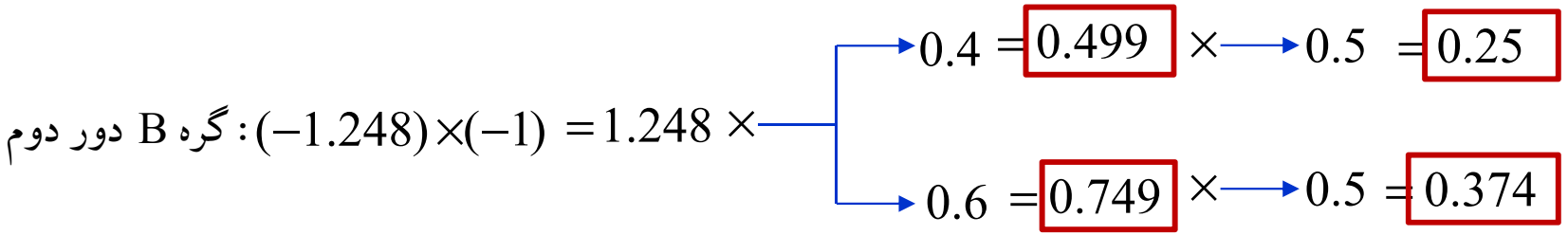
پاسخ مثال 11- شروع پخش لنگر:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

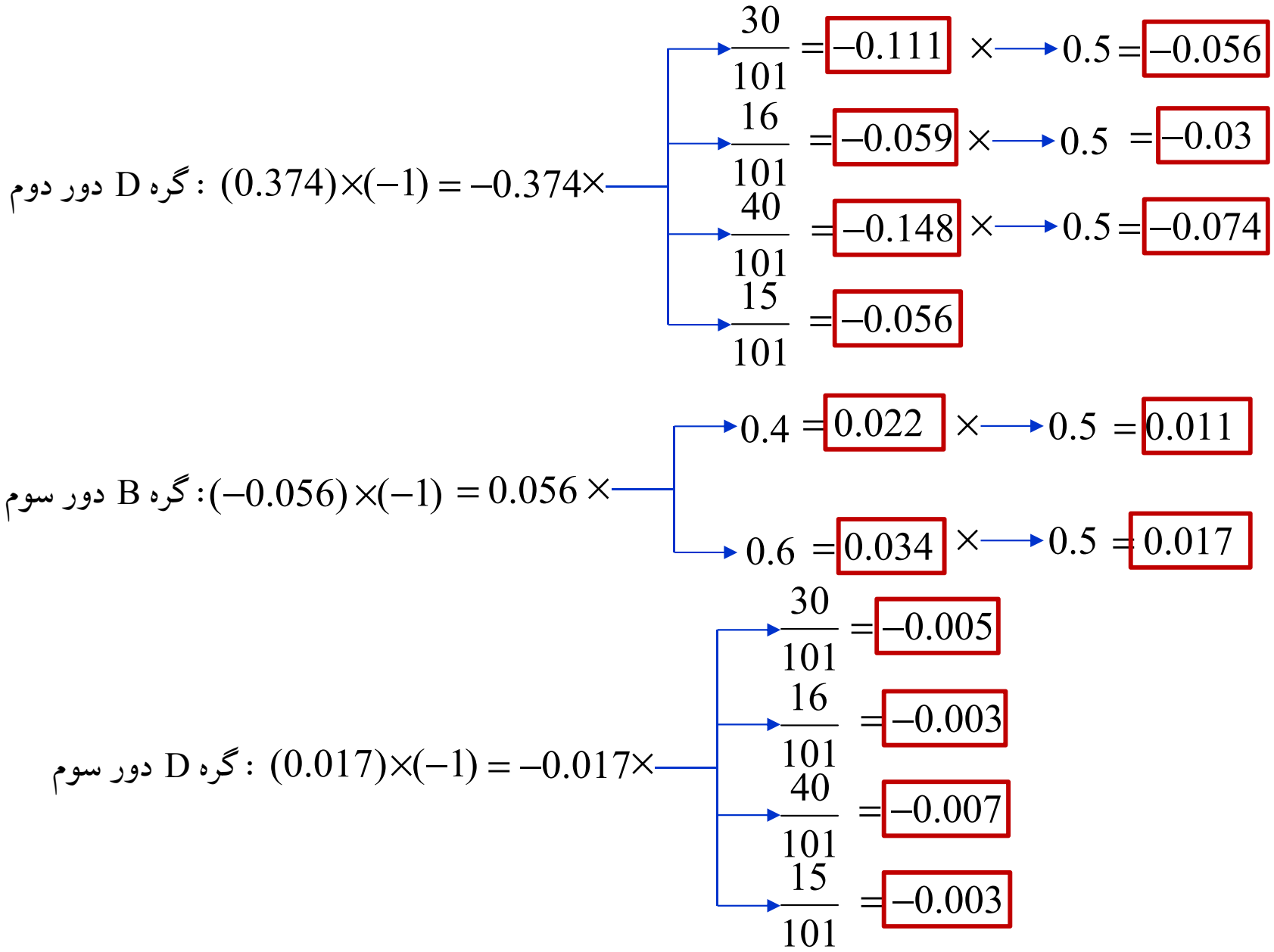
پاسخ مثال 11- شروع پخش لنگر:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11- شروع پخش لنگر:

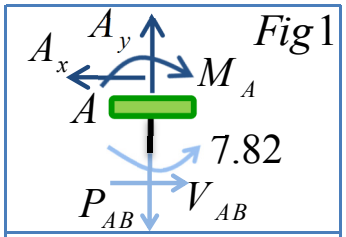


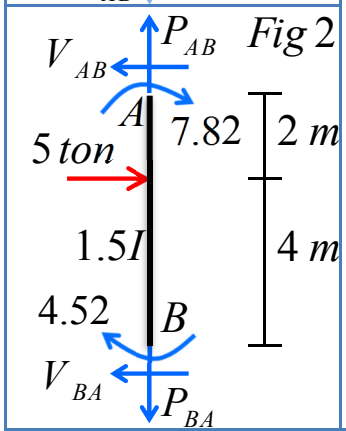
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

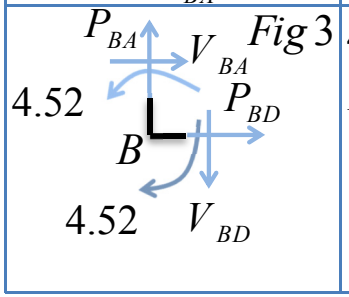
الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

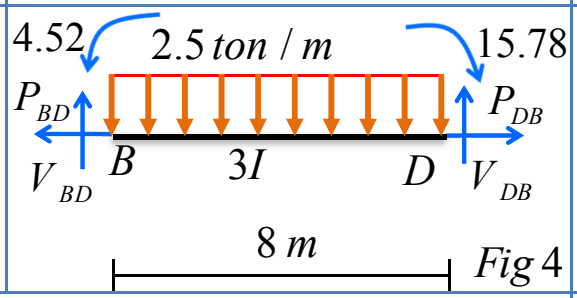
پاسخ مثال 11-

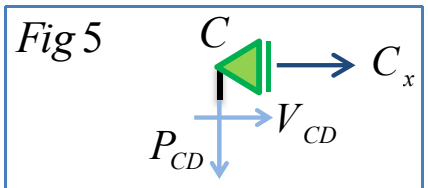
برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

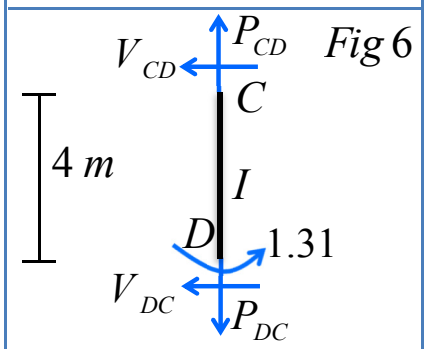


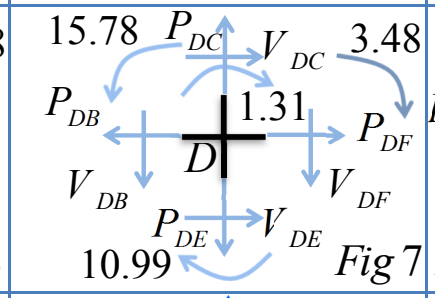


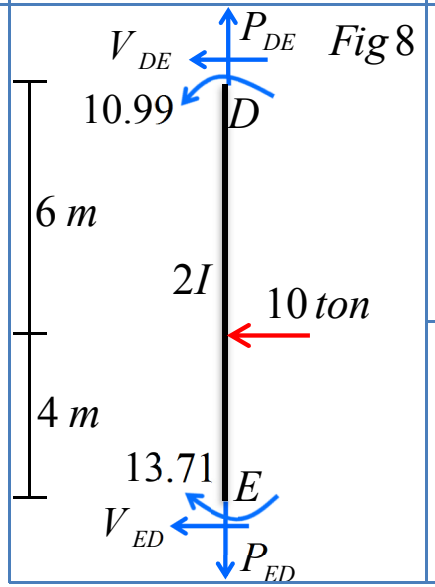


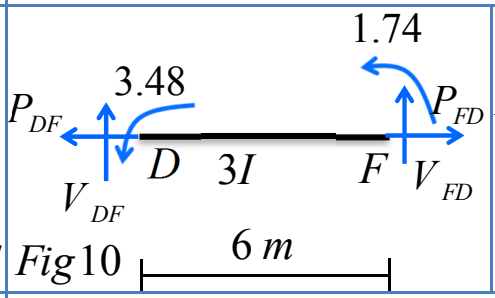


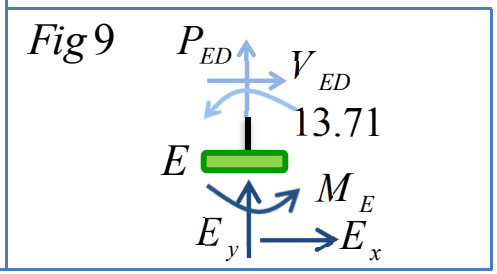


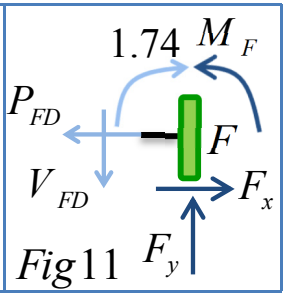






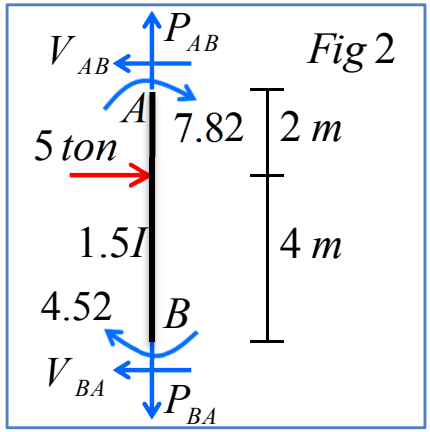






الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

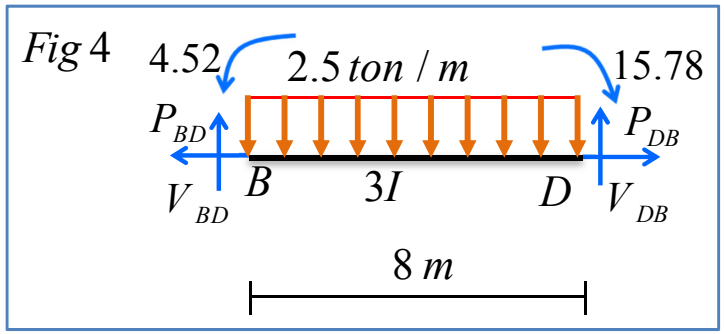
پاسخ مثال 11-



با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BA}\times 6 - 4.52 - 7.82 + 5\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = -0.39\,ton} \qquad (11.1)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{AB} - V_{BA} + 5 = 0 \quad \overset{(11.1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{AB} = 5.39\,ton} \qquad (11.2)$$



با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

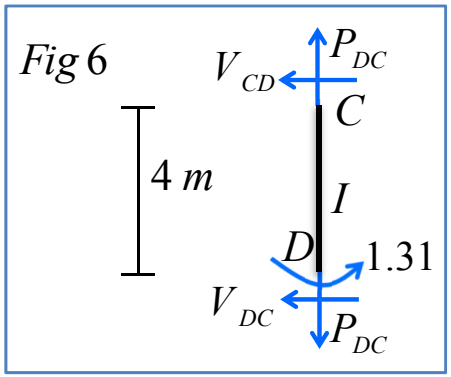
$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DB}\times 8 + 4.52 - 15.78 - 2.5\times 8\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{DB} = 11.41\,ton} \qquad (11.3)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BD} - 2.5\times 8 + V_{DB} = 0 \quad \overset{(11.3)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BD} = 8.59\,ton} \qquad (11.4)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

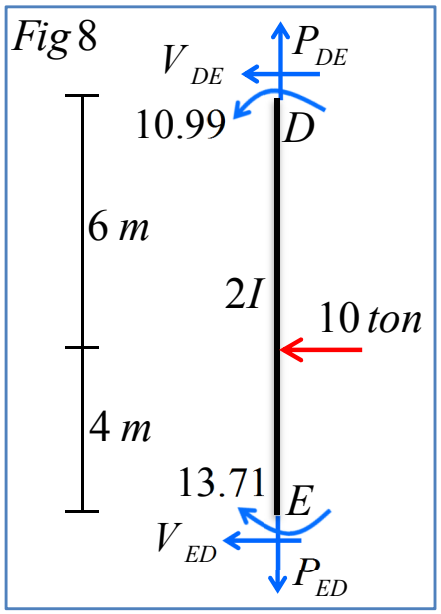


با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 1.31 - V_{DC} \times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{DC} = 0.33\,ton} \quad (11.5)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{CD} - V_{DC} = 0 \overset{(11.5)}{\Rightarrow} \boxed{V_{CD} = -0.33\,ton} \quad (11.6)$$

با بررسی شکل (8) نتیجه می‌شود:



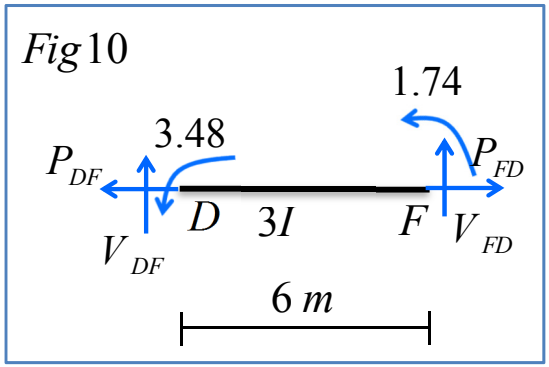
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

$$-V_{ED} \times 10 - 13.71 - 10 \times 6 + 10.99 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{ED} = -6.27\,ton} \quad (11.7)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{ED} - 10 - V_{DE} = 0 \overset{(11.7)}{\Rightarrow} \boxed{V_{DE} = -3.73\,ton} \quad (11.8)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

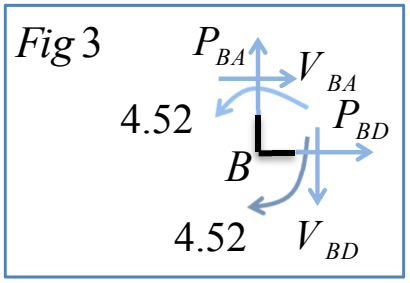


با بررسی شکل (10) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 3.48 + 1.74 + V_{FD} \times 6 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{FD} = -0.87\ ton} \quad (11.9)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{DF} + V_{FD} = 0 \overset{(11.9)}{\Rightarrow} \boxed{V_{DF} = 0.87\ ton} \quad (11.10)$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{BA} + P_{BD} = 0 \overset{(11.1)}{\Rightarrow} \boxed{P_{BD} = P_{DB} = 0.39\ ton} \quad (11.11)$$

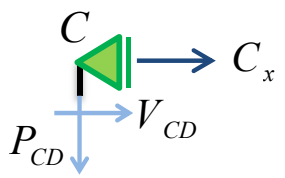
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{BA} - V_{BD} = 0 \overset{(11.4)}{\Rightarrow} \boxed{P_{BA} = P_{AB} = 8.59\ ton} \quad (11.12)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

Fig 5

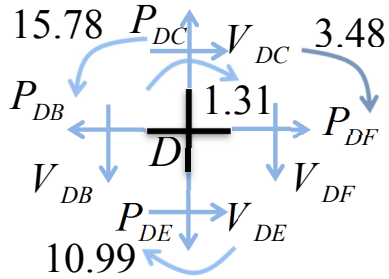


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x + V_{CD} = 0 \overset{(11.6)}{\Rightarrow} \boxed{C_x = 0.33\,ton} \quad (11.13)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{P_{CD} = P_{DC} = 0} \quad (11.14)$$

با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:

Fig 7



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-P_{DB} + V_{DC} + V_{DE} + P_{DF} = 0 \overset{(11.5)\&(11.8)\&(11.11)}{\Rightarrow} \boxed{P_{DF} = P_{FD} = 3.79\,ton} \quad (11.15)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-V_{DB} - P_{DE} + P_{DC} - V_{DF} = 0 \overset{(11.4)\&(11.10)\&(11.14)}{\Rightarrow} \boxed{P_{DE} = P_{ED} = -12.28\,ton} \quad (11.16)$$

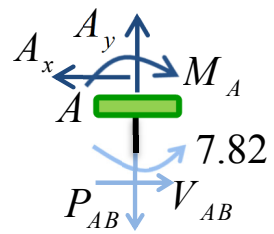
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

Fig 1



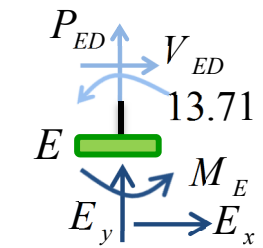
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + V_{AB} = 0 \overset{(11.2)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 5.39\, ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P_{AB} = 0 \overset{(11.12)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 8.59\, ton}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 7.82 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 7.82\, ton.m}$$

با بررسی شکل (9) نتیجه می‌شود:

Fig 9



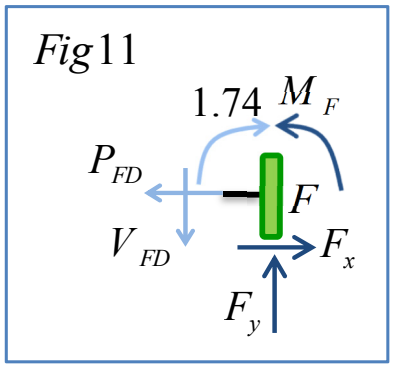
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x + V_{ED} = 0 \overset{(11.7)}{\Rightarrow} \boxed{E_x = 6.27\, ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y + P_{ED} = 0 \overset{(11.16)}{\Rightarrow} \boxed{E_y = 12.28\, ton}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_E + 13.71 = 0 \Rightarrow \boxed{M_E = -13.71\, ton.m}$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

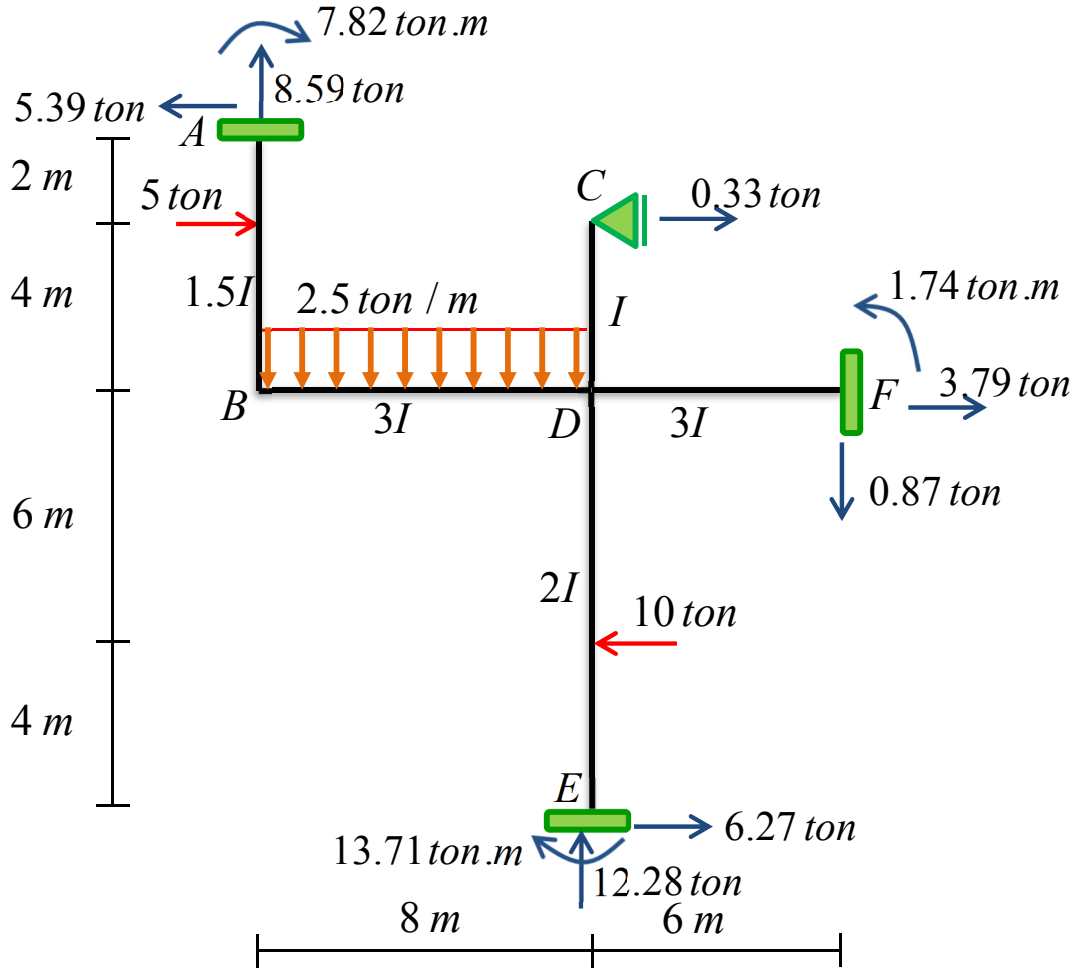


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x - P_{FD} = 0 \overset{(11.15)}{\Rightarrow} \boxed{F_x = 3.79\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y - V_{FD} = 0 \overset{(11.9)}{\Rightarrow} \boxed{F_y = -0.87\ ton}$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow M_F - 1.74 = 0 \Rightarrow \boxed{M_F = 1.74\ ton.m}$$

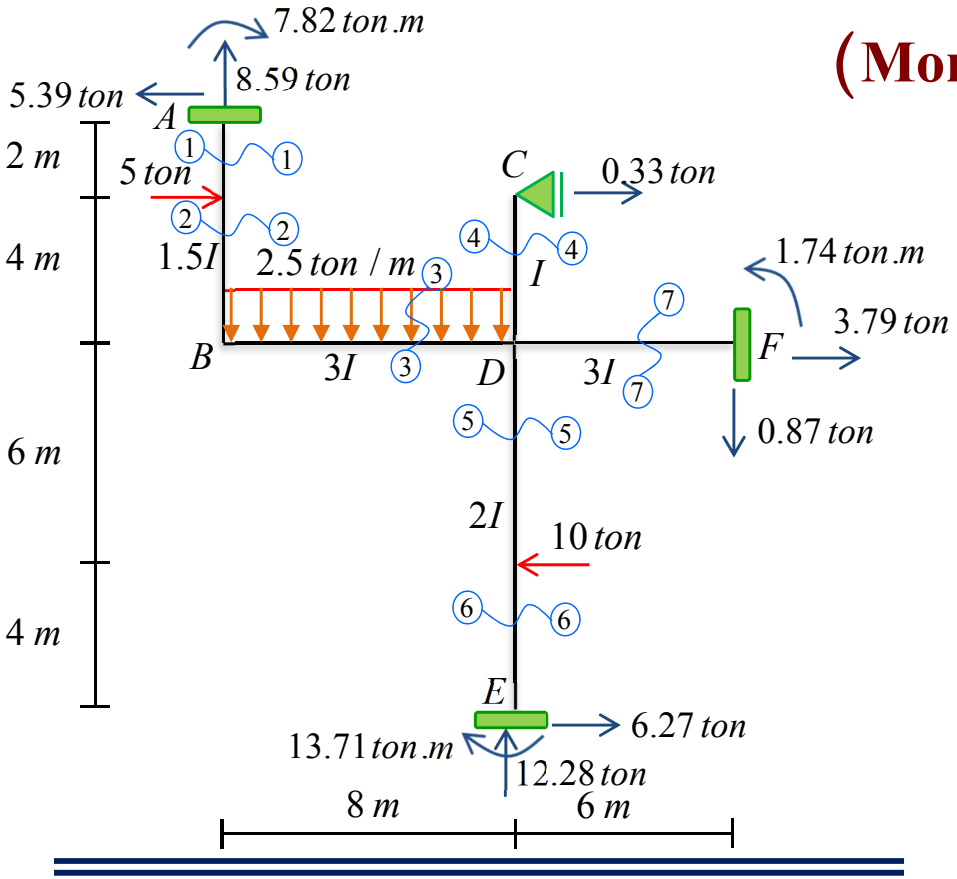
با بررسی شکل (11) نتیجه می‌شود:



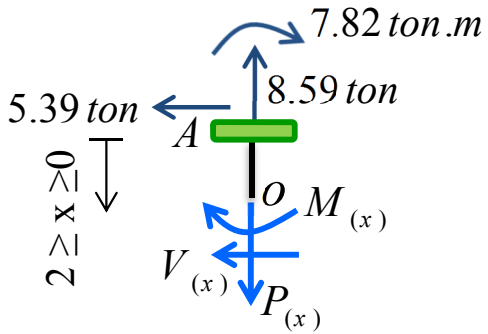
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 7.82 + 5.39 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 5.39x - 7.82}$$

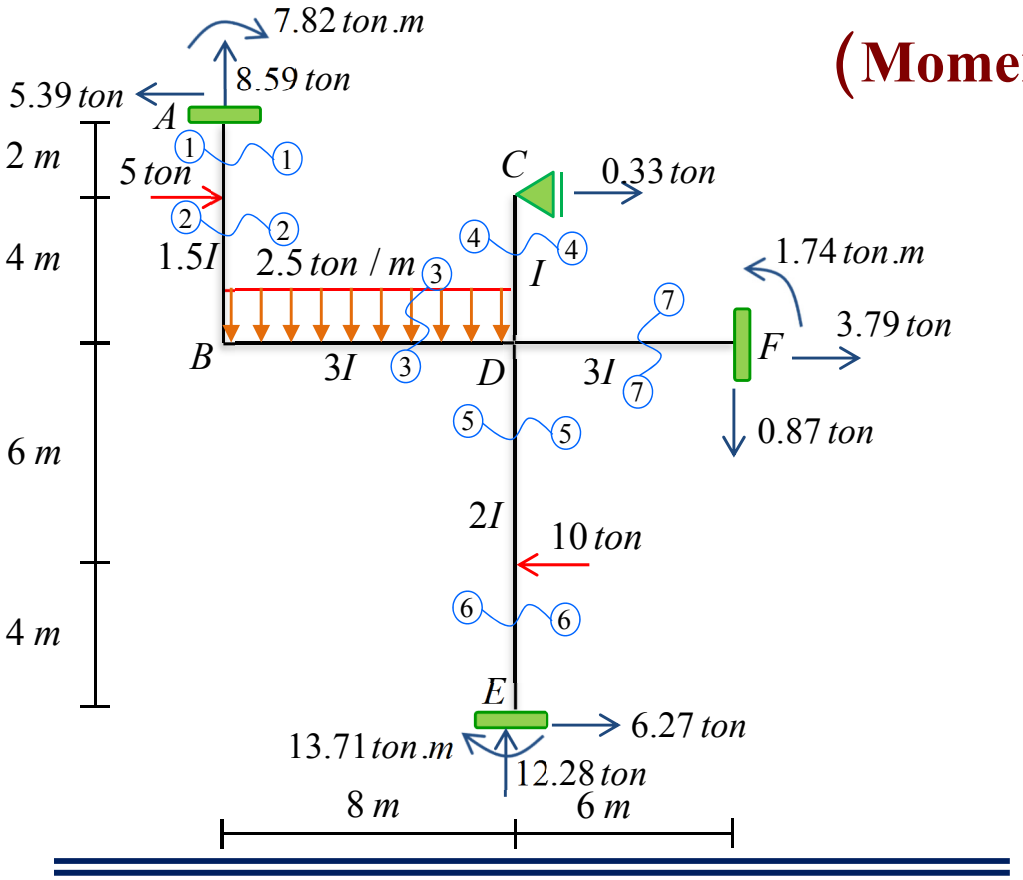
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 5.39 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5.39\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P_{(x)} + 8.59 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 8.59\ ton}$$

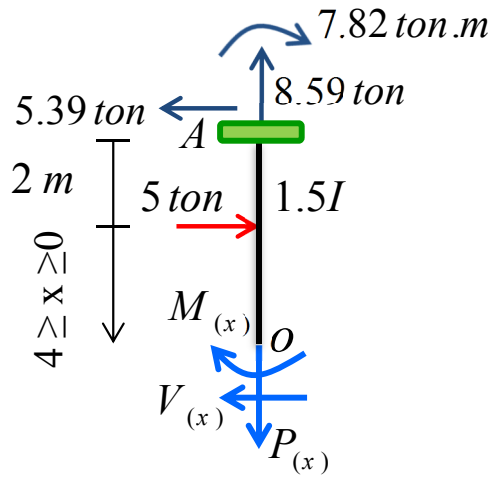
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع 2-2 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 7.82 + 5.39 \times (2+x) - 5 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0.39x + 2.96}$$

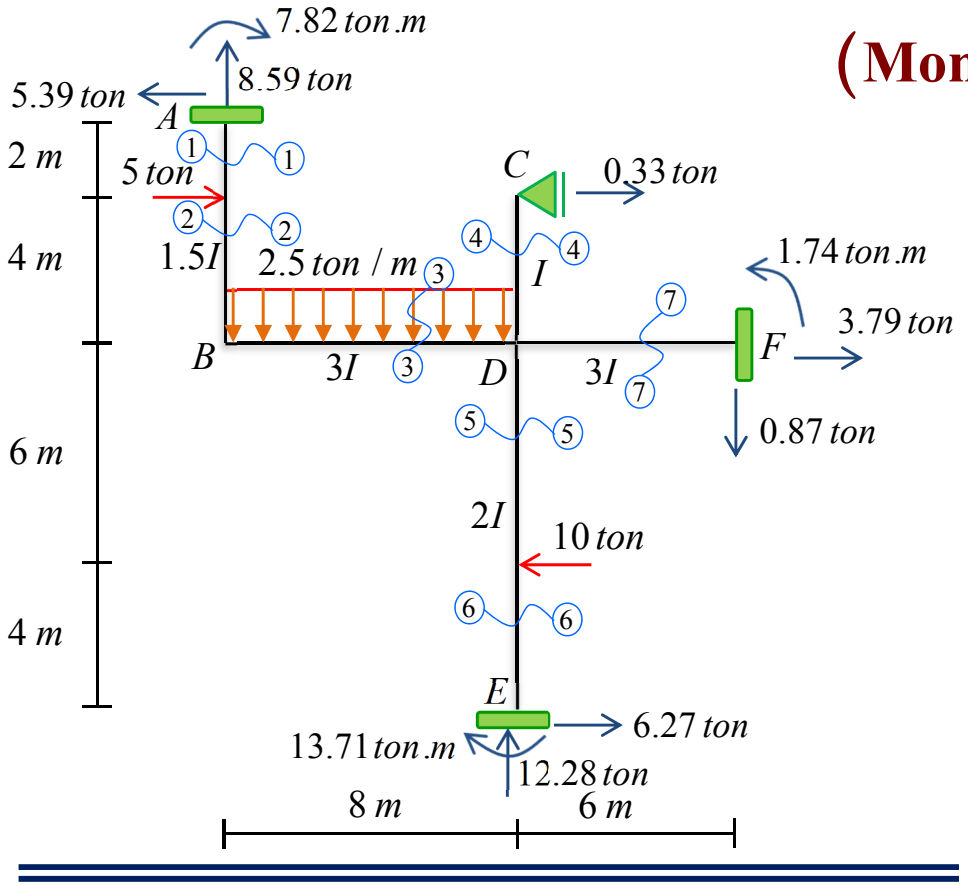
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 5.39 + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -0.39\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P_{(x)} + 8.59 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 8.59\ ton}$$

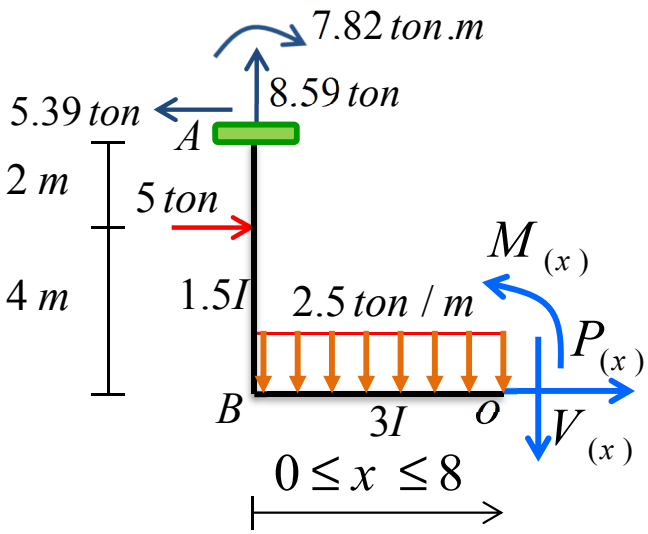
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \quad M_{(x)} + 2.5 \times x \times \frac{x}{2} + 5.39 \times 6 - 8.59 \times x - 5 \times 4 - 7.82 = 0 \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -1.25x^2 + 8.59x - 4.52}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - 2.5 \times x + 8.59 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -2.5x + 8.59}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{(x)} + 5 - 5.39 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = 0.39\ ton}$$

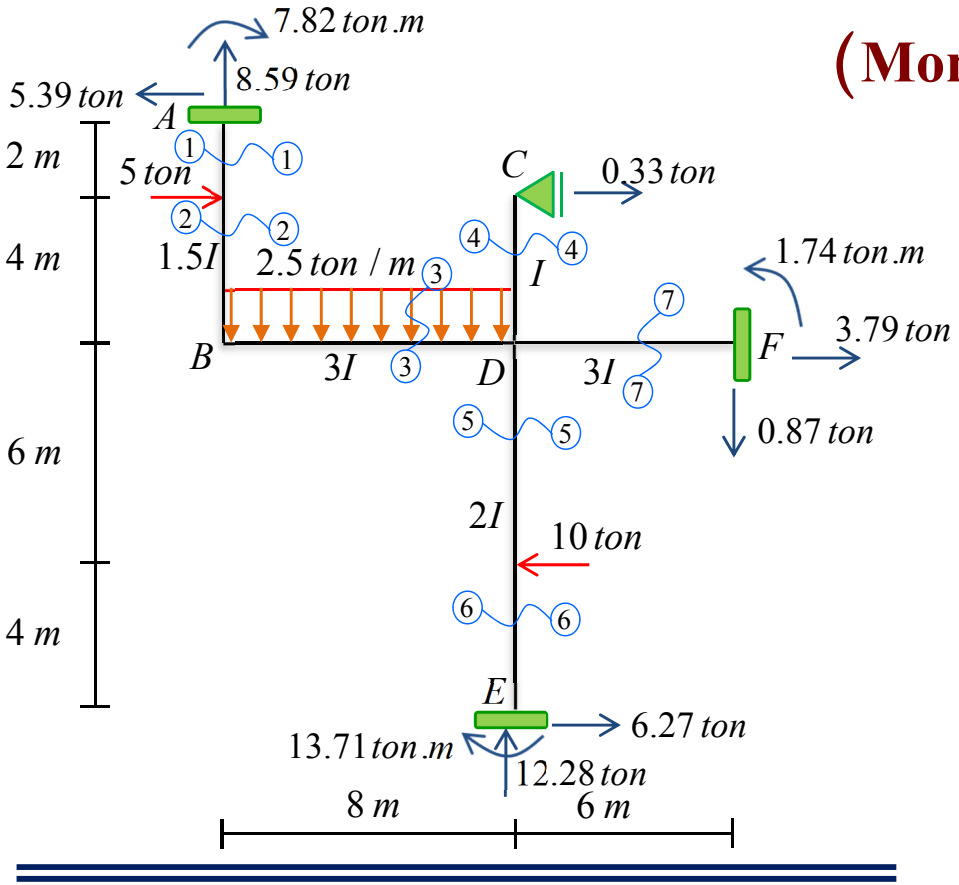
$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2.5x + 8.59 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3.44\ m}$$

$$M_{(x=3.44)} = -1.25(3.44)^2 + 8.59(3.44) - 4.52 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x=3.44)} = 10.24\ ton.m}$$

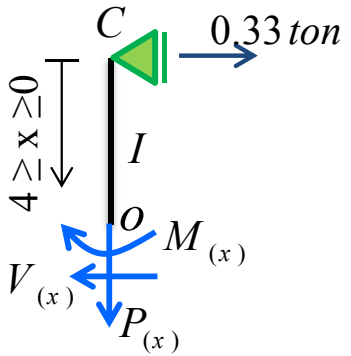
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع 4-4 خواهیم داشت:



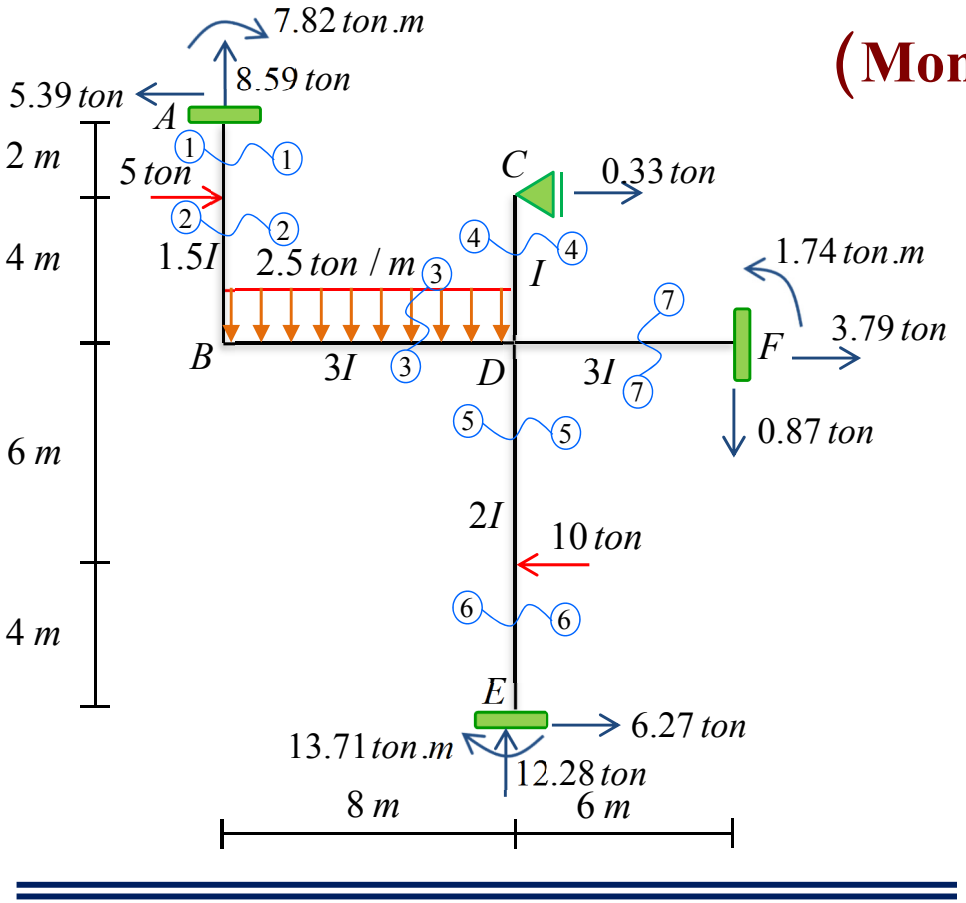
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - 0.33 \times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -0.33x}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} + 0.33 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 0.33\,ton}$$

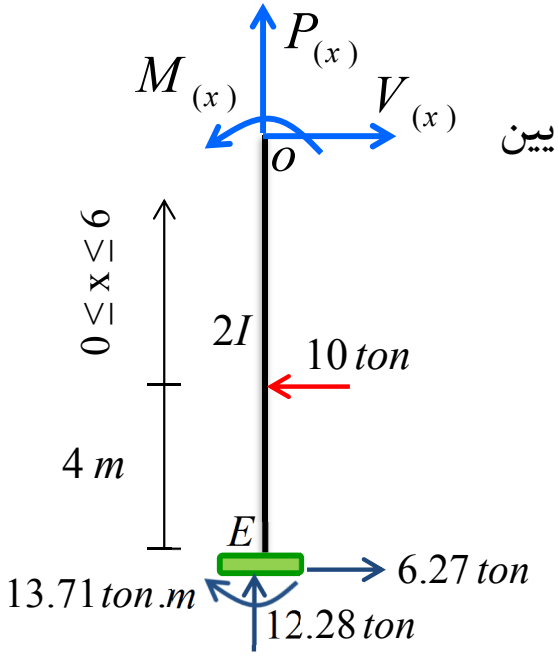
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = 0}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی



پاسخ مثال 11-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 5-5 خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 6.27\times(4+x) - 10\times x - 13.71 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 3.73x - 11.37}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 10 + 6.27 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 3.73\,ton}$$

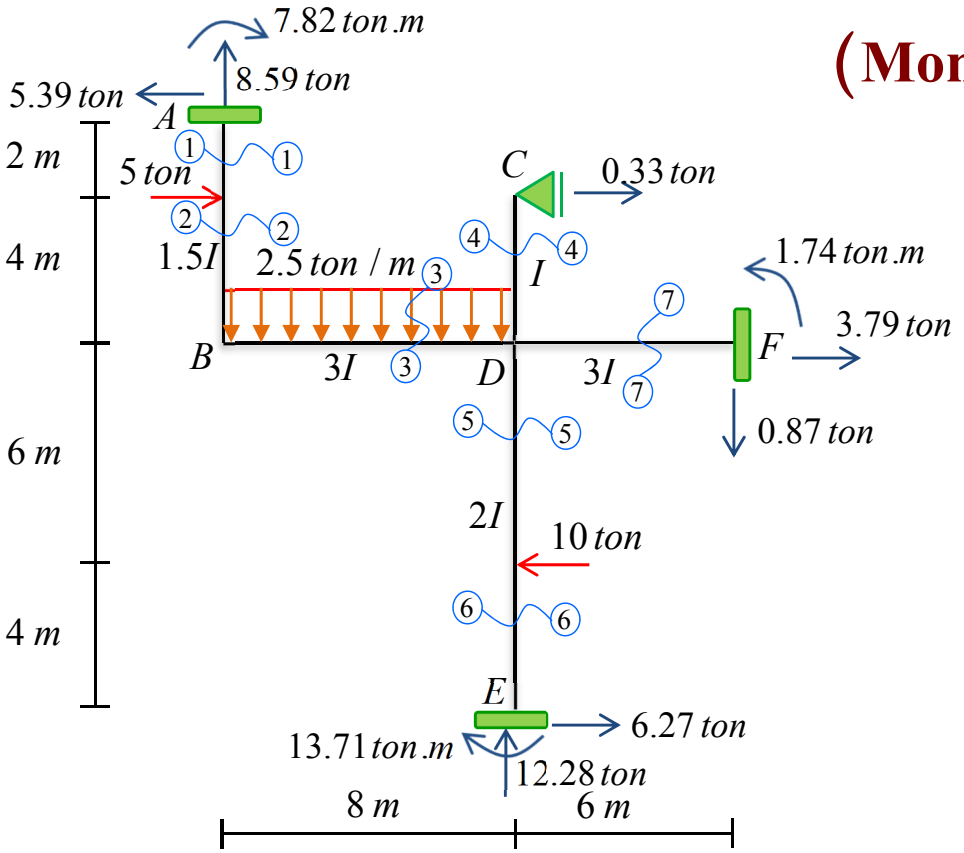
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 12.28 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -12.28\,ton}$$

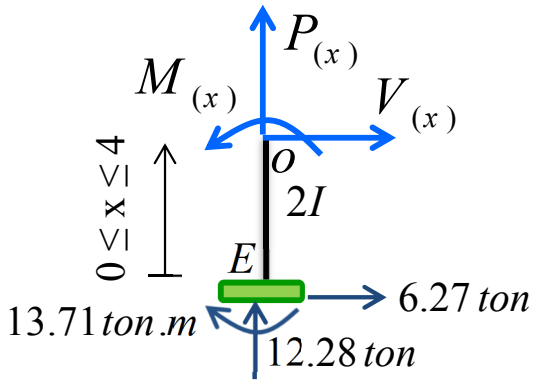
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 6-6 خواهیم داشت:





$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 6.27 \times x - 13.71 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -6.27x + 13.71}$$

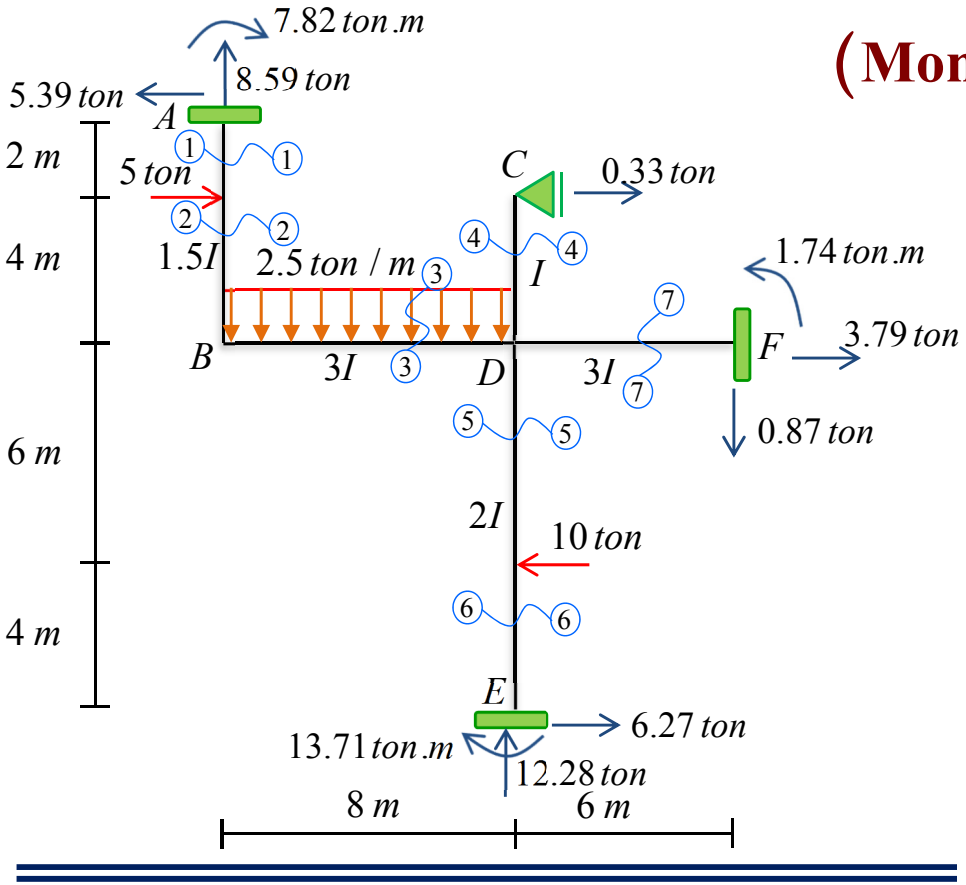
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 6.27 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -6.27\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 12.28 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -12.28\ ton}$$

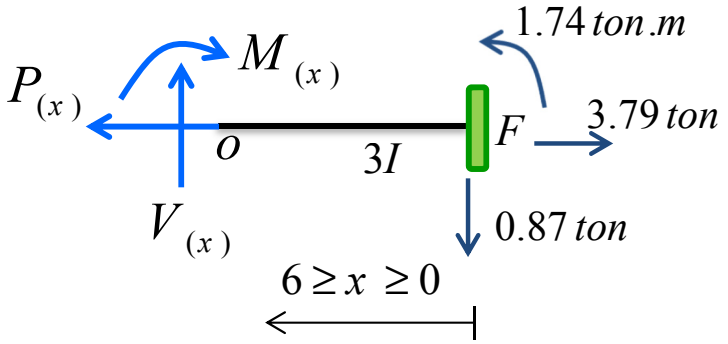
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع 7-7 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 0.87 \times x + 1.74 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -0.87 \times x + 1.74}$$

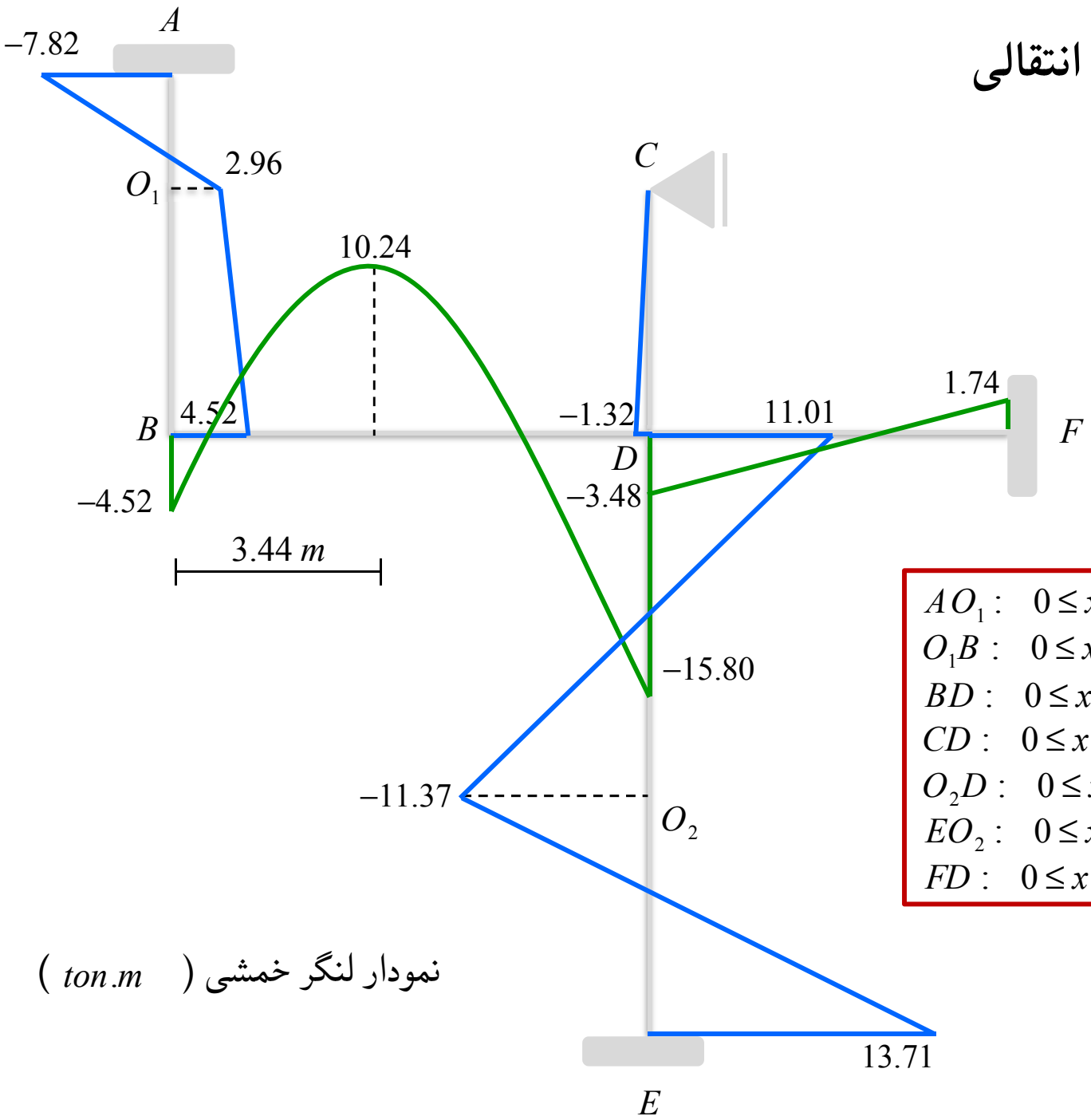
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 0.87 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 0.87\ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{(x)} + 3.79 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 3.79\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-

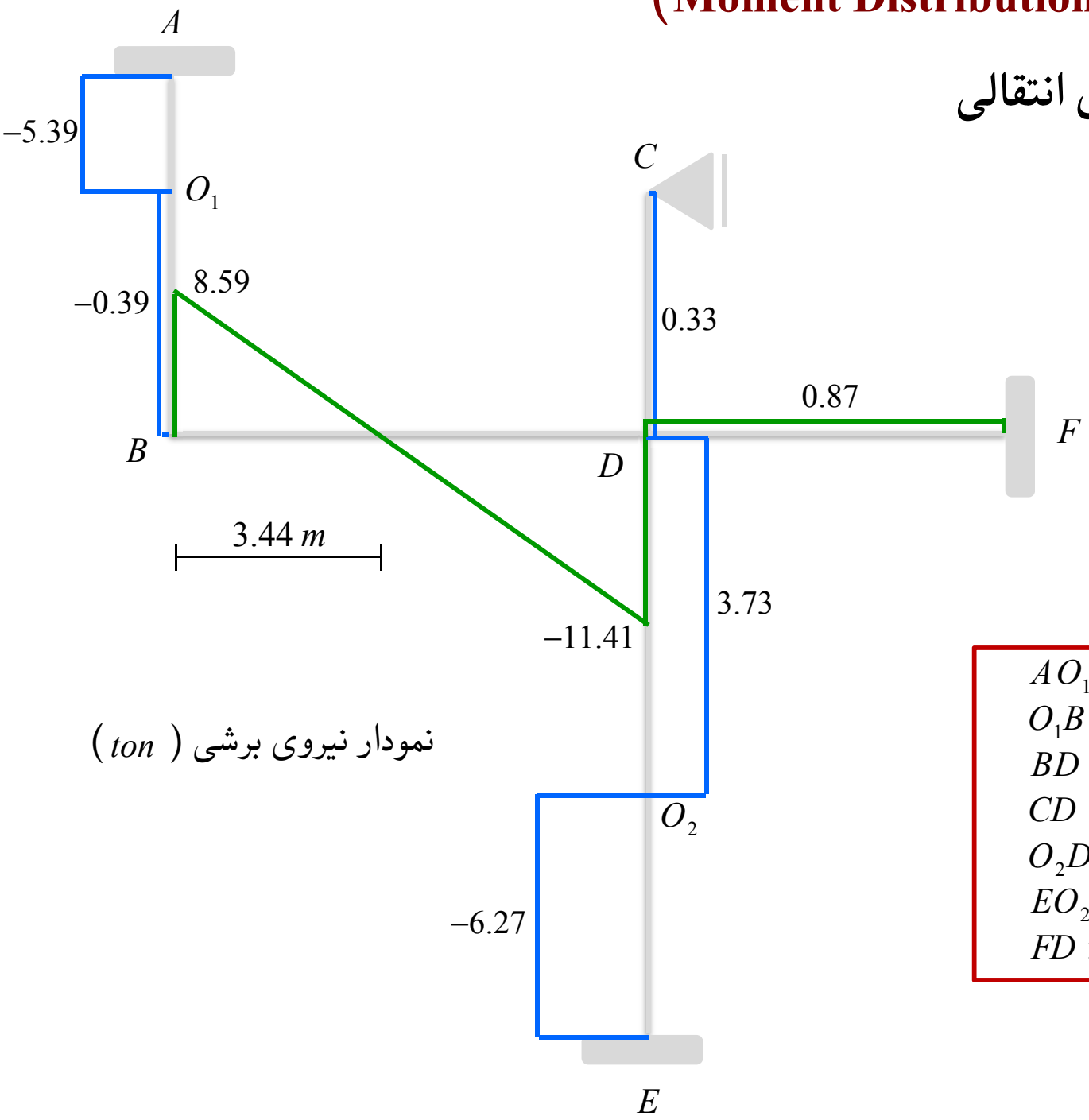


نمودار لنگر خمشی (ton.m)

$$
\begin{aligned}
&AO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 5.39x - 7.82 \\
&O_1B: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = 0.39x + 2.96 \\
&BD: \quad 0 \le x \le 8 \quad M_{(x)} = -1.25x^2 + 8.59x - 4.52 \\
&CD: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -0.33x \\
&O_2D: \quad 0 \le x \le 6 \quad M_{(x)} = 3.73x - 11.37 \\
&EO_2: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -6.27x + 13.71 \\
&FD: \quad 0 \le x \le 6 \quad M_{(x)} = -0.87 \times x + 1.74
\end{aligned}
$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-



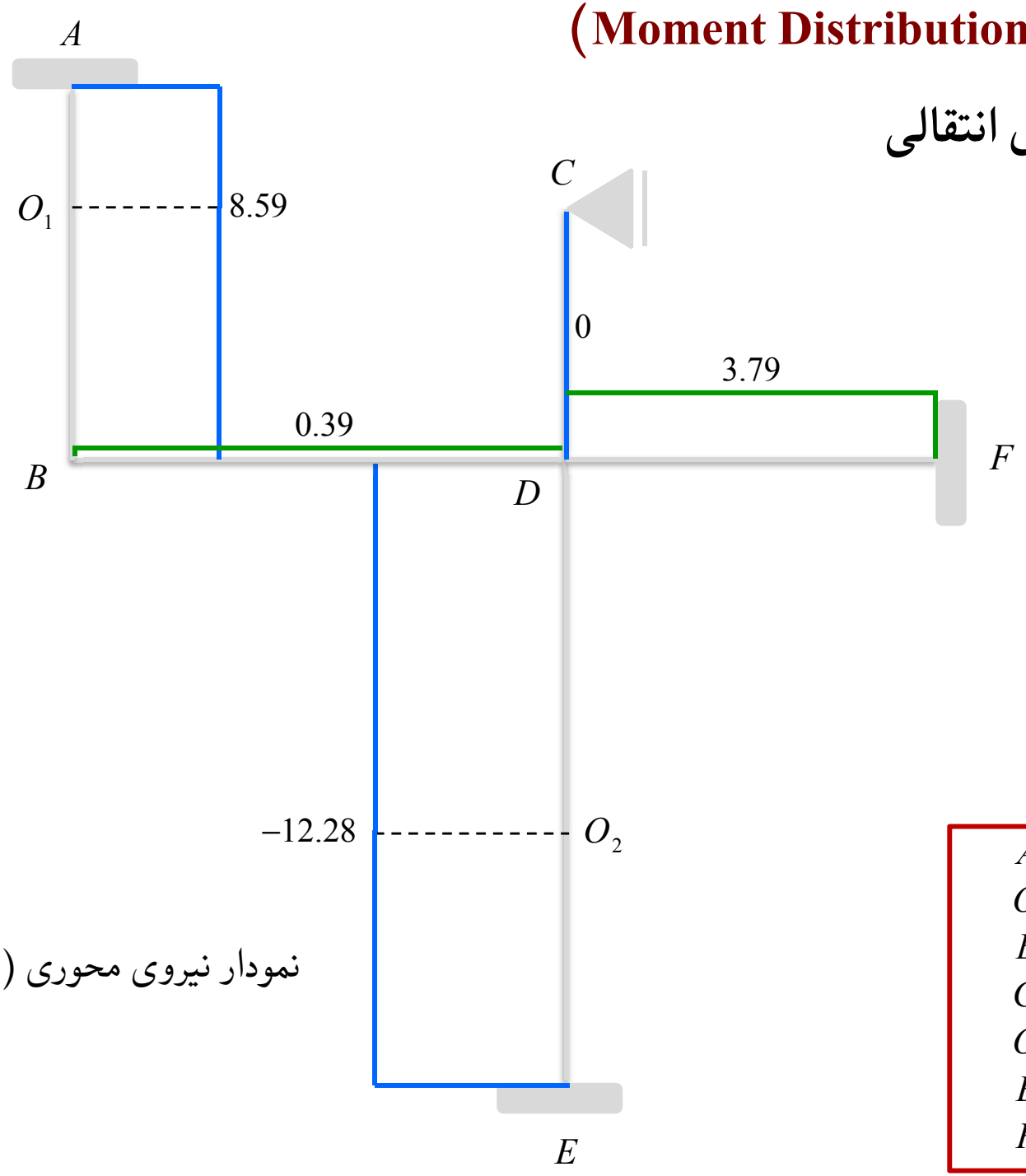
نمودار نیروی برشی (ton)

$$
\begin{aligned}
AO_1 &: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -5.39\ ton \\
O_1B &: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -0.39\ ton \\
BD &: \quad 0 \le x \le 8 \quad V_{(x)} = -2.5x + 8.59 \\
CD &: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = 0.33\ ton \\
O_2D &: \quad 0 \le x \le 6 \quad V_{(x)} = 3.73\ ton \\
EO_2 &: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -6.27\ ton \\
FD &: \quad 0 \le x \le 6 \quad V_{(x)} = 0.87\ ton
\end{aligned}
$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 11-



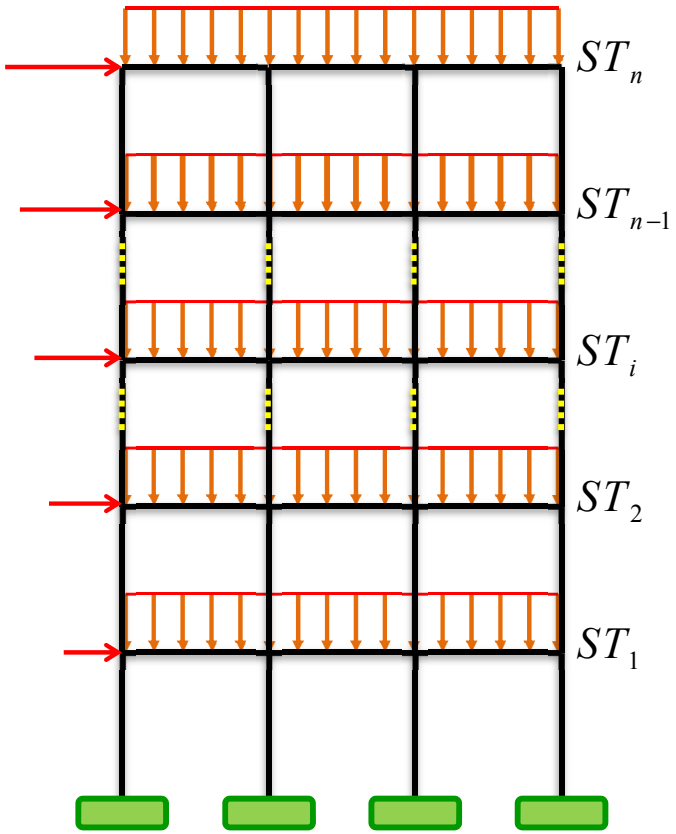
نمودار نیروی محوری (ton)

$$
\begin{aligned}
AO_1 &: \quad 0 \le x \le 2 \quad P_{(x)} = 8.59\,ton \\
O_1B &: \quad 0 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = 8.59\,ton \\
BD &: \quad 0 \le x \le 8 \quad P_{(x)} = 0.39\,ton \\
CD &: \quad 0 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = 0 \\
O_2D &: \quad 0 \le x \le 6 \quad P_{(x)} = -12.28\,ton \\
EO_2 &: \quad 0 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = -12.28\,ton \\
FD &: \quad 0 \le x \le 6 \quad P_{(x)} = 3.79\,ton
\end{aligned}
$$

ETABS File Name: **07-Example-11.EDB**

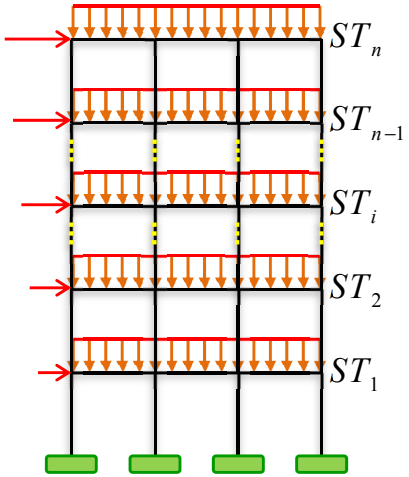
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی



قاب خمشی n طبقه نشان داده شده دارای درجه آزادی انتقالی می‌باشد. وجود درجه آزادی انتقالی در سازه باعث ایجاد دوران خط واصل بین گره‌های انتهایی (ψ_{ij}) در بعضی از اعضای سازه می‌گردد. در روش پخش لنگر اثر ψ_{ij} در لنگر گیرداری اعضا ظاهر می‌شود. به عبارت دیگر علاوه بر بارگذاری خارجی، درجه‌های آزادی انتقالی نیز موجب ایجاد لنگر گیرداری در بعضی از اعضای سازه می‌شود. محاسبه همزمان لنگرگیرداری ناشی از بارگذاری و اثر درجه‌های آزادی انتقالی دارای پیچیدگی زیادی است. به همین دلیل، با به کارگیری اصل برهم‌نهی می‌توان به صورت مجزا اثر بارگذاری و دروان خط واصل بین گره‌های انتهایی اعضا ناشی از هر یک از درجه‌های آزادی انتقالی را بررسی نمود. بنابراین آنالیز قاب‌های دارای درجه آزادی انتقالی در چندین مرحله انجام می‌گیرد.

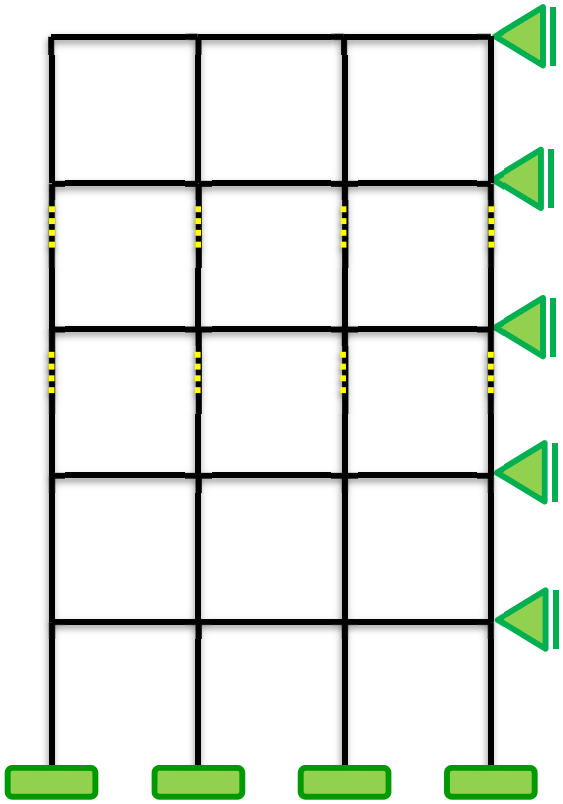
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)



ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی

مراحل آنالیز

مرحله-1: ابتدا تمامی درجه‌های آزادی انتقالی سازه مقید می‌شود. یعنی با ایجاد قید تکیه‌گاهی در راستای هر یک از درجه‌های آزادی انتقالی، سازه امکان هیچ گونه حرکت انتقالی نخواهد داشت. بنابراین سازه به یک سازه بدون درجه آزادی انتقالی تبدیل می‌گردد.



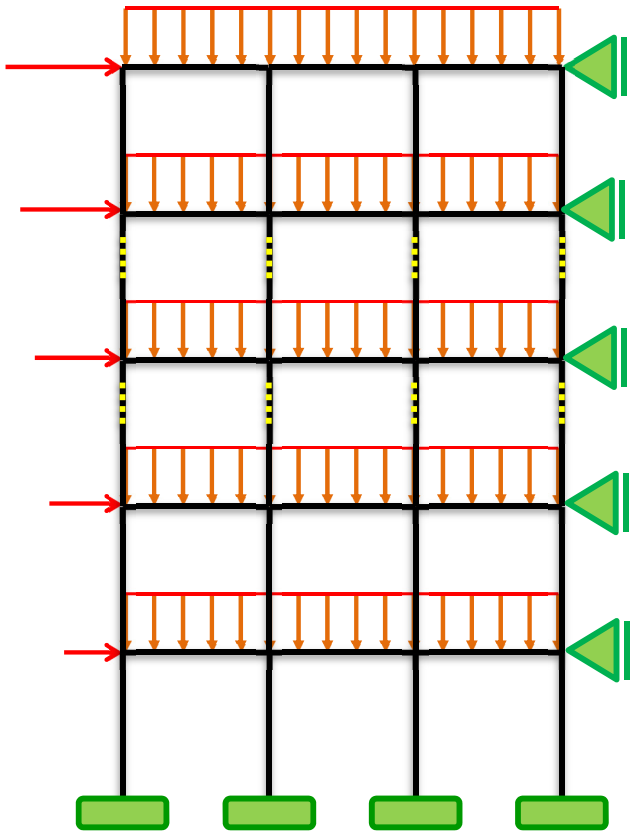
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی

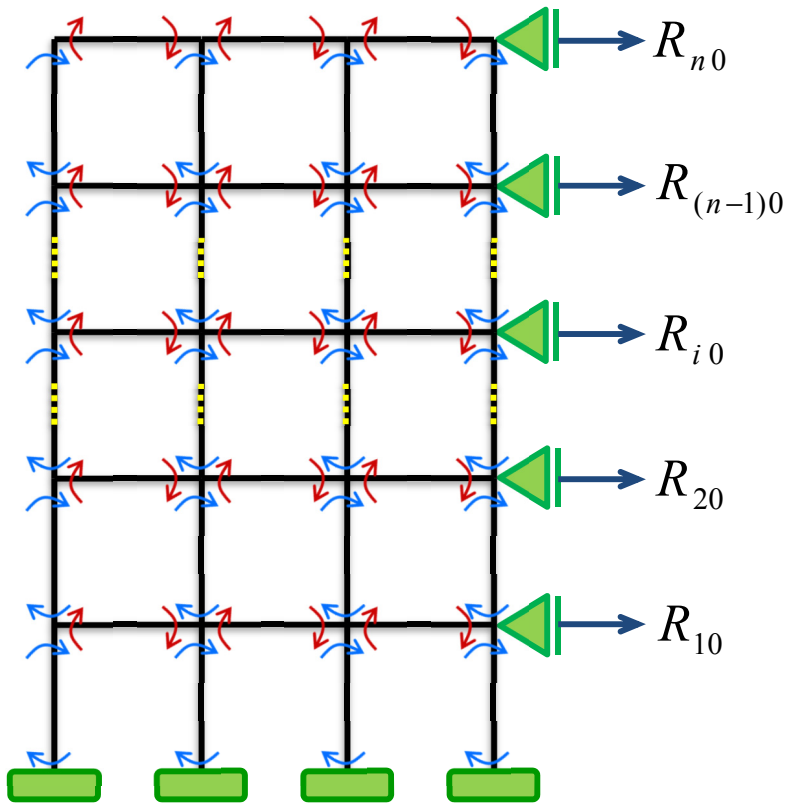
مراحل آنالیز

مرحله-2: سازه در حالتی که فاقد درجه آزادی انتقالی است تحت اثر بارگذاری خارجی به روش پخش لنگر آنالیز می‌گردد (آنالیز اولیه یا آغازین).

M^{0}_{AB} : لنگر انتهایی اعضا در آنالیز اولیه



آنالیز به روش پخش لنگر



R_{ij} : واکنش تکیه‌گاهی درجه آزادی iاُم در آنالیز jاُم.

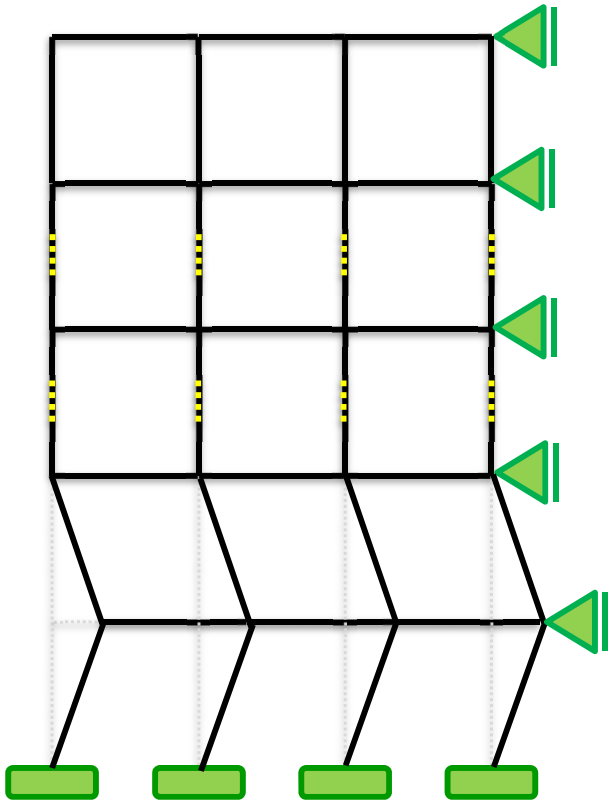
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی

مراحل آنالیز

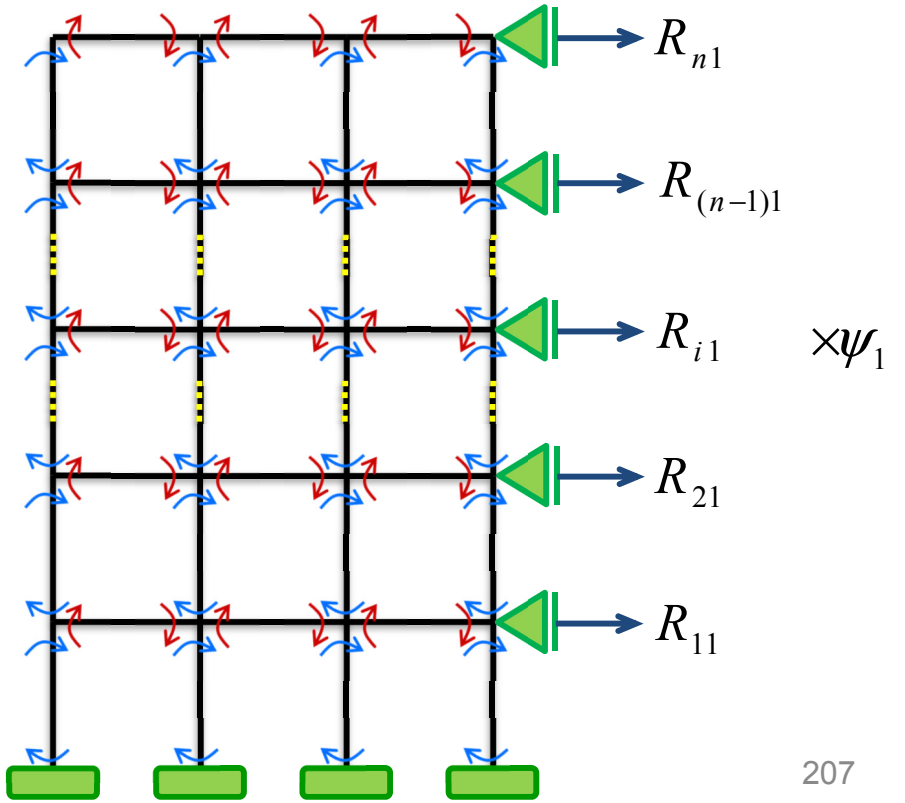
مرحله-3: سازه در حالتی که فاقد درجه آزادی انتقالی و بدون بارگذاری است قید اولین درجه آزادی انتقالی را در راستای خودش جابجا می‌کنیم. در اثر این جابجایی در سازه تغییرشکل ایجاد می‌شود که منجر به دوران خط رابط بین ابتدا و انتهای بعضی از اعضای سازه می‌گردد. تمامی اعضا ψ_{AB} تابعی از یک متغیر مجهول ψ_1 می‌باشند. اگرچه در این حالت سازه بدون بارگذاری است اما وجود ψ_{AB} در اعضا باعث ایجاد لنگرگیرداری در آن‌ها می‌شود. در ادامه سازه به روش پخش لنگر آنالیز می‌گردد (آنالیز یکم).

M^{1}_{AB} : لنگر انتهایی اعضا در آنالیز یکم



فاکتور گیری از ψ_1

آنالیز به روش پخش لنگر



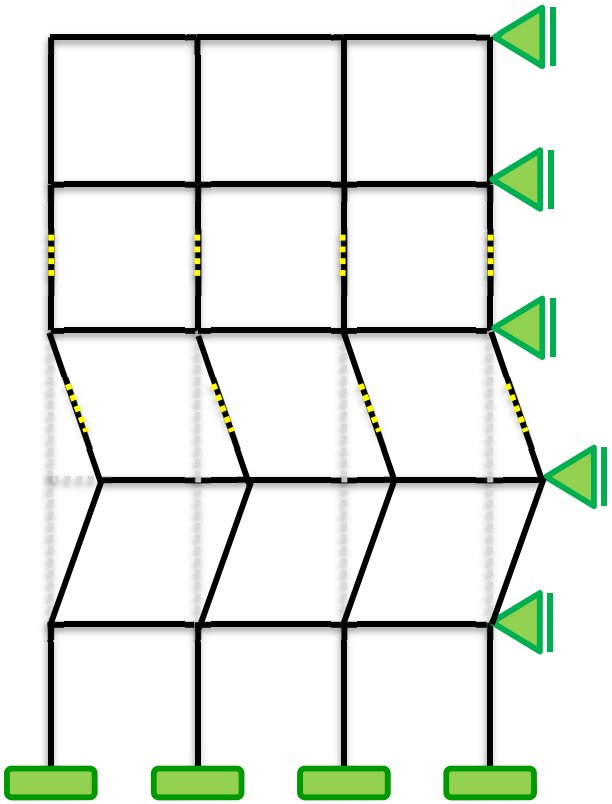
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی

مراحل آنالیز

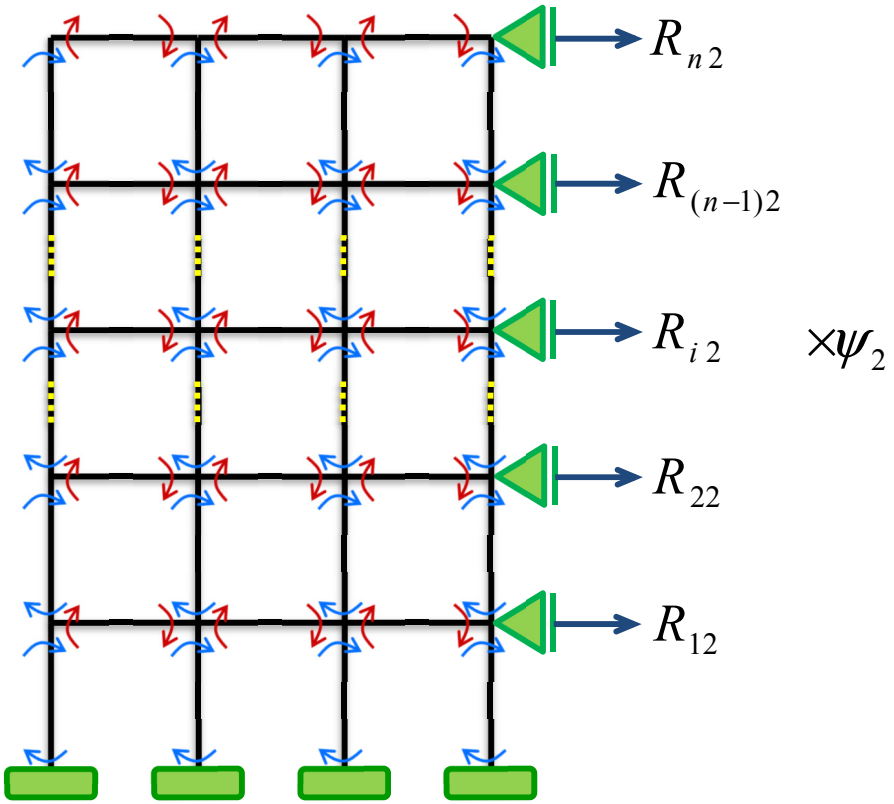
مرحله-4: تکرار مرحله 3 برای سایر درجه‌های آزادی انتقالی (آنالیز دوم متناظر با درجه آزادی دوم).

M^{2}_{AB} : لنگر انتهایی اعضا در آنالیز دوم



فاکتور گیری از ψ_2

آنالیز به روش پخش لنگر



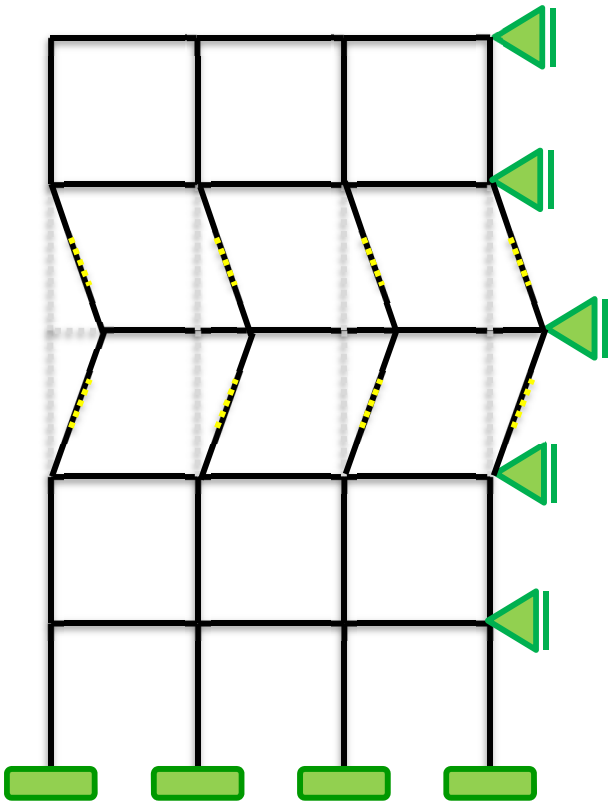
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی

مراحل آنالیز

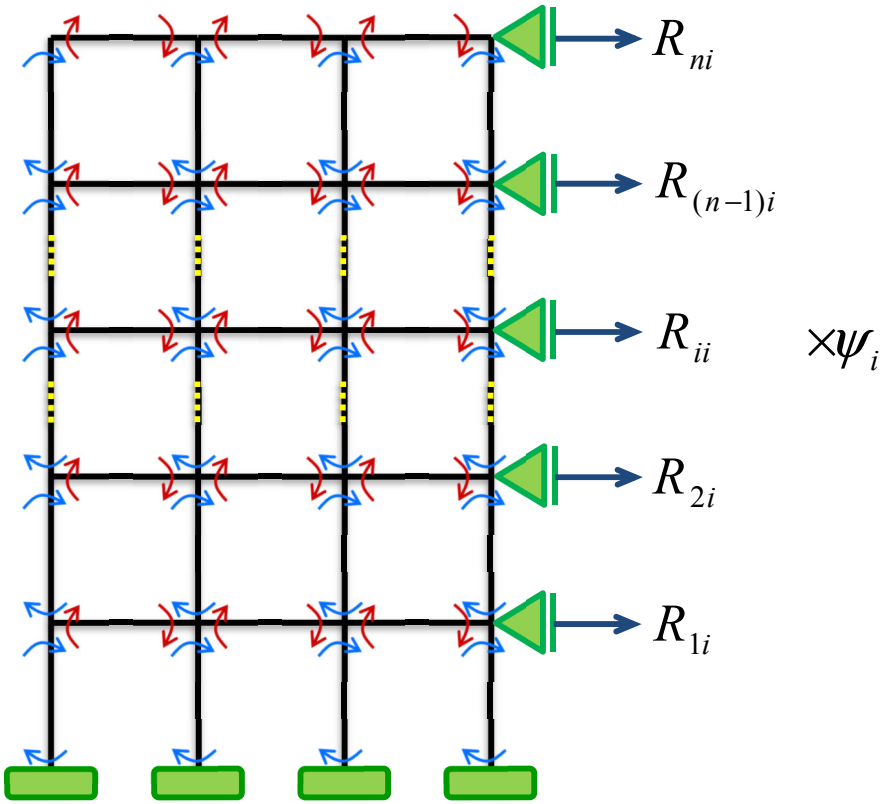
مرحله-4: تکرار مرحله 3 برای سایر درجه‌های آزادی انتقالی (آنالیز iاُم متناظر با درجه آزادی iاُم).

M^{i}_{AB} : لنگر انتهایی اعضا در آنالیز iاُم



فاکتور گیری از ψ_i

آنالیز به روش پخش لنگر



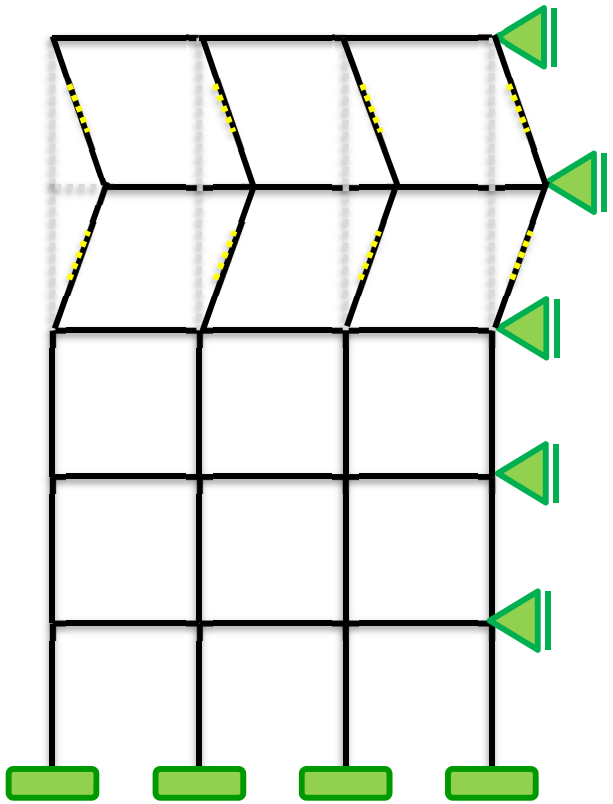
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی

مراحل آنالیز

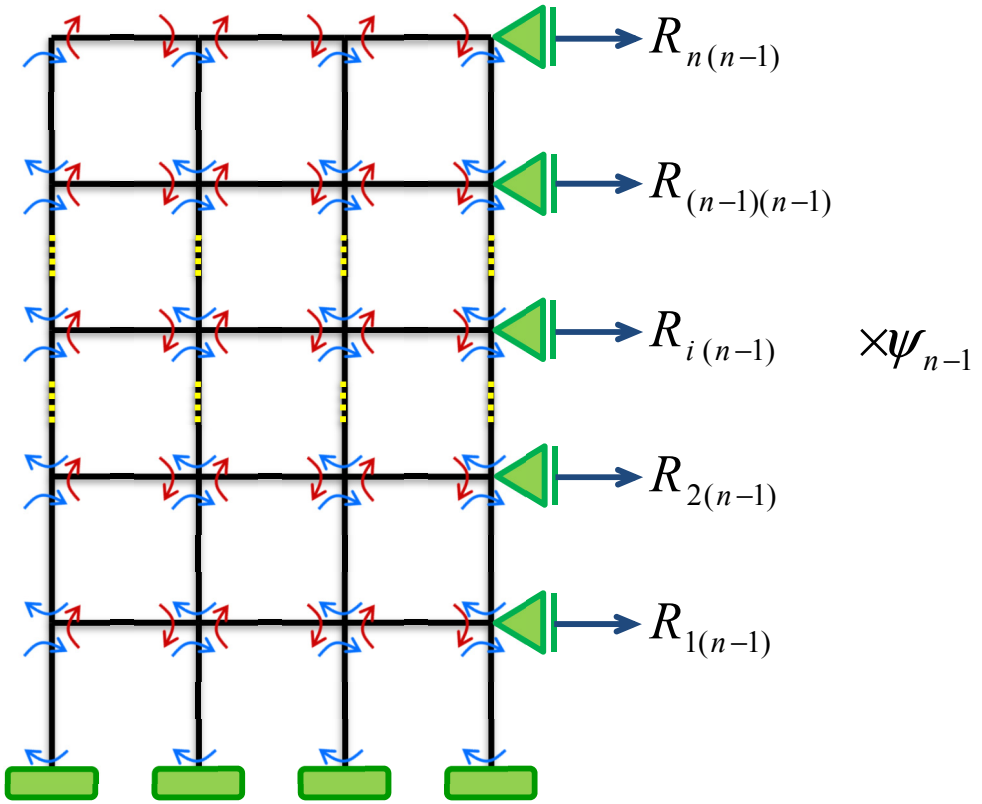
مرحله-4: تکرار مرحله 3 برای سایر درجه‌های آزادی انتقالی (آنالیز $n-1$اُم متناظر با درجه آزادی $n-1$اُم).

$M_{AB}^{(n-1)}$: لنگر انتهایی اعضا در آنالیز $n-1$اُم



فاکتور گیری از $\psi_{(n-1)}$

آنالیز به روش پخش لنگر



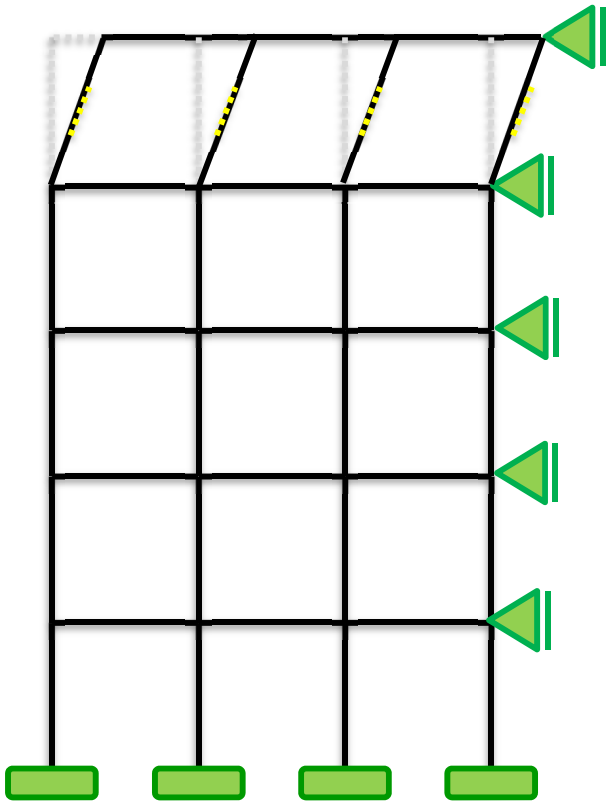
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی

مراحل آنالیز

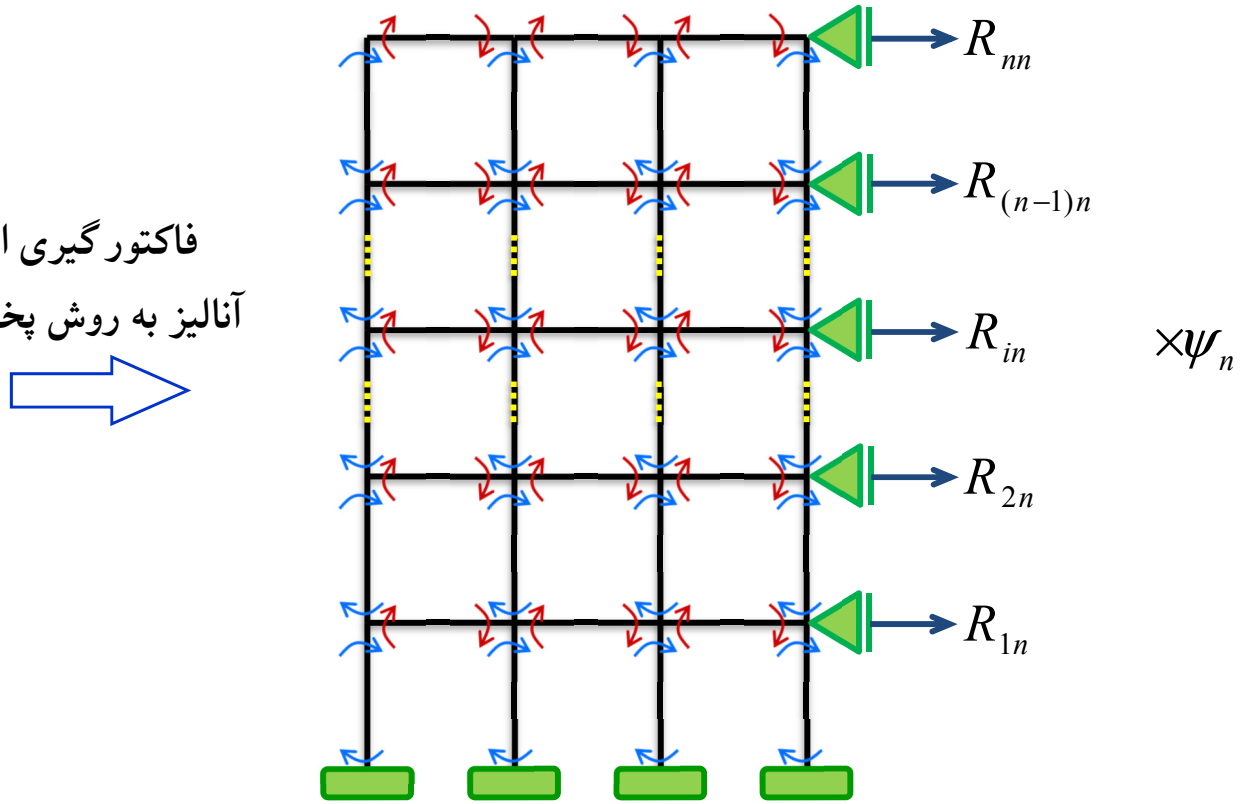
مرحله-4: تکرار مرحله 3 برای سایر درجه‌های آزادی انتقالی (آنالیز nاُم متناظر با درجه آزادی nاُم).

$M_{AB}^{(n)}$: لنگر انتهایی اعضا در آنالیز nاُم



فاکتور گیری از ψ_n

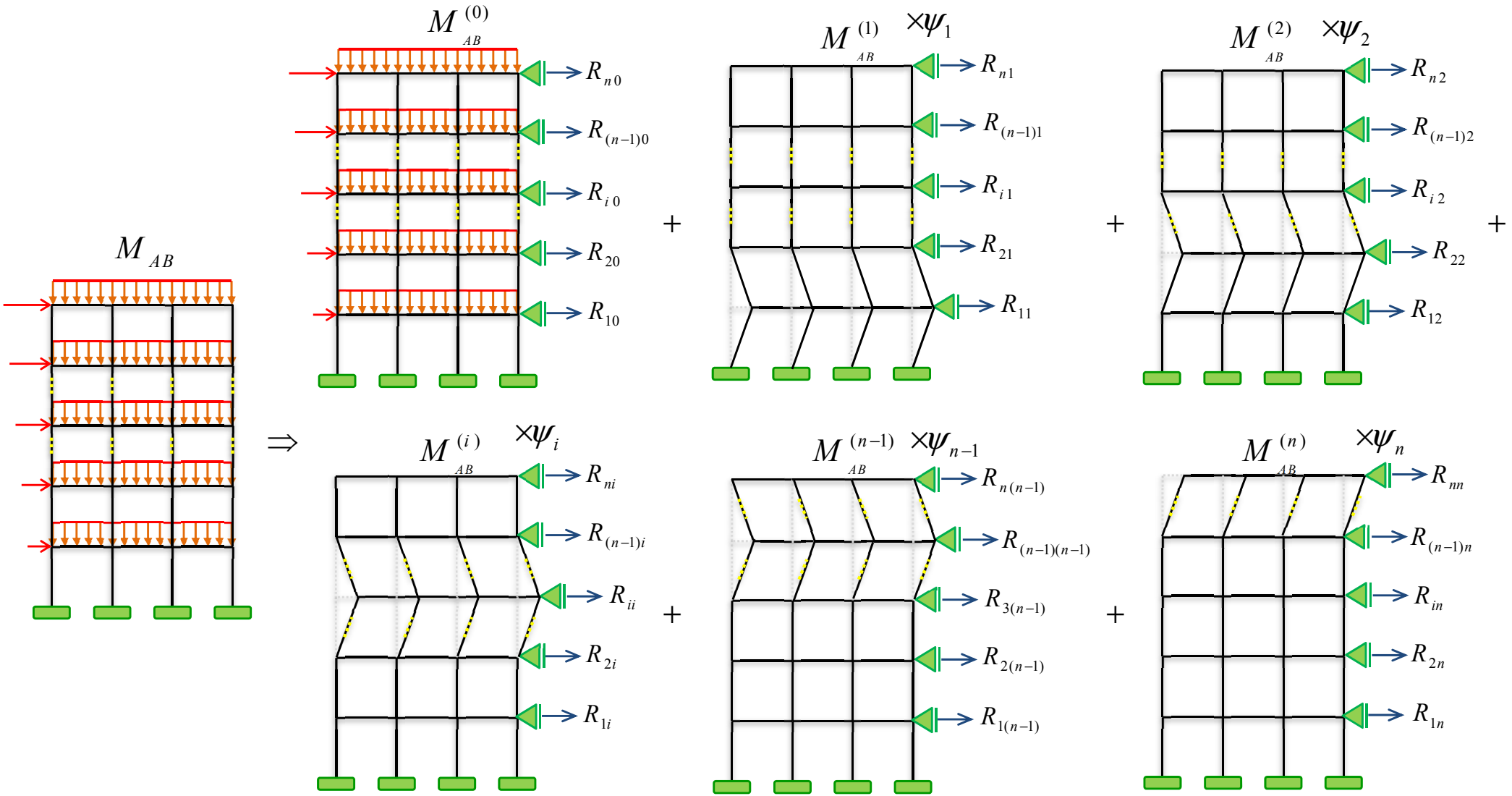
آنالیز به روش پخش لنگر



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی (مراحل آنالیز)

مرحله-5: از آنجایی که در سازه اولیه هیچ یک از درجات آزادی انتقالی بسته نمی‌باشد بنابراین مجموع مقادیرعکس العمل قید هر درجه آزادی انتقالی خاص در تمام آنالیزها باید برابر با صفر شود. با این کار n معادله برای به دست آوردن n مجهول $(\psi_1 , \psi_2 , \cdots , \psi_n)$ حاصل می‌گردد.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی (مراحل آنالیز)

مرحله-5:

دستگاه n معادله n مجهول به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&R_{10}+R_{11}\psi_1+R_{12}\psi_2+\cdots+R_{1i}\psi_i+\cdots+R_{1(n-1)}\psi_{n-1}+R_{1n}\psi_n=0\\
&R_{20}+R_{21}\psi_1+R_{22}\psi_2+\cdots+R_{2i}\psi_i+\cdots+R_{2(n-1)}\psi_{n-1}+R_{2n}\psi_n=0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&R_{i0}+R_{i1}\psi_1+R_{i2}\psi_2+\cdots+R_{ii}\psi_i+\cdots+R_{i(n-1)}\psi_{n-1}+R_{in}\psi_n=0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&R_{(n-1)0}+R_{(n-1)1}\psi_1+R_{(n-1)2}\psi_2+\cdots+R_{(n-1)i}\psi_i+\cdots+R_{(n-1)(n-1)}\psi_{n-1}+R_{(n-1)n}\psi_n=0\\
&R_{n0}+R_{n1}\psi_1+R_{n2}\psi_2+\cdots+R_{ni}\psi_i+\cdots+R_{n(n-1)}\psi_{n-1}+R_{nn}\psi_n=0
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

رابطه (20) را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$
\begin{bmatrix}
R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1i} & \cdots & R_{1(n-1)} & R_{1n}\\
R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2i} & \cdots & R_{2(n-1)} & R_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
R_{i1} & R_{i2} & \cdots & R_{ii} & \cdots & R_{i(n-1)} & R_{in}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
R_{(n-1)1} & R_{(n-1)2} & \cdots & R_{(n-1)i} & \cdots & R_{(n-1)(n-1)} & R_{(n-1)n}\\
R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{ni} & \cdots & R_{n(n-1)} & R_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_i\\ \vdots\\ \psi_{n-1}\\ \psi_n
\end{Bmatrix}
=-
\begin{Bmatrix}
R_{10}\\ R_{20}\\ \vdots\\ R_{i0}\\ \vdots\\ R_{(n-1)0}\\ R_{n0}
\end{Bmatrix}
\qquad (21)
$$

ب- قاب‌های با درجه آزادی انتقالی (مراحل آنالیز)

مرحله-5:

با تعریف پارامترهای زیر:

$$[R]_{n\times n}=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1i} & \cdots & R_{1(n-1)} & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2i} & \cdots & R_{2(n-1)} & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{i1} & R_{i2} & \cdots & R_{ii} & \cdots & R_{i(n-1)} & R_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{(n-1)1} & R_{(n-1)2} & \cdots & R_{(n-1)i} & \cdots & R_{(n-1)(n-1)} & R_{(n-1)n} \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{ni} & \cdots & R_{n(n-1)} & R_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad \{\psi\}_{n\times 1}=\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_i \\ \vdots \\ \psi_{n-1} \\ \psi_n \end{Bmatrix} \quad , \quad \{R_0\}_{n\times 1}=-\begin{Bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ \vdots \\ R_{i0} \\ \vdots \\ R_{(n-1)0} \\ R_{n0} \end{Bmatrix} \qquad (22)$$

و با جایگذاری رابطه (22) در رابطه (21) نتیجه می‌شود:

$$[R]_{n\times n}\{\psi\}_{n\times 1}=\{R_0\}_{n\times 1} \qquad (23)$$

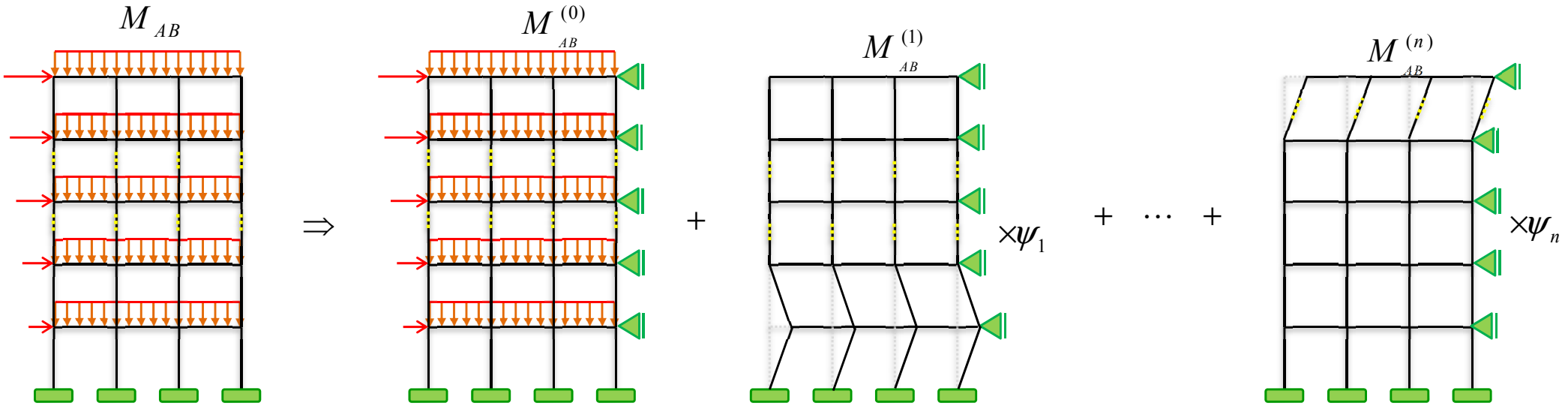
با حل معادله (23) بردار مجهولات $\{\psi\}$ به دست می‌آید:

$$\{\psi\}_{n\times 1}=[R]^{-1}_{n\times n}\{R_0\}_{n\times 1} \qquad (24)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

قاب‌های با درجات آزادی انتقالی (مراحل آنالیز)

مرحله-6: براساس اصل برهم نهی، نهایتا لنگرهای انتهایی اعضای سازه از جمع نتایج آنالیز مراحل 2 تا 4 حاصل می‌گردد.



$$M_{AB} = M^{(0)}_{AB} + \psi_1 M^{(1)}_{AB} + \psi_2 M^{(2)}_{AB} + \cdots + \psi_i M^{(i)}_{AB} + \cdots + \psi_{n-1} M^{(n-1)}_{AB} + \psi_n M^{(n)}_{AB} \quad (25)$$

رابطه (25) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

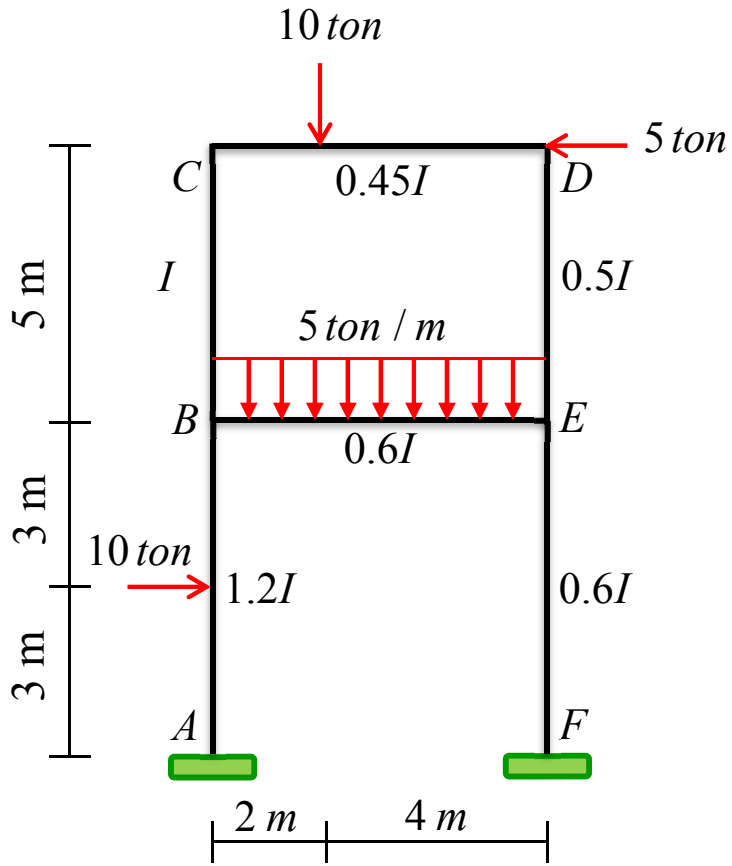
$$M_{AB} = M^{(0)}_{AB} + \sum_{i=1}^{n} \psi_i M^{(i)}_{AB} \quad (26)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مثال 12- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$

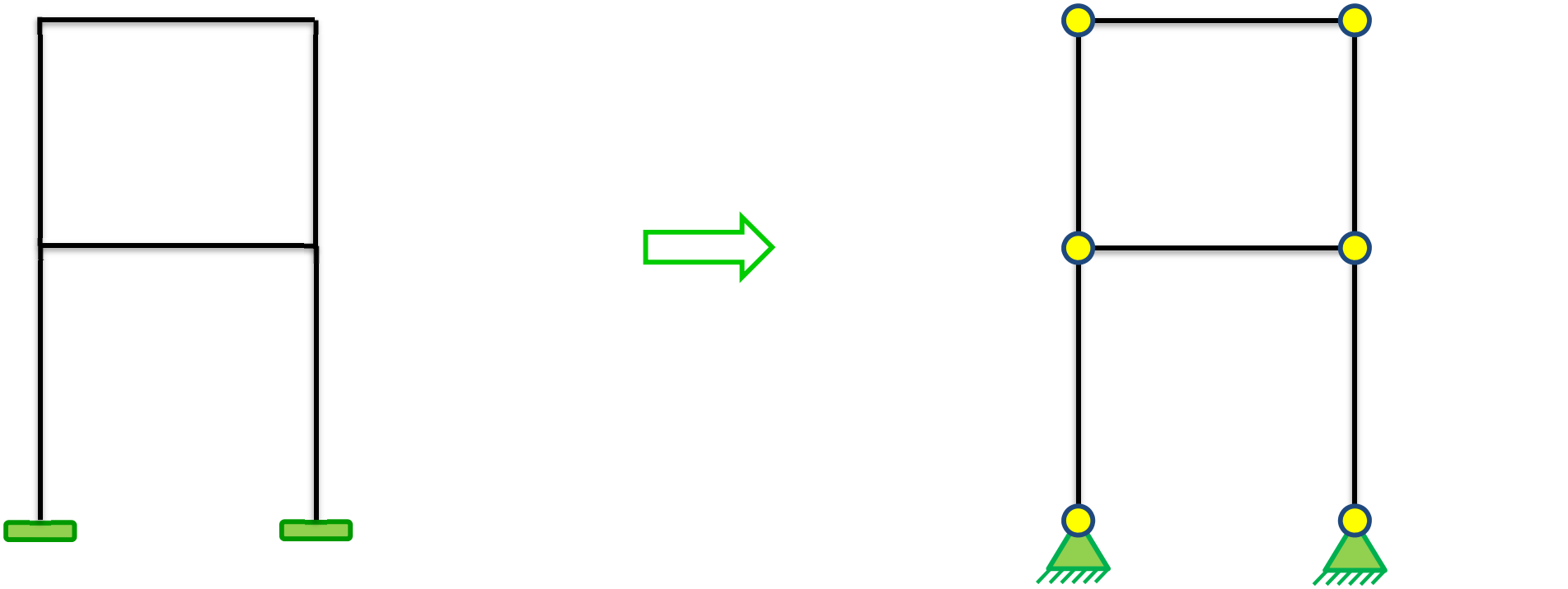


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

تعیین درجات آزادی انتقالی

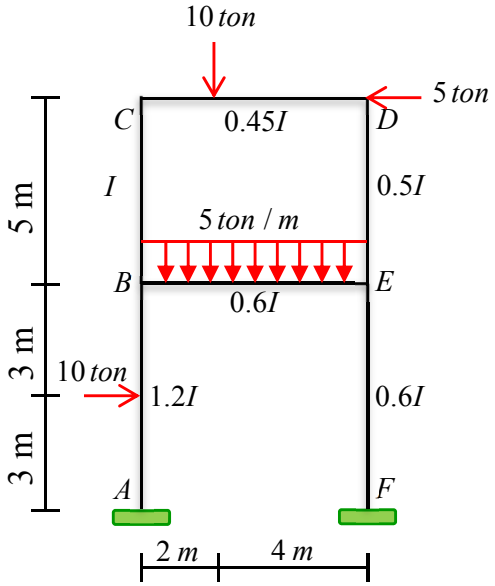


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

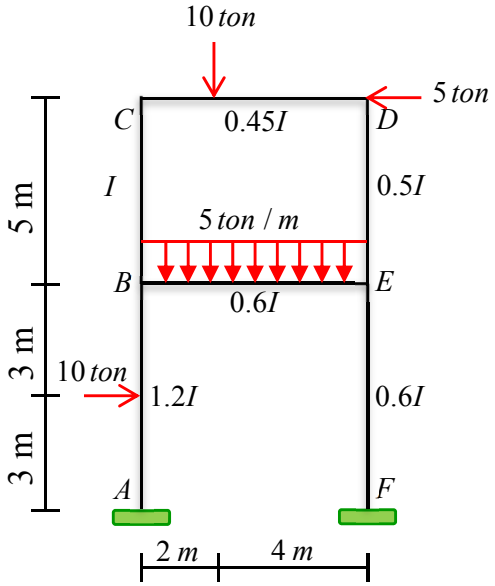
محاسبه ضرایب پخش اعضا:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

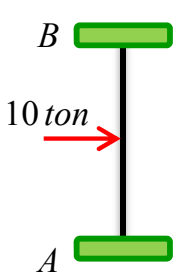


محاسبه لنگرهای گیرداری:

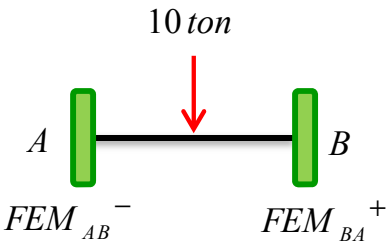
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BE} = -FEM_{EB} = -15\ ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FFM_{CD} = -\frac{80}{9}\ ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = \frac{40}{9}\ ton.m}$$



در جهت متعارف بارگذاری چرخانده شود



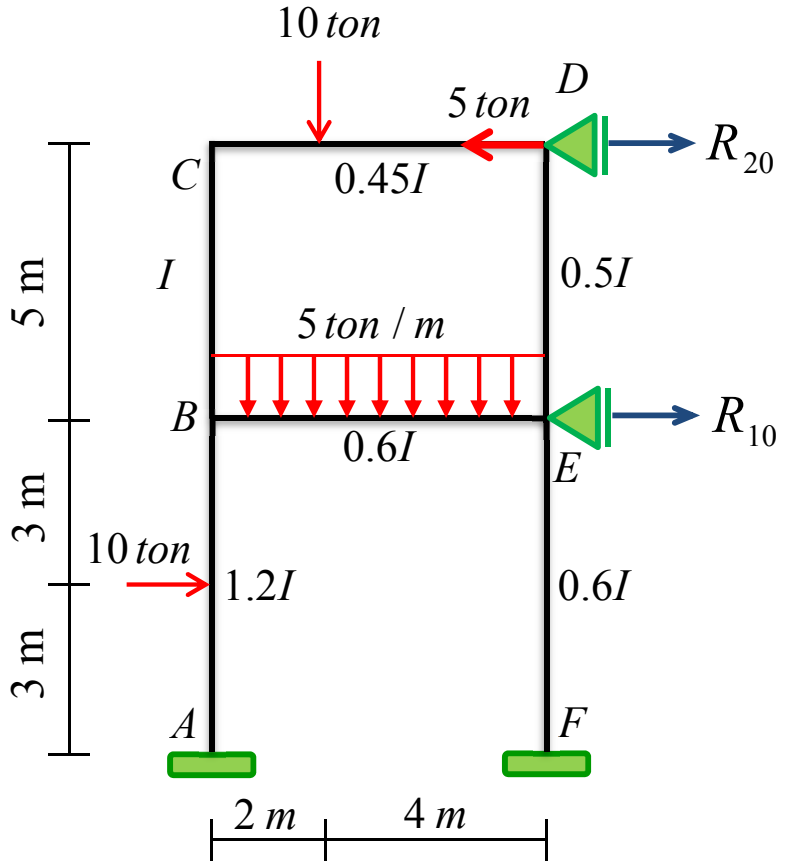
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -7.5\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی

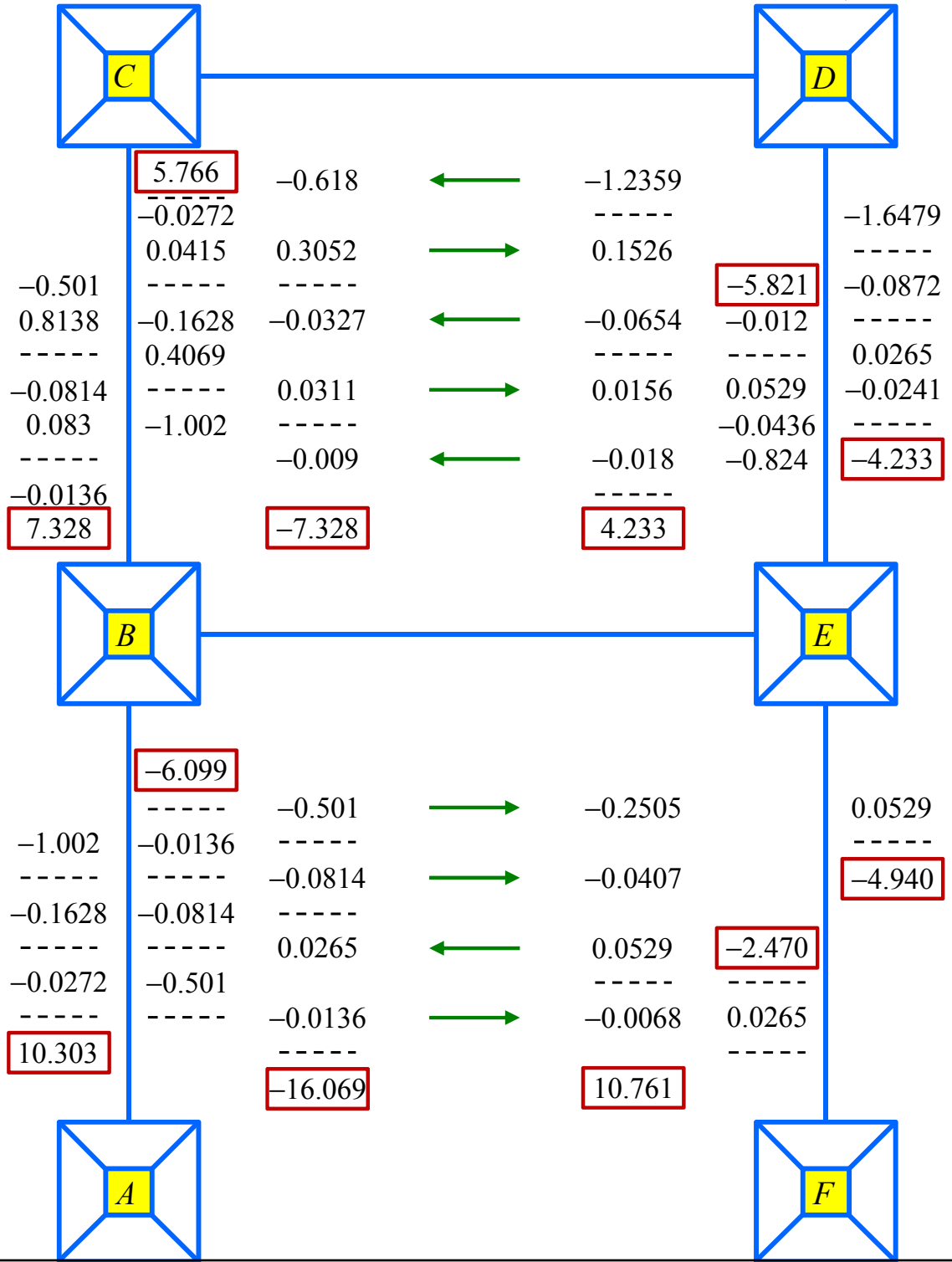


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-شروع پخش لنگر:

آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی.

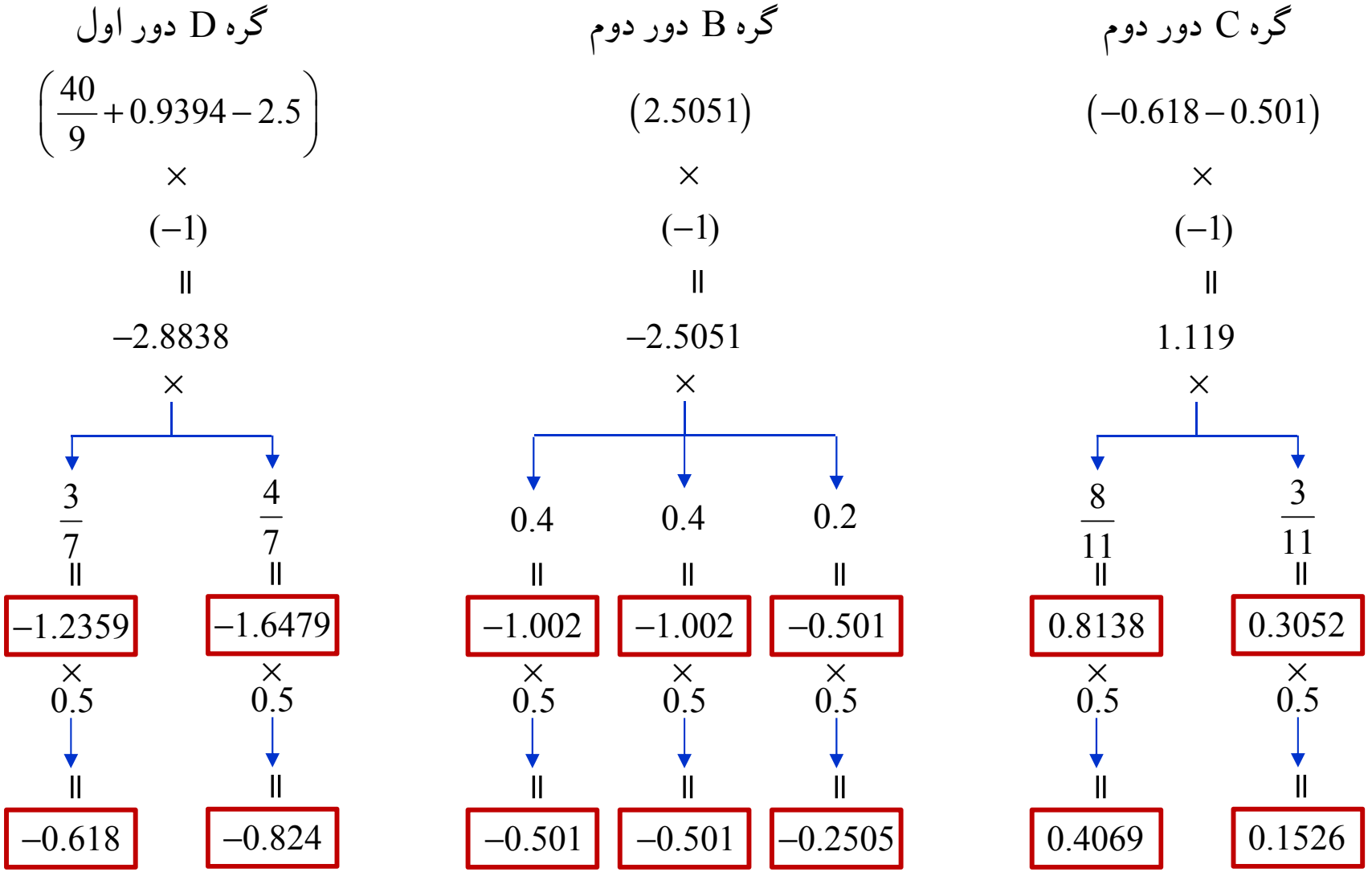


الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی.

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

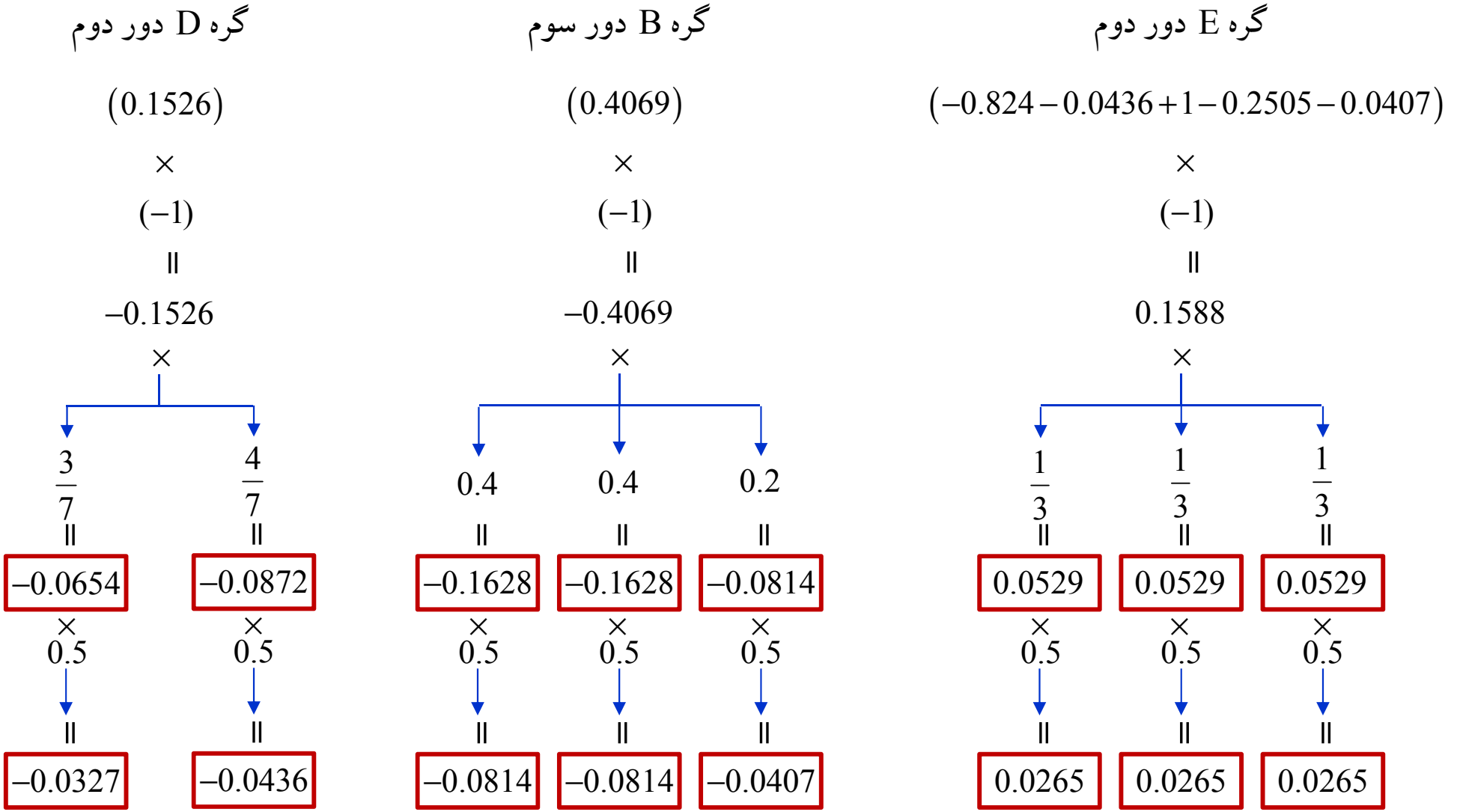
پاسخ مثال 12- آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

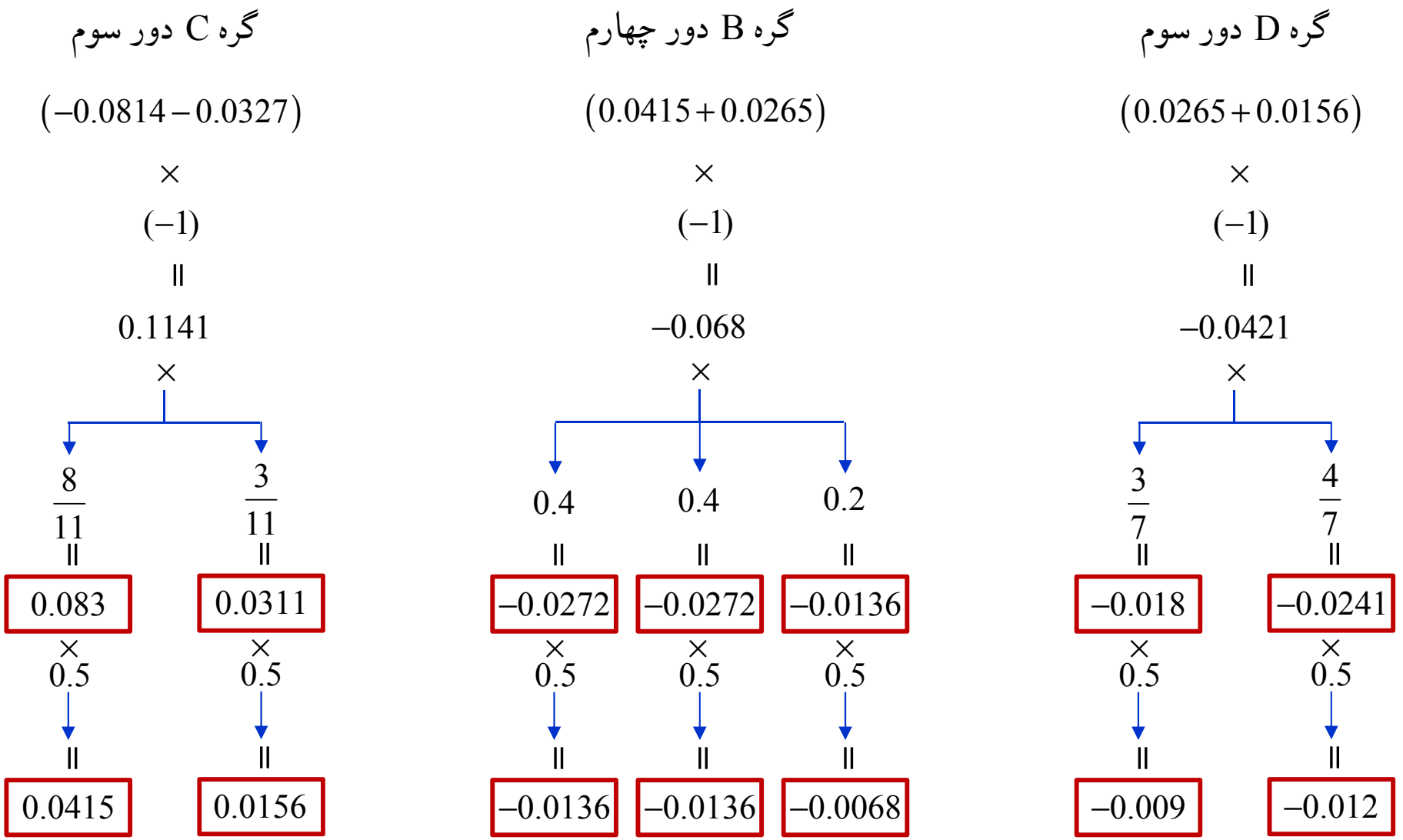
پاسخ مثال 12- آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز اولیه

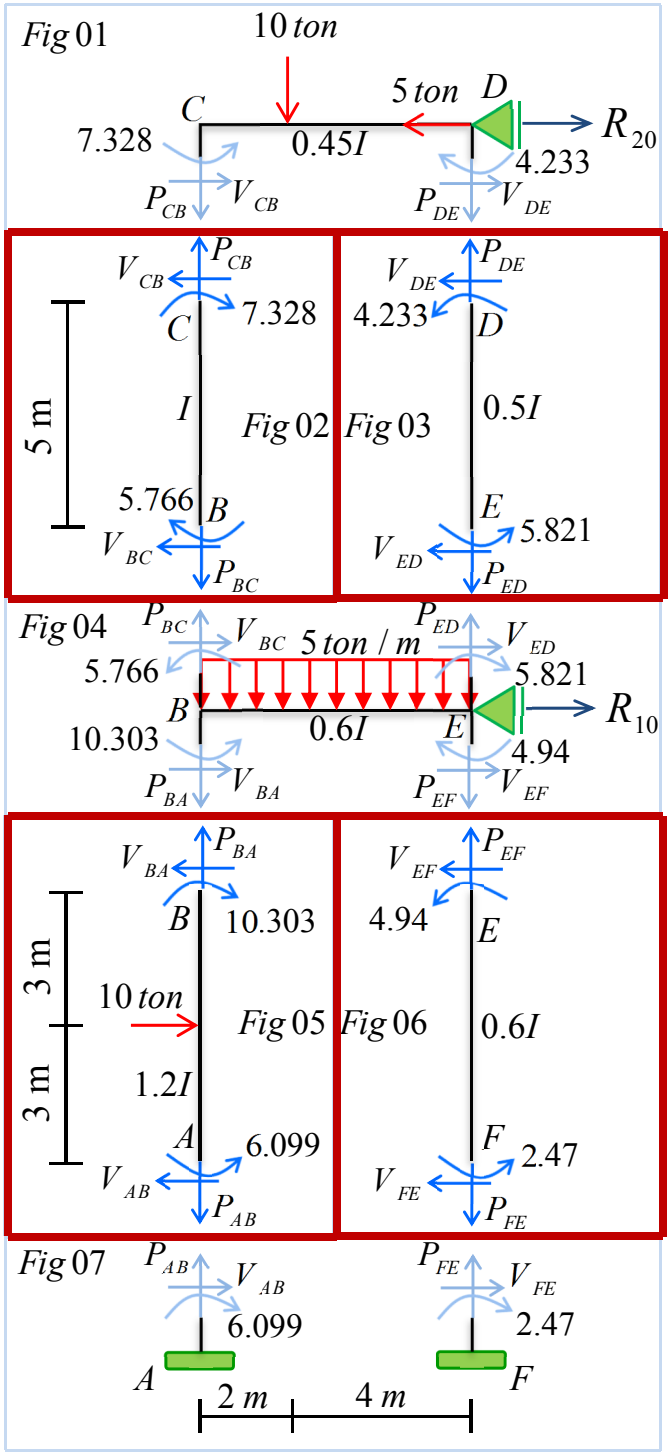


Fig 02 :

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CB} \times 5 - 7.328 - 5.766 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = 2.619\,ton} \quad (12.1)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BC} - V_{CB} = 0 \quad \overset{(12.1)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = -2.619\,ton} \quad (12.2)$$

Fig 03 :

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DE} \times 5 + 4.233 + 5.821 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{DE} = -2.011\,ton} \quad (12.3)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{ED} - V_{DE} = 0 \quad \overset{(12.3)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{ED} = 2.011\,ton} \quad (12.4)$$

Fig 05 :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA} \times 6 - 10 \times 3 - 10.303 + 6.099 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 5.701\,ton} \quad (12.5)$$

Fig 06 :

$$\sum M_F = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EF} \times 6 + 4.94 + 2.47 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{EF} = -1.235\,ton} \quad (12.6)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز اولیه

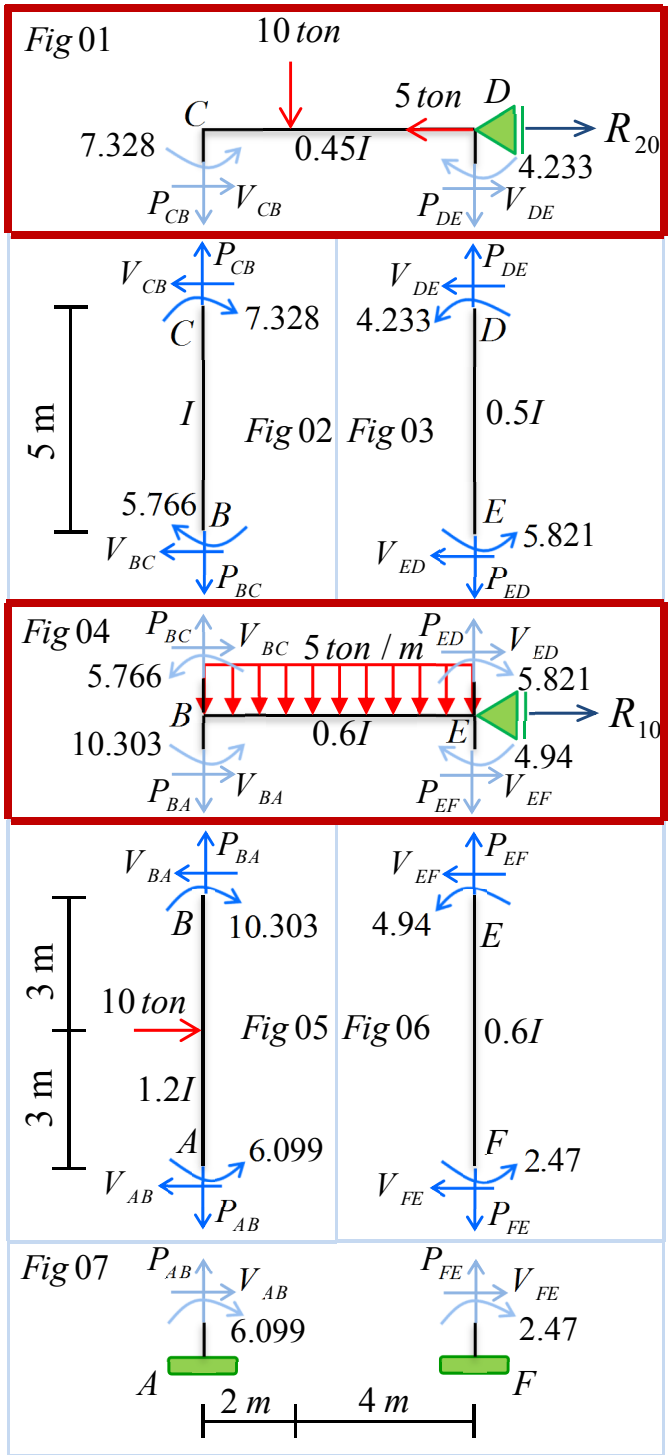


Fig 01 :

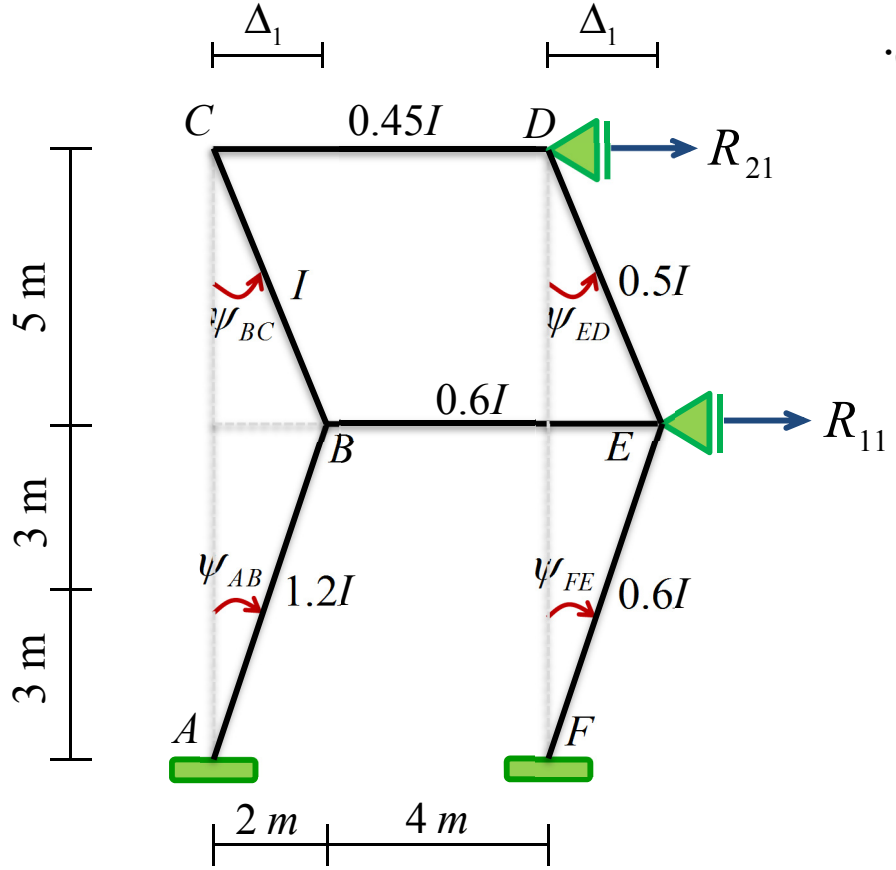
Fig 04 :

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله اول: سازه در حالتی که فاقد درجه آزادی انتقالی و بدون بارگذاری است قید اولین درجه آزادی انتقالی را در راستای خودش جابجا می‌کنیم.



با تعریف:

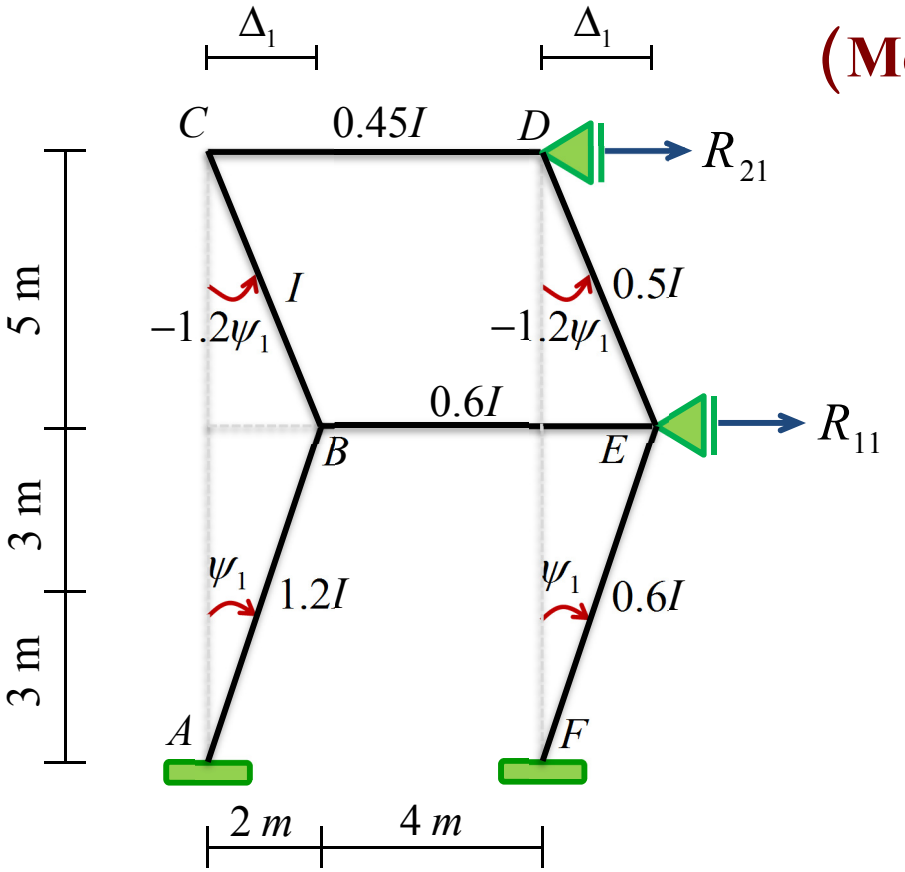
در نتیجه:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله اول: محاسبه لنگر گیرداری



$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{AB} = \bar{M}_{BA} = -240\psi_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{FE} = \bar{M}_{EF} = -120\psi_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BC} = \bar{M}_{CB} = 288\psi_1}$$

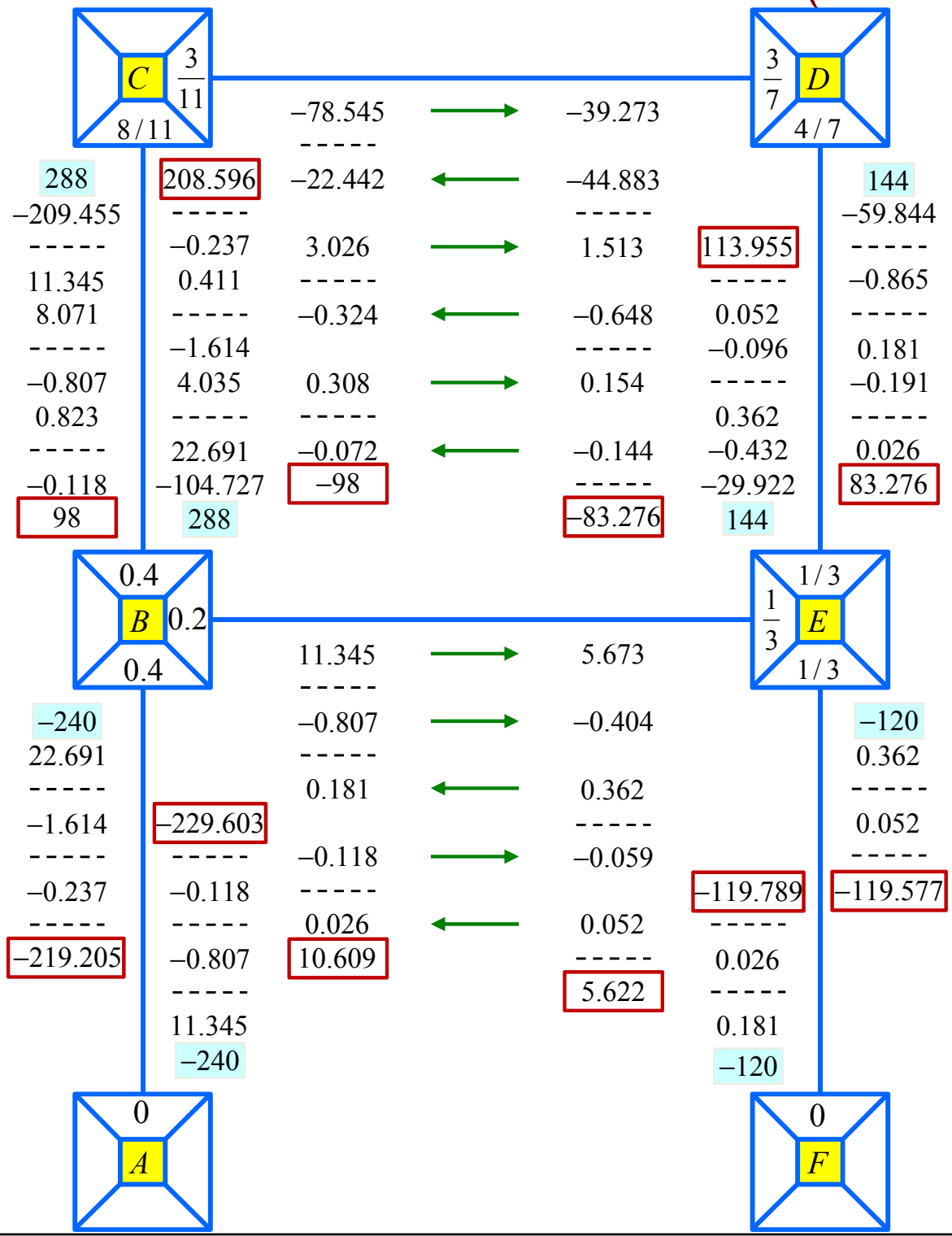
$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{ED} = \bar{M}_{DE} = 144\psi_1}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله اول: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.

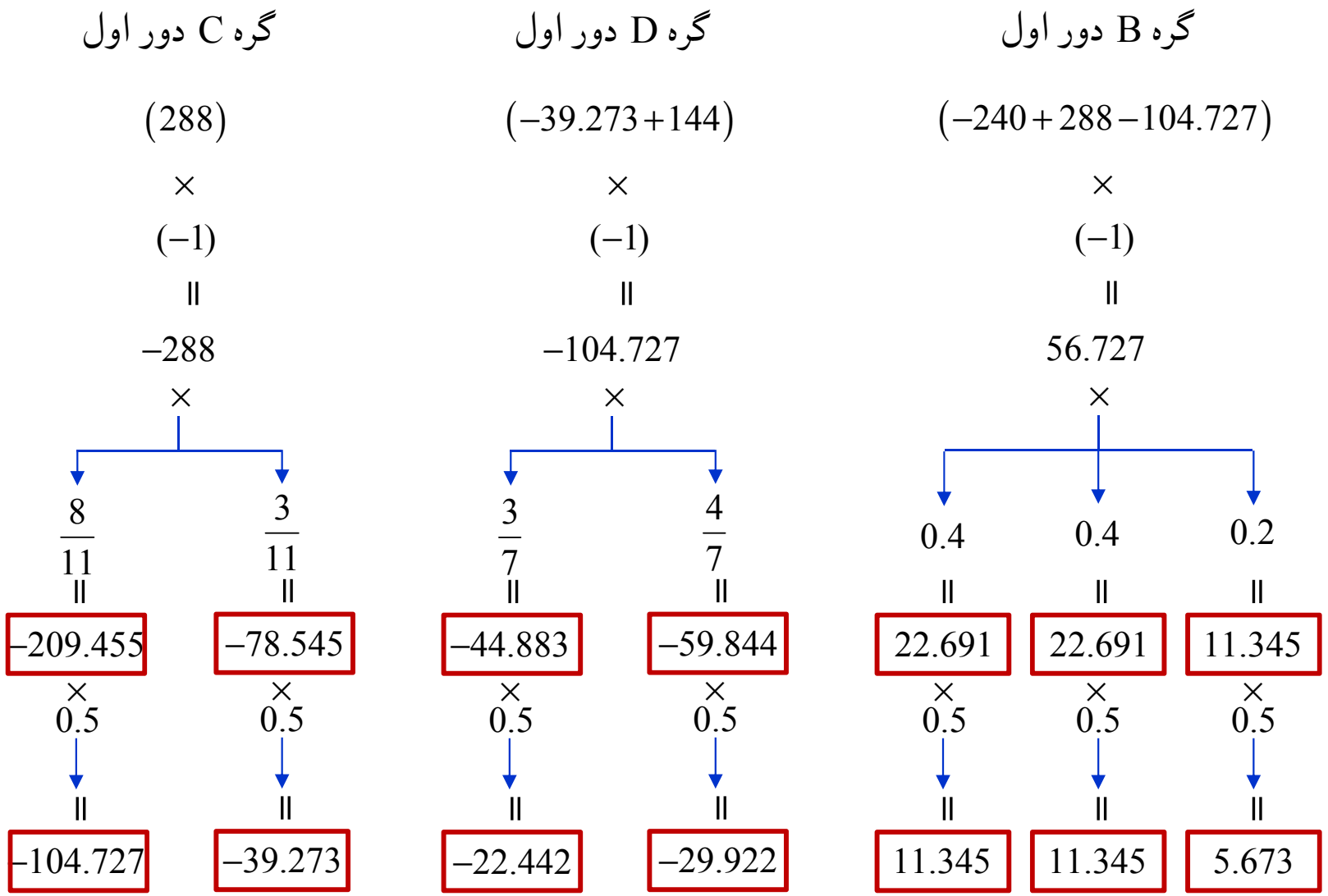


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله اول: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.

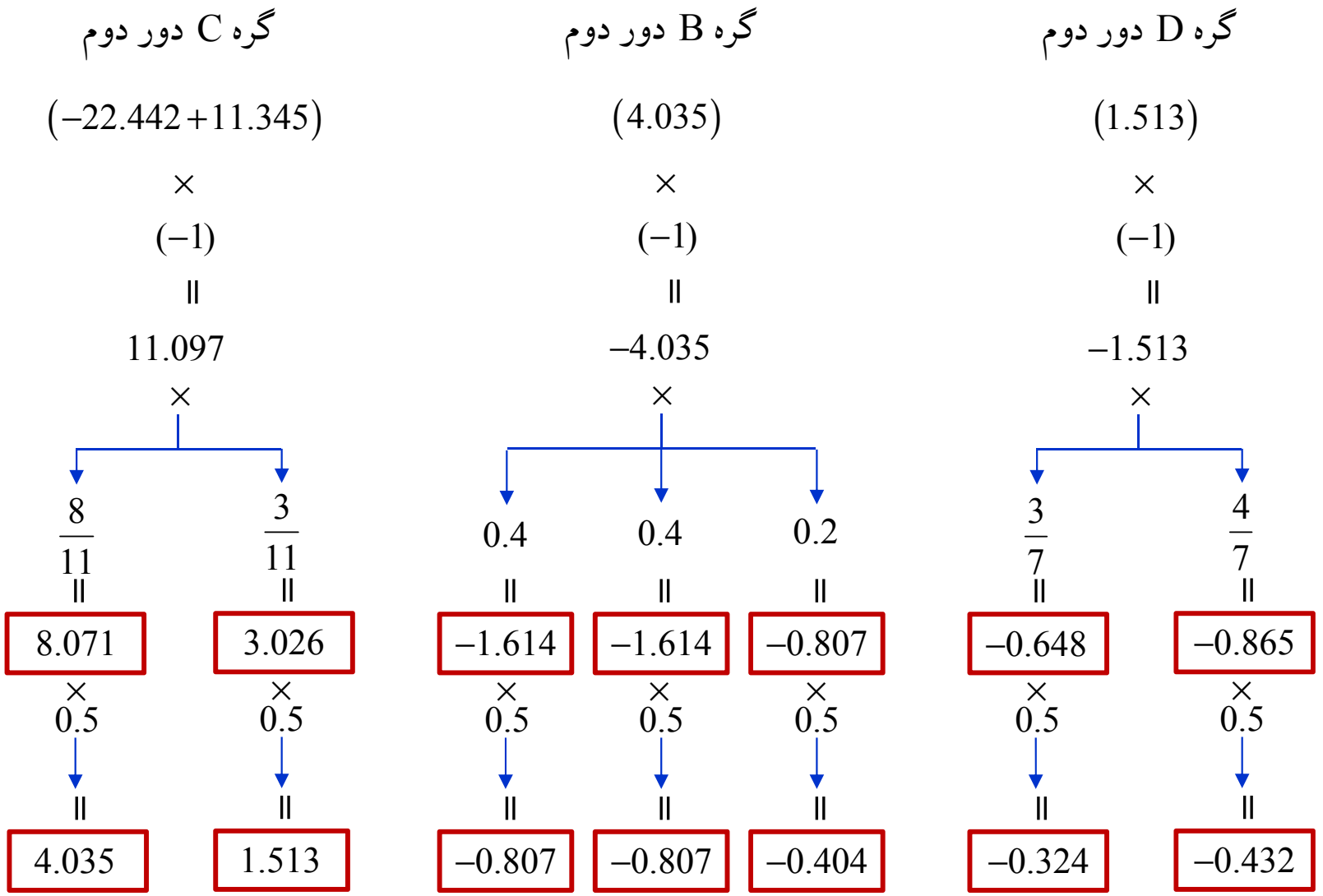


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله اول: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.

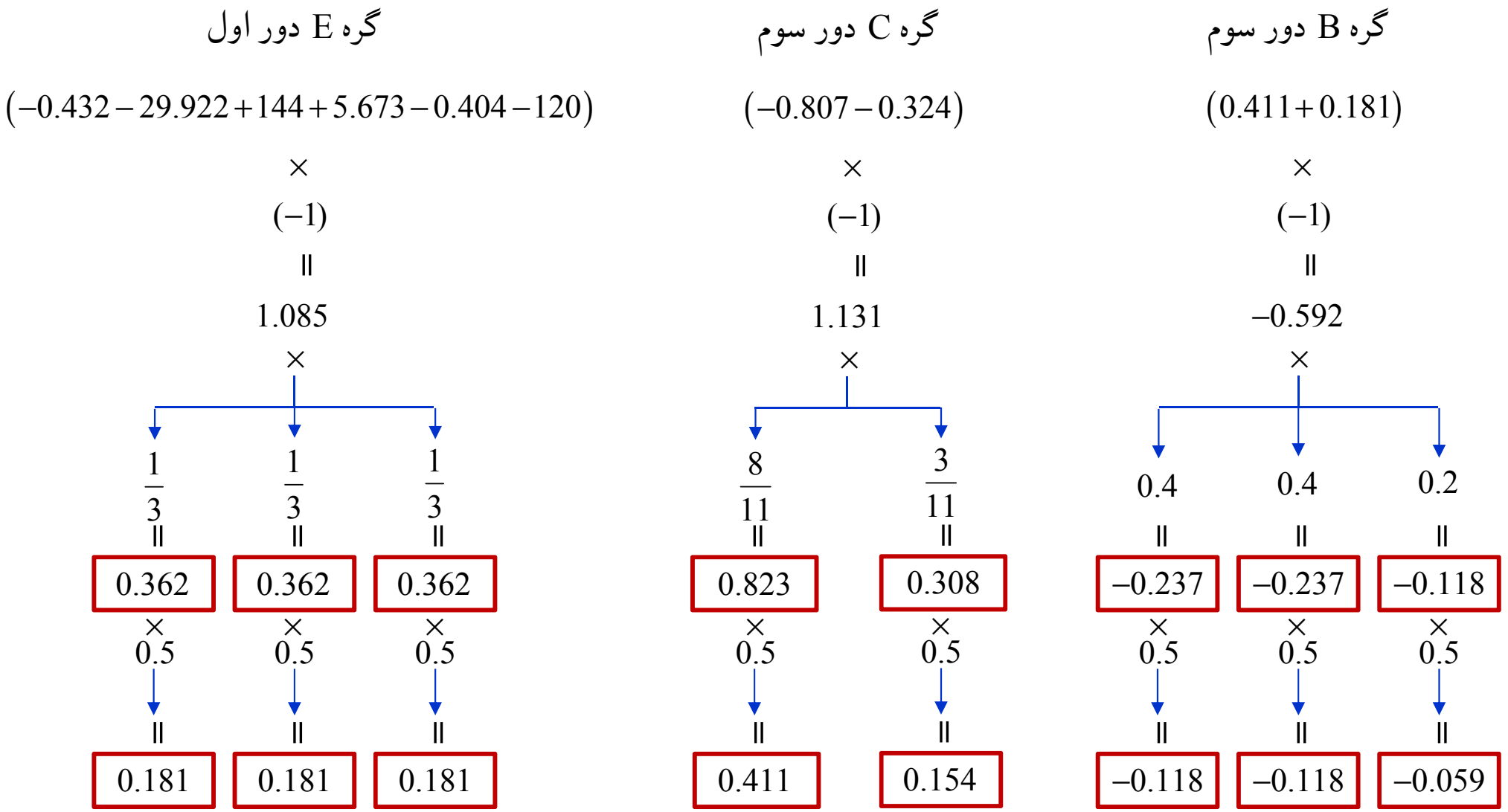


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

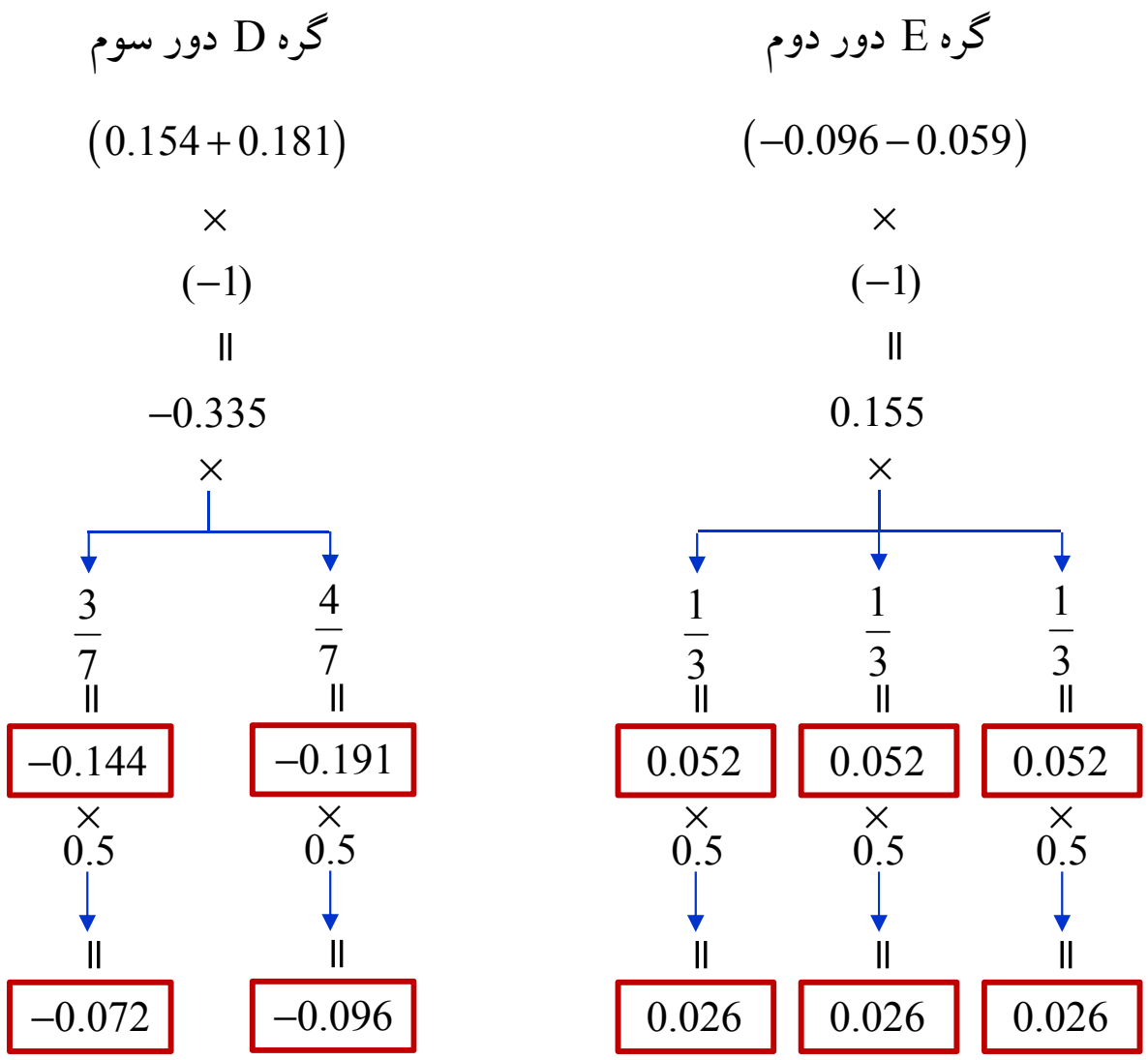
آنالیز مرحله اول: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.



الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله اول: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز مرحله اول:

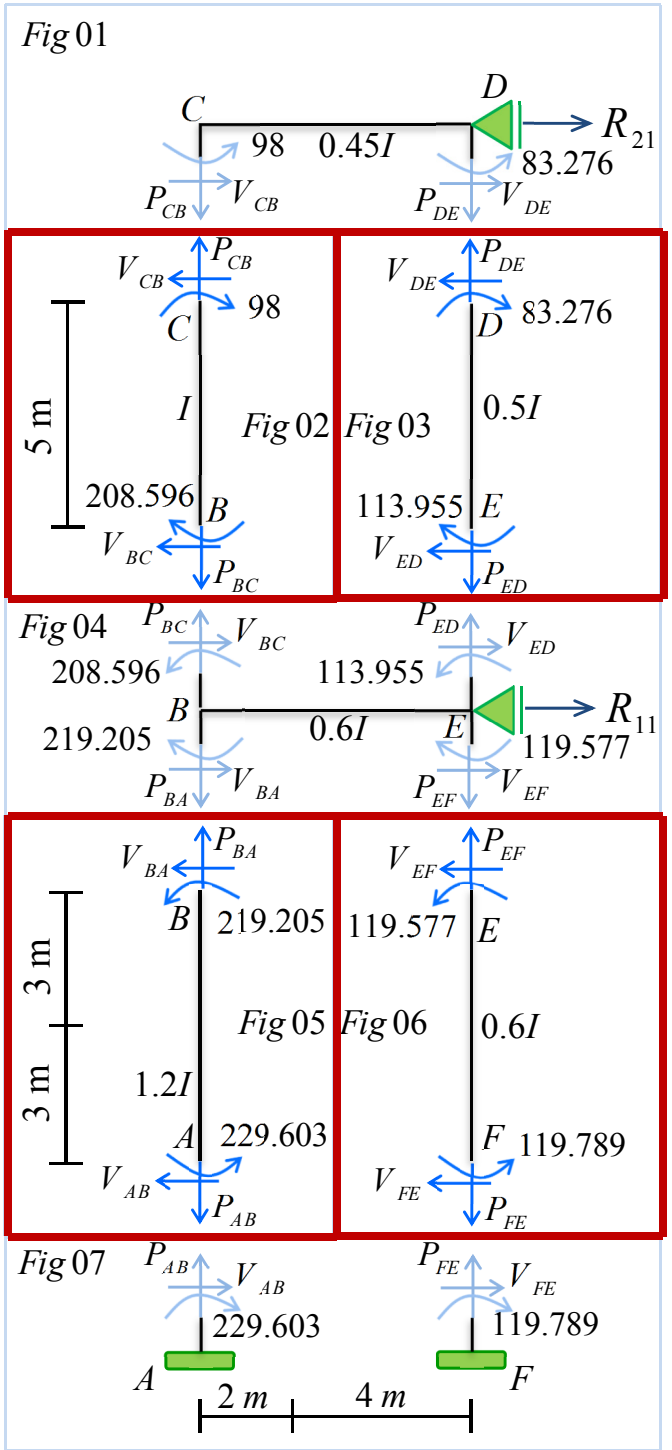


Fig 02 :

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CB} \times 5 - 98 - 208.596 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = 61.319\,ton} \quad (12.13)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BC} - V_{CB} = 0 \quad \overset{(12.13)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = -61.319\,ton} \quad (12.14)$$

Fig 03 :

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DE} \times 5 - 83.276 - 113.955 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{V_{DE} = 39.446\,ton} \quad (12.15)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{ED} - V_{DE} = 0 \quad \overset{(12.15)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{ED} = -39.446\,ton} \quad (12.16)$$

Fig 05 :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA} \times 6 + 219.205 + 229.603 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = -74.801\,ton} \quad (12.17)$$

Fig 06 :

$$\sum M_F = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EF} \times 6 + 119.577 + 119.789 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{EF} = -39.894\,ton} \quad (12.18)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز مرحله اول:

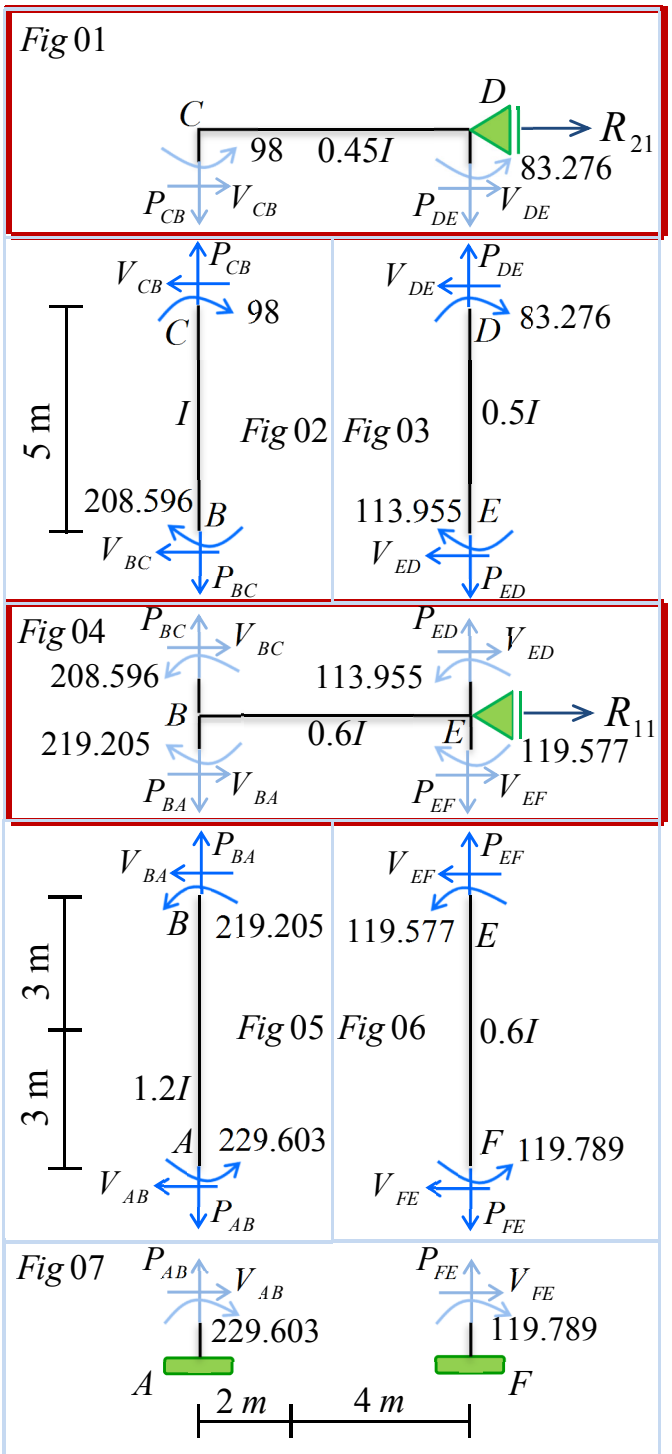


Fig 01 :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CB} + V_{DE} + R_{21} = 0$$

(12.13)&(12.15)

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{21} = -100.765\ ton} \qquad (12.19)$$

Fig 04 :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} + V_{ED} + V_{BA} + V_{EF} + R_{11} = 0$$

(12.14)&(12.16)&(12.17)&(12.18)

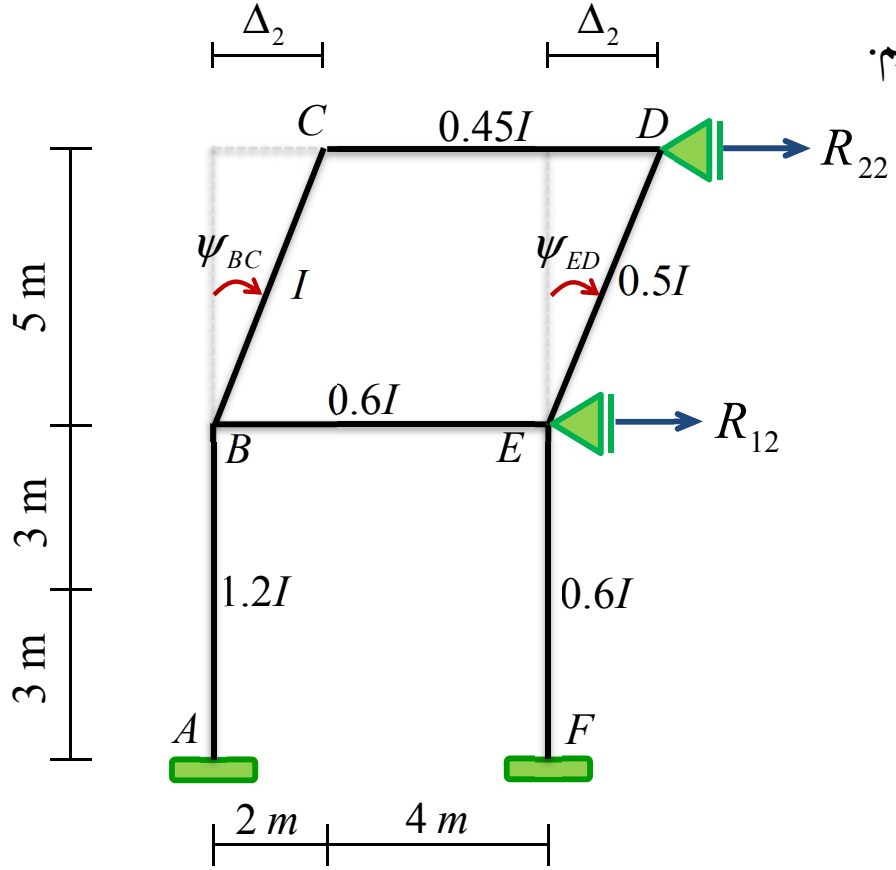
$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{11} = 215.46\ ton} \qquad (12.20)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله دوم: سازه در حالتی که فاقد درجه آزادی انتقالی و بدون بارگذاری است قید دومین درجه آزادی انتقالی را در راستای خودش جابجا می‌کنیم.



با تعریف:

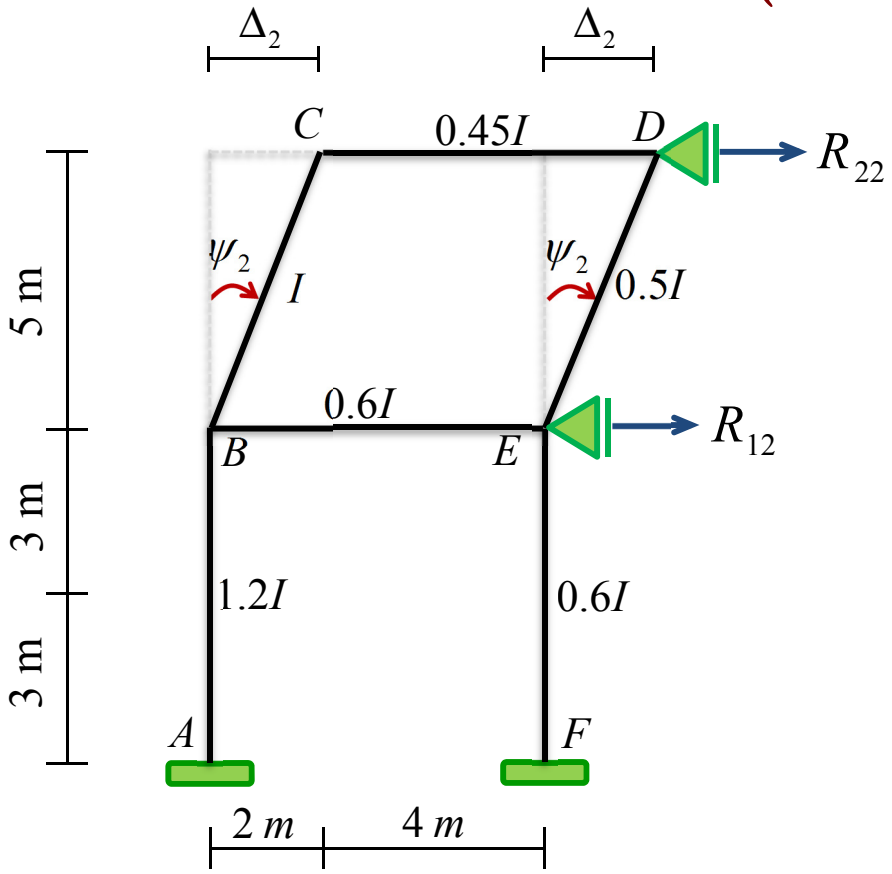
در نتیجه:

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله دوم: محاسبه لنگر گیرداری



$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{BC} = \bar{M}_{CB} = -240\psi_2}$$

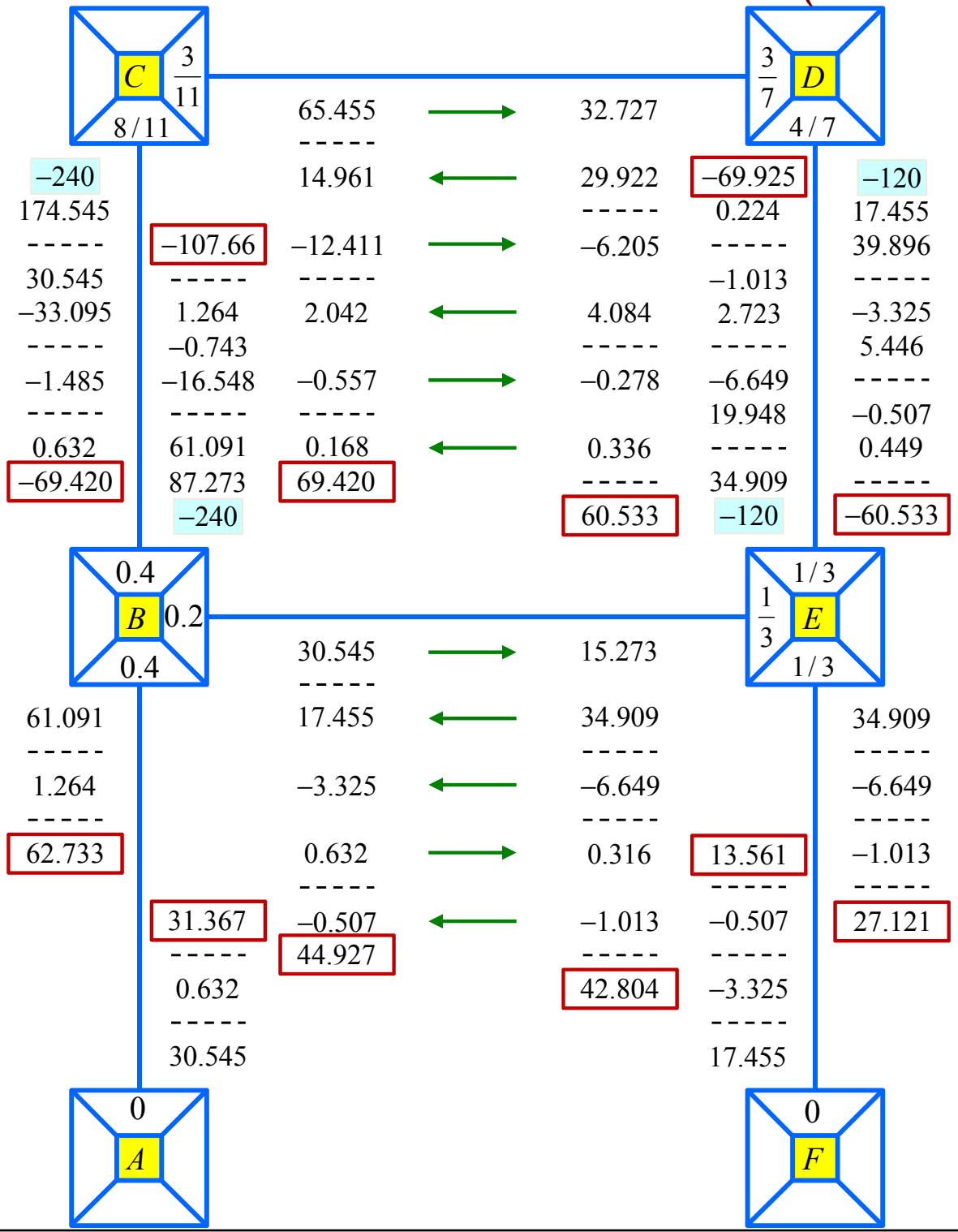
$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{ED} = \bar{M}_{DE} = -120\psi_2}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله دوم: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.

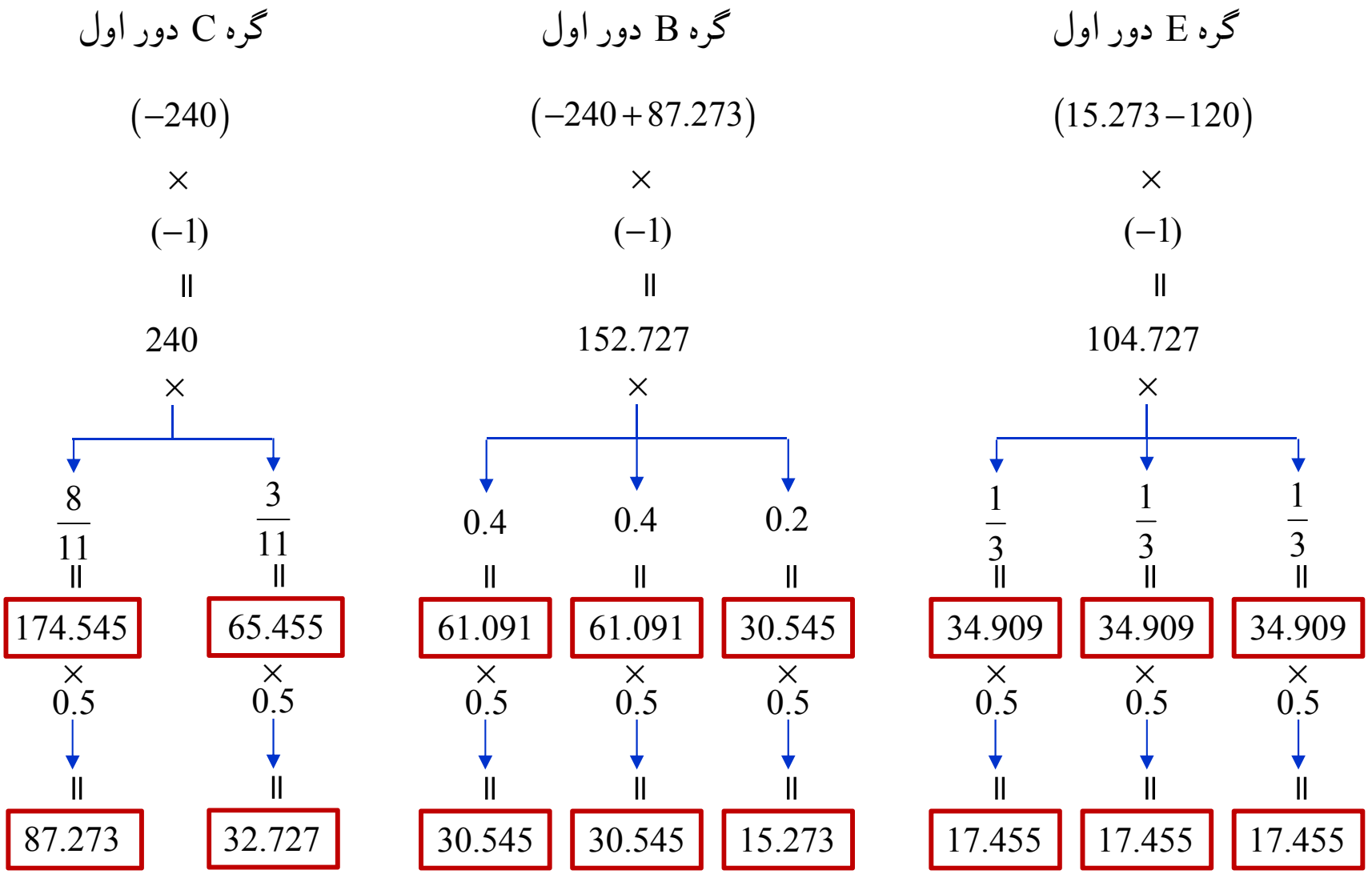


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله دوم: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.

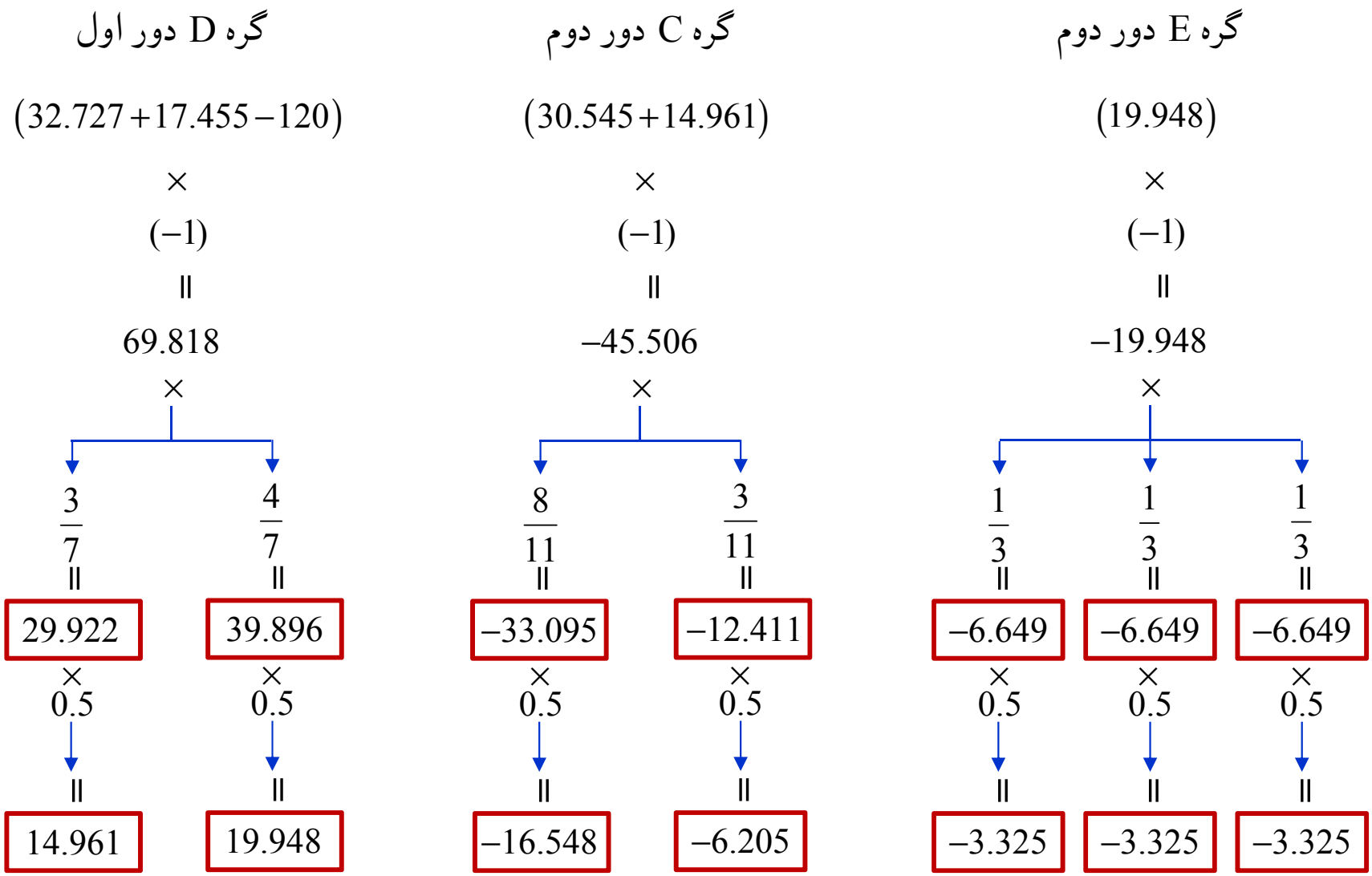


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله دوم: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.

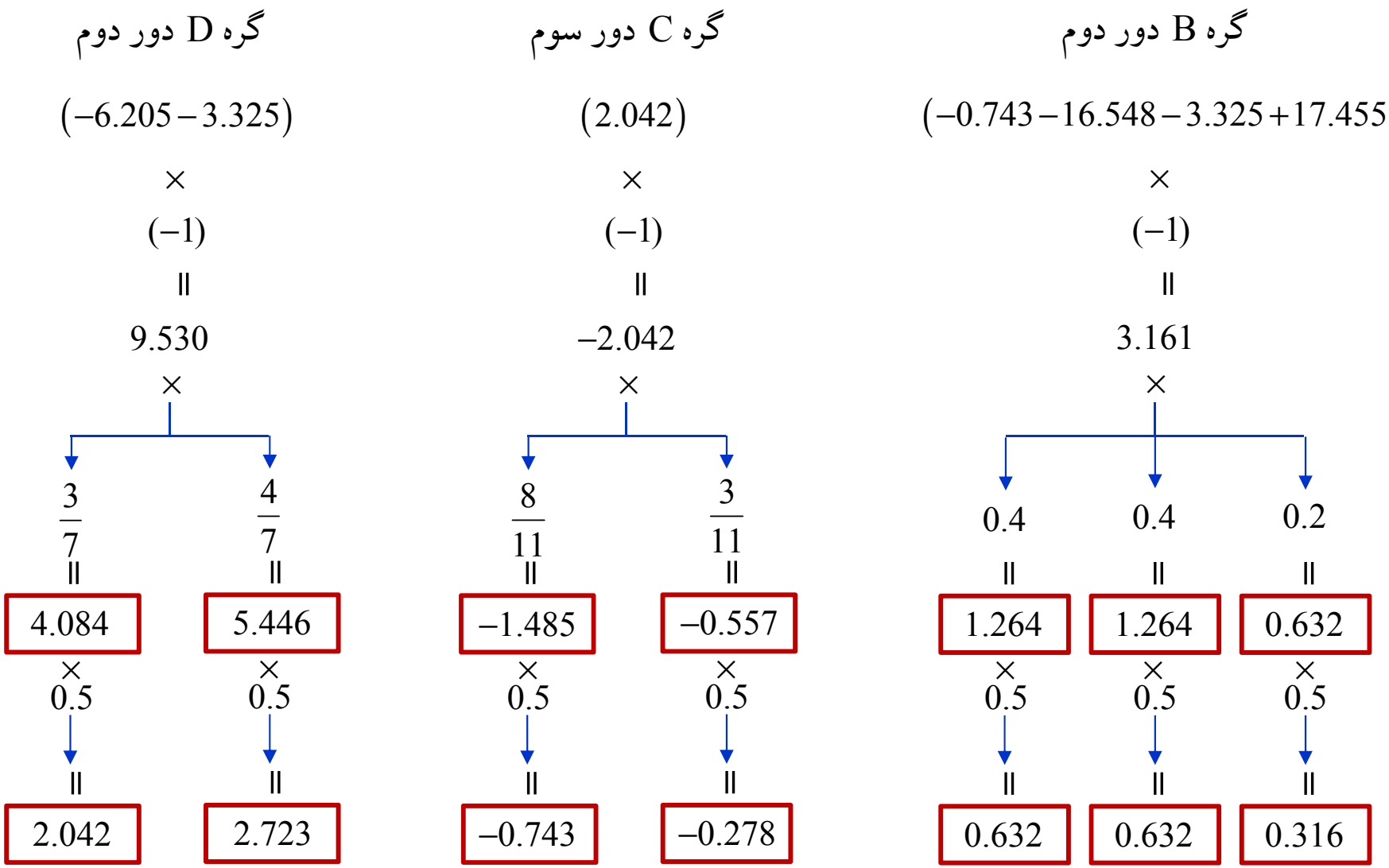


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

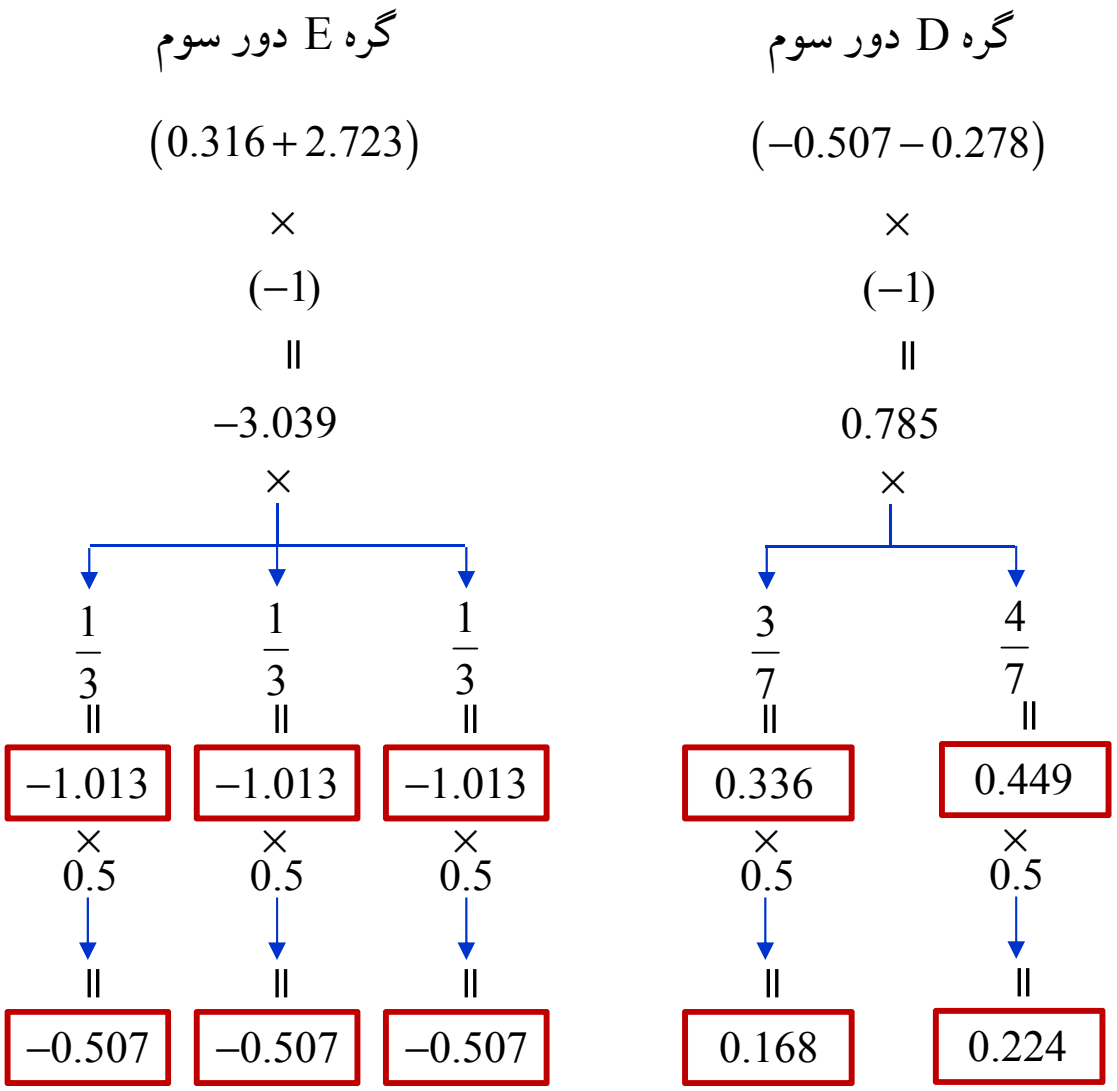
آنالیز مرحله دوم: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.



الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

آنالیز مرحله دوم: چون بیشترین لنگر نامتعادل در گره C وجود دارد از این رو از گره C شروع می‌کنیم.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز مرحله دوم:

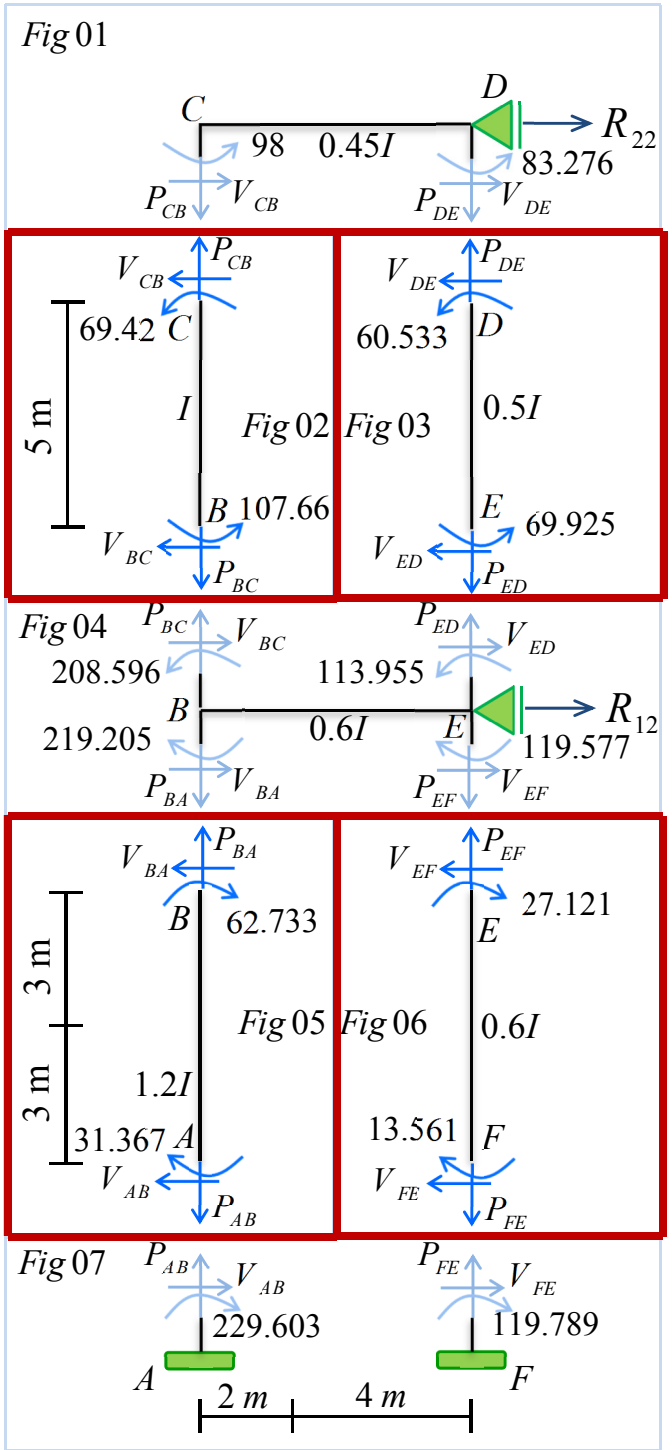


Fig 02 :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_{CB} \times 5 + 69.42 + 107.66 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = -35.416\,ton} \quad (12.24)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{BC} - V_{CB} = 0 \overset{(12.24)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 35.416\,ton} \quad (12.25)$$

Fig 03 :

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow V_{DE} \times 5 + 60.533 + 69.925 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{DE} = -26.092\,ton} \quad (12.26)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{ED} - V_{DE} = 0 \overset{(12.26)}{\Rightarrow} \boxed{V_{ED} = 26.092\,ton} \quad (12.27)$$

Fig 05 :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA} \times 6 - 62.733 - 31.367 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 15.683\,ton} \quad (12.28)$$

Fig 06 :

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow V_{EF} \times 6 - 27.121 - 13.561 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{EF} = 6.78\,ton} \quad (12.29)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12- آنالیز مرحله دوم:

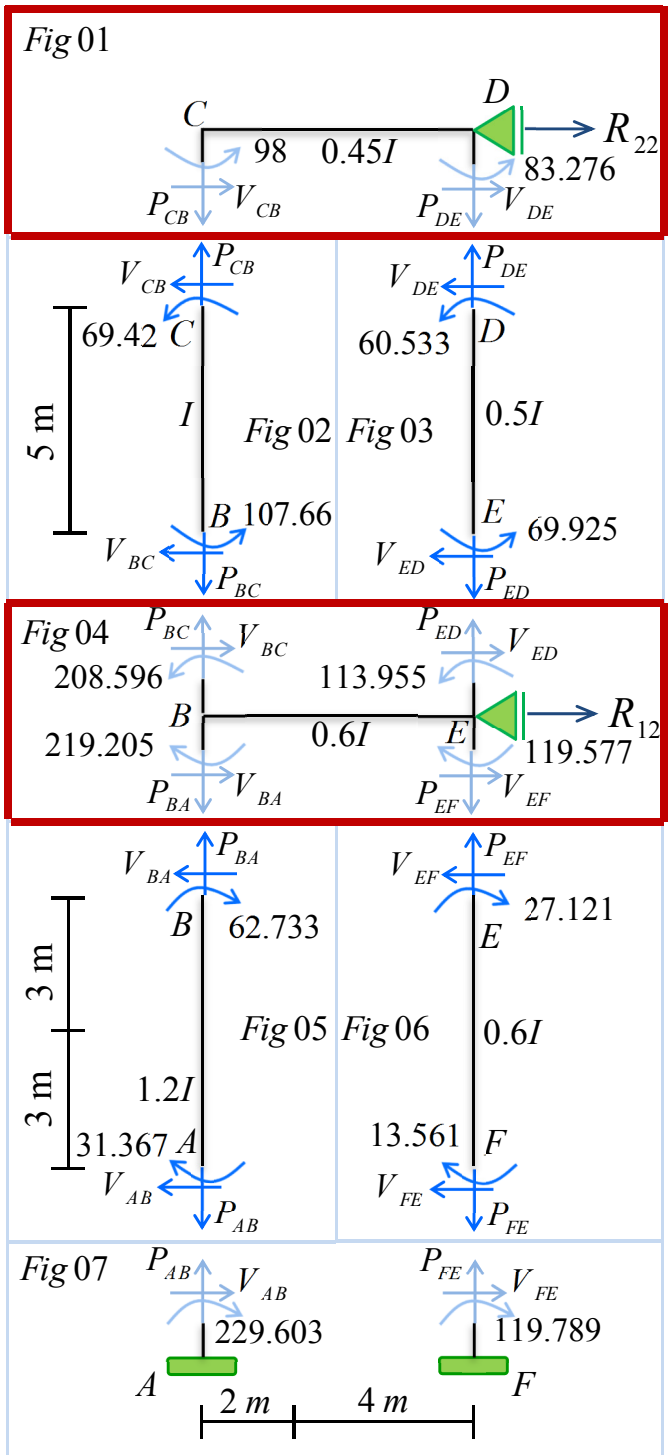


Fig 01 :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CB} + V_{DE} + R_{22} = 0$$

$$\xrightarrow{(12.24)\&(12.26)} \quad \boxed{R_{22} = 61.507\ ton} \qquad (12.30)$$

Fig 04 :

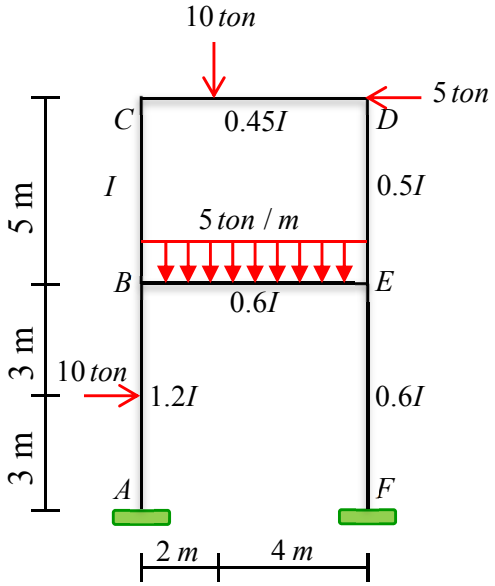
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} + V_{ED} + V_{BA} + V_{EF} + R_{12} = 0$$

$$\xrightarrow{(12.25)\&(12.27)\&(12.28)\&(12.29)} \quad \boxed{R_{12} = -83.971\ ton} \qquad (12.31)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

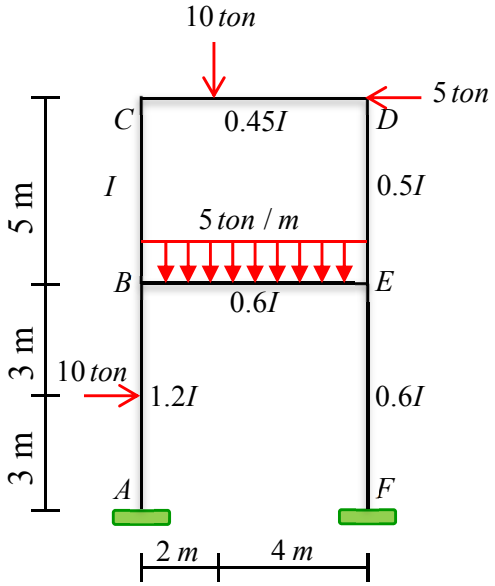


$$(12.7)\ \&\ (12.8)$$
$$(12.19)\ \&\ (12.20) \rightarrow (12.32) \Rightarrow \begin{bmatrix} 215.46 & -83.971 \\ -100.765 & 61.507 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} -3.858 \\ 4.392 \end{Bmatrix} \quad (12.33)$$
$$(12.30)\ \&\ (12.31)$$

$$(12.33) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 215.46 & -83.971 \\ -100.765 & 61.507 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -3.858 \\ 4.392 \end{Bmatrix} \quad (12.34)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



$$if \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

(یادآوری)

$$(12.34) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}=-\frac{1}{(215.46)(61.507)-(-100.765)(-83.971)}\begin{bmatrix} 61.507 & 83.971 \\ 100.765 & 215.46 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -3.858 \\ 4.392 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.0274532 \\ -0.1163858 \end{Bmatrix} \quad (12.35)$$

$$(12.36) \rightarrow (12.35) \Rightarrow M_{AB}=M_{AB}^{(0)}-0.0274532M_{AB}^{(1)}-0.1163858M_{AB}^{(2)} \quad (12.37)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

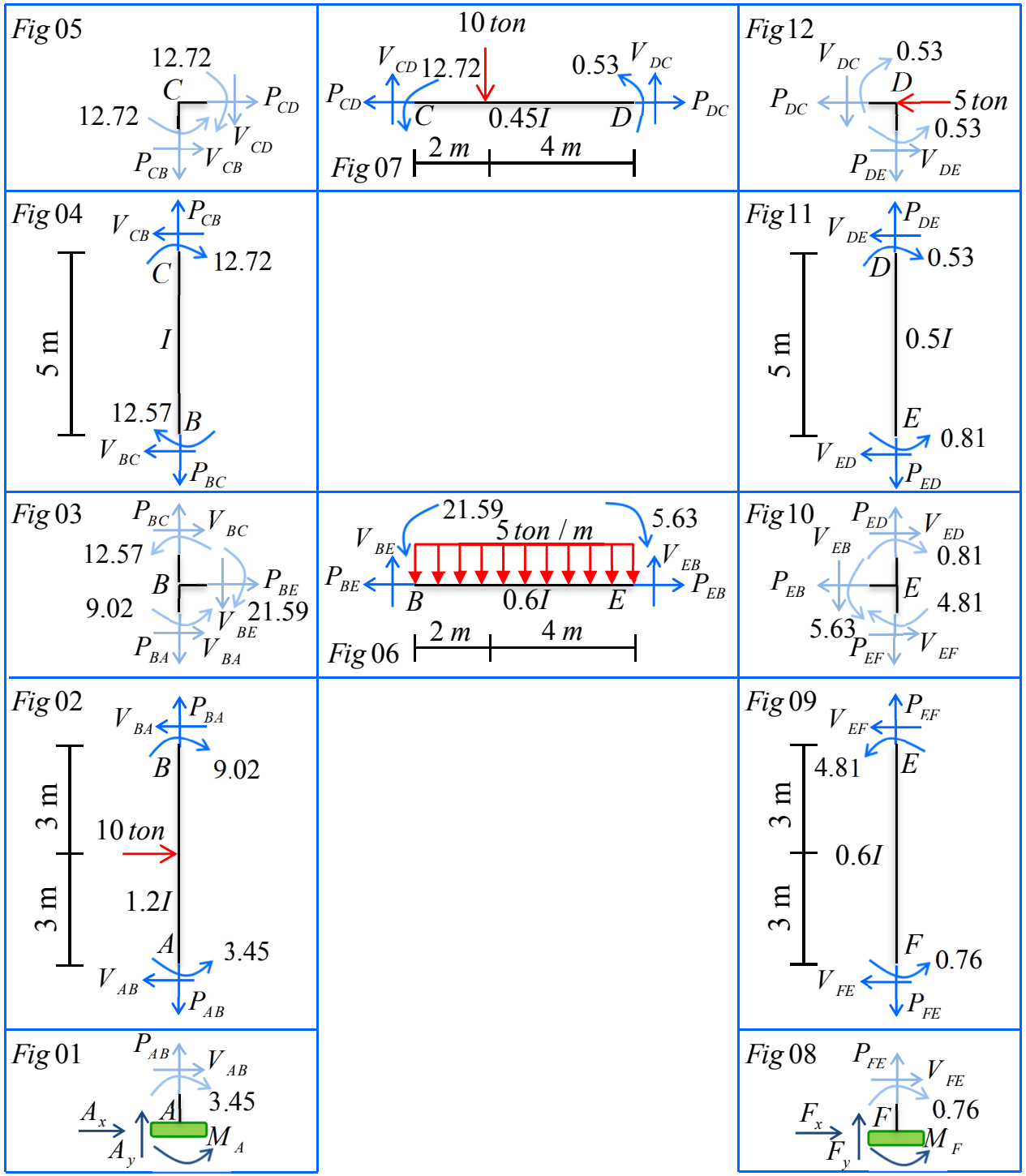
پاسخ مثال 12-

عضو	$M^{(0)}$	$M^{(1)}$	$M^{(2)}$	$M^{(0)} - 0.0274532M^{(1)} - 0.1163858M^{(2)}$
M_{AB}	-6.099	-229.603	31.367	-3.45
M_{BA}	10.303	-219.205	62.733	9.02
M_{BC}	5.766	208.596	-107.66	12.57
M_{CB}	7.328	98	-69.42	12.72
M_{FE}	-2.470	-119.789	13.561	-0.76
M_{EF}	-4.940	-119.577	27.121	-4.81
M_{ED}	-5.821	113.955	-69.925	-0.81
M_{DE}	-4.233	83.276	-60.533	0.53
M_{BE}	-16.069	10.609	44.927	-21.59
M_{EB}	10.761	5.622	42.804	5.63
M_{CD}	-7.328	-98	69.42	-12.72
M_{DC}	4.233	-83.276	60.533	-0.53

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

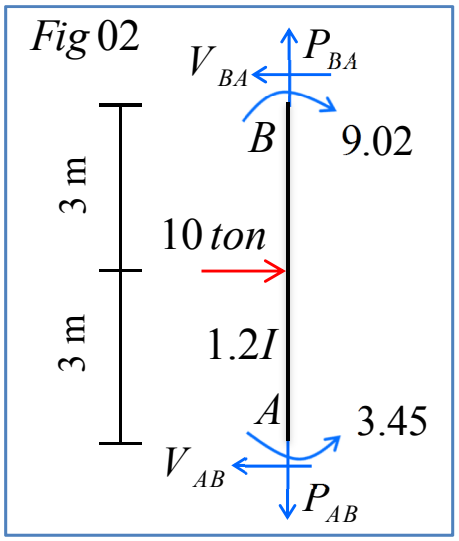


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

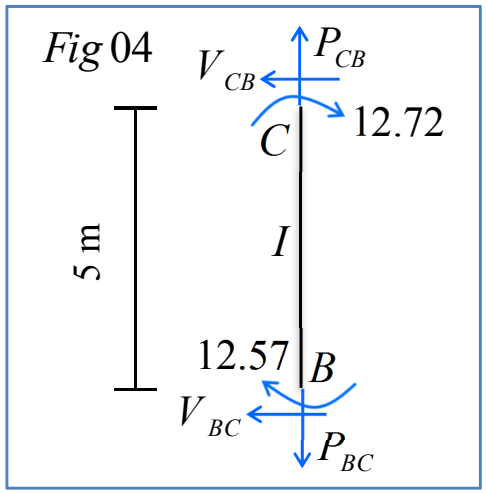
با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BA} \times 6 + 3.45 - 9.02 - 10 \times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = 5.93\,ton} \qquad (12.38)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{AB} - V_{BA} + 10 = 0 \quad \overset{(12.38)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{AB} = 4.07\,ton} \qquad (12.39)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:



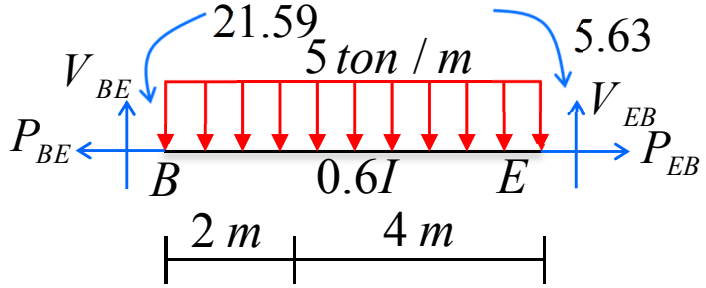
$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CB} \times 5 - 12.72 - 12.57 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = 5.06\,ton} \qquad (14.40)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{CB} - V_{BC} = 0 \quad \overset{(14.40)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = -5.06\,ton} \qquad (14.41)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

Fig 06

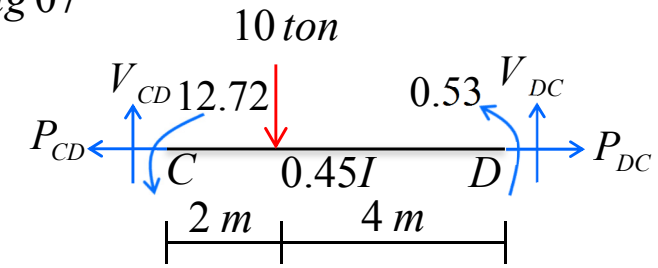


با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EB} \times 6 - 5.63 - 5 \times 6 \times \frac{6}{2} + 21.59 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{EB} = 12.34\, ton} \quad (12.42)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BE} + V_{EB} - 5 \times 6 = 0 \quad \overset{(12.42)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BE} = 17.66\, ton} \quad (12.43)$$

Fig 07



با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DC} \times 6 + 0.53 - 10 \times 2 + 12.72 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{DC} = 1.13\, ton} \quad (14.44)$$

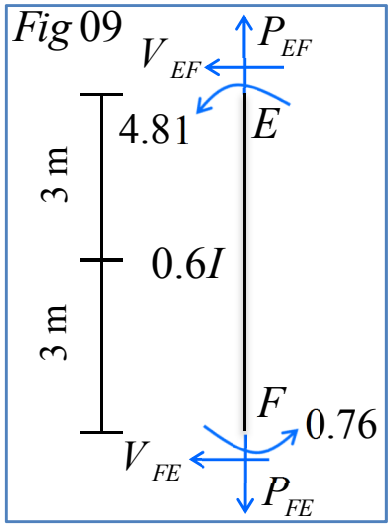
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} + V_{DC} - 10 = 0 \quad \overset{(14.44)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{CD} = 8.87\, ton} \quad (14.45)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

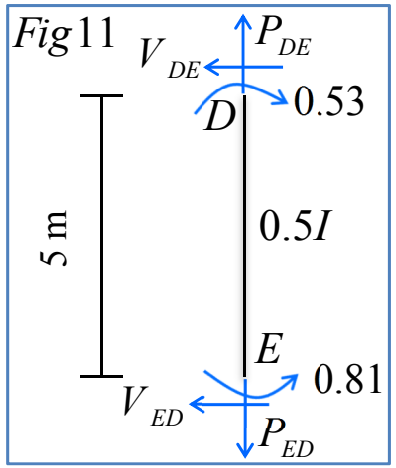
با بررسی شکل (9) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_F = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EF} \times 6 + 4.81 + 0.76 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{EF} = -0.93\,ton} \quad (12.46)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EF} + V_{FE} = 0 \quad \overset{(12.46)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{FE} = 0.93\,ton} \quad (12.47)$$

با بررسی شکل (11) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DE} \times 5 + 0.81 - 0.53 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{DE} = -0.06\,ton} \quad (14.48)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DE} + V_{ED} = 0 \quad \overset{(14.48)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{ED} = 0.06\,ton} \quad (14.49)$$

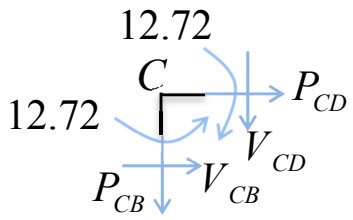
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:

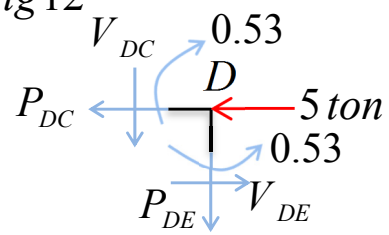
Fig 05



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P_{CB} - V_{CD} = 0 \overset{(12.45)}{\Rightarrow} \boxed{P_{CB} = -8.87\ ton} \quad (12.50)$$

با بررسی شکل (12) نتیجه می‌شود:

Fig 12



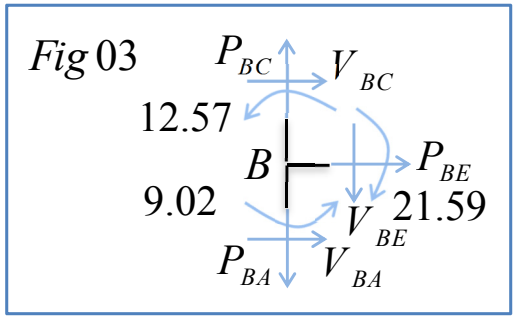
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P_{DE} - V_{DC} = 0 \overset{(12.44)}{\Rightarrow} \boxed{P_{DE} = -1.13\ ton} \quad (12.51)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{DC} - 5 + V_{DE} = 0 \overset{(12.48)}{\Rightarrow} \boxed{P_{DC} = -5.06\ ton} \quad (12.52)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

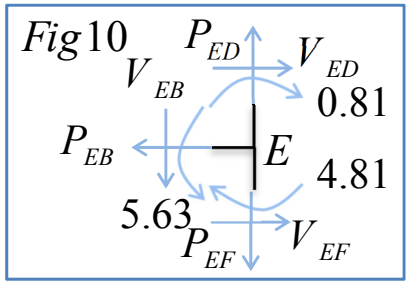


با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{BC} - P_{BA} - V_{BE} = 0 \quad \overset{(12.43)\&(12.50)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{BA} = -26.53\, ton} \qquad (12.53)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{BE} + V_{BC} + V_{BA} = 0 \quad \overset{(12.38)\&(12.41)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{BE} = -0.87\, ton} \qquad (12.54)$$

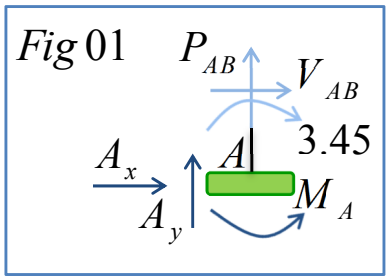
با بررسی شکل (10) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_{EF} + P_{ED} - V_{EB} = 0 \quad \overset{(12.42)\&(12.51)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{EF} = -13.47\, ton} \qquad (12.55)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



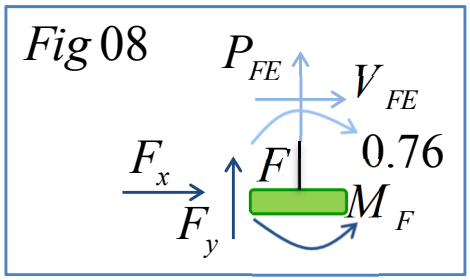
با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + V_{AB} = 0 \overset{(12.39)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = -4.07\ ton} \quad (12.56)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + P_{AB} = 0 \overset{(12.53)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 26.53\ ton} \quad (12.57)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 3.45 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 3.45\ ton.m} \quad (12.58)$$

با بررسی شکل (8) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x + V_{FE} = 0 \overset{(12.47)}{\Rightarrow} \boxed{F_x = -0.93\ ton} \quad (12.59)$$

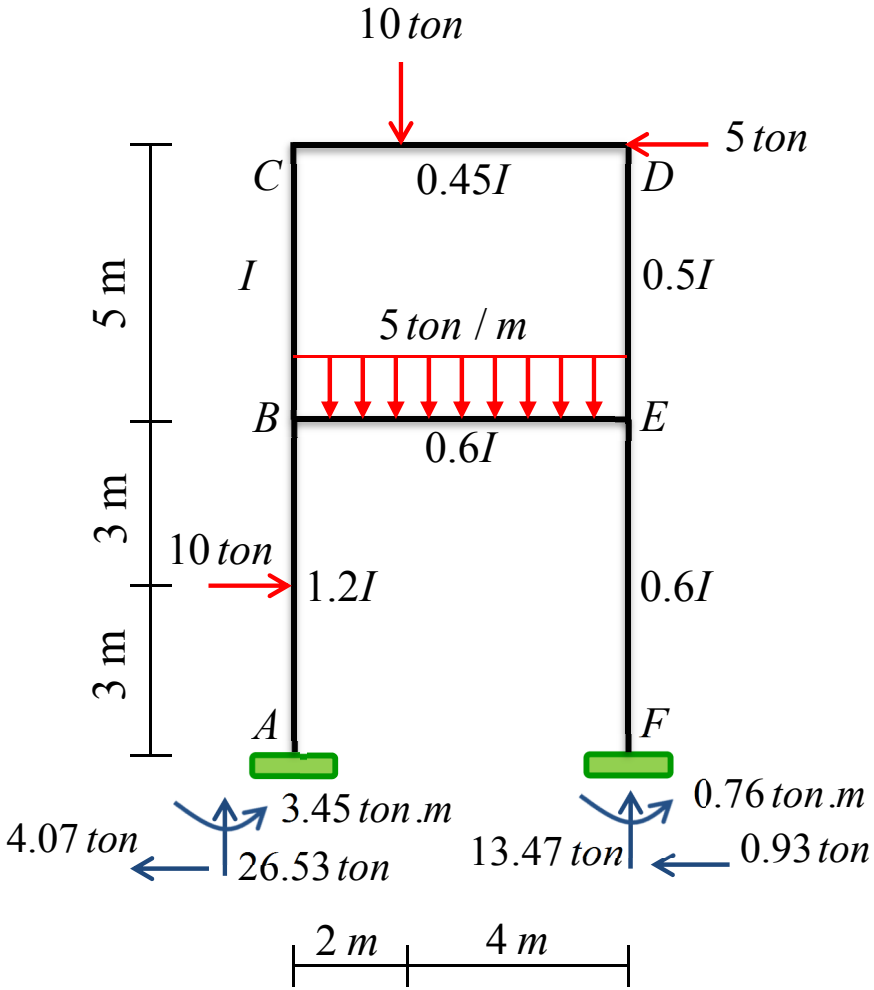
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + P_{FE} = 0 \overset{(12.55)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 13.47\ ton} \quad (12.60)$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow M_F - 0.76 = 0 \Rightarrow \boxed{M_F = 0.76\ ton.m} \quad (12.61)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

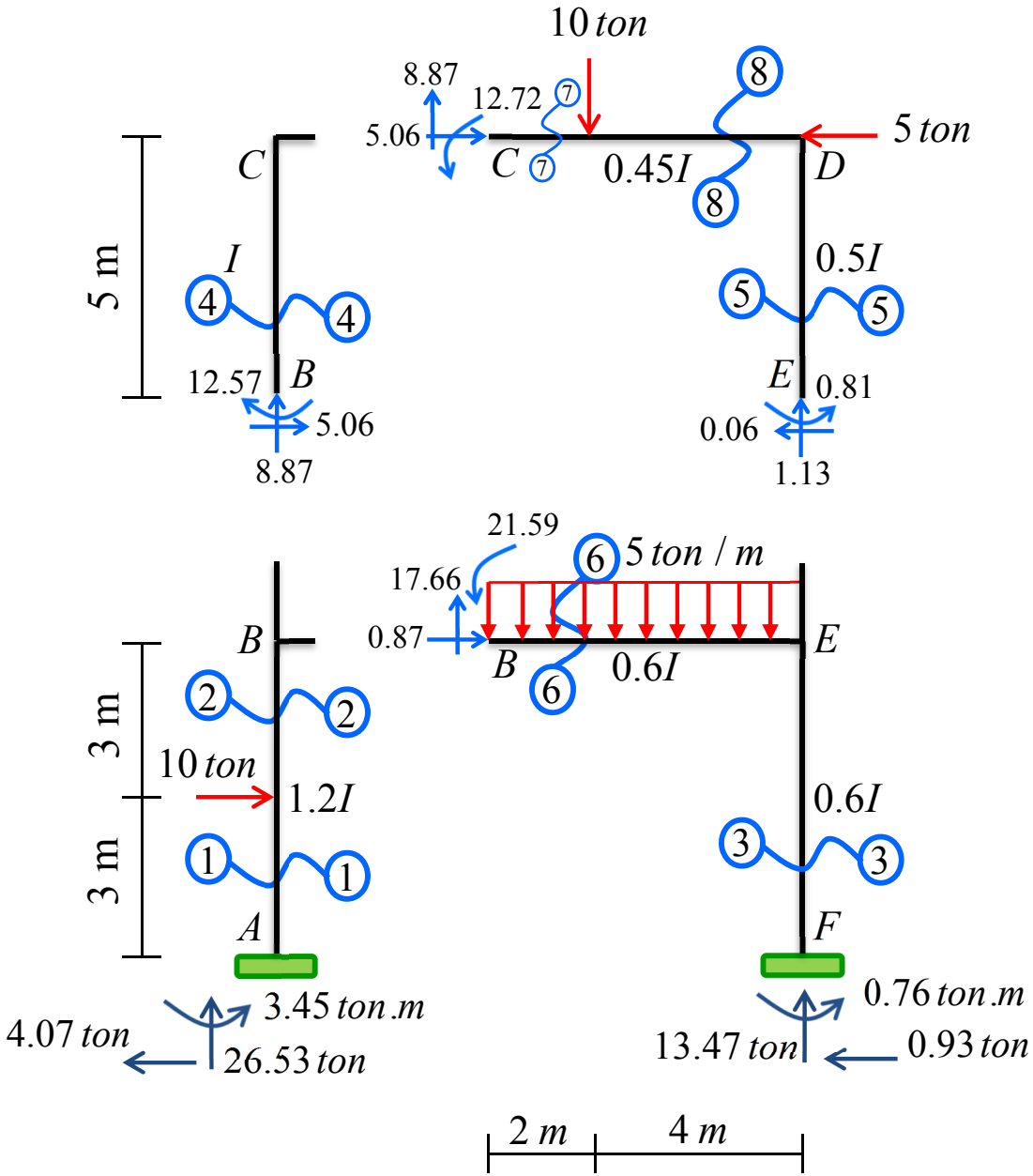
پاسخ مثال 12-



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

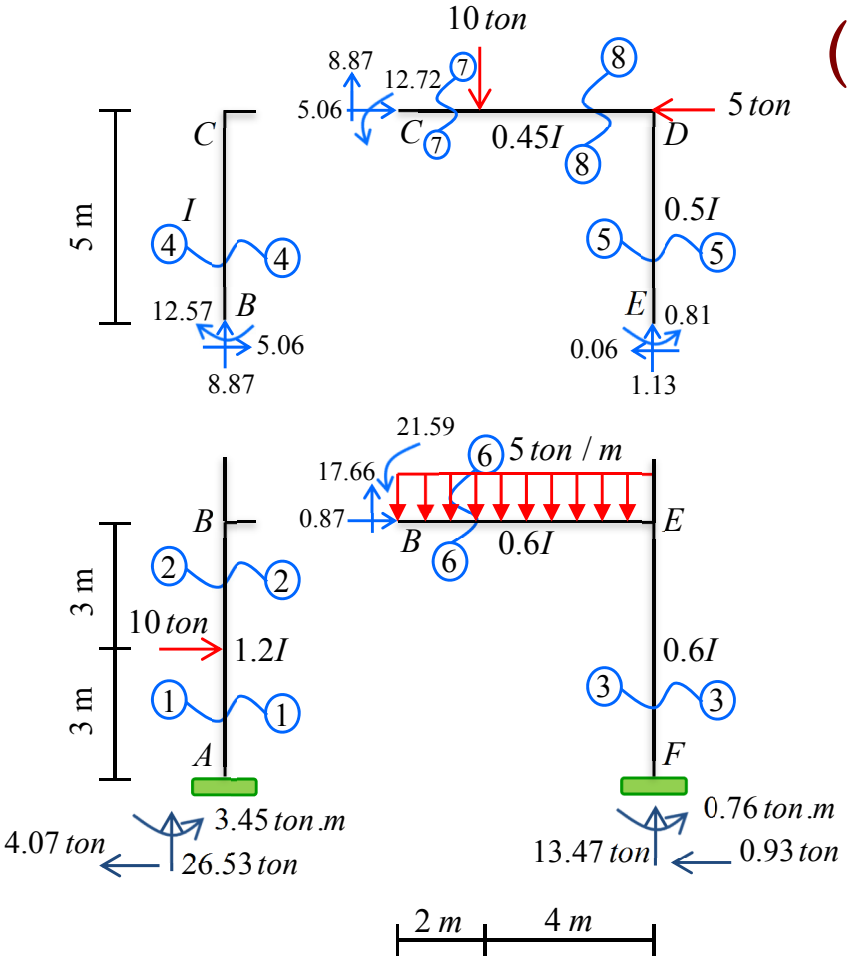
پاسخ مثال 12-



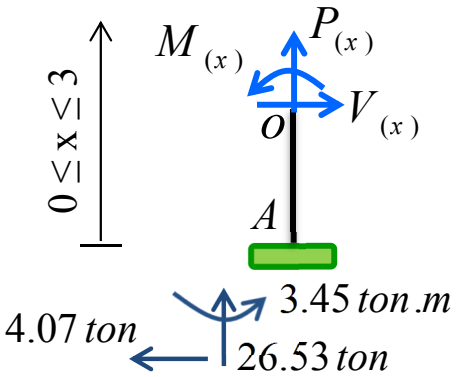
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 3.45 - 4.07 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 4.07x - 3.45}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 4.07 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 4.07\ ton}$$

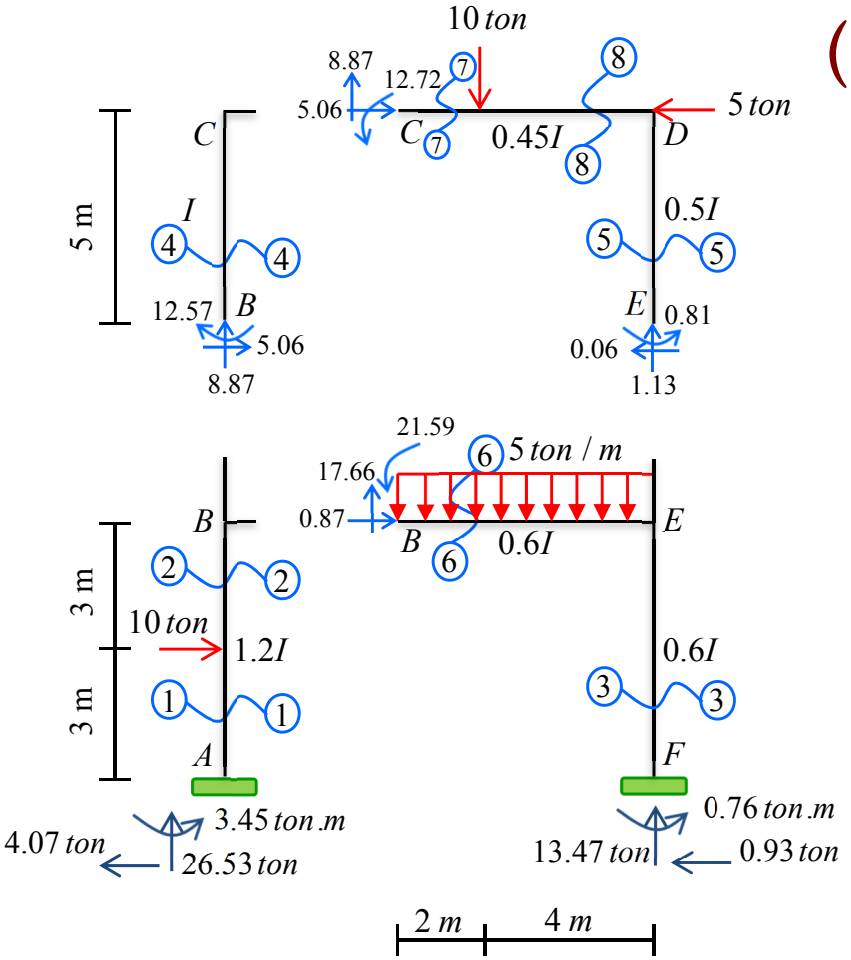
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 26.53 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -26.53\ ton}$$

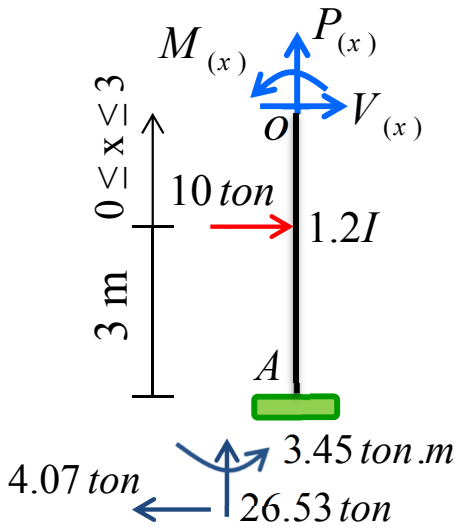
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 2-2 خواهیم داشت:





$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 10\times x + 3.45 - 4.07\times(3+x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -5.93x + 8.76}$$

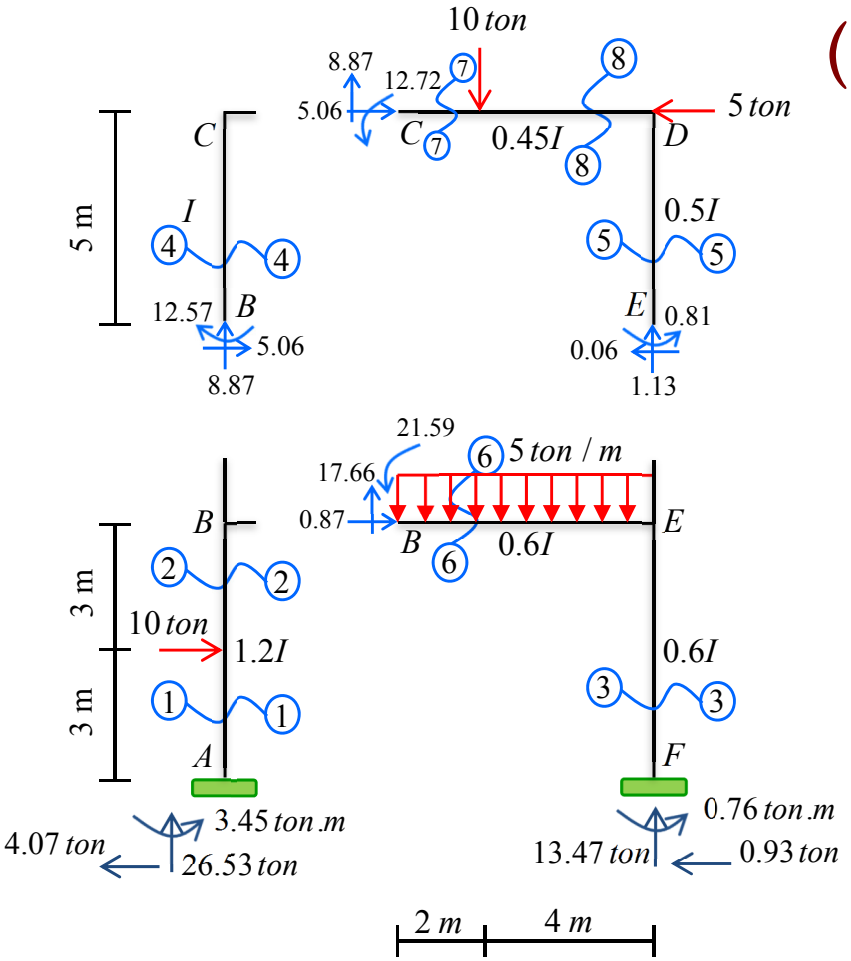
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 10 - 4.07 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5.93\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 26.53 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -26.53\,ton}$$

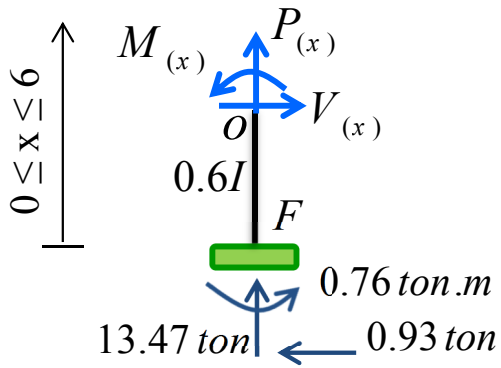
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 3-3 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 0.76 - 0.93 \times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 0.93x - 0.76}$$

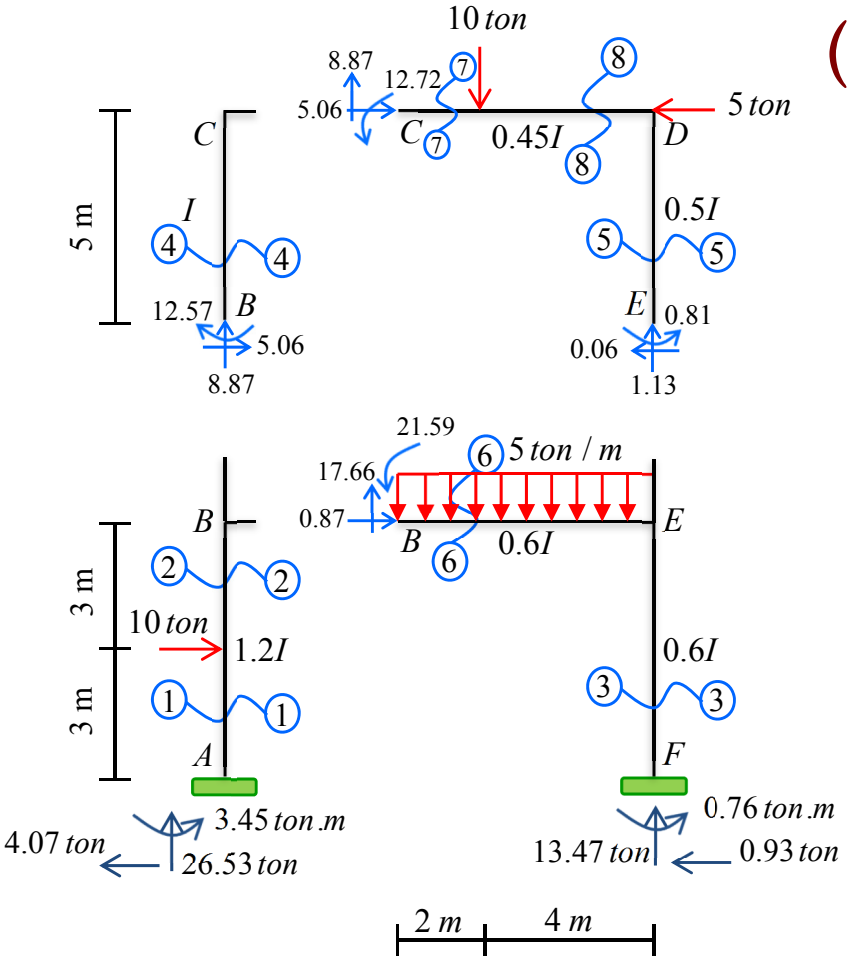
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} - 0.93 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 0.93\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{(x)} + 13.47 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = -13.47\ ton}$$

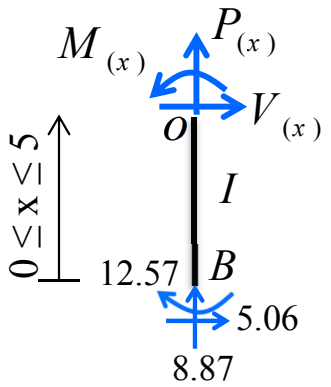
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 4-4 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 12.57 + 5.06 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -5.06x + 12.57}$$

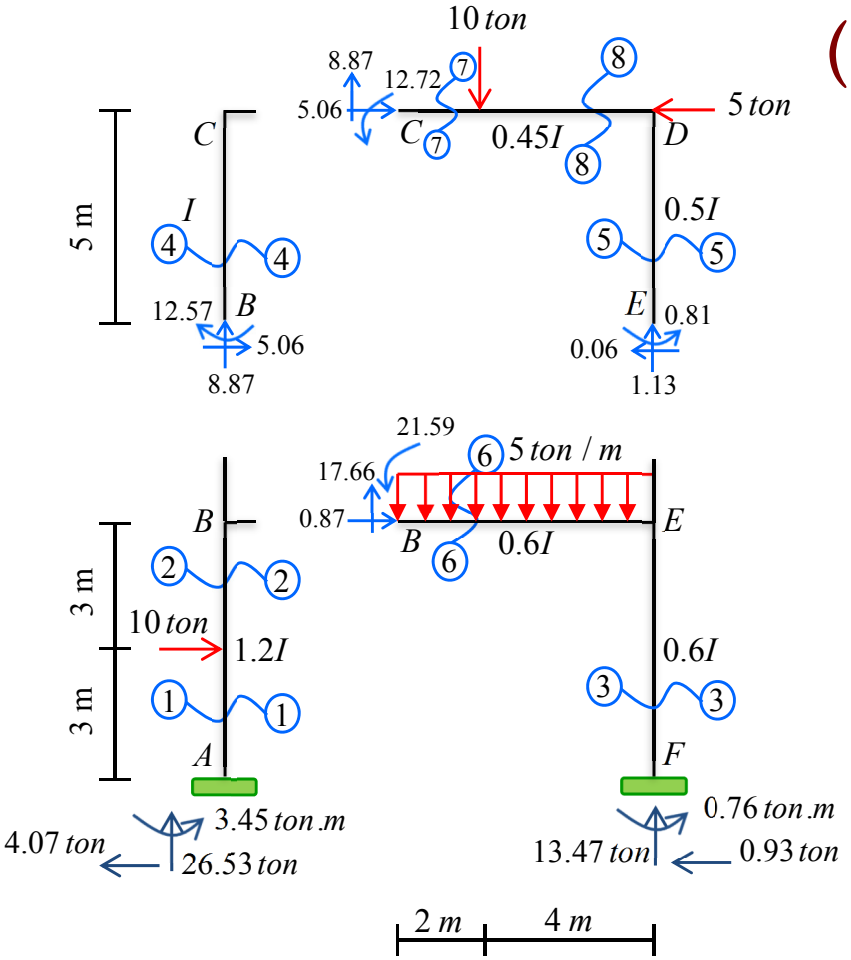
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 5.06 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5.06\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 8.87 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -8.87\ ton}$$

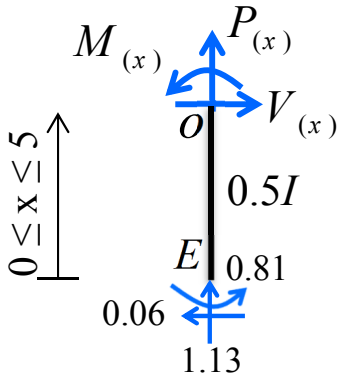
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 5-5 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 0.81 - 0.06 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0.06x - 0.81}$$

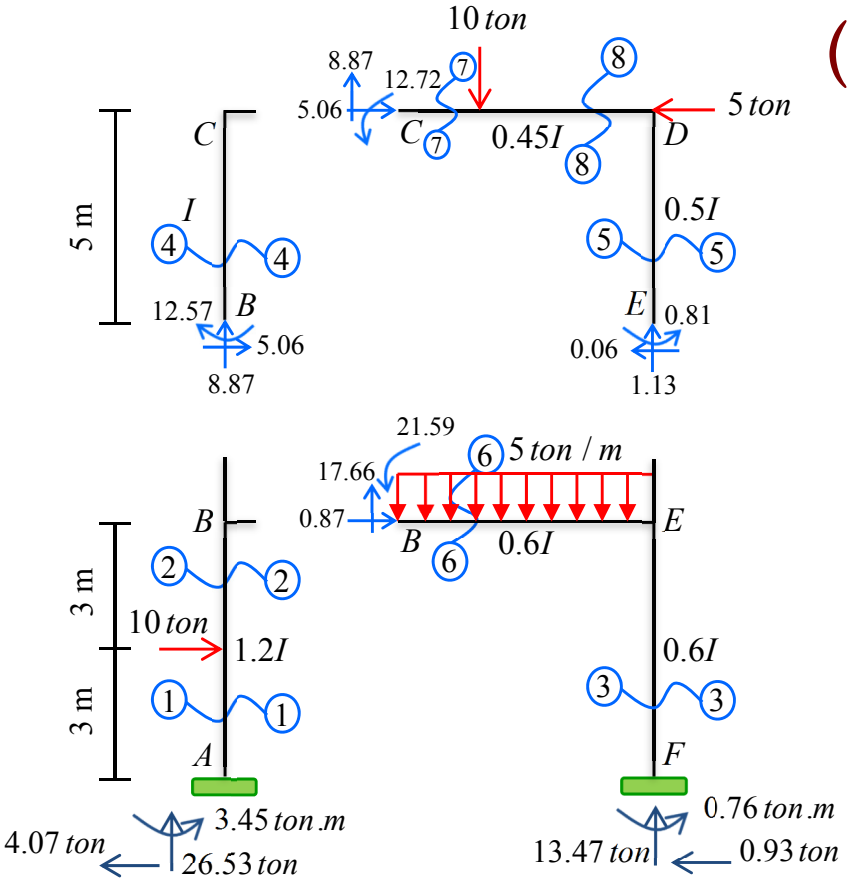
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 0.06 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 0.06\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 1.13 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -1.13\,ton}$$

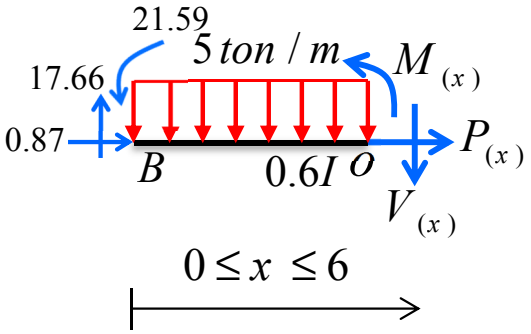
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 6-6 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 5 \times x \times \frac{x}{2} + 21.59 - 17.66 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -2.5x^2 + 17.66x - 21.59}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 5 \times x + 17.66 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5x + 17.66}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 0.87 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -0.87\ ton}$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = 0 \Rightarrow -5x + 17.66 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3.53\ m}$$

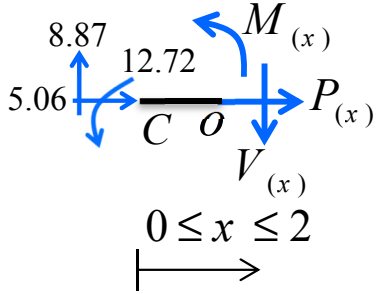
$$M_{(x=3.53)} = -2.5(3.53)^2 + 17.66(3.53) - 21.59 \Rightarrow \boxed{M_{(x=3.53)} = 9.6\ ton.m}$$

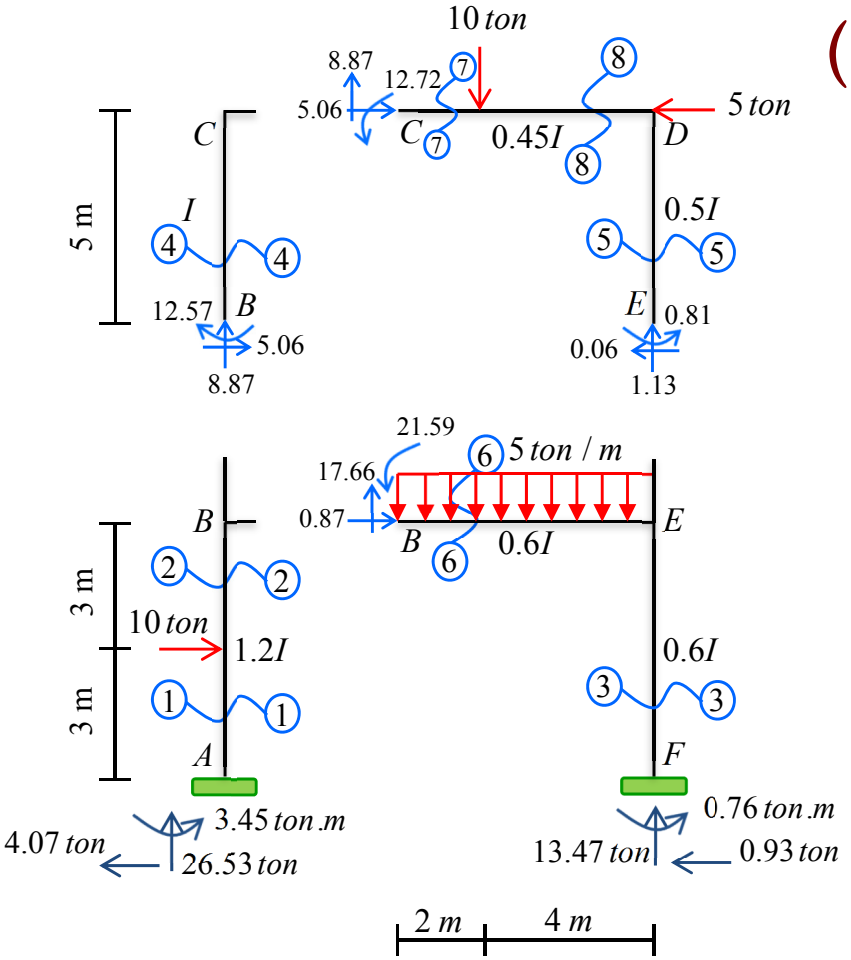
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 7-7 خواهیم داشت:





$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 12.72 - 8.87 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 8.87x - 12.72}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 8.87 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 8.87\ ton}$$

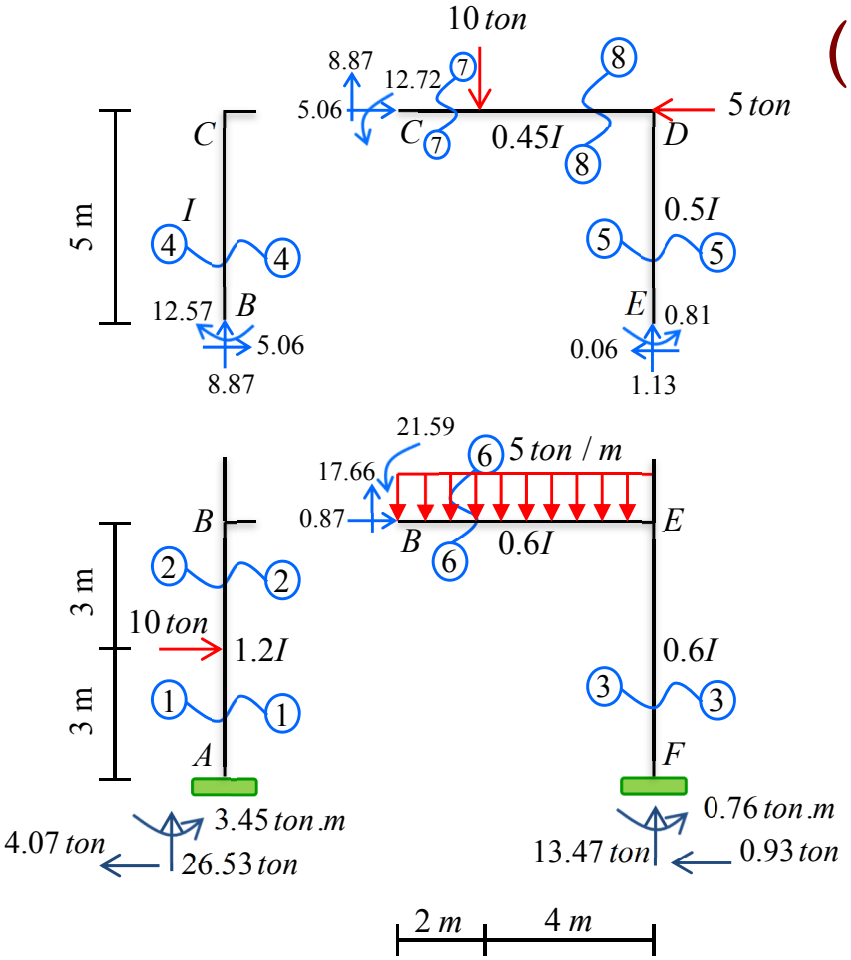
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 5.06 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -5.06\ ton}$$

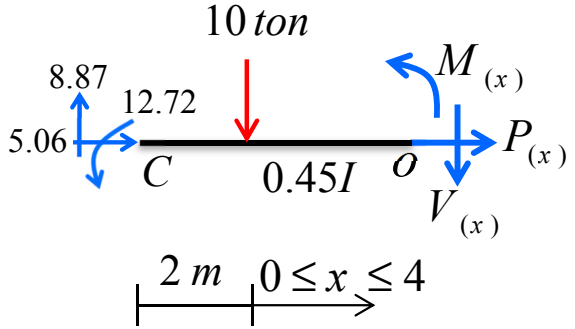
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 8-8 خواهیم داشت:





$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 10 \times x + 12.72 - 8.87 \times (2 + x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.13x + 5.02}$$

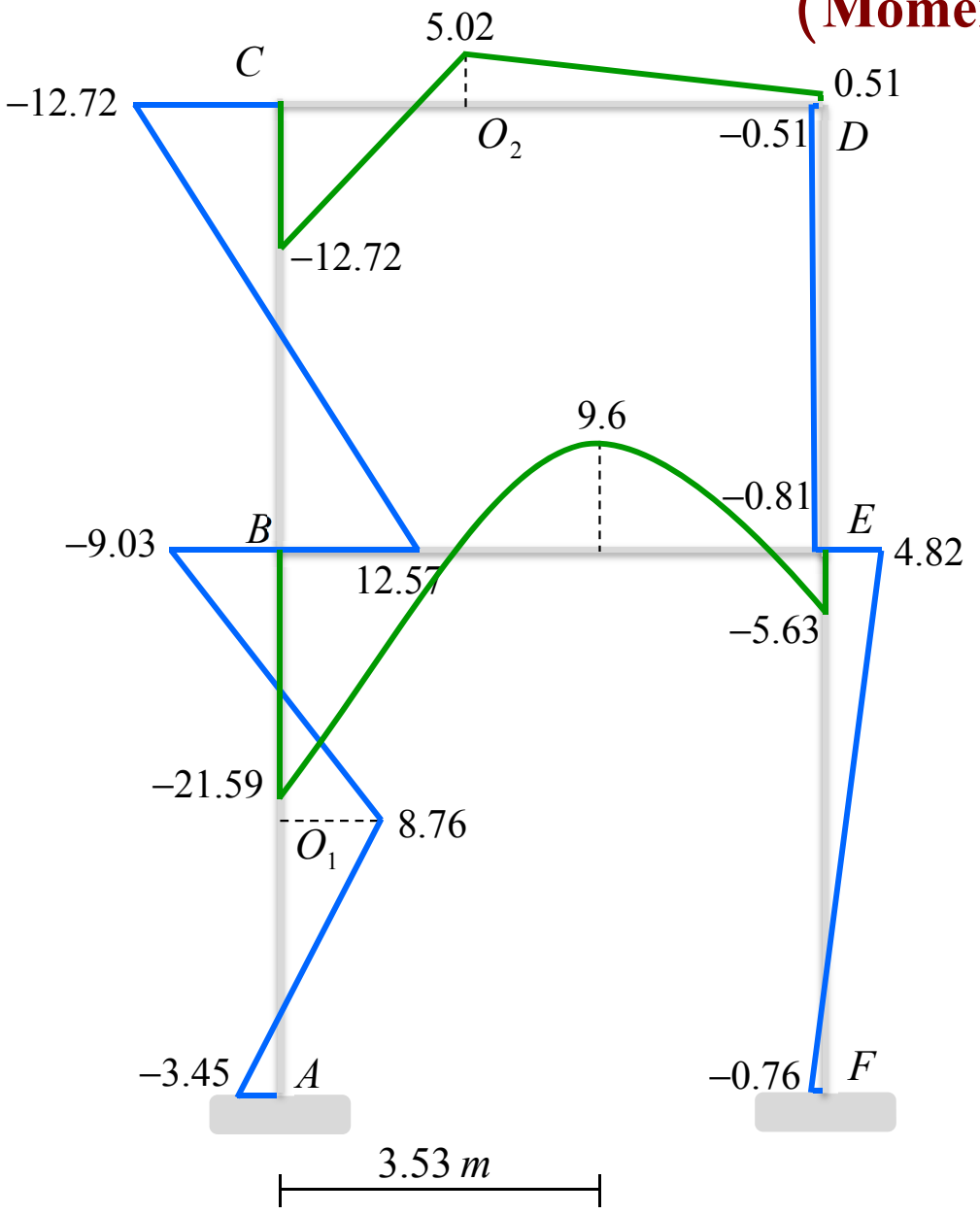
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 10 + 8.87 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -1.13\ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 5.06 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -5.06\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

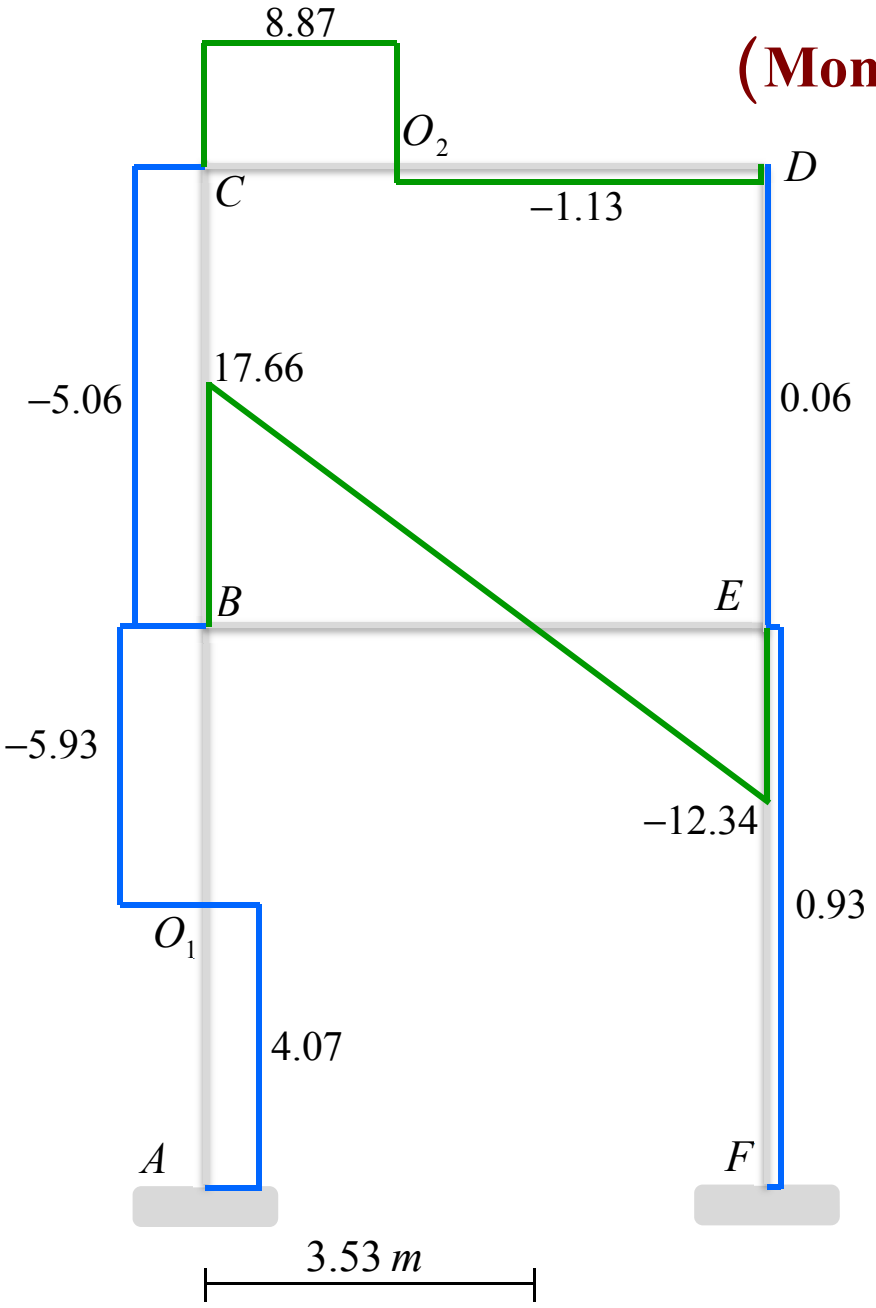


نمودار لنگر خمشی ($ton.m$)

$$
\begin{aligned}
&AO_1: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = 4.07x - 3.45 \\
&O_1B: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = -5.93x + 8.76 \\
&FE: \quad 0 \le x \le 6 \quad M_{(x)} = 0.93x - 0.76 \\
&BC: \quad 0 \le x \le 5 \quad M_{(x)} = -5.06x + 12.57 \\
&ED: \quad 0 \le x \le 5 \quad M_{(x)} = 0.06x - 0.81 \\
&BE: \quad 0 \le x \le 6 \quad M_{(x)} = -2.5x^2 + 17.66x - 21.59 \\
&CO_2: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 8.87x - 12.72 \\
&O_2D: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -1.13x + 5.02
\end{aligned}
$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-

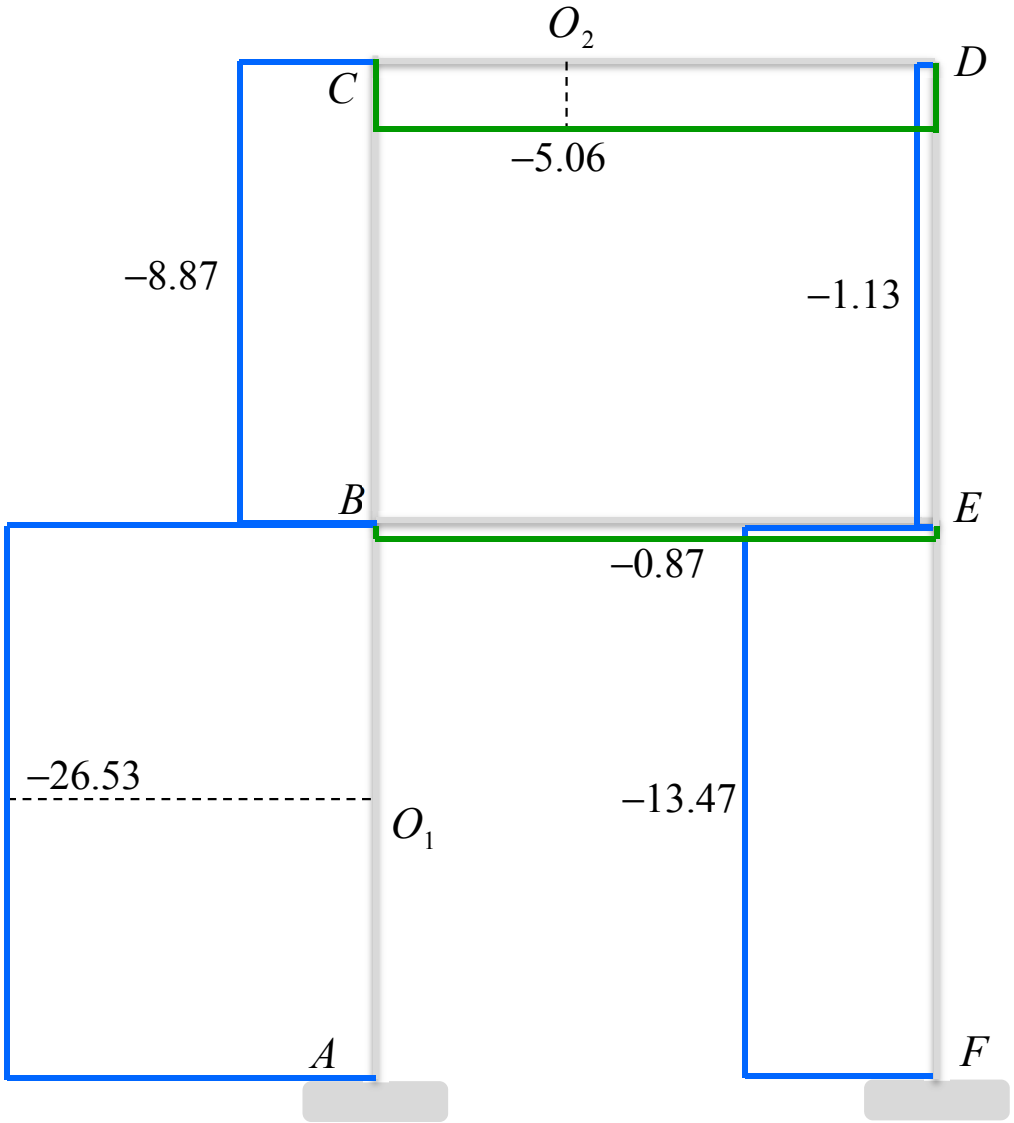


نمودار نیروی برشی (ton)

$$AO_1: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = 4.07\ ton$$
$$O_1B: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = -5.93\ ton$$
$$FE: \quad 0 \le x \le 6 \quad V_{(x)} = 0.93\ ton$$
$$BC: \quad 0 \le x \le 5 \quad V_{(x)} = -5.06\ ton$$
$$ED: \quad 0 \le x \le 5 \quad V_{(x)} = 0.06\ ton$$
$$BE: \quad 0 \le x \le 6 \quad V_{(x)} = -5x + 17.66$$
$$CO_2: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 8.87\ ton$$
$$O_2D: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -1.13\ ton$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 12-



نمودار نیروی محوری (ton)

$$
\begin{aligned}
&AO_1: \quad 0 \le x \le 3 \quad P_{(x)} = -26.53\,ton\\
&O_1B: \quad 0 \le x \le 3 \quad P_{(x)} = -26.53\,ton\\
&FE: \quad 0 \le x \le 6 \quad P_{(x)} = -13.47\,ton\\
&BC: \quad 0 \le x \le 5 \quad P_{(x)} = -8.87\,ton\\
&ED: \quad 0 \le x \le 5 \quad P_{(x)} = -1.13\,ton\\
&BE: \quad 0 \le x \le 6 \quad P_{(x)} = -0.87\,ton\\
&CO_2: \quad 0 \le x \le 2 \quad P_{(x)} = -5.06\,ton\\
&O_2D: \quad 0 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = -5.06\,ton
\end{aligned}
$$

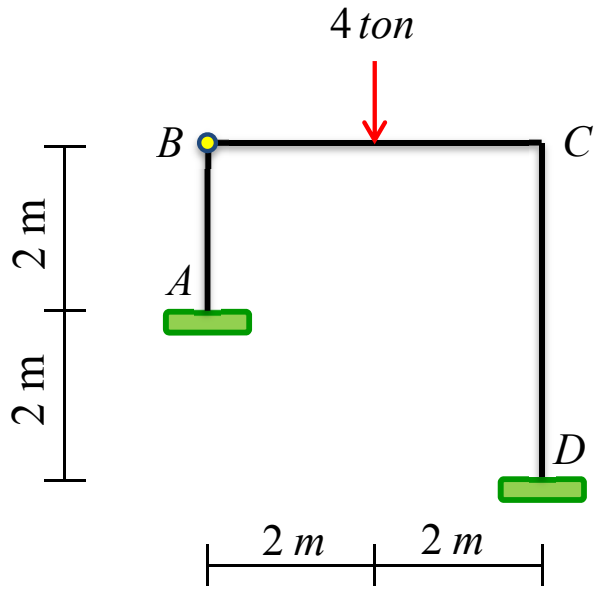
ETABS File Name: **08-Example-12.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مثال 13- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$

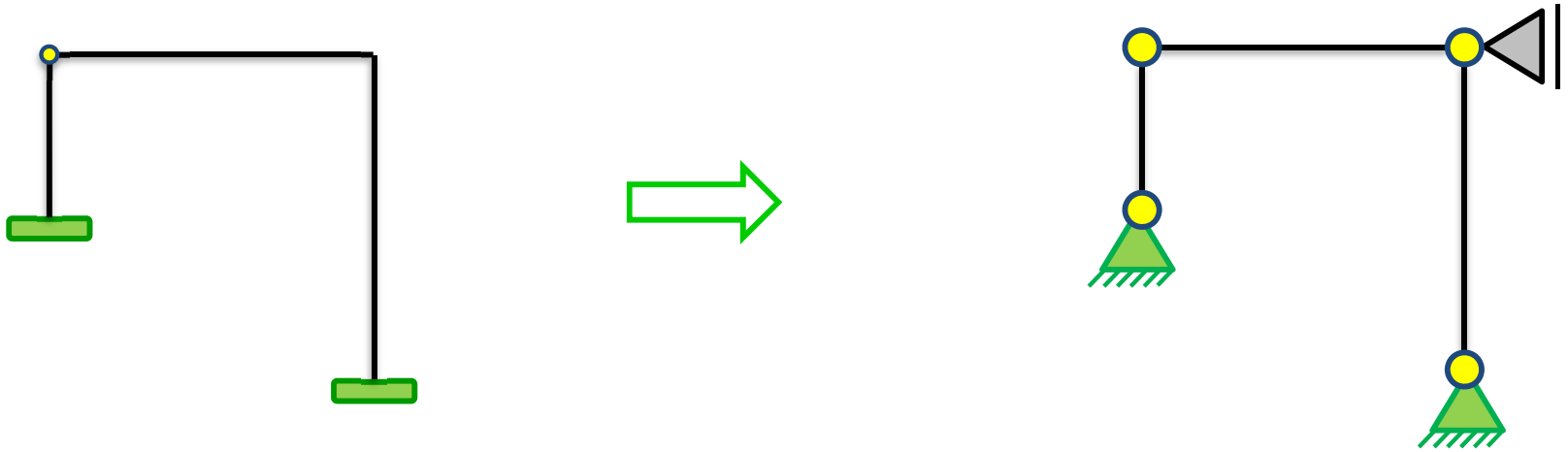


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

تعیین درجات آزادی انتقالی

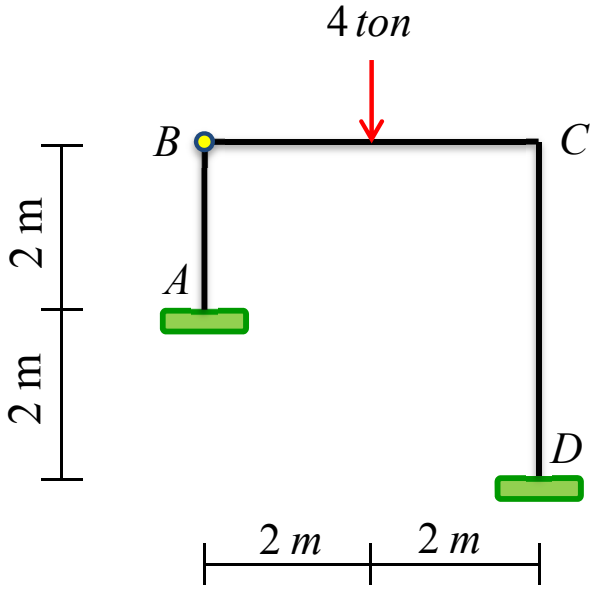


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:



$A , D) 0 \quad Fixed$

نکته: در حالتی که در گره مفصل وجود داشته باشد باعث هیچ‌گونه تغییری در آنالیز سازه نمی‌گردد. کافی است برای اعضای متصل شده به آن گره از سختی کاهش یافته (اصلاح شده) استفاده کرد. همچنین هر یک از اعضای متصل به مفصل به صورت مستقل عمل نموده و لنگری بین آن‌ها منتقل و توزیع نمی‌گردد. به عبارت دیگر لنگر متعادل کننده به صورت مستقل برای هر عضو محاسبه می‌شود.

محاسبه لنگرهای گیرداری:

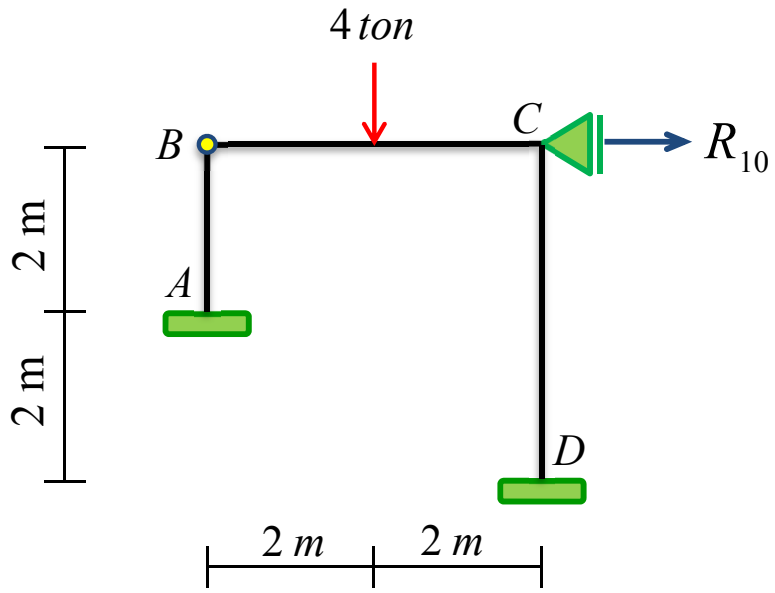
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -2\ ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی

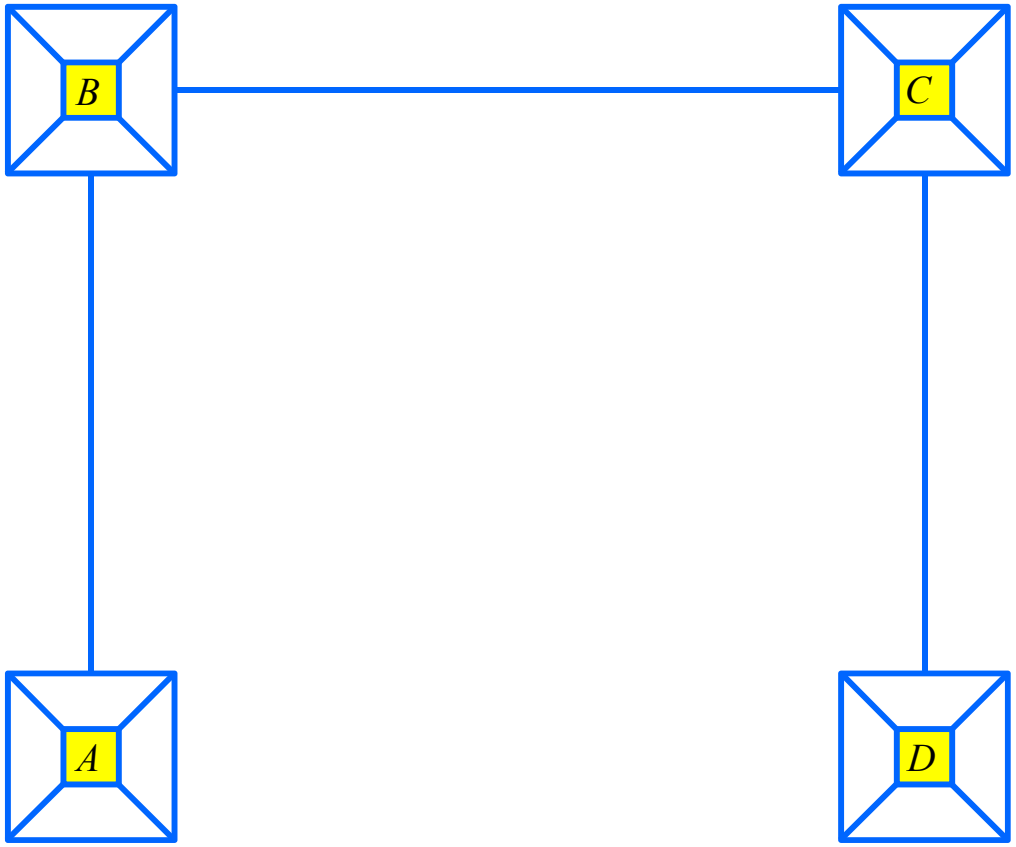


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13- آنالیز اولیه

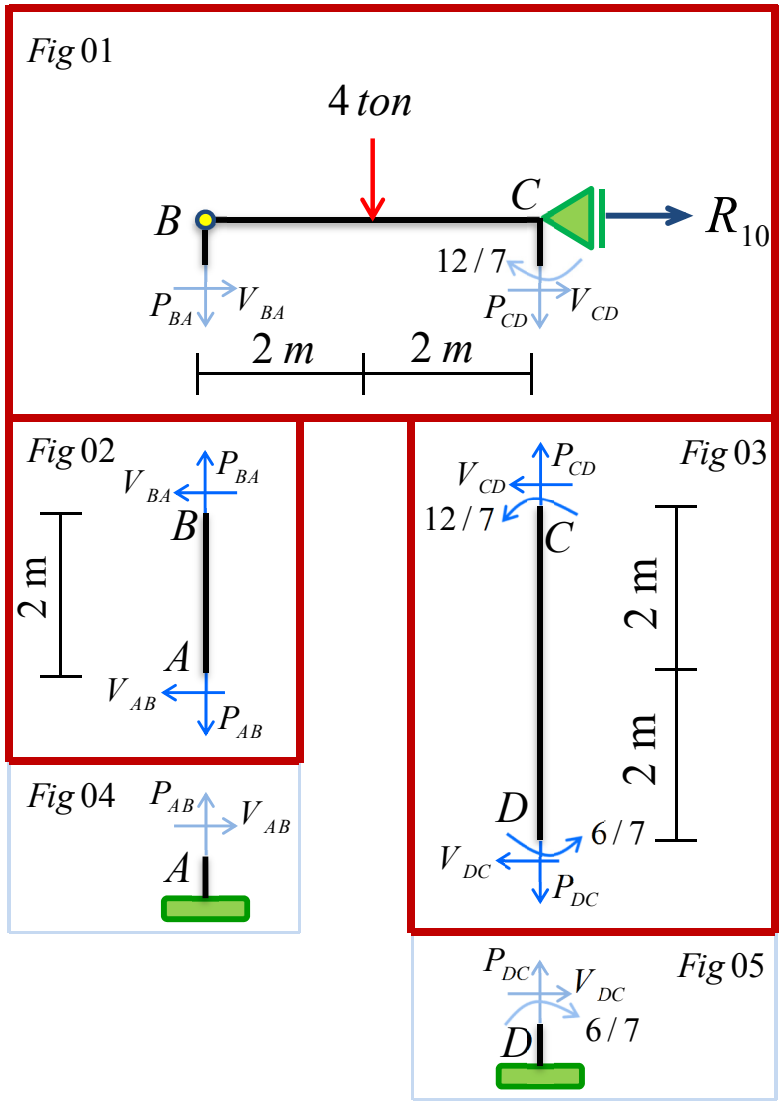


Fig 02 :

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = 0} \quad (13.1)$$

Fig 03 :

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_{CD} \times 4 + \frac{12}{7} + \frac{6}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CD} = -\frac{9}{14}\,ton} \quad (13.2)$$

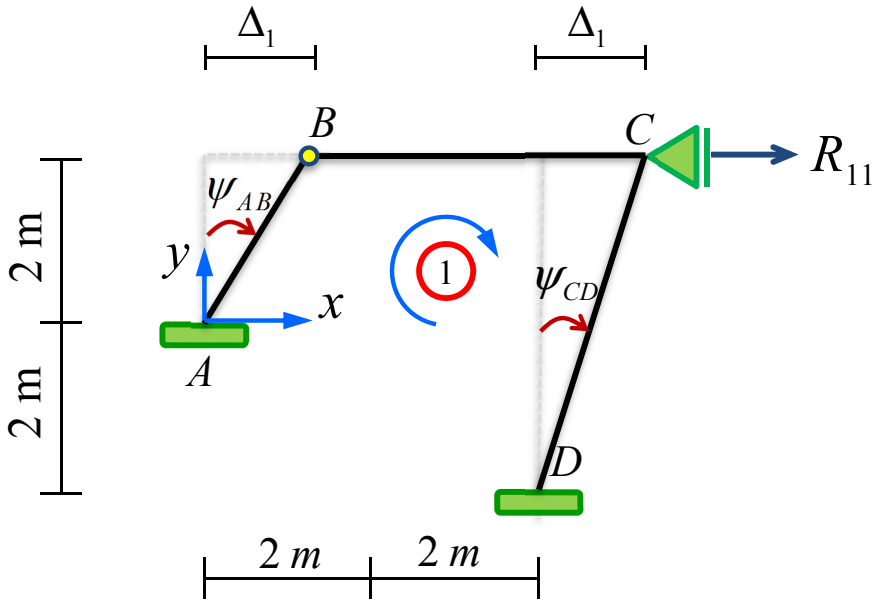
Fig 01 :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_{BA} + V_{CD} + R_{10} = 0 \quad \overset{(13.1)\&(13.2)}{\Rightarrow} \quad \boxed{R_{10} = \frac{9}{14}\,ton} \quad (13.3)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-



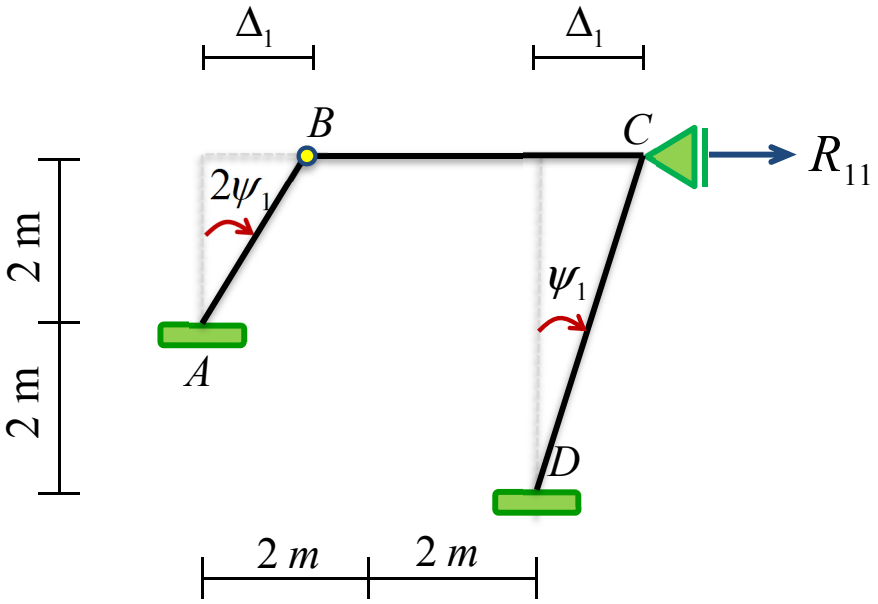
آنالیز مرحله اول: سازه در حالتی که فاقد درجه آزادی انتقالی و بدون بارگذاری است قید اولین درجه آزادی انتقالی را در راستای خودش جابجا می‌کنیم. در ادامه ارتباط ψ_{ij} اعضا با یکدیگر محاسبه می‌گردد.

$$(L7.22) \Rightarrow \begin{matrix} \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \\ \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \end{matrix}$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

آنالیز مرحله اول: محاسبه لنگر گیرداری



$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{AB} = \bar{M}_{BA} = -1200\psi_1}$$

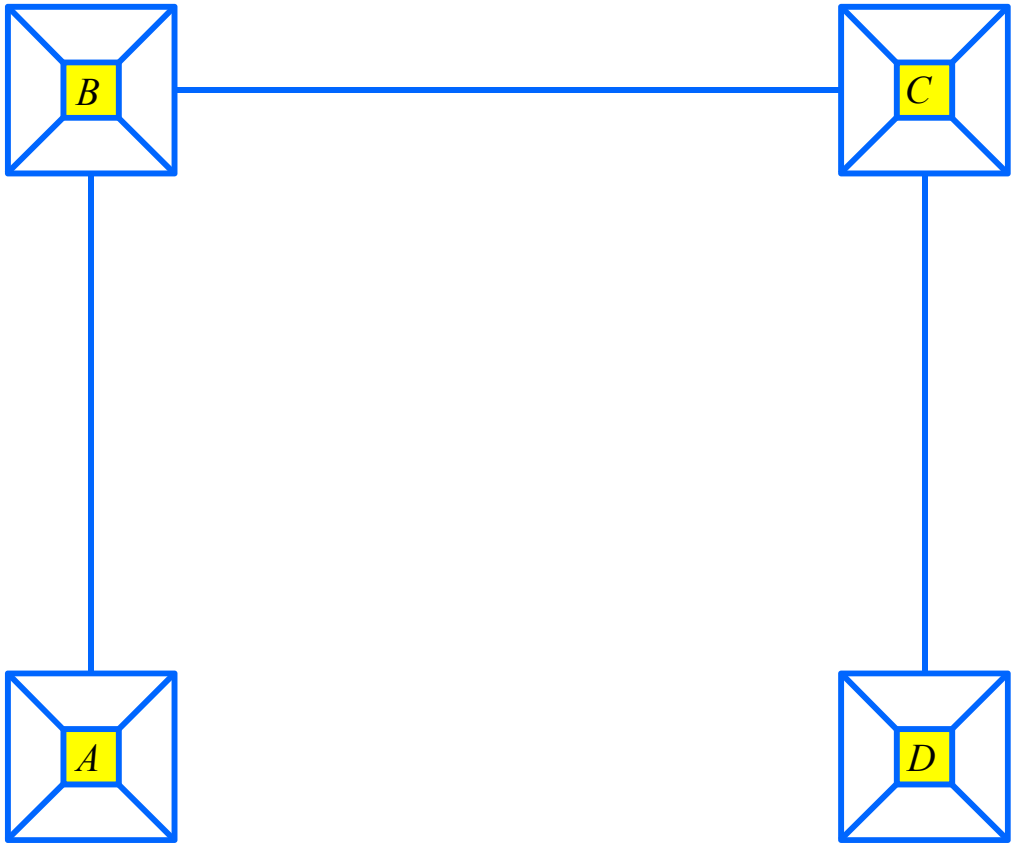
$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{DC} = \bar{M}_{CD} = -300\psi_1}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

آنالیز مرحله اول:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13- آنالیز مرحله اول

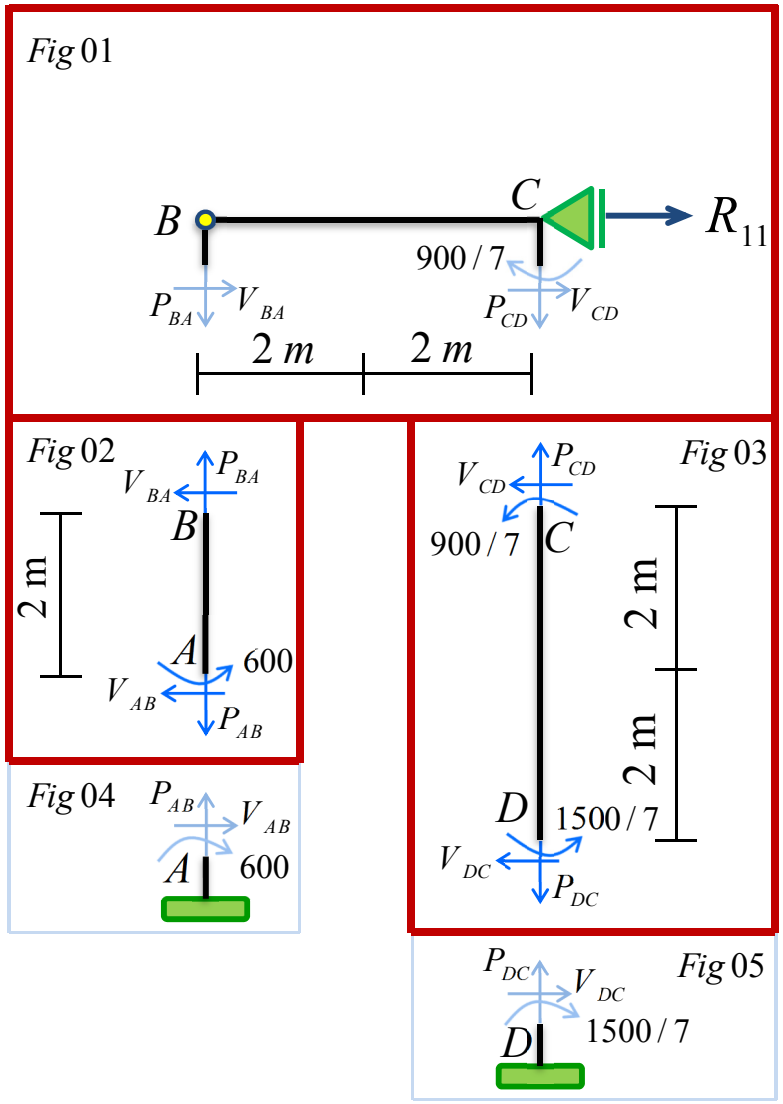


Fig 02 :

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BA} \times 2 + 600 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{BA} = -300} \quad (13.8)$$

Fig 03 :

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_{CD} \times 4 + \frac{900}{7} + \frac{1500}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CD} = -\frac{600}{7}\, ton} \quad (13.9)$$

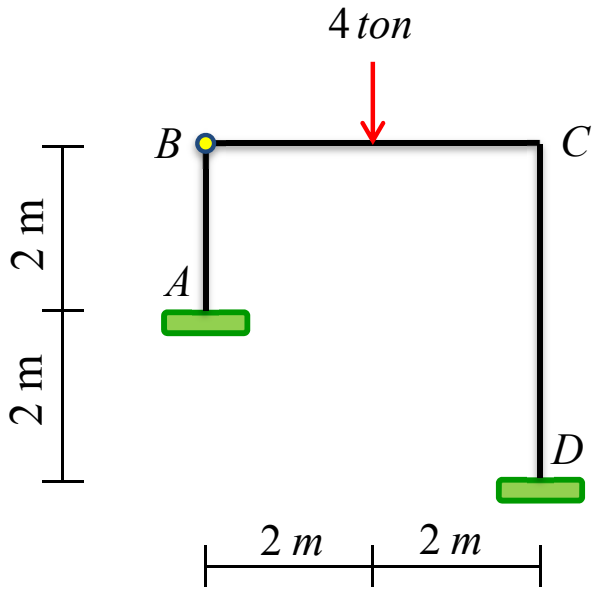
Fig 01 :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_{BA} + V_{CD} + R_{11} = 0 \quad \overset{(13.8)\&(13.9)}{\Rightarrow} \quad \boxed{R_{11} = \frac{2700}{7}\, ton} \quad (13.10)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-



$$(13.3)\,\&\,(13.10) \rightarrow (13.11) \Rightarrow \boxed{\frac{2700}{7}\psi_1 = -\frac{9}{14}} \quad (13.12)$$

$$(13.12) \Rightarrow \boxed{\psi_1 = -\frac{1}{600}} \quad (13.13)$$

$$(13.13) \rightarrow (13.14) \Rightarrow \boxed{M_{AB} = M_{AB}^{(0)} - \frac{1}{600} M_{AB}^{(1)}} \quad (13.15)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

عضو	$M^{(0)}$	$M^{(1)}$	$M = M^{(0)} - (1/600)M^{(1)}$
M_{AB}	0	-600	1
M_{BA}	0	0	0
M_{BC}	0	0	0
M_{CB}	12/7	900/7	1.5
M_{CD}	-12/7	-900/7	-1.5
M_{DC}	-6/7	-1500/7	-0.5

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 3

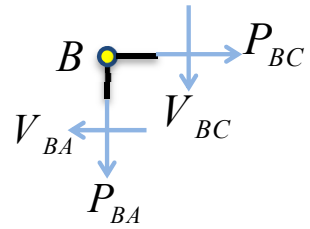


Fig 4

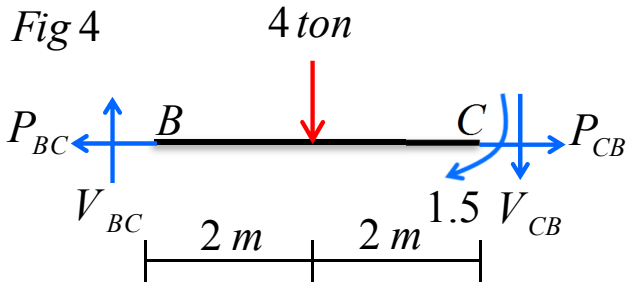


Fig 5

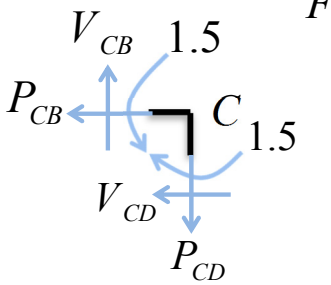


Fig 2

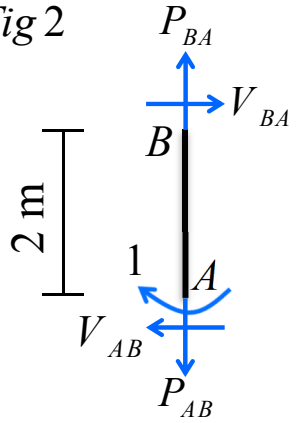


Fig 6

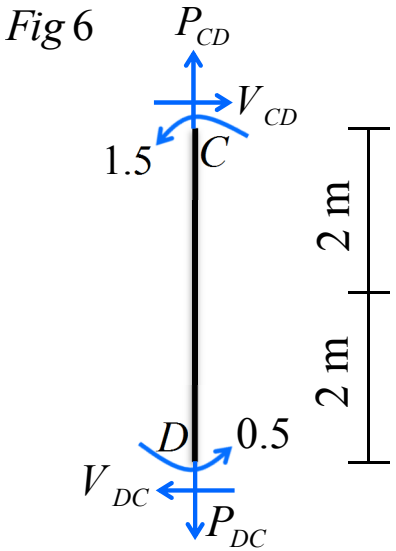


Fig 1

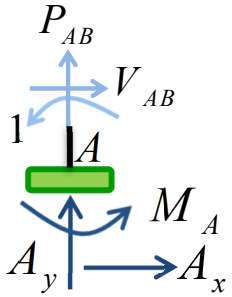
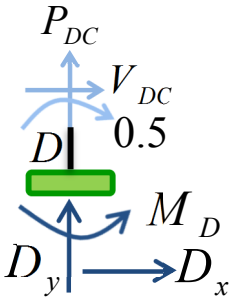
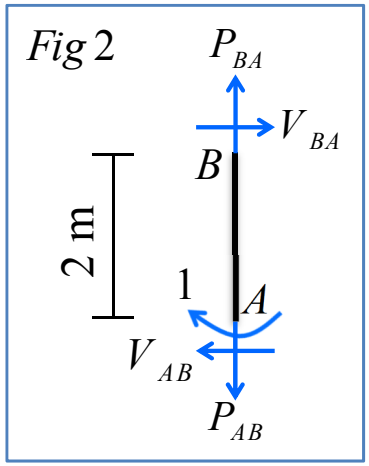


Fig 7



الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

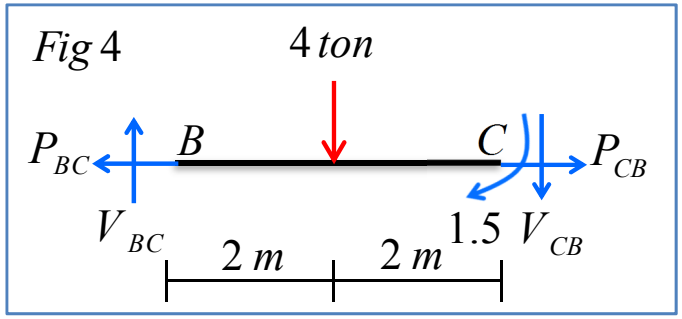


با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BA} \times 2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = -0.5\,ton} \qquad (13.16)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{AB} + V_{BA} = 0 \quad \overset{(13.16)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{AB} = -0.5\,ton} \qquad (13.17)$$

با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:



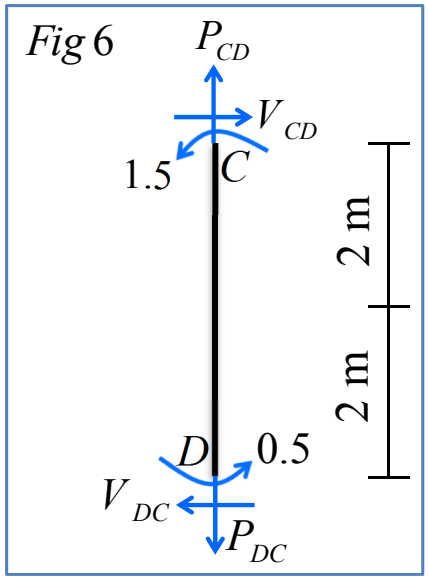
$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{CB} \times 4 - 1.5 - 4 \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = -2.375\,ton} \qquad (13.18)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} - 4 - V_{CB} = 0 \quad \overset{(13.18)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = 1.625\,ton} \qquad (13.19)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

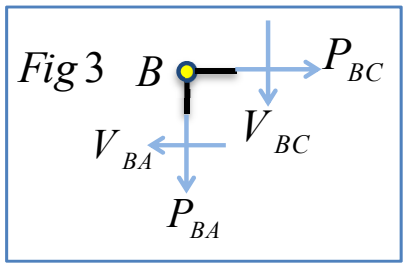
با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{CD} \times 4 + 1.5 + 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CD} = 0.5\,ton} \quad (13.20)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} - V_{DC} = 0 \quad \overset{(13.20)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{DC} = 0.5\,ton} \quad (13.21)$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:



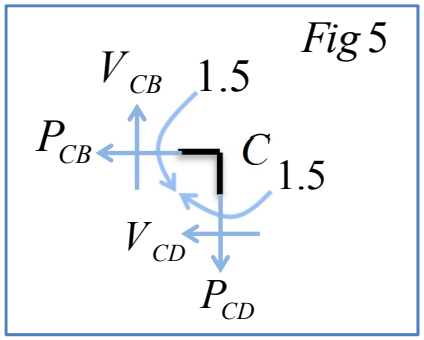
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{BC} - V_{BA} = 0 \quad \overset{(13.16)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{BC} = -0.5\,ton} \quad (13.22)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_{BA} - V_{BC} = 0 \quad \overset{(13.19)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{BA} = -1.625\,ton} \quad (13.23)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

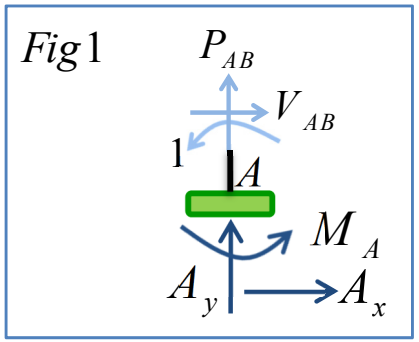
الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13- با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CB} - P_{CD} = 0 \overset{(13.18)}{\Rightarrow} \boxed{P_{CD} = -2.375\, ton} \quad (13.24)$$

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

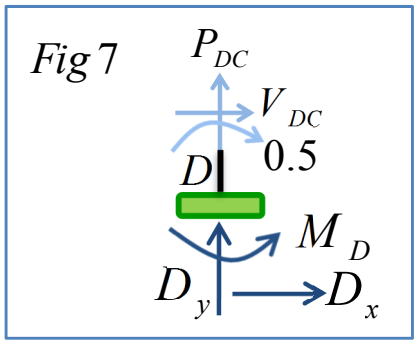


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + V_{AB} = 0 \overset{(13.17)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0.5\, ton} \quad (13.25)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + P_{AB} = 0 \overset{(13.23)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 1.625\, ton} \quad (13.26)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -1\, ton.m} \quad (13.27)$$

با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x + V_{DC} = 0 \overset{(13.21)}{\Rightarrow} \boxed{D_x = -0.5\, ton} \quad (13.28)$$

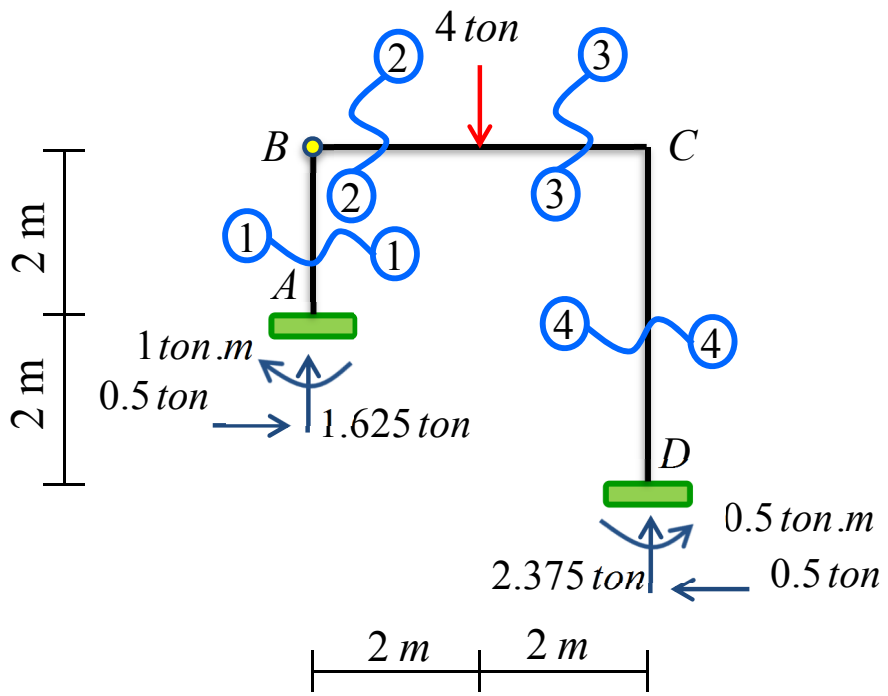
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y + P_{DC} = 0 \overset{(13.24)}{\Rightarrow} \boxed{D_y = 2.375\, ton} \quad (13.29)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_D - 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{M_D = 0.5\, ton.m} \quad (13.30)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

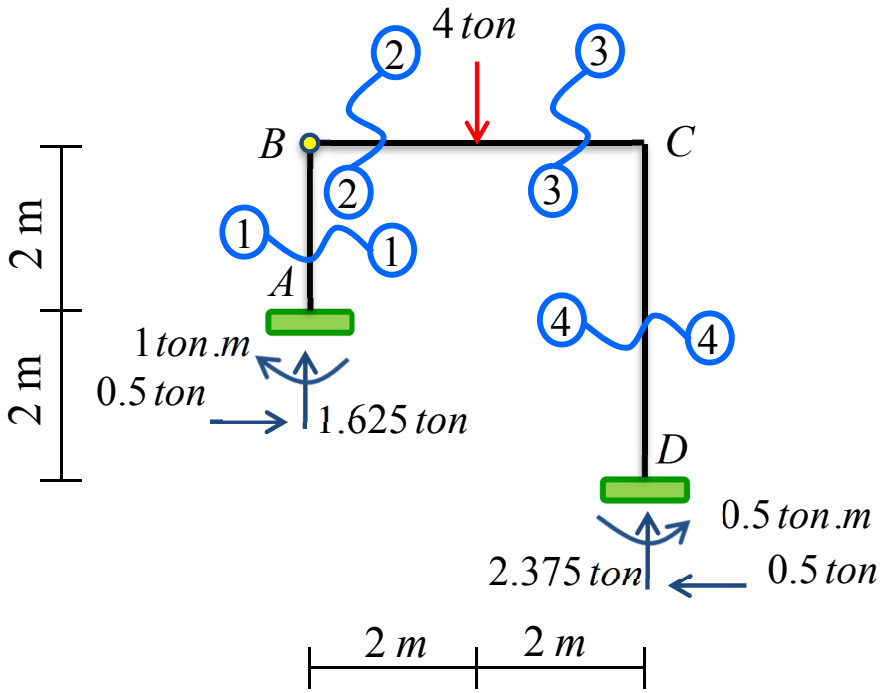
پاسخ مثال 13-



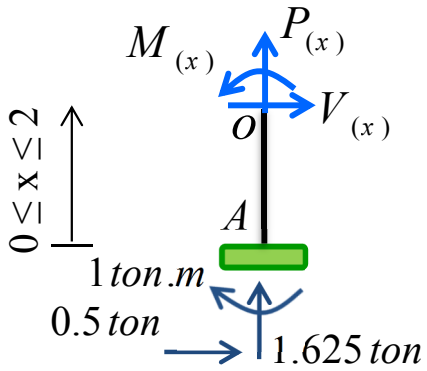
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 1 + 0.5 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -0.5x + 1}$$

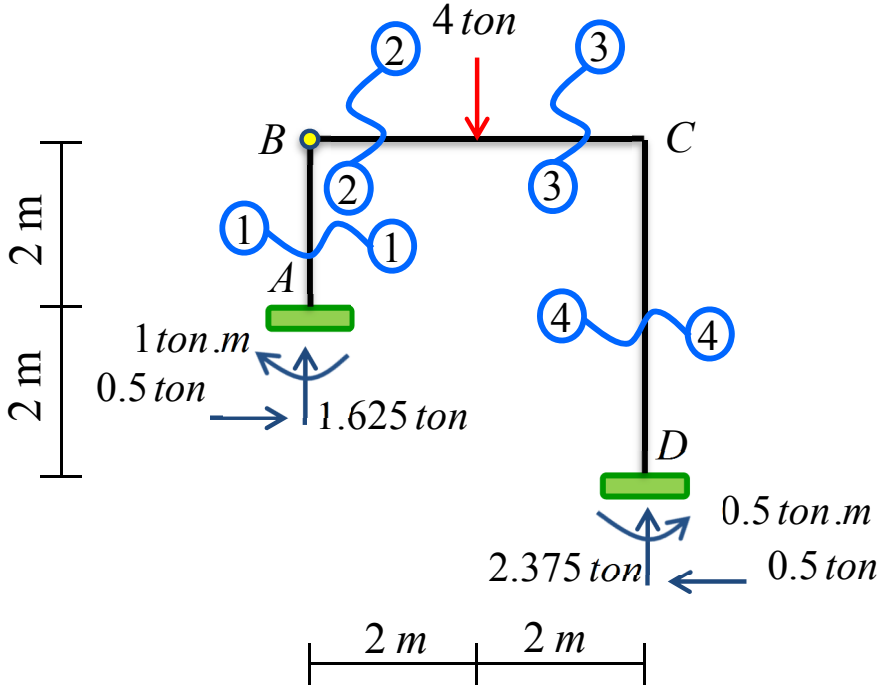
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -0.5\ ton}$$

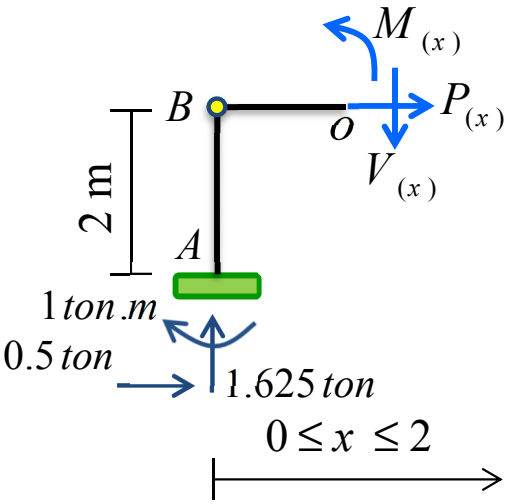
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 1.625 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -1.625\ ton}$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:





$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 1 + 0.5 \times 2 - 1.625 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 1.625x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 1.625 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 1.625\,ton}$$

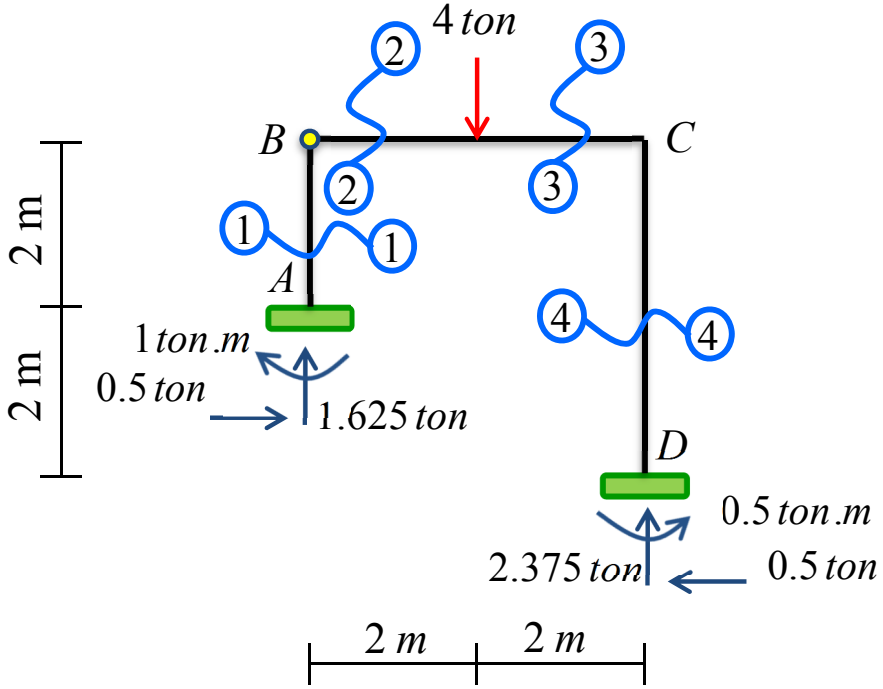
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -0.5\,ton}$$

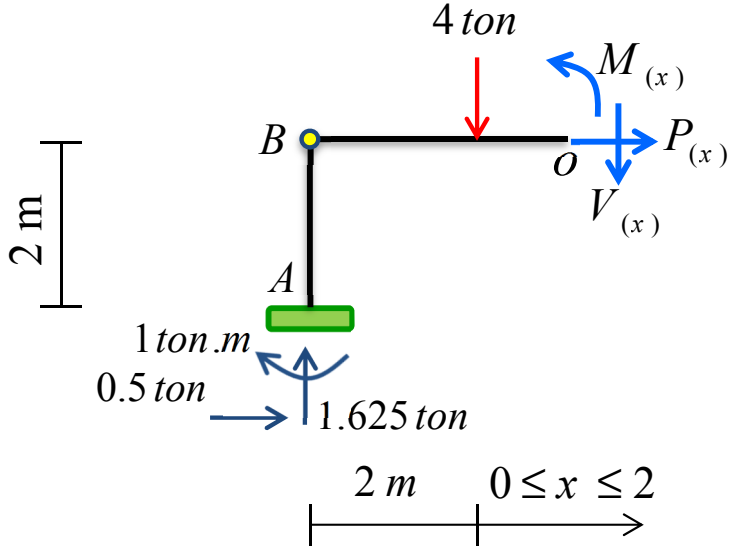
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 3-3 خواهیم داشت:





$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 4\times x - 1 + 0.5\times 2 - 1.625\times(2+x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -2.375x + 3.25}$$

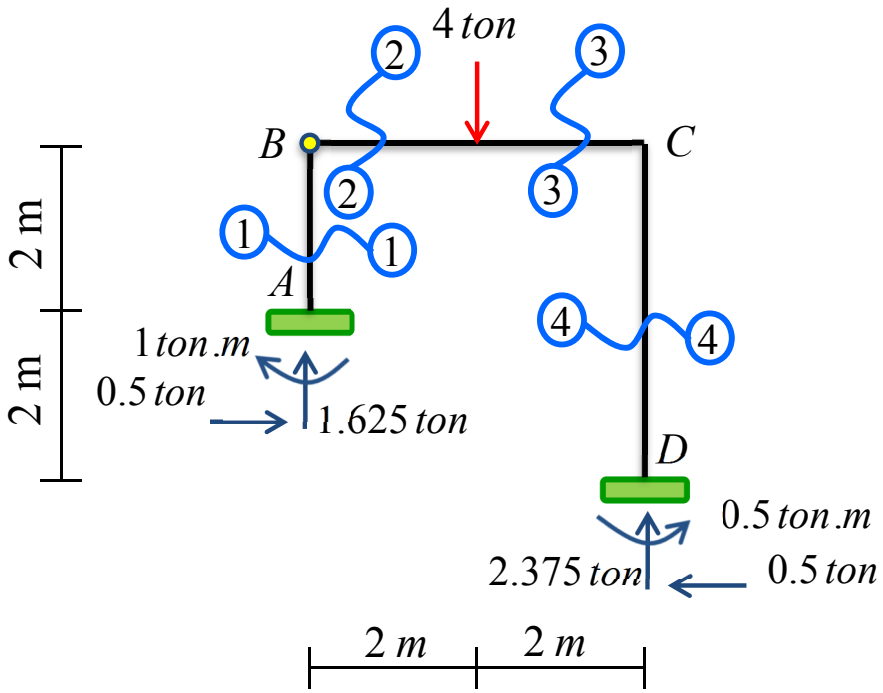
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 4 + 1.625 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2.375\ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -0.5\ ton}$$

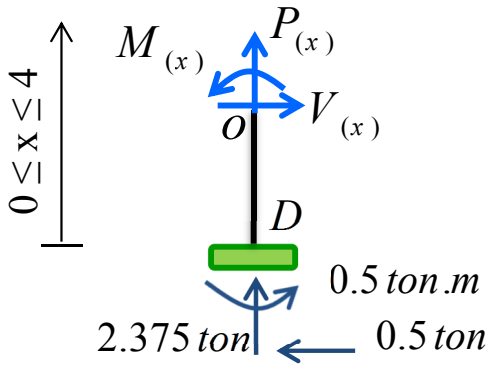
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 4-4 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 0.5 - 0.5 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0.5x - 0.5}$$

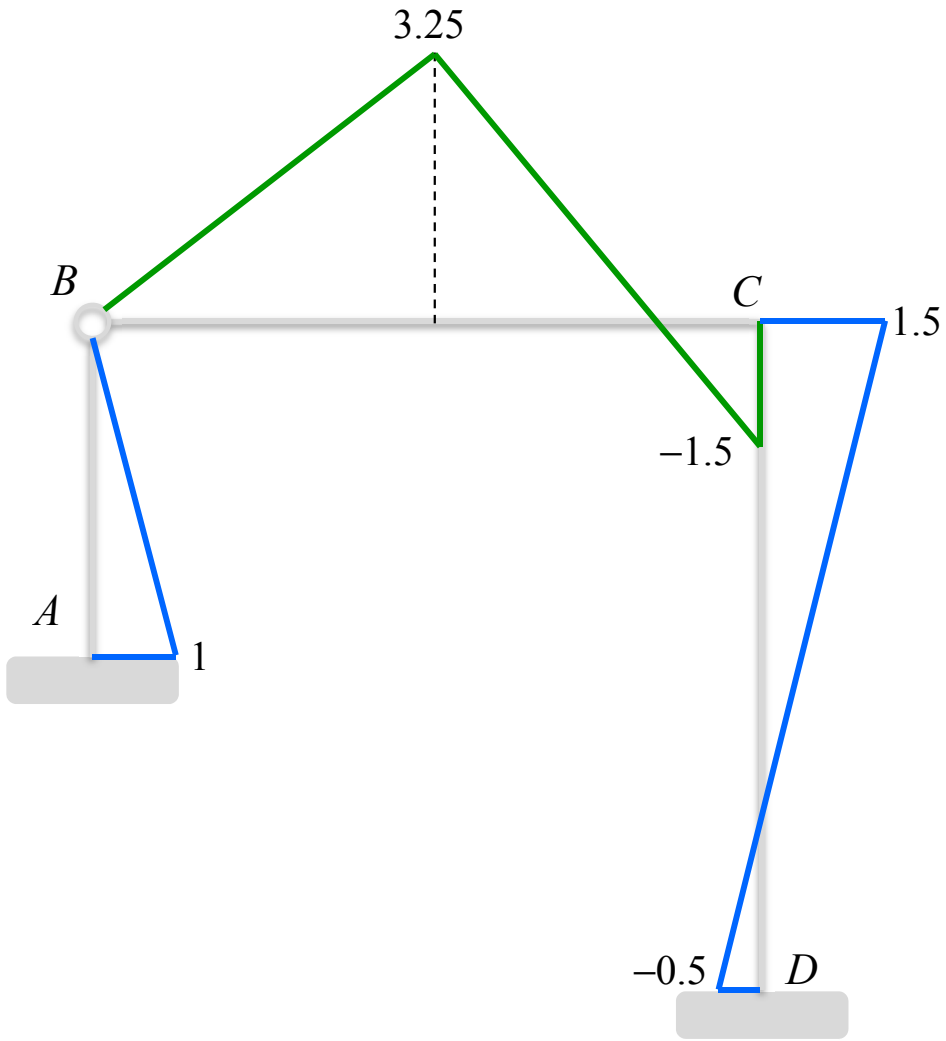
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 0.5\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 2.375 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -2.375\,ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

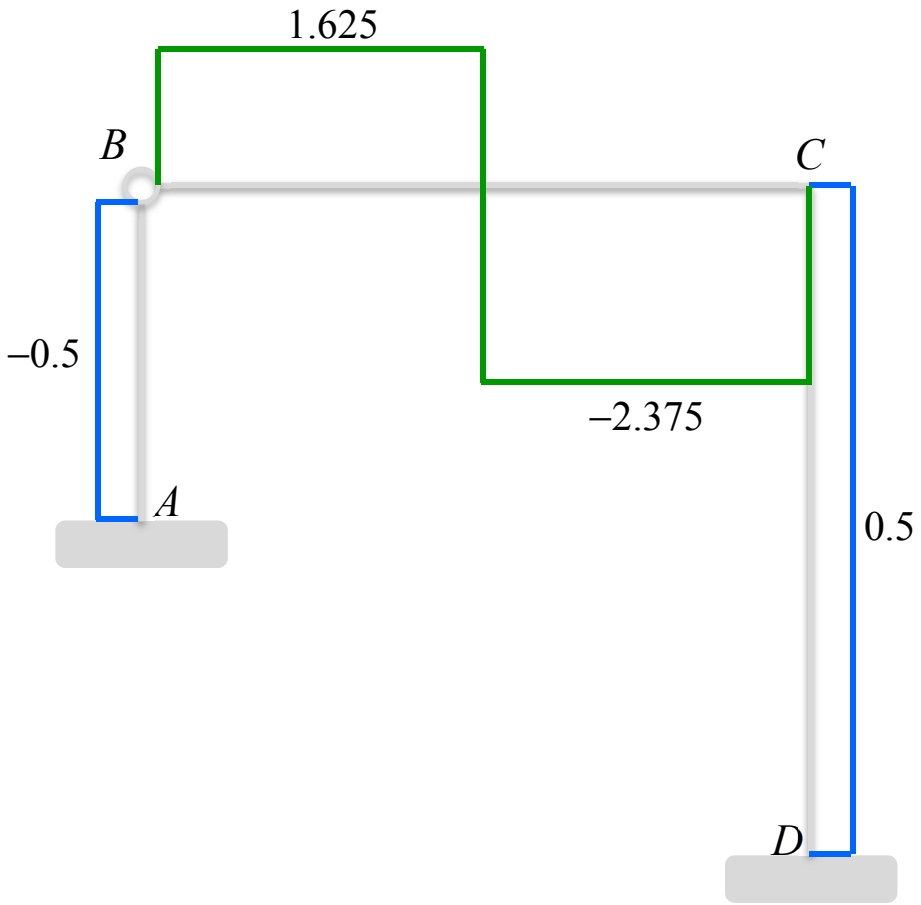


نمودار لنگر خمشی ($ton.m$)

$$
\begin{aligned}
&AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -0.5x + 1 \\
&BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 1.625x \\
&O_1C: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -2.375x + 3.25 \\
&DC: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = 0.5x - 0.5
\end{aligned}
$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-

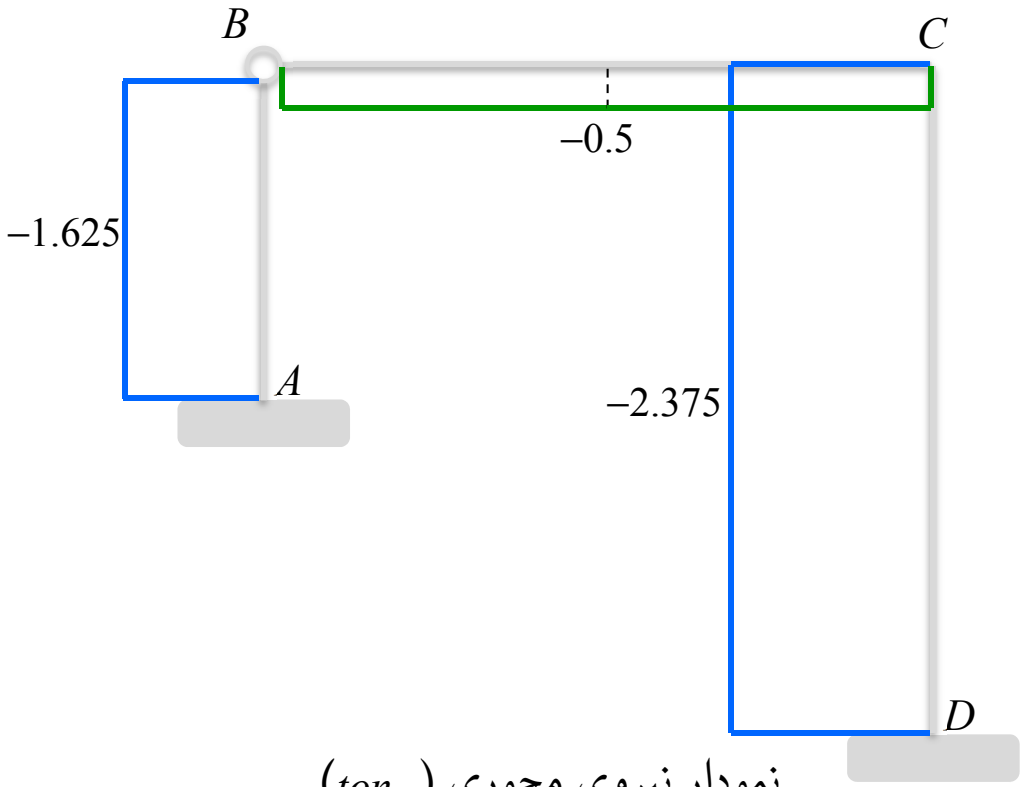


نمودار نیروی برشی (ton)

$$AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -0.5\,ton$$
$$BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 1.625\,ton$$
$$O_1C: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -2.375\,ton$$
$$DC: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = 0.5\,ton$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 13-



نمودار نیروی محوری (ton)

$$
\begin{aligned}
&AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad P_{(x)} = -1.625\, ton \\
&BO_1: \quad 0 \le x \le 2 \quad P_{(x)} = -0.5\, ton \\
&O_1C: \quad 0 \le x \le 2 \quad P_{(x)} = -0.5\, ton \\
&DC: \quad 0 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = -2.375\, ton
\end{aligned}
$$

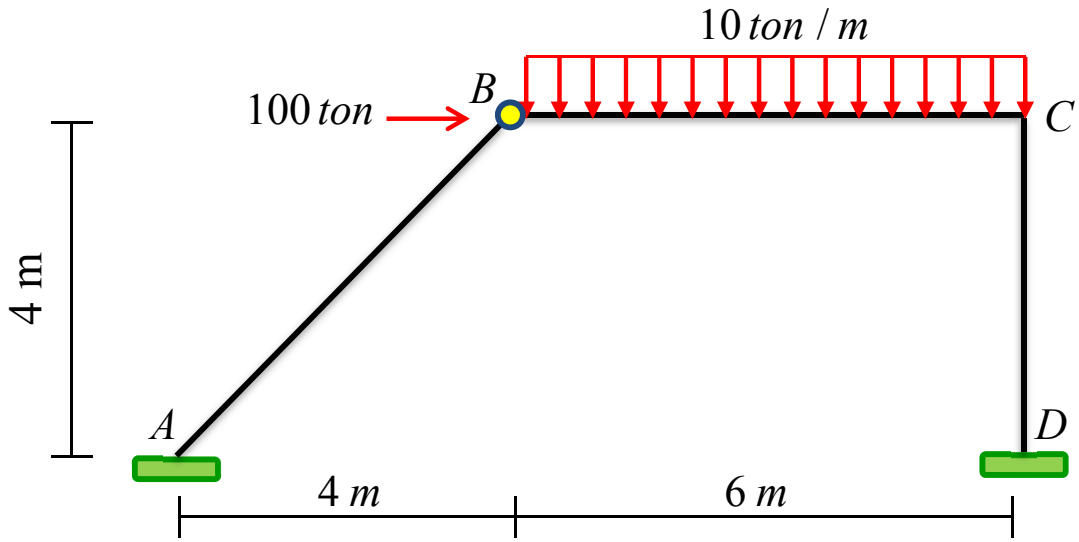
ETABS File Name: **08-Example-13.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

مثال 14- نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$

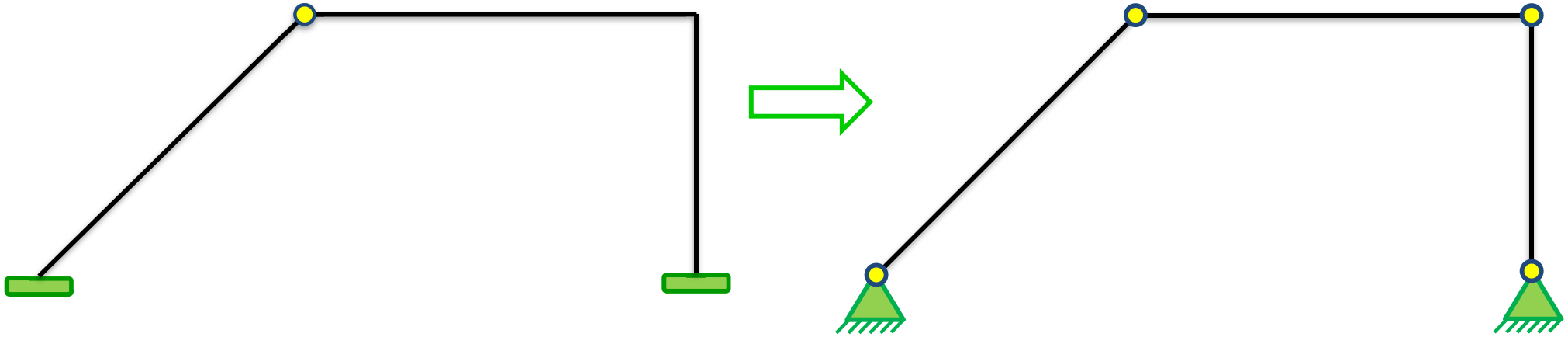


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

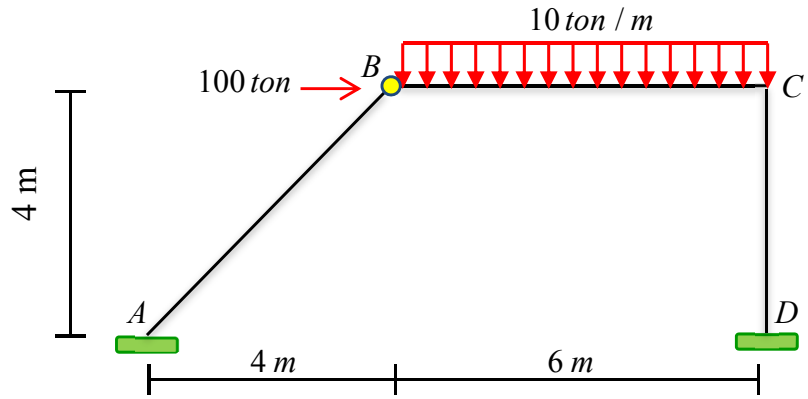
الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

تعیین درجات آزادی انتقالی



الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی



پاسخ مثال 14-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

$A , D) 0 \quad Fixed$

نکته: در حالتی که در گره مفصل وجود داشته باشد باعث هیچ‌گونه تغییری در آنالیز سازه نمی‌گردد. کافی است برای اعضای متصل شده به آن گره از سختی کاهش یافته (اصلاح شده) استفاده کرد. همچنین هر یک از اعضای متصل به مفصل به صورت مستقل عمل نموده و لنگری بین آن‌ها منتقل و توزیع نمی‌گردد. به عبارت دیگر لنگر متعادل کننده به صورت مستقل برای هر عضو محاسبه می‌شود.

محاسبه لنگرهای گیرداری:

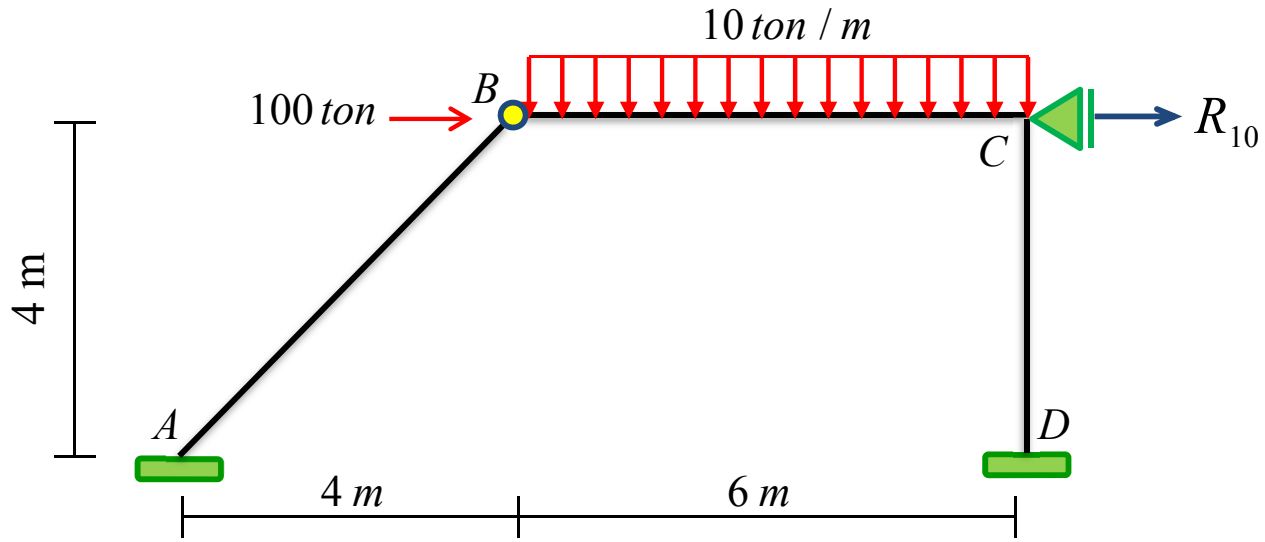
$$\Rightarrow \boxed{FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -30\, ton.m}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی

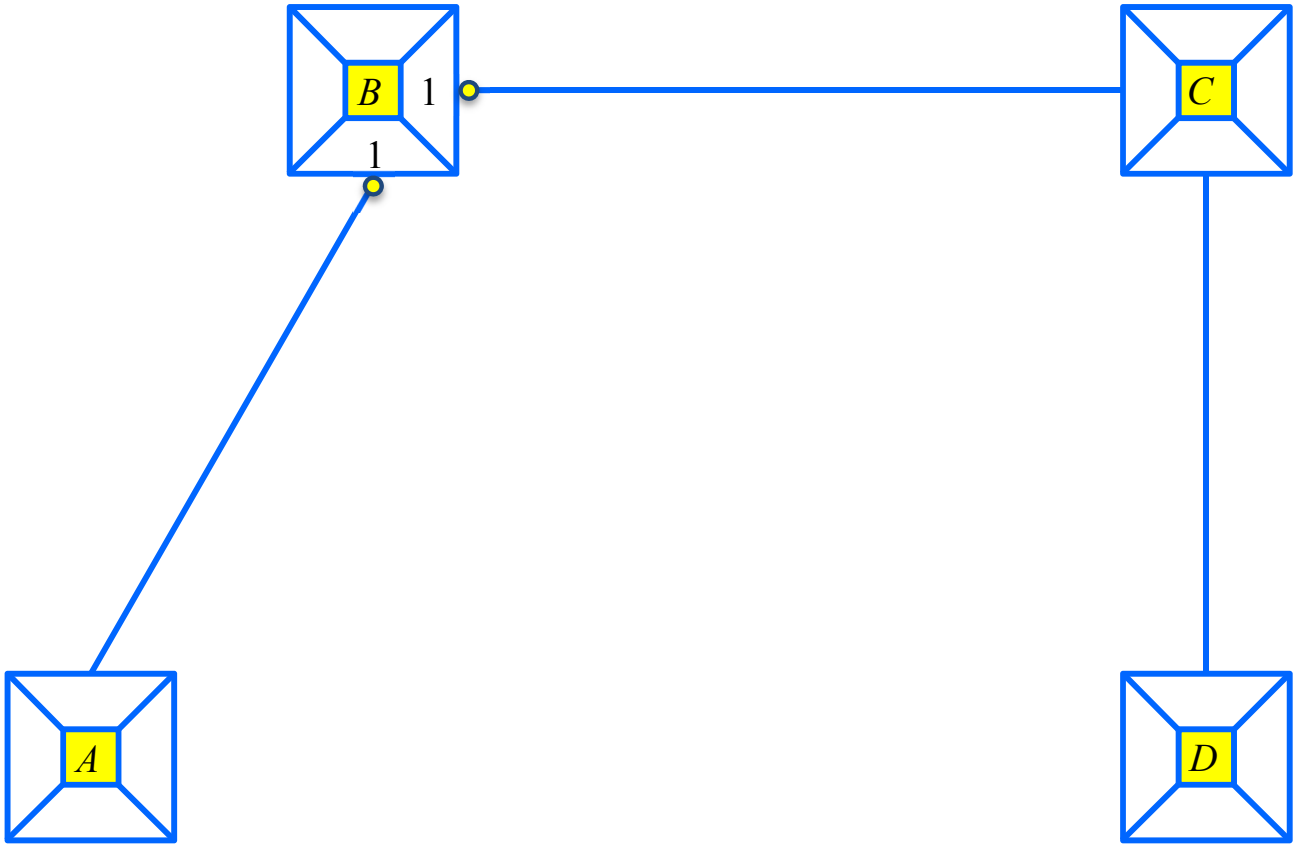


روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

آنالیز اولیه: سازه بدون درجه آزادی انتقالی و تحت اثر بارگذاری خارجی.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14- آنالیز اولیه

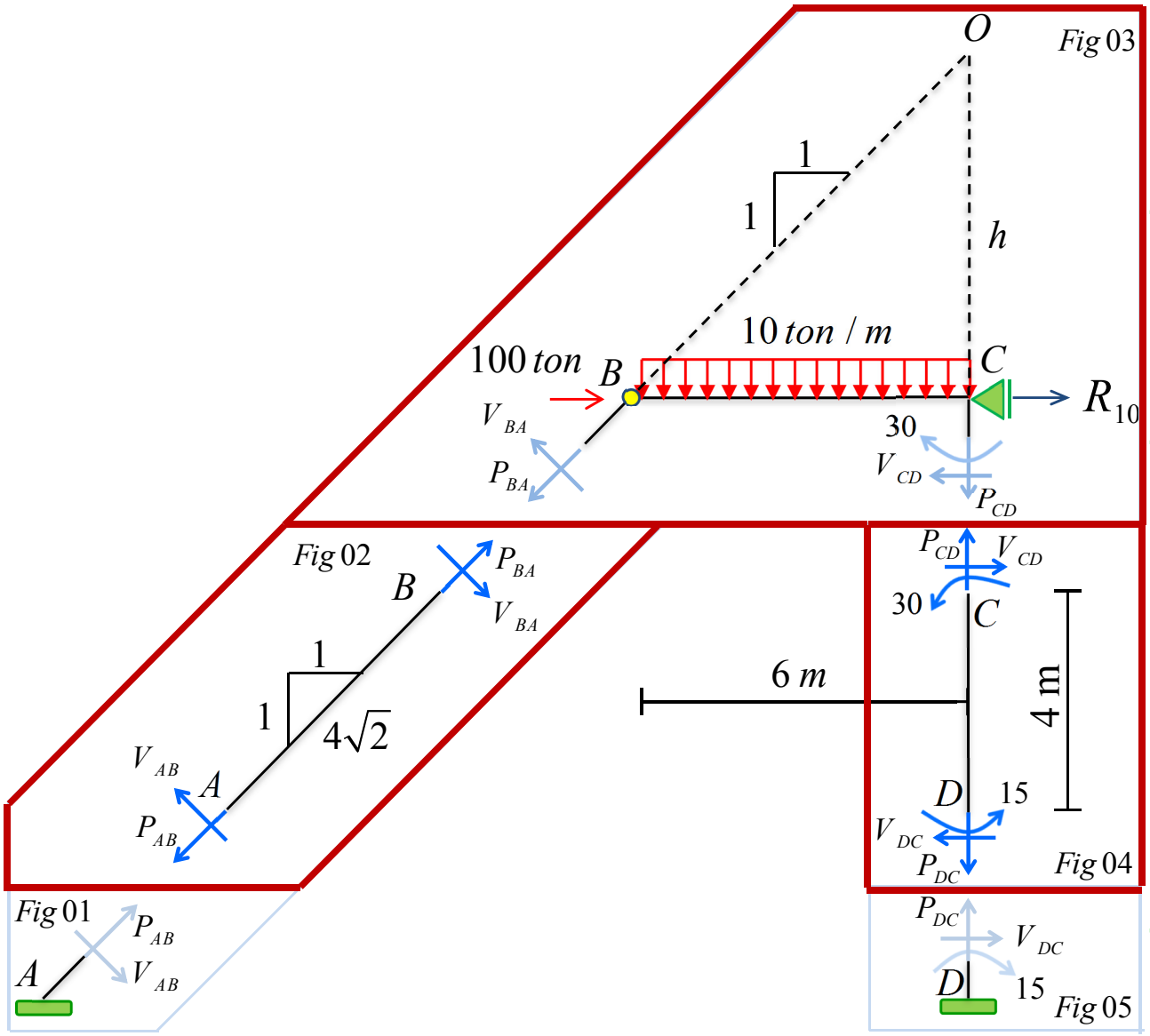


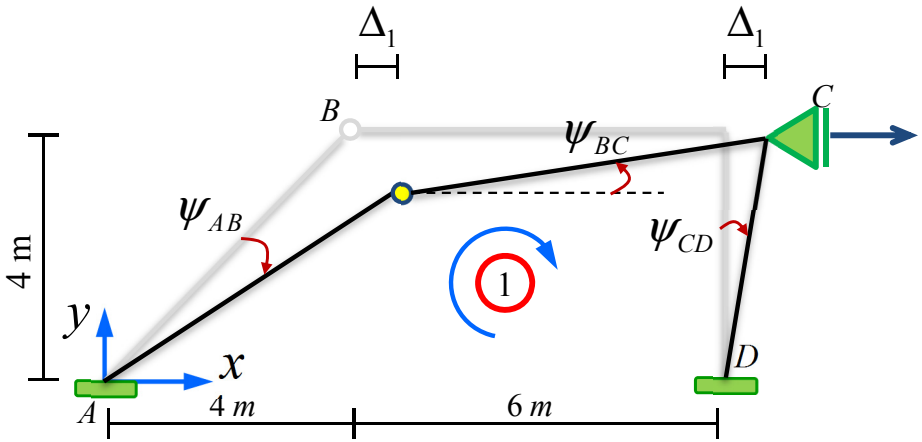
Fig 02 :

Fig 04 :

Fig 03 :

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-



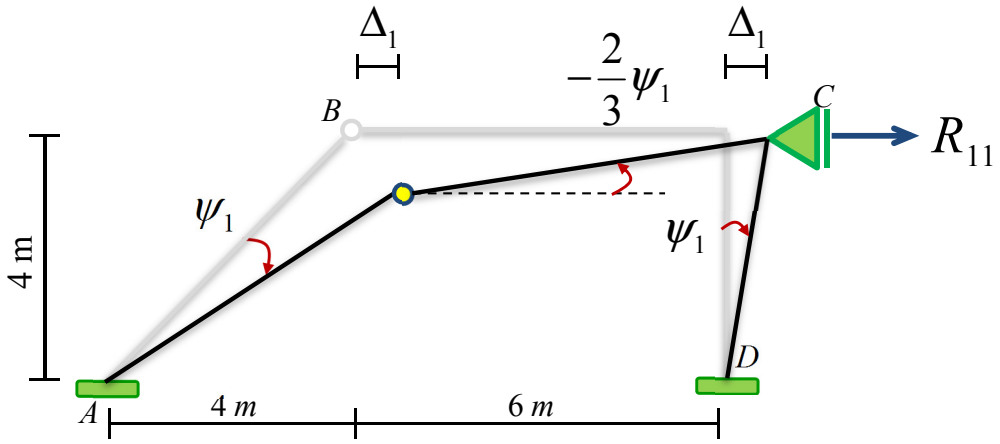
آنالیز مرحله اول: سازه در حالتی که فاقد درجه آزادی انتقالی و بدون بارگذاری است قید اولین درجه آزادی انتقالی را در راستای خودش جابجا می‌کنیم. در ادامه ارتباط ψ_{ij} اعضا با یکدیگر محاسبه می‌گردد.

$$(L7.22) \Rightarrow \begin{matrix} \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \\ \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \end{matrix}$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

آنالیز مرحله اول: محاسبه لنگر گیرداری



$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{AB} = \bar{M}_{BA} = -150\sqrt{2}\psi_1}$$

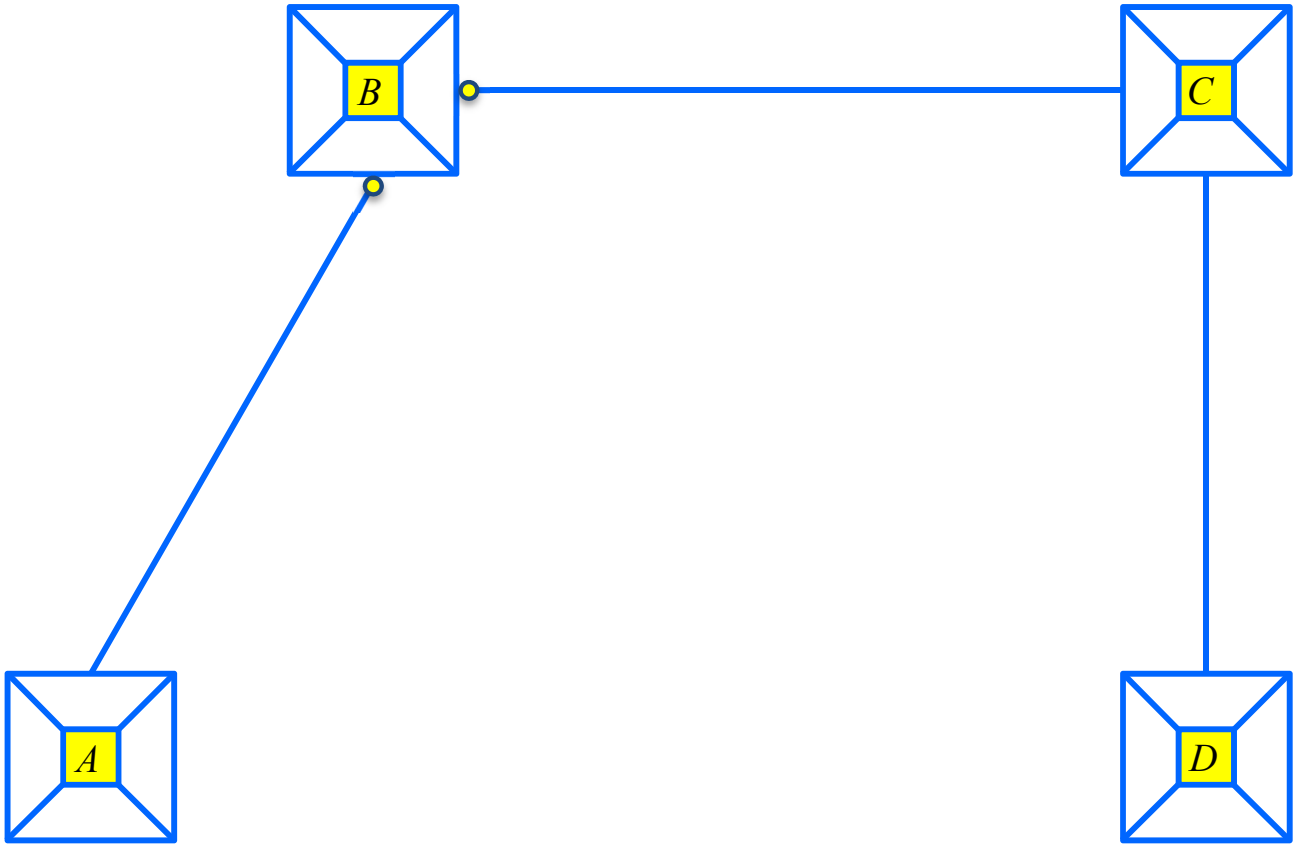
$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BC} = \bar{M}_{CB} = \frac{400}{3}\psi_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{DC} = \bar{M}_{CD} = -300\psi_1}$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

آنالیز مرحله اول:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14- آنالیز مرحله اول:

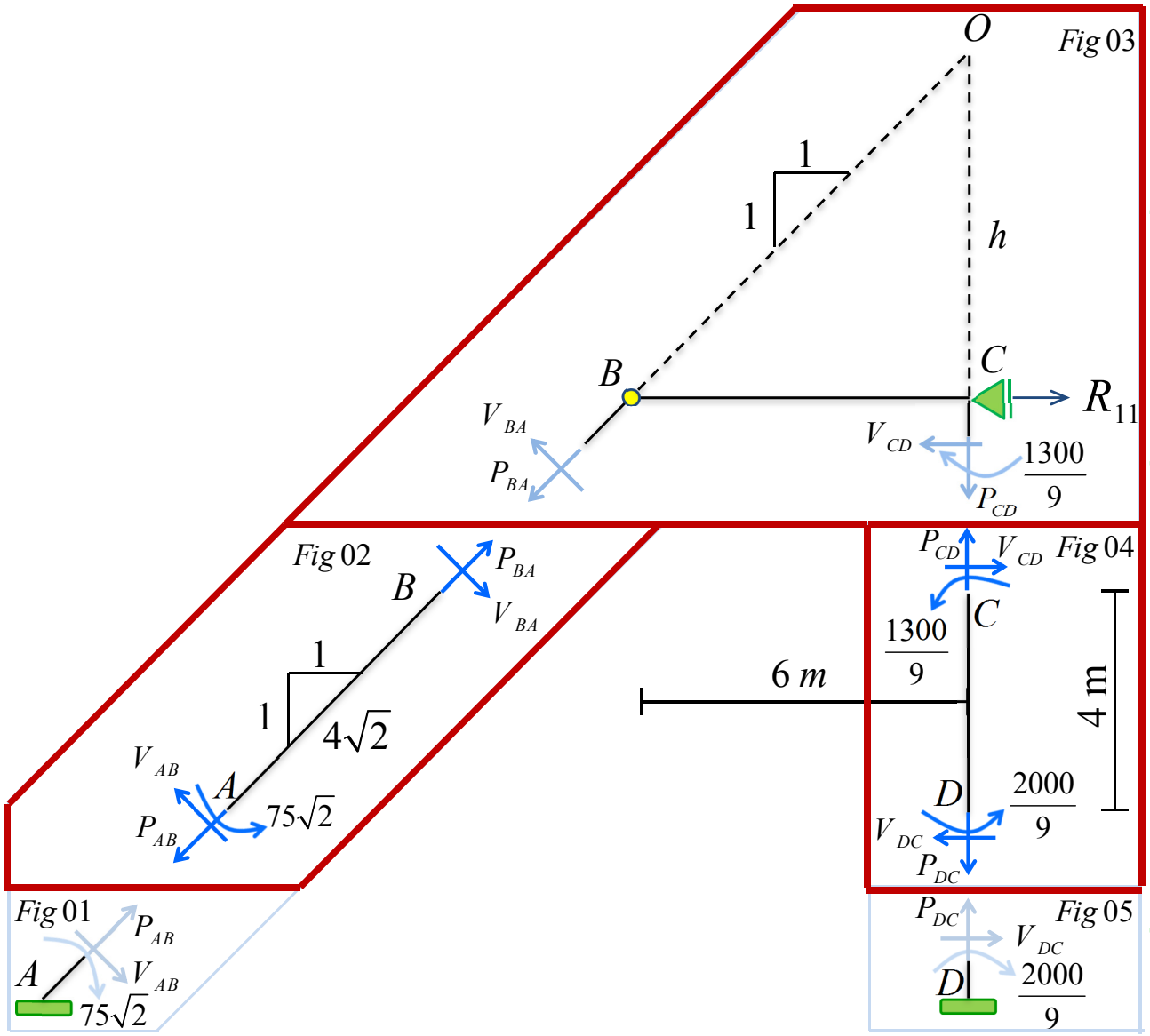


Fig 02 :

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow$$

$$-V_{BA} \times 4\sqrt{2} + 75\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 18.75} \quad (14.9)$$

Fig 04 :

$$\sum M_{/D} = 0 \Rightarrow -V_{CD} \times 4 + \frac{1300}{9} + \frac{2000}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{CD} = \frac{275}{3} ton} \quad (14.10)$$

Fig 03 :

$$\frac{h}{6} = \frac{4}{4} \Rightarrow \boxed{h = 6\ m} \quad (14.3)$$

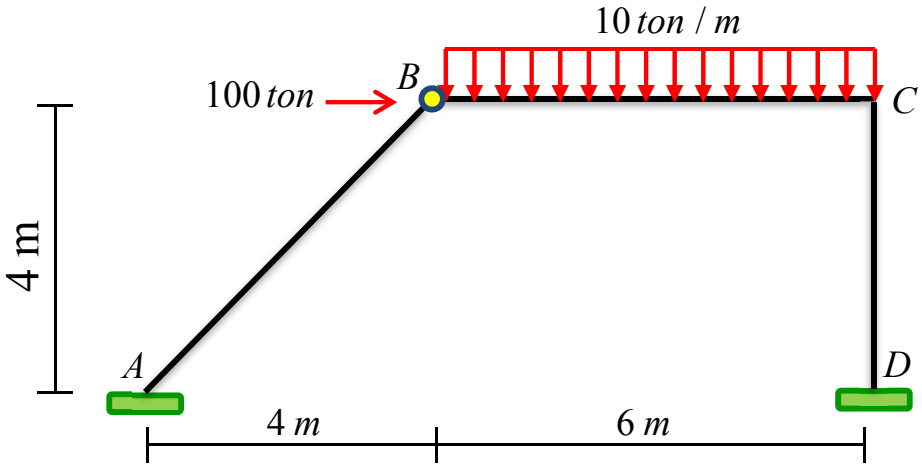
$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1300}{9} - V_{BA} \times 6\sqrt{2} - V_{CD} \times h + R_{11} \times h = 0$$

$$\overset{(14.3)\&(14.9)\&(14.10)}{\Rightarrow} \boxed{R_{11} = 142.25725\ ton} \quad (14.11)$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-



$$(14.4)\,\&\,(14.11) \rightarrow (14.12) \Rightarrow \boxed{142.25725\psi_1 = 113.75} \qquad (14.13)$$

$$(14.13) \Rightarrow \boxed{\psi_1 = 0.7996} \qquad (14.14)$$

$$(14.14) \rightarrow (14.15) \Rightarrow \boxed{M_{AB} = M_{AB}^{(0)} + 0.7996 M_{AB}^{(1)}} \qquad (14.16)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

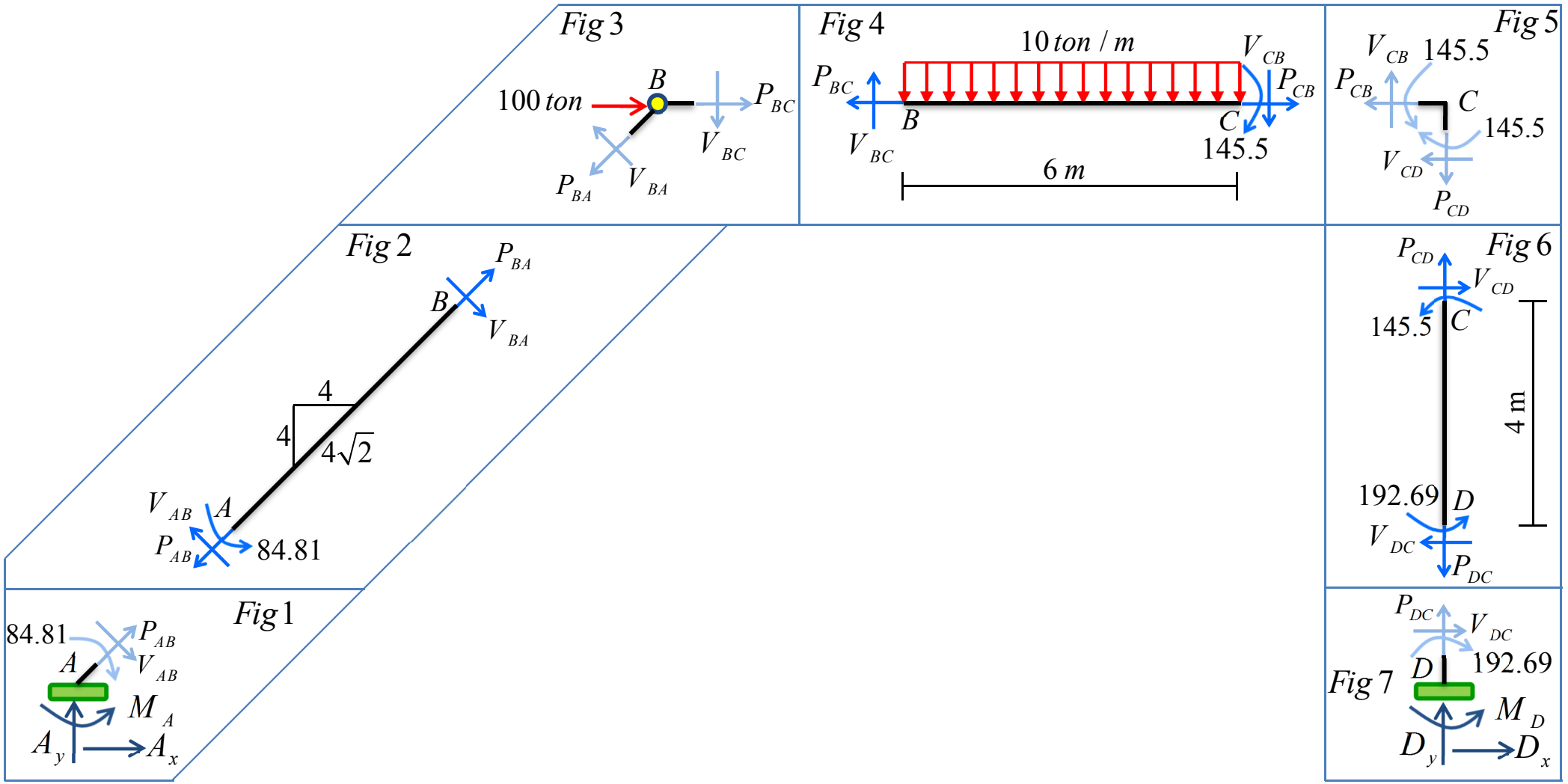
پاسخ مثال 14-

عضو	$M^{(0)}$	$M^{(1)}$	$M = M^{(0)} + 0.7996M^{(1)}$
M_{AB}	0	-106.066	-84.81
M_{BA}	0	0	0.00
M_{BC}	0	0	0.00
M_{CB}	30	1300/9	145.50
M_{CD}	-30	-1300/9	-145.50
M_{DC}	-15	-2000/9	-192.69

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

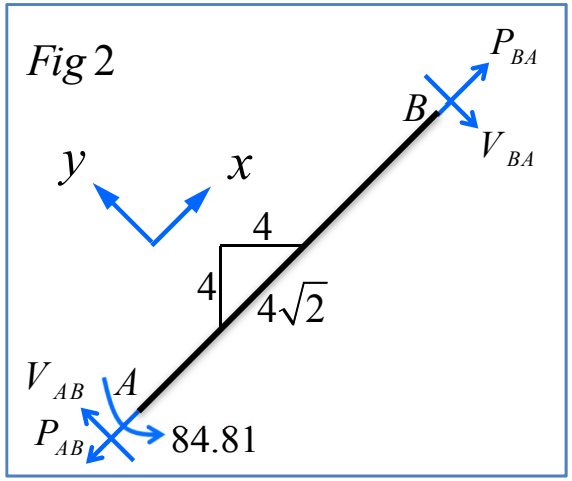
الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:



الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

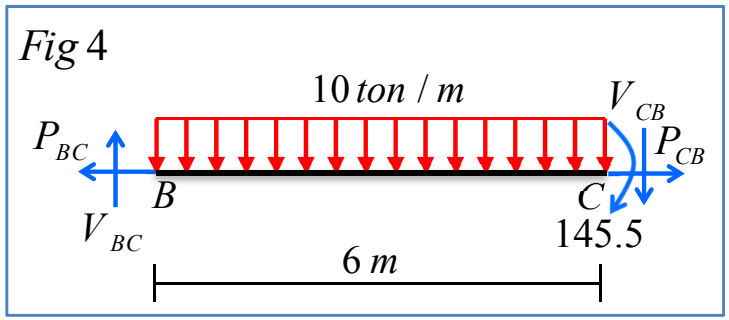
پاسخ مثال 14-



با بررسی شکل (2) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BA} \times 4\sqrt{2} + 84.81 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = 14.99\, ton} \qquad (14.17)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{AB} - V_{BA} = 0 \quad \overset{(14.17)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{AB} = 14.99\, ton} \qquad (14.18)$$



با بررسی شکل (4) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{CB} \times 6 - 145.5 - 10 \times 6 \times \frac{6}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = -54.25\, ton} \qquad (14.19)$$

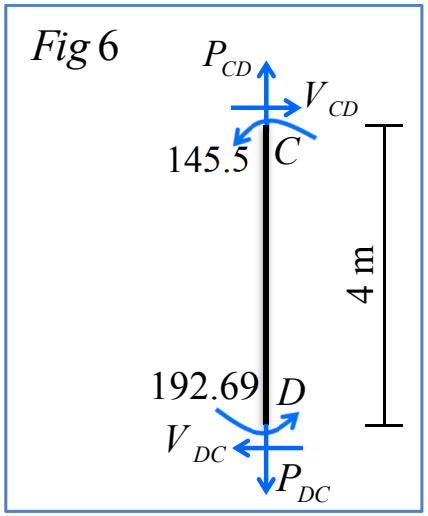
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} - 10 \times 6 - V_{CB} = 0 \quad \overset{(14.19)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = 5.75\, ton} \qquad (14.20)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

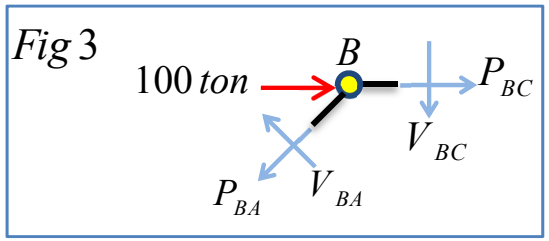
با بررسی شکل (6) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{CD} \times 4 + 145.5 + 192.69 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CD} = 84.55\, ton} \qquad (14.21)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} - V_{DC} = 0 \quad \overset{(14.21)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{DC} = 84.55\, ton} \qquad (14.22)$$

با بررسی شکل (3) نتیجه می‌شود:



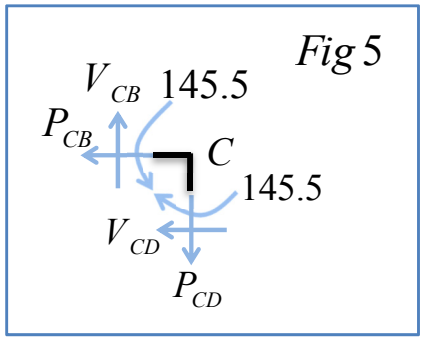
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_{BA} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + V_{BA} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - V_{BC} = 0 \quad \overset{(14.17)\&(14.20)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{BA} = 6.86\, ton} \qquad (14.23)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_{BA} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - V_{BA} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + P_{BC} + 100 = 0 \quad \overset{(14.17)\&(14.24)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{BC} = -84.55\, ton} \qquad (14.24)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

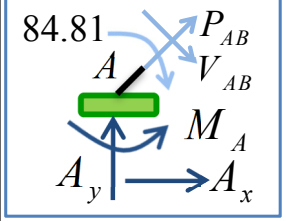
الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14- با بررسی شکل (5) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CB} - P_{CD} = 0 \overset{(14.19)}{\Rightarrow} \boxed{P_{CD} = -54.25\,ton} \quad (14.25)$$

با بررسی شکل (1) نتیجه می‌شود:

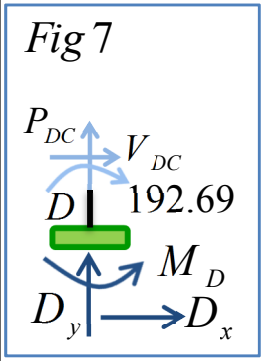


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + V_{AB} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + P_{AB} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \overset{(14.18)\&(14.23)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = -15.45\,ton} \quad (14.26)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - V_{AB} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + P_{AB} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \overset{(14.18)\&(14.23)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 5.75\,ton} \quad (14.27)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 84.81 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 84.81\,ton.m} \quad (14.28)$$

با بررسی شکل (7) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x + V_{DC} = 0 \overset{(14.22)}{\Rightarrow} \boxed{D_x = -84.55\,ton} \quad (14.29)$$

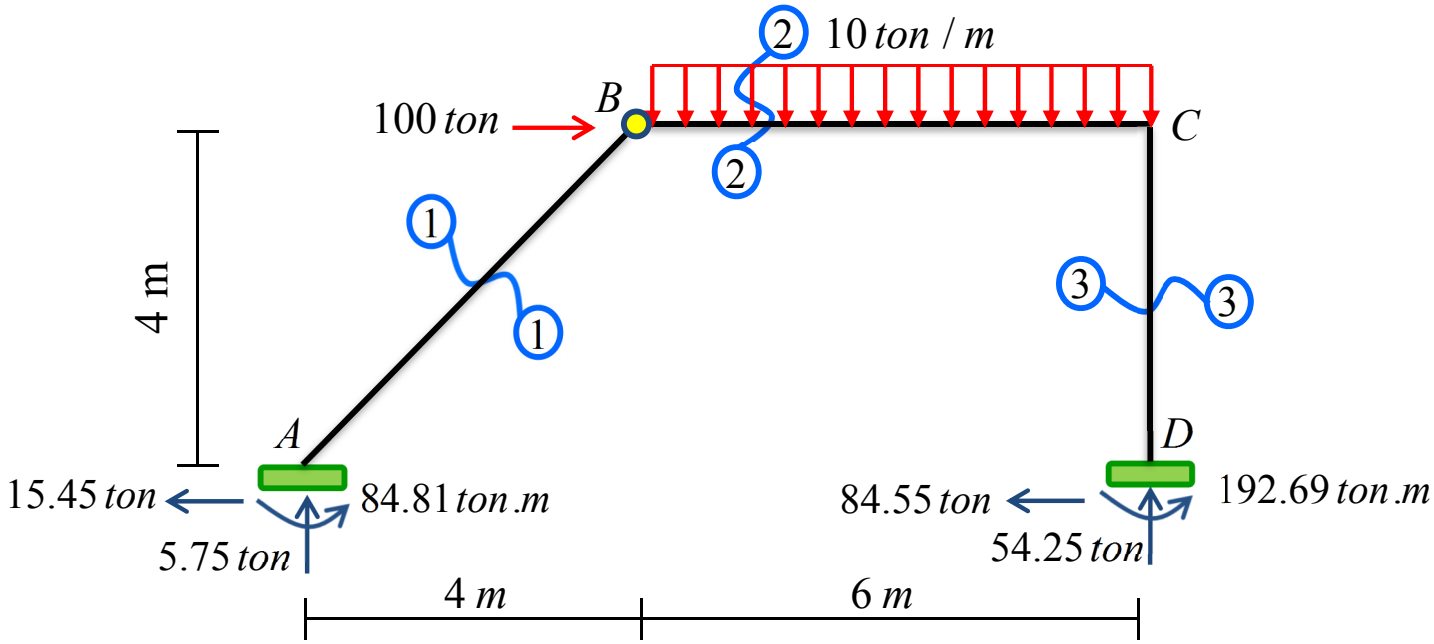
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y + P_{DC} = 0 \overset{(14.25)}{\Rightarrow} \boxed{D_y = 54.25\,ton} \quad (14.30)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_D - 192.69 = 0 \Rightarrow \boxed{M_D = 192.69\,ton.m} \quad (14.31)$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

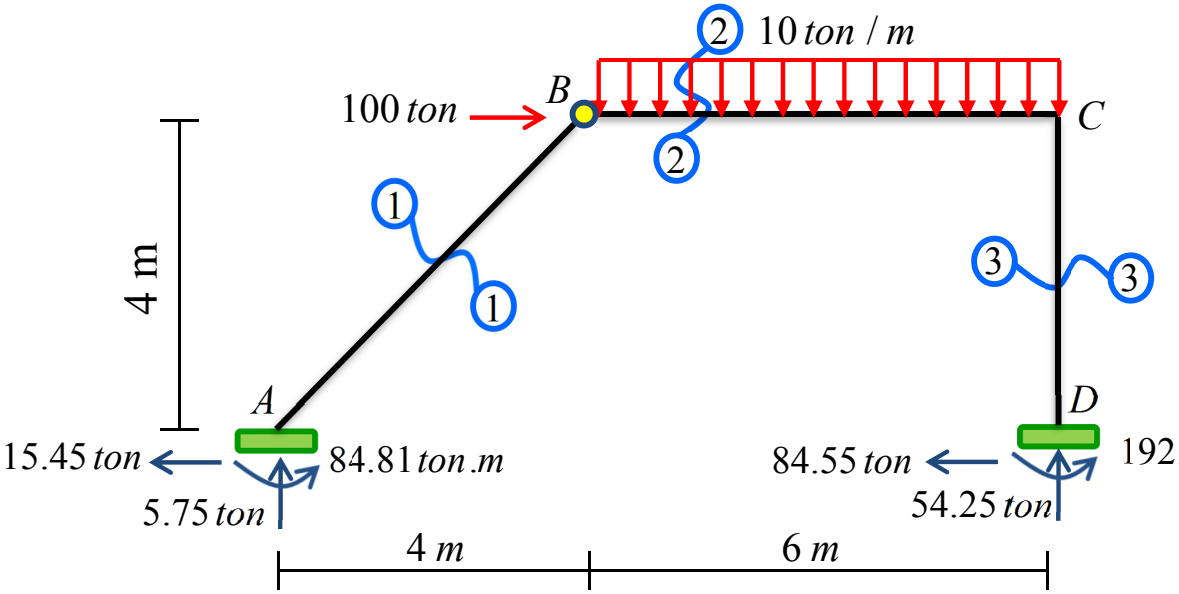
الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

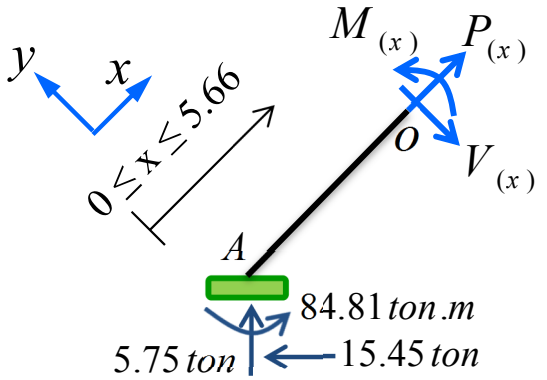


الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 1-1 خواهیم داشت:



$$\sum M_{/o} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 84.81 - (5.75 + 15.45) \times x \times 5.66 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 14.99x - 84.81}$$

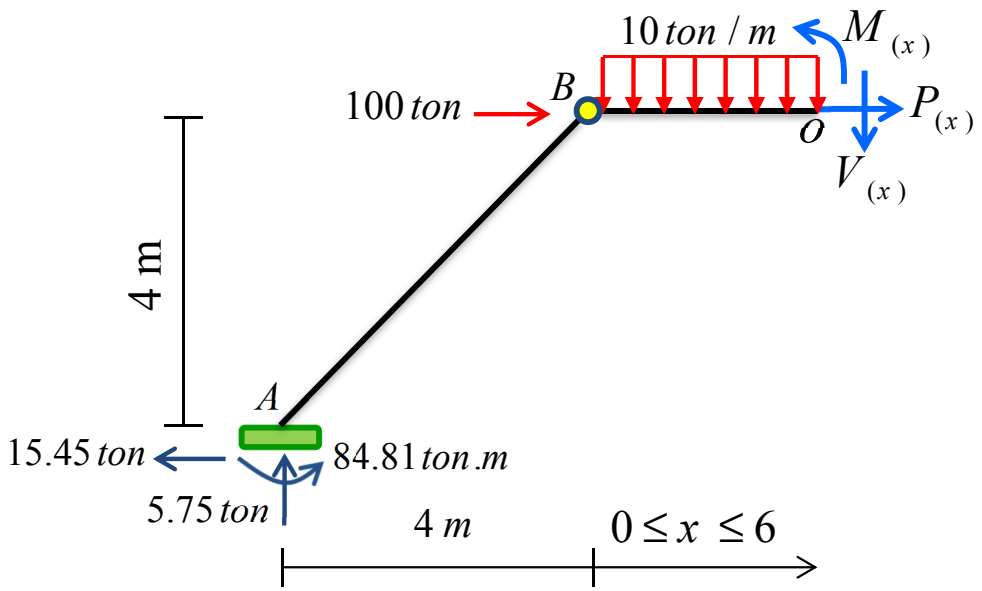
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} + (5.75 + 15.45) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 14.99\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{(x)} + (5.75 - 15.45) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = 6.86\ ton}$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع 2-2 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 10 \times x \times \frac{x}{2} - 5.75 \times (4 + x) - 15.45 \times 4 + 84.81 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -5x^2 + 5.75x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 10 \times x + 5.75 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -10x + 5.75}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} - 15.45 + 100 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -84.55\, ton}$$

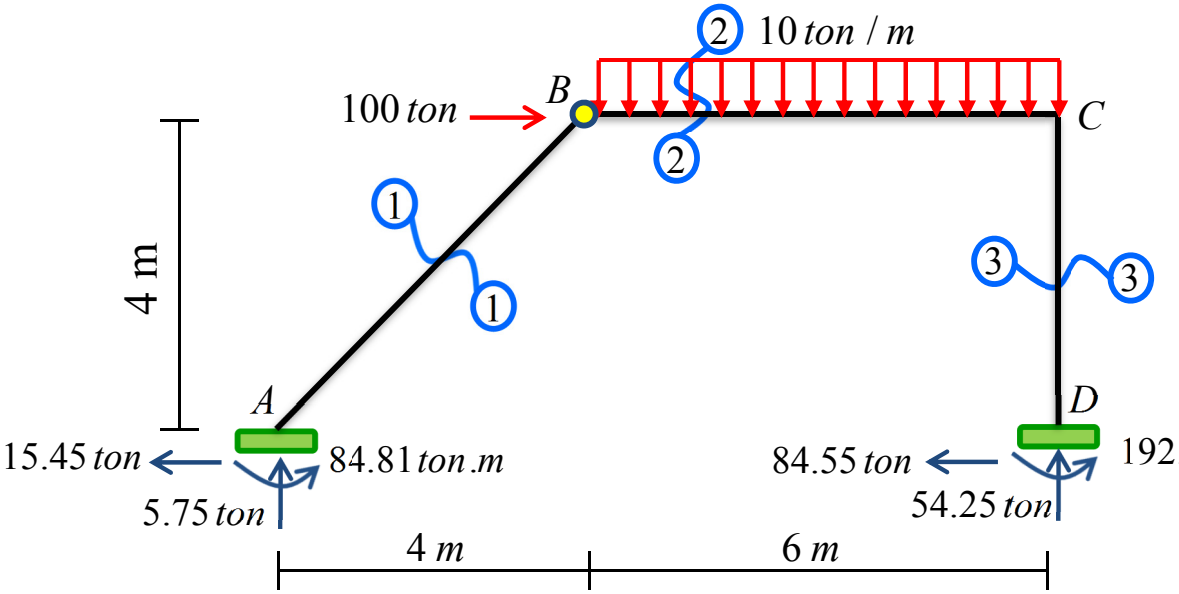
$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = 0 \Rightarrow -10x + 5.75 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0.58\, m}$$

$$M_{(x=0.58)} = -5(0.58)^2 + 5.75(0.58) \Rightarrow \boxed{M_{(x=0.58)} = 1.65\, ton.m}$$

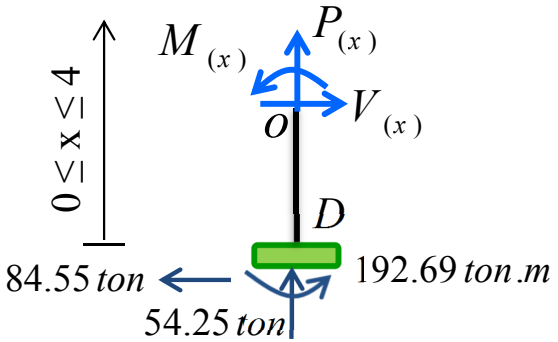
روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع 3-3 خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 192.69 - 84.55 \times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 84.55x - 192.69}$$

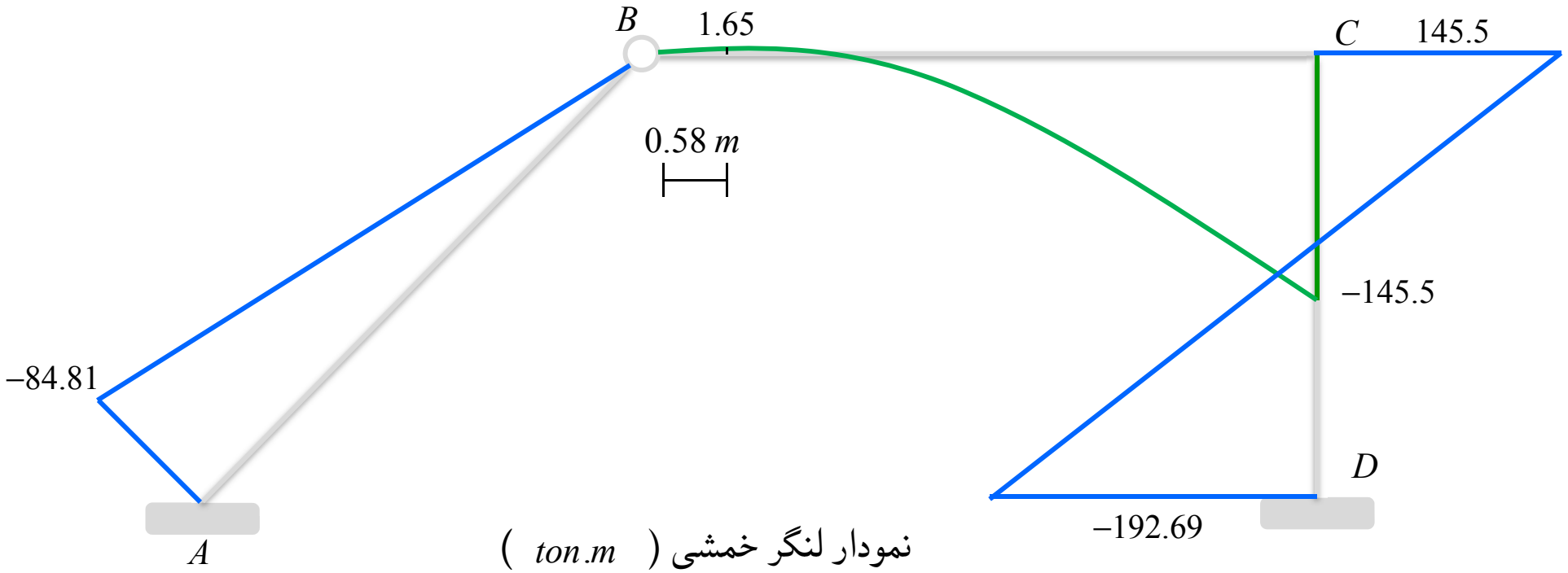
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} - 84.55 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 84.55\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{(x)} + 54.25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = -54.25\ ton}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-



نمودار لنگر خمشی ($ton.m$)

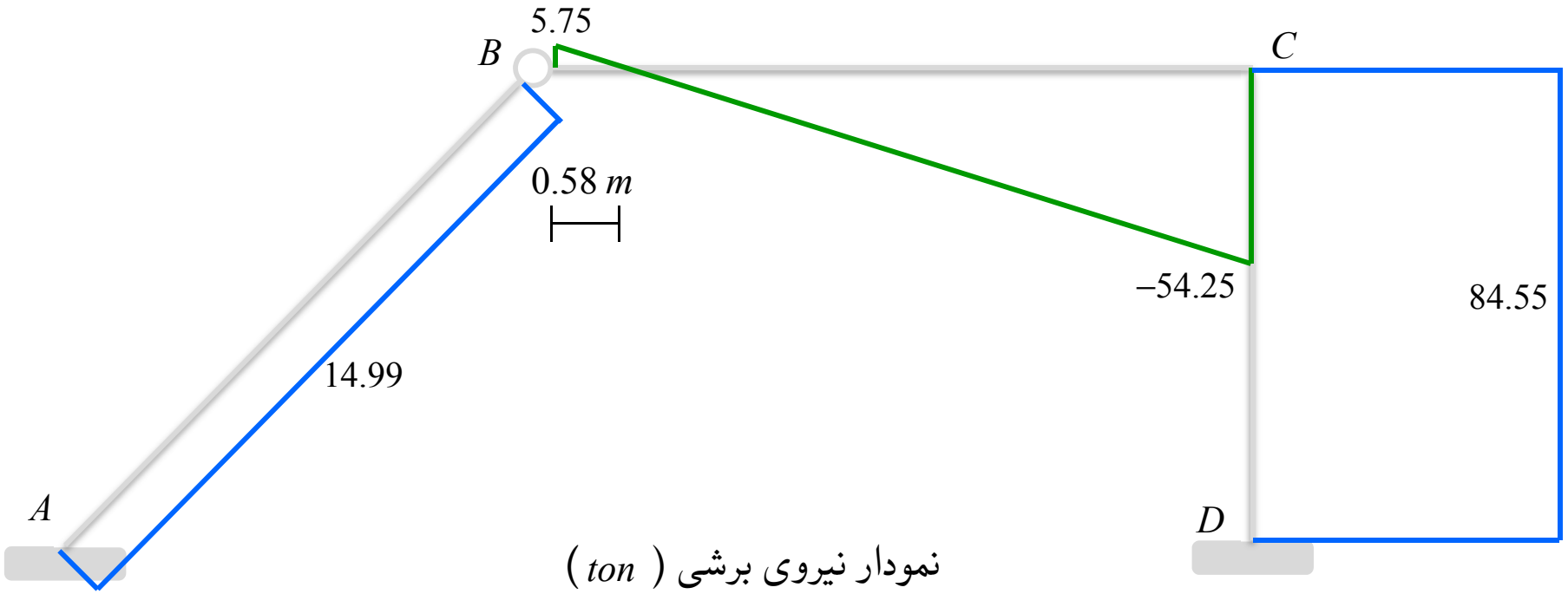
$$AB: \quad 0 \le x \le 5.66 \quad M_{(x)} = 14.99x - 84.81$$

$$BC: \quad 0 \le x \le 6 \quad M_{(x)} = -5x^2 + 5.75x$$

$$DC: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = 84.55x - 192.69$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-



نمودار نیروی برشی (ton)

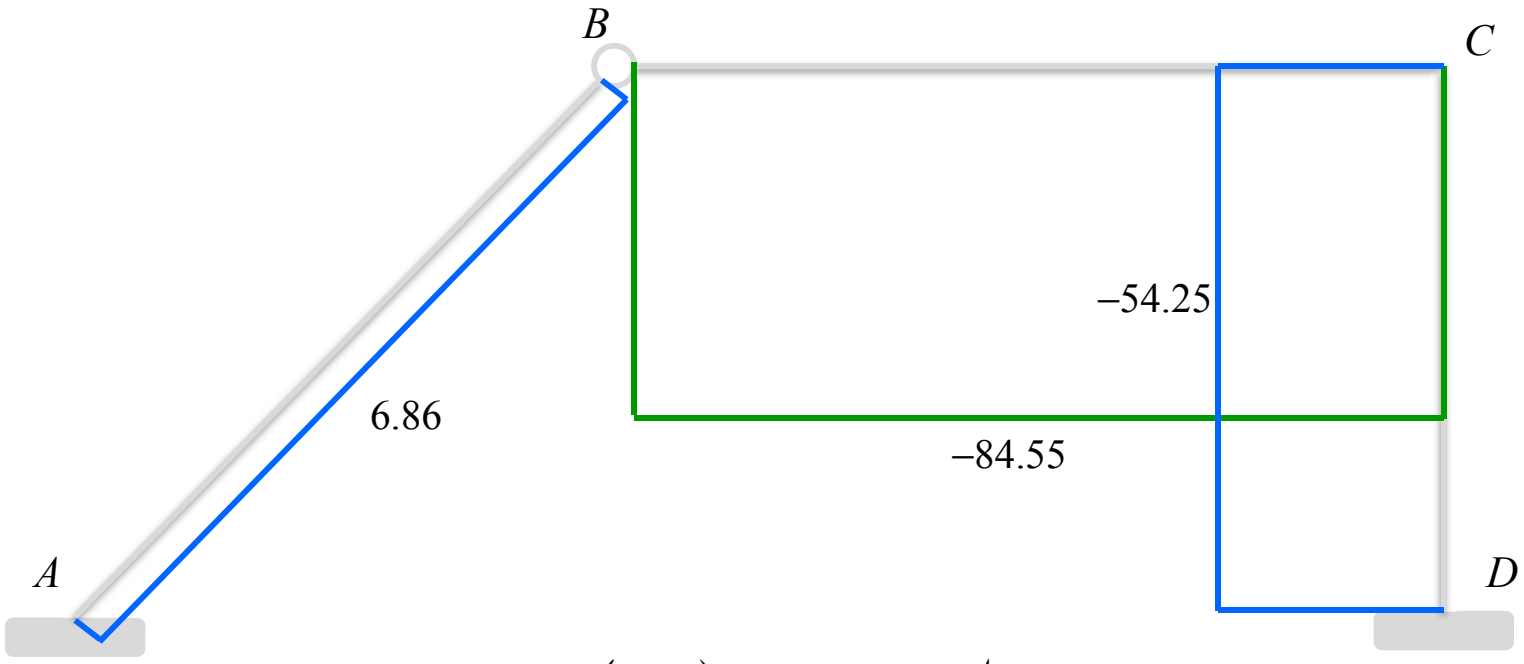
$$AB: \quad 0 \le x \le 5.66 \quad V_{(x)} = 14.99\, ton$$

$$BC: \quad 0 \le x \le 6 \quad V_{(x)} = -10x + 5.75$$

$$DC: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = 84.55\, ton$$

الف- قاب‌های بدون درجه آزادی انتقالی

پاسخ مثال 14-



نمودار نیروی محوری (ton)

$$AB: \quad 0 \le x \le 5.66 \quad P_{(x)} = 6.86\,ton$$

$$BC: \quad 0 \le x \le 6 \quad P_{(x)} = -84.55\,ton$$

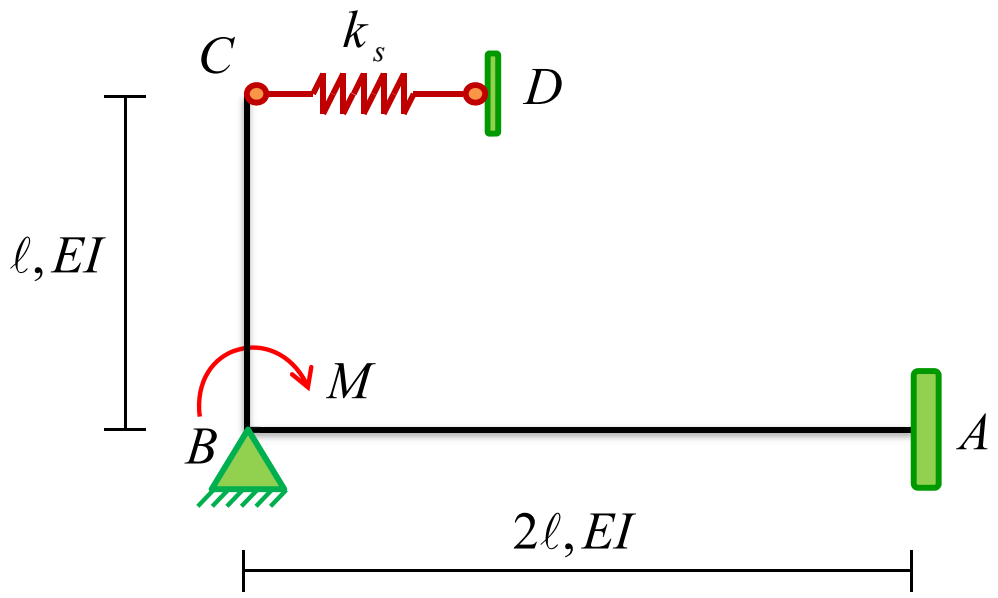
$$DC: \quad 0 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = -54.25\,ton$$

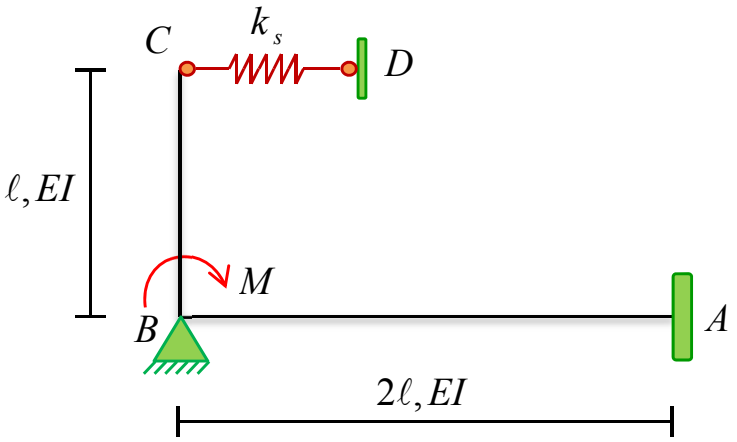
ETABS File Name: **08-Example-14.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

مثال 15- در سازه نشان داده شده مقدار تغییر مکان افقی گره C را محاسبه نمایید.

$$EI = 200\ ton.m^2$$
$$k_s = 25\ ton/m$$
$$\ell = 2\ m$$
$$M = \frac{11}{3} ton.m$$

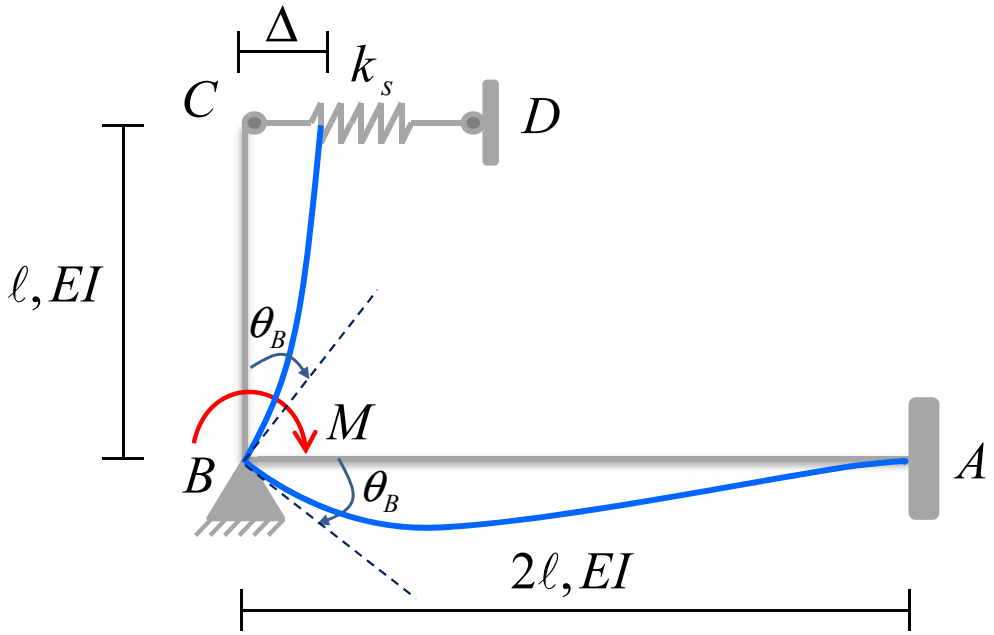




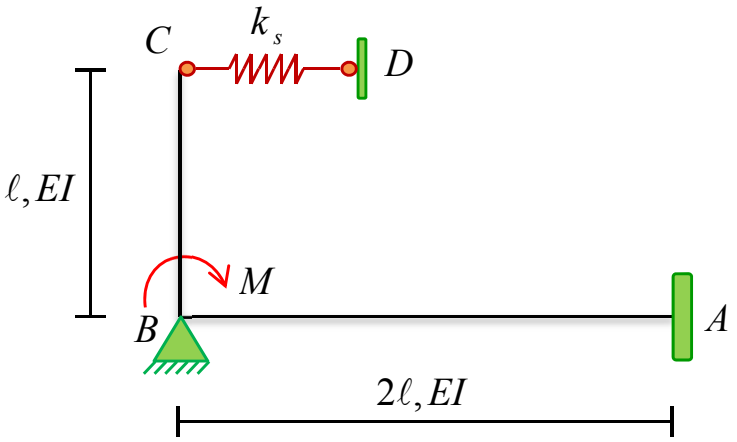
پاسخ مثال 15-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

محاسبه ψ اعضا:



پاسخ مثال 15-



محاسبه لنگرهای گیرداری:

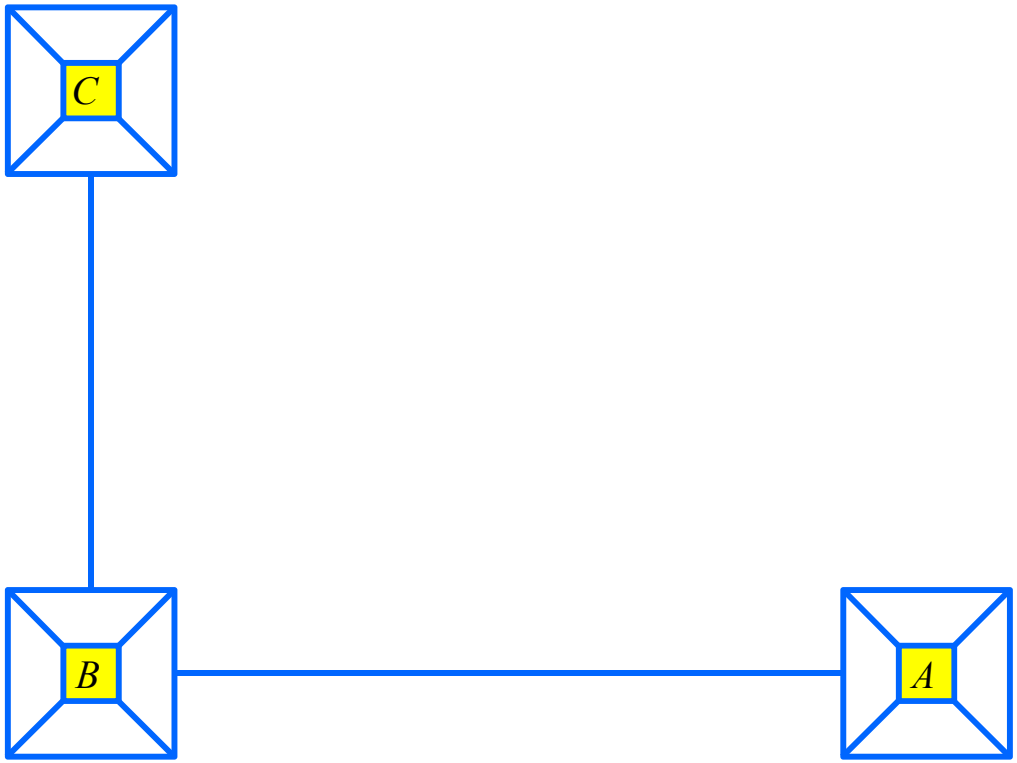
$$\bar{M}_{BC} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BC}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BC}\theta_C - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{BC} + FEM_{BC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BC} = -\frac{6EI\,\Delta}{\ell^2}}$$

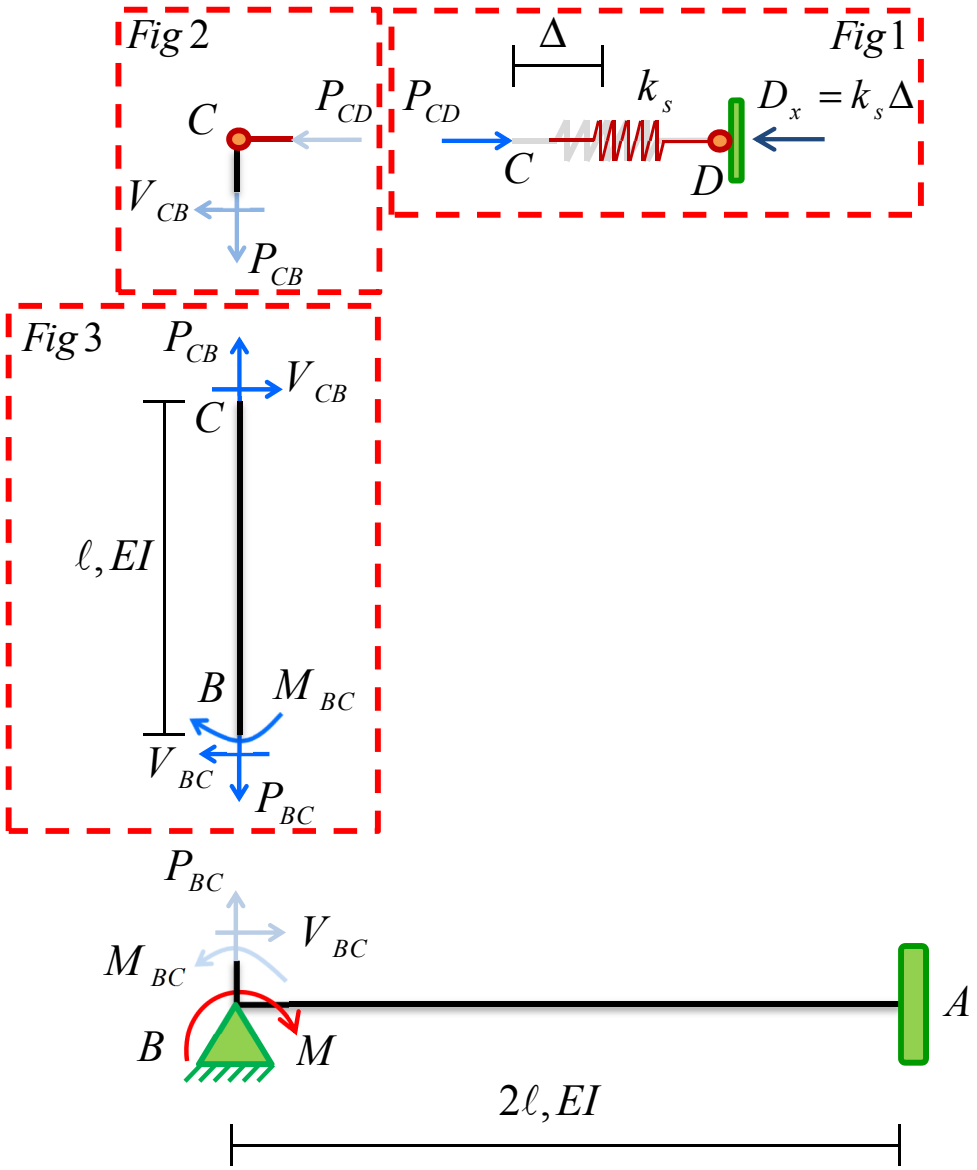
$$\bar{M}_{CB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{CB}\theta_C + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{CB}\theta_B - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{CB}\psi_{CB} + FEM_{CB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{CB} = -\frac{6EI\,\Delta}{\ell^2}}$$

پاسخ مثال 15- شروع پخش لنگر: بهتر است از گره C شروع کنیم چون لنگری به سمت آن منتقل نمی‌شود.

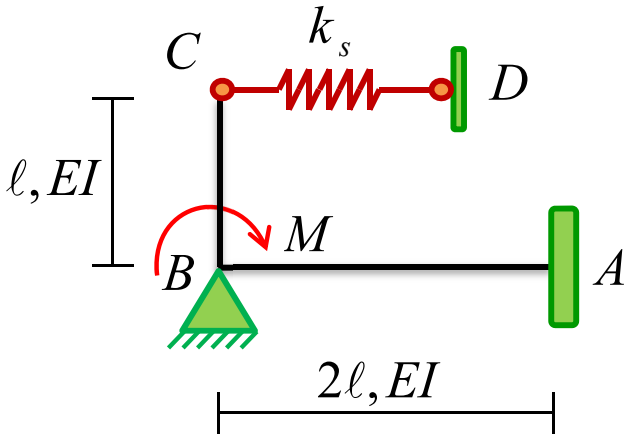


پاسخ مثال 15- معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 15-



با جایگذاری مقادیر لنگر M_{BC} به دست آمده از روش پخش لنگر و جایگذاری آن در رابطه (15.3) نتیجه می‌شود:

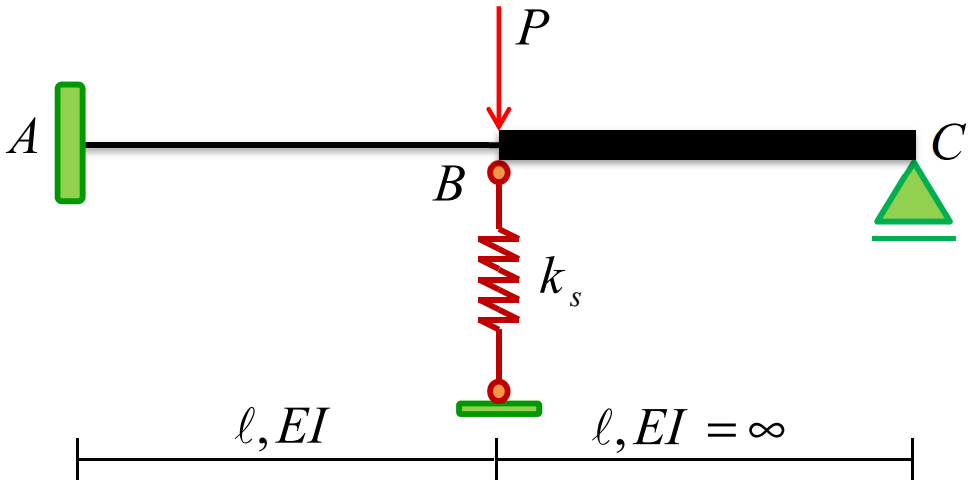
$$-1.2EI\,\Delta/\ell^2 + 0.6M = k_s\Delta\ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = \frac{\frac{M}{\ell}}{\frac{5}{3}k_s + \frac{2EI}{\ell^3}}} \qquad (15.4)$$

با جایگذاری مقادیر هریک از پارامترها، میزان تغییر طول فنر یا جابجایی افقی C به دست خواهد آمد:

$$EI = 200\ ton.m^2 \quad , \quad k_s = 25\ ton/m \quad , \quad \ell = 2\,m \quad , \quad M = \frac{11}{3}ton.m$$

$$(15.4) \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{\frac{M}{\ell}}{\frac{5}{3}k_s + \frac{2EI}{\ell^3}} = \frac{\frac{\left(\frac{11}{3}\right)}{2}}{\frac{5}{3}(25) + \frac{2(200)}{(2)^3}} \times 10^2(cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = 2\,cm}$$

مثال 16- در سازه نشان داده شده نیروی فنر و واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید.

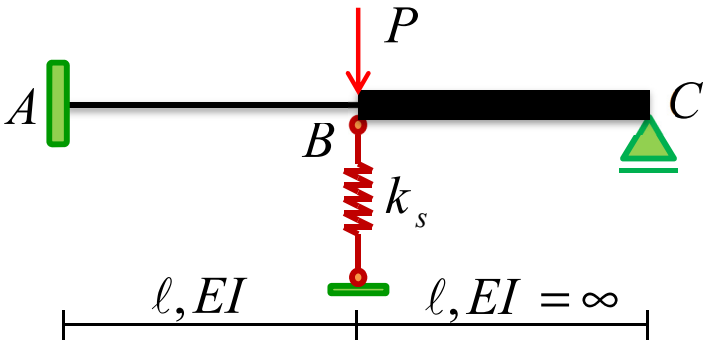


$EI = 200 \ ton.m^2$

$k_s = 25 \ ton/m$

$\ell = 5 \ m$

$P = 5 \ ton$



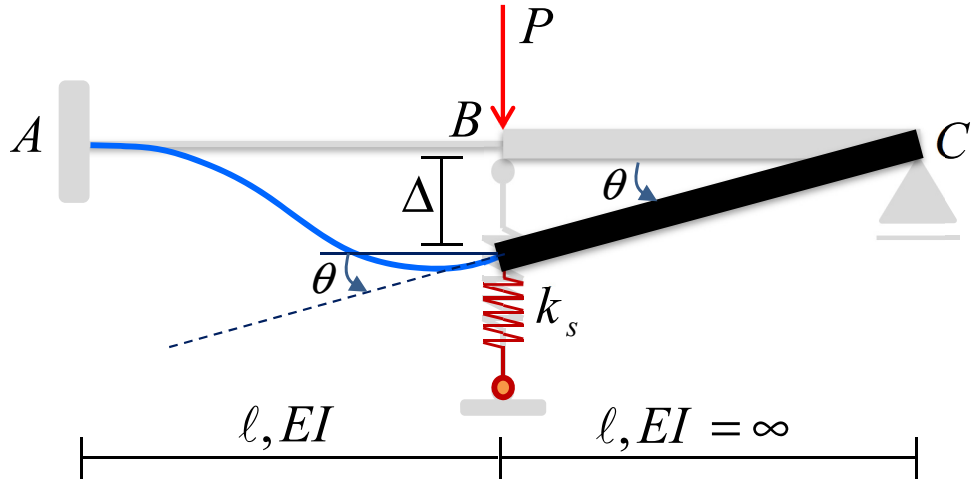
پاسخ مثال 16-

محاسبه ضرایب پخش اعضا:

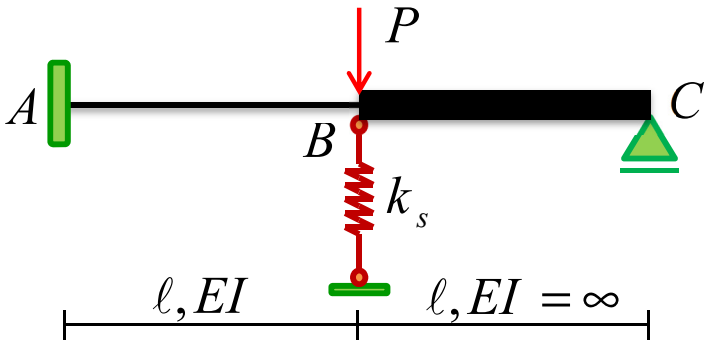
اتصال B صلب بوده و در اثر وجود فنر نشست تیکه‌گاهی دارد. از طرف دیگر قطعه BC صلب است بنابرین خمشی در آن رخ نخواهد داد. در نتیجه ما با تیر AB سر و کار داریم که در A تکیه‌گاه گیردار و در B اتصالی صلب که دارای نشست است وجود دارد.

از آنجایی که ضریب پخش در هر دو انتهای تیر AB صفر است بنابراین توزیع و انتقال لنگری روی نمی‌دهد. در نتیجه لنگرهای انتهایی تیر AB همان لنگر گیرداری ناشی از دوران محور تیر AB و دوران گره B می‌شد.

محاسبه ψ اعضا:



پاسخ مثال 16-



محاسبه لنگرهای گیرداری:

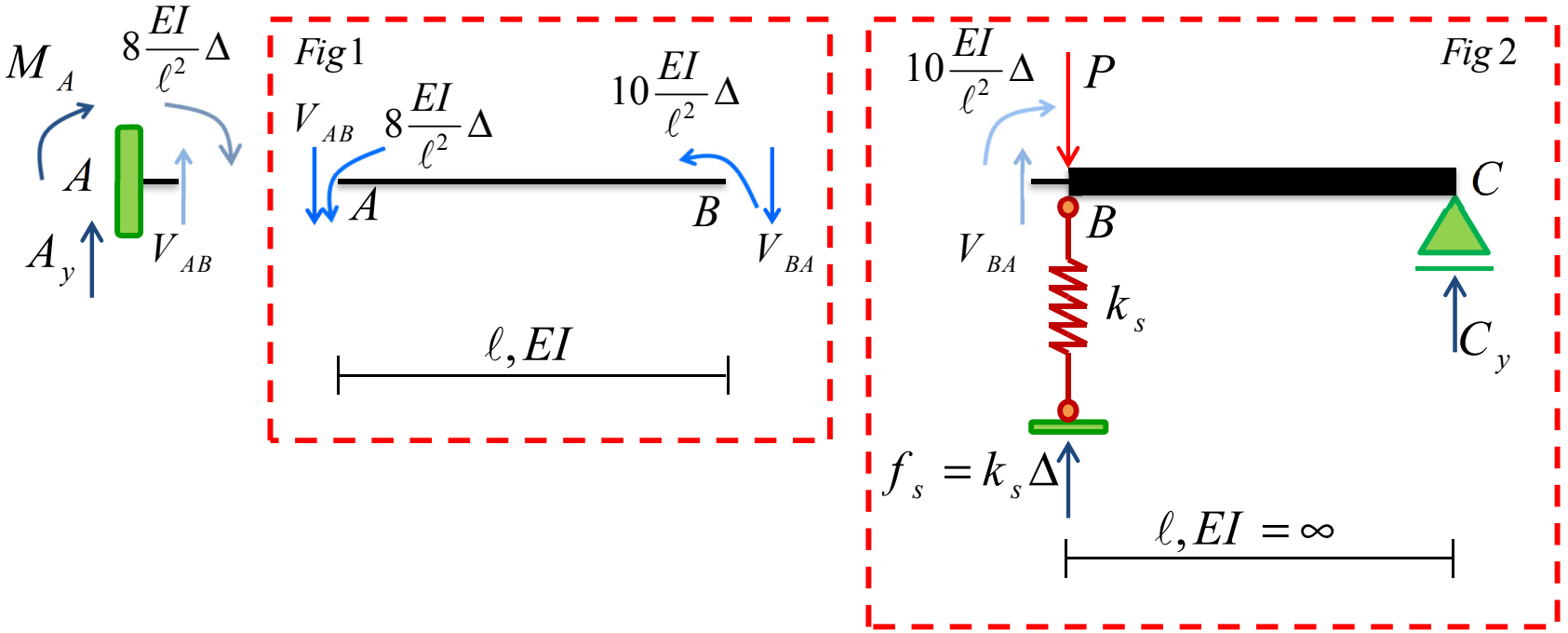
$$\bar{M}_{AB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{AB}\theta_A + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{AB}\theta_B - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{AB}\psi_{AB} + FEM_{AB}$$

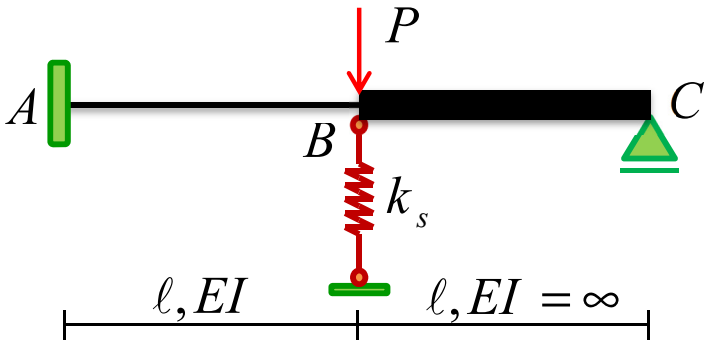
$$M_{AB} = \bar{M}_{AB} \Rightarrow \boxed{M_{AB} = -\frac{8EI\,\Delta}{\ell^2}}$$

$$\bar{M}_{BA} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_A - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BA}\psi_{BA} + FEM_{BA}$$

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} \Rightarrow \boxed{M_{BA} = -\frac{10EI\,\Delta}{\ell^2}}$$

پاسخ مثال 16–معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.



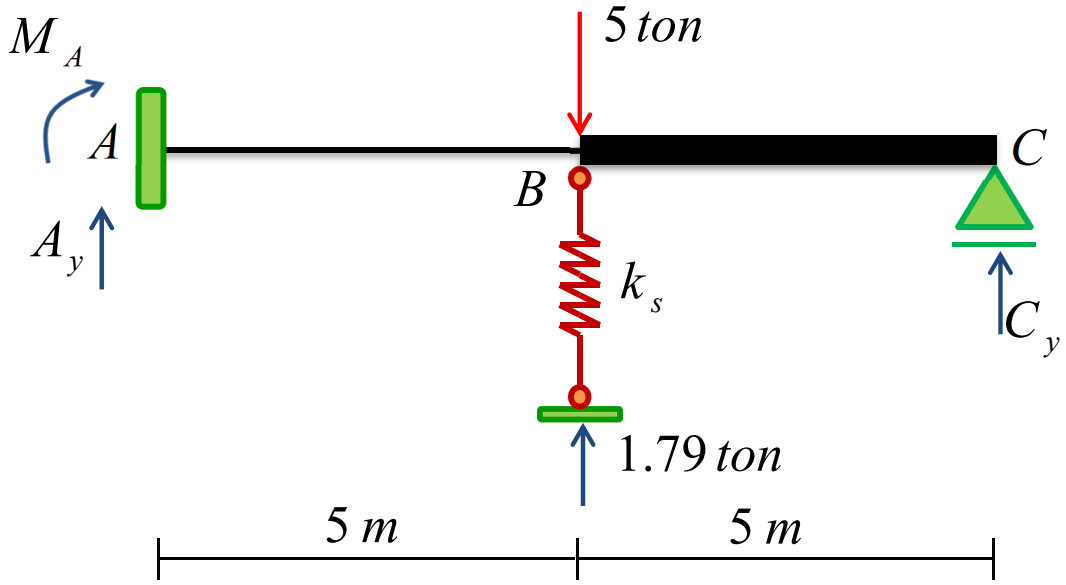


پاسخ مثال 16-

با جایگذاری مقادیر هریک از پارامترها، میزان تغییر طول فنر و نیروی فنر به دست خواهد آمد:

$$EI = 200\ \ ton.m^2 \quad , \quad k_s = 25\ \ ton/m \quad , \quad \ell = 5\,m \quad , \quad P = 5\,ton$$

پاسخ مثال 16–با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:



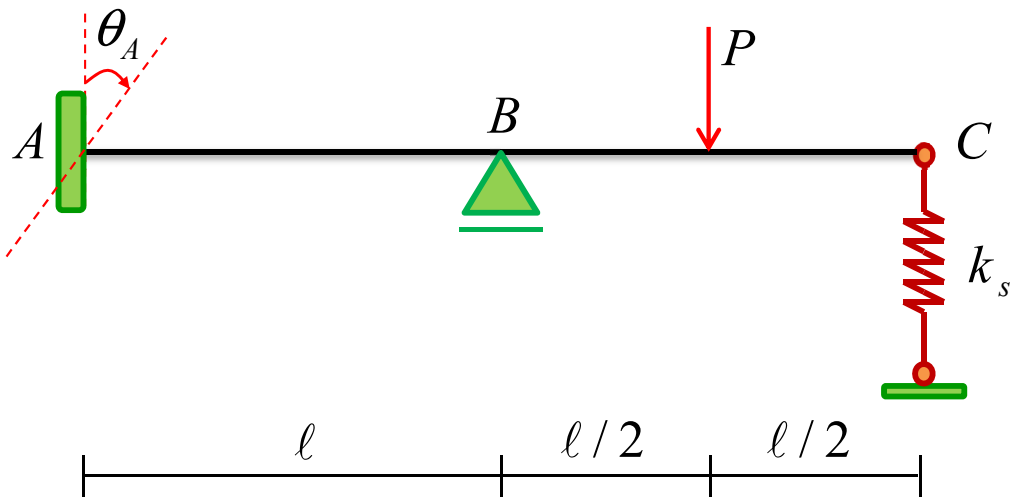
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_A + 1.79\times 5 - 5\times 5 + C_y \times 10 = 0 \quad \overset{(16.4)}{\Rightarrow} \quad \boxed{C_y = 2.06\, ton} \qquad (16.5)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + 1.79 + C_y - 5 = 0 \quad \overset{(16.5)}{\Rightarrow} \quad \boxed{A_y = 1.15\, ton}$$

ETABS File Name: **08-Example-16.EDB**

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

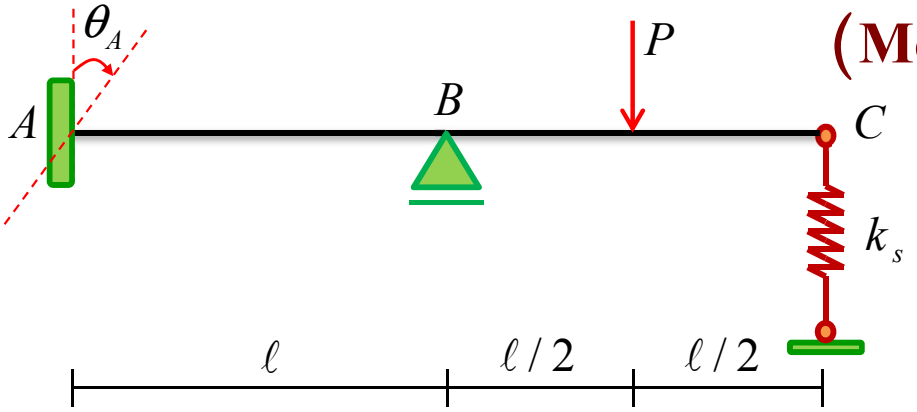
مثال 17- مقدار تغییر طول ایجاد شده در فنر را محاسبه نمایید. تکیه‌گاه A در جهت ساعتگرد دوران دارد.



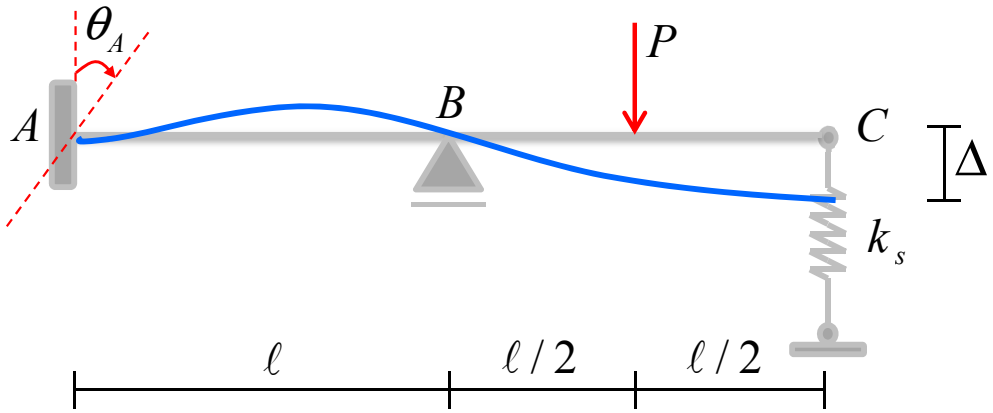
$$EI = 200\ ton.m^2$$
$$k_s = 25\ ton/m$$
$$\ell = 4\ m$$
$$P = 2\ ton$$
$$\theta_A = 1.5\times10^{-3}\ rad$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 17-

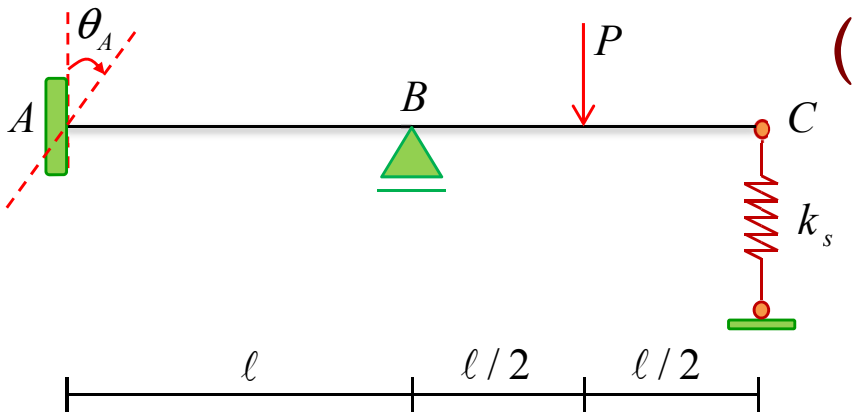


محاسبه ψ اعضا:



روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 17-



محاسبه ضرایب پخش اعضا:

محاسبه لنگرهای گیرداری:

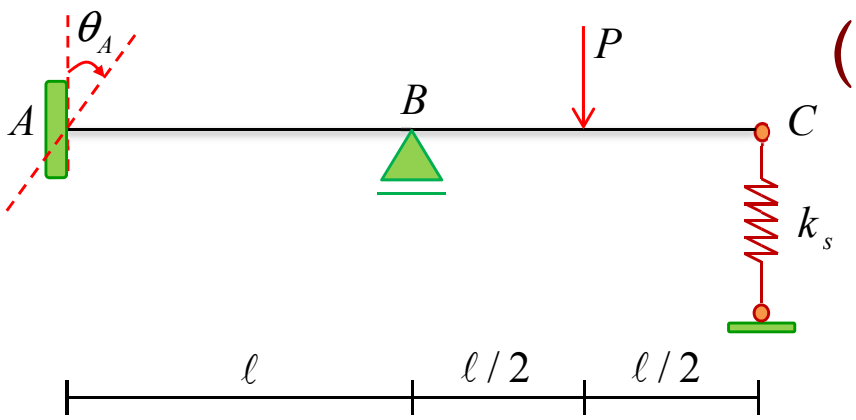
$$\bar{M}_{AB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{AB}\theta_A + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{AB}\theta_B - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{AB}\psi_{AB} + FEM_{AB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{AB} = \frac{4EI\,\theta_A}{\ell}}$$

$$\bar{M}_{BA} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BA}\theta_A - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BA}\psi_{BA} + FEM_{BA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_{BA} = \frac{2EI\,\theta_A}{\ell}}$$

روش پخش لنگر (Moment Distribution Method)

پاسخ مثال 17-

محاسبه لنگرهای گیرداری:



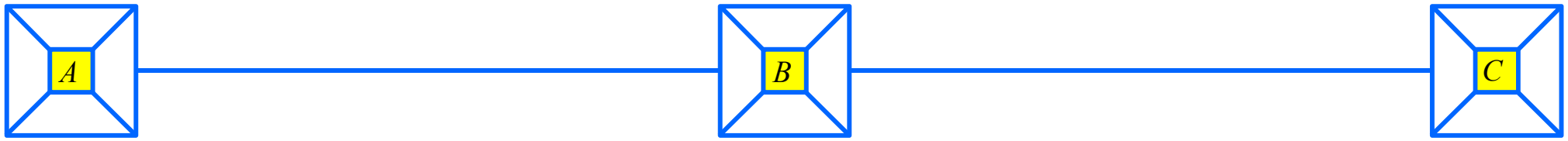
$$\bar{M}_{BC} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{BC}\theta_B + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{BC}\theta_C - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{BC}\psi_{BC} + FEM_{BC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{BC} = -\frac{6EI\,\Delta}{\ell^2} - \frac{P\ell}{8}}$$

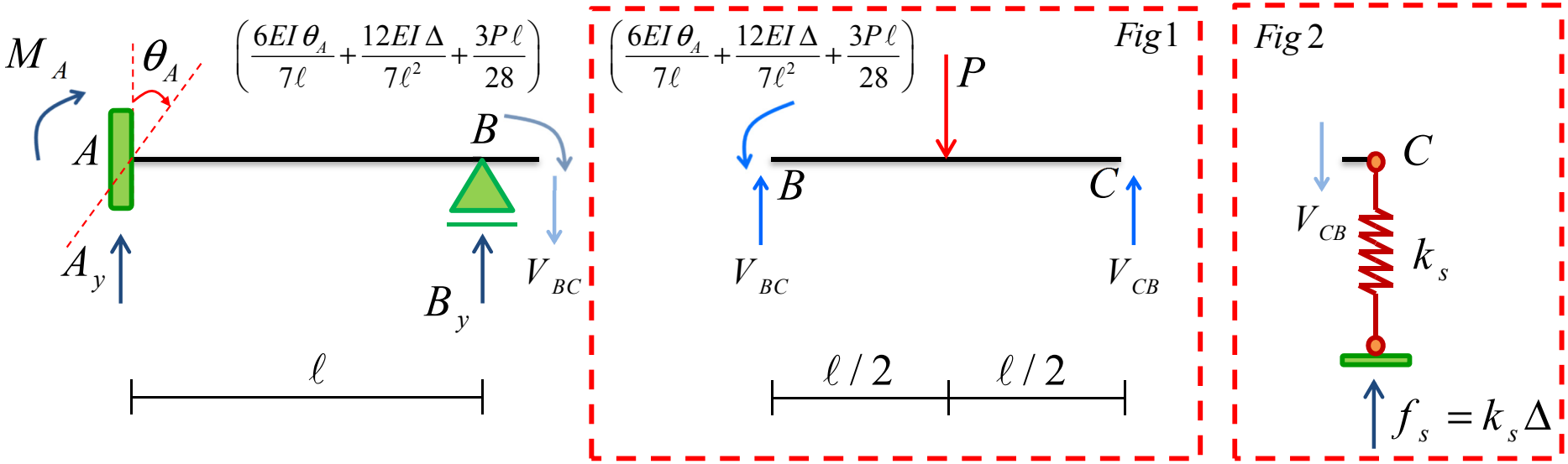
$$\bar{M}_{CB} = \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_{CB}\theta_C + \left(\frac{2EI}{\ell}\right)_{CB}\theta_B - \left(\frac{6EI}{\ell}\right)_{CB}\psi_{CB} + FEM_{CB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_{CB} = -\frac{6EI\,\Delta}{\ell^2} + \frac{P\ell}{8}}$$

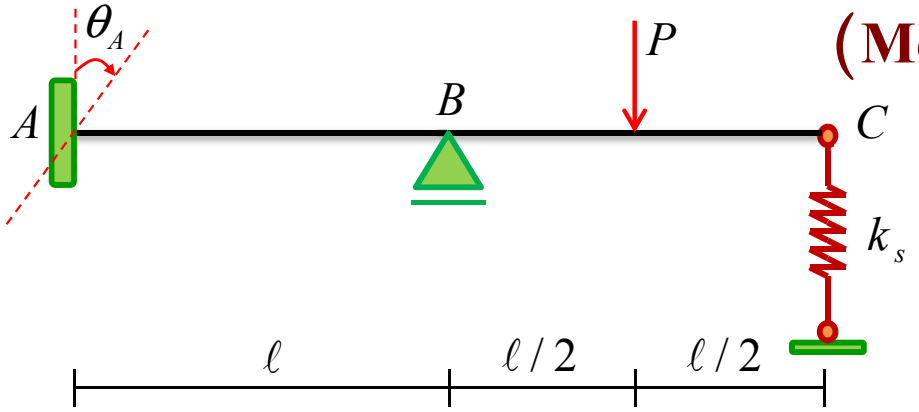
پاسخ مثال 17- شروع پخش لنگر:



پاسخ مثال 17- معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.



پاسخ مثال 17-



با جایگذاری مقادیر هریک از پارامترها، میزان تغییر طول فنر به دست خواهد آمد:

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$
$$k_s = 25 \ \ ton/m$$
$$\ell = 4 \ m$$
$$P = 2 \ ton$$
$$\theta_A = 1.5\times10^{-3} \ \ rad$$

$$(17.2) \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{5.5P - \frac{12EI}{\ell^2}\theta_A}{14k_s + \frac{24EI}{\ell^3}} = \frac{5.5(2) - \frac{12(200)}{(4)^2}(1.5\times10^{-3})}{14(25) + \frac{24(200)}{(4)^3}} \times 10^2 (cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = 2.535 \, cm}$$

ETABS File Name: **08-Example-17.EDB**