دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

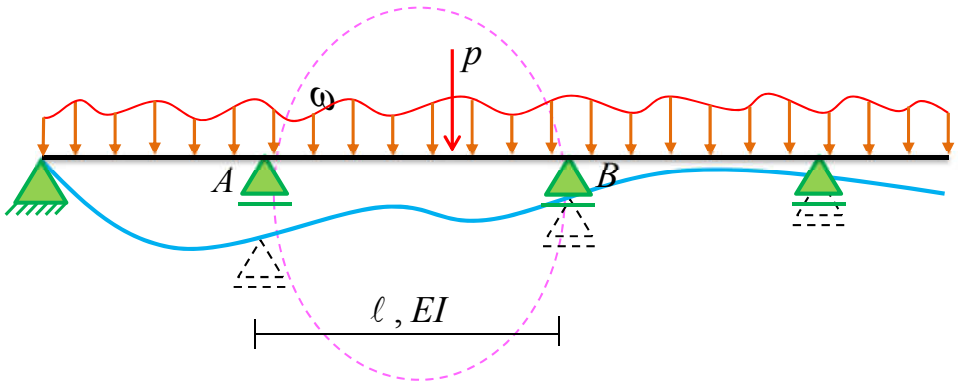
روش شیب– افت
(Slope-Deflection Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

روش شیب–افت اولین بار توسط George A. Maney در سال ۱۹۱۵ ارائه شد. در این روش علاوه بر آن که از تغییرشکل‌های محوری و برشی در مقابل تغییرشکل‌های خمشی صرف نظر می‌گردد؛ فرض می‌شود که تغییرشکل‌ها نیز در محدوده بسیار کوچکی قرار دارند.

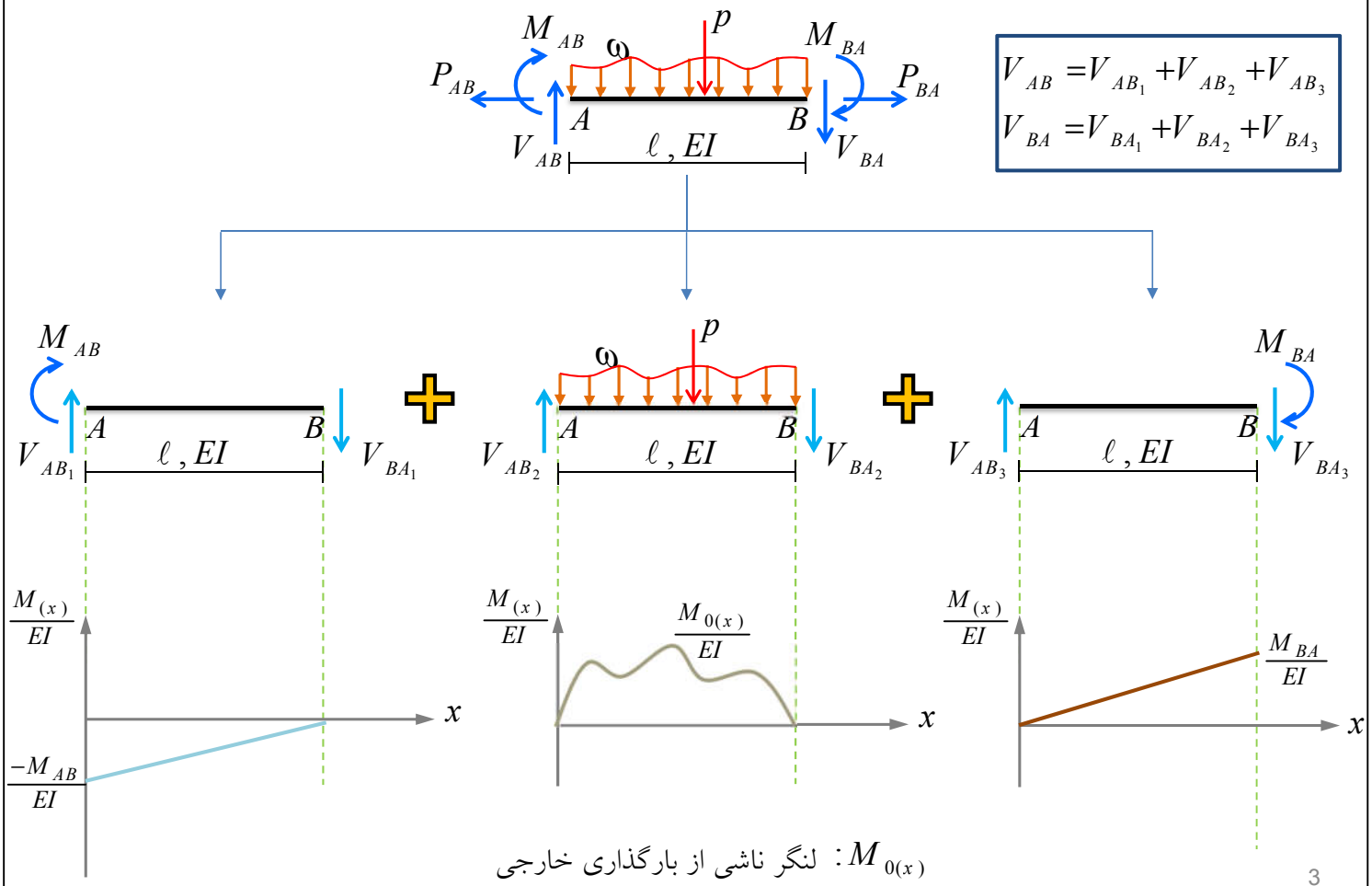
تیر سرتاسری نشان داده شده در شکل زیر، تحت اثر بارگذاری دلخواه و نشست‌های تکیه‌گاهی را در نظر بگیرید.



یک تغییرشکل الاستیک در اثر بارگذاری و نشست تکیه‌گاهی در تیر ایجاد می‌شود.

دیاگرام جسم آزاد تیر میانی AB را با برش زدن ایجاد می‌کنیم.

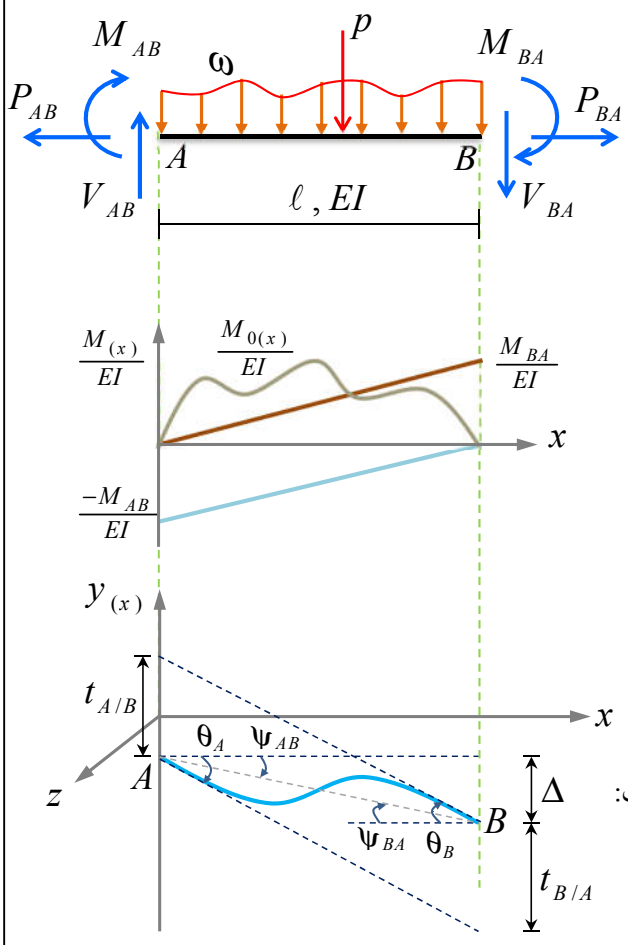
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



$$V_{AB} = V_{AB_1} + V_{AB_2} + V_{AB_3}$$
$$V_{BA} = V_{BA_1} + V_{BA_2} + V_{BA_3}$$

$M_{0(x)}$: لنگر ناشی از بارگذاری خارجی

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



θ_A: زاویه شیب در ابتدای تیر

θ_B: زاویه شیب در انتهای تیر

$\psi_{AB} = \psi_{BA}$: زاویه دوران خط واصل بین ابتدا و انتهای تیر

$t_{A/B}$: فاصله قائم انحراف گره A از خط مماس بر گره B

$t_{B/A}$: فاصله قائم انحراف گره B از خط مماس بر گره A

Δ : اختلاف نشست قائم دو گره A و B

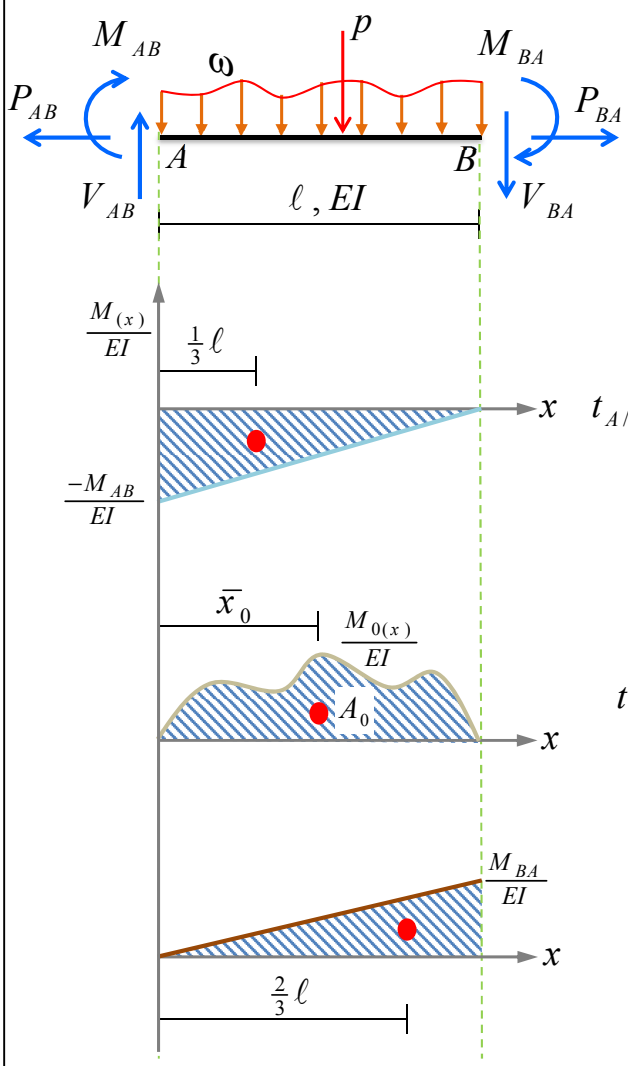
زاویه دوران خط واصل بین ابتدا و انتهای تیر از رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = \frac{\Delta}{\ell} \qquad (1)$$

از آن جایی که تغییرشکل‌ها در محدوده بسیار کوچکی هستند خواهیم داشت:

$$\tan(\theta_A) = \theta_A = \frac{t_{B/A} + \Delta}{\ell}$$
$$\tan(\theta_B) = \theta_B = \frac{t_{A/B} + \Delta}{\ell} \qquad (2)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



بر اساس قضیه دوم لنگر سطح، مقدار $t_{A/B}$ برابر است با گشتاور اول سطح زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ بین نقاط A و B نسبت به محور قائم در گره A. برای هریک از نمودارهای لنگر مقدار انحراف به صورت جداگانه محاسبه می‌شود:

$$t_{A/B_1}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-M_{AB}}{EI}\times\ell\right)\times\left(\frac{1}{3}\ell\right)\Rightarrow\boxed{t_{A/B_1}=-\frac{M_{AB}\ell^2}{6EI}}\quad(3)$$

$$t_{A/B_2}=A_0\times\bar{x}_0\Rightarrow\boxed{t_{A/B_2}=\frac{G_A}{EI}}\quad(4)$$

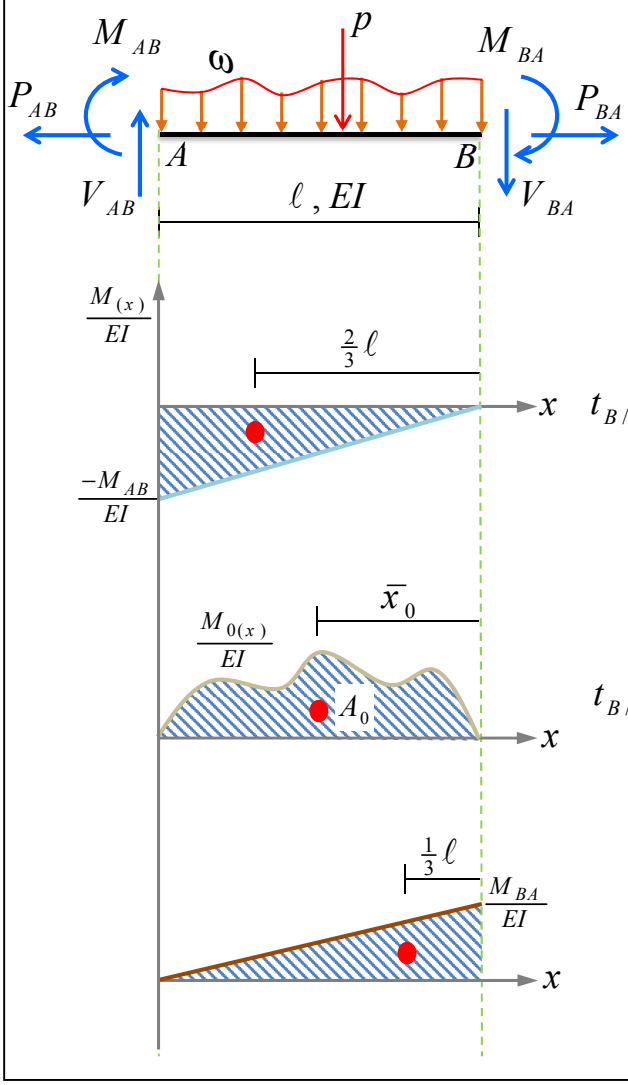
$$t_{A/B_3}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{M_{BA}}{EI}\times\ell\right)\times\left(\frac{2}{3}\ell\right)\Rightarrow\boxed{t_{A/B_3}=\frac{M_{BA}\ell^2}{3EI}}\quad(5)$$

براساس اصل برهم نهی می‌توان نتیجه گرفت:

$$t_{A/B}=t_{A/B_1}+t_{A/B_2}+t_{A/B_3}\overset{(3)\ to\ (5)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{t_{A/B}=-\frac{M_{AB}\ell^2}{6EI}+\frac{M_{BA}\ell^2}{3EI}+\frac{G_A}{EI}}\quad(6)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



بر اساس قضیه دوم لنگر سطح، مقدار $t_{B/A}$ برابر است با گشتاور اول سطح زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ بین نقاط B و A نسبت به محور قائم در گره B. برای هریک از نمودارهای لنگر مقدار انحراف به صورت جداگانه محاسبه می‌شود:

$$t_{B/A_1}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-M_{AB}}{EI}\times\ell\right)\times\left(-\frac{2}{3}\ell\right)\Rightarrow\boxed{t_{B/A_1}=\frac{M_{AB}\ell^2}{3EI}}\quad(7)$$

$$t_{B/A_2}=A_0\times(-\bar{x}_0)\Rightarrow\boxed{t_{B/A_2}=-\frac{G_B}{EI}}\quad(8)$$

$$t_{B/A_3}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{M_{BA}}{EI}\times\ell\right)\times\left(-\frac{1}{3}\ell\right)\Rightarrow\boxed{t_{B/A_3}=-\frac{M_{BA}\ell^2}{6EI}}\quad(9)$$

براساس اصل برهم نهی می‌توان نتیجه گرفت:

$$t_{B/A}=t_{B/A_1}+t_{B/A_2}+t_{B/A_3}\overset{(7)\ to\ (9)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{t_{B/A}=\frac{M_{AB}\ell^2}{3EI}-\frac{M_{BA}\ell^2}{6EI}-\frac{G_B}{EI}}\quad(10)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

با جایگذاری روابط (۶) و (۱۰) در رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$(6)\,\&\,(10)\rightarrow(2)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{aligned}\theta_A&=\frac{\left(\frac{M_{AB}\ell^2}{3EI}-\frac{M_{BA}\ell^2}{6EI}-\frac{G_B}{EI}\right)+\Delta}{\ell}\\ \theta_B&=\frac{\left(-\frac{M_{AB}\ell^2}{6EI}+\frac{M_{BA}\ell^2}{3EI}+\frac{G_A}{EI}\right)+\Delta}{\ell}\end{aligned}}\qquad(11)$$

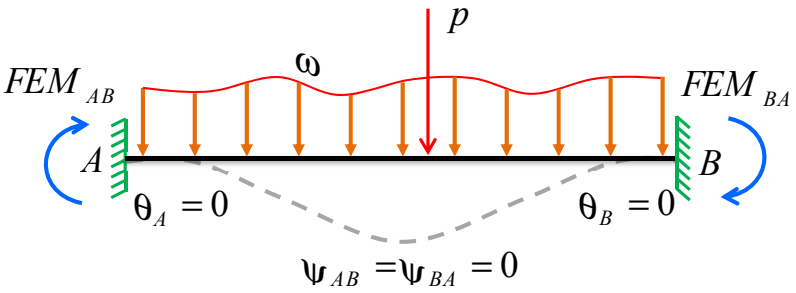
با حل دو معادله در رابطه (۱۱) مقادیر لنگرهای M_{AB} و M_{BA} به دست می‌آید:

$$\boxed{\begin{aligned}M_{AB}&=\frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_A+\theta_B-3\frac{\Delta}{\ell}\right)+\frac{2}{\ell^2}(2G_B-G_A)\\ M_{BA}&=\frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B+\theta_A-3\frac{\Delta}{\ell}\right)+\frac{2}{\ell^2}(G_B-2G_A)\end{aligned}}\qquad(12)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در (۱۲) خواهیم داشت:

$$(1)\rightarrow(12)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{aligned}M_{AB}&=\frac{2EI}{\ell}(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB})+\frac{2}{\ell^2}(2G_B-G_A)\\ M_{BA}&=\frac{2EI}{\ell}(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{BA})+\frac{2}{\ell^2}(G_B-2G_A)\end{aligned}}\qquad(13)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



به کمک معادله (۱۳) می‌توان لنگرهای انتهایی یک تیر را محاسبه نمود. تیر دو سر گیردار رو به رو تحت اثر یک بارگذاری دلخواه را در نظر بگیرید. براساس معادلات (۱۳) خواهیم داشت:

$$(13)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{aligned}FEM_{AB}&=\frac{2EI}{\ell}(2\overset{0}{\theta_A}+\overset{0}{\theta_B}-3\overset{0}{\psi_{AB}})+\frac{2}{\ell^2}(2G_B-G_A)\\ FEM_{BA}&=\frac{2EI}{\ell}(2\overset{0}{\theta_B}+\overset{0}{\theta_A}-3\overset{0}{\psi_{BA}})+\frac{2}{\ell^2}(G_B-2G_A)\end{aligned}}\qquad(14)$$

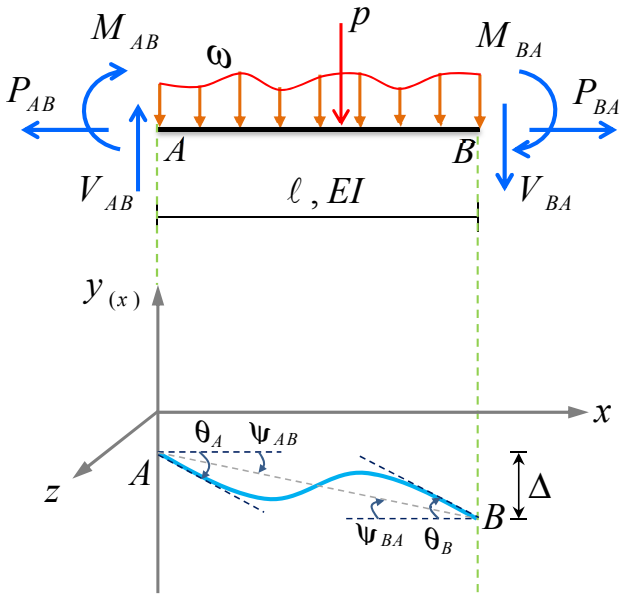
از این رو، می‌توان نتیجه گرفت عبارت آخر در روابط شیب- افت معادل لنگرهای انتهایی در یک تیر دو سر گیردار می‌باشند که لنگرهای گیرداری نامیده می‌شوند.

$$(14)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{aligned}\frac{2}{\ell^2}(2G_B-G_A)&=FEM_{AB}\\ \frac{2}{\ell^2}(G_B-2G_A)&=FEM_{BA}\end{aligned}}\qquad(15)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

با جایگذاری رابطه (۱۵) در (۱۳) معادلات اصلی شیب – افت از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$(15)\rightarrow(13) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB}\right)+FEM_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{BA}\right)+FEM_{BA} \end{aligned} \qquad (16)$$



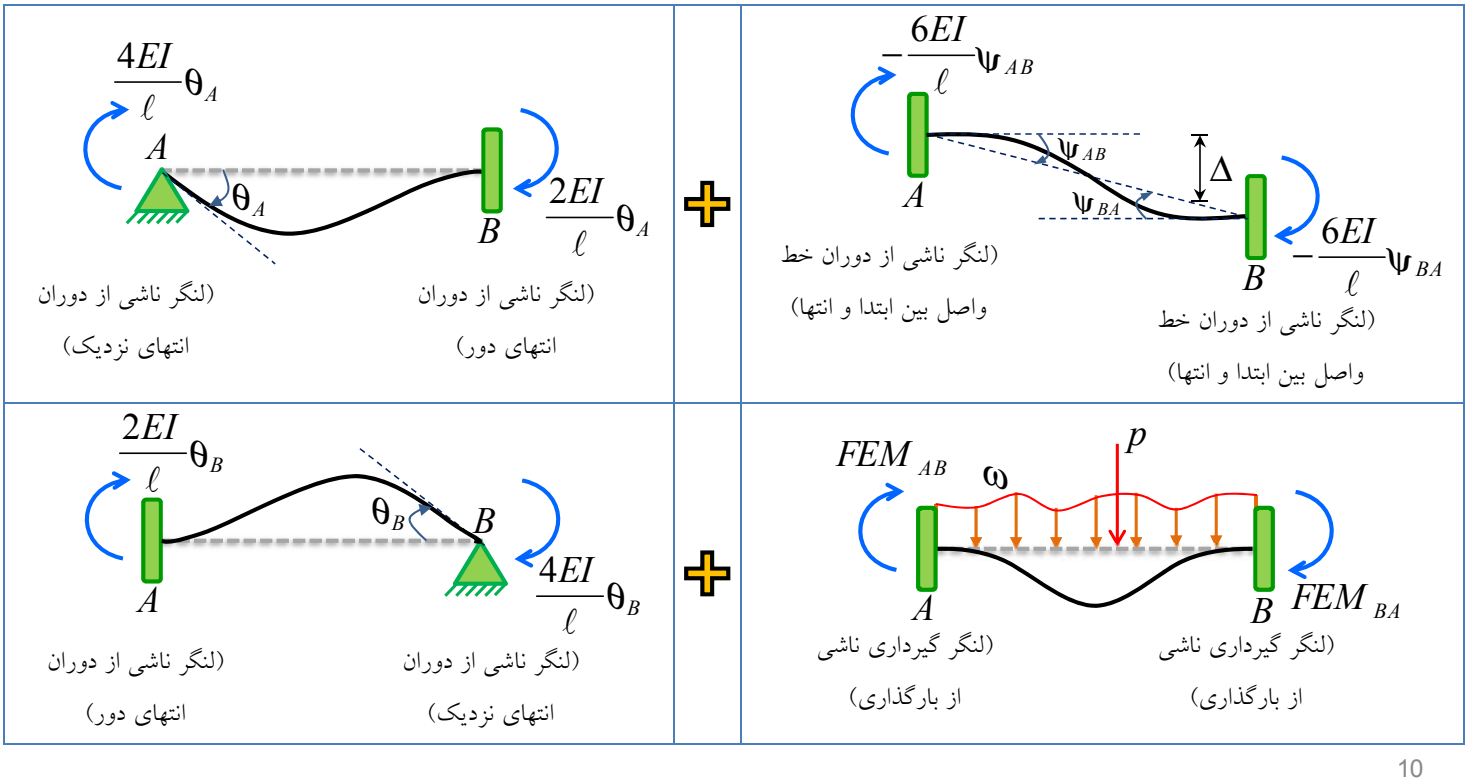
قرارداد علامت‌های مثبت در روش شیب–افت (قانون دست چپ) :

- لنگر مثبت است هرگاه ساعتگرد باشد.
- نیروی برشی مثبت است هرگاه با نیروی برشی آن طرف انحنا، دورانی در جهت عقربه ساعت ایجاد کند.
- شیب یا θ مثبت است هرگاه دوران ساعتگرد باشد.
- ψ مثبت است هرگاه دوران خط واصل بین ابتدا و انتهای تیر در جهت ساعتگرد باشد.

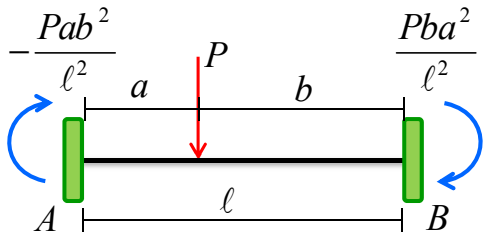
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

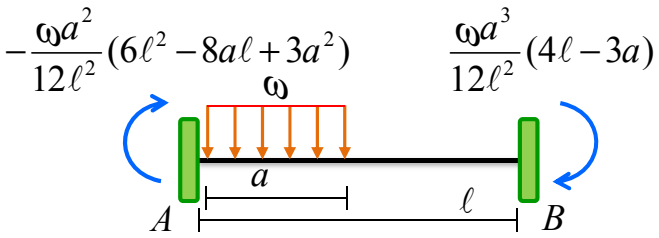
رابطه (۱۶) نشان می‌دهد که لنگر انتهایی هر عضو ترکیبی از چهار لنگر است:

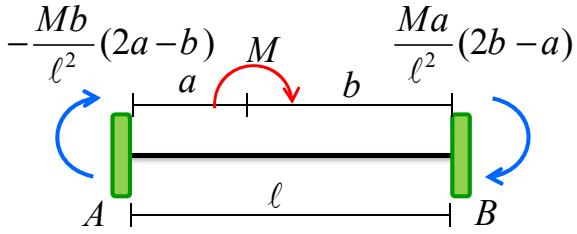
$$(16) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{4EI}{\ell}\theta_A+\frac{2EI}{\ell}\theta_B-\frac{6EI}{\ell}\psi_{AB}+FEM_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{4EI}{\ell}\theta_B+\frac{2EI}{\ell}\theta_A-\frac{6EI}{\ell}\psi_{BA}+FEM_{BA} \end{aligned}$$

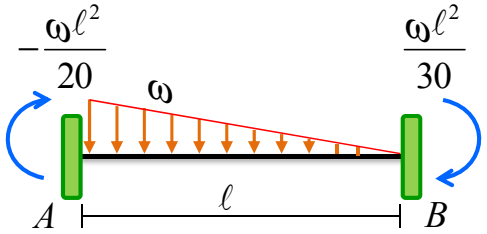


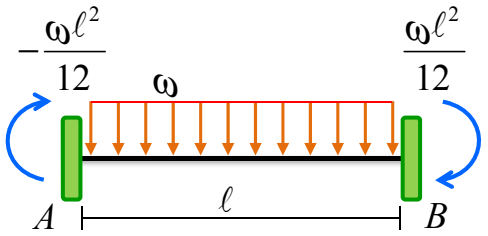
لنگرهای گیرداری تعدادی از بارگذاری‌های پرکاربرد.

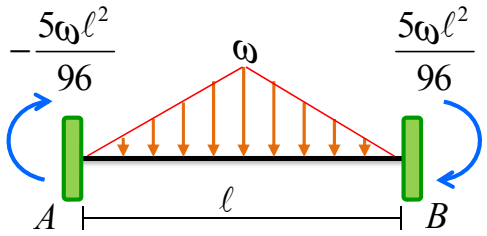






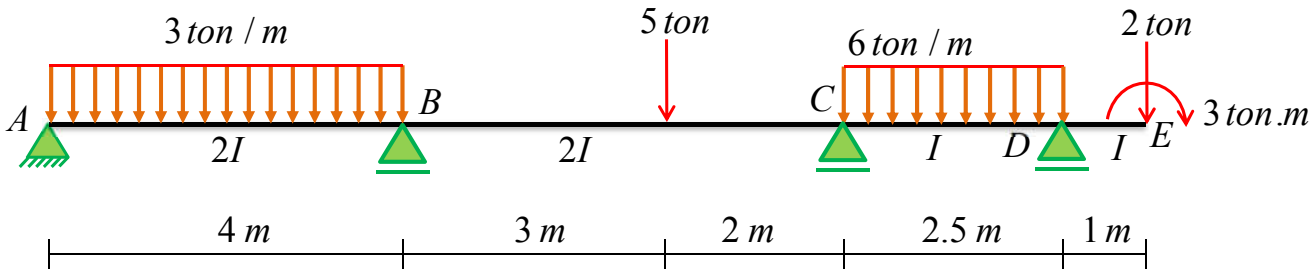






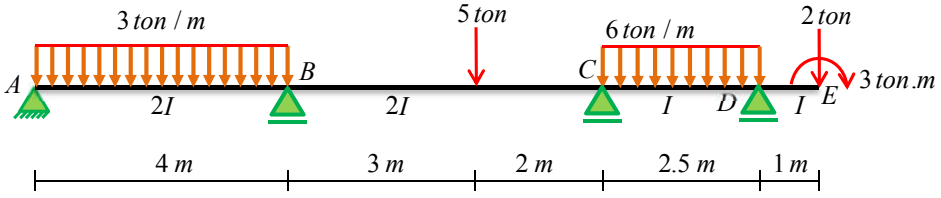
مثال ۱– نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$



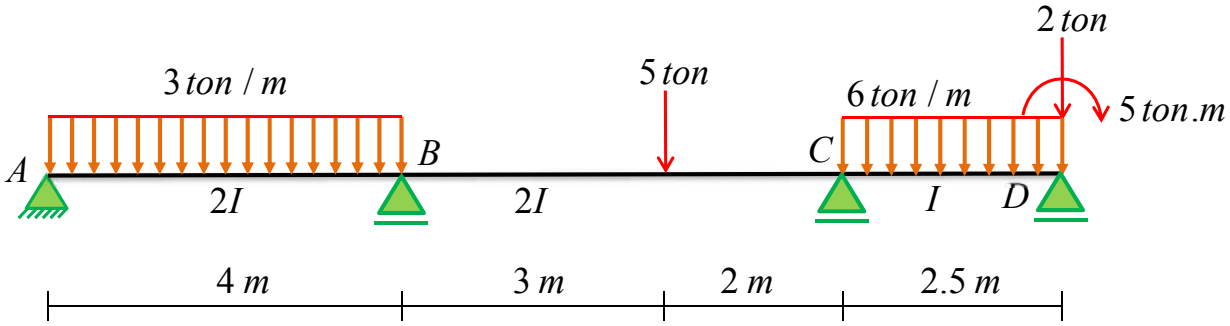
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



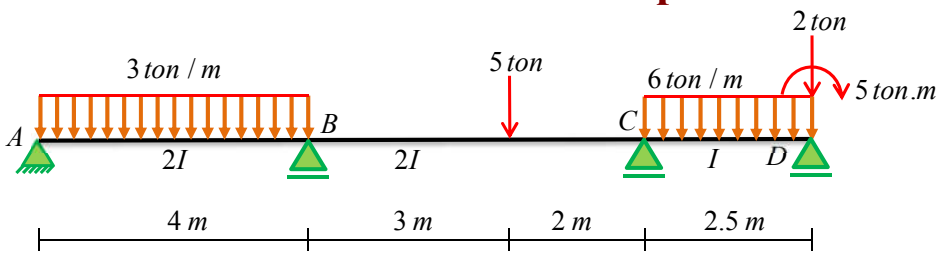
نکته: از آن‌جایی که کنسول یک سازه معین است از این رو لنگر و نیروی معادل کنسول را به گره D منتقل نموده و کنسول وارد حل معادلات شیب–افت نمی‌شود.

$$M_D = 2\times 1+3 \Rightarrow \boxed{M_D = 5\,ton.m}$$



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$\Rightarrow \boxed{k_{BA} = k_{AB} = 100\,ton.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{CB} = k_{BC} = 80\,ton.m}$$

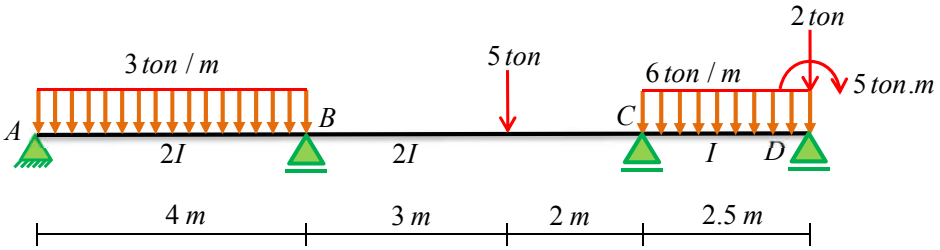
$$k_{DC} = k_{CD} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CD} = \frac{EI}{\ell_{CD}} = \frac{200}{2.5} \Rightarrow \boxed{k_{DC} = k_{CD} = 80\,ton.m}$$

محاسبه ψ اعضا:

$$\psi_{BC} = \psi_{CB} = 0$$
$$\psi_{DC} = \psi_{CD} = 0$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -4\,ton.m$$

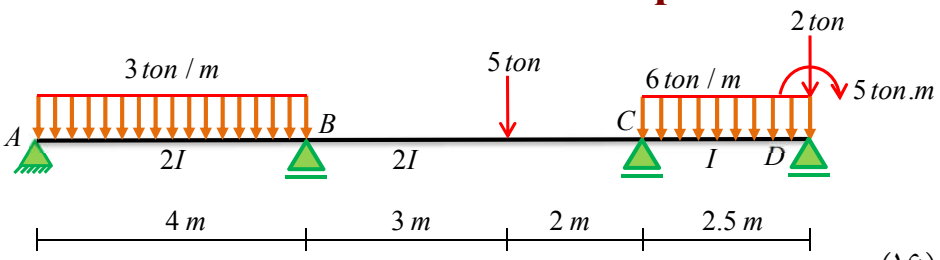
$$FEM_{BC} = -2.4\,ton.m$$

$$FEM_{CB} = 3.6\,ton.m$$

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{\omega \ell^2}{12} = -\frac{6(2.5)^2}{12} \Rightarrow FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -3.125\,ton.m$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{BC} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} \Rightarrow M_{BC} = k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC}$$

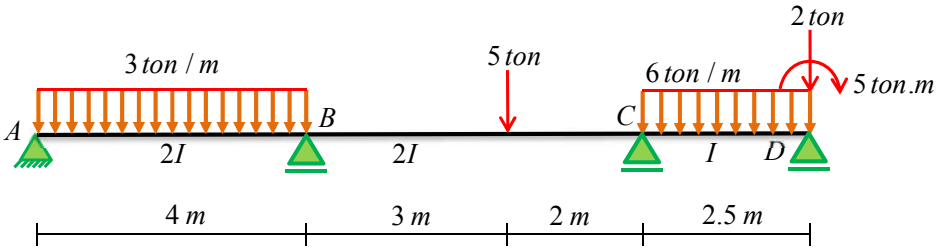
$$M_{CB} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CB}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} \Rightarrow M_{CB} = k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB}$$

$$M_{CD} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CD}\left(2\theta_C + \theta_D - 3\psi_{CD}\right) + FEM_{CD} \Rightarrow M_{CD} = k_{CD}\left(4\theta_C + 2\theta_D - 6\psi_{CD}\right) + FEM_{CD}$$

$$M_{DC} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{DC}\left(2\theta_D + \theta_C - 3\psi_{DC}\right) + FEM_{DC} \Rightarrow M_{DC} = k_{DC}\left(4\theta_D + 2\theta_C - 6\psi_{DC}\right) + FEM_{DC}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



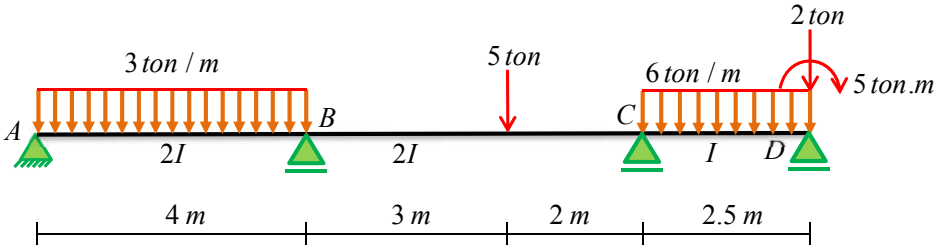
لنگر ابتدا و انتهای اعضا در رابطه (1.1) به طور خلاصه آمده است:

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= k_{AB}\left(4\theta_A + 2\theta_B - 6\psi_{AB}\right) + FEM_{AB}\\
M_{BA} &= k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_{BA}\right) + FEM_{BA}\\
M_{BC} &= k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC}\\
M_{CB} &= k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB}\\
M_{CD} &= k_{CD}\left(4\theta_C + 2\theta_D - 6\psi_{CD}\right) + FEM_{CD}\\
M_{DC} &= k_{DC}\left(4\theta_D + 2\theta_C - 6\psi_{DC}\right) + FEM_{DC}
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

نوشتن معادلات تعادل در هر گره:

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



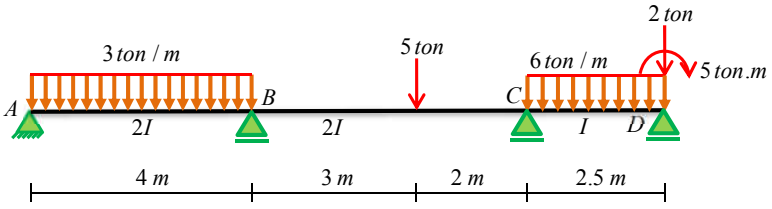
مقادیر لنگر در روابط (1.1) در معادلات (1.2) جایگذاری می‌شوند:

$$
(1.1)\rightarrow(1.2) \quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&k_{AB}\left(4\theta_A + 2\theta_B - 6\psi_{AB}\right) + FEM_{AB} = 0\\
&k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_{BA}\right) + FEM_{BA} + k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} = 0\\
&k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} + k_{CD}\left(4\theta_C + 2\theta_D - 6\psi_{CD}\right) + FEM_{CD} = 0\\
&k_{DC}\left(4\theta_D + 2\theta_C - 6\psi_{DC}\right) + FEM_{DC} = M_D
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

$(1.3) \Rightarrow$ با ساده سازی معادلات (1.3) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&4k_{AB}\theta_A + 2k_{AB}\theta_B = 6k_{AB}\psi_{AB} - FEM_{AB}\\
&2k_{BA}\theta_A + (4k_{BA} + 4k_{BC})\theta_B + 2k_{BC}\theta_C = 6k_{BA}\psi_{BA} + 6k_{BC}\psi_{BC} - FEM_{BA} - FEM_{BC}\\
&2k_{CB}\theta_B + (4k_{CB} + 4k_{CD})\theta_C + 2k_{CD}\theta_D = 6k_{CB}\psi_{CB} + 6k_{CD}\psi_{CD} - FEM_{CB} - FEM_{CD}\\
&2k_{DC}\theta_C + 4k_{DC}\theta_D = M_D + 6k_{DC}\psi_{DC} - FEM_{DC}
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱–

فرم ماتریسی معادلات (1.4) به صورت زیر نوشته می‌شود:

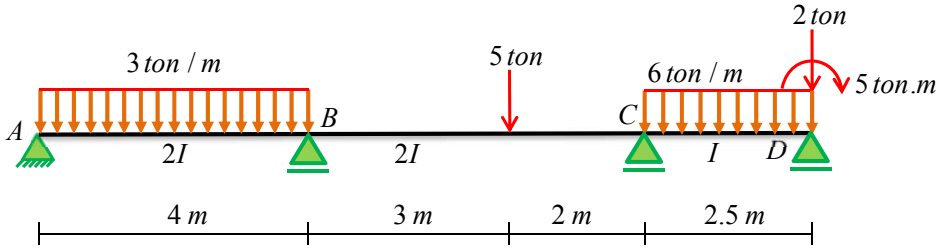
(1.4) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4k_{AB} & 2k_{AB} & 0 & 0 \\ 2k_{BA} & 4k_{BA}+4k_{BC} & 2k_{BC} & 0 \\ 0 & 2k_{CB} & 4k_{CB}+4k_{CD} & 2k_{CD} \\ 0 & 0 & 2k_{DC} & 4k_{DC} \end{bmatrix} \end{array}\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6k_{AB}\psi_{AB} - FEM_{AB} \\ 6k_{BA}\psi_{BA} + 6k_{BC}\psi_{BC} - FEM_{BA} - FEM_{BC} \\ 6k_{CB}\psi_{CB} + 6k_{CD}\psi_{CD} - FEM_{CB} - FEM_{CD} \\ M_D + 6k_{DC}\psi_{DC} - FEM_{DC} \end{Bmatrix}\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \qquad (1.5)$$

با جایگذاری مقادیر هر یک از پارامترها در رابطه (1.5) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 4(100) & 2(100) & 0 & 0 \\ 2(100) & 4(100)+4(80) & 2(80) & 0 \\ 0 & 2(80) & 4(80)+4(80) & 2(80) \\ 0 & 0 & 2(80) & 4(80) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6(100)(0)-(-4) \\ 6(100)(0)+6(80)(0)-(4)-(-2.4) \\ 6(80)(0)+6(80)(0)-(3.6)-(-3.125) \\ (5)+6(80)(0)-(3.125) \end{Bmatrix} \qquad (1.6)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱–

با ساده سازی رابطه (1.6) خواهیم داشت:

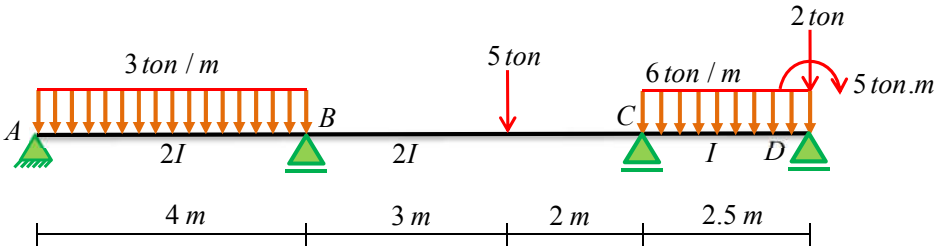
$$\begin{bmatrix} 400 & 200 & 0 & 0 \\ 200 & 720 & 160 & 0 \\ 0 & 160 & 640 & 160 \\ 0 & 0 & 160 & 320 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1.6 \\ -0.475 \\ 1.875 \end{Bmatrix} \qquad (1.7)$$

با حل رابطه (1.7) نتیجه می‌شود:

$$(1.7) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 0 & 0 \\ 200 & 720 & 160 & 0 \\ 0 & 160 & 640 & 160 \\ 0 & 0 & 160 & 320 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 4 \\ -1.6 \\ -0.475 \\ 1.875 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 127.83 \\ -55.66 \\ -9.32 \\ 63.25 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}\ (rad) \qquad (1.8)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



با جایگذاری θ‌های به دست آمده از رابطه (1.8) مقادیر لنگرهای ابتدا و انتهای تیرها به دست می‌آید:

$(1.8) \rightarrow (1.1)$

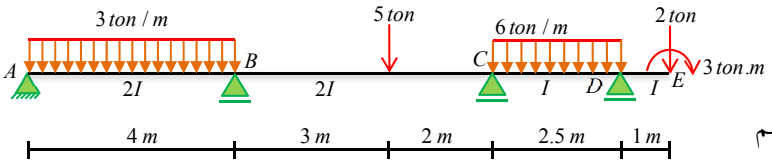
$$M_{BC} = k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} = 80\times\left(4(-55.66\times10^{-4}) + 2(-9.32\times10^{-4}) - 6(0)\right) - 2.4 \Rightarrow \boxed{M_{BC} = -4.33\,ton.m}$$

$$M_{CB} = k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} = 80\times\left(4(-9.32\times10^{-4}) + 2(-55.66\times10^{-4}) - 6(0)\right) + 3.6 \Rightarrow \boxed{M_{CB} = 2.41\,ton.m}$$

$$M_{CD} = k_{CD}\left(4\theta_C + 2\theta_D - 6\psi_{CD}\right) + FEM_{CD} = 80\times\left(4(-9.32\times10^{-4}) + 2(63.25\times10^{-4}) - 6(0)\right) - 3.125 \Rightarrow \boxed{M_{CD} = -2.41\,ton.m}$$

$$M_{DC} = k_{DC}\left(4\theta_D + 2\theta_C - 6\psi_{DC}\right) + FEM_{DC} = 80\times\left(4(63.25\times10^{-4}) + 2(-9.32\times10^{-4}) - 6(0)\right) + 3.125 \Rightarrow \boxed{M_{DC} = 5\,ton.m}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱– برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

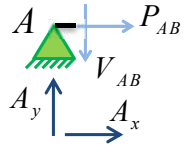


Fig 2

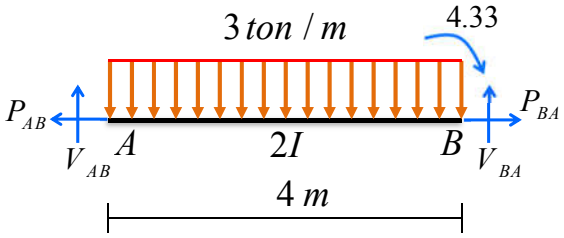


Fig 3

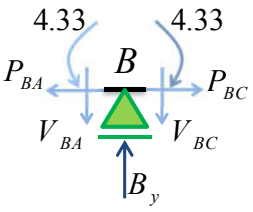


Fig 4

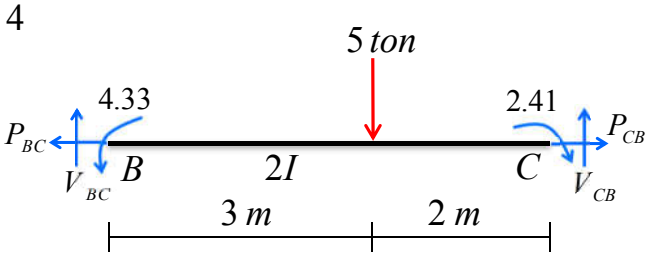


Fig 5

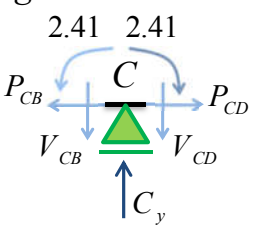


Fig 6

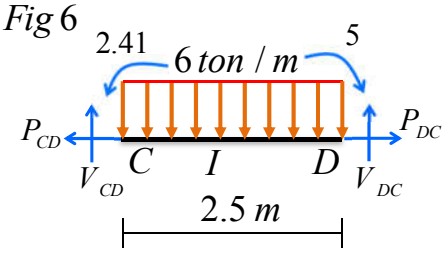


Fig 7

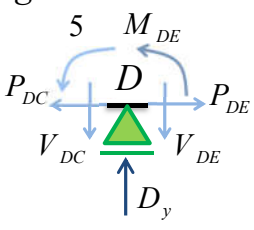


Fig 8

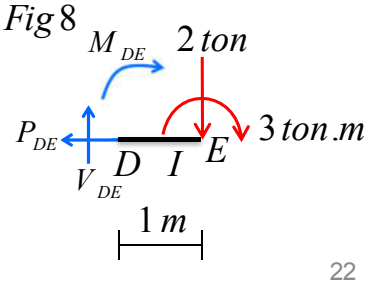
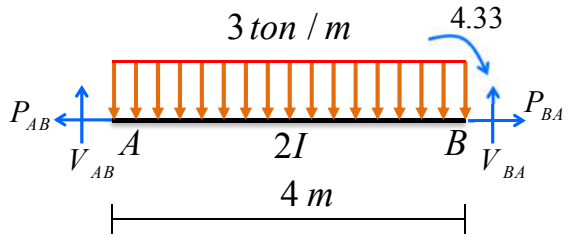


Fig 2



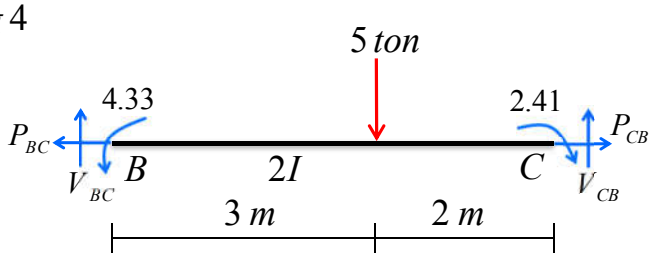
پاسخ مثال ۱–

با بررسی شکل (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(3\times 4)\times(\frac{4}{2}) - 4.33 + V_{BA}\times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 7.083\, ton} \quad (1.9)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - (3\times 4) + V_{BA} = 0 \overset{(1.9)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 4.918\, ton} \quad (1.10)$$

Fig 4

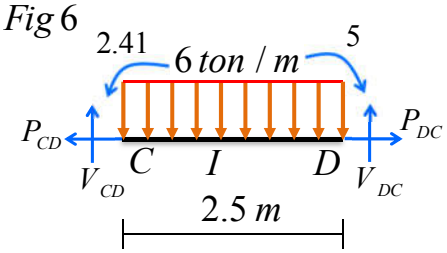


با بررسی شکل (۴) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -5\times 3 - 2.41 + 4.33 + V_{CB}\times 5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = 2.616\, ton} \quad (1.11)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} - 5 + V_{CB} = 0 \overset{(1.11)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 2.384\, ton} \quad (1.12)$$

Fig 6



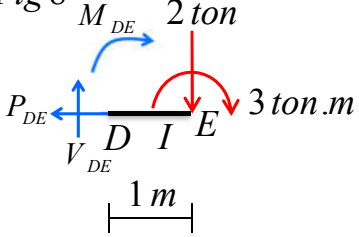
پاسخ مثال ۱–

با بررسی شکل (۶) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -(6\times 2.5)\times(\frac{2.5}{2}) - 5 + 2.41 + V_{DC}\times 2.5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{DC} = 8.536\, ton} \quad (1.13)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD} - (6\times 2.5) + V_{DC} = 0 \overset{(1.13)}{\Rightarrow} \boxed{V_{CD} = 6.464\, ton} \quad (1.14)$$

Fig 8



با بررسی شکل (۸) نتیجه می‌شود:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{DE} - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{DE} = 2\, ton} \quad (1.15)$$

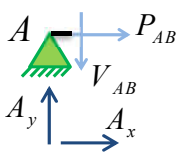
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{DE} = 0} \quad (1.16)$$

$$(1.16) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{DC} &= P_{CD} = 0 \\ P_{BC} &= P_{CB} = 0 \\ P_{AB} &= P_{BA} = 0 \end{aligned}} \quad (1.17)$$

پاسخ مثال ۱–

با بررسی شکل (۱) نتیجه می‌شود:

Fig 1

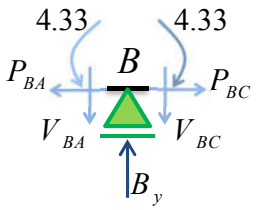


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(1.17)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(1.10)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 4.918\ ton}$$

با بررسی شکل (۳) نتیجه می‌شود:

Fig 3

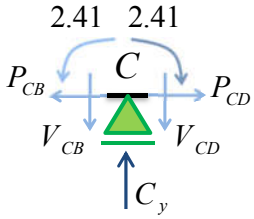


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(1.9)\,\&\,(1.12)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 9.467\ ton}$$

پاسخ مثال ۱–

با بررسی شکل (۵) نتیجه می‌شود:

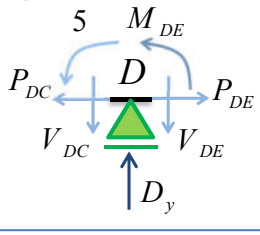
Fig 5



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} + V_{CD} \overset{(1.11)\,\&\,(1.14)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 9.08\ ton}$$

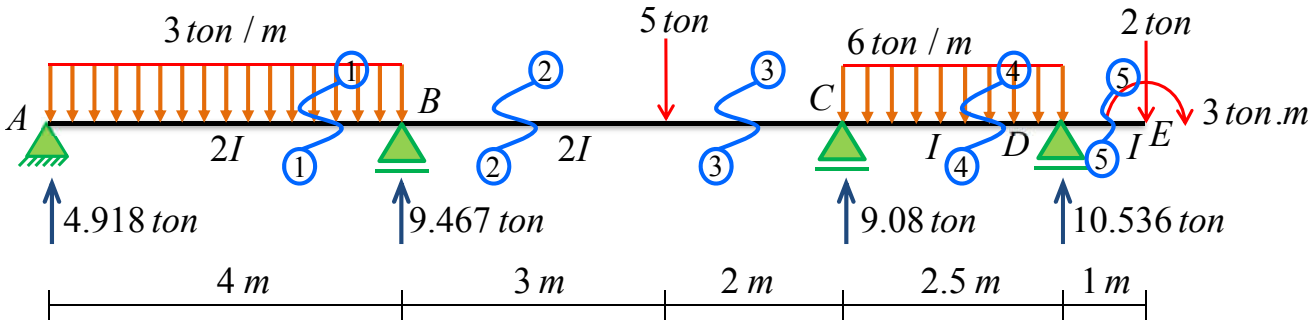
با بررسی شکل (۷) نتیجه می‌شود:

Fig 7

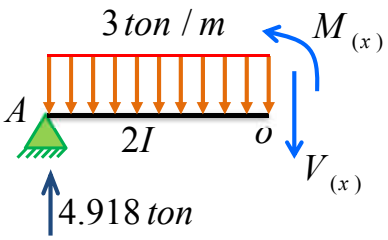


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y = V_{DC} + V_{DE} \overset{(1.13)\,\&\,(1.15)}{\Rightarrow} \boxed{D_y = 10.536\ ton}$$

پاسخ مثال ۱–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱–۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (3\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 4.918\times x = 0$$

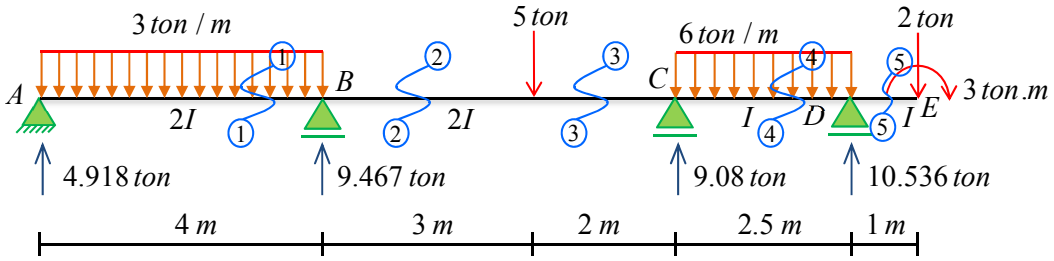
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 4.918x}$$

$$0 \le x \le 4$$

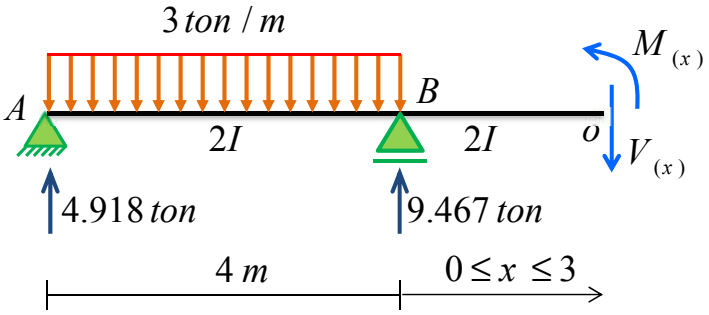
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - (3\times x) + 4.918 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -3x + 4.918}$$

پاسخ مثال ۱–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲–۲ خواهیم داشت:



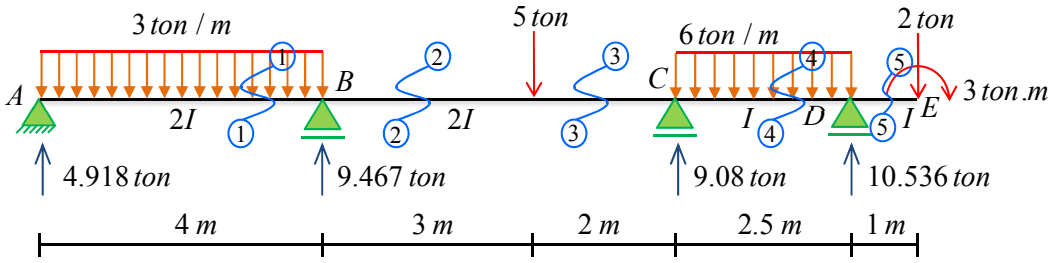
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow$$

$$M_{(x)} + (3\times 4)\times\left(\frac{4}{2}+x\right) - 4.918\times(4+x) - 9.467\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2.385x - 4.328}$$

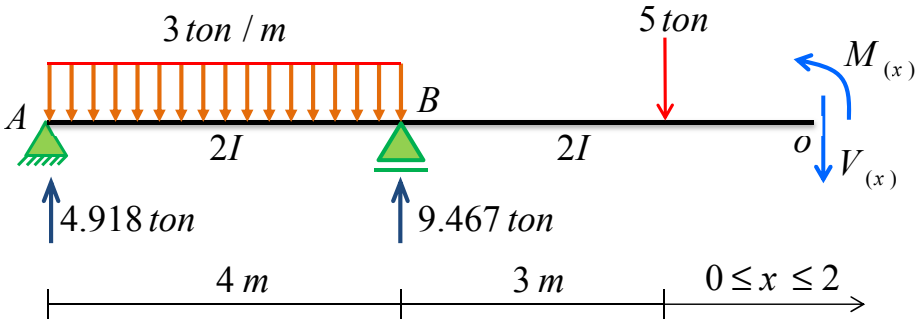
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - (3\times 4) + 4.918 + 9.467 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2.385}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳–۳ خواهیم داشت:



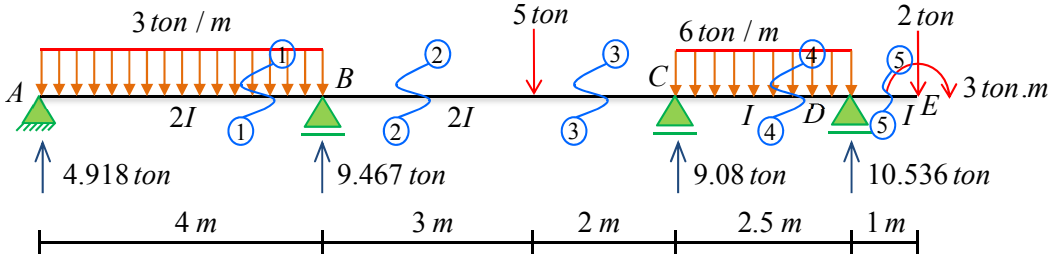
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_{(x)} + (3\times4)\times(5+x) + 5\times x - 4.918\times(7+x) - 9.467\times(3+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -2.615x + 2.827}$$

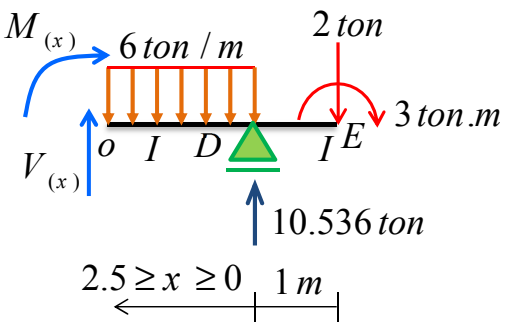
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - (3\times4) - 5 + 4.918 + 9.467 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -2.615}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۴–۴ خواهیم داشت:



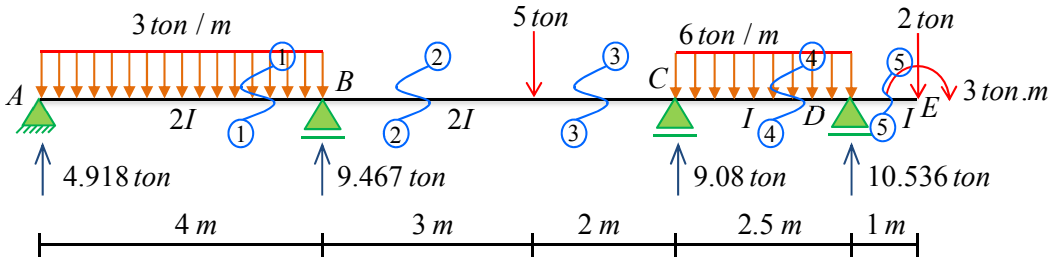
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-M_{(x)} - (6\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 2\times(1+x) - 3 + 10.536\times x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -3x^2 + 8.536x - 5}$$

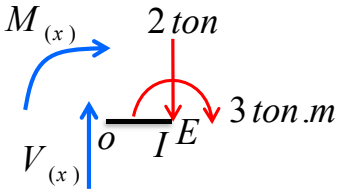
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{(x)} - (6\times x) - 2 + 10.536 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 6x - 8.536}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۵–۵ خواهیم داشت:



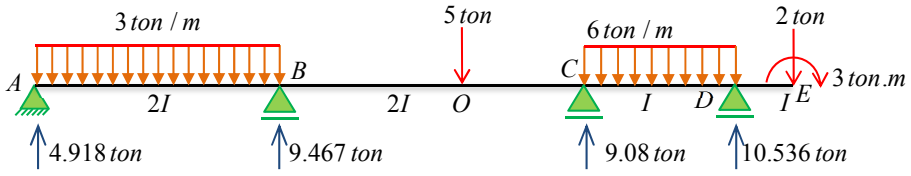
$1 \geq x \geq 0$

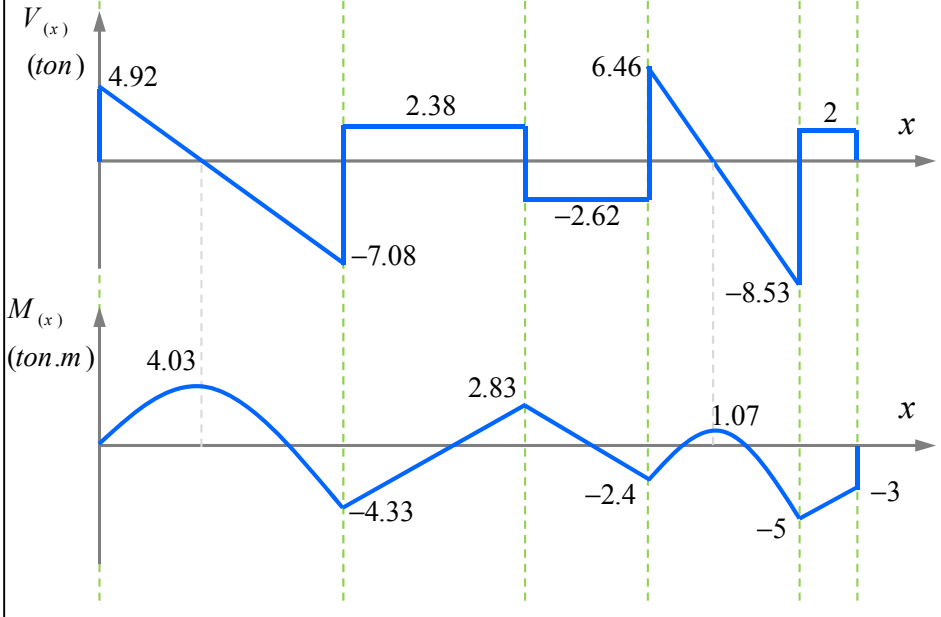
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 2\times x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -2x - 3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2\ ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱–





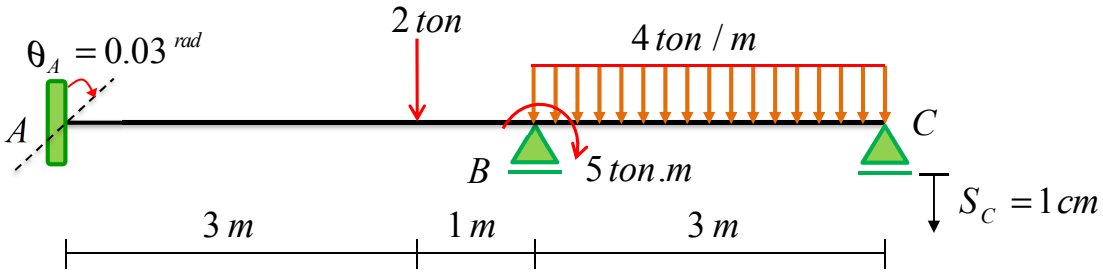
$AB:$	$0 \leq x \leq 4$	$V_{(x)} = -3x + 4.918$
$BO:$	$0 \leq x \leq 3$	$V_{(x)} = 2.385$
$OC:$	$0 \leq x \leq 2$	$V_{(x)} = -2.615$
$DC:$	$2.5 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = 6x - 8.536$
$ED:$	$1 \geq x \geq 0$	$V_{(x)} = 2\ ton$

$AB:$	$0 \leq x \leq 4$	$M_{(x)} = -1.5x^2 + 4.918x$
$BO:$	$0 \leq x \leq 3$	$M_{(x)} = 2.385x - 4.328$
$OC:$	$0 \leq x \leq 2$	$M_{(x)} = -2.615x + 2.827$
$DC:$	$2.5 \geq x \geq 0$	$M_{(x)} = -3x^2 + 8.536x - 5$
$ED:$	$1 \geq x \geq 0$	$M_{(x)} = -2x - 3$

ETABS File Name: **07-Example-01.EDB**

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

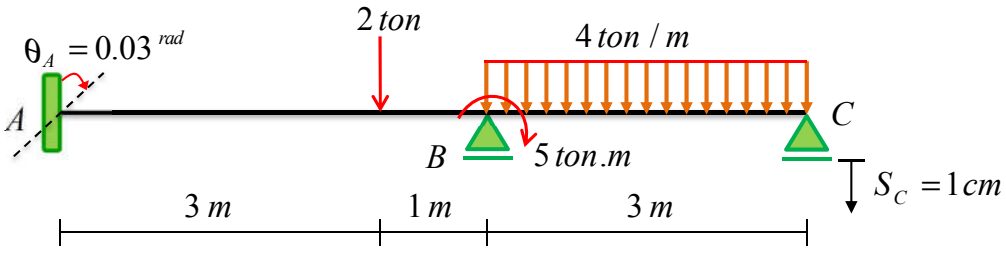
مثال ۲– در تیر نشان داده شده تکیه‌گاه A به اندازه 0.03 رادیان در جهت ساعتگرد دوران داشته است و علاوه بر آن تکیه‌گاه C نیز به اندازه 1 cm در جهت قائم به سمت پایین نشست می‌کند. نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.



$$EI = 200\ \ ton.m^2$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



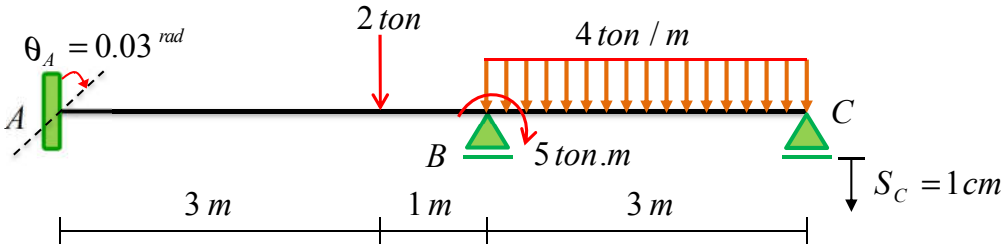
محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$k_{BA} = k_{AB} = 50\,ton.m$$

$$k_{CB} = k_{BC} = \frac{200}{3}\,ton.m$$

محاسبه ۷ اعضا:

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۲–

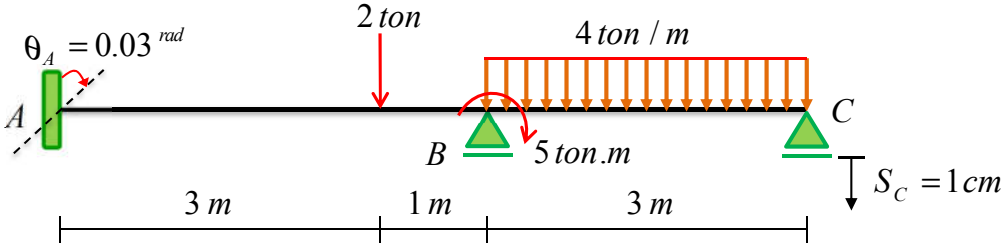
محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$FEM_{AB} = -0.375\ ton.m$$

$$FEM_{BA} = 1.125\ ton.m$$

$$FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -3\ ton.m$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۲–

نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{AB} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{AB}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}\right) + FEM_{AB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{AB} = k_{AB}\left(4\theta_A + 2\theta_B - 6\psi_{AB}\right) + FEM_{AB}}$$

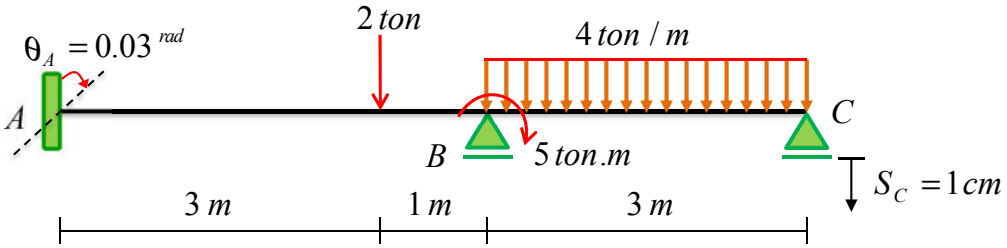
$$M_{BA} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BA}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{BA}\right) + FEM_{BA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{BA} = k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_{BA}\right) + FEM_{BA}}$$

$$M_{BC} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{BC} = k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC}}$$

$$M_{CB} = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CB}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{CB} = k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB}}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



لنگر ابتدا و انتهای اعضا در رابطه (2.1) به طور خلاصه آمده است:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB}\left(4\theta_A + 2\theta_B - 6\psi_{AB}\right) + FEM_{AB} \\ M_{BA} &= k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_{BA}\right) + FEM_{BA} \\ M_{BC} &= k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} \\ M_{CB} &= k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

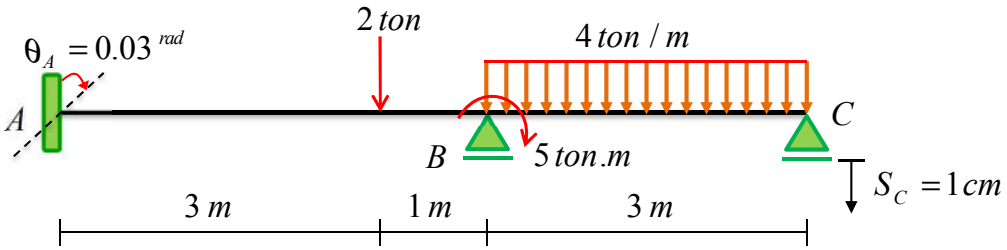
نوشتن معادلات تعادل در هر گره:

(2.2)

مجهولات

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



مقادیر لنگر در روابط (2.1) در معادلات (2.2) جایگذاری می‌شوند:

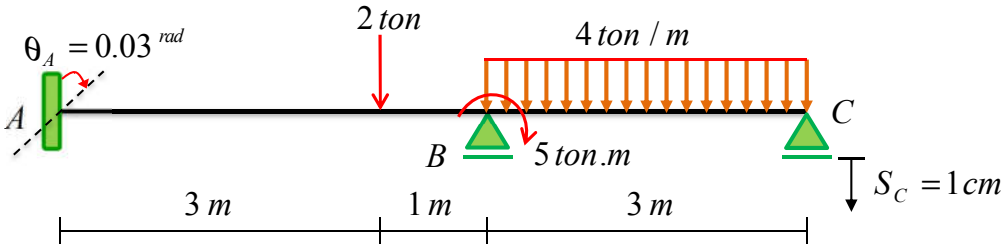
$$(2.1) \rightarrow (2.2) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_{BA}\right) + FEM_{BA} + k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} = 5 \\ & k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} = 0 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

$(2.3) \Rightarrow$ با ساده سازی معادلات (2.3) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & (4k_{BA} + 4k_{BC})\theta_B + 2k_{BC}\theta_C = 5 - 2k_{BA}\theta_A + 6k_{BA}\psi_{BA} + 6k_{BC}\psi_{BC} - FEM_{BA} - FEM_{BC} \\ & 2k_{CB}\theta_B + 4k_{CB}\theta_C = 6k_{CB}\psi_{CB} - FEM_{CB} \end{aligned} \qquad (2.4)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



فرم ماتریسی معادلات (2.4) به صورت زیر نوشته می‌شود:

(2.4) $\Rightarrow$

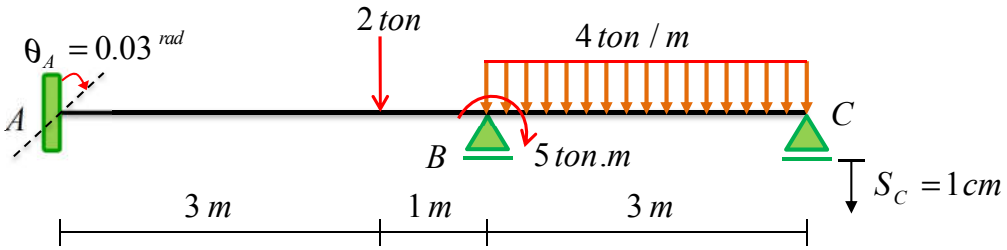
$$\begin{matrix} & B & C \\ B \\ C \end{matrix}\begin{bmatrix} 4k_{BA}+4k_{BC} & 2k_{BC} \\ 2k_{CB} & 4k_{CB} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_B \\ \theta_C\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5-2k_{BA}\theta_A+6k_{BA}\psi_{BA}+6k_{BC}\psi_{BC}-FEM_{BA}-FEM_{BC} \\ 6k_{CB}\psi_{CB}-FEM_{CB}\end{Bmatrix}\begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \qquad (2.5)$$

با جایگذاری مقادیر هر یک از پارامترها در رابطه (2.5) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 4(50)+4\left(\frac{200}{3}\right) & 2\left(\frac{200}{3}\right) \\ 2\left(\frac{200}{3}\right) & 4\left(\frac{200}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_B \\ \theta_C\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5-2(50)(0.03)+6(50)(0)+6\left(\frac{200}{3}\right)\left(\frac{0.01}{3}\right)-(1.125)-(-3) \\ 6\left(\frac{200}{3}\right)\left(\frac{0.01}{3}\right)-(3)\end{Bmatrix} \qquad (2.6)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



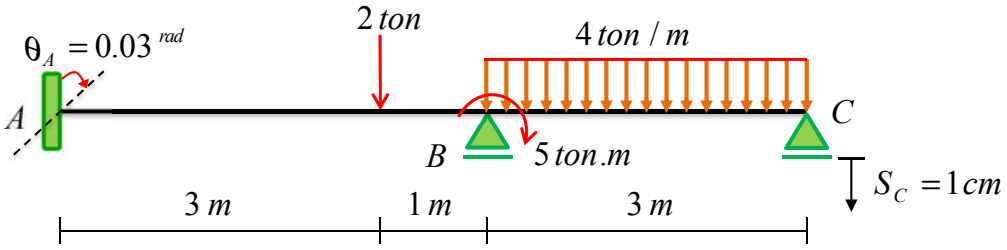
با ساده سازی رابطه (2.6) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 466.667 & 133.333 \\ 133.333 & 266.667 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_B \\ \theta_C\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.208 \\ -1.667\end{Bmatrix} \qquad (2.7)$$

با حل رابطه (2.7) نتیجه می‌شود:

$$(2.7) \Rightarrow \begin{Bmatrix}\theta_B \\ \theta_C\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 466.667 & 133.333 \\ 133.333 & 266.667 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 5.208 \\ -1.667\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\theta_B \\ \theta_C\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.1042 \\ -13.8021\end{Bmatrix}\times 10^{-3}\ (rad) \qquad (2.8)$$

پاسخ مثال ۲–



با جایگذاری θهای به دست آمده از رابطه (2.8) مقادیر لنگرهای ابتدا و انتهای تیرها به دست می‌آید:

$(2.8) \rightarrow (2.1)$

$$M_{AB} = k_{AB}\left(4\theta_A + 2\theta_B - 6\psi_{AB}\right) + FEM_{AB} = 50\times\left(4(0.03) + 2(15.1042\times10^{-3}) - 6(0)\right) - 0.375 \Rightarrow \boxed{M_{AB} = 7.135\,ton.m}$$

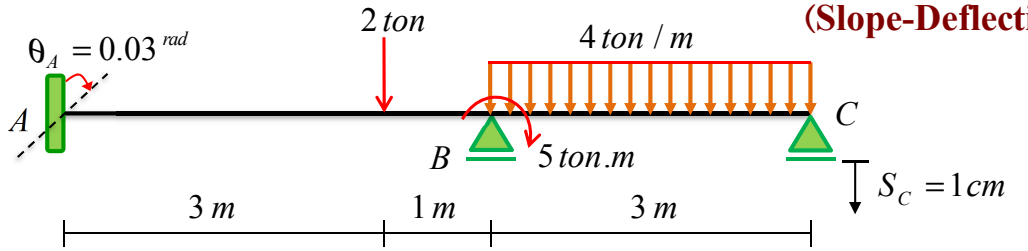
$$M_{BA} = k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_{BA}\right) + FEM_{BA} = 50\times\left(4(15.1042\times10^{-3}) + 2(0.03) - 6(0)\right) + 1.125 \Rightarrow \boxed{M_{BA} = 7.146\,ton.m}$$

$$M_{BC} = k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} =$$

$$\frac{200}{3}\times\left(4(15.1042\times10^{-3}) + 2(-13.8021\times10^{-3}) - 6\left(\frac{0.01}{3}\right)\right) - 3 \Rightarrow \boxed{M_{BC} = -2.146\,ton.m}$$

$$M_{CB} = k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} = \frac{200}{3}\times\left(4(-13.8021\times10^{-3}) + 2(15.1042\times10^{-3}) - 6\left(\frac{0.01}{3}\right)\right) + 3 \Rightarrow \boxed{M_{CB} = 0}$$

پاسخ مثال ۲–



برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی تیرها به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

Fig 1

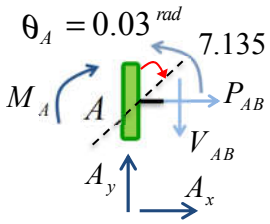


Fig 2

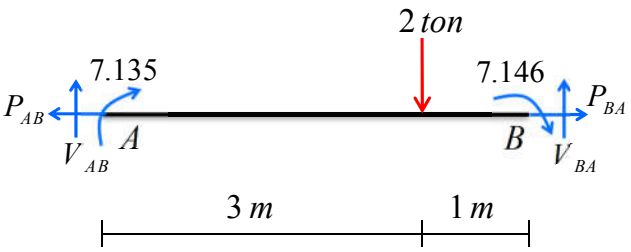


Fig 3

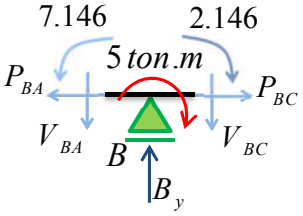


Fig 4

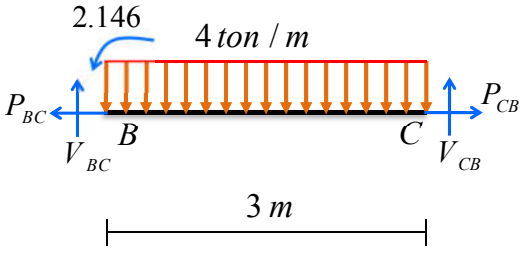
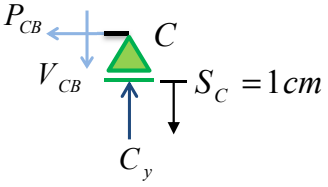


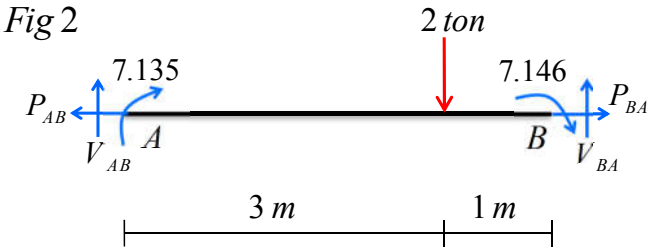
Fig 5



پاسخ مثال ۲–

با بررسی شکل (۲) نتیجه می‌شود:

Fig 2

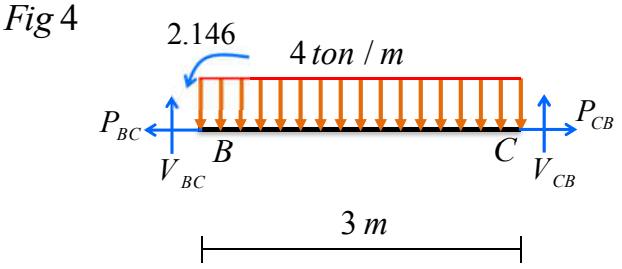


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -2\times 3 - 7.135 - 7.146 + V_{BA}\times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{BA} = 5.07\ ton} \quad (2.9)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} - 2 + V_{BA} = 0 \overset{(2.9)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = -3.07\ ton} \quad (2.10)$$

با بررسی شکل (۴) نتیجه می‌شود:

Fig 4



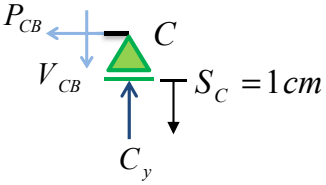
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -(4\times 3)\times\left(\frac{3}{2}\right) + 2.146 + V_{CB}\times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{CB} = 5.285\ ton} \quad (2.11)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} - (4\times 3) + V_{CB} = 0 \overset{(2.11)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 6.715\ ton} \quad (2.12)$$

پاسخ مثال ۲–

با بررسی شکل (۵) نتیجه می‌شود:

Fig 5



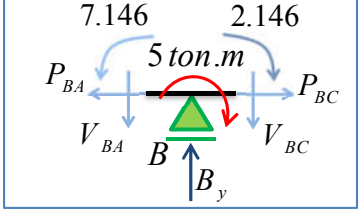
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{CB} = 0} \quad (2.13)$$

$$(2.13) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} P_{BC} = P_{CB} = 0 \\ P_{AB} = P_{BA} = 0 \end{matrix}} \quad (2.14)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = V_{CB} \overset{(2.11)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 5.285\ ton}$$

با بررسی شکل (۳) نتیجه می‌شود:

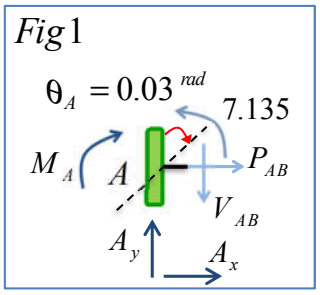
Fig 3



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = V_{BA} + V_{BC} \overset{(2.9)\ \&\ (2.12)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 11.785\ ton}$$

پاسخ مثال ۲–

با بررسی شکل (۱) نتیجه می‌شود:

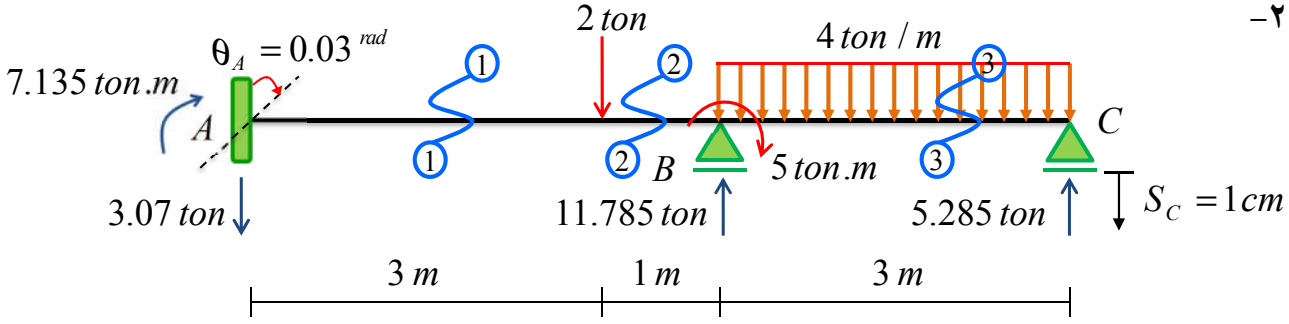


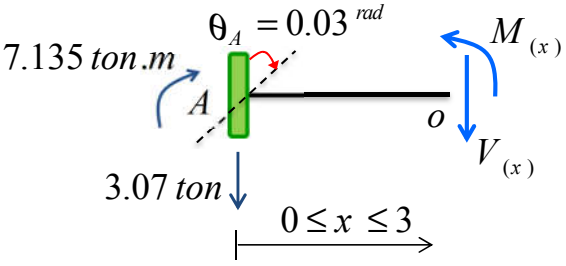
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = V_{AB} \overset{(2.10)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = -3.07\ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_{AB} = 0 \overset{(2.14)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 7.135 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 7.135\ ton.m}$$

پاسخ مثال ۲–





با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱–۱ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 3.07 \times x - 7.135 = 0$$

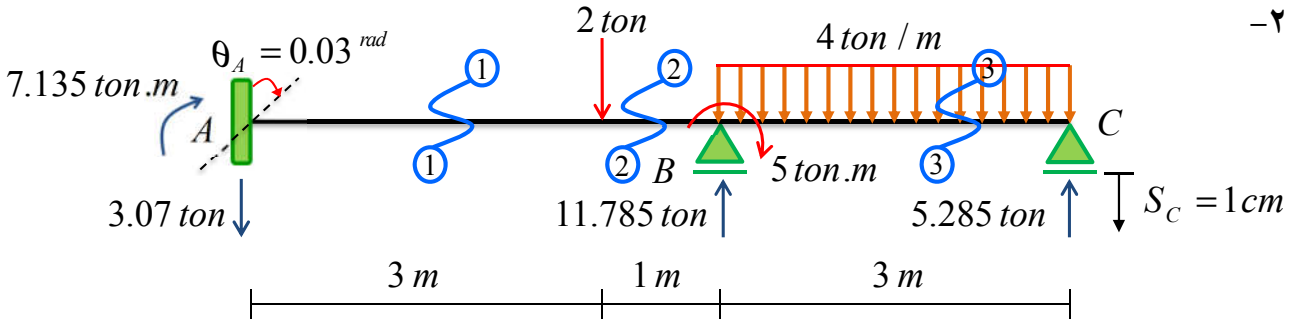
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -3.07x + 7.135}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 3.07 = 0$$

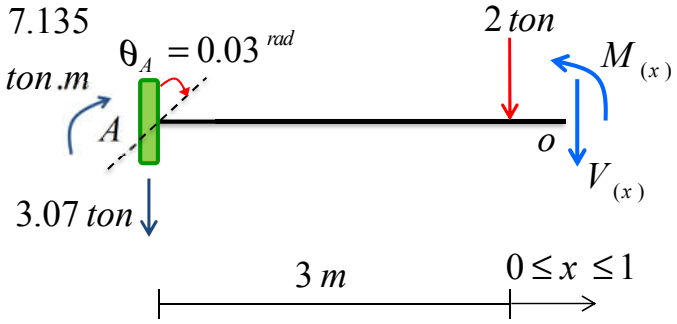
$$\Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -3.07}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲–۲ خواهیم داشت:

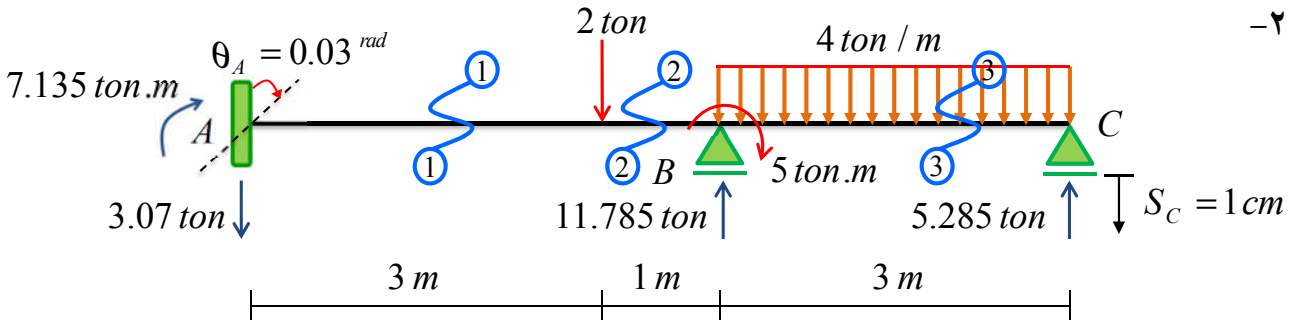


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 2\times x + 3.07\times(3+x) - 7.135 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -5.07x - 2.075}$$

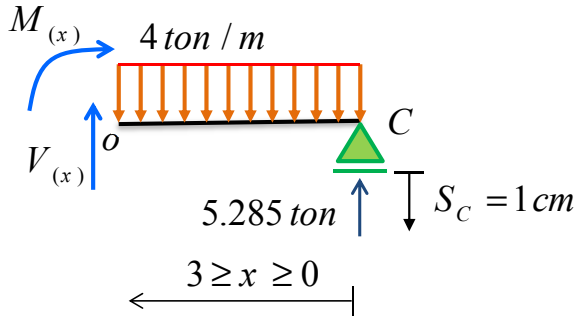
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 2 - 3.07 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5.07}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۳–۳ خواهیم داشت:

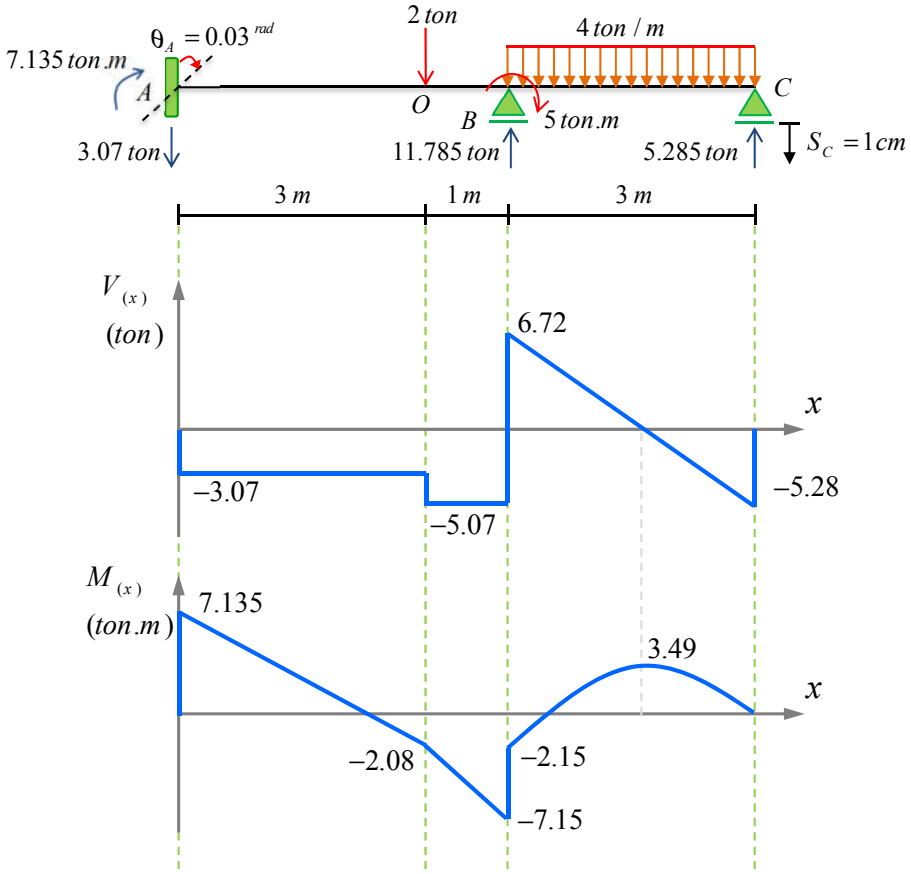


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - (4\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) + 5.285\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -2x^2 + 5.285x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 4\times x + 5.285 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 4x - 5.285}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۲–



$$AO: \quad 0 \le x \le 3 \qquad V_{(x)} = -3.07$$
$$OB: \quad 0 \le x \le 1 \qquad V_{(x)} = -5.07$$
$$CB: \quad 3 \ge x \ge 0 \qquad V_{(x)} = 4x - 5.285$$

$$AO: \quad 0 \le x \le 3 \qquad M_{(x)} = -3.07x + 7.135$$
$$OB: \quad 0 \le x \le 1 \qquad M_{(x)} = -5.07x - 2.075$$
$$CB: \quad 3 \ge x \ge 0 \qquad M_{(x)} = -2x^2 + 5.285x$$

ETABS File Name: **07-Example-02.EDB**

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

مقایسه روش شیب–افت با روش نیروها:

تیر سرتاسری نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.

روش شیب–افت

مجهولات : $(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D) = ?$

معادلات :
$$\begin{cases} M_{AB} = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \\ M_{DC} = 0 \end{cases}$$

$DOI = 2$
$DOF = 4$

روش نیروها

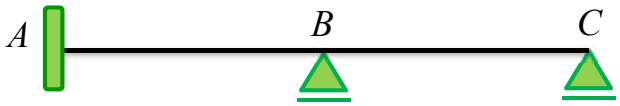
مجهولات : $(R_B, R_C) = ?$

معادلات :
$$\begin{cases} \Delta_{VB} = 0 \\ \Delta_{VC} = 0 \end{cases}$$

روش شیب-افت (Slope-Deflection Method)

مقایسه روش شیب-افت با روش نیروها:

تیر سرتاسری نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



روش شیب-افت

مجهولات : $(\theta_B\ ,\theta_C)=?$

معادلات : $\begin{cases}\sum M_B=0\\ M_{CB}=0\end{cases}$

روش نیروها

مجهولات : $(R_B\ ,R_C)=?$

معادلات : $\begin{cases}\Delta_{VB}=0\\ \Delta_{VC}=0\end{cases}$

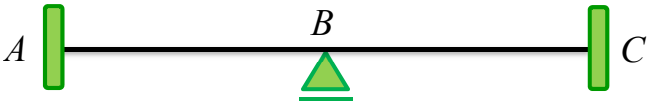
$DOI=2$

$DOF=2$

روش شیب-افت (Slope-Deflection Method)

مقایسه روش شیب-افت با روش نیروها:

تیر سرتاسری نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



روش شیب-افت

مجهولات : $\theta_B=?$

معادلات : $\sum M_B=0$

روش نیروها

مجهولات : $(R_B\ ,R_{Cx}\ ,R_{Cy}\ ,M_C)=?$

معادلات : $\begin{cases}\Delta_{VB}=0\\ \Delta_{HC}=0\\ \Delta_{VC}=0\\ \Theta_C=0\end{cases}$

$DOI=4$

$DOF=1$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

مقایسه روش شیب–افت با روش نیروها:

می‌توان نتیجه گرفت درجه آزادی با درجه نامعینی رابطه عکس دارد

$$DOI \propto \frac{1}{DOF} \quad (17)$$

DOI : درجه نامعینی (Degree of indeterminacy)

DOF : درجه آزادی (Degree of freedom)

- اگر درجه نامعینی (DOI) زیاد باشد و یا درجه آزادی (DOF) کم باشد روش شیب–افت مناسب‌تر است.
- اگر درجه نامعینی (DOI) کم باشد و یا درجه آزادی (DOF) زیاد باشد روش نیروها مناسب‌تر است.

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

دو روش کلی متفاوت از نظر متدلوژی برای حل سازه‌های نامعین موجود است:

۱– روش نیروها

۲– روش تغییر مکان‌ها

۱– روش نیروها :

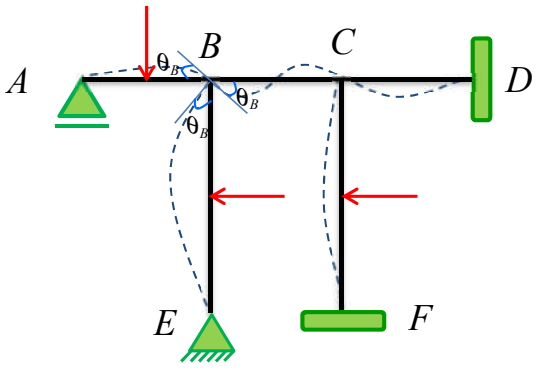
در این روش درجه نامعینی تعیین شده و عکس‌العمل‌های نامعین به عنوان مجهولات انتخاب می‌شود. سپس با توجه به ارتباط نیرو و تغییرمکان، تغییرمکان نقاط خاصی را برحسب همان مجهولات نیرویی تعیین نموده و سپس با توجه به معادلات سازگاری تغییرشکل‌ها مجهولات نیرویی تعیین می‌گردد. به طور مثال، روش حداقل کار، روش اصل اجتماع آثار و روش سه لنگری از این نوع متدولوژی پیروی می‌نمایند.

۲– روش تغییرمکان :

در این روش مجهولات برابر با درجات آزادی (دورانی یا انتقالی) گره‌ها انتخاب می‌شود و با توجه به رابطه بین نیروها و تغییرمکان‌ها در این حالت به محاسبه نیروها می‌پردازیم. سپس، با نوشتن معادلات تعادل در گره‌ها می‌توان مجهولات تغییرمکانی را محاسبه نمود. با محاسبه مجهولات تغییرمکانی، نیروها نیز محاسبه می‌گردد. به طور مثال، روش شیب–افت، روش پخش لنگر و روش کانی از این نوع متدولوژی پیروی می‌نمایند.

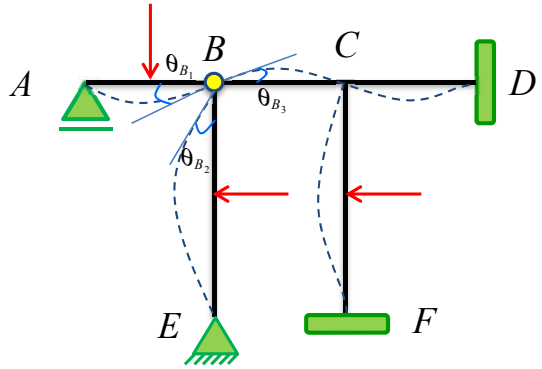
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

کاربرد روش شیب–افت در تحلیل قاب‌های نامعین بدون درجه آزادی انتقالی



مجهولات : $(\theta_A\ ,\theta_B\ ,\theta_C\ ,\theta_E)=?$

معادلات :
$$\begin{cases} M_{AB}=0 \\ \sum M_B=0 \\ \sum M_C=0 \\ M_{EB}=0 \end{cases}$$



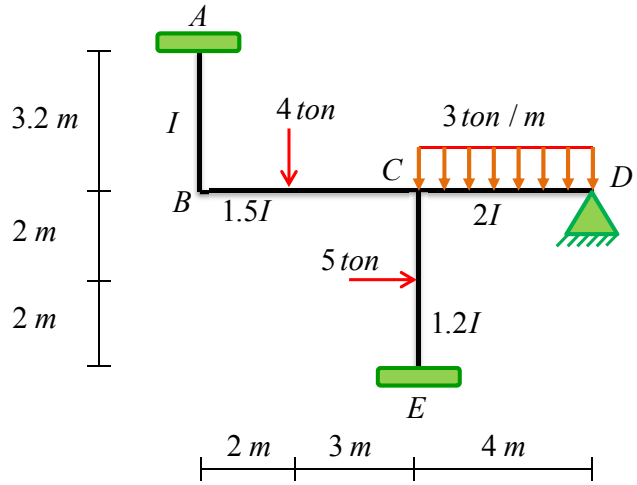
مجهولات : $(\theta_A\ ,\theta_{B_1}\ ,\theta_{B_2}\ ,\theta_{B_3}\ ,\theta_C\ ,\theta_E)=?$

معادلات :
$$\begin{cases} M_{AB}=0 \\ M_{BA}=0 \\ M_{BC}=0 \\ M_{BE}=0 \\ \sum M_C=0 \\ M_{EB}=0 \end{cases}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

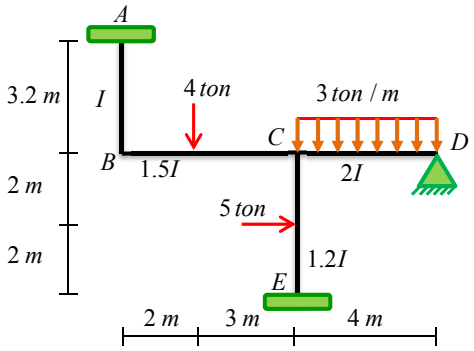
مثال ۳– نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI=200\ \ ton.m^2$$



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۳–



محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$k_{BA} = k_{AB} = 62.5\ ton.m$$

$$k_{CB} = k_{BC} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC} = \frac{E(1.5I)}{\ell_{BC}} = \frac{1.5\times 200}{5} \Rightarrow k_{CB} = k_{BC} = 60\ ton.m$$

$$k_{DC} = k_{CD} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CD} = \frac{E(2I)}{\ell_{CD}} = \frac{2\times 200}{4} \Rightarrow k_{DC} = k_{CD} = 100\ ton.m$$

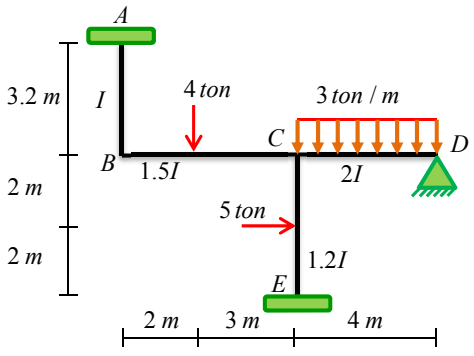
$$k_{CE} = k_{EC} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{CE} = \frac{E(1.2I)}{\ell_{CE}} = \frac{1.2\times 200}{4} \Rightarrow k_{CE} = k_{EC} = 60\ ton.m$$

محاسبه ψ اعضا:

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = 0 \quad , \quad \psi_{DC} = \psi_{CD} = 0$$
$$\psi_{BC} = \psi_{CB} = 0 \quad , \quad \psi_{CE} = \psi_{EC} = 0$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۳–

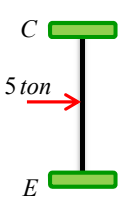


محاسبه لنگرهای گیرداری:

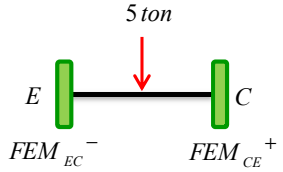
$$FEM_{BC} = -2.88\ ton.m$$

$$FEM_{CB} = 1.92\ ton.m$$

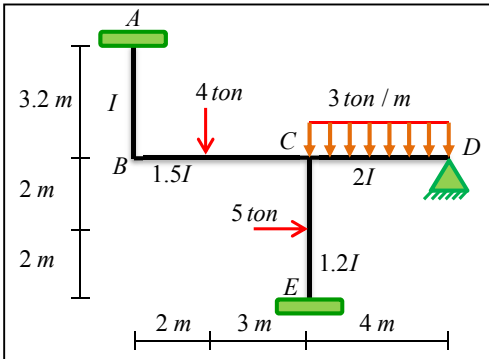
$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -4\ ton.m$$



در جهت متعارف بارگذاری چرخانده شود



$$FEM_{EC} = -FEM_{CE} = -2.5\ ton.m$$



پاسخ مثال ۳–

نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{AB}=2(EI/\ell)_{AB}(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB})+FEM_{AB} \Rightarrow M_{AB}=k_{AB}(4\theta_A+2\theta_B-6\psi_{AB})+FEM_{AB}$$

$$M_{BA}=2(EI/\ell)_{BA}(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{BA})+FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA}=k_{BA}(4\theta_B+2\theta_A-6\psi_{BA})+FEM_{BA}$$

$$M_{BC}=2(EI/\ell)_{BC}(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC})+FEM_{BC} \Rightarrow M_{BC}=k_{BC}(4\theta_B+2\theta_C-6\psi_{BC})+FEM_{BC}$$

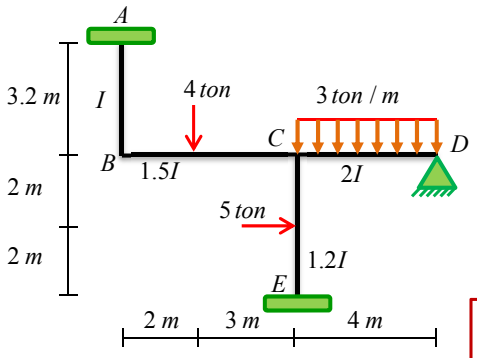
$$M_{CB}=2(EI/\ell)_{CB}(2\theta_C+\theta_B-3\psi_{CB})+FEM_{CB} \Rightarrow M_{CB}=k_{CB}(4\theta_C+2\theta_B-6\psi_{CB})+FEM_{CB}$$

$$M_{CD}=2(EI/\ell)_{CD}(2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD})+FEM_{CD} \Rightarrow M_{CD}=k_{CD}(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_{CD})+FEM_{CD}$$

$$M_{DC}=2(EI/\ell)_{DC}(2\theta_D+\theta_C-3\psi_{DC})+FEM_{DC} \Rightarrow M_{DC}=k_{DC}(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_{DC})+FEM_{DC}$$

$$M_{CE}=2(EI/\ell)_{CE}(2\theta_C+\theta_E-3\psi_{CE})+FEM_{CE} \Rightarrow M_{CE}=k_{CE}(4\theta_C+2\theta_E-6\psi_{CE})+FEM_{CE}$$

$$M_{EC}=2(EI/\ell)_{EC}(2\theta_E+\theta_C-3\psi_{EC})+FEM_{EC} \Rightarrow M_{EC}=k_{EC}(4\theta_E+2\theta_C-6\psi_{EC})+FEM_{EC}$$



پاسخ مثال ۳–

لنگر ابتدا و انتهای اعضا در رابطه (3.1) به طور خلاصه آمده است:

$$\begin{aligned}
M_{AB}&=k_{AB}(4\theta_A+2\theta_B-6\psi_{AB})+FEM_{AB}\\
M_{BA}&=k_{BA}(4\theta_B+2\theta_A-6\psi_{BA})+FEM_{BA}\\
M_{BC}&=k_{BC}(4\theta_B+2\theta_C-6\psi_{BC})+FEM_{BC}\\
M_{CB}&=k_{CB}(4\theta_C+2\theta_B-6\psi_{CB})+FEM_{CB}\\
M_{CD}&=k_{CD}(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_{CD})+FEM_{CD}\\
M_{DC}&=k_{DC}(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_{DC})+FEM_{DC}\\
M_{CE}&=k_{CE}(4\theta_C+2\theta_E-6\psi_{CE})+FEM_{CE}\\
M_{EC}&=k_{EC}(4\theta_E+2\theta_C-6\psi_{EC})+FEM_{EC}
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

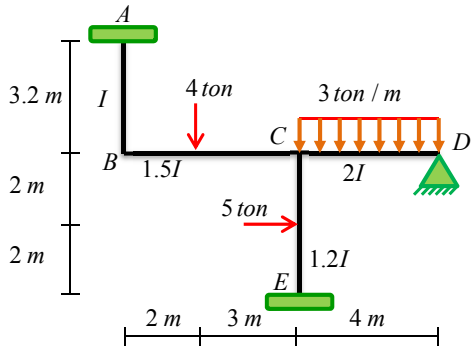
نوشتن معادلات تعادل در هر گره:

مجهولات

(3.2)

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۳–



مقادیر لنگر در روابط (3.1) در معادلات (3.2) جایگذاری می‌شوند:

$$(3.1)\rightarrow(3.2)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&k_{BA}\left(4\theta_B+2\theta_A-6\psi_{BA}\right)+FEM_{BA}+k_{BC}\left(4\theta_B+2\theta_C-6\psi_{BC}\right)+FEM_{BC}=0\\
&k_{CB}\left(4\theta_C+2\theta_B-6\psi_{CB}\right)+FEM_{CB}+k_{CD}\left(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_{CD}\right)+FEM_{CD}+k_{CE}\left(4\theta_C+2\theta_E-6\psi_{CE}\right)+FEM_{CE}=0\\
&k_{DC}\left(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_{DC}\right)+FEM_{DC}=0
\end{aligned}\qquad(3.3)$$

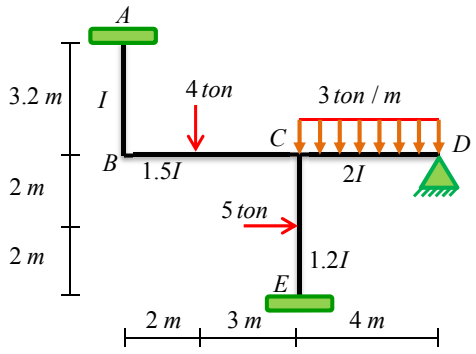
با ساده سازی معادلات (3.3) خواهیم داشت:

$$(3.3)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\left(4k_{BA}+4k_{BC}\right)\theta_B+2k_{BC}\theta_C=-2k_{BA}\theta_A+6k_{BA}\psi_{BA}+6k_{BC}\psi_{BC}-FEM_{BA}-FEM_{BC}\\
&2k_{CB}\theta_B+\left(4k_{CB}+4k_{CD}+4k_{CE}\right)\theta_C+2k_{CD}\theta_D=-2k_{CE}\theta_E+6k_{CB}\psi_{CB}+6k_{CD}\psi_{CD}+6k_{CE}\psi_{CE}-FEM_{CB}-FEM_{CD}-FEM_{CE}\\
&2k_{DC}\theta_C+4k_{DC}\theta_D=6k_{DC}\psi_{DC}-FEM_{DC}
\end{aligned}\qquad(3.4)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۳–



فرم ماتریسی معادلات (3.4) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(3.4)\Rightarrow$$

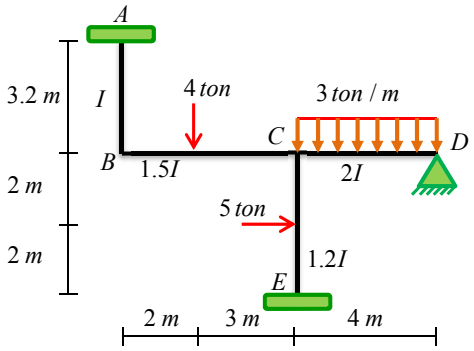
$$(3.5)$$

$$\begin{array}{c} \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4k_{BA}+4k_{BC} & 2k_{BC} & 0 \\ 2k_{CB} & 4k_{CB}+4k_{CD}+4k_{CE} & 2k_{CD} \\ 0 & 2k_{DC} & 4k_{DC} \end{bmatrix} \end{array}\begin{Bmatrix}\theta_B\\ \theta_C\\ \theta_D\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -2k_{BA}\theta_A+6k_{BA}\psi_{BA}+6k_{BC}\psi_{BC}-FEM_{BA}-FEM_{BC} \\ -2k_{CE}\theta_E+6k_{CB}\psi_{CB}+6k_{CD}\psi_{CD}+6k_{CE}\psi_{CE}-FEM_{CB}-FEM_{CD}-FEM_{CE} \\ 6k_{DC}\psi_{DC}-FEM_{DC}\end{Bmatrix}\begin{array}{c}B\\C\\D\end{array}$$

با جایگذاری مقادیر هر یک از پارامترها در رابطه (3.5) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 4(62.5)+4(60) & 2(60) & 0 \\ 2(60) & 4(60)+4(100)+4(60) & 2(100) \\ 0 & 2(100) & 4(100) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_B\\ \theta_C\\ \theta_D\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -2(62.5)(0)+6(62.5)(0)+6(60)(0)-(0)-(-2.88) \\ -2(60)(0)+6(60)(0)+6(100)(0)+6(60)(0)-(1.92)-(-4)-(2.5) \\ 6(100)(0)-(4)\end{Bmatrix}\qquad(3.6)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۳–

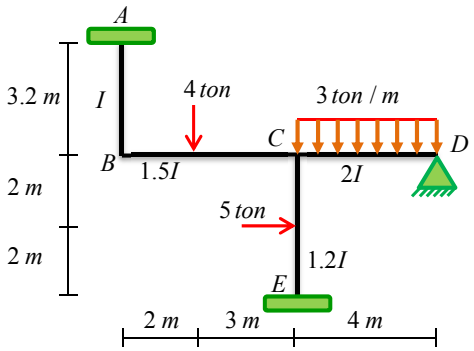
با ساده سازی رابطه (3.6) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 490 & 120 & 0 \\ 120 & 880 & 200 \\ 0 & 200 & 400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.88 \\ -0.42 \\ -4 \end{Bmatrix} \qquad (3.7)$$

با حل رابطه (3.7) نتیجه می‌شود:

$$(3.7) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 490 & 120 & 0 \\ 120 & 880 & 200 \\ 0 & 200 & 400 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2.88 \\ -0.42 \\ -4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 55.9217 \\ 11.6531 \\ -105.8265 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \, (rad) \qquad (3.8)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۳–

با جایگذاری θ های به دست آمده از رابطه (3.8) مقادیر لنگرهای ابتدا و انتهای تیرها به دست می‌آید:

$(3.8) \rightarrow (3.1)$

$$M_{AB} = k_{AB}\left(4\theta_A + 2\theta_B - 6\psi_{AB}\right) + FEM_{AB} = 62.5\times\left(4(0) + 2(55.92\times10^{-4}) - 6(0)\right) + (0) \Rightarrow \boxed{M_{AB} = 0.699\, ton.m}$$

$$M_{BA} = k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_{BA}\right) + FEM_{BA} = 62.5\times\left(4(55.92\times10^{-4}) + 2(0) - 6(0)\right) + (0) \Rightarrow \boxed{M_{BA} = 1.398\, ton.m}$$

$$M_{BC} = k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\psi_{BC}\right) + FEM_{BC} = 60\times\left(4(55.92\times10^{-4}) + 2(11.65\times10^{-4}) - 6(0)\right) - 2.88 \Rightarrow \boxed{M_{BC} = -1.398\, ton.m}$$

$$M_{CB} = k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\psi_{CB}\right) + FEM_{CB} = 60\times\left(4(11.65\times10^{-4}) + 2(55.92\times10^{-4}) - 6(0)\right) + 1.92 \Rightarrow \boxed{M_{CB} = 2.87\, ton.m}$$

$$M_{CD} = k_{CD}\left(4\theta_C + 2\theta_D - 6\psi_{CD}\right) + FEM_{CD} = 100\times\left(4(11.65\times10^{-4}) + 2(-105.82\times10^{-4}) - 6(0)\right) - 4 \Rightarrow \boxed{M_{CD} = -5.65\, ton.m}$$

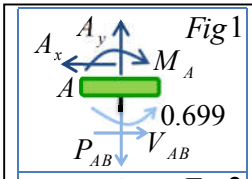
$$M_{DC} = k_{DC}\left(4\theta_D + 2\theta_C - 6\psi_{DC}\right) + FEM_{DC} = 100\times\left(4(-105.82\times10^{-4}) + 2(11.65\times10^{-4}) - 6(0)\right) + 4 \Rightarrow \boxed{M_{DC} = 0}$$

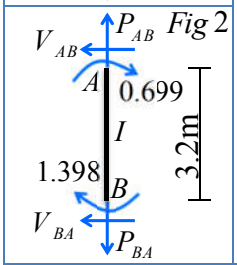
$$M_{CE} = k_{CE}\left(4\theta_C + 2\theta_E - 6\psi_{CE}\right) + FEM_{CE} = 60\times\left(4(11.65\times10^{-4}) + 2(0) - 6(0)\right) + 2.5 \Rightarrow \boxed{M_{CE} = 2.78\, ton.m}$$

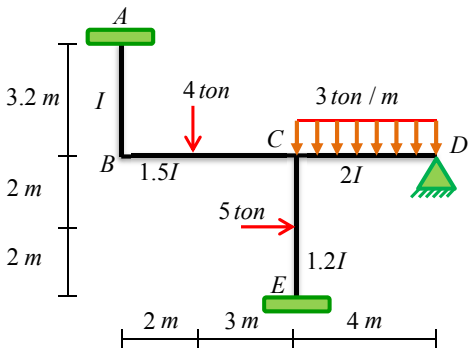
$$M_{EC} = k_{EC}\left(4\theta_E + 2\theta_C - 6\psi_{EC}\right) + FEM_{EC} = 60\times\left(4(0) + 2(11.65\times10^{-4}) - 6(0)\right) - 2.5 \Rightarrow \boxed{M_{EC} = -2.36\, ton.m}$$

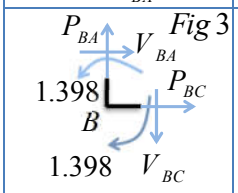
پاسخ مثال ۳–

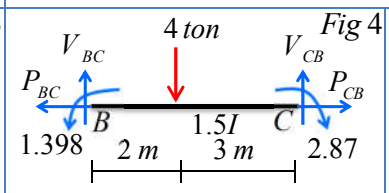
برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:

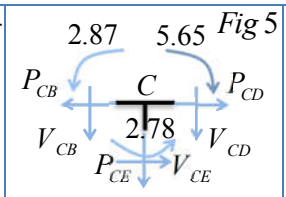


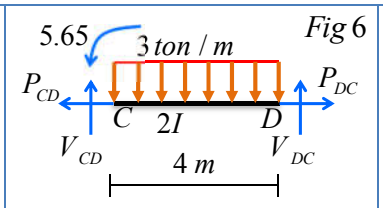


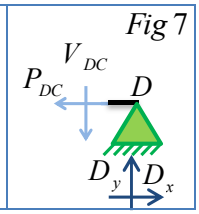


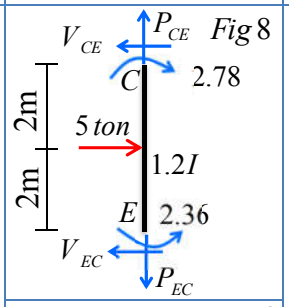


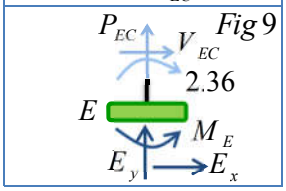


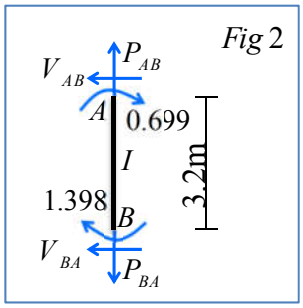












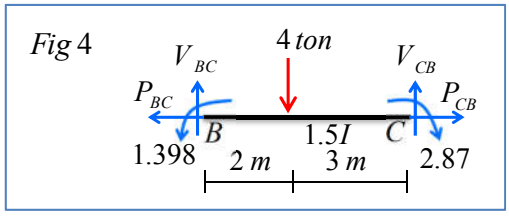
پاسخ مثال ۳–

با بررسی شکل (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_{BA}\times 3.2 - 1.398 - 0.699 = 0 \Rightarrow V_{BA} = -\frac{1.398+0.699}{3.2} \Rightarrow \boxed{V_{BA} = -0.655\,ton} \quad (3.9)$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -V_{AB} - V_{BA} = 0 \overset{(3.9)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 0.655\,ton} \quad (3.10)$$

با بررسی شکل (۴) نتیجه می‌شود:



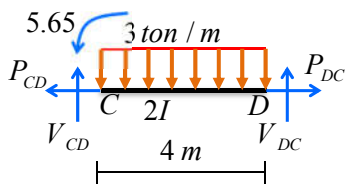
$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; V_{CB}\times 5 - 2.87 - 4\times 2 + 1.398 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{CB} = 1.894\,ton} \quad (3.11)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{BC} - 4 + V_{CB} = 0 \overset{(3.11)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = 2.106\,ton} \quad (3.12)$$

پاسخ مثال ۳–

با بررسی شکل (۶) نتیجه می‌شود:

Fig 6

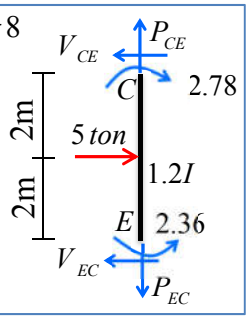


$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 5.65-(3\times 4)\times\left(\frac{4}{2}\right)+V_{DC}\times 4=0 \Rightarrow \boxed{V_{DC}=4.588\,ton} \quad (3.13)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD}-(3\times 4)+V_{DC}=0 \overset{(3.13)}{\Rightarrow} \boxed{V_{CD}=7.413\,ton} \quad (3.14)$$

با بررسی شکل (۸) نتیجه می‌شود:

Fig 8



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

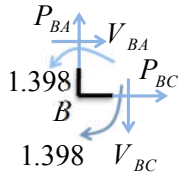
$$-V_{EC}\times 4+2.36+5\times 2-2.78=0 \Rightarrow \boxed{V_{EC}=2.395\,ton} \quad (3.15)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{EC}+5-V_{CE}=0 \overset{(3.15)}{\Rightarrow} \boxed{V_{CE}=2.605\,ton} \quad (3.16)$$

پاسخ مثال ۳–

با بررسی شکل (۳) نتیجه می‌شود:

Fig 3

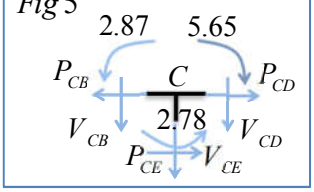


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{BA}+P_{BC}=0 \overset{(3.9)}{\Rightarrow} \boxed{P_{BC}=P_{CB}=0.655\,ton} \quad (3.17)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{BA}-V_{BC}=0 \overset{(3.12)}{\Rightarrow} \boxed{P_{BA}=P_{AB}=2.106\,ton} \quad (3.18)$$

با بررسی شکل (۵) نتیجه می‌شود:

Fig 5



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-P_{CB}+V_{CE}+P_{CD}=0 \overset{(3.16)\&(3.17)}{\Rightarrow} \boxed{P_{CD}=P_{DC}=-1.95\,ton} \quad (3.19)$$

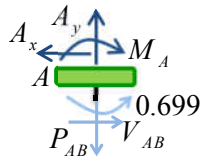
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-V_{CB}-P_{CE}-V_{CD}=0 \overset{(3.11)\&(3.14)}{\Rightarrow} \boxed{P_{CE}=P_{EC}=-9.307\,ton} \quad (3.20)$$

پاسخ مثال ۳–

با بررسی شکل (۱) نتیجه می‌شود:

Fig 1



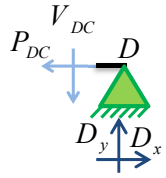
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + V_{AB} = 0 \overset{(3.10)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 0.655\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P_{AB} = 0 \overset{(3.18)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 2.106\ ton}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 0.699 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 0.699\ ton.m}$$

با بررسی شکل (۷) نتیجه می‌شود:

Fig 7

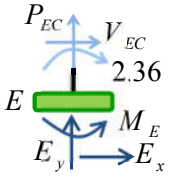


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x - P_{DC} = 0 \overset{(3.19)}{\Rightarrow} \boxed{D_x = -1.95\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y - V_{DC} = 0 \overset{(3.13)}{\Rightarrow} \boxed{D_y = 4.588\ ton}$$

پاسخ مثال ۳– با بررسی شکل (۹) نتیجه می‌شود:

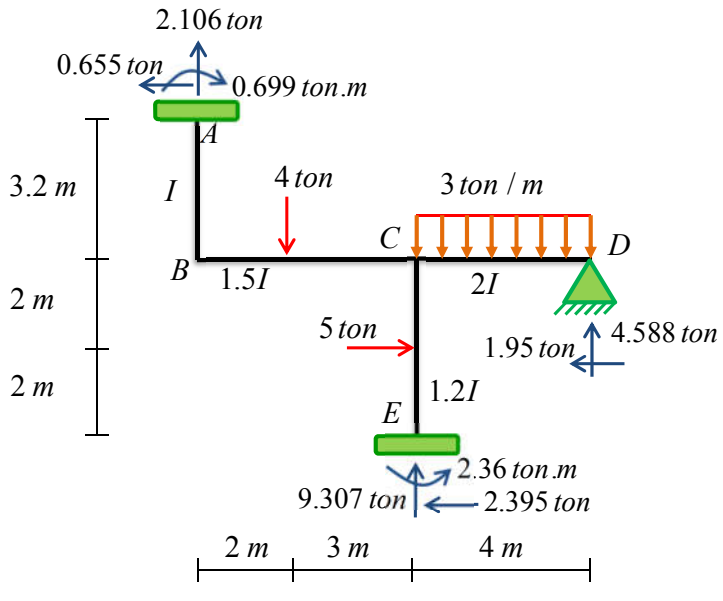
Fig 9



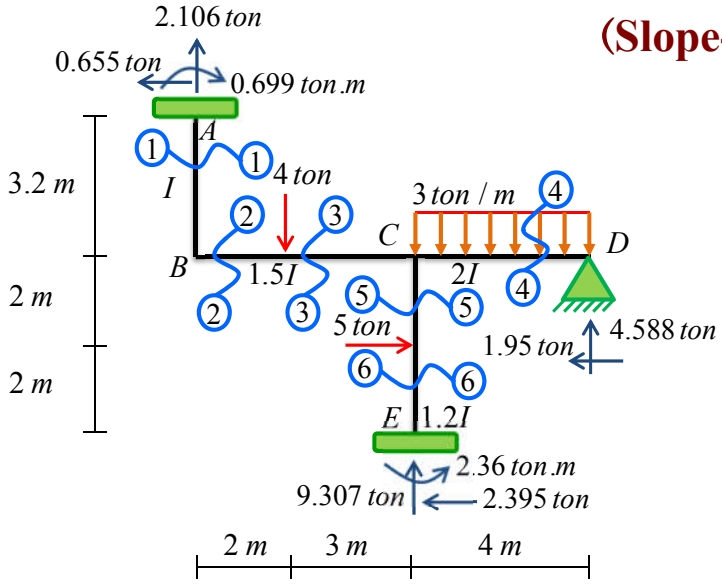
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x + V_{EC} = 0 \overset{(3.15)}{\Rightarrow} \boxed{E_x = -2.395\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y + P_{EC} = 0 \overset{(3.20)}{\Rightarrow} \boxed{E_y = 9.307\ ton}$$

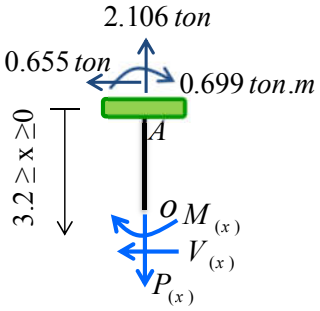
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_E - 2.36 = 0 \Rightarrow \boxed{M_E = 2.36\ ton.m}$$



پاسخ مثال ۳–



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع ۱–۱ خواهیم داشت:

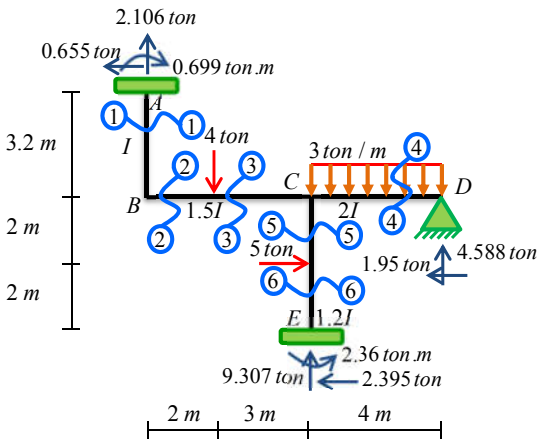


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 0.655 \times x - 0.699 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0.655x - 0.699}$$

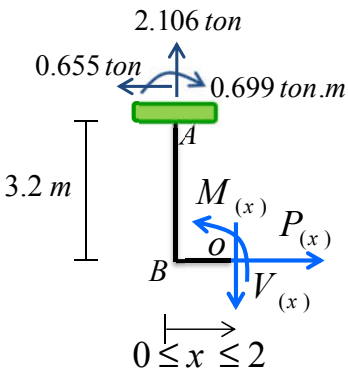
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 0.665 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -0.665\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P_{(x)} + 2.106 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 2.106\ ton}$$

پاسخ مثال ۳–



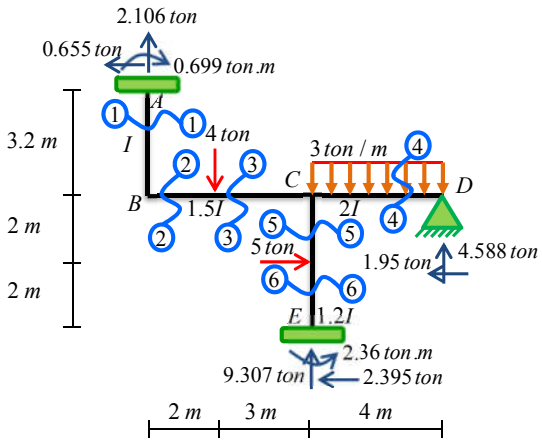
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲–۲ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 0.699 - 2.106 \times x + 0.655 \times 3.2 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2.106x - 1.379}$$

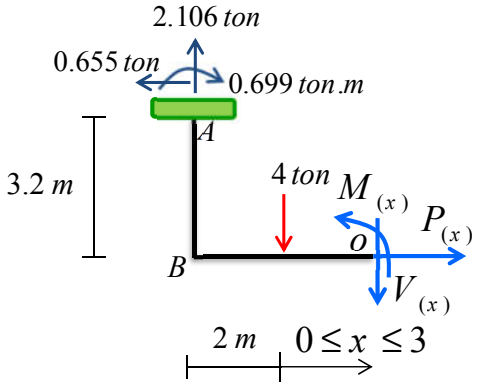
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 2.106 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2.106\ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} - 0.655 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 0.655\ ton}$$



پاسخ مثال ۳–

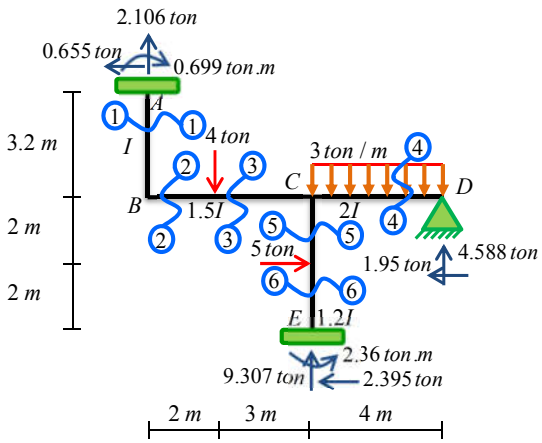
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳–۳ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; M_{(x)} + 4\times x + 0.655\times 3.2 - 0.699 - 2.106\times(2+x) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = -1.894x + 2.815}$$

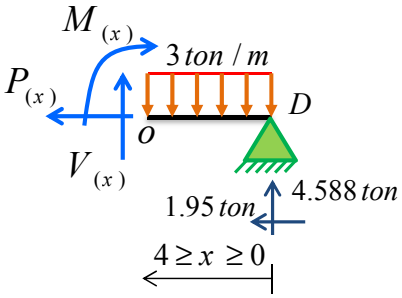
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -V_{(x)} - 4 + 2.106 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{(x)} = -1.894\,ton}$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; P_{(x)} - 0.655 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{P_{(x)} = 0.655\,ton}$$



پاسخ مثال ۳–

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۴–۴ خواهیم داشت:



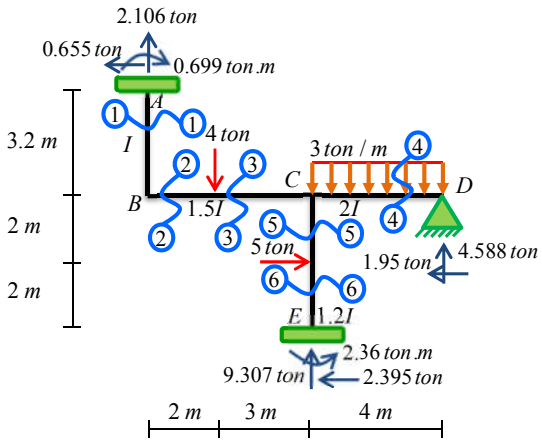
$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; -M_{(x)} - 3\times x \times \left(\frac{x}{2}\right) + 4.588\times x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 4.588x}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{(x)} - 3\times x + 4.588 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{(x)} = 3x - 4.588}$$

$$V_{(x)} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 1.529\,m} \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x=1.529)} = 3.508\,ton.m}$$

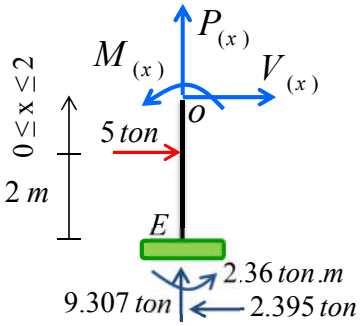
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -P_{(x)} - 1.95 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{P_{(x)} = -1.95\,ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۳–

با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۵–۵ خواهیم داشت:

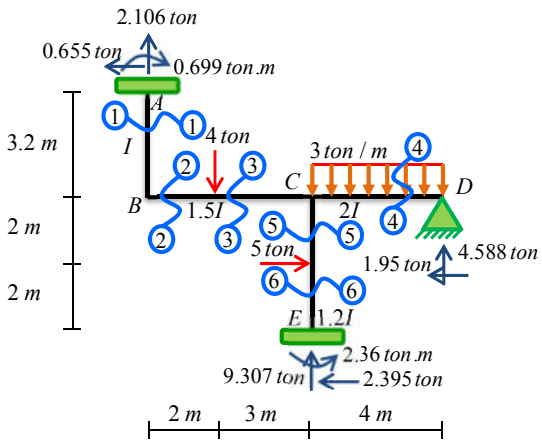


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 5\times x + 2.36 - 2.395\times(2+x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -2.605x + 2.43}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 5 - 2.395 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2.605\ ton}$$

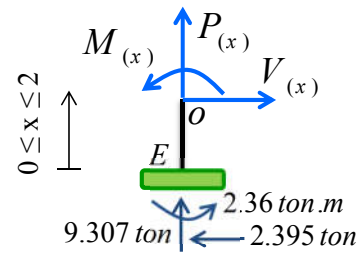
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 9.307 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -9.307\ ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۳–

با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۶–۶ خواهیم داشت:



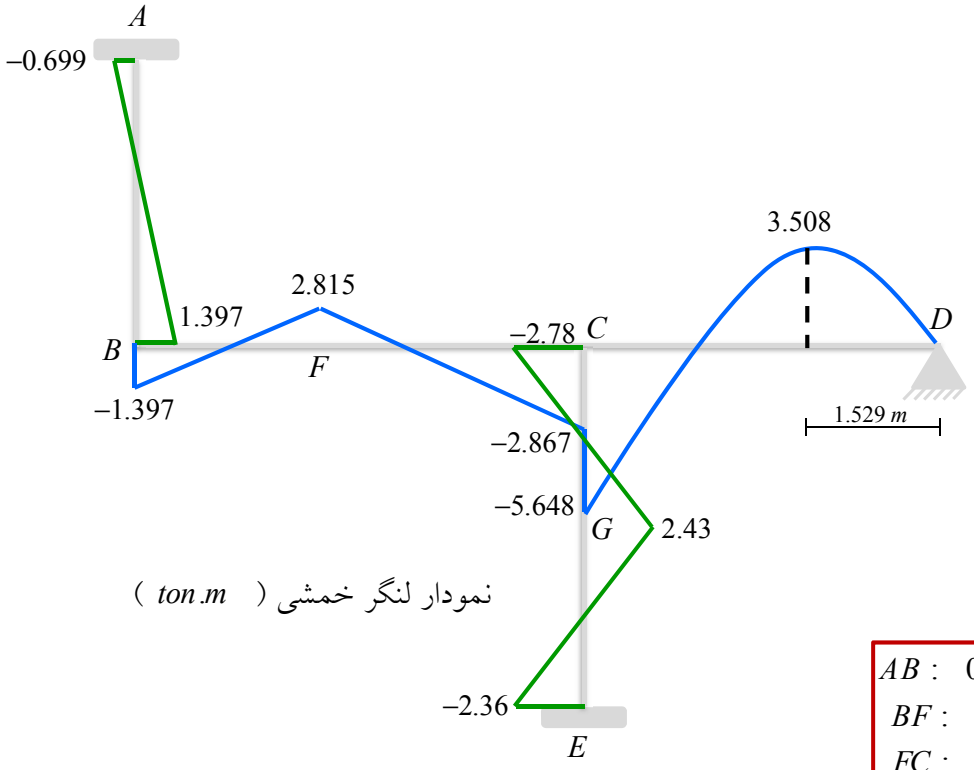
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 2.36 - 2.395\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2.395x - 2.36}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 2.395 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2.395\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 9.307 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -9.307\ ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۳–

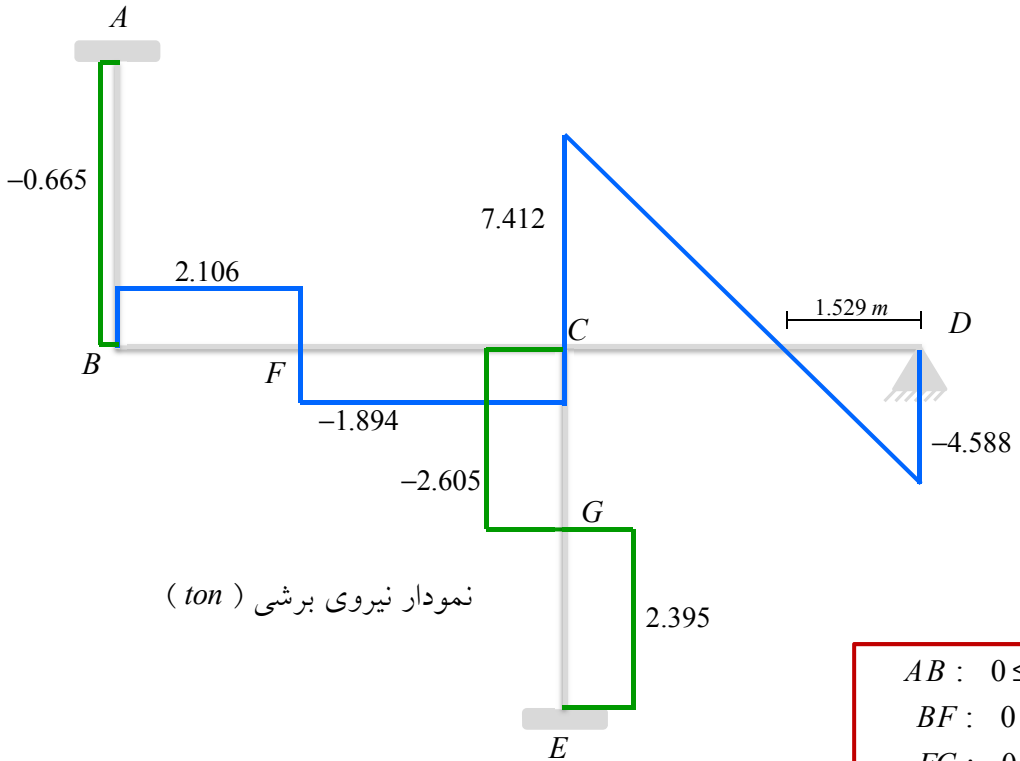


نمودار لنگر خمشی ($ton.m$)

$$
\begin{aligned}
AB:\ & 0\le x\le 3.2 & M_{(x)} &= 0.655x-0.699\\
BF:\ & 0\le x\le 2 & M_{(x)} &= 2.106x-1.379\\
FC:\ & 0\le x\le 3 & M_{(x)} &= -1.894x+2.815\\
DC:\ & 4\ge x\ge 0 & M_{(x)} &= -1.5x^{2}+4.588x\\
GC:\ & 2\ge x\ge 0 & M_{(x)} &= -2.605x+2.43\\
EG:\ & 2\ge x\ge 0 & M_{(x)} &= 2.395x-2.36
\end{aligned}
$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

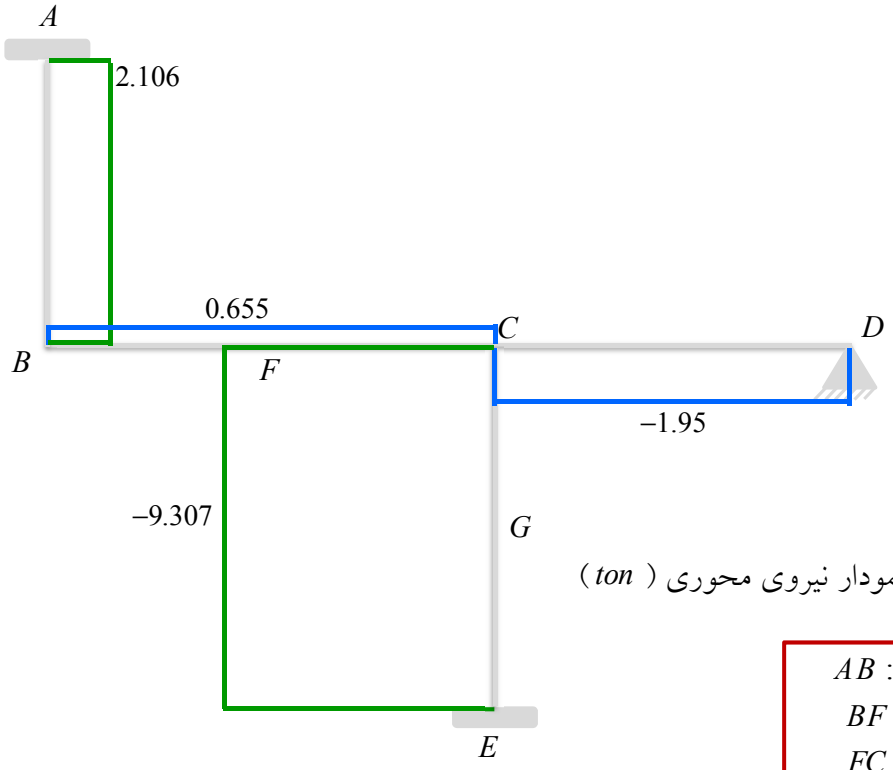
پاسخ مثال ۳–



نمودار نیروی برشی (ton)

$$
\begin{aligned}
AB:\ & 0\le x\le 3.2 & V_{(x)} &= -0.665\,ton\\
BF:\ & 0\le x\le 2 & V_{(x)} &= 2.106\,ton\\
FC:\ & 0\le x\le 3 & V_{(x)} &= -1.894\,ton\\
DC:\ & 4\ge x\ge 0 & V_{(x)} &= 3x-4.588\\
GC:\ & 2\ge x\ge 0 & V_{(x)} &= -2.605\,ton\\
EG:\ & 2\ge x\ge 0 & V_{(x)} &= 2.395\,ton
\end{aligned}
$$

پاسخ مثال ۳–



نمودار نیروی محوری (ton)

$$
\begin{aligned}
AB: \quad & 0 \le x \le 3.2 \quad & P_{(x)} &= 2.106\, ton \\
BF: \quad & 0 \le x \le 2 \quad & P_{(x)} &= 0.655\, ton \\
FC: \quad & 0 \le x \le 3 \quad & P_{(x)} &= 0.655\, ton \\
DC: \quad & 4 \ge x \ge 0 \quad & P_{(x)} &= -1.95\, ton \\
GC: \quad & 2 \ge x \ge 0 \quad & P_{(x)} &= -9.307\, ton \\
EG: \quad & 2 \ge x \ge 0 \quad & P_{(x)} &= -9.307\, ton
\end{aligned}
$$

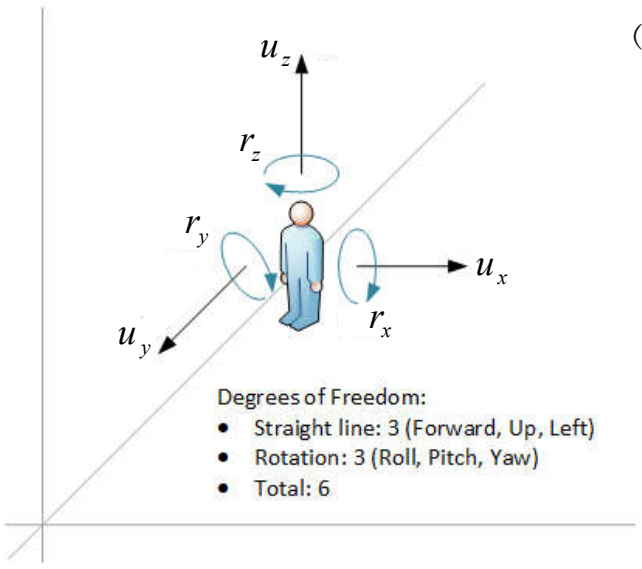
ETABS File Name: **07-Example-03.EDB**

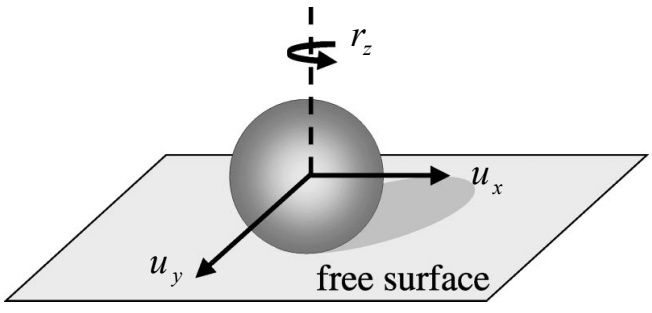
کاربرد روش شیب–افت در تحلیل قاب‌های نامعین دارای درجه آزادی انتقالی

هر گره در فضای دوبعدی دارای سه درجه آزادی (دو درجه انتقالی DOF_T و یک درجه دورانی DOF_R) و در حالت فضای سه بعدی دارای شش درجه آزادی (سه درجه انتقالی و سه درجه دورانی) می‌باشد.

DOF_T : درجه آزادی انتقالی (Degree of freedom - Transitional)

DOF_R : درجه آزادی دورانی (Degree of freedom - Rotational)



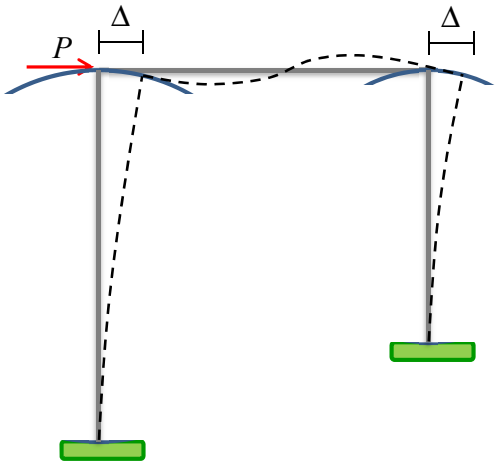


روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

کاربرد روش شیب–افت در تحلیل قاب‌های نامعین دارای درجه آزادی انتقالی

شکل مقابل یک قاب یک طبقه یک دهانه را نشان می‌دهد.

در اثر بار افقی دچار تغیرشکل جانبی می‌شود.



برای تعیین مقدار تغییرمکان جانبی انتهای هر ستون کمانی رسم می‌کنیم.

چون تغییرشکل‌ها در محدوده بسیار کوچک قرار دارند از این رو می‌توان به جای کمان از خط مماس استفاده کرد.

بنابراین این قاب یک سیستم سازه‌ای دارای یک درجه آزادی انتقالی در جهت افقی می‌باشد.

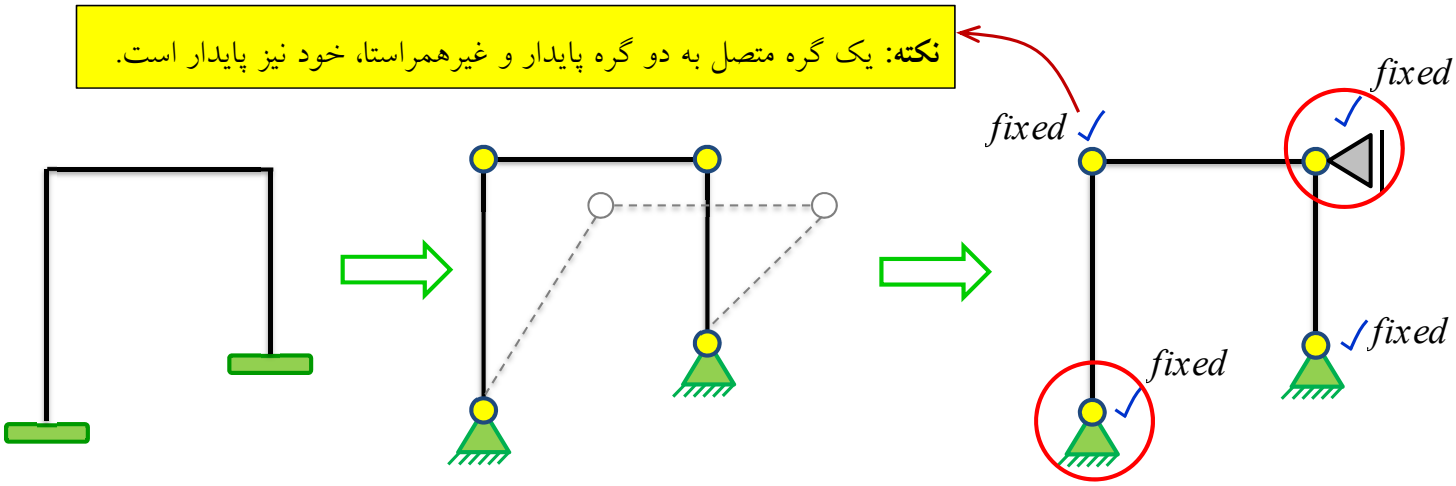
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

روش‌های تعیین درجه آزادی انتقالی در سازه‌ها

روش اول:

ابتدا در کلیه گره‌ها و تکیه‌گاه‌ها دوران را آزاد می‌کنیم به این معنا که فرض می‌کنیم اتصال اعضا به یکدیگر مفصلی است و همچنین اتصال اعضا به تکیه‌گاه‌های گیردار نیز به صورت مفصلی است. در اثر این عمل احتمال دارد سازه ناپایدار گردد. تعداد قید لازم برای پایدار نمودن سازه برابر با درجه آزادی انتقالی سازه خواهد بود. روش اول یک روش دقیق است.

نکته: یک گره متصل به دو گره پایدار و غیرهمراستا، خود نیز پایدار است.



بنابراین این قاب یک سیستم سازه‌ای دارای یک درجه آزادی انتقالی در جهت افقی می‌باشد.

روش‌های تعیین درجه آزادی انتقالی در سازه‌ها

روش دوم: تمامی اتصالات را مفصلی نموده در این حالت منفی درجه نامعینی سازه همان درجات آزادی انتقالی خواهد بود. لازم به ذکر است این روش حالت کلی ندارد و ممکن است در مواردی به جواب نادرست منجر شود. از این رو، این روش حالت کنترل کننده‌ای برای روش اول است.

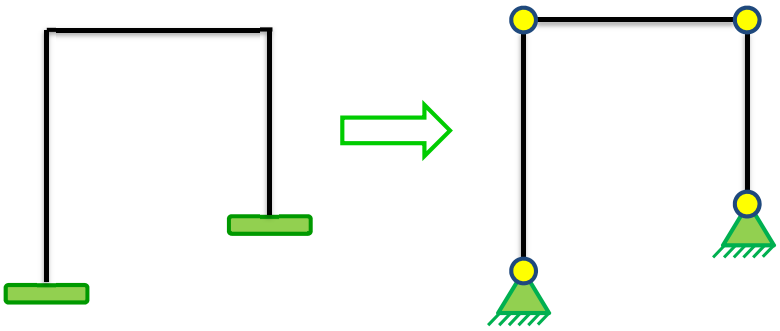
$$\begin{aligned} DOF_T &= 2n-(m+r) && \text{دو بعدی} \\ DOF_T &= 3n-(m+r) && \text{سه بعدی} \end{aligned} \qquad (18)$$

m : تعداد اعضا

n : تعداد گره‌ها

r : تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی

DOF_T : درجه آزادی انتقالی (Degree of freedom - Transitional)



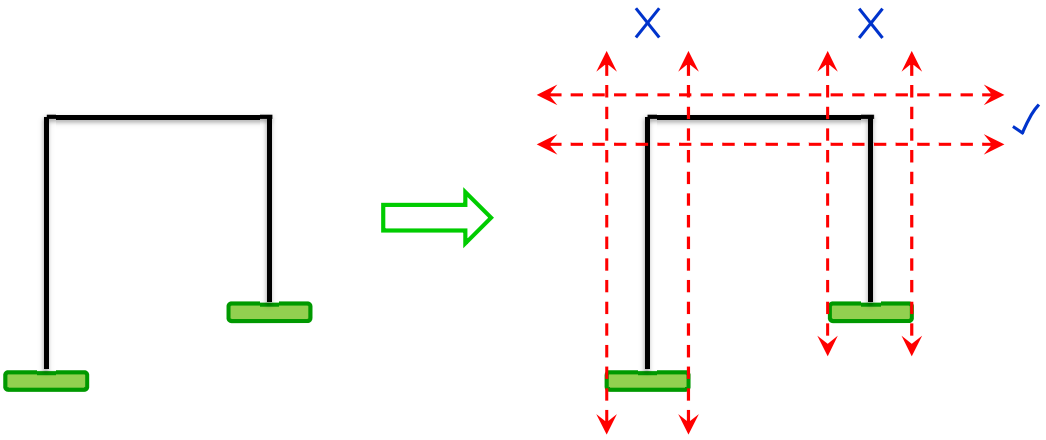
$$DOF_T = 2n-(m+r) = 2(4)-(3+4)$$

$$\Rightarrow \boxed{DOF_T = 1}$$

بنابراین این قاب یک سیستم سازه‌ای دارای یک درجه آزادی انتقالی در جهت افقی می‌باشد.

روش‌های تعیین درجه آزادی انتقالی در سازه‌ها

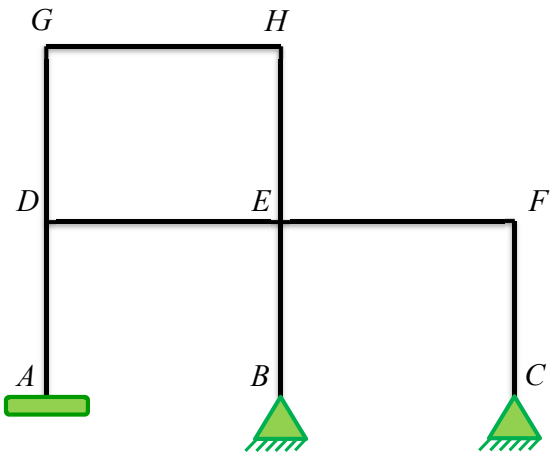
روش سوم: در راستای هر یک از اعضا مقطعی ایجاد می‌کنیم. اگر در راستای مقطع تکیه‌گاه وجود داشت نشان دهنده عدم وجود درجه آزادی انتقالی و در غیر این صورت درجه آزادی انتقالی در راستای مقطع وجود دارد.



بنابراین این قاب یک سیستم سازه‌ای دارای یک درجه آزادی انتقالی در جهت افقی می‌باشد.

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

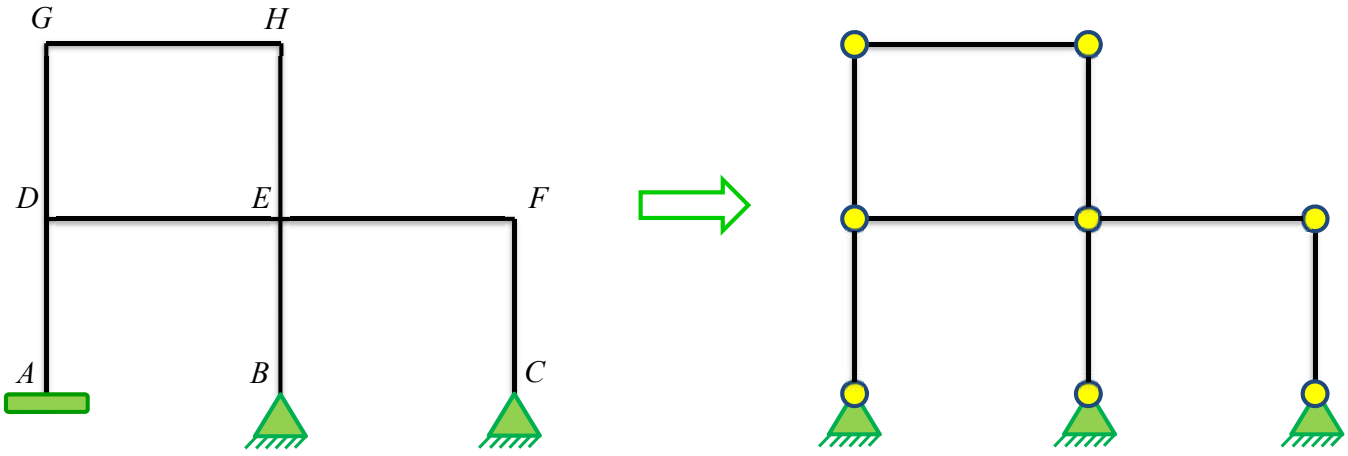
مثال ۴– درجه‌های آزادی سازه نشان داده شده را تعیین نمایید.



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۴–

روش اول تعیین درجه آزادی انتقالی:

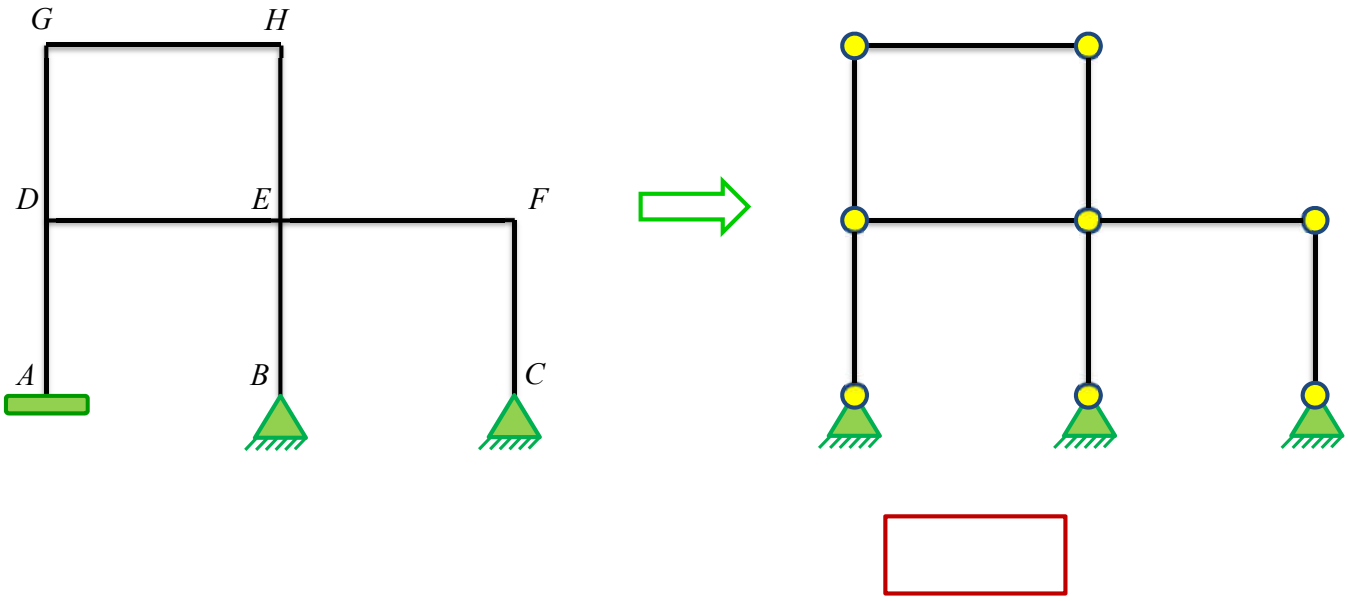


سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 2$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۴–

روش دوم تعیین درجه آزادی انتقالی:

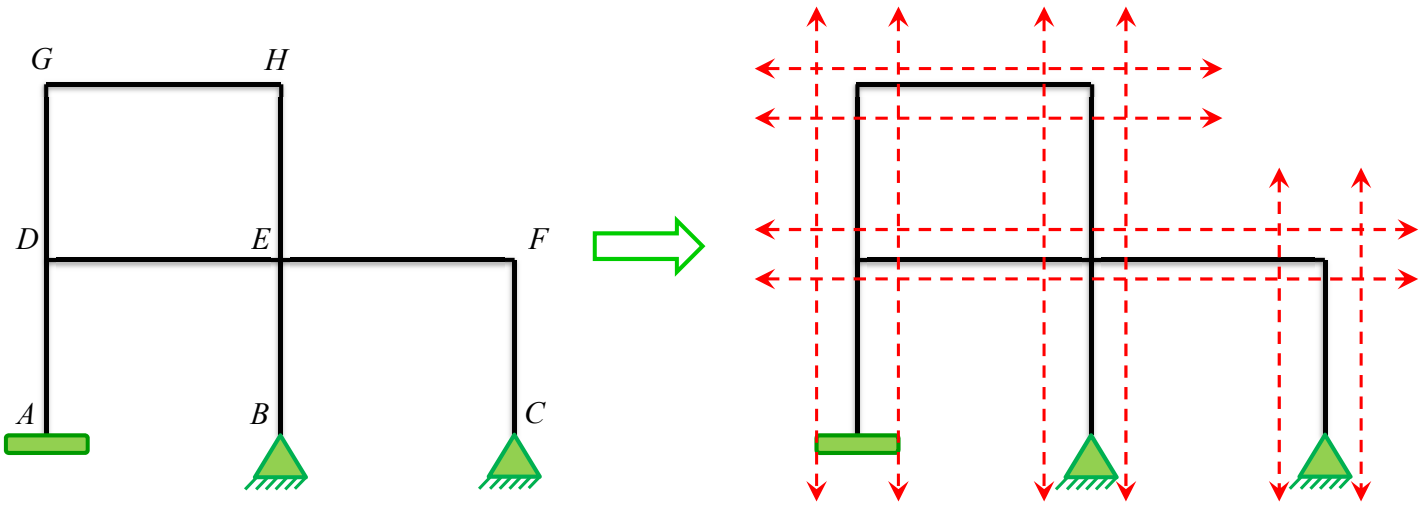


سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است.

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۴–

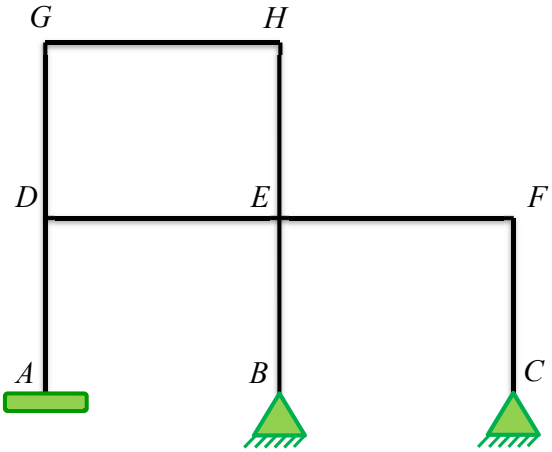
روش سوم تعیین درجه آزادی انتقالی:



سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 2$

پاسخ مثال ۴–

تعیین درجه آزادی دورانی:

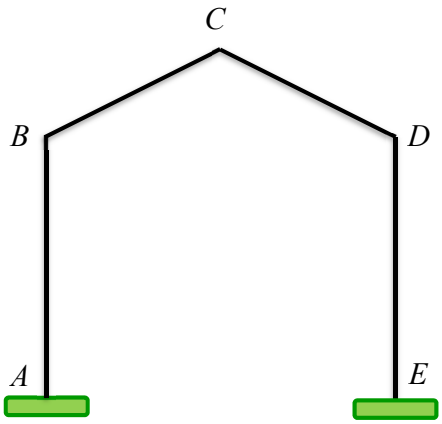


سازه دارای **۷** درجه آزادی دورانی است.

تعیین درجه آزادی کل:

سازه دارای **۹** درجه آزادی است.

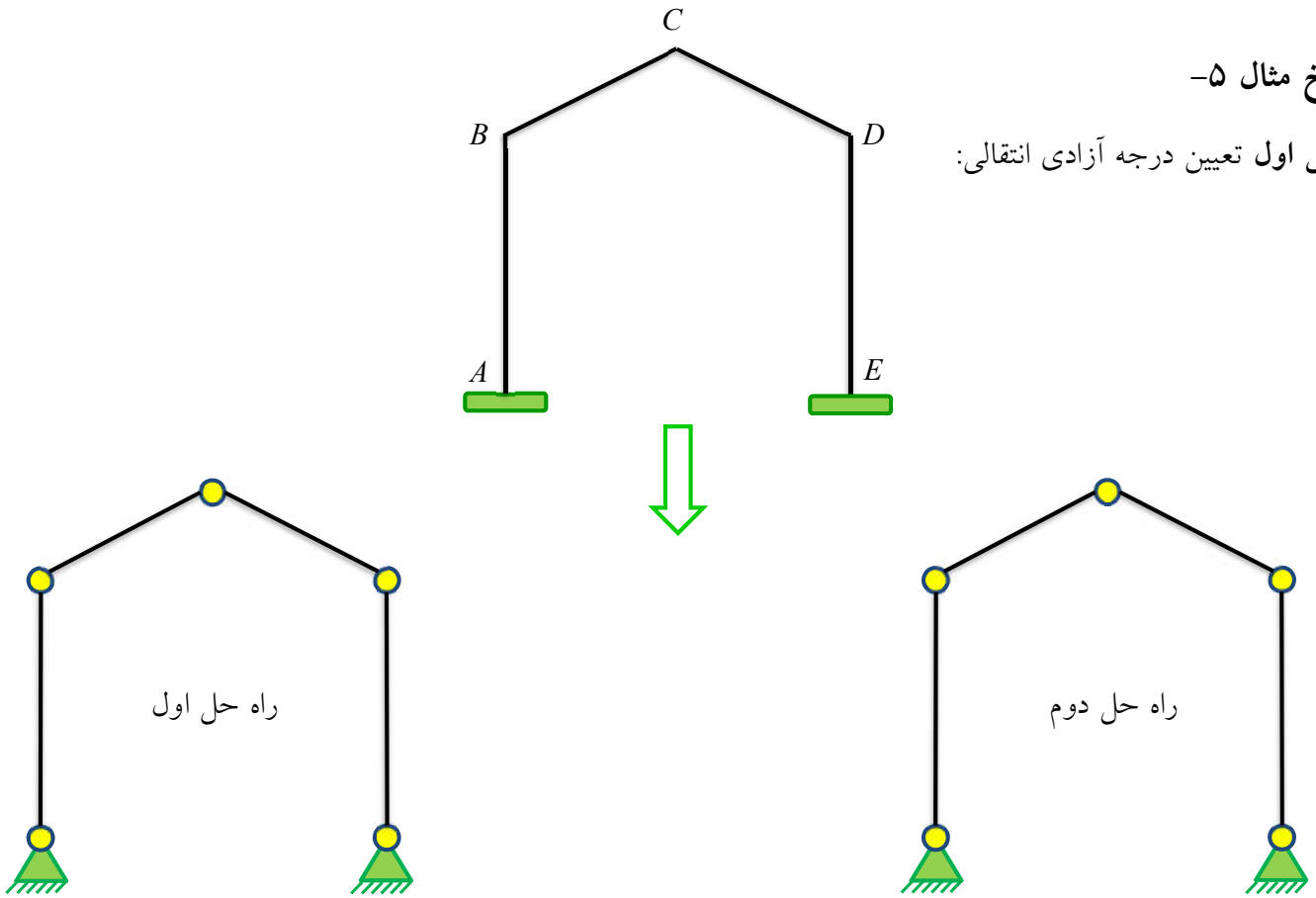
مثال ۵– درجه‌های آزادی سازه نشان داده شده را تعیین نمایید.



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۵–

روش اول تعیین درجه آزادی انتقالی:

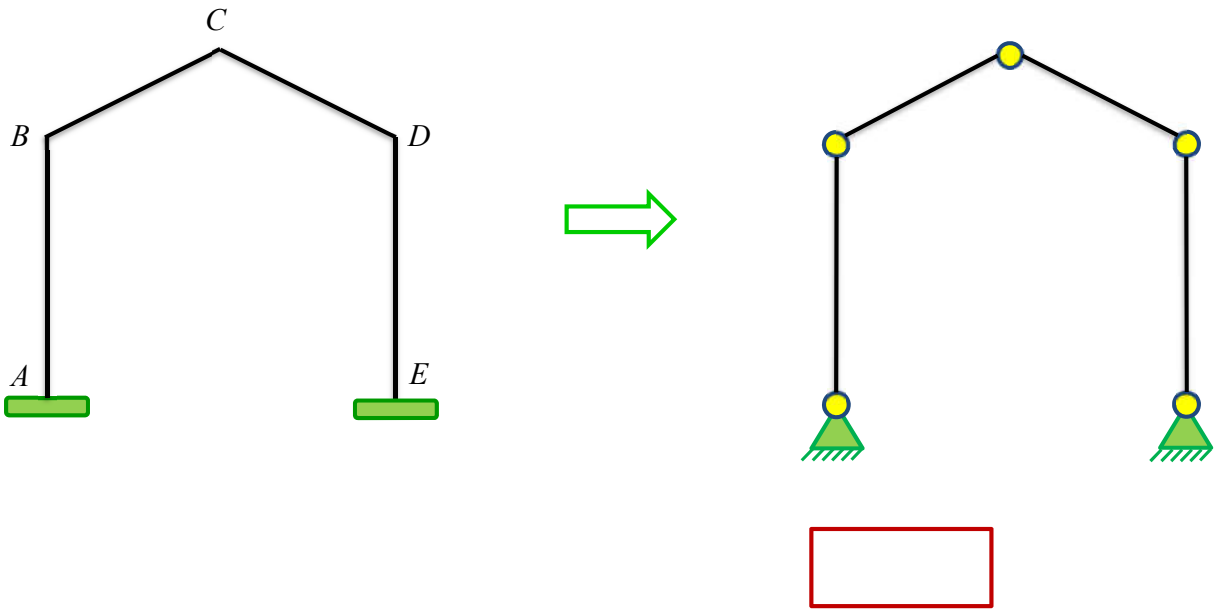


سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 2$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۵–

روش دوم تعیین درجه آزادی انتقالی:

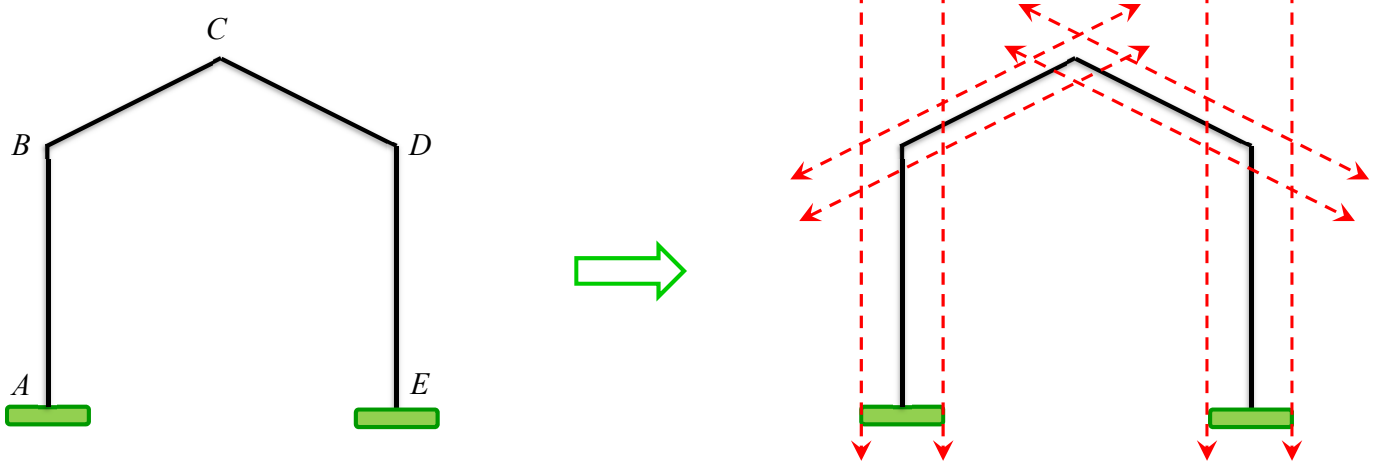


سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است.

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۵–

روش سوم تعیین درجه آزادی انتقالی:



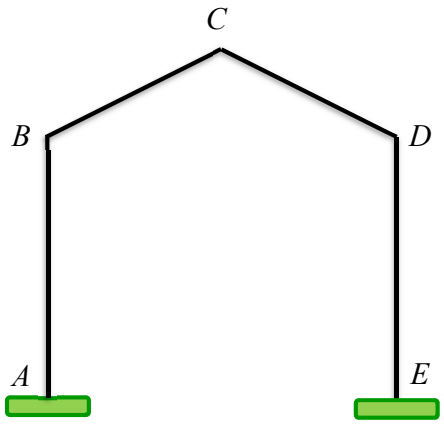
سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 2$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۵–

تعیین درجه آزادی دورانی:

سازه دارای **۳** درجه آزادی دورانی است.

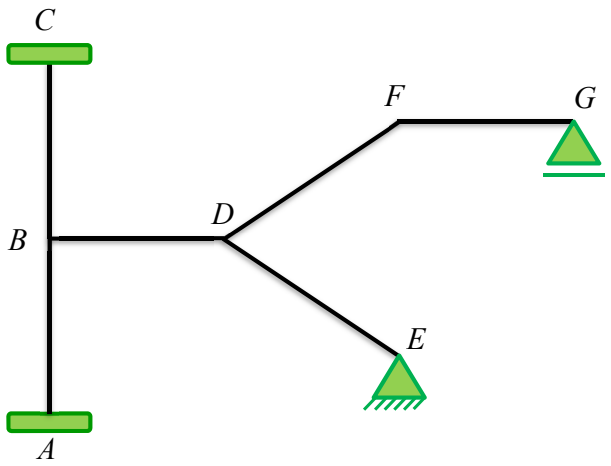


تعیین درجه آزادی کل:

سازه دارای **۵** درجه آزادی است.

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

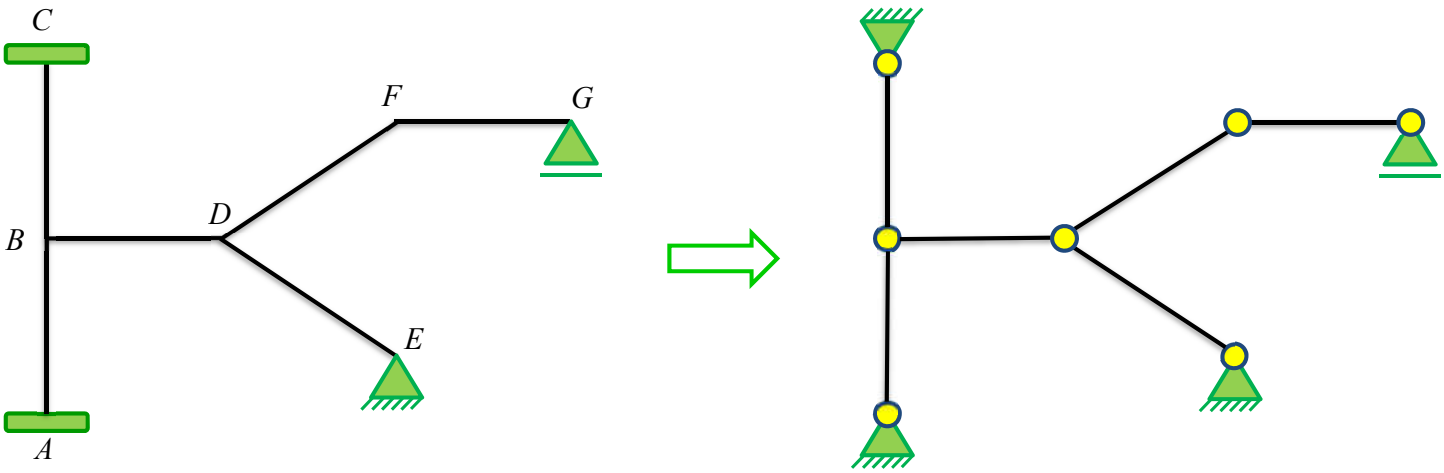
مثال ۶– درجه‌های آزادی سازه نشان داده شده را تعیین نمایید.



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۶–

روش اول تعیین درجه آزادی انتقالی:

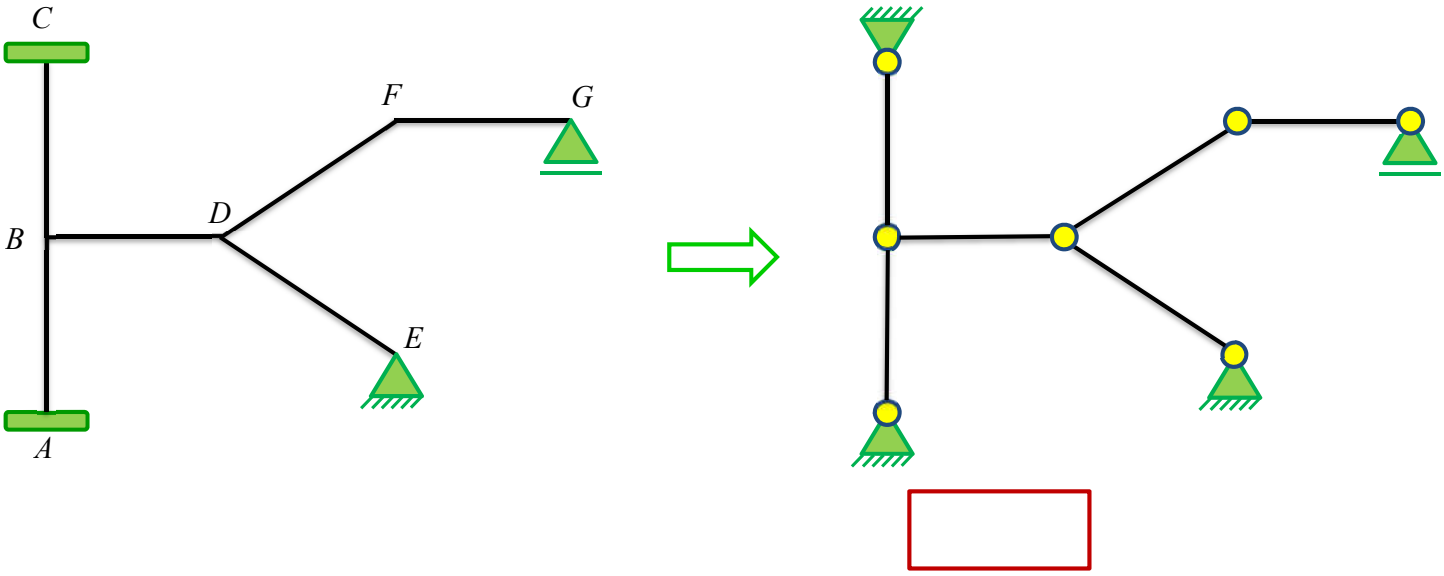


سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 2$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۶–

روش دوم تعیین درجه آزادی انتقالی:

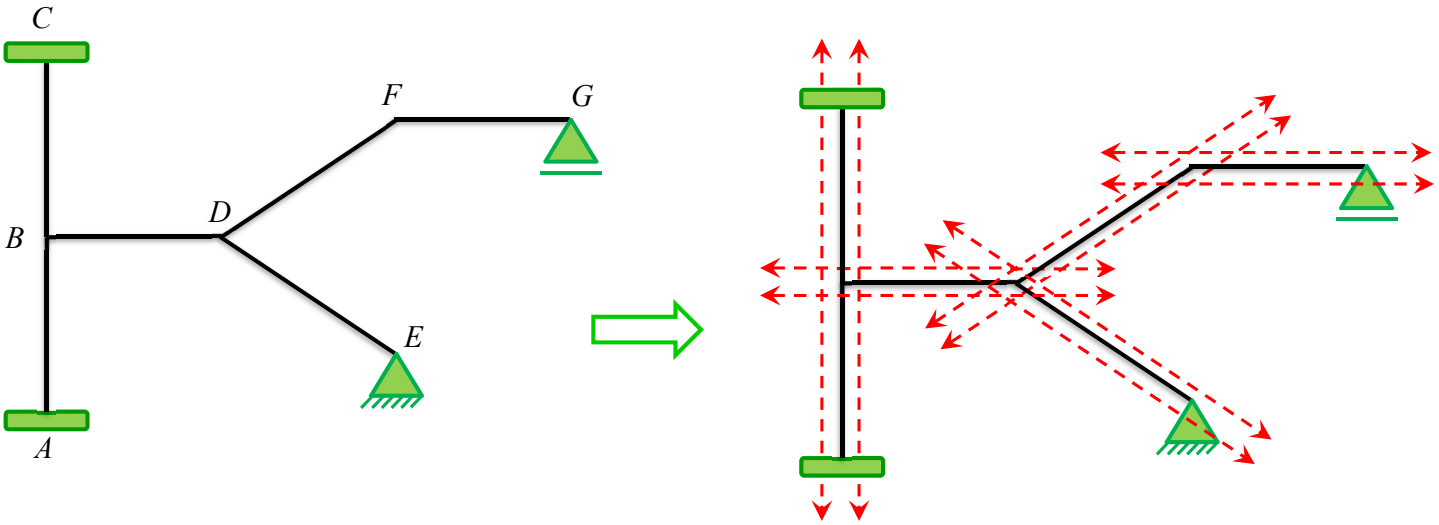


روش دوم با روش اول در تناقض است.

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

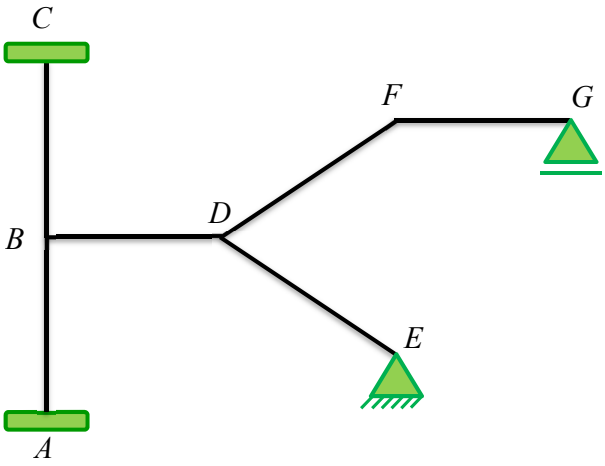
پاسخ مثال ۶–

روش سوم تعیین درجه آزادی انتقالی:



سازه دارای **۲** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 2$

پاسخ مثال ۶–



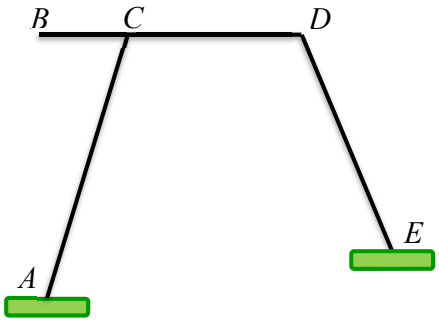
تعیین درجه آزادی دورانی:

سازه دارای ۵ درجه آزادی دورانی است.

تعیین درجه آزادی کل:

سازه دارای ۷ درجه آزادی است.

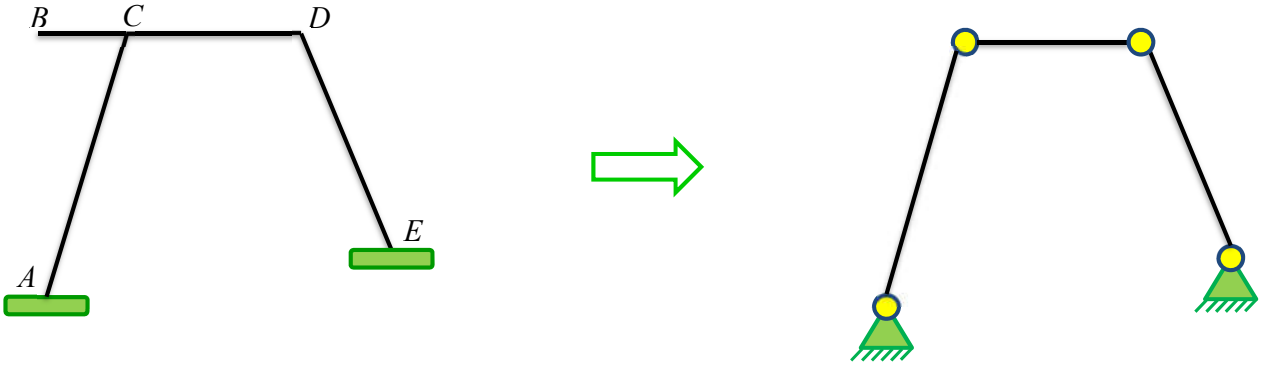
مثال ۷– درجه‌های آزادی سازه نشان داده شده را تعیین نمایید.



پاسخ مثال ۷–

روش اول تعیین درجه آزادی انتقالی:

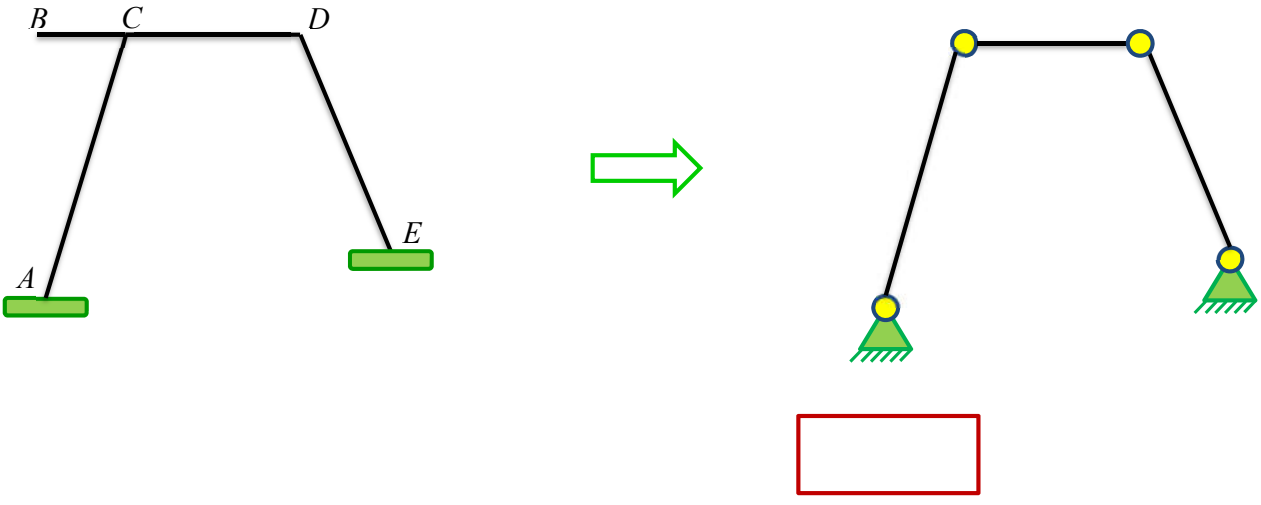
نکته: کنسول در محاسبات تعیین درجه آزادی در نظر گرفته نمی‌شود.



سازه دارای ۱ درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 1$

پاسخ مثال ۷–

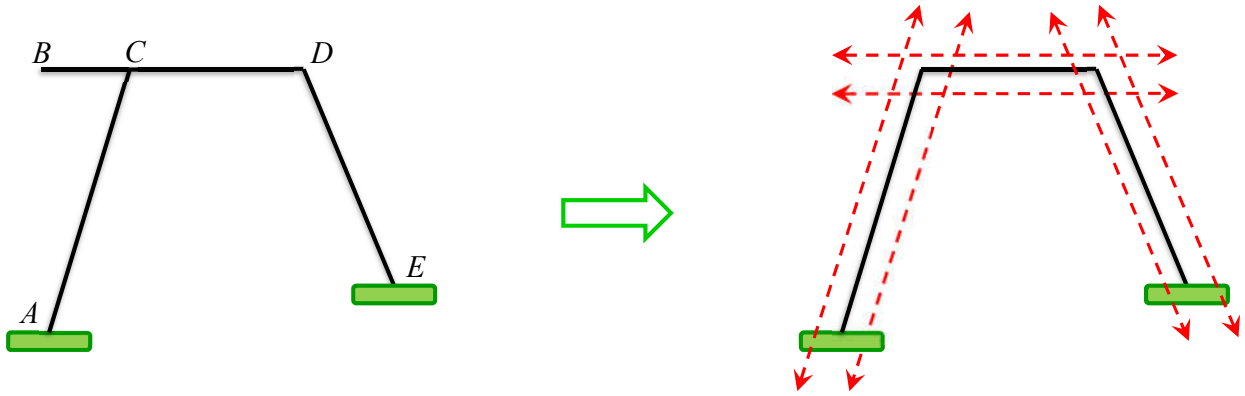
روش دوم تعیین درجه آزادی انتقالی:



سازه دارای ۱ درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 1$

پاسخ مثال ۷–

روش سوم تعیین درجه آزادی انتقالی:

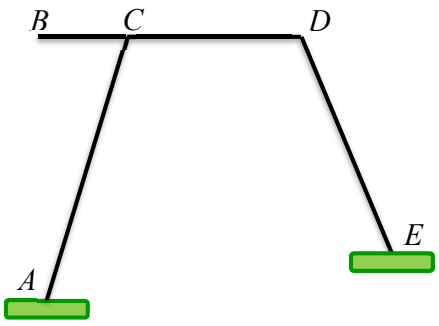


سازه دارای **۱** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 1$

پاسخ مثال ۷–

تعیین درجه آزادی دورانی:

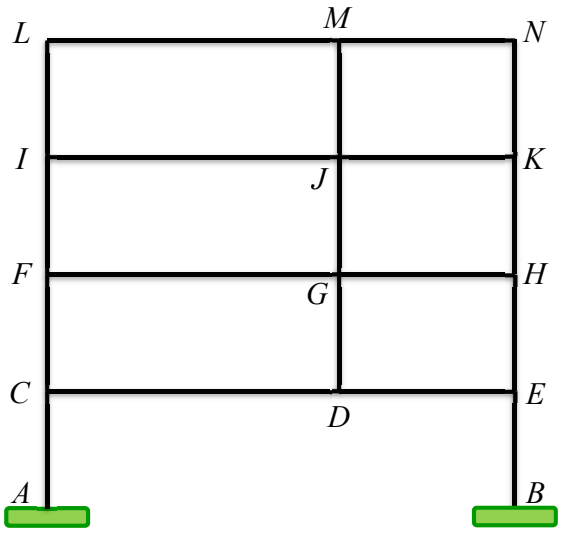
سازه دارای **۲** درجه آزادی دورانی است.



تعیین درجه آزادی کل:

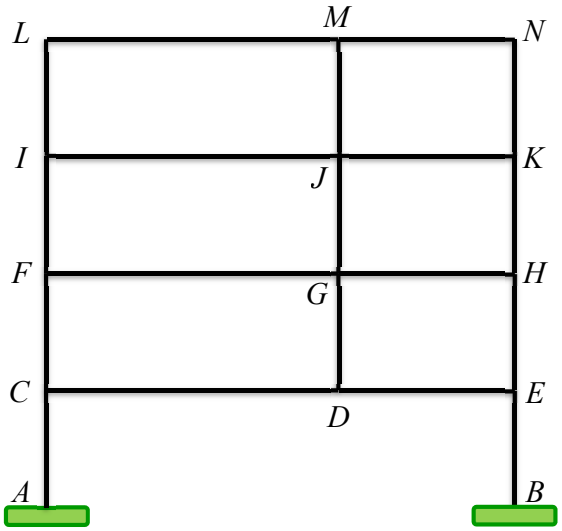
سازه دارای **۳** درجه آزادی است.

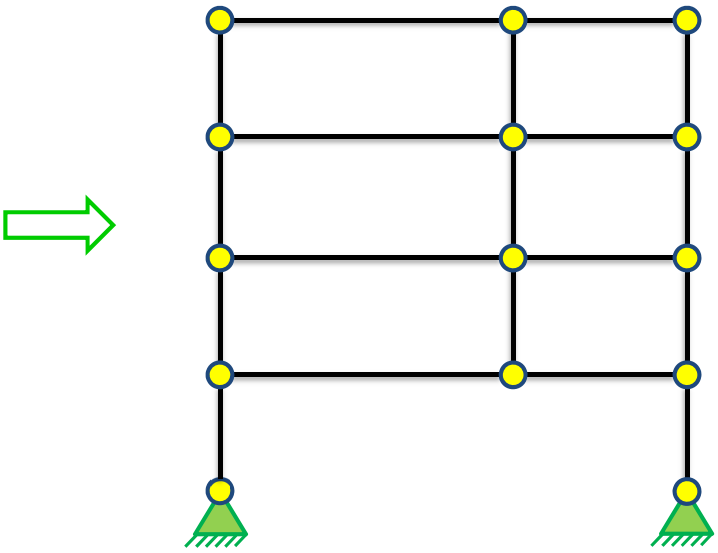
مثال ۸– درجه‌های آزادی سازه نشان داده شده را تعیین نمایید.



پاسخ مثال ۸–

روش اول تعیین درجه آزادی انتقالی:



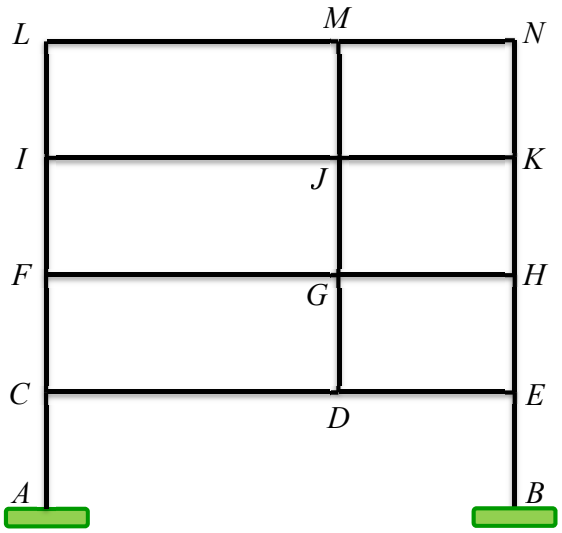


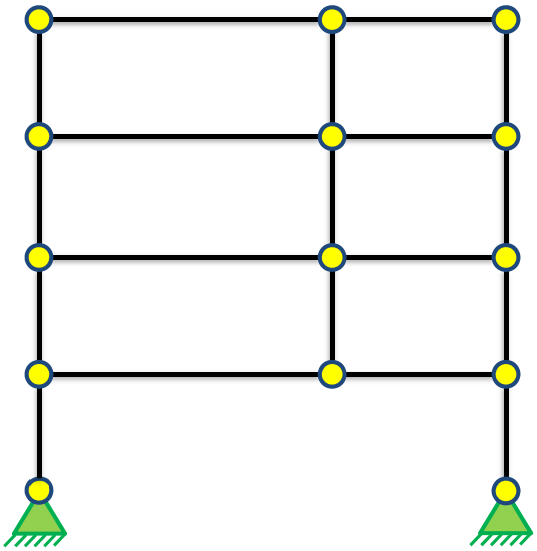
سازه دارای ۵ درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 5$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۸–

روش دوم تعیین درجه آزادی انتقالی:



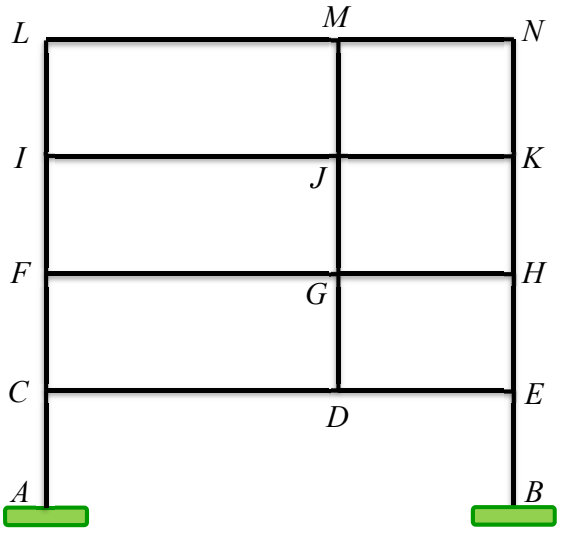


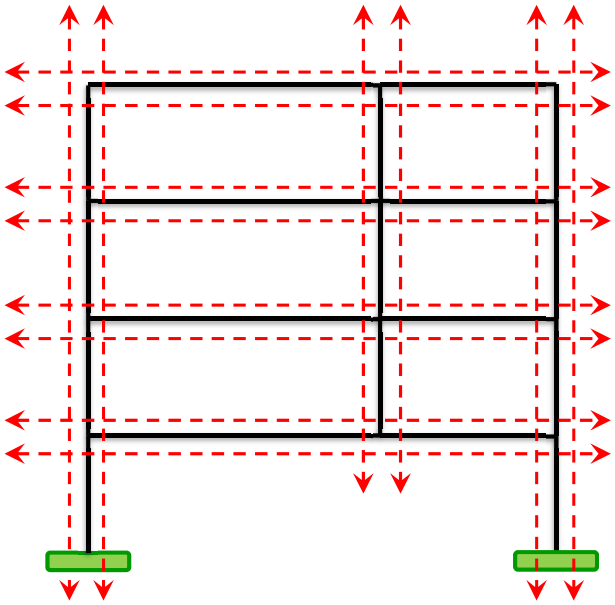
سازه دارای ۵ درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 5$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۸–

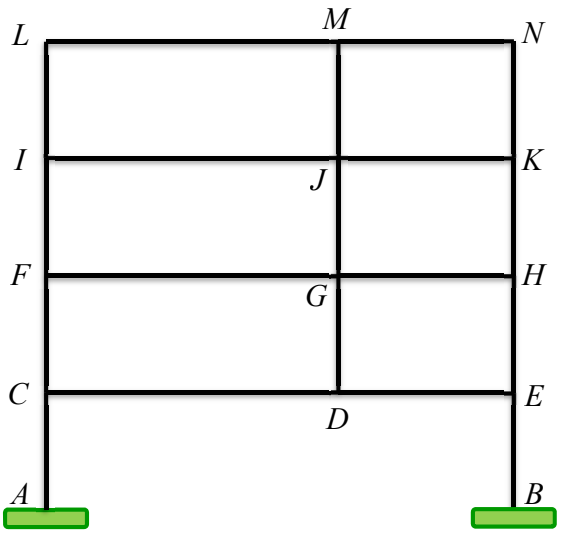
روش سوم تعیین درجه آزادی انتقالی:





سازه دارای ۵ درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 5$

پاسخ مثال ۸–



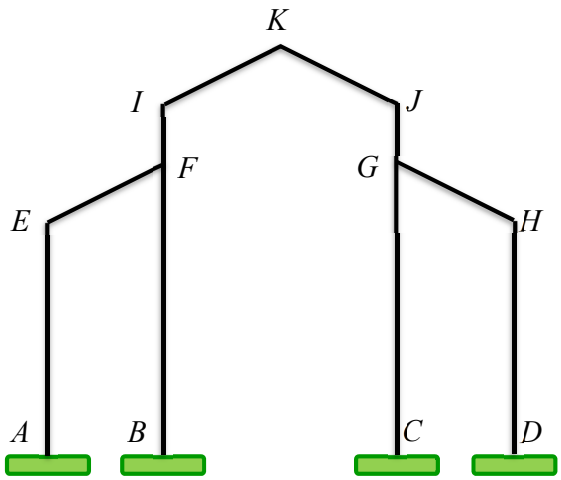
تعیین درجه آزادی دورانی:

سازه دارای **۱۲** درجه آزادی دورانی است.

تعیین درجه آزادی کل:

سازه دارای **۱۷**درجه آزادی است.

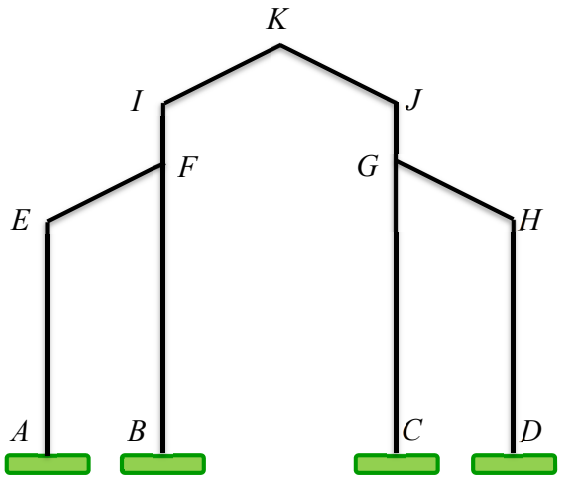
مثال ۹– درجه‌های آزادی سازه نشان داده شده را تعیین نمایید.

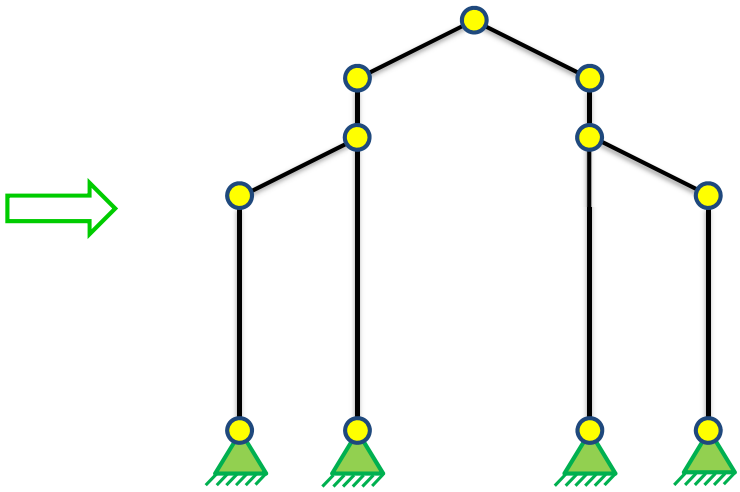


روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۹–

روش اول تعیین درجه آزادی انتقالی:



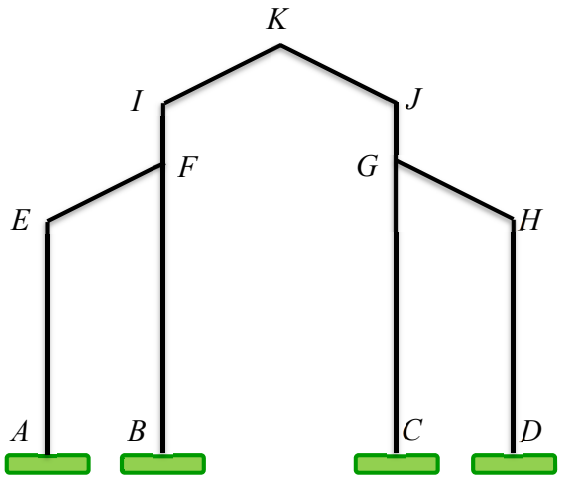


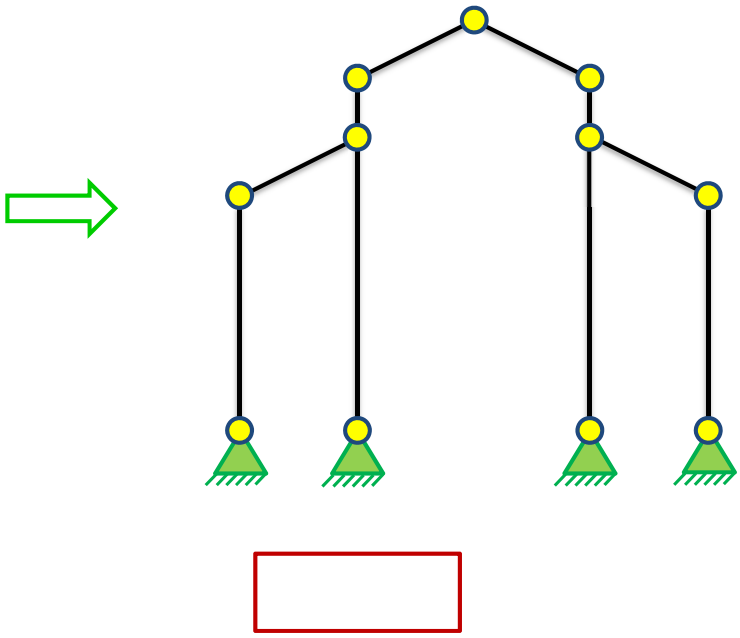
سازه دارای **۴** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 4$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۹–

روش دوم تعیین درجه آزادی انتقالی:

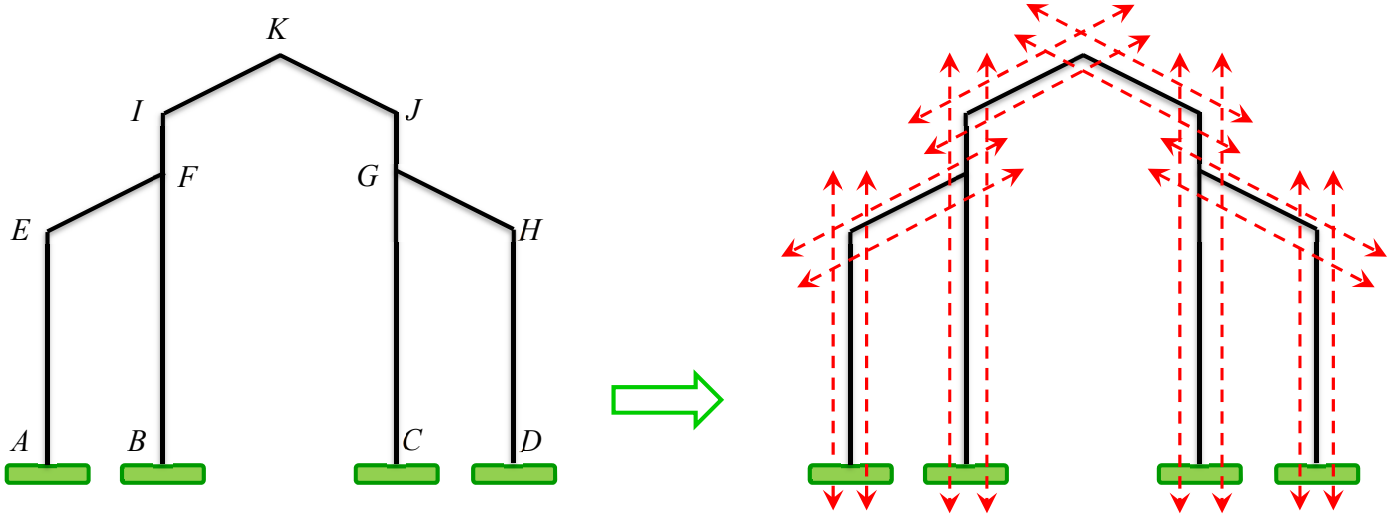




سازه دارای **۴** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 4$

پاسخ مثال ۹–

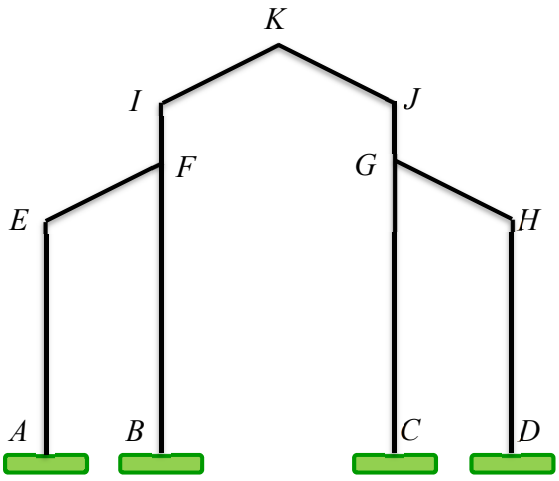
روش سوم تعیین درجه آزادی انتقالی:



سازه دارای **۴** درجه آزادی انتقالی است. $DOF_T = 4$

پاسخ مثال ۹–

تعیین درجه آزادی دورانی:



سازه دارای **۷** درجه آزادی دورانی است.

تعیین درجه آزادی کل:

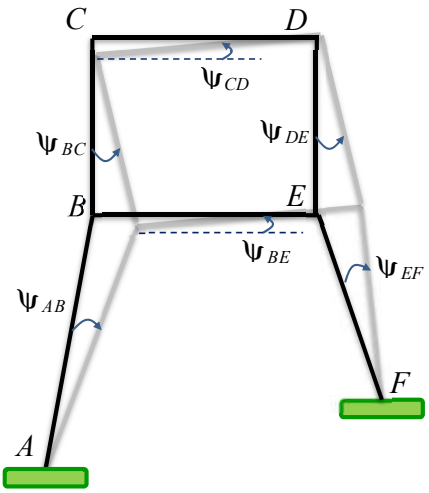
سازه دارای **۱۱**درجه آزادی است.

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

تاثیر درجه‌های آزادی انتقالی در معادلات شیب افت

در سازه‌های دارای درجه آزادی انتقالی، محور طولی تعدادی از اعضا دچار دوران شده و در آن‌ها ψ_{ij} ایجاد می‌گردد.

ψ_{ij} هر یک از اعضا تابعی خطی از درجات آزادی انتقالی است که مجهول می‌باشند. اگر در سازه نشان داده شده که دارای دو درجه آزادی انتقالی است درجات آزادی انتقالی را با پارامترهای مجهول ψ_1 و ψ_2 نشان دهیم از این رو، انتظار می‌رود مقدار هر یک از ψ_{ij} به صورت زیر باشد:



$$\psi_{ij} = f\left(\psi_1, \psi_2\right) \quad (19)$$

بنابراین در حالت کلی اگر سازه دارای n درجه آزادی انتقالی باشد در آن صورت ψ_{ij} هر یک از اعضای آن تابعی از n تا مجهول است.

$$\psi_{ij} = f\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots, \psi_n\right) \quad (20)$$

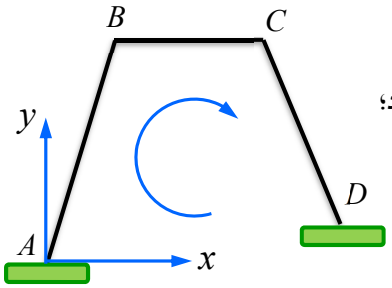
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

روش‌های محاسبه ψ_{ij} اعضا در سازه‌های داری درجه آزادی انتقالی

روش هندسی: بر اساس روش اول، درجات آزادی انتقالی را تعیین می‌نماییم. اولین قید اضافه را آزاد کرده و در راستای قید آزاد شده به طوری که سایر قیدهای اضافه بسته باشند، سازه را حرکت می‌دهیم. بر اساس شکل هندسه تغییر شکل یافته، زاویه ψ_{1ij} هر یک از اعضا را محاسبه می‌نماییم. این فرآیند برای تمامی قیدهای اضافی انجام می‌گیرد. در نهایت ψ_{ij} هر عضو از ترکیب خطی تغییر شکل‌های تمامی مراحل به دست می‌آید. این روش به دلیل پیچیدگی زیاد برای سازه‌های با تعداد درجات آزادی انتقالی زیاد توصیه نمی‌گردد.

$$\psi_{ij} = \psi_{1ij} + \psi_{2ij} + \cdots + \psi_{nij} \quad (21)$$

روش تحلیلی: این روش کلی و مناسب برای سازه‌های با هر تعداد درجه آزادی انتقالی است. مراحل گام به گام این روش به شرح زیر است:



گام اول: انتخاب یک دستگاه مختصات کلی .

گام دوم: در دهانه (پانل) هر قاب یک جهت چرخشی (ساعتگرد یا پادساعتگرد) انتخاب می‌شود؛ که بر اساس آن ابتدا و انتهای هر عضو تعریف می‌گردد.

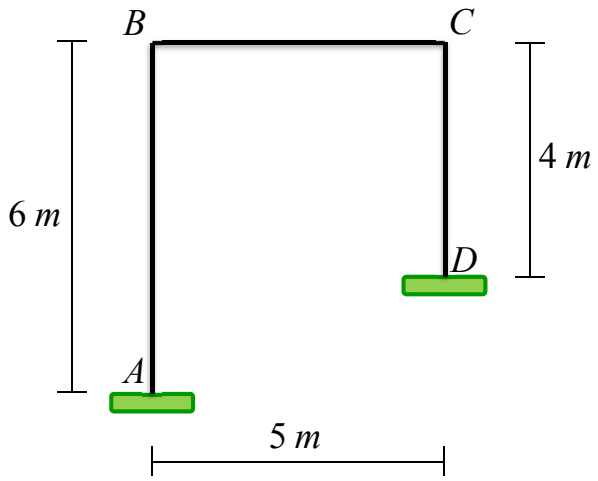
گام سوم: در داخل دهانه (پانل) هر قاب برای اعضای همان پانل رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$\sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0$$
$$\sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \quad (22)$$

(x_i, y_i) : مختصات ابتدای عضو

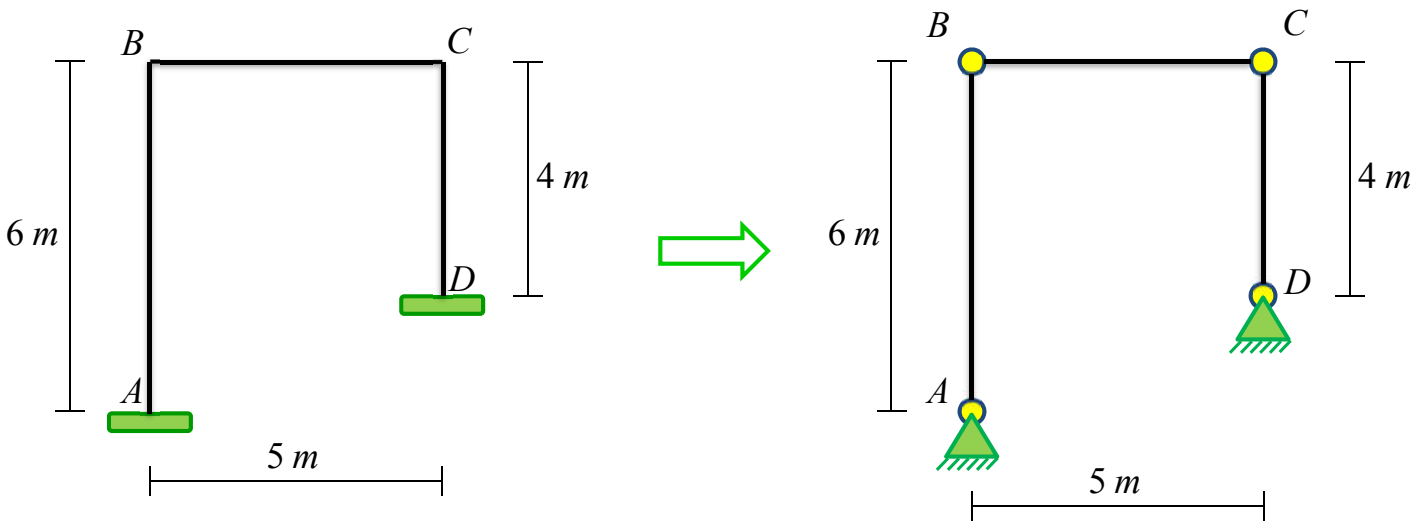
(x_j, y_j) : مختصات انتهای عضو

مثال ۱۰– مقدار ψ_{ij} هر یک از اعضای سازه نشان داده را تعیین نمایید.



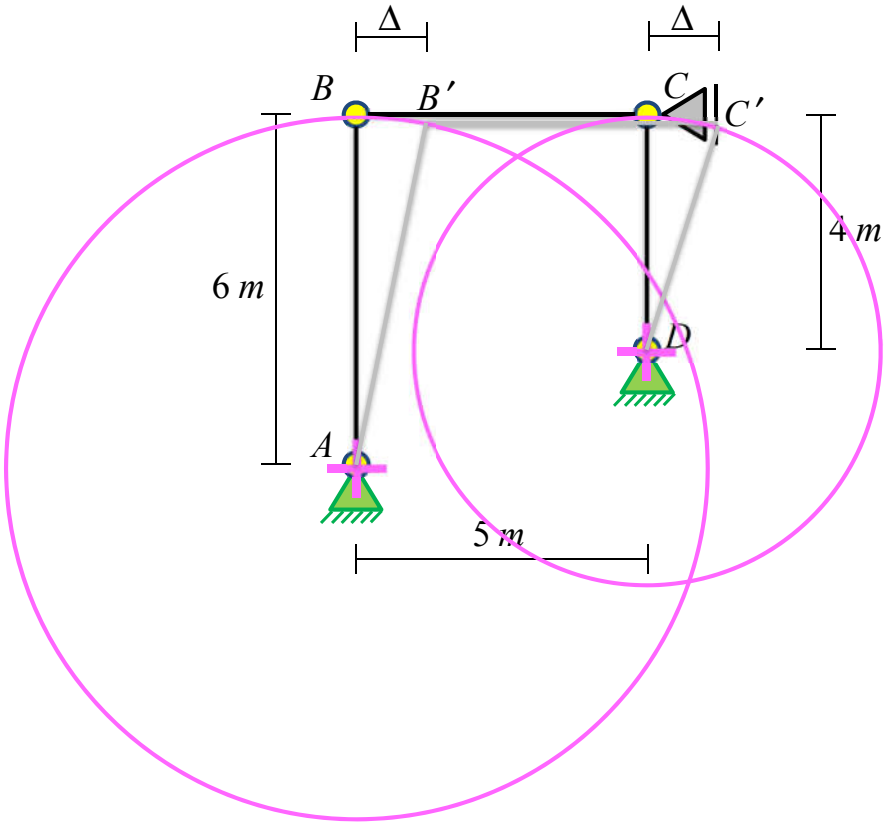
پاسخ مثال ۱۰– الف– روش هندسی

تعداد درجات آزادی انقالی به کمک روش اول تعیین می‌شود:



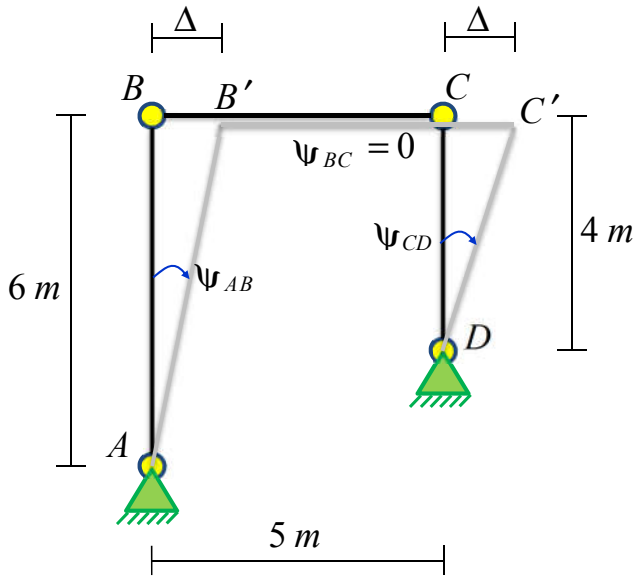
پاسخ مثال ۱۰– الف– روش هندسی

سازه تنها دارای یک درجه آزادی انتقالی است. اولین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.



پاسخ مثال ۱۰– الف– روش هندسی

سازه تنها دارای یک درجه آزادی انتقالی است. اولین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.

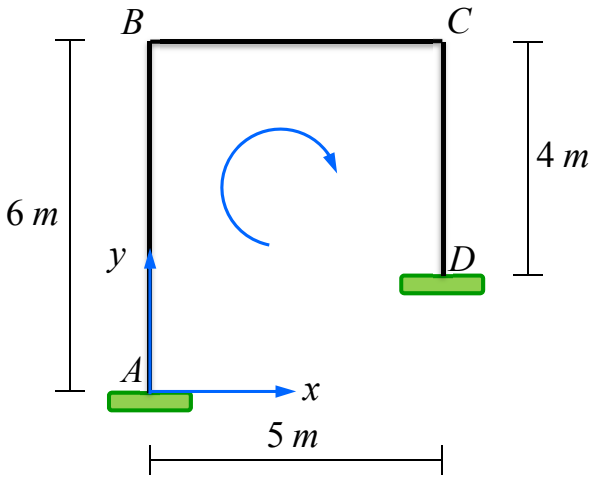


با توجه به هندسه شکل:

با فرض آن که در نتیجه:

$$\psi_{CD}=1.5\psi_1 \quad , \quad \psi_{AB}=\psi_1$$

پاسخ مثال ۱۰– ب– روش تحلیلی

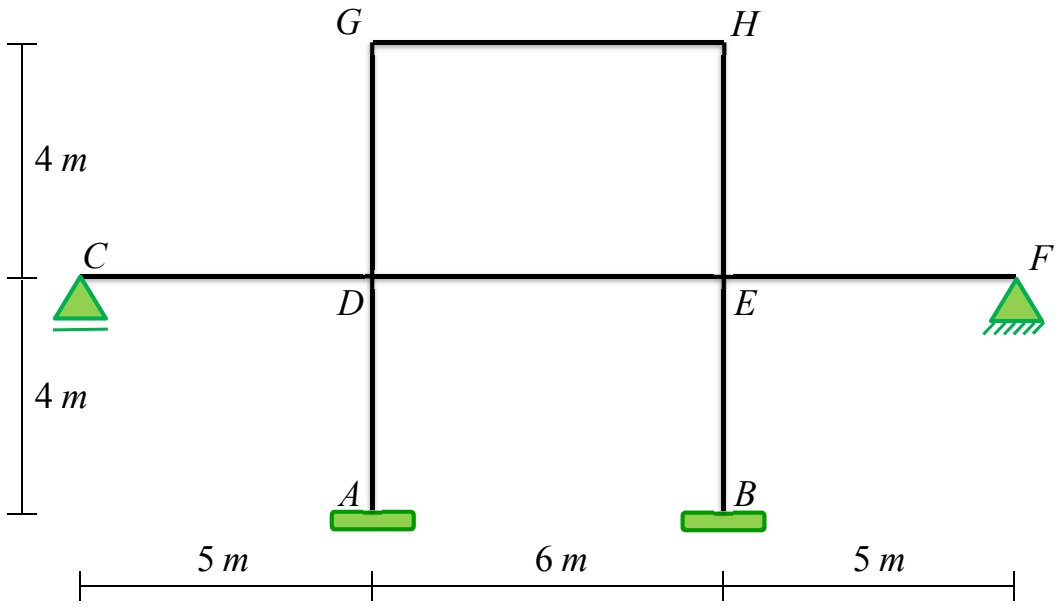


$$\Rightarrow \boxed{\psi_{BC} = 0}$$

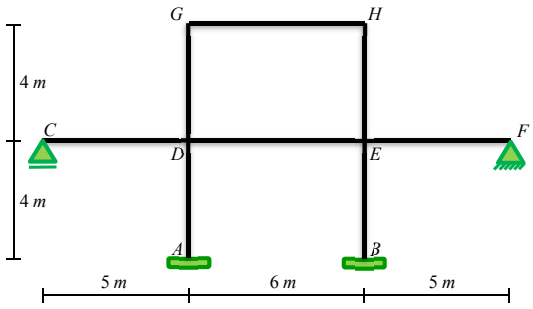
$$\Rightarrow \boxed{\psi_{CD} = 1.5\psi_{AB}} \quad (10.1)$$

$$if \ \boxed{\quad} \overset{(10.1)}{\Rightarrow} \boxed{\psi_{CD} = 1.5\psi_1}$$

مثال ۱۱– مقدار ψ_{ij} هر یک از اعضای سازه نشان داده را تعیین نمایید.

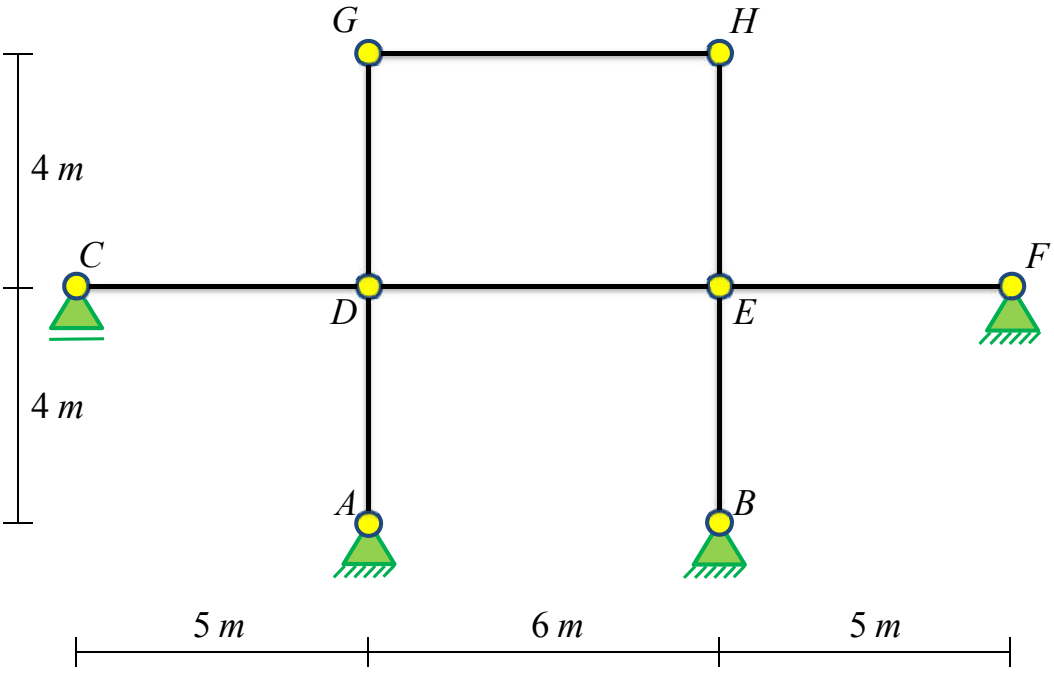


روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۱– الف– روش هندسی

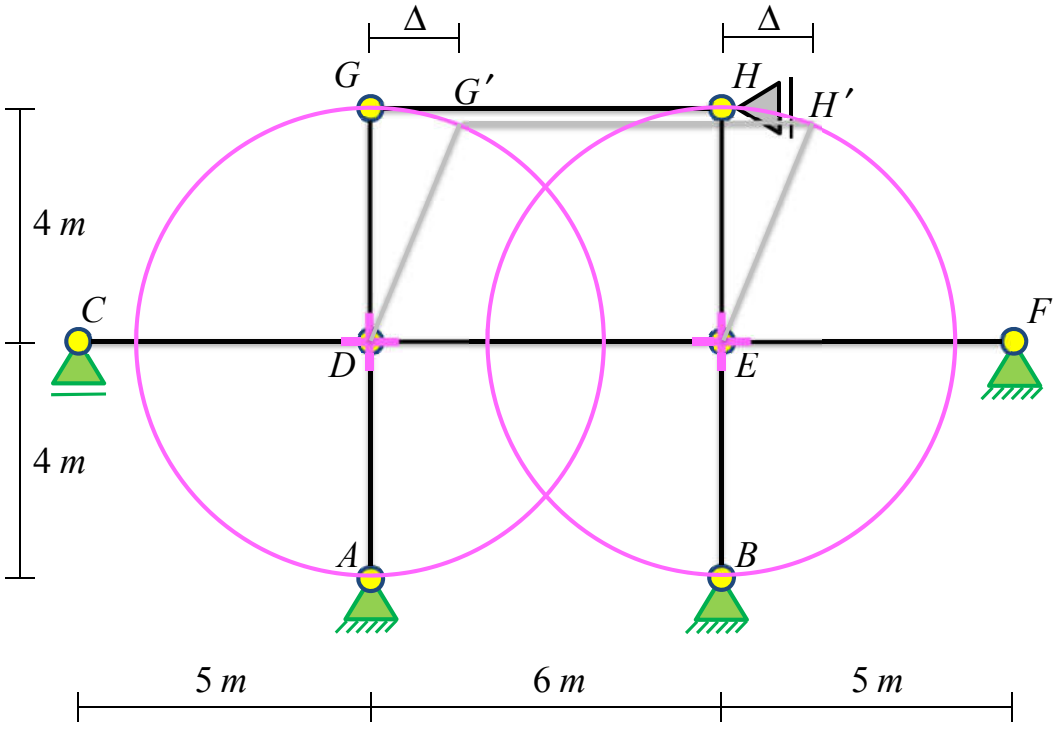
تعداد درجات آزادی انقالی به کمک روش اول تعیین می‌شود:



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

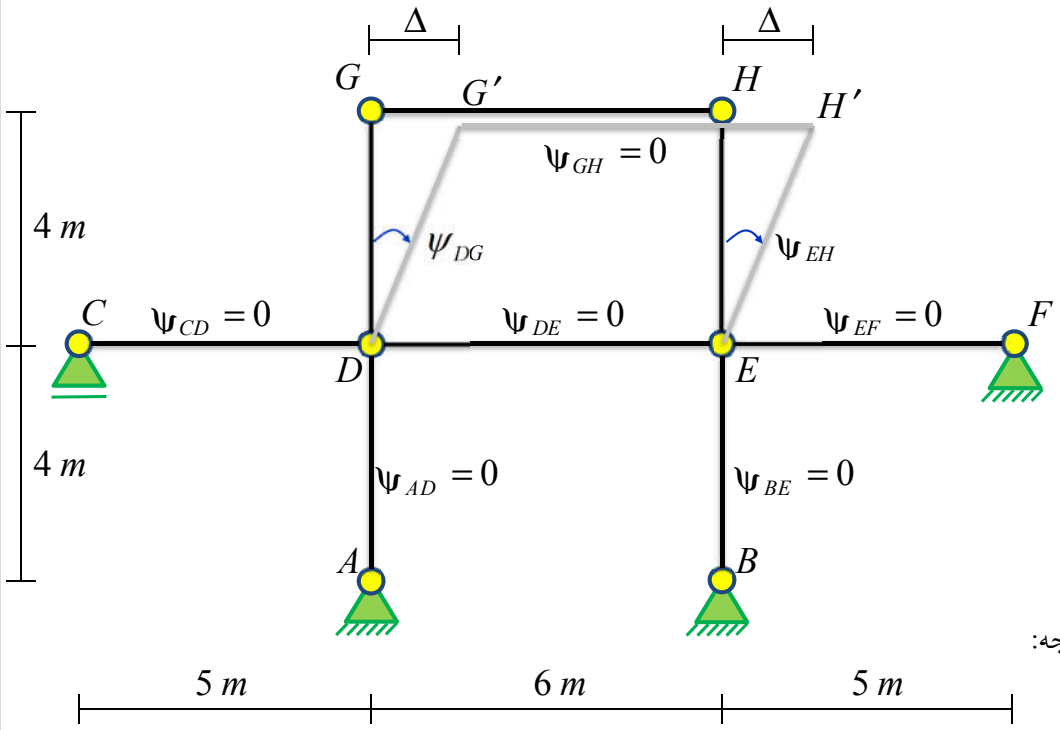
پاسخ مثال ۱۱– الف– روش هندسی

سازه تنها دارای یک درجه آزادی انتقالی است. اولین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.



پاسخ مثال ۱۱– الف– روش هندسی

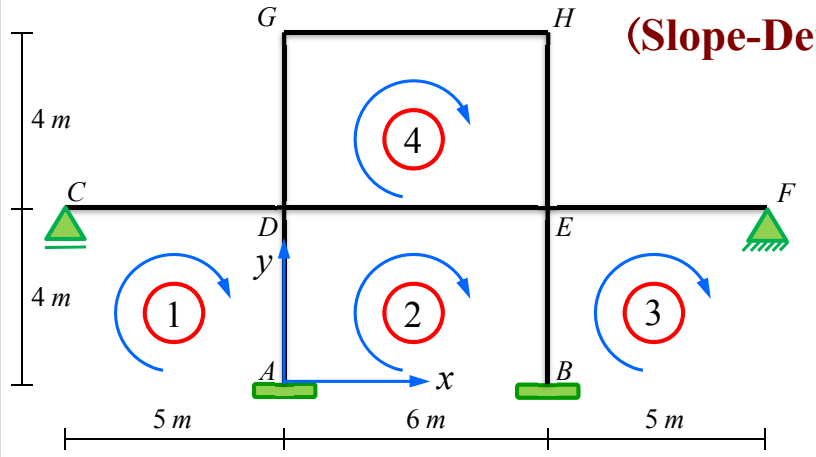
سازه تنها دارای یک درجه آزادی انتقالی است. اولین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.



با توجه به هندسه شکل:

با فرض آن که در نتیجه:

$$\psi_{DG}=\psi_{EH}=\psi_1$$



پاسخ مثال ۱۱– ب– روش تحلیلی

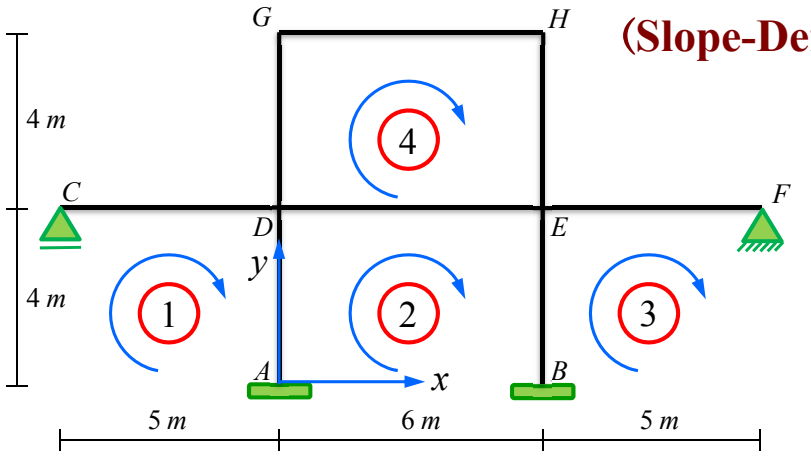
$$(22) \Rightarrow \begin{matrix}\sum(x_j-x_i)\psi_{ij}=0\\ \sum(y_j-y_i)\psi_{ij}=0\end{matrix}$$

$$\psi_{CD}=\psi_{AD}=0 \quad (11.1)$$

$Panel_2$:

$$(0-0)\psi_{AD}+(6-0)\psi_{DE}+(6-6)\psi_{BE}=6\psi_{DE}=0$$
$$(4-0)\psi_{AD}+(4-4)\psi_{DE}+(0-4)\psi_{BE}=4\psi_{AD}-4\psi_{BE}=0$$

$$\overset{(11.1)}{\Rightarrow} \psi_{DE}=\psi_{BE}=0 \quad (11.2)$$



پاسخ مثال ۱۱– ب– روش تحلیلی

$$(22) \Rightarrow \begin{matrix} \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \\ \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \end{matrix}$$

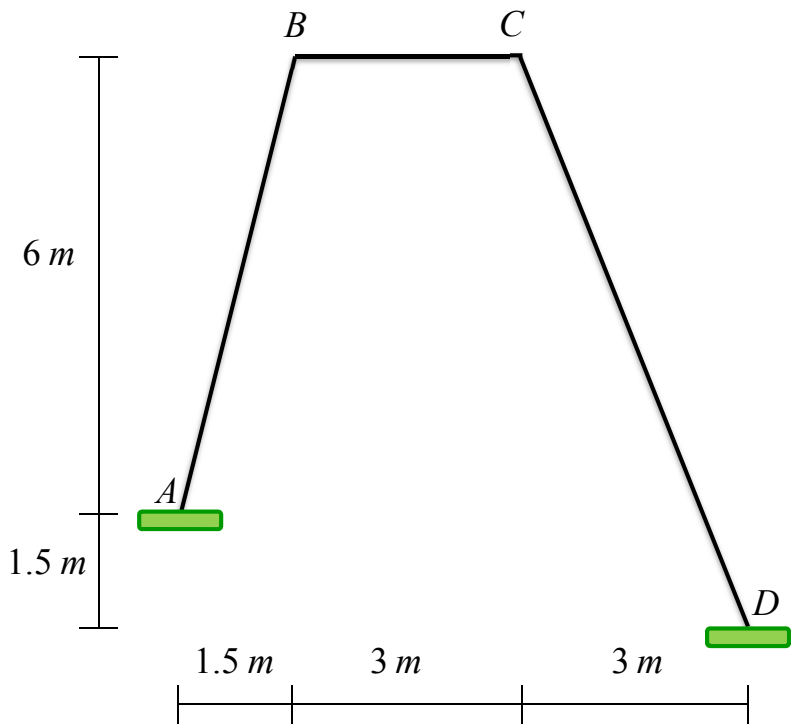
$Panel_3$:

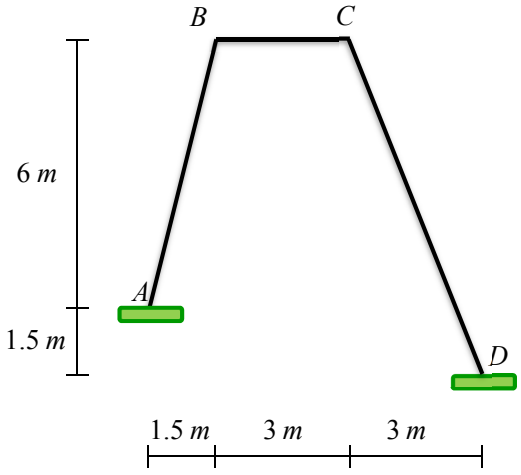
$$\begin{matrix} (6-6)\psi_{BE} + (11-6)\psi_{EF} = 5\psi_{EF} = 0 \\ (4-0)\psi_{BE} + (4-4)\psi_{EF} = 4\psi_{BE} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\psi_{EF} = \psi_{BE} = 0} \quad (11.3)$$

$$\boxed{\begin{matrix} \psi_{GH} = 0 \\ \psi_{DG} = \psi_{EH} \end{matrix}} \quad (11.4)$$

$$if \quad \boxed{\psi_{DG} = \psi_1} \overset{(11.4)}{\Rightarrow} \boxed{\psi_{EH} = \psi_1}$$

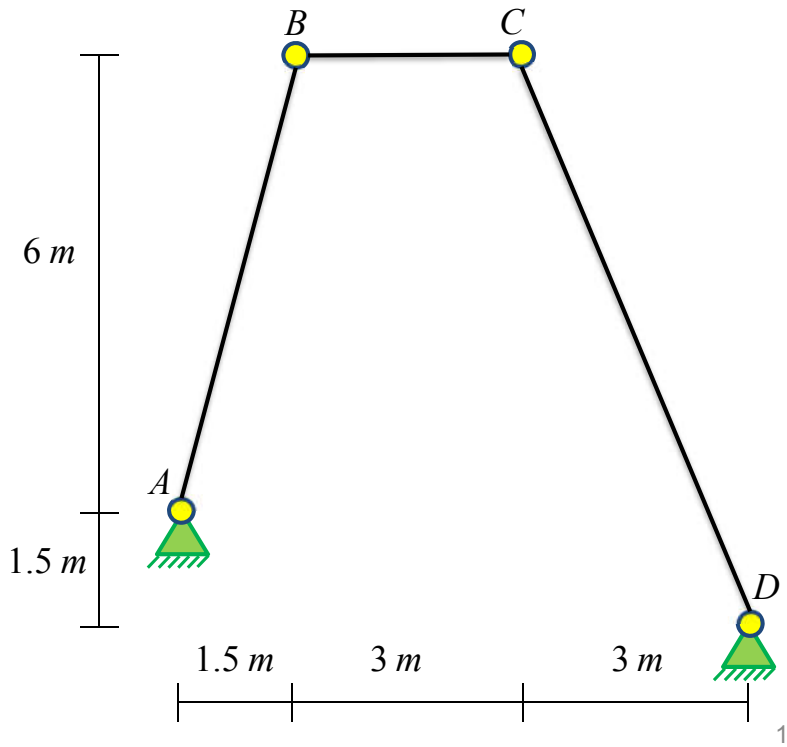
مثال ۱۲– مقدار ψ_{ij} هر یک از اعضای سازه نشان داده را تعیین نمایید.





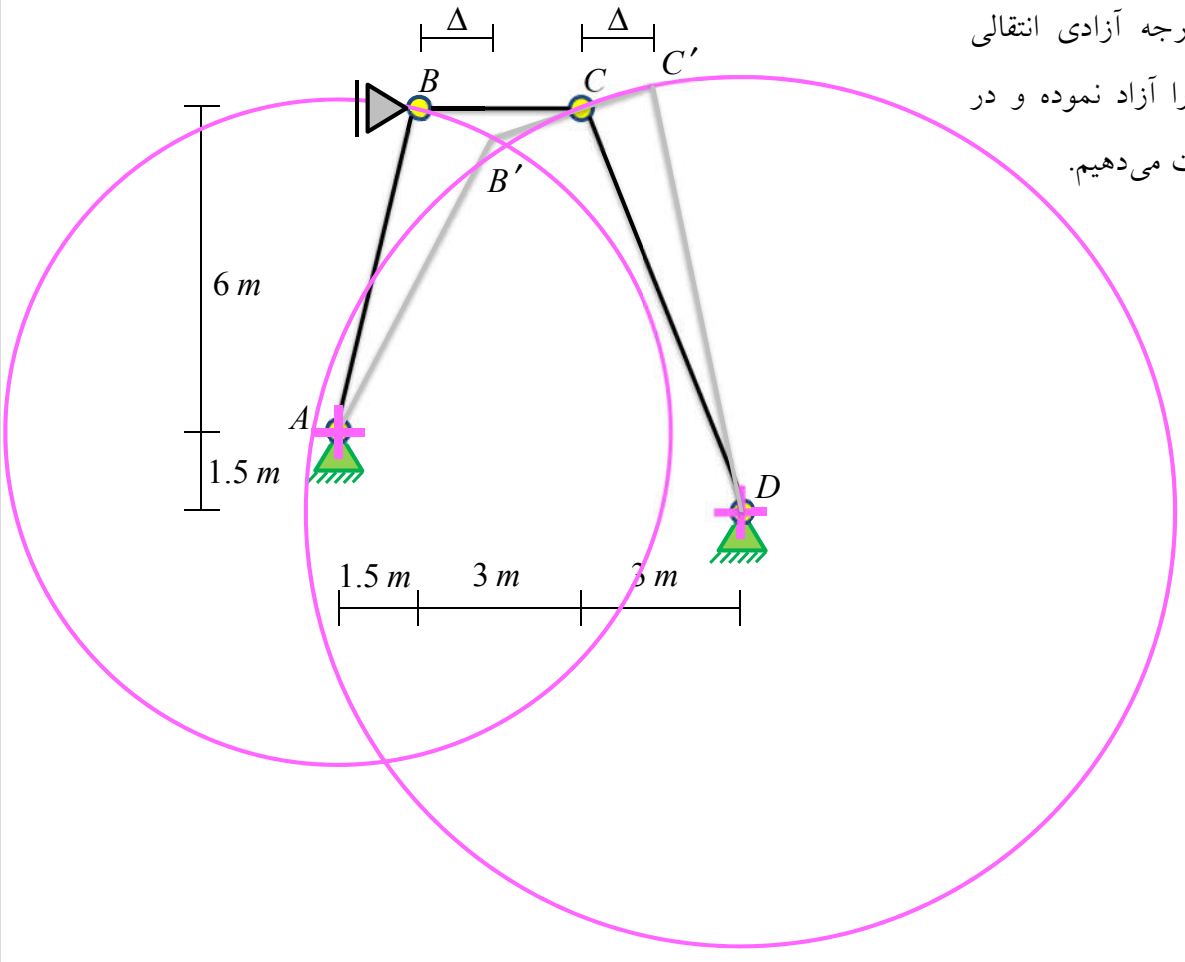
پاسخ مثال ۱۲– الف– روش هندسی

تعداد درجات آزادی انقالی به کمک روش اول تعیین می‌شود:



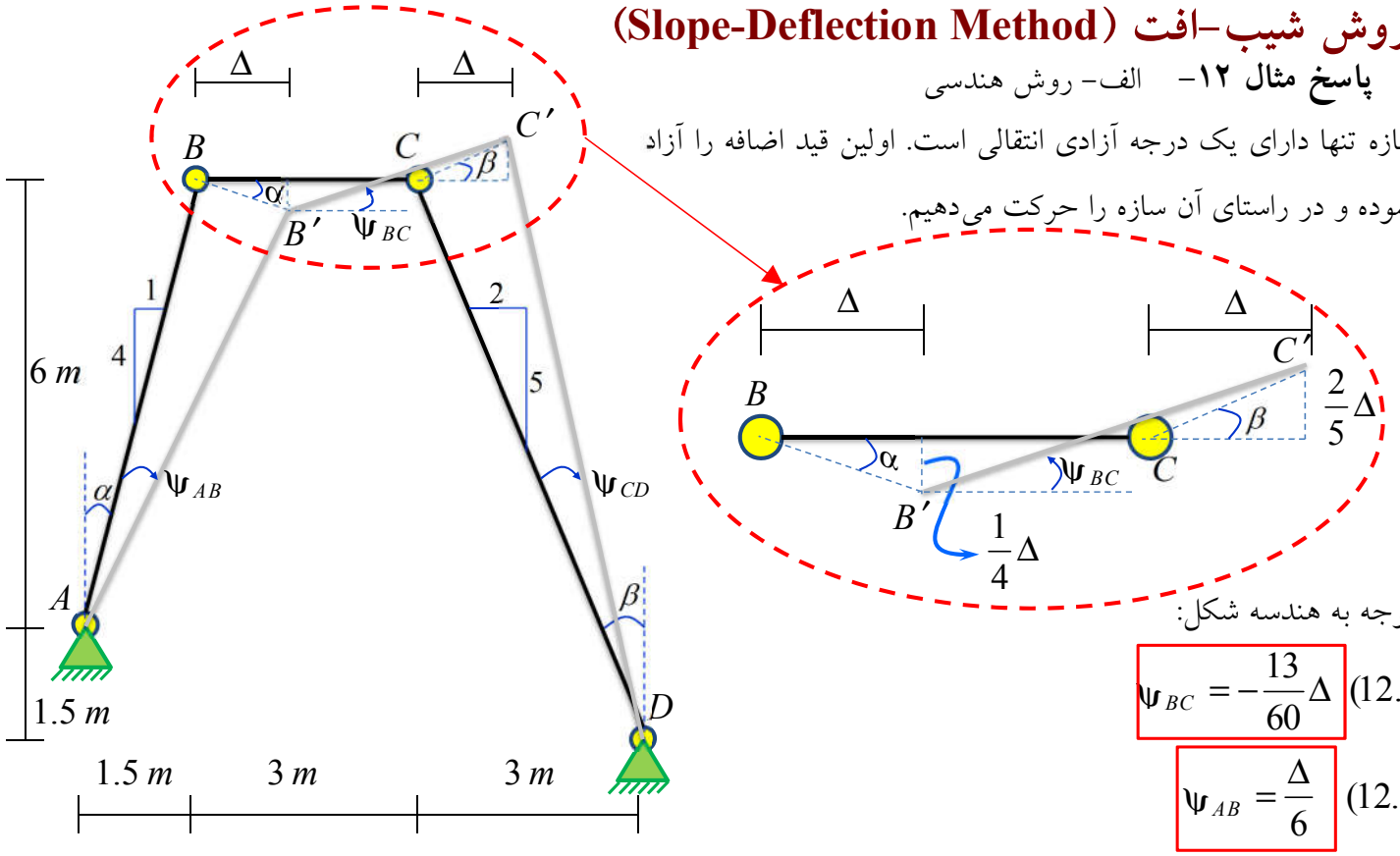
پاسخ مثال ۱۲– الف– روش هندسی

سازه تنها دارای یک درجه آزادی انتقالی است. اولین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.



پاسخ مثال ۱۲– الف– روش هندسی

سازه تنها دارای یک درجه آزادی انتقالی است. اولین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.



با توجه به هندسه شکل:

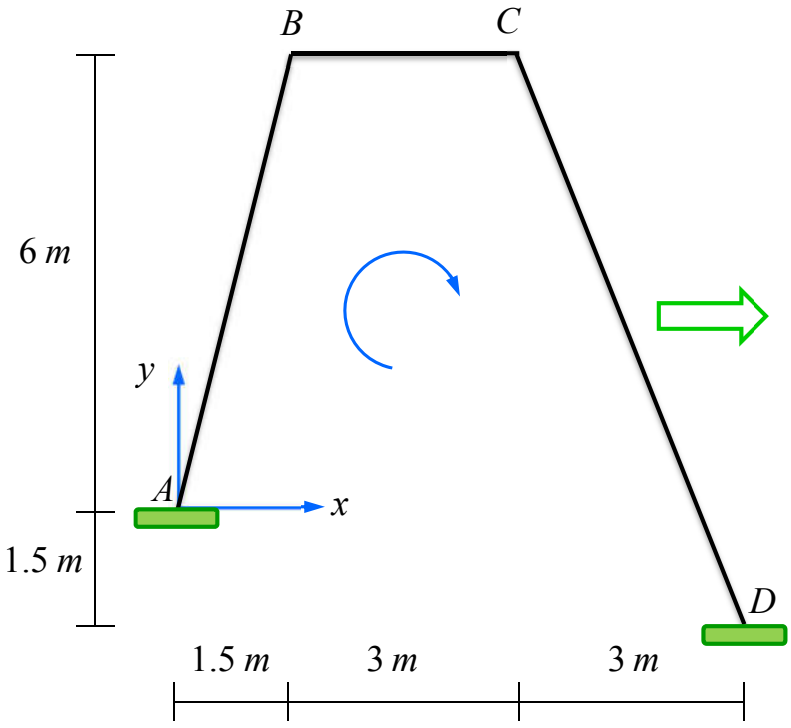
$$\psi_{BC} = -\frac{13}{60}\Delta \quad (12.1)$$

$$\psi_{AB} = \frac{\Delta}{6} \quad (12.2)$$

$$\psi_{CD} = \frac{\Delta}{7.5} \quad (12.3)$$

$$if \xrightarrow{(12.1)\,to\,(12.3)} \Rightarrow \psi_{BC} = -1.3\psi_1 \;,\; \psi_{AB} = \psi_1 \;,\; \psi_{CD} = 0.8\psi_1$$

پاسخ مثال ۱۲– ب– روش تحلیلی



$$(22) \Rightarrow \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.5\psi_{AB} + 3\psi_{BC} + 3\psi_{CD} = 0 \quad (12.4)$$

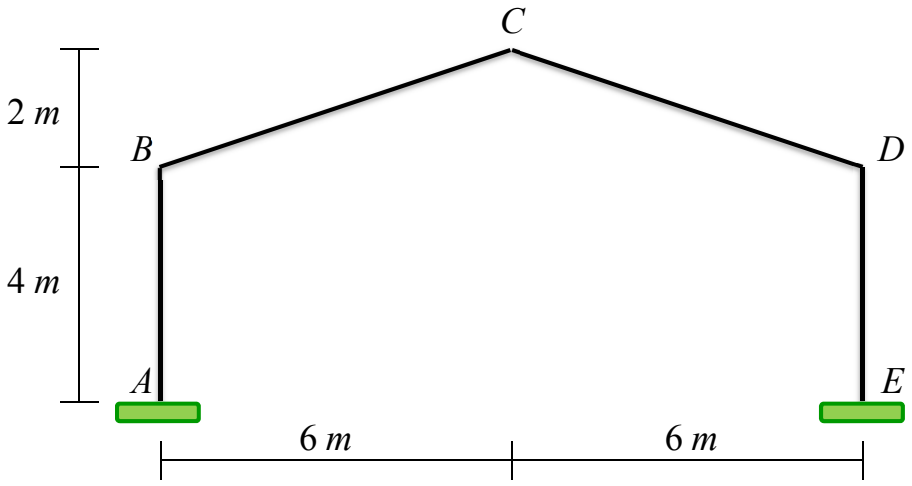
$$(22) \Rightarrow \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\psi_{AB} - 7.5\psi_{CD} = 0 \quad (12.5)$$

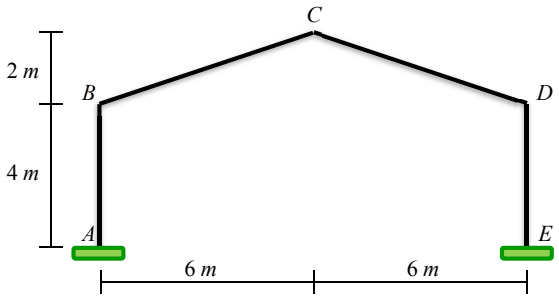
$$if \;\square \xrightarrow{(12.4)\&(12.5)} \Rightarrow \psi_{CD} = 0.8\psi_1 \;,\; \psi_{BC} = -1.3\psi_1$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

مثال ۱۳– مقدار ψ_{ij} هر یک از اعضای سازه نشان داده را تعیین نمایید.

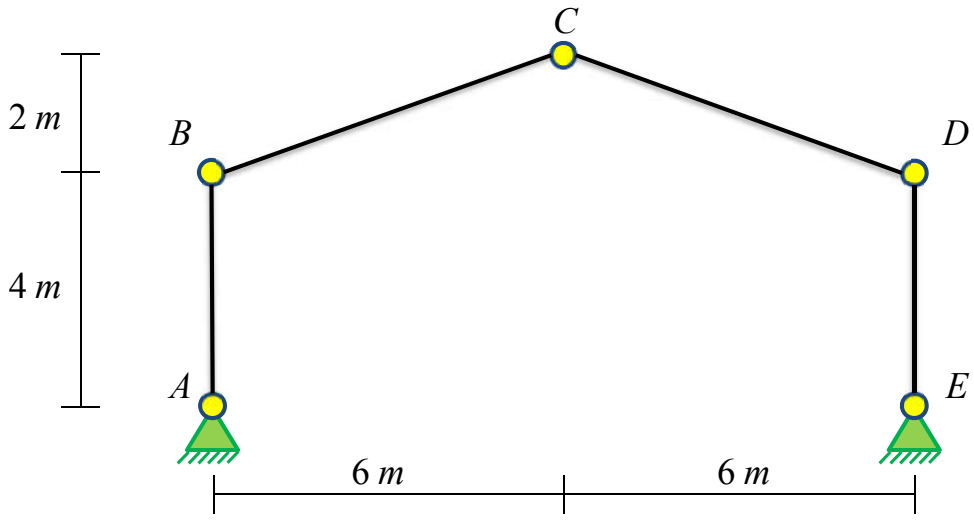


روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۳– الف– روش هندسی

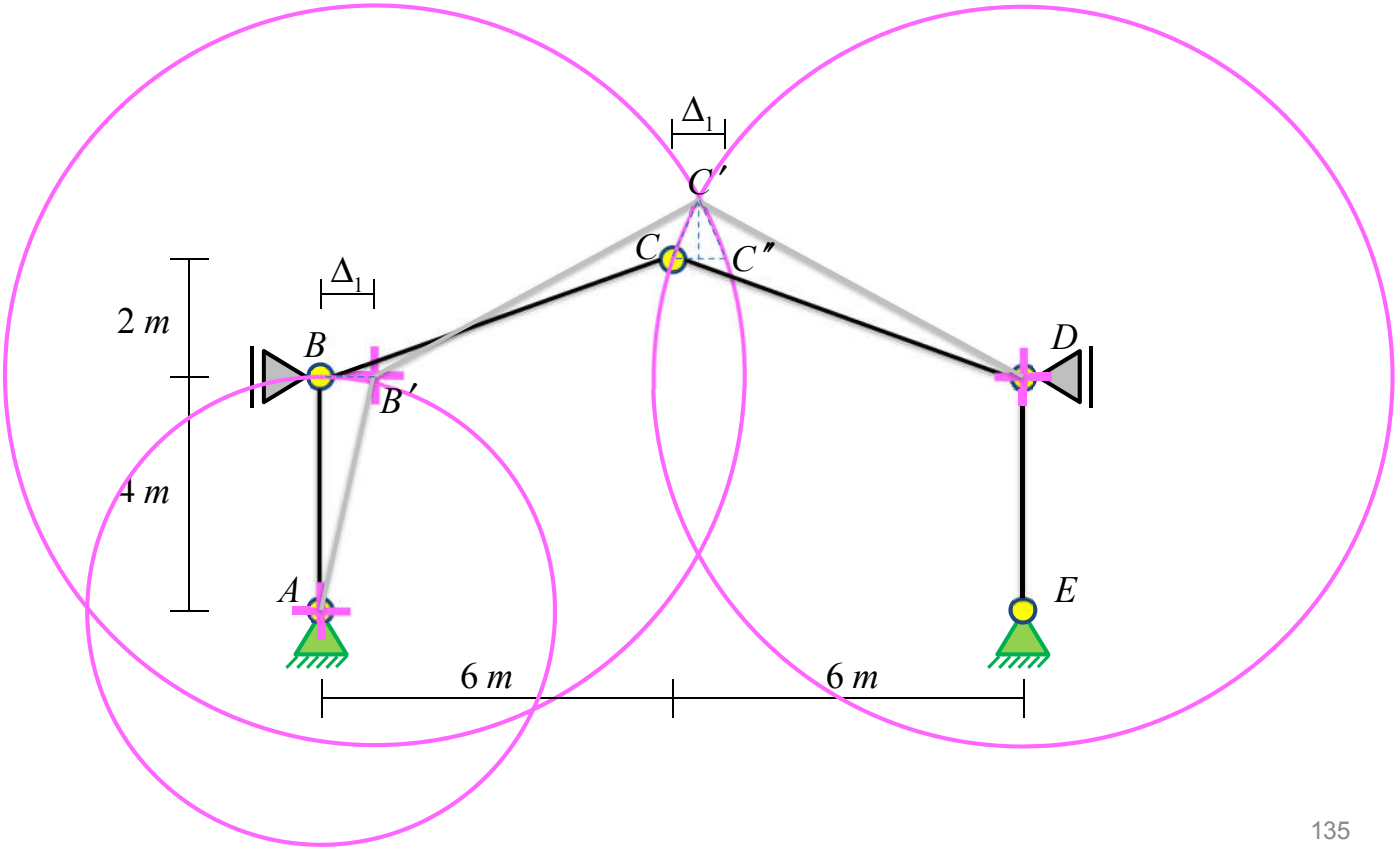
تعداد درجات آزادی انقالی به کمک روش اول تعیین می‌شود:



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

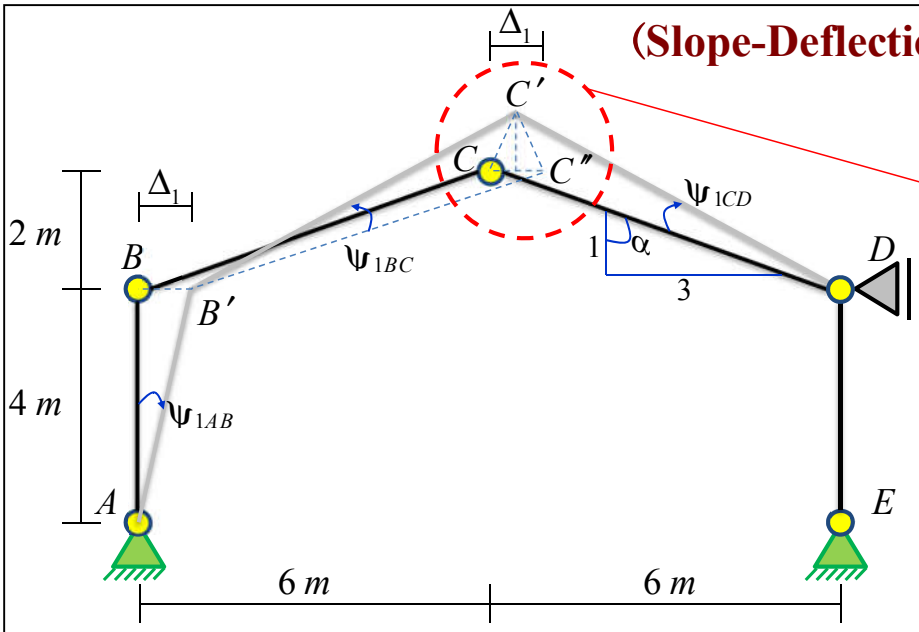
پاسخ مثال ۱۳– الف– روش هندسی

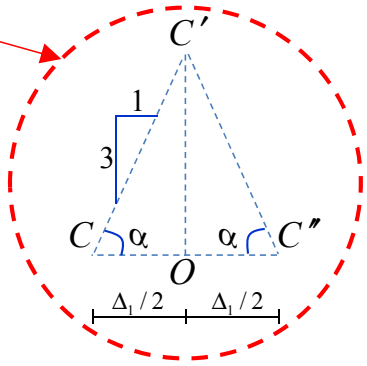
سازه دارای دو درجه آزادی انتقالی است. اولین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۳– الف– روش هندسی





با توجه به هندسه شکل:

$$C'O = \frac{3}{2}\Delta_1 \quad (13.1)$$

$$CC' = C''C' = \frac{\sqrt{10}}{2}\Delta_1 \quad (13.2)$$

$$\psi_{1AB} = \frac{\Delta_1}{4} \quad (13.3)$$

$$\psi_{1BC} = -\frac{\Delta_1}{4} \quad (13.4)$$

$$\psi_{1DC} = \frac{\Delta_1}{4} \quad (13.5)$$

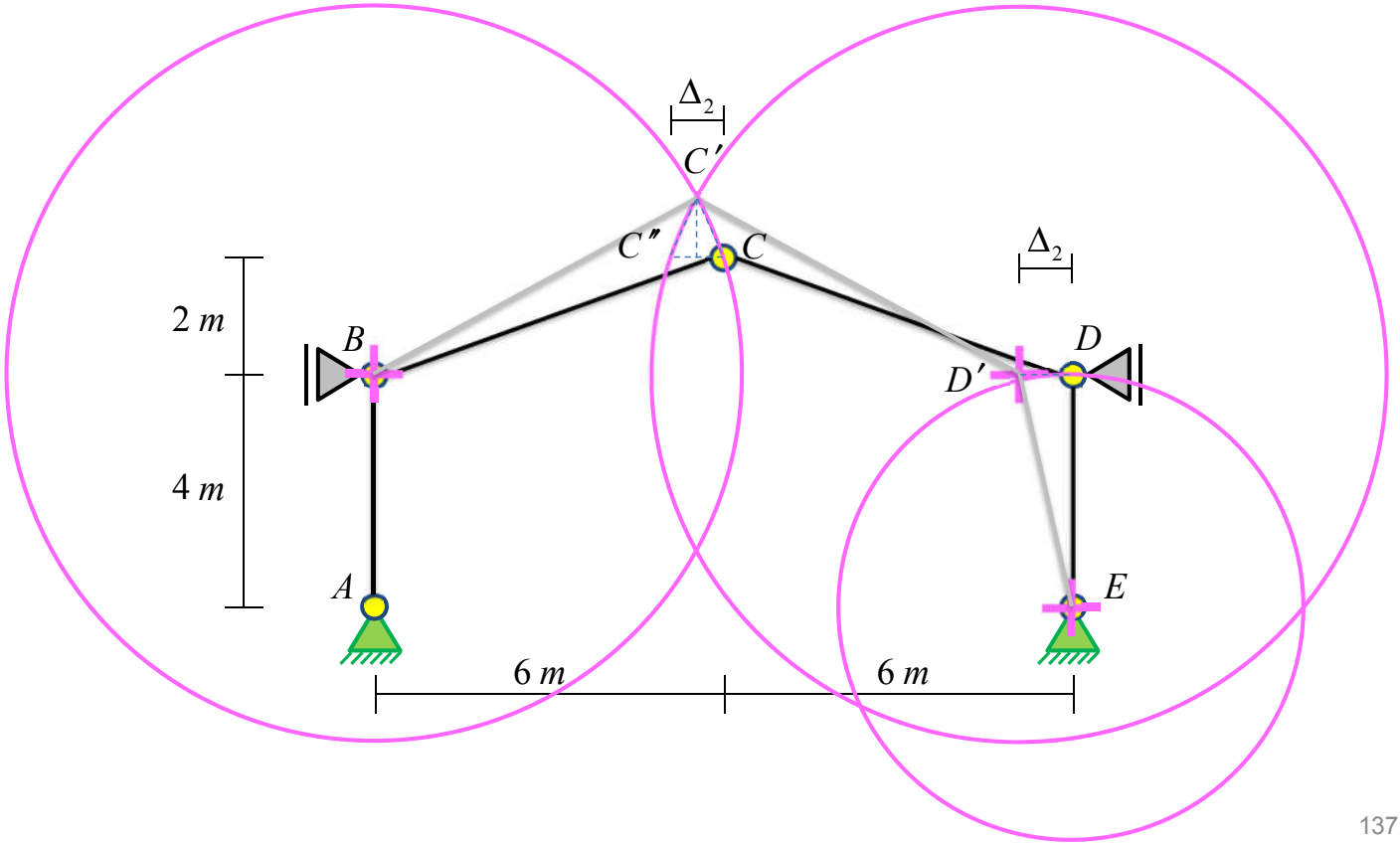
$$if \xrightarrow{(13.3)\,to\,(13.5)} \psi_{1ED} = 0$$

$$\psi_{1AB} = \psi_1 \;,\; \psi_{1BC} = -\psi_1 \;,\; \psi_{1DC} = \psi_1 \quad (13.6)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

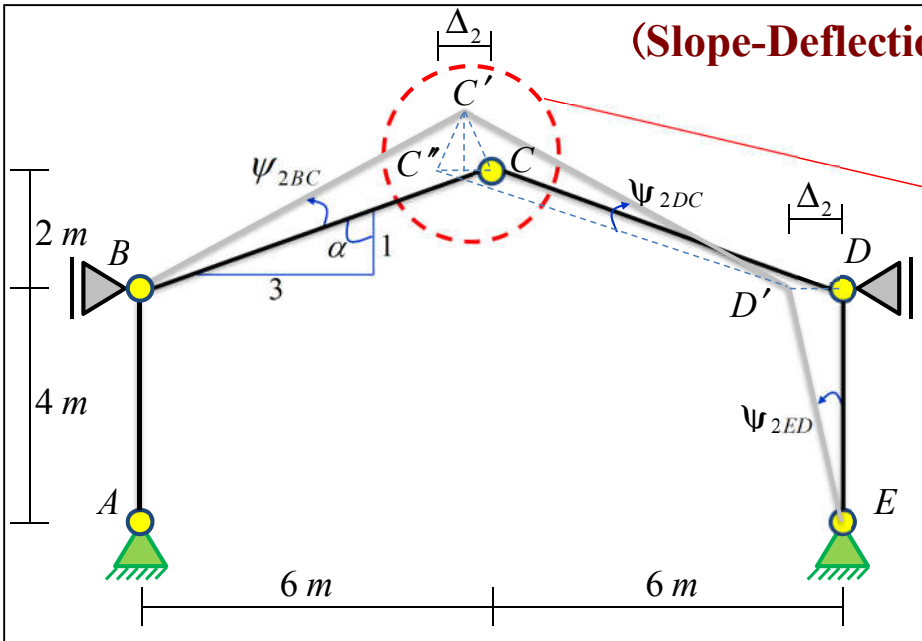
پاسخ مثال ۱۳– الف– روش هندسی

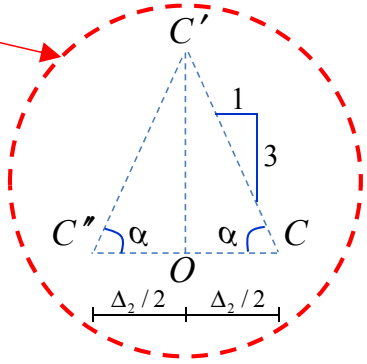
دومین قید اضافه را آزاد نموده و در راستای آن سازه را حرکت می‌دهیم.



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۳– الف– روش هندسی





با توجه به هندسه شکل:

$$\tan\alpha = \frac{3}{1} = \frac{C'O}{\Delta_2/2} \Rightarrow \boxed{C'O = \frac{3}{2}\Delta_2} \quad (13.7)$$

$$\overset{(13.7)}{\Rightarrow} \quad CC' = C''C' = \sqrt{(3\Delta_2/2)^2 + (\Delta_2/2)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{CC' = C''C' = \frac{\sqrt{10}}{2}\Delta_2} \quad (13.8)$$

$$\boxed{\psi_{2ED} = -\frac{\Delta_2}{4}} \quad (13.9)$$

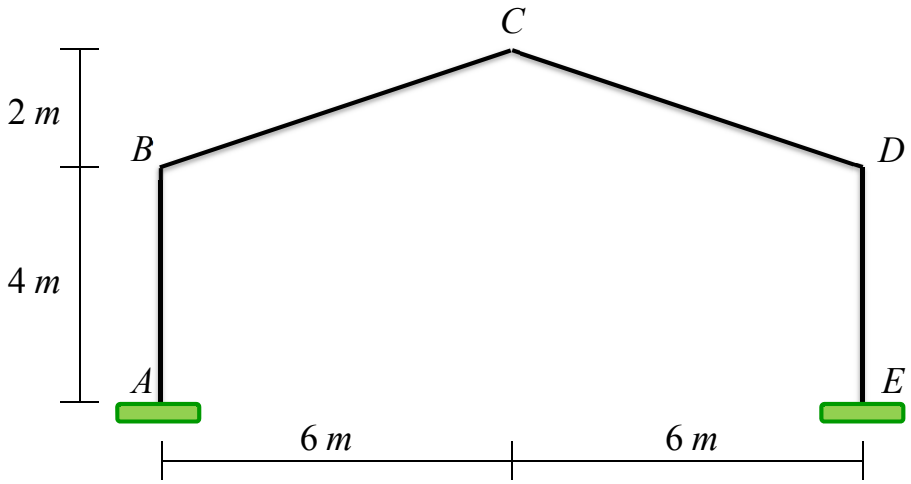
$$\psi_{2BC} = -\frac{CC'}{BC} \overset{(13.8)}{\Rightarrow} \psi_{2BC} = -\frac{\Delta_2\sqrt{10}/2}{\sqrt{2^2+6^2}} \Rightarrow \boxed{\psi_{2BC} = -\frac{\Delta_2}{4}} \quad (13.10)$$

$$\psi_{2DC} = \frac{C'C''}{C''D'} \overset{(13.8)}{\Rightarrow} \psi_{2DC} = \frac{\Delta_2\sqrt{10}/2}{\sqrt{2^2+6^2}} \Rightarrow \boxed{\psi_{2DC} = \frac{\Delta_2}{4}} \quad (13.11)$$

$$if \quad -\frac{\Delta_2}{4} = \psi_2 \overset{(13.9)\,to\,(13.11)}{\Rightarrow} \boxed{\psi_{2AB} = 0}$$

$$\boxed{\psi_{2ED} = \psi_2}, \quad \boxed{\psi_{2BC} = \psi_2}, \quad \boxed{\psi_{2DC} = -\psi_2} \quad (13.12)$$

پاسخ مثال ۱۳– الف– روش هندسی



$$(21) \Rightarrow \psi_{ij} = \psi_{1ij} + \psi_{2ij} + \cdots + \psi_{nij} \quad \overset{(13.6)\&(13.12)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\psi_{AB} = \psi_1}$$

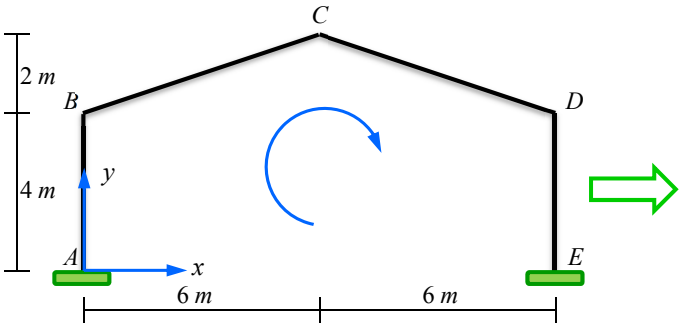
$$\boxed{\psi_{BC} = \psi_2 - \psi_1}$$

$$\psi_{DC} = \psi_{1DC} + \psi_{2DC} = \psi_1 - \psi_2 \Rightarrow \boxed{\psi_{DC} = \psi_1 - \psi_2}$$

$$\psi_{ED} = \psi_{1ED} + \psi_{2ED} = 0 + \psi_2 \Rightarrow \boxed{\psi_{ED} = \psi_2}$$

پاسخ مثال ۱۳– ب– روش تحلیلی

$$(22) \Rightarrow \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{\psi_{BC} + \psi_{DC} = 0} \quad (13.13)$$

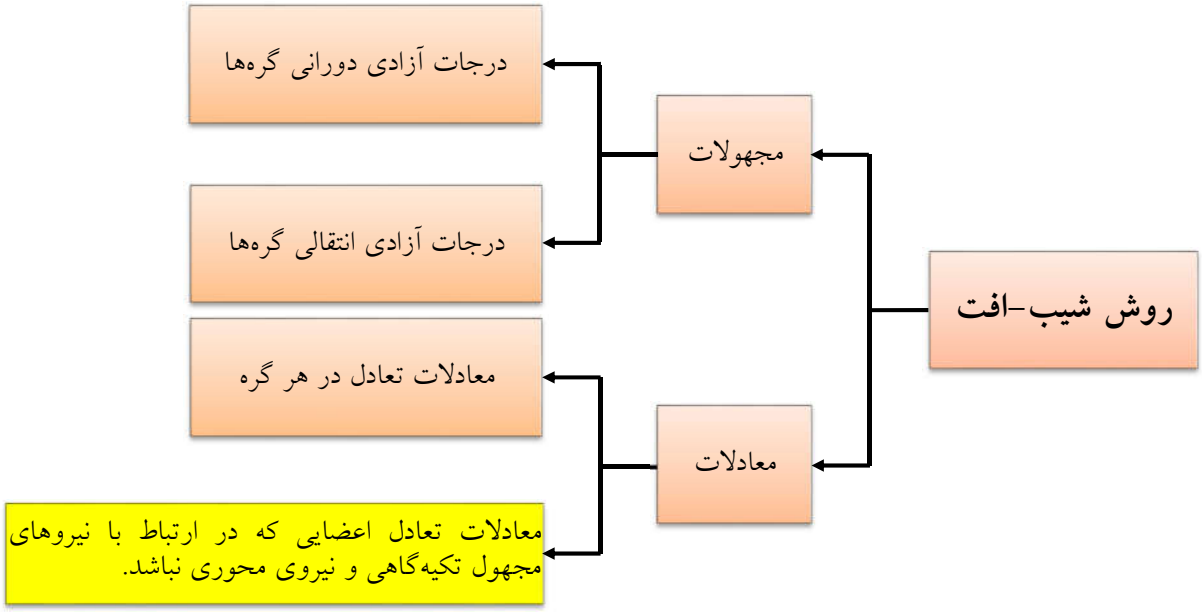
$$(22) \Rightarrow \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{4\psi_{AB} + 2\psi_{BC} - 2\psi_{DC} - 4\psi_{ED} = 0} \quad (13.14)$$

if $\boxed{}$ $\overset{(13.13)\&(13.14)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\psi_{BC} = \psi_2 - \psi_1}$, $\boxed{\psi_{DC} = \psi_1 - \psi_2}$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

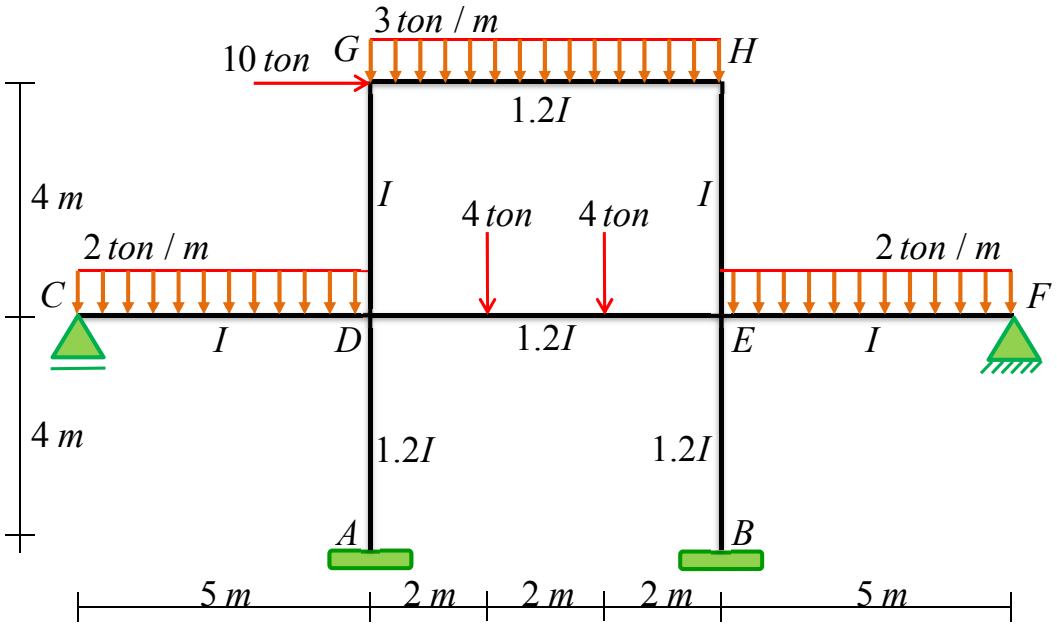
کاربرد روش شیب–افت در تحلیل قاب‌های نامعین با درجه آزادی انتقالی



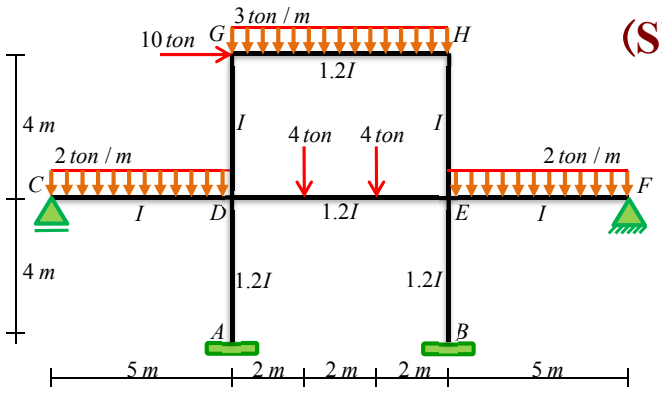
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

مثال ۱۴– نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$$EI = 200 \ \ ton.m^2$$



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۴–

محاسبه سختی نسبی اعضا:

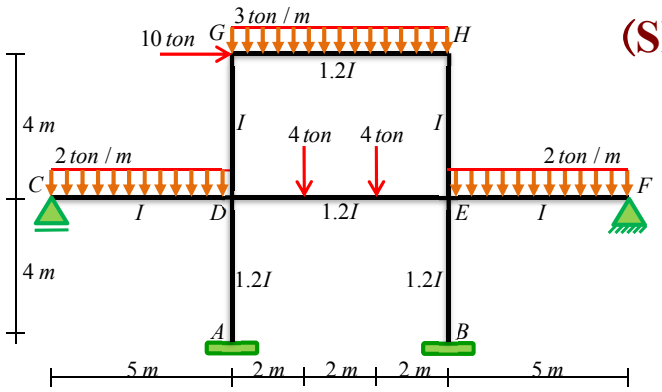
$$k_{DA}=k_{AD}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{AD}=\frac{E(1.2I)}{\ell_{AD}}=\frac{1.2\times 200}{4}\Rightarrow \boxed{k_{DA}=k_{AD}=60\,ton.m}$$

$$k_{EB}=k_{BE}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BE}=\frac{E(1.2I)}{\ell_{BE}}=\frac{1.2\times 200}{4}\Rightarrow \boxed{k_{EB}=k_{BE}=60\,ton.m}$$

$$k_{GD}=k_{DG}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{DG}=\frac{EI}{\ell_{DG}}=\frac{200}{4}\Rightarrow \boxed{k_{GD}=k_{DG}=50\,ton.m}$$

$$k_{HE}=k_{EH}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{EH}=\frac{EI}{\ell_{EH}}=\frac{200}{4}\Rightarrow \boxed{k_{HE}=k_{EH}=50\,ton.m}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۴–

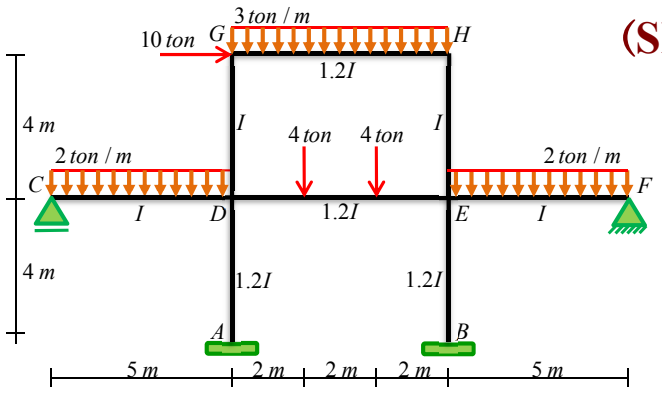
محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$k_{CD}=k_{DC}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{DC}=\frac{EI}{\ell_{DC}}=\frac{200}{5}\Rightarrow \boxed{k_{CD}=k_{DC}=40\,ton.m}$$

$$k_{DE}=k_{ED}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{ED}=\frac{E(1.2I)}{\ell_{ED}}=\frac{1.2\times 200}{6}\Rightarrow \boxed{k_{DE}=k_{ED}=40\,ton.m}$$

$$k_{EF}=k_{FE}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{FE}=\frac{EI}{\ell_{FE}}=\frac{200}{5}\Rightarrow \boxed{k_{EF}=k_{FE}=40\,ton.m}$$

$$k_{GH}=k_{HG}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{GH}=\frac{E(1.2I)}{\ell_{GH}}=\frac{1.2\times 200}{6}\Rightarrow \boxed{k_{HG}=k_{GH}=40\,ton.m}$$



پاسخ مثال ۱۴–

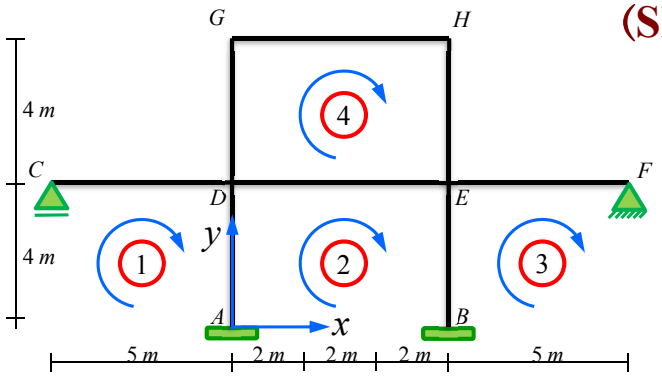
محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$FEM_{DE} = -FEM_{ED} = -\frac{48}{9}\, ton.m$$

$$FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{\omega \ell^2}{12} = -\frac{2(5)^2}{12} \Rightarrow \boxed{FEM_{CD} = -FEM_{DC} = -\frac{25}{6}\, ton.m}$$

$$FEM_{EF} = -FEM_{FE} = -\frac{\omega \ell^2}{12} = -\frac{2(5)^2}{12} \Rightarrow \boxed{FEM_{EF} = -FEM_{FE} = -\frac{25}{6}\, ton.m}$$

$$\boxed{FEM_{GH} = -FEM_{HG} = -9\, ton.m}$$



پاسخ مثال ۱۴–

محاسبه ψ_{ij} هر یک از اعضا

$$(22) \Rightarrow \begin{matrix} \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \\ \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \end{matrix}$$

$Panel_1$:

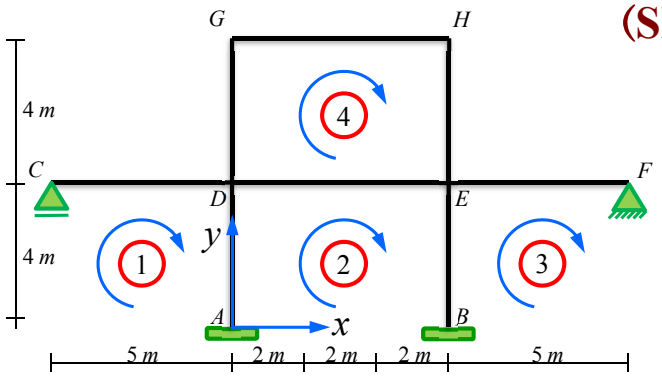
$$\begin{matrix} (0-(-5))\psi_{CD} + (0-0)\psi_{AD} = 5\psi_{CD} = 0 \\ (4-4)\psi_{CD} + (4-0)\psi_{AD} = 4\psi_{AD} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\psi_{CD} = \psi_{AD} = 0} \quad (14.1)$$

$Panel_2$:

$$\begin{matrix} (0-0)\psi_{AD} + (6-0)\psi_{DE} + (6-6)\psi_{BE} = 6\psi_{DE} = 0 \\ (4-0)\psi_{AD} + (4-4)\psi_{DB} + (0-4)\psi_{BE} = 4\psi_{AD} - 4\psi_{BE} = 0 \end{matrix} \overset{(14.1)}{\Rightarrow} \boxed{\psi_{DE} = \psi_{BE} = 0} \quad (14.2)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



محاسبه ψ_{ij} هر یک از اعضا

$$(22) \Rightarrow \begin{matrix} \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \\ \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \end{matrix}$$

$Panel_3$:

$$\begin{matrix} (6-6)\psi_{BE} + (11-6)\psi_{EF} = 5\psi_{EF} = 0 \\ (4-0)\psi_{BE} + (4-4)\psi_{EF} = 4\psi_{BE} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\psi_{EF} = \psi_{BE} = 0} \quad (14.3)$$

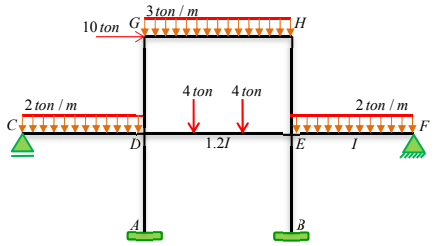
$Panel_4$:

$$\begin{matrix} (0-0)\psi_{DG} + (6-0)\psi_{GH} + (6-6)\psi_{EH} + (0-6)\psi_{DE} = 6\psi_{GH} - 6\psi_{DE} = 0 \\ (8-4)\psi_{DG} + (8-8)\psi_{GH} + (4-8)\psi_{EH} + (4-4)\psi_{DE} = 4\psi_{DG} - 4\psi_{EH} = 0 \end{matrix} \overset{(14.2)}{\Rightarrow} \boxed{\begin{matrix} \psi_{GH} = 0 \\ \psi_{DG} = \psi_{EH} \end{matrix}} \quad (14.4)$$

$$\boxed{if \quad \psi_{DG} = \psi_1 \overset{(14.4)}{\Rightarrow} \psi_{EH} = \psi_1} \quad (14.5)$$

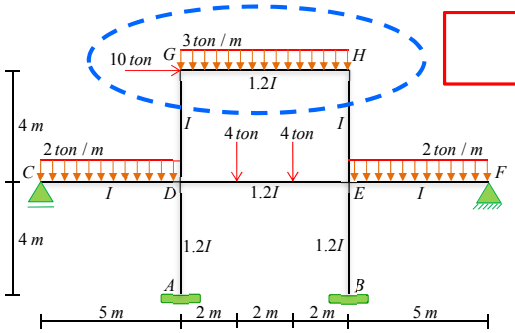
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



- مجهولات
  - درجات آزادی دورانی گره‌ها
  - درجات آزادی انتقالی گره‌ها
- معادلات
  - معادلات تعادل در هر گره
  - معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نباشد.
- روش شیب–افت

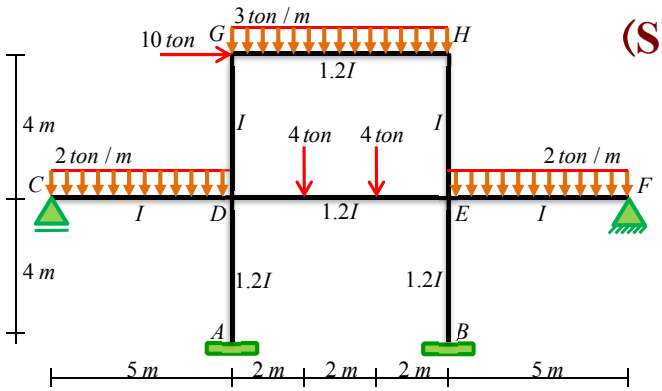
(14.6)



دستگاه ۷ معادله ۷ مجهول

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{CD}=2(EI/\ell)_{CD}(2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD})+FEM_{CD} \Rightarrow \boxed{M_{CD}=k_{CD}(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_{CD})+FEM_{CD}}$$

$$M_{DC}=2(EI/\ell)_{DC}(2\theta_D+\theta_C-3\psi_{DC})+FEM_{DC} \Rightarrow \boxed{M_{DC}=k_{DC}(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_{DC})+FEM_{DC}}$$

$$M_{DE}=2(EI/\ell)_{DE}(2\theta_D+\theta_E-3\psi_{DE})+FEM_{DE} \Rightarrow \boxed{M_{DE}=k_{DE}(4\theta_D+2\theta_E-6\psi_{DE})+FEM_{DE}}$$

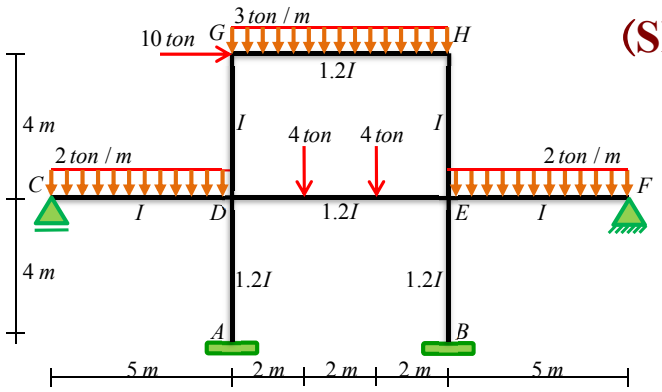
$$M_{ED}=2(EI/\ell)_{ED}(2\theta_E+\theta_D-3\psi_{ED})+FEM_{ED} \Rightarrow \boxed{M_{ED}=k_{ED}(4\theta_E+2\theta_D-6\psi_{ED})+FEM_{ED}}$$

$$M_{EF}=2(EI/\ell)_{EF}(2\theta_E+\theta_F-3\psi_{EF})+FEM_{EF} \Rightarrow \boxed{M_{EF}=k_{EF}(4\theta_E+2\theta_F-6\psi_{EF})+FEM_{EF}}$$

$$M_{FE}=2(EI/\ell)_{FE}(2\theta_F+\theta_E-3\psi_{FE})+FEM_{FE} \Rightarrow \boxed{M_{FE}=k_{FE}(4\theta_F+2\theta_E-6\psi_{FE})+FEM_{FE}}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{GH}=2(EI/\ell)_{GH}(2\theta_G+\theta_H-3\psi_{GH})+FEM_{GH} \Rightarrow \boxed{M_{GH}=k_{GH}(4\theta_G+2\theta_H-6\psi_{GH})+FEM_{GH}}$$

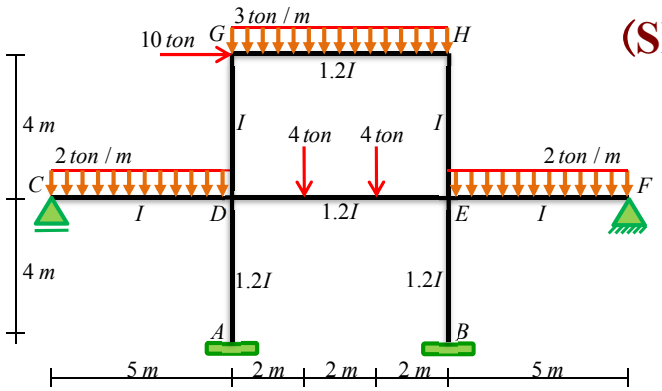
$$M_{HG}=2(EI/\ell)_{HG}(2\theta_H+\theta_G-3\psi_{HG})+FEM_{HG} \Rightarrow \boxed{M_{HG}=k_{HG}(4\theta_H+2\theta_G-6\psi_{HG})+FEM_{HG}}$$

$$M_{AD}=2(EI/\ell)_{AD}(2\theta_A+\theta_D-3\psi_{AD})+FEM_{AD} \Rightarrow \boxed{M_{AD}=k_{AD}(4\theta_A+2\theta_D-6\psi_{AD})+FEM_{AD}}$$

$$M_{DA}=2(EI/\ell)_{DA}(2\theta_D+\theta_A-3\psi_{DA})+FEM_{DA} \Rightarrow \boxed{M_{DA}=k_{DA}(4\theta_D+2\theta_A-6\psi_{DA})+FEM_{DA}}$$

$$M_{BE}=2(EI/\ell)_{BE}(2\theta_B+\theta_E-3\psi_{BE})+FEM_{BE} \Rightarrow \boxed{M_{BE}=k_{BE}(4\theta_B+2\theta_E-6\psi_{BE})+FEM_{BE}}$$

$$M_{EB}=2(EI/\ell)_{EB}(2\theta_E+\theta_B-3\psi_{EB})+FEM_{EB} \Rightarrow \boxed{M_{EB}=k_{EB}(4\theta_E+2\theta_B-6\psi_{EB})+FEM_{EB}}$$



پاسخ مثال ۱۴–

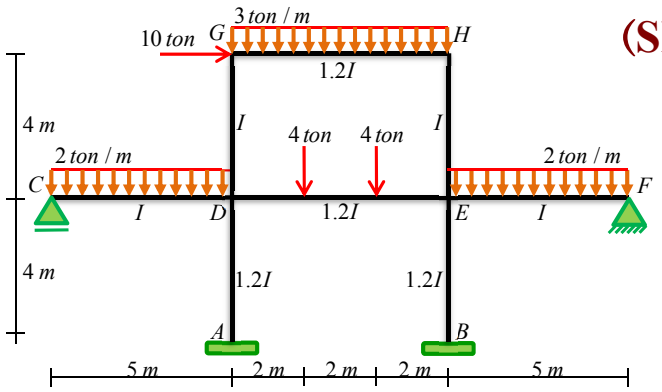
نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{DG} = 2(EI/\ell)_{DG}(2\theta_D + \theta_G - 3\psi_{DG}) + FEM_{DG} \Rightarrow \boxed{M_{DG} = k_{DG}(4\theta_D + 2\theta_G - 6\psi_{DG}) + FEM_{DG}}$$

$$M_{GD} = 2(EI/\ell)_{GD}(2\theta_G + \theta_D - 3\psi_{GD}) + FEM_{GD} \Rightarrow \boxed{M_{GD} = k_{GD}(4\theta_G + 2\theta_D - 6\psi_{GD}) + FEM_{GD}}$$

$$M_{EH} = 2(EI/\ell)_{EH}(2\theta_E + \theta_H - 3\psi_{EH}) + FEM_{EH} \Rightarrow \boxed{M_{EH} = k_{EH}(4\theta_E + 2\theta_H - 6\psi_{EH}) + FEM_{EH}}$$

$$M_{HE} = 2(EI/\ell)_{HE}(2\theta_H + \theta_E - 3\psi_{HE}) + FEM_{HE} \Rightarrow \boxed{M_{HE} = k_{HE}(4\theta_H + 2\theta_E - 6\psi_{HE}) + FEM_{HE}}$$

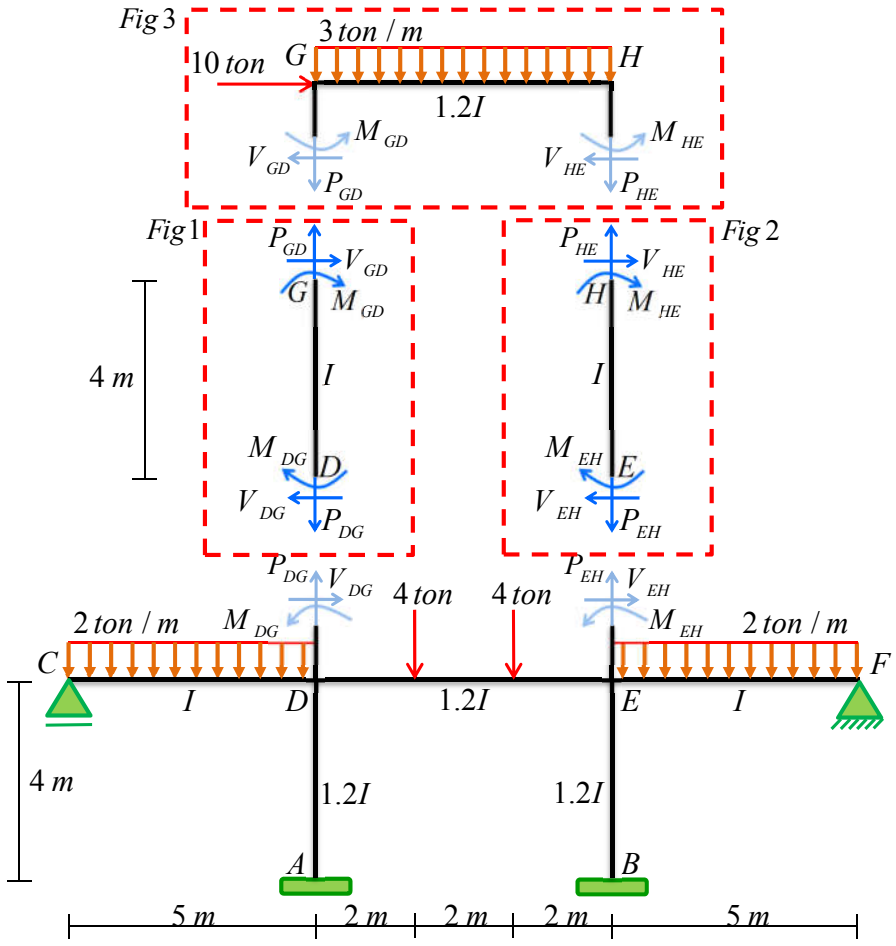


پاسخ مثال ۱۴–

لنگر ابتدا و انتهای اعضا در رابطه (14.7) به طور خلاصه آمده است:

$$\begin{aligned}
&M_{CD} = k_{CD}(4\theta_C + 2\theta_D - 6\psi_{CD}) + FEM_{CD} \quad , \quad M_{DC} = k_{DC}(4\theta_D + 2\theta_C - 6\psi_{DC}) + FEM_{DC} \\
&M_{DE} = k_{DE}(4\theta_D + 2\theta_E - 6\psi_{DE}) + FEM_{DE} \quad , \quad M_{ED} = k_{ED}(4\theta_E + 2\theta_D - 6\psi_{ED}) + FEM_{ED} \\
&M_{EF} = k_{EF}(4\theta_E + 2\theta_F - 6\psi_{EF}) + FEM_{EF} \quad , \quad M_{FE} = k_{FE}(4\theta_F + 2\theta_E - 6\psi_{FE}) + FEM_{FE} \\
&M_{GH} = k_{GH}(4\theta_G + 2\theta_H - 6\psi_{GH}) + FEM_{GH} \quad , \quad M_{HG} = k_{HG}(4\theta_H + 2\theta_G - 6\psi_{HG}) + FEM_{HG} \\
&M_{AD} = k_{AD}(4\theta_A + 2\theta_D - 6\psi_{AD}) + FEM_{AD} \quad , \quad M_{DA} = k_{DA}(4\theta_D + 2\theta_A - 6\psi_{DA}) + FEM_{DA} \\
&M_{BE} = k_{BE}(4\theta_B + 2\theta_E - 6\psi_{BE}) + FEM_{BE} \quad , \quad M_{EB} = k_{EB}(4\theta_E + 2\theta_B - 6\psi_{EB}) + FEM_{EB} \\
&M_{DG} = k_{DG}(4\theta_D + 2\theta_G - 6\psi_{DG}) + FEM_{DG} \quad , \quad M_{GD} = k_{GD}(4\theta_G + 2\theta_D - 6\psi_{GD}) + FEM_{GD} \\
&M_{EH} = k_{EH}(4\theta_E + 2\theta_H - 6\psi_{EH}) + FEM_{EH} \quad , \quad M_{HE} = k_{HE}(4\theta_H + 2\theta_E - 6\psi_{HE}) + FEM_{HE}
\end{aligned} \tag{14.7}$$

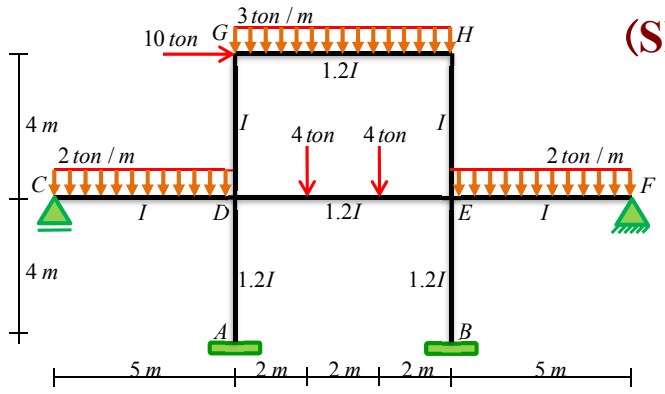
پاسخ مثال ۱۴– معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.



$$V_{GD} = -\frac{M_{DG} + M_{GD}}{4} \quad (14.8)$$

$$V_{HE} = -\frac{M_{EH} + M_{HE}}{4} \quad (14.9)$$

$$M_{DG} + M_{GD} + M_{EH} + M_{HE} = -40 \quad (14.10)$$



پاسخ مثال ۱۴–

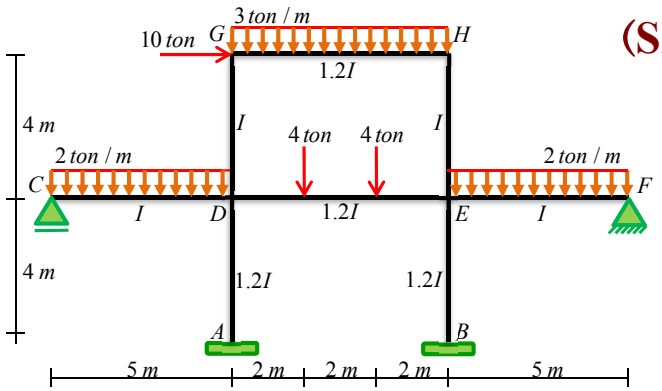
با استفاده از مقادیر ψ_{ij} به دست آمده از روابط (14.1) تا (14.5) و جایگذاری مقادیر لنگر روابط (14.7) در معادلات (14.6) و (14.10) نتیجه می‌شود:

$$(14.7) \rightarrow (14.6)\ \&\ (14.10) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&4k_{CD}\theta_C + 2k_{CD}\theta_D = -FEM_{CD}\\
&2k_{DC}\theta_C + (4k_{DC} + 4k_{DG} + 4k_{DE} + 4k_{DA})\theta_D + 2k_{DE}\theta_E + 2k_{DG}\theta_G - 6k_{DG}\psi_1 =\\
&\qquad -2k_{DA}\theta_A - FEM_{DC} - FEM_{DG} - FEM_{DE} - FEM_{DA}\\
&2k_{ED}\theta_D + (4k_{ED} + 4k_{EH} + 4k_{EF} + 4k_{EB})\theta_E + 2k_{EF}\theta_F + 2k_{EH}\theta_H - 6k_{EH}\psi_1 =\\
&\qquad -2k_{EB}\theta_B - FEM_{ED} - FEM_{EH} - FEM_{EF} - FEM_{EB}\\
&2k_{FE}\theta_E + 4k_{FE}\theta_F = -FEM_{FE}\\
&2k_{GD}\theta_D + (4k_{GH} + 4k_{GD})\theta_G + 2k_{GH}\theta_H - 6k_{GD}\psi_1 = -FEM_{GH} - FEM_{GD}\\
&2k_{HE}\theta_E + 2k_{HG}\theta_G + (4k_{HG} + 4k_{HE})\theta_H - 6k_{HE}\psi_1 = -FEM_{HG} - FEM_{HE}\\
&(4k_{DG} + 2k_{GD})\theta_D + (4k_{EH} + 2k_{HE})\theta_E + (4k_{GD} + 2k_{DG})\theta_G + (2k_{EH} + 4k_{HE})\theta_H\\
&\quad + (-6k_{DG} - 6k_{GD} - 6k_{EH} - 6k_{HE})\psi_1 = -40 - FEM_{DG} - FEM_{GD} - FEM_{EH} - FEM_{HE}
\end{aligned} \quad (14.11)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



فرم ماتریسی معادلات (14.11) به صورت زیر نوشته می‌شود:

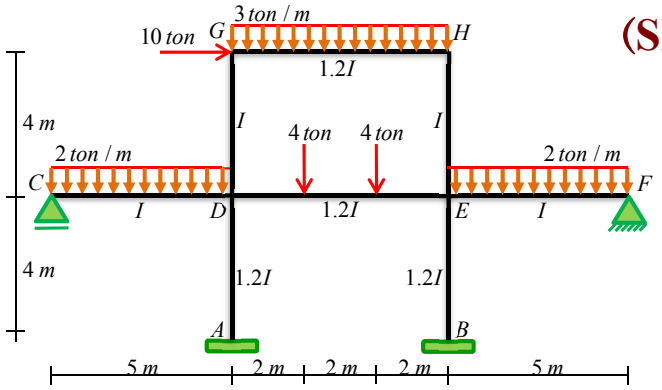
$$
\begin{array}{c}
\\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ \psi_1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} C & D & E & F & G & H & \psi_1 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
4k_{CD} & 2k_{CD} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2k_{DC} & (4k_{DC}+4k_{DG}+4k_{DE}+4k_{DA}) & 2k_{DE} & 0 & 2k_{DG} & 0 & -6k_{DG} \\
0 & 2k_{ED} & (4k_{ED}+4k_{EH}+4k_{EF}+4k_{EB}) & 2k_{EF} & 0 & 2k_{EH} & -6k_{EH} \\
0 & 0 & 2k_{FE} & 4k_{FE} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2k_{GD} & 0 & 0 & (4k_{GH}+4k_{GD}) & 2k_{GH} & -6k_{GD} \\
0 & 0 & 2k_{HE} & 0 & 2k_{HG} & (4k_{HG}+4k_{HE}) & -6k_{HE} \\
0 & (4k_{DG}+2k_{GD}) & (4k_{EH}+2k_{HE}) & 0 & (4k_{GD}+2k_{DG}) & (2k_{EH}+4k_{HE}) & (-6k_{DG}-6k_{GD}-6k_{EH}-6k_{HE})
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \\ \theta_F \\ \theta_G \\ \theta_H \\ \psi_1 \end{Bmatrix} =
$$

$$
\begin{Bmatrix}
-FEM_{CD} \\
-2k_{DA}\theta_A - FEM_{DC} - FEM_{DG} - FEM_{DE} - FEM_{DA} \\
-2k_{EB}\theta_B - FEM_{ED} - FEM_{EH} - FEM_{EF} - FEM_{EB} \\
-FEM_{FE} \\
-FEM_{GH} - FEM_{GD} \\
-FEM_{HG} - FEM_{HE} \\
-40 - FEM_{DG} - FEM_{GD} - FEM_{EH} - FEM_{HE}
\end{Bmatrix}
$$

(14.12)

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–

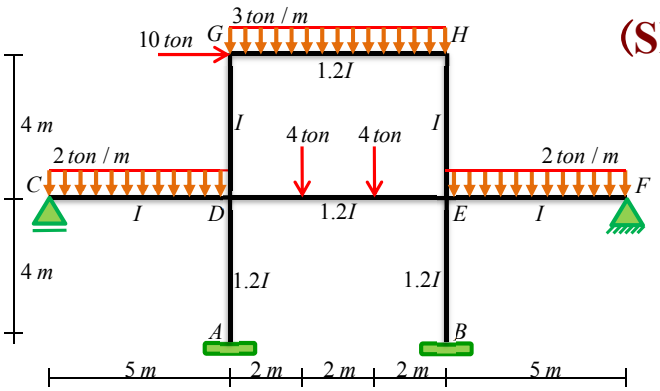


با جایگذاری مقادیر هر یک از پارامترها در رابطه (14.12) نتیجه می‌شود:

$$
\begin{bmatrix}
4(40) & 2(40) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2(40) & (4(40)+4(50)+4(40)+4(60)) & 2(40) & 0 & 2(50) & 0 & -6(50) \\
0 & 2(40) & (4(40)+4(50)+4(40)+4(60)) & 2(40) & 0 & 2(50) & -6(50) \\
0 & 0 & 2(40) & 4(40) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2(50) & 0 & 0 & (4(40)+4(50)) & 2(40) & -6(50) \\
0 & 0 & 2(50) & 0 & 2(40) & (4(40)+4(50)) & -6(50) \\
0 & (4(50)+2(50)) & (4(50)+2(50)) & 0 & (4(50)+2(50)) & (2(50)+4(50)) & (-6(50)-6(50)-6(50)-6(50))
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \\ \theta_F \\ \theta_G \\ \theta_H \\ \psi_1 \end{Bmatrix} =
$$

$$
\begin{Bmatrix}
-\left(-\frac{25}{6}\right) \\
-2(60)(0)-\left(\frac{25}{6}\right)-(0)-\left(-\frac{48}{9}\right)-(0) \\
-2(60)(0)-\left(\frac{48}{9}\right)-(0)-\left(-\frac{25}{6}\right)-(0) \\
-\left(\frac{25}{6}\right) \\
-(-9)-(0) \\
-(9)-(0) \\
-40-(0)-(0)-(0)-(0)
\end{Bmatrix}
$$

(14.13)

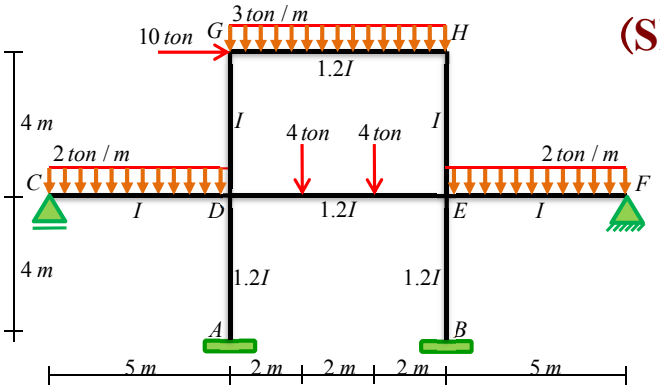


پاسخ مثال ۱۴–

با ساده سازی رابطه (14.13) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 160 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 760 & 80 & 0 & 100 & 0 & -300 \\ 0 & 80 & 760 & 80 & 0 & 100 & -300 \\ 0 & 0 & 80 & 160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 360 & 80 & -300 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 80 & 360 & -300 \\ 0 & 300 & 300 & 0 & 300 & 300 & -1200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \\ \theta_F \\ \theta_G \\ \theta_H \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{25}{6} \\ \frac{63}{54} \\ -\frac{63}{54} \\ -\frac{25}{6} \\ 9 \\ -9 \\ -40 \end{Bmatrix} \qquad (14.14)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۴–

با حل رابطه (14.14) نتیجه می‌شود:

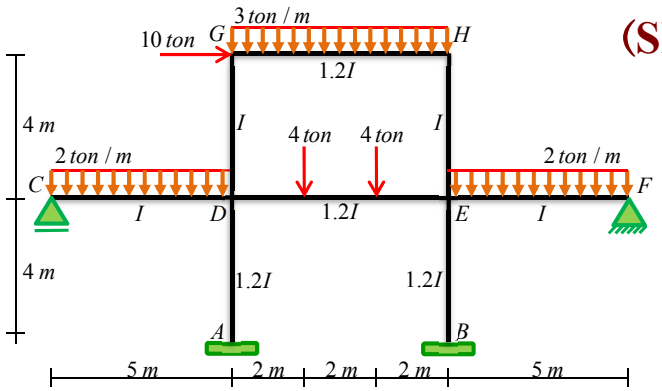
(14.14) $\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \\ \theta_F \\ \theta_G \\ \theta_H \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 760 & 80 & 0 & 100 & 0 & -300 \\ 0 & 80 & 760 & 80 & 0 & 100 & -300 \\ 0 & 0 & 80 & 160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 360 & 80 & -300 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 80 & 360 & -300 \\ 0 & 300 & 300 & 0 & 300 & 300 & -1200 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{25}{6} \\ \frac{63}{54} \\ -\frac{63}{54} \\ -\frac{25}{6} \\ 9 \\ -9 \\ -40 \end{Bmatrix} \Rightarrow \qquad (14.15)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \\ \theta_F \\ \theta_G \\ \theta_H \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 203.1993 \\ 114.4348 \\ 251.1566 \\ -385.995 \\ 722.1873 \\ 30.5009 \\ 612.9032 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \ (rad)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



با جایگذاری مجهولات به دست آمده از رابطه (14.15) در روابط لنگر (14.7) مقادیر لنگرهای ابتدا و انتهای تیرها به دست می‌آید:

$$M_{CD}=k_{CD}\left(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_{CD}\right)+FEM_{CD}=40\times\left(4(203.20\times10^{-4})+2(114.43\times10^{-4})-6(0)\right)-\frac{25}{6}\Rightarrow \boxed{M_{CD}=0}$$

$$M_{DC}=k_{DC}\left(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_{DC}\right)+FEM_{DC}=40\times\left(4(114.43\times10^{-4})+2(203.20\times10^{-4})-6(0)\right)+\frac{25}{6}\Rightarrow \boxed{M_{DC}=7.623\,ton.m}$$

$$M_{DE}=k_{DE}\left(4\theta_D+2\theta_E-6\psi_{DE}\right)+FEM_{DE}=40\times\left(4(114.43\times10^{-4})+2(251.16\times10^{-4})-6(0)\right)-\frac{48}{9}\Rightarrow \boxed{M_{DE}=-1.493\,ton.m}$$

$$M_{ED}=k_{ED}\left(4\theta_E+2\theta_D-6\psi_{ED}\right)+FEM_{ED}=40\times\left(4(251.16\times10^{-4})+2(114.43\times10^{-4})-6(0)\right)+\frac{48}{9}\Rightarrow \boxed{M_{ED}=10.267\,ton.m}$$

$$M_{EF}=k_{EF}\left(4\theta_E+2\theta_F-6\psi_{EF}\right)+FEM_{EF}=40\times\left(4(251.16\times10^{-4})+2(-386\times10^{-4})-6(0)\right)-\frac{25}{6}\Rightarrow \boxed{M_{EF}=-3.236\,ton.m}$$

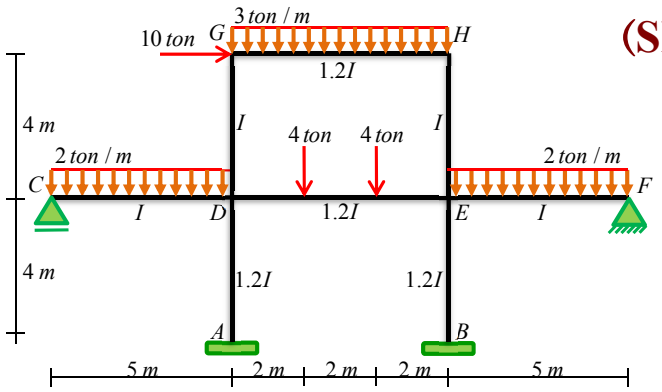
$$M_{FE}=k_{FE}\left(4\theta_F+2\theta_E-6\psi_{FE}\right)+FEM_{FE}=40\times\left(4(-386\times10^{-4})+2(251.16\times10^{-4})-6(0)\right)+\frac{25}{6}\Rightarrow \boxed{M_{FE}=0}$$

$$M_{GH}=k_{GH}\left(4\theta_G+2\theta_H-6\psi_{GH}\right)+FEM_{GH}=40\times\left(4(722.19\times10^{-4})+2(30.5\times10^{-4})-6(0)\right)-9\Rightarrow \boxed{M_{GH}=2.799\,ton.m}$$

$$M_{HG}=k_{HG}\left(4\theta_H+2\theta_G-6\psi_{HG}\right)+FEM_{HG}=40\times\left(4(30.5\times10^{-4})+2(722.19\times10^{-4})-6(0)\right)+9\Rightarrow \boxed{M_{HG}=15.266\,ton.m}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



با جایگذاری مجهولات به دست آمده از رابطه (14.15) در روابط لنگر (14.7) مقادیر لنگرهای ابتدا و انتهای تیرها به دست می‌آید:

$$M_{AD}=k_{AD}\left(4\theta_A+2\theta_D-6\psi_{AD}\right)+FEM_{AD}=60\times\left(4(0)+2(114.43\times10^{-4})-6(0)\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{AD}=1.373\,ton.m}$$

$$M_{DA}=k_{DA}\left(4\theta_D+2\theta_A-6\psi_{DA}\right)+FEM_{DA}=60\times\left(4(114.43\times10^{-4})+2(0)-6(0)\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{DA}=2.746\,ton.m}$$

$$M_{BE}=k_{BE}\left(4\theta_B+2\theta_E-6\psi_{BE}\right)+FEM_{BE}=60\times\left(4(0)+2(251.17\times10^{-4})-6(0)\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{BE}=3.014\,ton.m}$$

$$M_{EB}=k_{EB}\left(4\theta_E+2\theta_B-6\psi_{EB}\right)+FEM_{EB}=60\times\left(4(251.17\times10^{-4})+2(0)-6(0)\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{EB}=6.028\,ton.m}$$

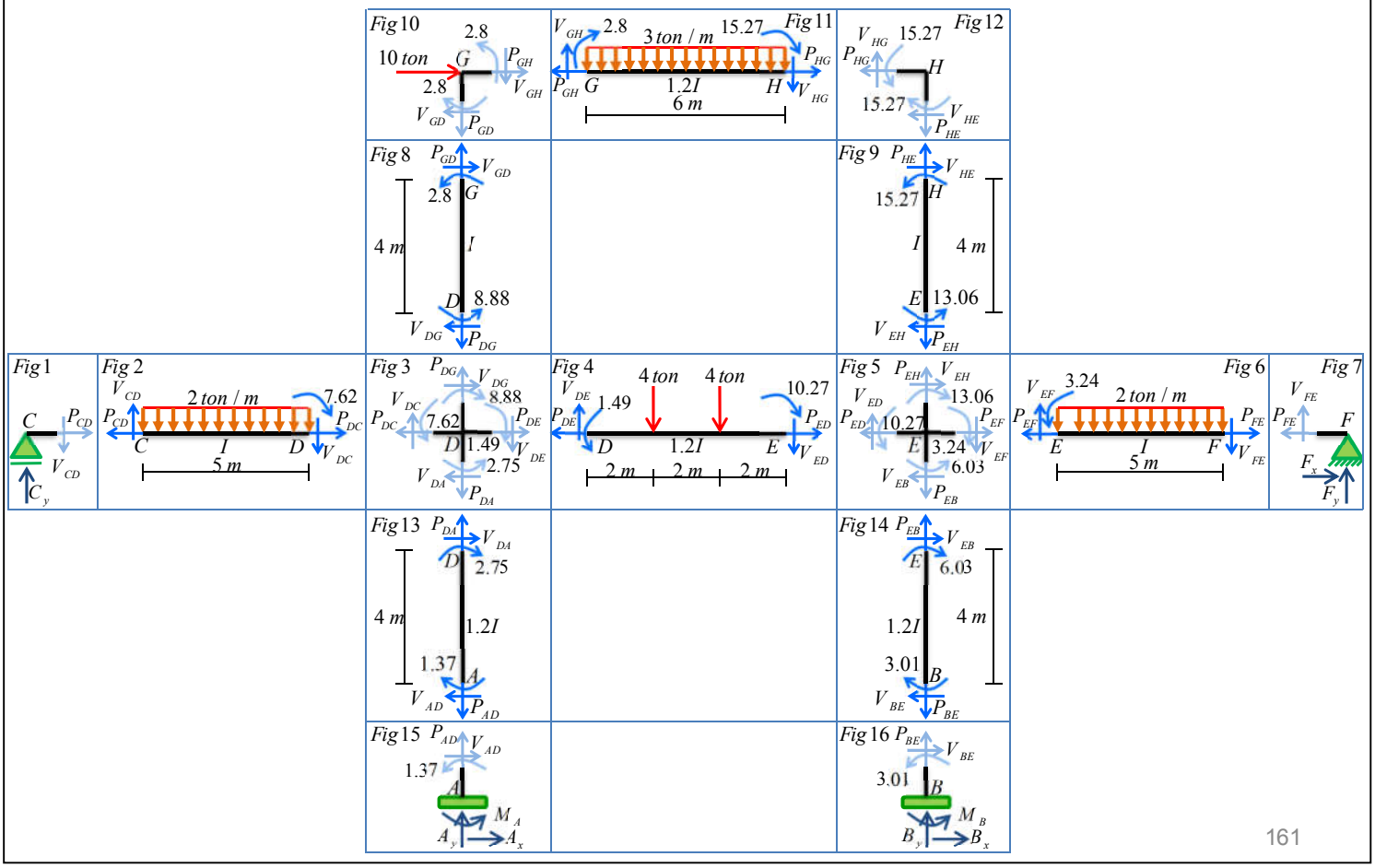
$$M_{DG}=k_{DG}\left(4\theta_D+2\theta_G-6\psi_{DG}\right)+FEM_{DG}=50\times\left(4(114.43\times10^{-4})+2(722.19\times10^{-4})-6(612.9\times10^{-4})\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{DG}=-8.877\,ton.m}$$

$$M_{GD}=k_{GD}\left(4\theta_G+2\theta_D-6\psi_{GD}\right)+FEM_{GD}=50\times\left(4(722.19\times10^{-4})+2(114.43\times10^{-4})-6(612.9\times10^{-4})\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{GD}=-2.799\,ton.m}$$

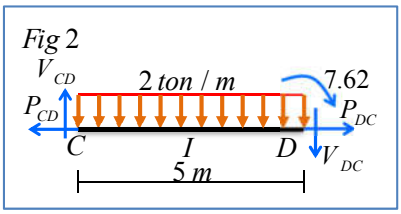
$$M_{EH}=k_{EH}\left(4\theta_E+2\theta_H-6\psi_{EH}\right)+FEM_{EH}=50\times\left(4(251.16\times10^{-4})+2(30.5\times10^{-4})-6(612.9\times10^{-4})\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{EH}=-13.059\,ton.m}$$

$$M_{HE}=k_{HE}\left(4\theta_H+2\theta_E-6\psi_{HE}\right)+FEM_{HE}=50\times\left(4(30.5\times10^{-4})+2(251.16\times10^{-4})-6(612.9\times10^{-4})\right)+0\Rightarrow \boxed{M_{HE}=-15.266\,ton.m}$$

پاسخ مثال ۱۴– برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:



پاسخ مثال ۱۴–

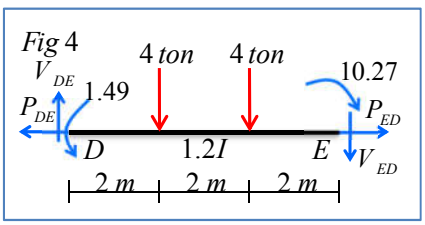


با بررسی شکل (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -V_{DC}\times 5 - 7.62 - (2\times 5)\times\frac{5}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{DC} = -6.52\,ton} \qquad (14.16)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} - (2\times 5) - V_{DC} = 0 \quad \overset{(14.16)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{CD} = 3.48\,ton} \qquad (14.17)$$

با بررسی شکل (۴) نتیجه می‌شود:

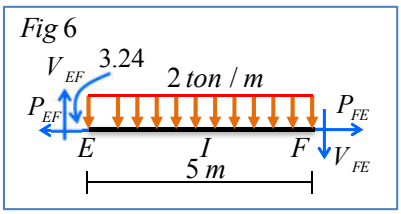


$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_{ED}\times 6 - 10.27 - 4\times 4 - 4\times 2 + 1.49 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{ED} = -5.46\,ton} \qquad (14.18)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DE} - 4 - 4 - V_{ED} = 0 \quad \overset{(14.18)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{DE} = 2.54\,ton} \qquad (14.19)$$

پاسخ مثال ۱۴–

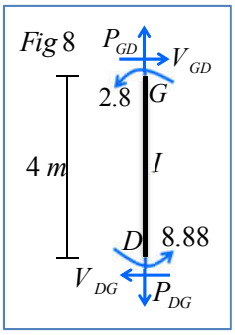
با بررسی شکل (۶) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -V_{FE}\times 5-(2\times 5)\times\frac{5}{2}+3.24=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{FE}=-4.35\,ton} \quad (14.20)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EF}-(2\times 5)-V_{FE}=0 \quad \overset{(14.20)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{EF}=5.65\,ton} \quad (14.21)$$

با بررسی شکل (۸) نتیجه می‌شود:

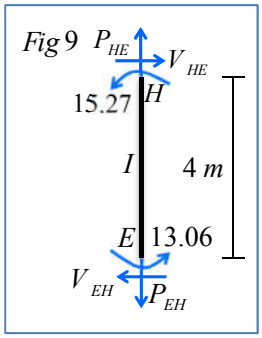


$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_{GD}\times 4+2.8+8.88=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{GD}=2.92\,ton} \quad (14.22)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{GD}-V_{DG}=0 \quad \overset{(14.22)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{DG}=2.92\,ton} \quad (14.23)$$

پاسخ مثال ۱۴–

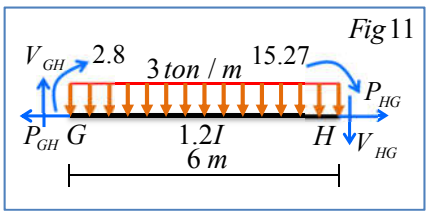
با بررسی شکل (۹) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -V_{HE}\times 4+15.27+13.06=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{HE}=7.08\,ton} \quad (14.24)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{HE}-V_{EH}=0 \quad \overset{(14.24)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{EH}=7.08\,ton} \quad (14.25)$$

با بررسی شکل (۱۱) نتیجه می‌شود:



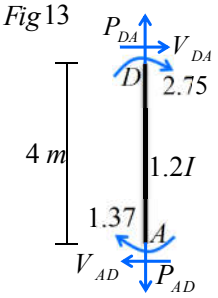
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow -V_{HG}\times 6-15.27-(3\times 6)\times\frac{6}{2}-2.8=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{HG}=-12.01\,ton} \quad (14.26)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{GH}-(3\times 6)-V_{HG}=0 \quad \overset{(14.26)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{GH}=5.99\,ton} \quad (14.27)$$

پاسخ مثال ۱۴–

با بررسی شکل (۱۳) نتیجه می‌شود:

Fig 13

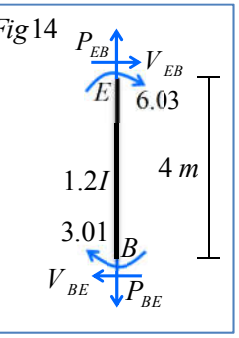


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_{DA} \times 4 - 2.75 - 1.37 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{DA} = -1.03\,ton} \qquad (14.28)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DA} - V_{AD} = 0 \overset{(14.28)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AD} = -1.03\,ton} \qquad (14.29)$$

با بررسی شکل (۱۴) نتیجه می‌شود:

Fig 14



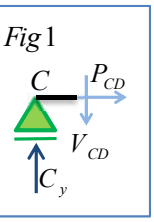
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -V_{EB} \times 4 - 6.03 - 3.01 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{EB} = -2.26\,ton} \qquad (14.30)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EB} - V_{BE} = 0 \overset{(14.30)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BE} = -2.26\,ton} \qquad (14.31)$$

پاسخ مثال ۱۴–

با بررسی شکل (۱) نتیجه می‌شود:

Fig 1

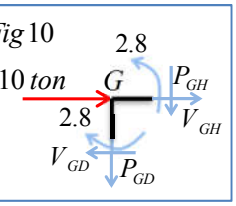


$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y - V_{CD} = 0 \overset{(14.17)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 3.48\,ton} \qquad (14.32)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{CD} = P_{DC} = 0} \qquad (14.33)$$

با بررسی شکل (۱۰) نتیجه می‌شود:

Fig 10

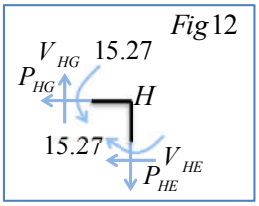


$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 + P_{GH} - V_{GD} = 0 \overset{(14.22)}{\Rightarrow} \boxed{P_{GH} = P_{HG} = -7.08\ ton} \qquad (14.34)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{GH} - P_{GD} = 0 \overset{(14.27)}{\Rightarrow} \boxed{P_{GD} = P_{DG} = -5.99\ ton} \qquad (14.35)$$

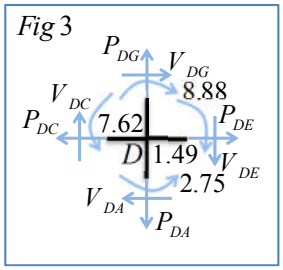
پاسخ مثال ۱۴–

با بررسی شکل (۱۲) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{HG} - P_{HE} = 0 \overset{(14.26)}{\Rightarrow} \boxed{P_{HE} = P_{EH} = -12.01\,ton} \quad (14.36)$$

با بررسی شکل (۳) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{DC} + V_{DG} - V_{DA} + P_{DE} = 0$$

(14.23)&(14.28)&(14.33)

$$\Rightarrow \boxed{P_{DE} = P_{ED} = -3.95\ ton} \quad (14.37)$$

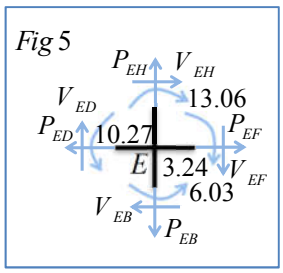
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{DC} - V_{DE} + P_{DG} - P_{DA} = 0$$

(14.16)&(14.19)&(14.35)

$$\Rightarrow \boxed{P_{DA} = P_{AD} = -15.05\,ton} \quad (14.38)$$

پاسخ مثال ۱۴–

با بررسی شکل (۵) نتیجه می‌شود:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{ED} + V_{EH} - V_{EB} + P_{EF} = 0$$

(14.25)&(14.30)&(14.37)

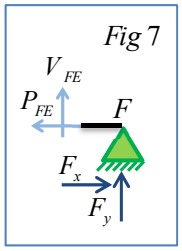
$$\Rightarrow \boxed{P_{EF} = P_{FE} = -13.29\ ton} \quad (14.39)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{ED} - V_{EF} + P_{EH} - P_{EB} = 0$$

(14.18)&(14.21)&(14.36)

$$\Rightarrow \boxed{P_{EB} = P_{BE} = -23.12\,ton} \quad (14.40)$$

با بررسی شکل (۷) نتیجه می‌شود:

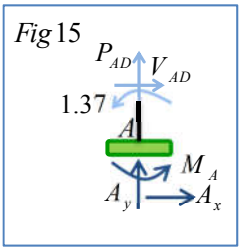


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + V_{FE} = 0 \overset{(14.20)}{\Rightarrow} \boxed{F_y = 4.35\,ton} \quad (14.41)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{FE} + F_x = 0 \overset{(14.39)}{\Rightarrow} \boxed{F_x = -13.29\,ton} \quad (14.42)$$

پاسخ مثال ۱۴–

با بررسی شکل (۱۵) نتیجه می‌شود:

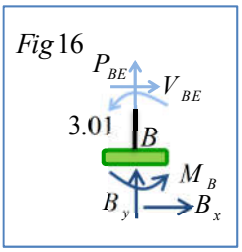


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + P_{AD} = 0 \overset{(14.38)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 15.05\,ton} \quad (14.43)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{AD} + A_x = 0 \overset{(14.29)}{\Rightarrow} \boxed{A_x = 1.03\,ton} \quad (14.44)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1.37 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -1.37\,ton.m} \quad (14.45)$$

با بررسی شکل (۱۶) نتیجه می‌شود:



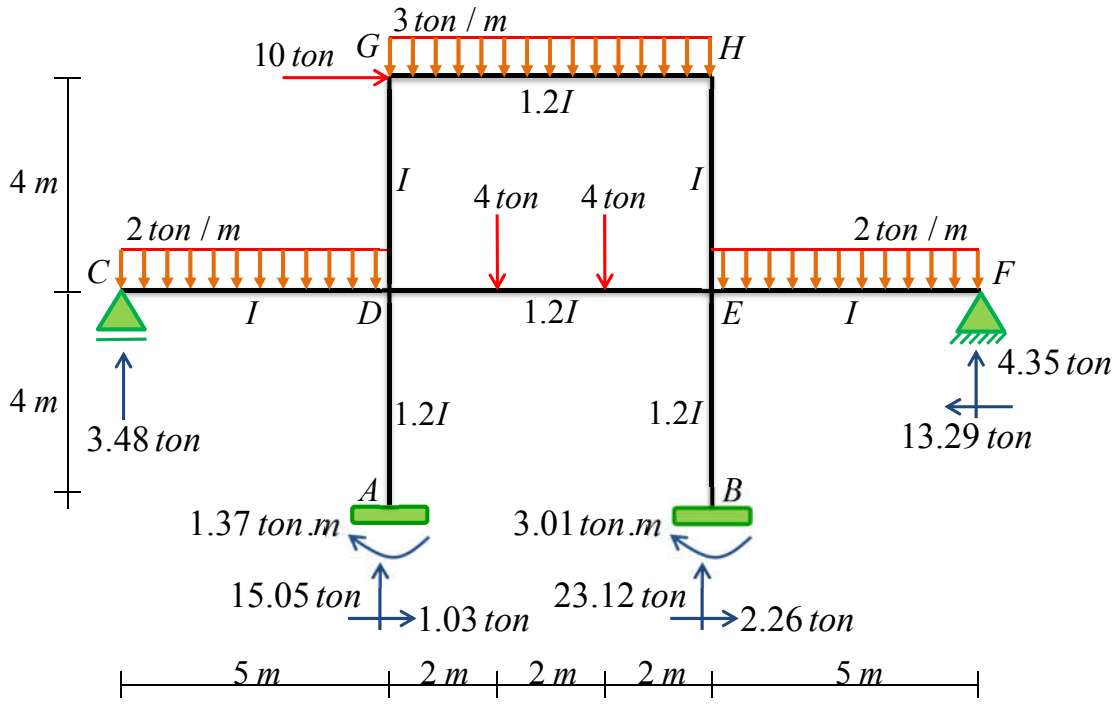
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + P_{BE} = 0 \overset{(14.40)}{\Rightarrow} \boxed{B_y = 23.12\,ton} \quad (14.46)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{BE} + B_x = 0 \overset{(14.31)}{\Rightarrow} \boxed{B_x = 2.26\,ton} \quad (14.47)$$

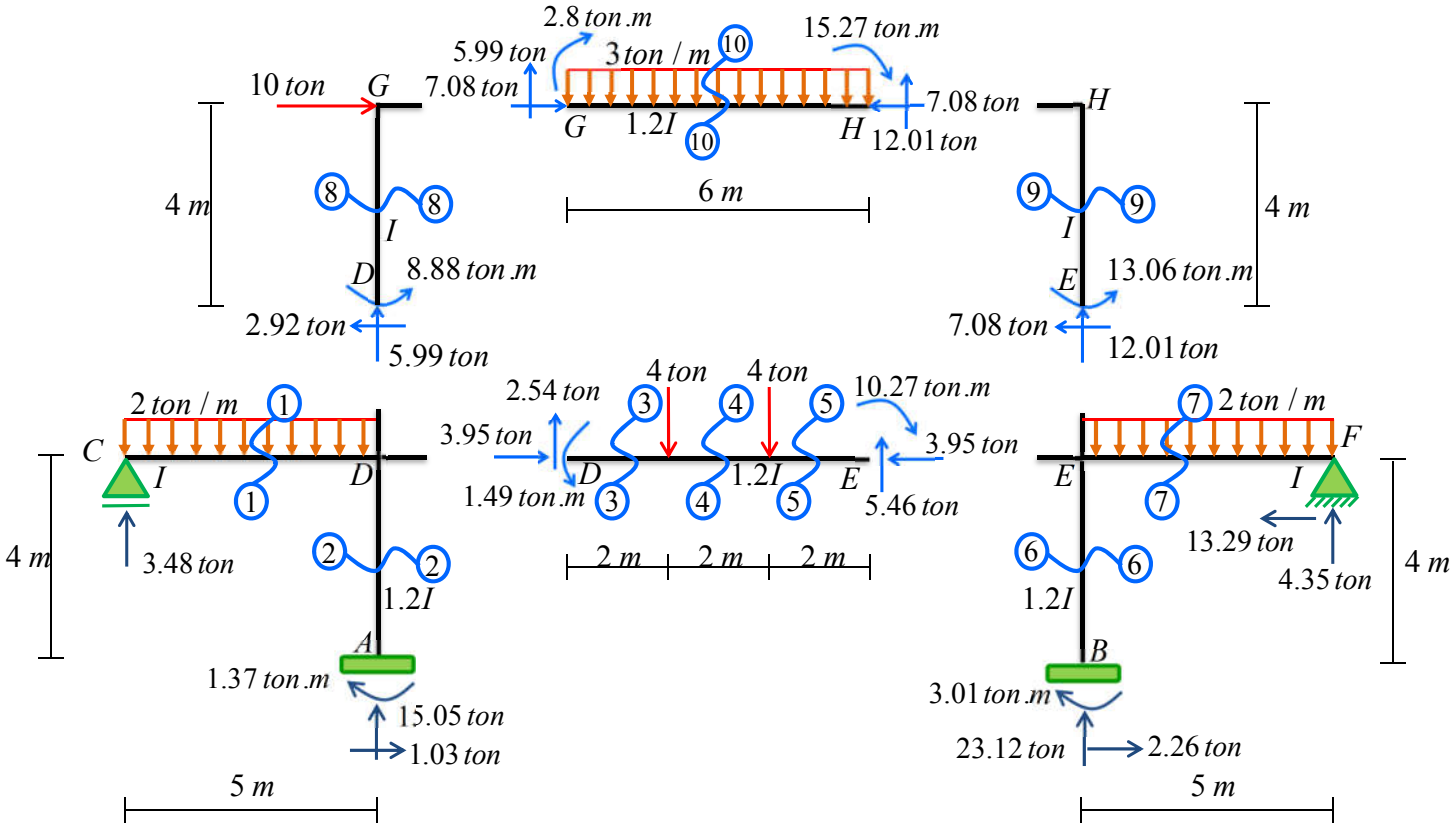
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B + 3.01 = 0 \Rightarrow \boxed{M_B = -3.01\,ton.m} \quad (14.48)$$

پاسخ مثال ۱۴–

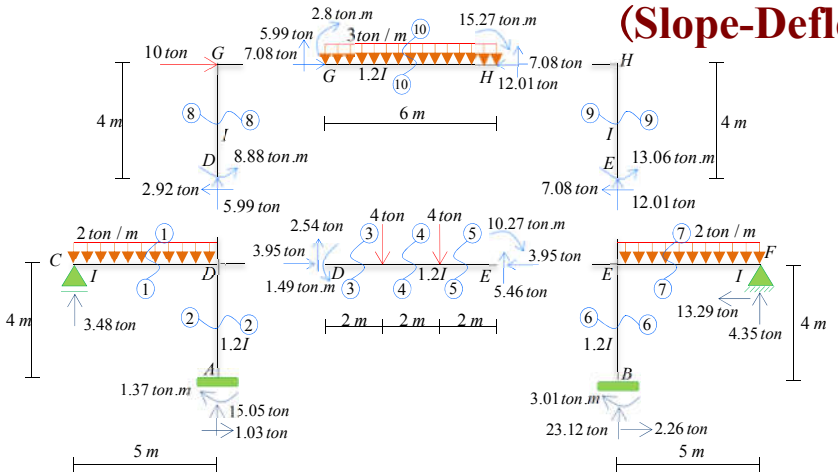
عکس العمل‌های تکیه‌گاهی محاسبه شده در شکل زیر نشان داده شده است:



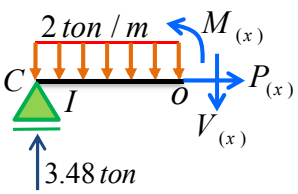
پاسخ مثال ۱۴– برای رسم نمودار نیروهای داخلی در قاب، ابتدا کلیه تیرها و ستون‌های داخلی را مجزا نموده و سپس مقطع‌های مورد نیاز را برای هر عضو رسم می‌نماییم.



پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱–۱ خواهیم داشت:



$0 \le x \le 5$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (2\times x).\left(\frac{x}{2}\right) - 3.48\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 3.48x}$$

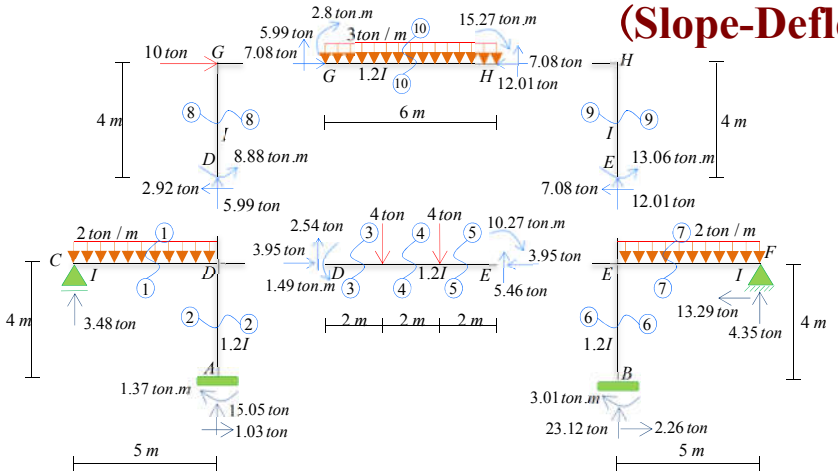
$$M_{(x)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 3.48x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \quad , \quad x = 3.48\,m}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - (2\times x) + 3.48 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2x + 3.48}$$

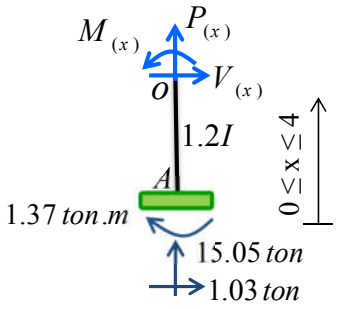
$$V_{(x)} = 0 \Rightarrow -2x + 3.48 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1.74} \Rightarrow \boxed{M_{(x=1.74)} = 3.03\,ton.m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 0}$$

پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۲–۲ خواهیم داشت:

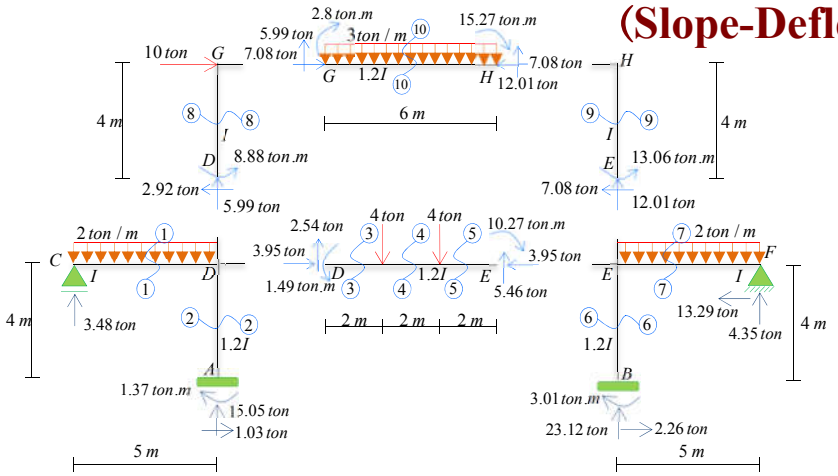


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 1.37 + 1.03 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.03x + 1.37}$$

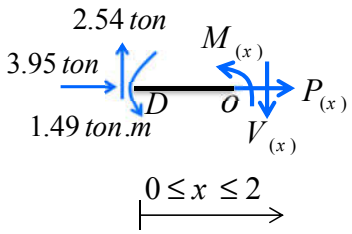
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 1.03 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -1.03\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 15.05 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -15.05\,ton}$$

پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳–۳ خواهیم داشت:



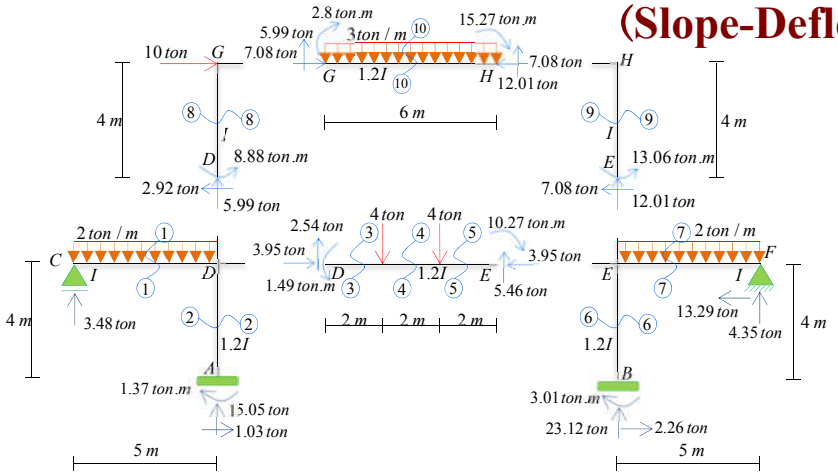
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 1.49 - 2.54 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2.54x - 1.49}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 2.54 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2.54\,ton}$$

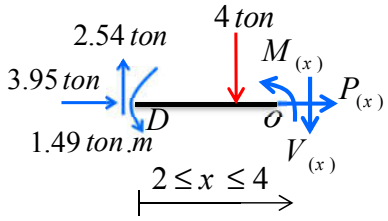
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 3.95 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -3.95\,ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۴–۴ خواهیم داشت:



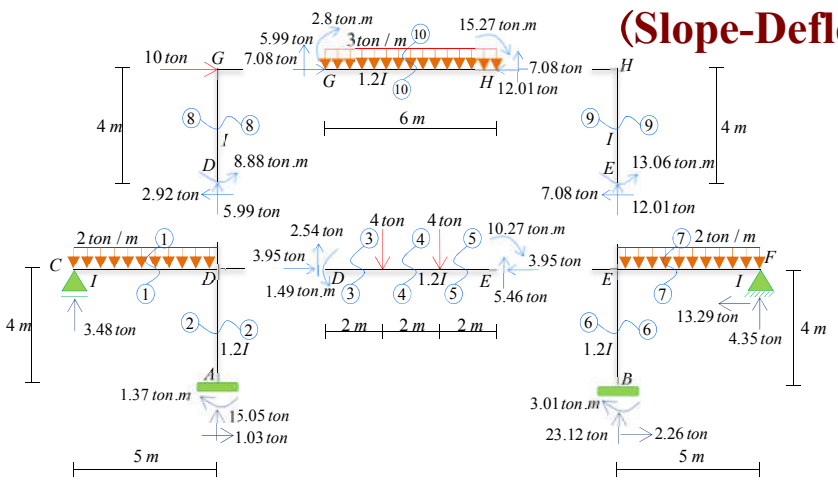
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 4\times(x-2) + 1.49 - 2.54\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.46x + 6.51}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 2.54 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -1.46\,ton}$$

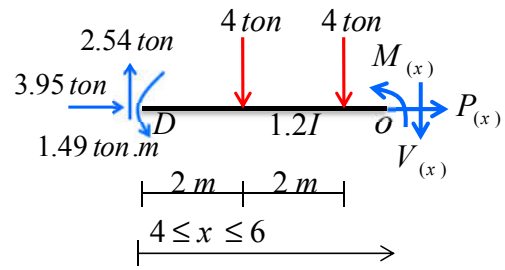
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 3.95 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -3.95\,ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۵–۵ خواهیم داشت:



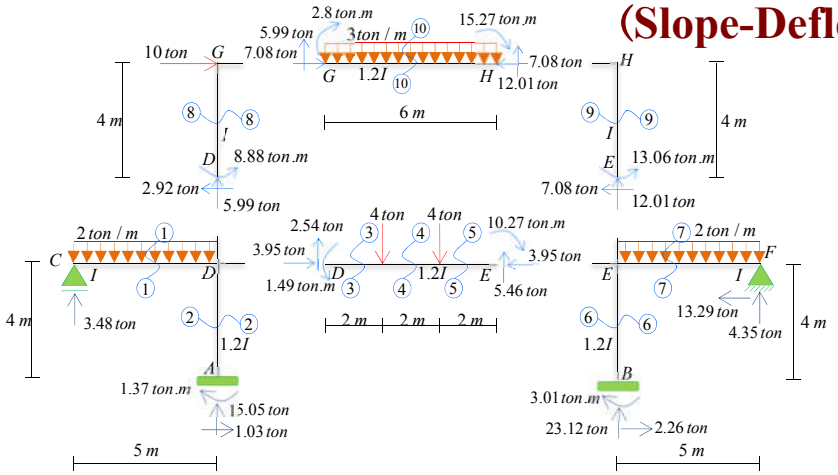
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 4\times(x-4) + 4\times(x-2) + 1.49 - 2.54\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -5.46x + 22.51}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 4 - 4 + 2.54 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5.46\,ton}$$

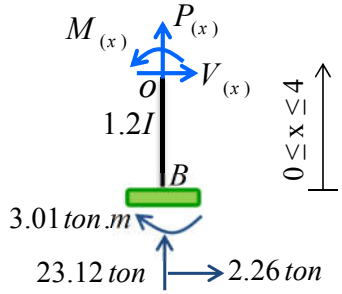
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 3.95 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -3.95\,ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۶–۶ خواهیم داشت:



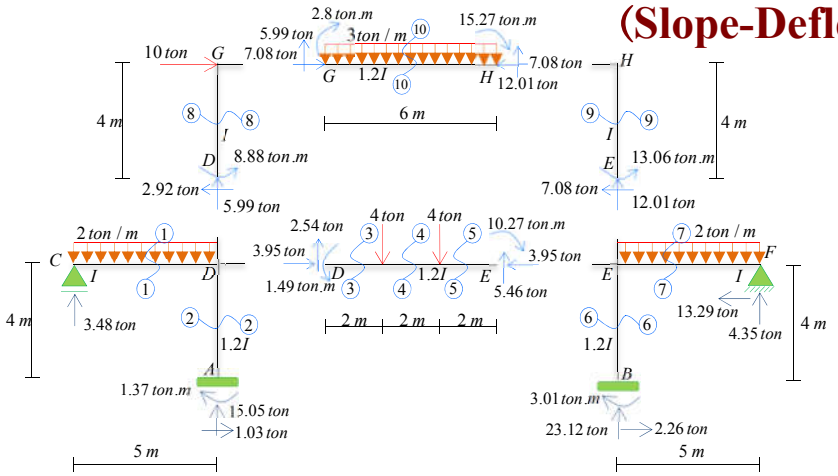
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 3.01 + 2.26 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -2.26x + 3.01}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 2.26 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2.26\ ton}$$

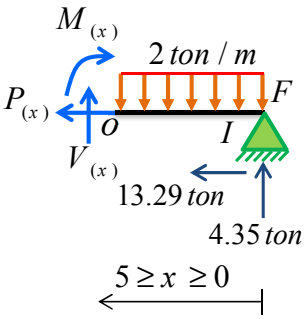
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 23.12 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -23.12\ ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۷–۷ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - (2 \times x).\left(\frac{x}{2}\right) + 4.35 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 4.35x}$$

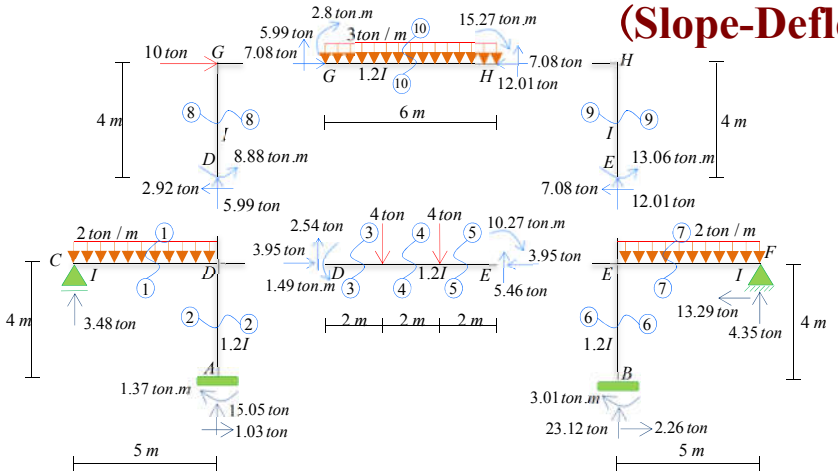
$$M_{(x)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 4.35x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \ , \ x = 4.35\ m}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - (2 \times x) + 4.35 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2x - 4.35}$$

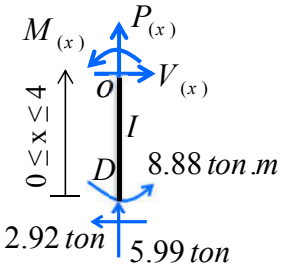
$$V_{(x)} = 0 \Rightarrow 2x - 4.35 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2.18} \Rightarrow \boxed{M_{(x=2.18)} = 4.73 ton.m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{(x)} - 13.29 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -13.29\ ton}$$

پاسخ مثال ۱۴–



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۸–۸ خواهیم داشت:

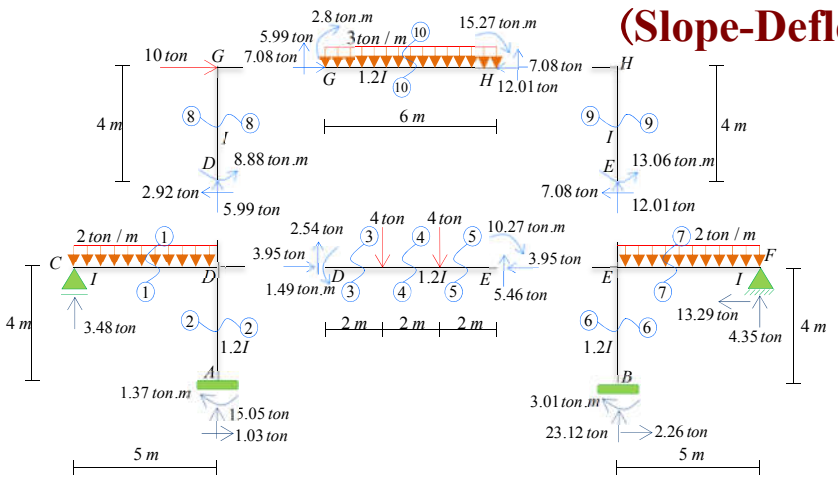


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 8.88 - 2.92 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 2.92x - 8.88}$$

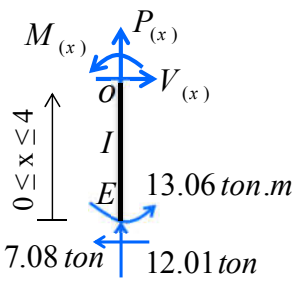
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 2.92 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 2.92\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 5.99 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -5.99\ ton}$$

پاسخ مثال ۱۴–



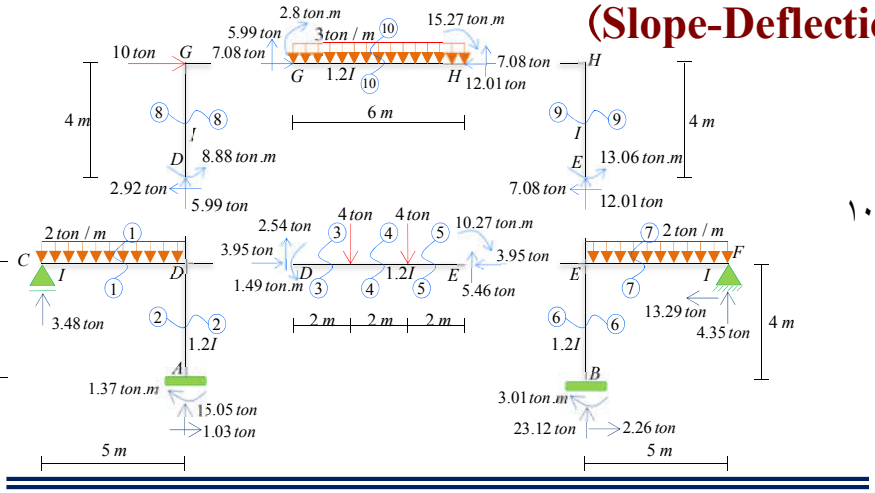
با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۹–۹ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 13.06 - 7.08 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 7.08x - 13.06}$$

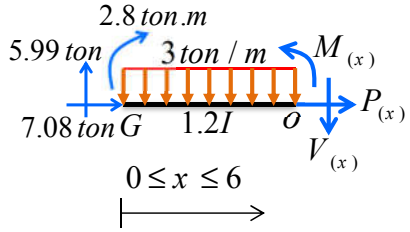
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 7.08 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 7.08\ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 12.01 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -12.01\ ton}$$



پاسخ مثال ۱۴–

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱۰–۱۰ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (3\times x).\left(\frac{x}{2}\right) - 5.99\times x - 2.8 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 5.99x + 2.8}$$

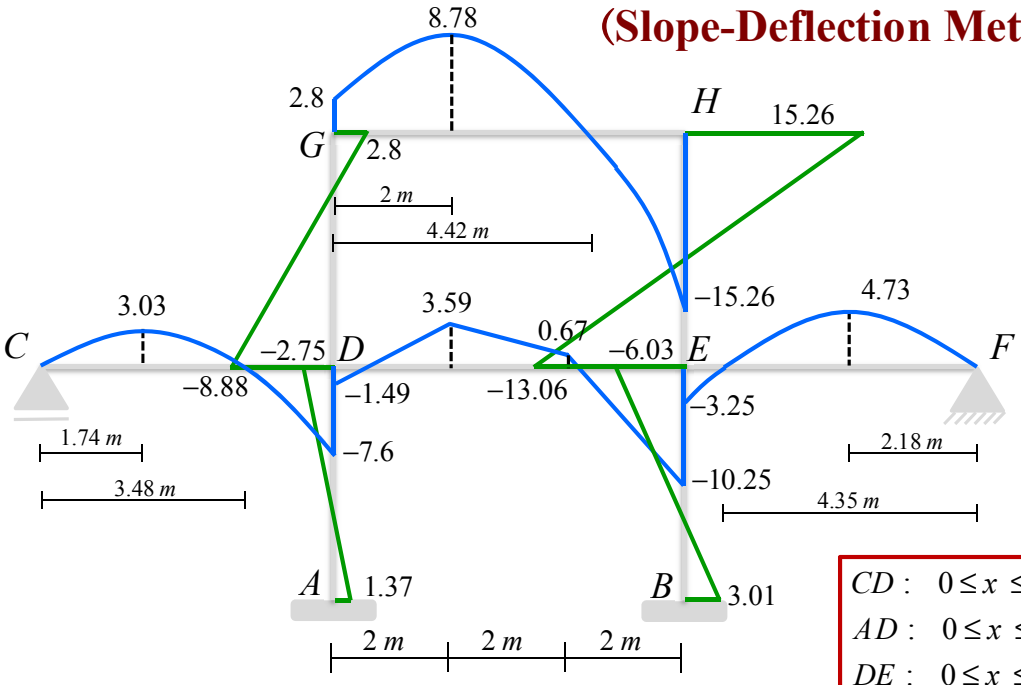
$$M_{(x)} = 0 \Rightarrow -1.5x^2 + 5.99x + 2.8 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4.42\ m}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - (3\times x) + 5.99 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -3x + 5.99}$$

$$V_{(x)} = 0 \Rightarrow -3x + 5.99 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow \boxed{M_{(x=2)} = 8.78 ton.m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 7.08 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -7.08 ton}$$

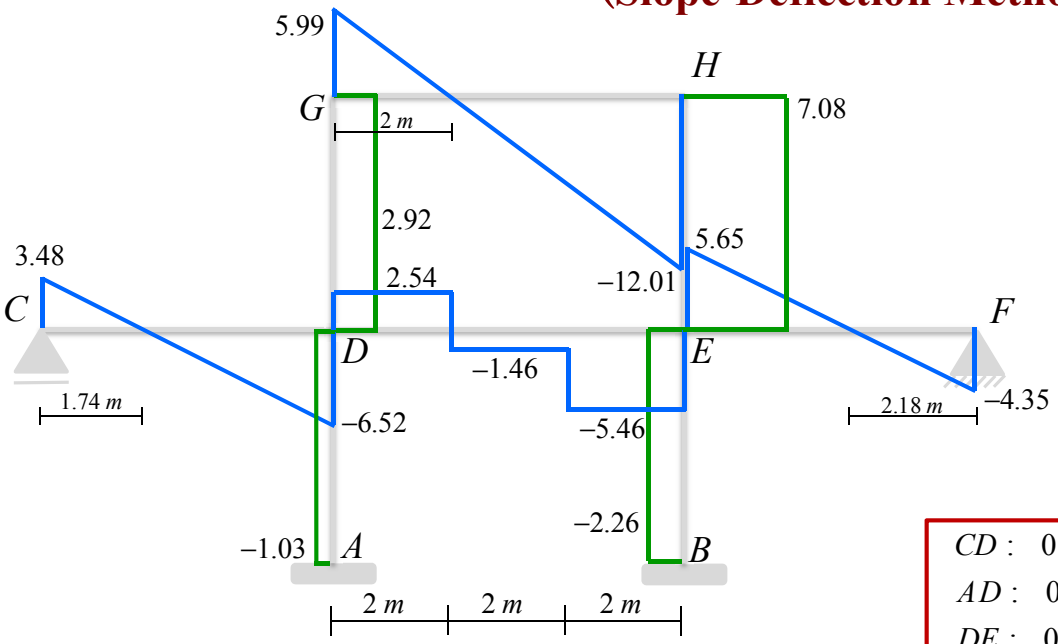
پاسخ مثال ۱۴–



نمودار لنگر خمشی ($ton.m$)

$$\begin{aligned}
CD:&\quad 0\le x\le 5 \quad M_{(x)} = -x^2 + 3.48x\\
AD:&\quad 0\le x\le 4 \quad M_{(x)} = -1.03x + 1.37\\
DE:&\quad 0\le x\le 2 \quad M_{(x)} = 2.54x - 1.49\\
DE:&\quad 2\le x\le 4 \quad M_{(x)} = -1.46x + 6.51\\
DE:&\quad 4\le x\le 6 \quad M_{(x)} = -5.46x + 22.51\\
BE:&\quad 0\le x\le 4 \quad M_{(x)} = -2.26x + 3.01\\
FE:&\quad 5\ge x\ge 0 \quad M_{(x)} = -x^2 + 4.35x\\
DG:&\quad 0\le x\le 4 \quad M_{(x)} = 2.92x - 8.88\\
EH:&\quad 0\le x\le 4 \quad M_{(x)} = 7.08x - 13.06\\
GH:&\quad 0\le x\le 6 \quad M_{(x)} = -1.5x^2 + 5.99x + 2.8
\end{aligned}$$

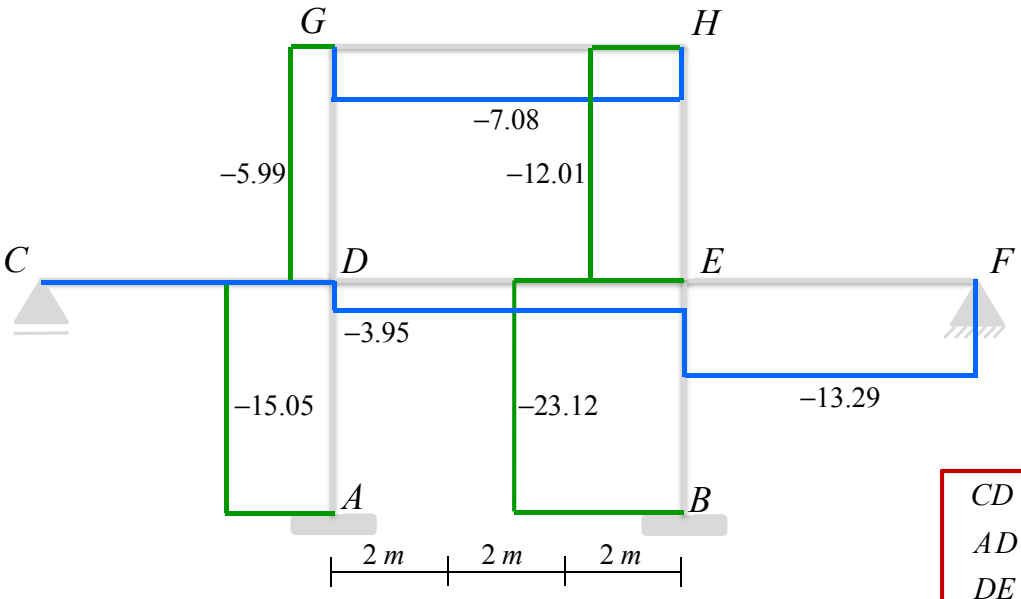
پاسخ مثال ۱۴–



نمودار نیروی برشی (ton)

$$
\begin{aligned}
CD:&\quad 0\le x\le 5 \quad V_{(x)}=-2x+3.48\\
AD:&\quad 0\le x\le 4 \quad V_{(x)}=-1.03\,ton\\
DE:&\quad 0\le x\le 2 \quad V_{(x)}=2.54\,ton\\
DE:&\quad 2\le x\le 4 \quad V_{(x)}=-1.46\,ton\\
DE:&\quad 4\le x\le 6 \quad V_{(x)}=-5.46\,ton\\
BE:&\quad 0\le x\le 4 \quad V_{(x)}=-2.26\,ton\\
FE:&\quad 5\ge x\ge 0 \quad V_{(x)}=2x-4.35\\
DG:&\quad 0\le x\le 4 \quad V_{(x)}=2.92\,ton\\
EH:&\quad 0\le x\le 4 \quad V_{(x)}=7.08\,ton\\
GH:&\quad 0\le x\le 6 \quad V_{(x)}=-3x+5.99
\end{aligned}
$$

پاسخ مثال ۱۴–



نمودار نیروی محوری (ton)

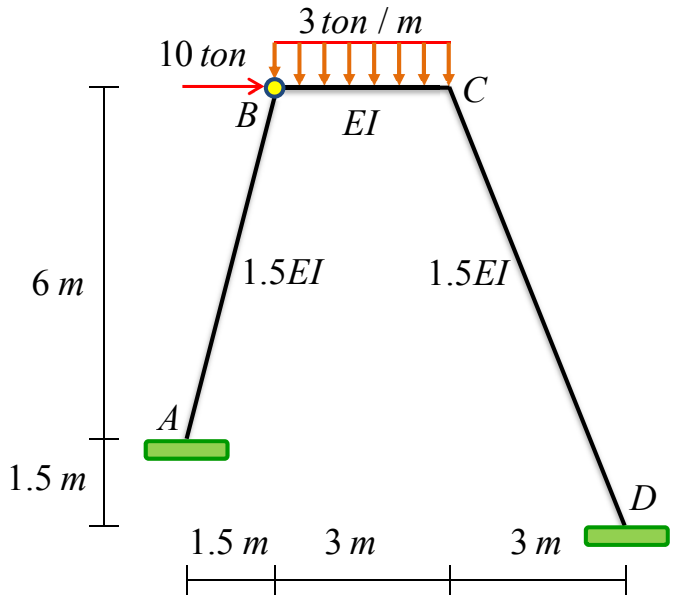
$$
\begin{aligned}
CD:&\quad 0\le x\le 5 \quad P_{(x)}=0\\
AD:&\quad 0\le x\le 4 \quad P_{(x)}=-15.05\,ton\\
DE:&\quad 0\le x\le 2 \quad P_{(x)}=-3.95\,ton\\
DE:&\quad 2\le x\le 4 \quad P_{(x)}=-3.95\,ton\\
DE:&\quad 4\le x\le 6 \quad P_{(x)}=-3.95\,ton\\
BE:&\quad 0\le x\le 4 \quad P_{(x)}=-23.12\,ton\\
FE:&\quad 5\ge x\ge 0 \quad P_{(x)}=-13.29\,ton\\
DG:&\quad 0\le x\le 4 \quad P_{(x)}=-5.99\,ton\\
EH:&\quad 0\le x\le 4 \quad P_{(x)}=-12.01\,ton\\
GH:&\quad 0\le x\le 6 \quad P_{(x)}=-7.08\,ton
\end{aligned}
$$

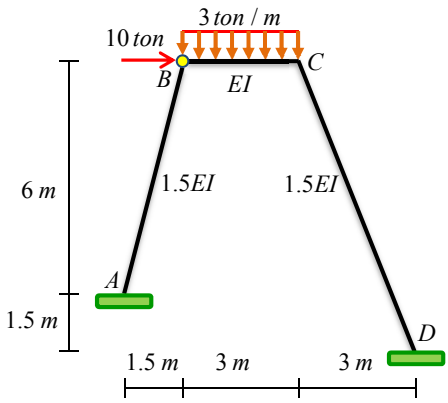
ETABS File Name: **07-Example-14.EDB**

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

مثال ۱۵– نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

$EI = 200 \ ton.m^2$





روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–

محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$k_{AB} = k_{BA} = \frac{200}{\sqrt{17}} ton.m$$

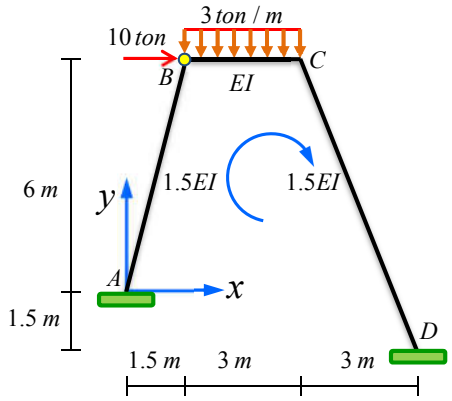
$$k_{BC} = k_{CB} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC} = \frac{EI}{\ell_{BC}} = \frac{200}{3} \Rightarrow k_{BC} = k_{CB} = \frac{200}{3} ton.m$$

$$k_{CD} = k_{DC} = \frac{200}{\sqrt{29}} ton.m$$

محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -2.25 \ ton.m$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۵–

محاسبه ψ_{ij} هر یک از اعضا

$$(22) \Rightarrow \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$

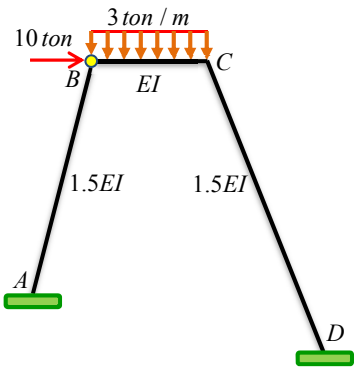
$$\Rightarrow \boxed{1.5\psi_{AB} + 3\psi_{BC} + 3\psi_{CD} = 0} \quad (15.1)$$

$$(22) \Rightarrow \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$

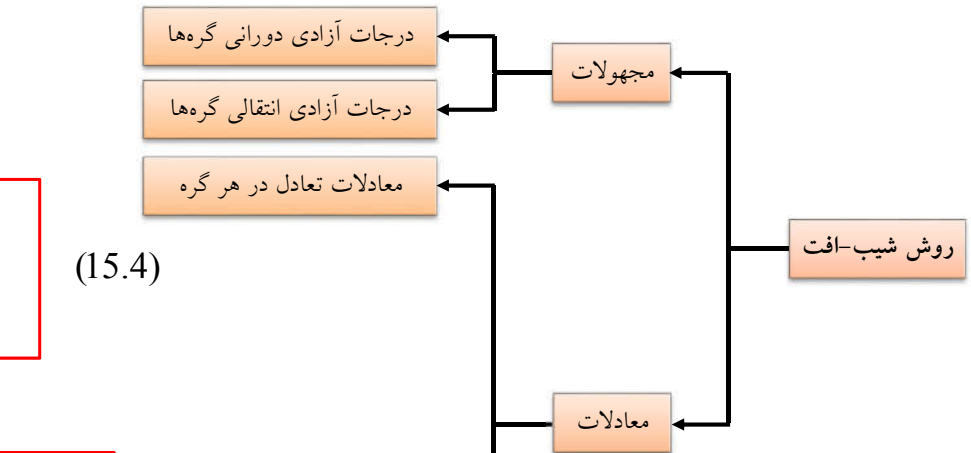
$$\Rightarrow \boxed{6\psi_{AB} - 7.5\psi_{CD} = 0} \quad (15.2)$$

$$\boxed{if \quad \psi_{AB} = \psi_1 \overset{(15.1)\&(15.2)}{\Rightarrow} \psi_{CD} = 0.8\psi_1 \;,\; \psi_{BC} = -1.3\psi_1} \quad (15.3)$$

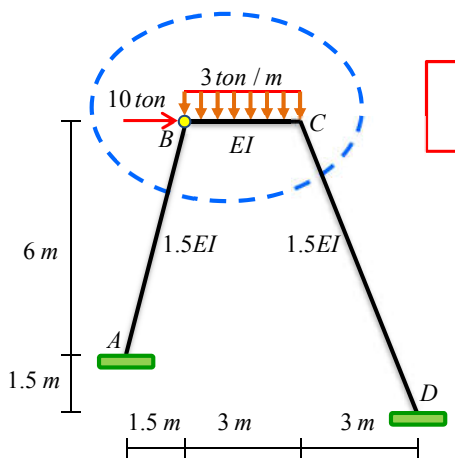
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

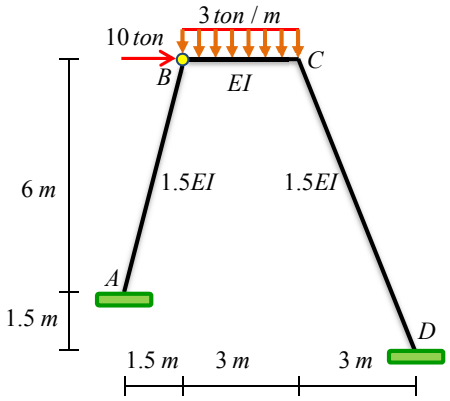


پاسخ مثال ۱۵–



$$\boxed{\quad} \quad (15.4)$$





روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–

نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{AB}=2(EI/\ell)_{AB}(2\theta_A+\theta_{BA}-3\psi_{AB})+FEM_{AB} \Rightarrow \boxed{M_{AB}=k_{AB}(4\theta_A+2\theta_{BA}-6\psi_{AB})+FEM_{AB}}$$

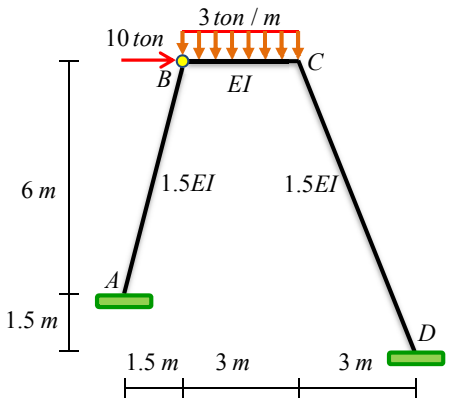
$$M_{BA}=2(EI/\ell)_{BA}(2\theta_{BA}+\theta_A-3\psi_{BA})+FEM_{BA} \Rightarrow \boxed{M_{BA}=k_{BA}(4\theta_{BA}+2\theta_A-6\psi_{BA})+FEM_{BA}}$$

$$M_{BC}=2(EI/\ell)_{BC}(2\theta_{BC}+\theta_C-3\psi_{BC})+FEM_{BC} \Rightarrow \boxed{M_{BC}=k_{BC}(4\theta_{BC}+2\theta_C-6\psi_{BC})+FEM_{BC}}$$

$$M_{CB}=2(EI/\ell)_{CB}(2\theta_C+\theta_{BC}-3\psi_{CB})+FEM_{CB} \Rightarrow \boxed{M_{CB}=k_{CB}(4\theta_C+2\theta_{BC}-6\psi_{CB})+FEM_{CB}}$$

$$M_{CD}=2(EI/\ell)_{CD}(2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD})+FEM_{CD} \Rightarrow \boxed{M_{CD}=k_{CD}(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_{CD})+FEM_{CD}}$$

$$M_{DC}=2(EI/\ell)_{DC}(2\theta_D+\theta_C-3\psi_{DC})+FEM_{DC} \Rightarrow \boxed{M_{DC}=k_{DC}(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_{DC})+FEM_{DC}}$$



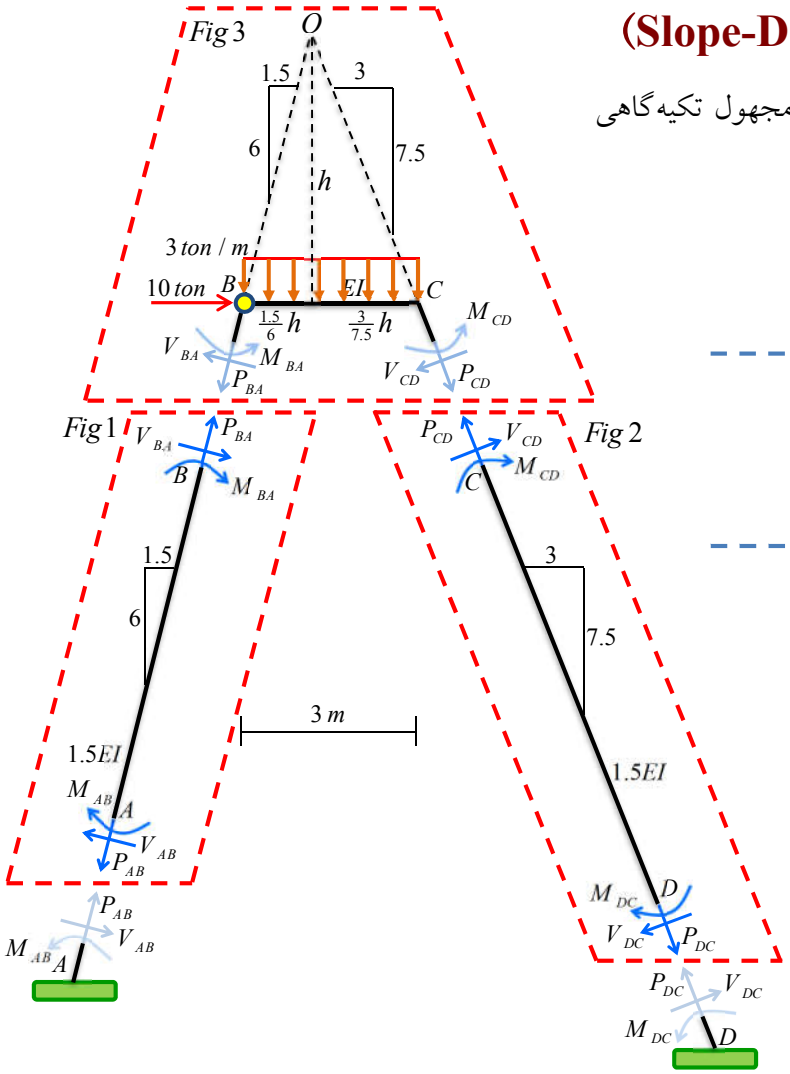
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–

با جایگذاری مقادیر ψ_{ij} به دست آمده از رابطه (15.3) در روابط لنگر مقادیر لنگر ابتدا و انتهای اعضا به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
M_{AB}&=k_{AB}(4\theta_A+2\theta_{BA}-6\psi_1)+FEM_{AB}\\
M_{BA}&=k_{BA}(4\theta_{BA}+2\theta_A-6\psi_1)+FEM_{BA}\\
M_{BC}&=k_{BC}(4\theta_{BC}+2\theta_C+7.8\psi_1)+FEM_{BC}\\
M_{CB}&=k_{CB}(4\theta_C+2\theta_{BC}+7.8\psi_1)+FEM_{CB}\\
M_{CD}&=k_{CD}(4\theta_C+2\theta_D-4.8\psi_1)+FEM_{CD}\\
M_{DC}&=k_{DC}(4\theta_D+2\theta_C-4.8\psi_1)+FEM_{DC}
\end{aligned} \qquad (15.5)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۵– معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.

(15.6)

$$V_{BA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{1.5\sqrt{17}}$$

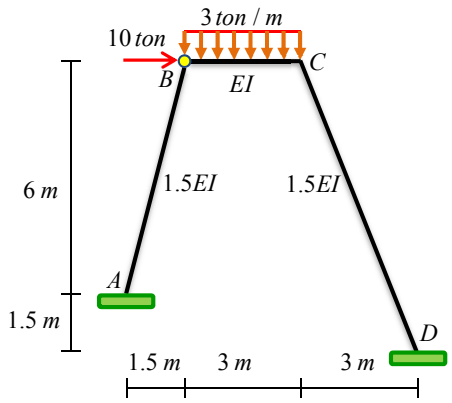
(15.7)

$$V_{CD} = -\frac{M_{DC} + M_{CD}}{1.5\sqrt{29}}$$

$$h = \frac{60}{13}\,m \qquad (15.8)$$

$$23M_{BA} + 10M_{AB} + 21M_{CD} + 8M_{DC} = -559.5 \qquad (15.9)$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۵–

با جایگذاری مقادیر لنگر از روابط (15.5) در معادلات (15.4) و (15.9) نتیجه می‌شود:

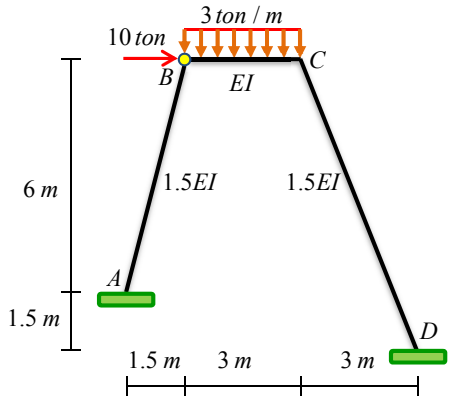
$$(15.5) \rightarrow (15.4)\ \&\ (15.9) \quad \Rightarrow$$

$$4k_{BA}\theta_{BA} - 6k_{BA}\psi_1 = -2k_{BA}\theta_A - FEM_{BA}$$

$$4k_{BC}\theta_{BC} + 2k_{BC}\theta_C + 7.8k_{BC}\psi_1 = -FEM_{BC} \qquad (15.10)$$

$$2k_{CB}\theta_{BC} + (4k_{CB} + 4k_{CD})\theta_C + (7.8k_{CB} - 4.8k_{CD})\psi_1 = -2k_{CD}\theta_D - FEM_{CB} - FEM_{CD}$$

$$(92k_{BA} + 20k_{AB})\theta_{BA} + (84k_{CD} + 16k_{DC})\theta_C - (138k_{BA} + 60k_{AB} + 100.8k_{CD} + 38.4k_{DC})\psi_1$$
$$= -559.5 - (46k_{BA} + 40k_{AB})\theta_A - (42k_{CD} + 32k_{DC})\theta_D - 23FEM_{BA} - 10FEM_{AB} - 21FEM_{CD} - 8FEM_{DC}$$



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

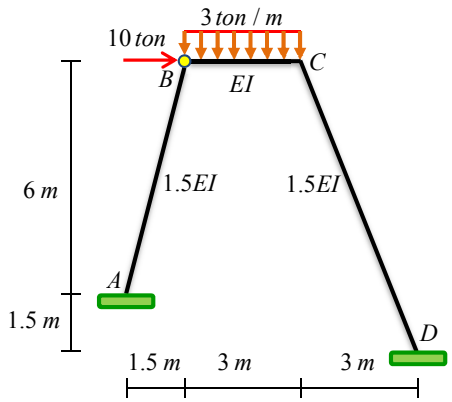
پاسخ مثال ۱۵–

فرم ماتریسی معادلات (15.10) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{c} \\ BA \\ BC \\ C \\ \psi_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} BA & BC & C & \psi_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4k_{BA} & 0 & 0 & -6k_{BA} \\ 0 & 4k_{BC} & 2k_{BC} & 7.8k_{BC} \\ 0 & 2k_{CB} & 4k_{CB}+4k_{CD} & 7.8k_{CB}-4.8k_{CD} \\ 92k_{BA}+20k_{AB} & 0 & 84k_{CD}+16k_{DC} & -138k_{BA}-60k_{AB}-100.8k_{CD}-38.4k_{DC} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} \theta_{BA} \\ \theta_{BC} \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -2k_{BA}\theta_A - FEM_{BA} \\ -FEM_{BC} \\ -2k_{CD}\theta_D - FEM_{CB} - FEM_{CD} \\ -559.5-(46k_{BA}+40k_{AB})\theta_A-(42k_{CD}+32k_{DC})\theta_D-23FEM_{BA}-10FEM_{AB}-21FEM_{CD}-8FEM_{DC} \end{Bmatrix}$$

(15.11)



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

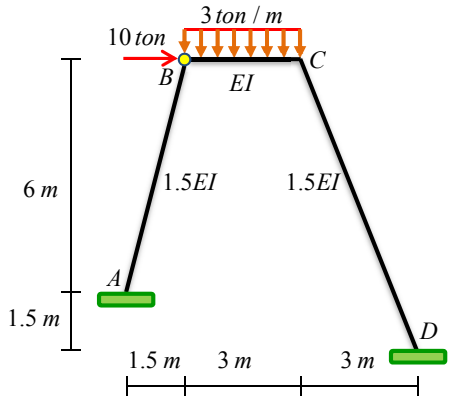
پاسخ مثال ۱۵–

با جایگذاری مقادیر هر یک از پارامترها در رابطه (15.11) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 4\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right) & 0 & 0 & -6\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right) \\ 0 & 4\left(\frac{200}{3}\right) & 2\left(\frac{200}{3}\right) & 7.8\left(\frac{200}{3}\right) \\ 0 & 2\left(\frac{200}{3}\right) & 4\left(\frac{200}{3}\right)+4\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right) & 7.8\left(\frac{200}{3}\right)-4.8\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right) \\ 92\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right)+20\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right) & 0 & 84\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right)+16\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right) & -138\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right)-60\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right)-100.8\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right)-38.4\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{BA} \\ \theta_{BC} \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -2\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right)(0)-(0) \\ 2.25 \\ -2\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right)(0)-2.25-(0) \\ -559.5-\left[46\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right)+40\left(\frac{200}{\sqrt{17}}\right)\right](0)-\left[42\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right)+32\left(\frac{200}{\sqrt{29}}\right)\right](0)-23(0)-10(0)-21(0)-8(0) \end{Bmatrix}$$

(15.12)

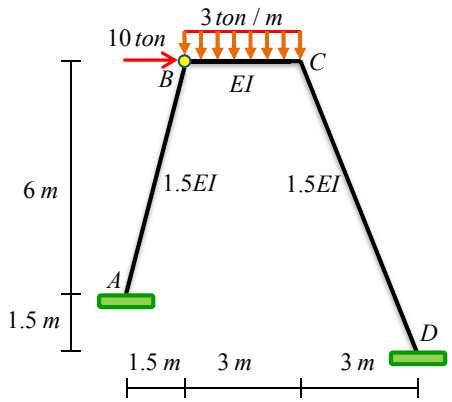


روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–

با ساده سازی رابطه (15.12) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{800}{\sqrt{17}} & 0 & 0 & -\frac{1200}{\sqrt{17}} \\ 0 & \frac{800}{3} & \frac{400}{3} & 520 \\ 0 & \frac{400}{3} & \frac{800}{3}+\frac{800}{\sqrt{29}} & 520-\frac{960}{\sqrt{29}} \\ \frac{22400}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{20000}{\sqrt{29}} & -\frac{39600}{\sqrt{17}}-\frac{27840}{\sqrt{29}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{BA} \\ \theta_{BC} \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.25 \\ -2.25 \\ -559.5 \end{Bmatrix} \qquad (15.13)$$



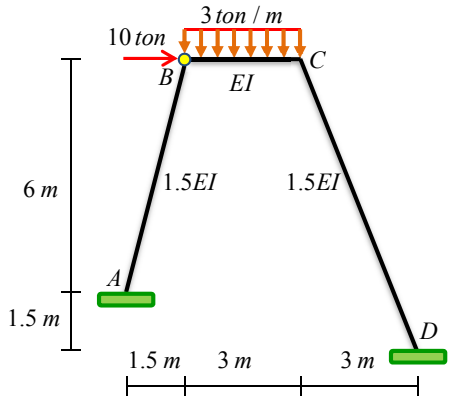
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–

با حل رابطه (15.13) نتیجه می‌شود:

(15.13) $\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{BA} \\ \theta_{BC} \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{800}{\sqrt{17}} & 0 & 0 & -\frac{1200}{\sqrt{17}} \\ 0 & \frac{800}{3} & \frac{400}{3} & 520 \\ 0 & \frac{400}{3} & \frac{800}{3}+\frac{800}{\sqrt{29}} & 520-\frac{960}{\sqrt{29}} \\ \frac{22400}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{20000}{\sqrt{29}} & -\frac{39600}{\sqrt{17}}-\frac{27840}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.25 \\ -2.25 \\ -559.5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_{BA} \\ \theta_{BC} \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1047.7 \\ -1147.3 \\ -260.6 \\ 698.44 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \ (rad) \qquad (15.14)$$



پاسخ مثال ۱۵–

با جایگذاری مجهولات به دست آمده از رابطه (15.14) در روابط لنگر (15.5) مقادیر لنگرهای ابتدا و انتهای تیرها به دست می‌آید:

$$M_{AB}=k_{AB}\left(4\theta_A+2\theta_{BA}-6\psi_1\right)+FEM_{AB}=\frac{200}{\sqrt{17}}\times\left(4(0)+2(1047.7)-6(698.44)\right)\times10^{-4}+0 \Rightarrow \boxed{M_{AB}=-10.163\,ton.m}$$

$$M_{BA}=k_{BA}\left(4\theta_{BA}+2\theta_A-6\psi_1\right)+FEM_{BA}=\frac{200}{\sqrt{17}}\times\left(4(1047.7)+2(0)-6(698.44)\right)\times10^{-4}+0 \Rightarrow \boxed{M_{BA}=0}$$

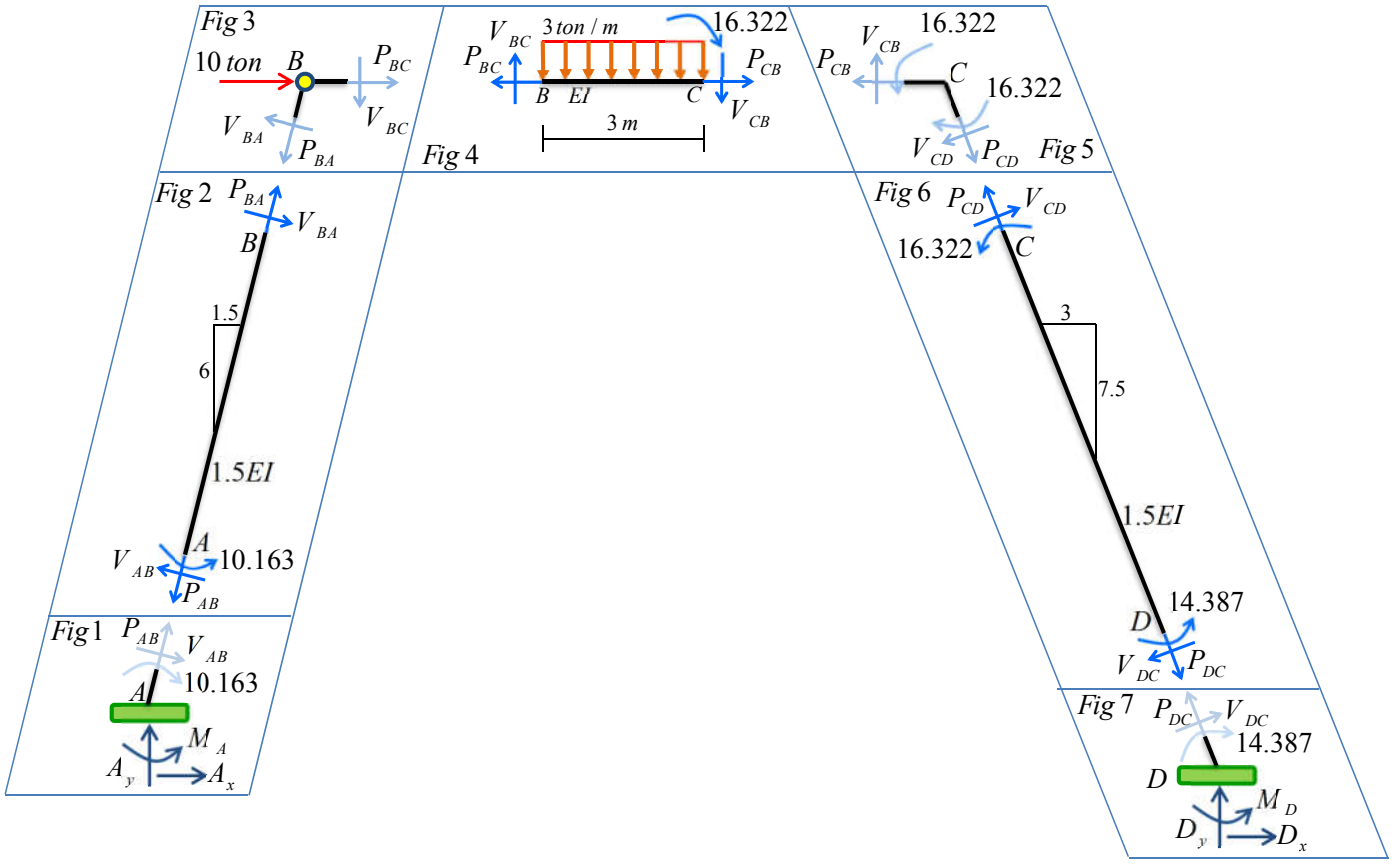
$$M_{BC}=k_{BC}\left(4\theta_{BC}+2\theta_C+7.8\psi_1\right)+FEM_{BC}=\frac{200}{3}\times\left(4(-1147.3)+2(-260.6)+7.8(698.44)\right)\times10^{-4}-2.25 \Rightarrow \boxed{M_{BC}=0}$$

$$M_{CB}=k_{CB}\left(4\theta_C+2\theta_{BC}+7.8\psi_1\right)+FEM_{CB}=\frac{200}{3}\times\left(4(-260.6)+2(-1147.3)+7.8(698.44)\right)\times10^{-4}+2.25 \Rightarrow \boxed{M_{CB}=16.322\,ton.m}$$

$$M_{CD}=k_{CD}\left(4\theta_C+2\theta_D-4.8\psi_1\right)+FEM_{CD}=\frac{200}{\sqrt{29}}\times\left(4(-260.6)+2(0)-4.8(698.44)\right)\times10^{-4}+0 \Rightarrow \boxed{M_{CD}=-16.322\,ton.m}$$

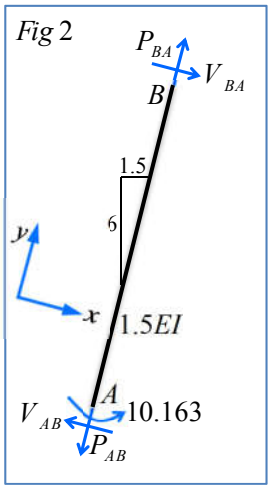
$$M_{DC}=k_{DC}\left(4\theta_D+2\theta_C-4.8\psi_1\right)+FEM_{DC}=\frac{200}{\sqrt{29}}\times\left(4(0)+2(-260.6)-4.8(698.44)\right)\times10^{-4}+0 \Rightarrow \boxed{M_{DC}=-14.387\,ton.m}$$

پاسخ مثال ۱۵– برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:



پاسخ مثال ۱۵–

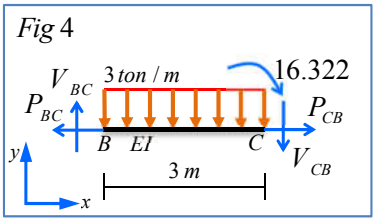
با بررسی شکل (۲) نتیجه می‌شود:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_{BA} \times \sqrt{1.5^2 + 6^2} + 10.163 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = 1.643\, ton} \quad (15.15)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{AB} + V_{BA} = 0 \overset{(15.15)}{\Rightarrow} \boxed{V_{AB} = 1.643\, ton} \quad (15.16)$$

با بررسی شکل (۴) نتیجه می‌شود:

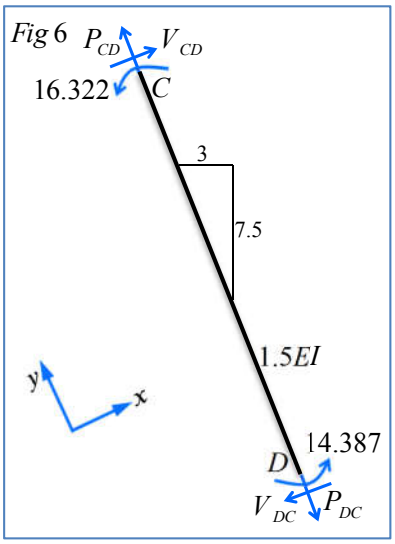


$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -16.322 - V_{CB} \times 3 - (3 \times 3) \times \left(\frac{3}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = -9.941\ ton} \quad (15.17)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} - V_{CB} - (3 \times 3) = 0 \overset{(15.17)}{\Rightarrow} \boxed{V_{BC} = -0.941\, ton} \quad (15.18)$$

پاسخ مثال ۱۵–

با بررسی شکل (۶) نتیجه می‌شود:

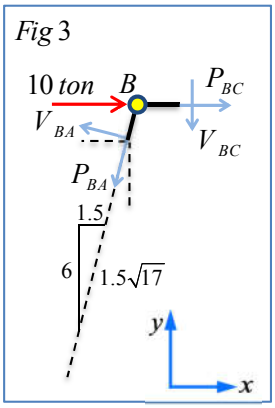


$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_{CD} \times \sqrt{3^2 + 7.5^2} + 14.387 + 16.322 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{CD} = 3.802\, ton} \quad (15.19)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} - V_{DC} = 0 \overset{(15.19)}{\Rightarrow} \boxed{V_{DC} = 3.802\, ton} \quad (15.20)$$

با بررسی شکل (۳) نتیجه می‌شود:

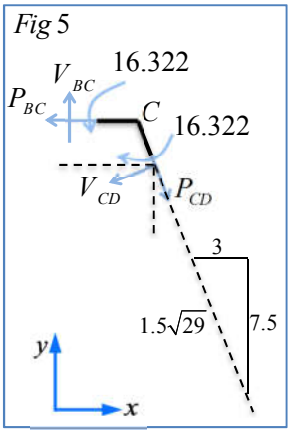


$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 10 + P_{BC} - V_{BA} \times \frac{6}{1.5\sqrt{17}} - P_{BA} \times \frac{1.5}{1.5\sqrt{17}} = 0 \\ \sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad -V_{BC} + V_{BA} \times \frac{1.5}{1.5\sqrt{17}} - P_{BA} \times \frac{6}{1.5\sqrt{17}} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{(15.15)\&(15.18)}{\Rightarrow} \quad (15.21)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{BA} &= P_{AB} = 1.381\, ton \\ P_{BC} &= P_{CB} = -8.071\, ton \end{aligned}}$$

پاسخ مثال ۱۵–

Fig 5



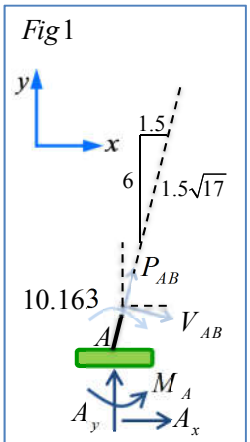
با بررسی شکل (۵) نتیجه می‌شود:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_{BC} - V_{CD} \times \frac{7.5}{1.5\sqrt{29}} + P_{CD} \times \frac{3}{1.5\sqrt{29}} = 0$$

$$\overset{(15.19)\&(15.21)}{\Rightarrow} \quad \boxed{P_{CD} = P_{DC} = -12.227\, ton} \qquad (15.22)$$

با بررسی شکل (۱) نتیجه می‌شود:

Fig 1



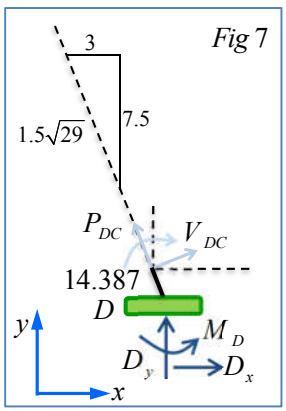
$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_x + P_{AB} \times \frac{1.5}{1.5\sqrt{17}} + V_{AB} \times \frac{6}{1.5\sqrt{17}} = 0 \\ \sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_y + P_{AB} \times \frac{6}{1.5\sqrt{17}} - V_{AB} \times \frac{1.5}{1.5\sqrt{17}} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{(15.16)\&(15.21)}{\Rightarrow} \qquad (15.23)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= -1.929\, ton \\ A_y &= -0.941\, ton \end{aligned}}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 10.163 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = 10.163\, ton.m} \qquad (15.24)$$

پاسخ مثال ۱۵–

Fig 7



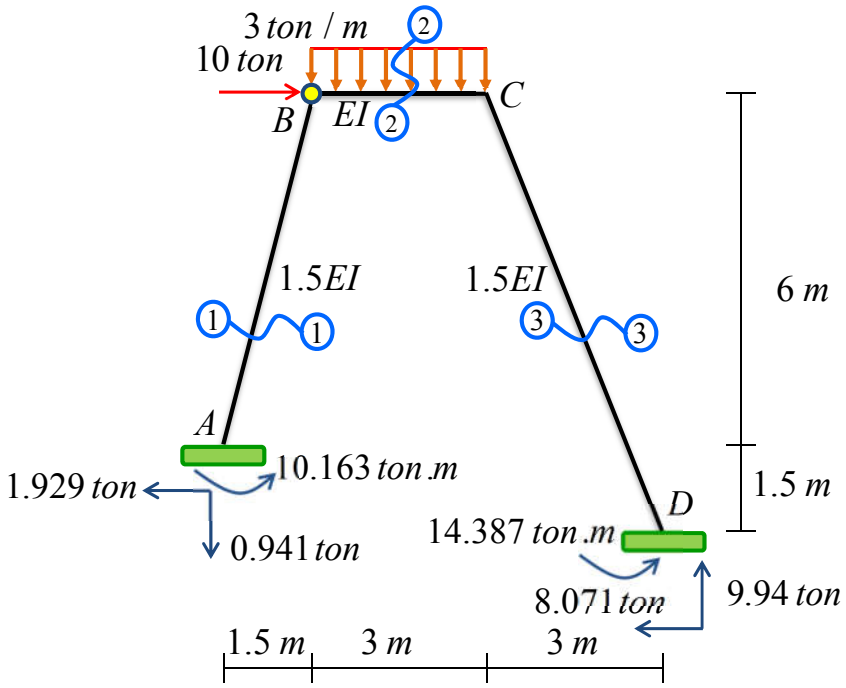
با بررسی شکل (۷) نتیجه می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad D_x - P_{DC} \times \frac{3}{1.5\sqrt{29}} + V_{DC} \times \frac{7.5}{1.5\sqrt{29}} = 0 \\ \sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad D_y + P_{DC} \times \frac{7.5}{1.5\sqrt{29}} + V_{DC} \times \frac{3}{1.5\sqrt{29}} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{(15.20)\&(15.22)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\begin{aligned} D_x &= -8.071\, ton \\ D_y &= 9.940\, ton \end{aligned}} \qquad (15.25)$$

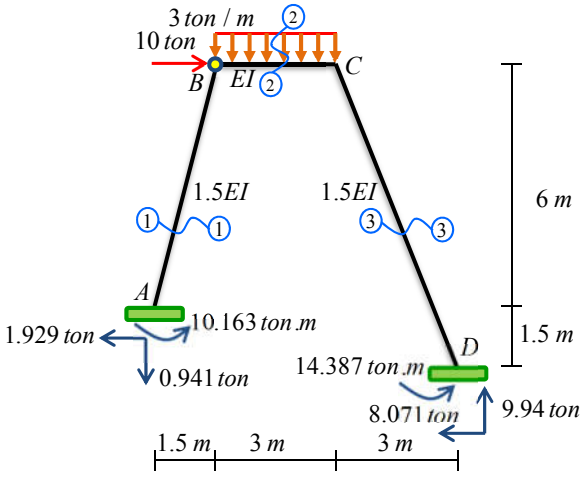
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_D - 14.387 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_D = 14.387\, ton.m} \qquad (15.26)$$

پاسخ مثال ۱۵–

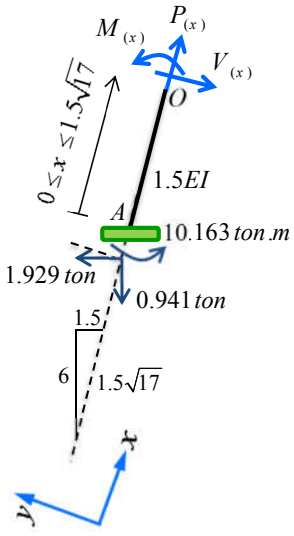
عکس العمل‌های تکیه‌گاهی محاسبه شده در شکل زیر نشان داده شده است:



پاسخ مثال ۱۵–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱–۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 1.929\times\frac{6}{1.5\sqrt{17}}\times x + 0.941\times\frac{1.5}{1.5\sqrt{17}}\times x + 10.163 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 1.643x - 10.163}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} + 1.929\times\frac{6}{1.5\sqrt{17}} - 0.941\times\frac{1.5}{1.5\sqrt{17}} = 0$$

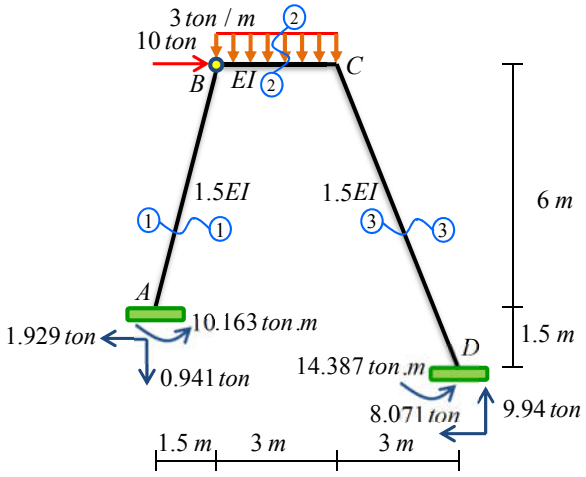
$$\Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 1.643\ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} - 1.929\times\frac{1.5}{1.5\sqrt{17}} - 0.941\times\frac{6}{1.5\sqrt{17}} = 0$$

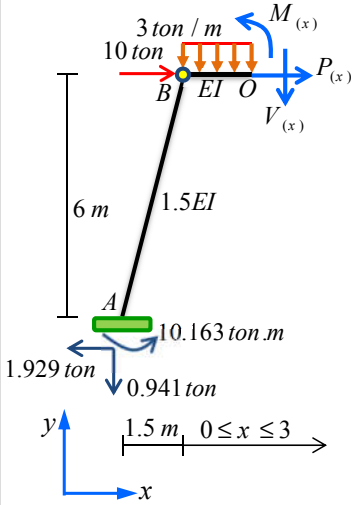
$$\Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 1.381\ ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲–۲ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (3\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) - 1.929\times 6 + 0.941\times(1.5+x) + 10.163 = 0$$

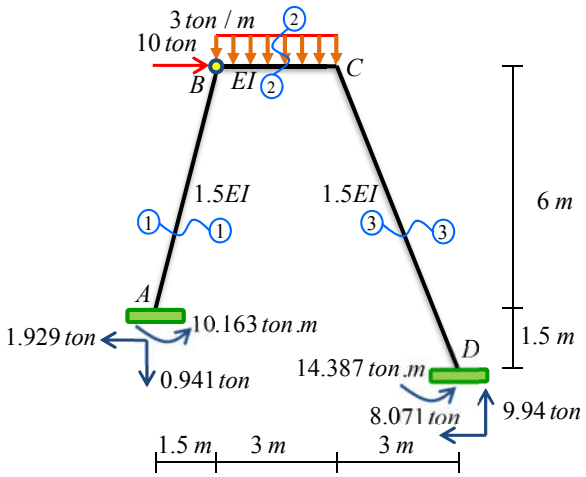
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 - 0.941x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - (3\times x) - 0.941 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -3x - 0.941}$$

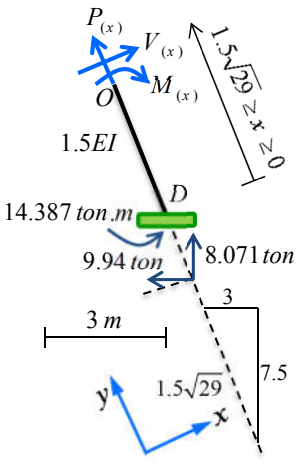
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 10 - 1.929 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -8.071\,ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۳–۳ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 9.94\times\frac{3}{1.5\sqrt{29}}\times x - 8.071\times\frac{7.5}{1.5\sqrt{29}}\times x + 14.387 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -3.802x + 14.387}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 9.94\times\frac{3}{1.5\sqrt{29}} - 8.071\times\frac{7.5}{1.5\sqrt{29}} = 0$$

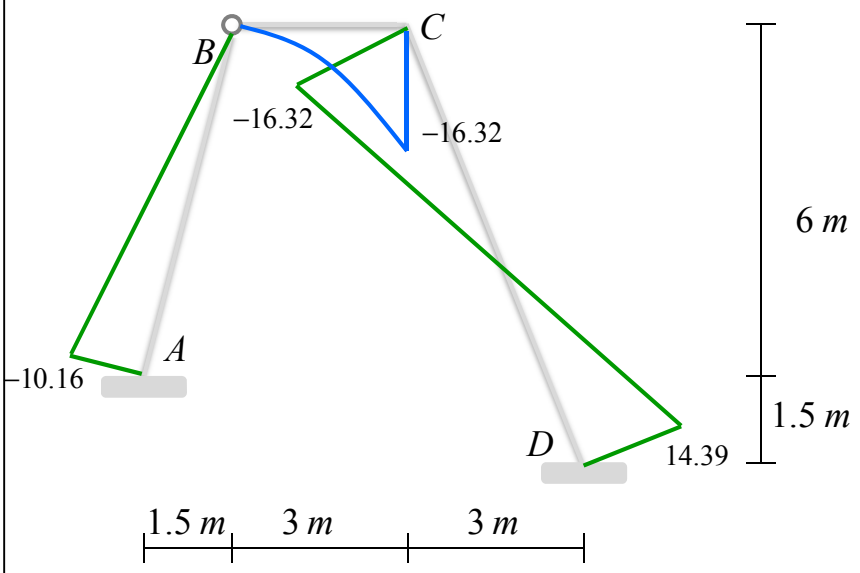
$$\Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 3.802\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 9.94\times\frac{7.5}{1.5\sqrt{29}} + 8.071\times\frac{3}{1.5\sqrt{29}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -12.227\,ton}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–



نمودار لنگر خمشی ($ton.m$)

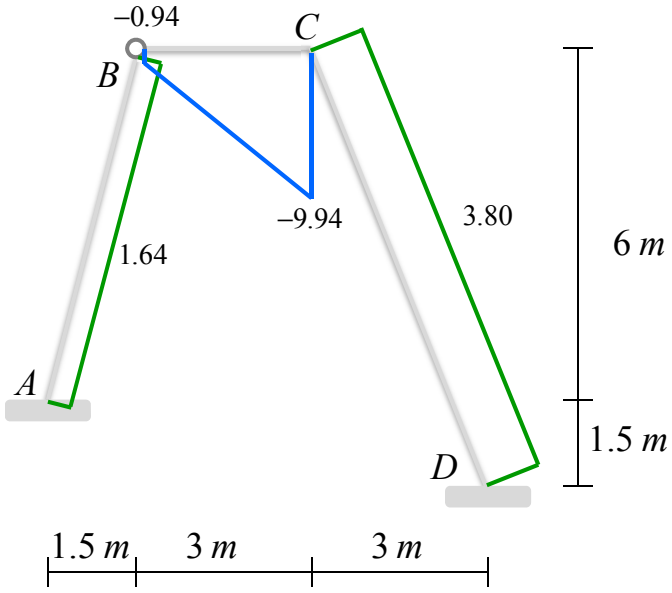
$$AB: \quad 0 \le x \le 1.5\sqrt{17} \quad M_{(x)} = 1.643x - 10.163$$

$$BC: \quad 0 \le x \le 3 \quad M_{(x)} = -1.5x^2 - 0.941x$$

$$DC: \quad 1.5\sqrt{29} \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -3.802x + 14.387$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۵–



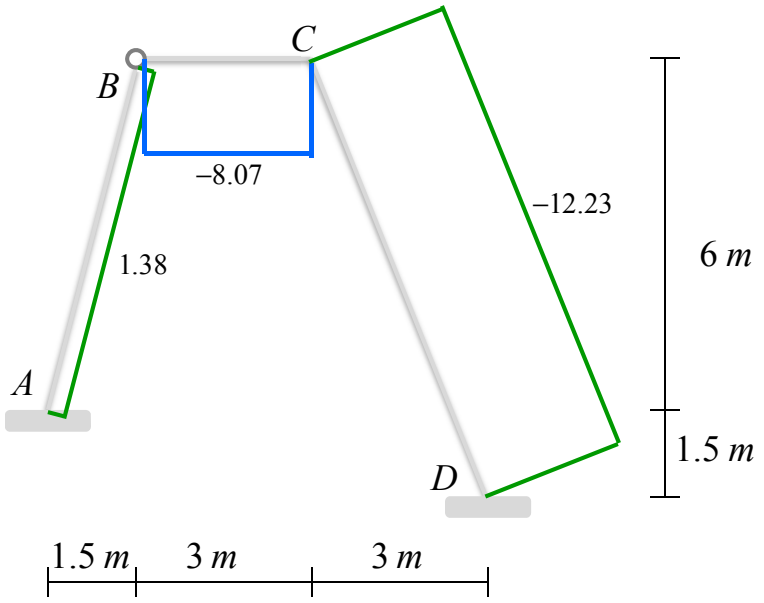
نمودار نیروی برشی (ton)

$$AB: \quad 0 \le x \le 1.5\sqrt{17} \quad V_{(x)} = 1.643\,ton$$

$$BC: \quad 0 \le x \le 3 \quad V_{(x)} = -3x - 0.941$$

$$DC: \quad 1.5\sqrt{29} \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = 3.802\,ton$$

پاسخ مثال ۱۵–



نمودار نیروی محوری (ton)

$$AB: \quad 0 \le x \le 1.5\sqrt{17} \quad P_{(x)} = 1.381\, ton$$

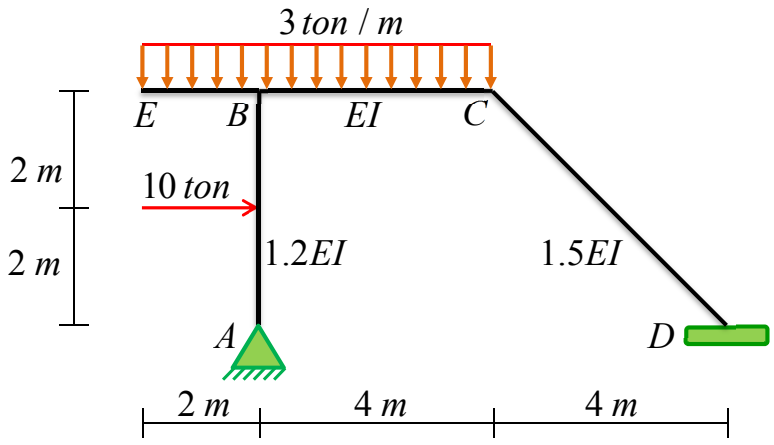
$$BC: \quad 0 \le x \le 3 \quad P_{(x)} = -8.071\, ton$$

$$DC: \quad 1.5\sqrt{29} \ge x \ge 0 \quad P_{(x)} = -12.227\, ton$$

ETABS File Name: **07-Example-15.EDB**

مثال ۱۶– نمودار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید.

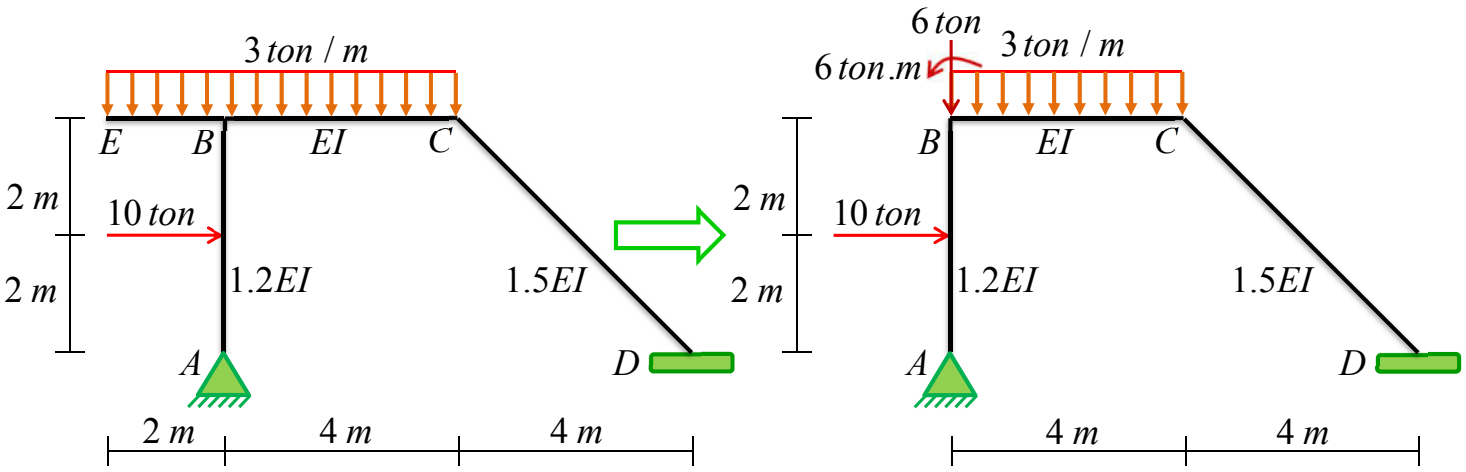
$$EI = 200\ ton.m^2$$



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

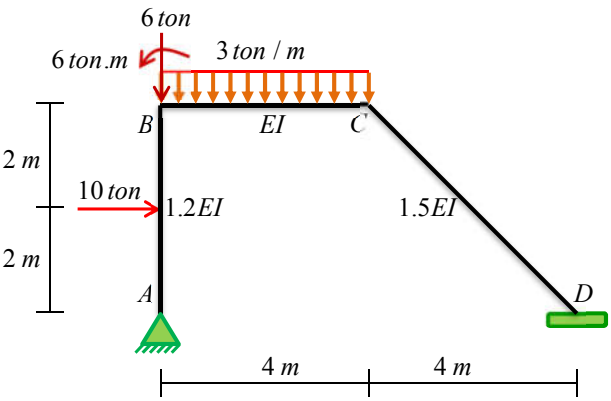
پاسخ مثال ۱۶–

از آنجایی که کنسول یک سازه معین است از این رو، وارد محاسبات نمی‌شود؛ اما اثر آن را باید در آنالیز لحاظ نمود.



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۶–



محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$k_{AB}=k_{BA}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{AB}=\frac{E\,(1.2I)}{\ell_{AB}}=\frac{1.2\times 200}{4}\Rightarrow \boxed{k_{AB}=k_{BA}=60\ ton.m}$$

$$k_{BC}=k_{CB}=\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC}=\frac{EI}{\ell_{BC}}=\frac{200}{4}\Rightarrow \boxed{k_{BC}=k_{CB}=50\ ton.m}$$

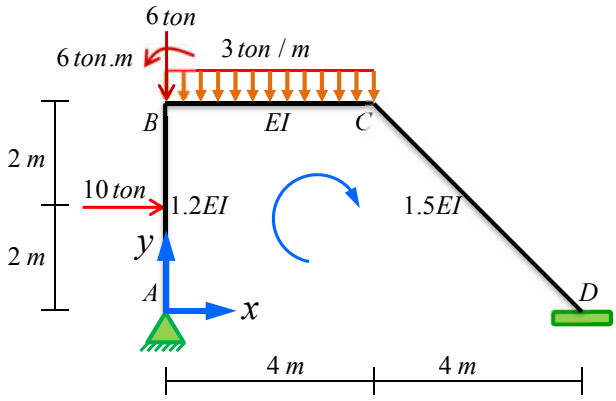
$$\boxed{k_{CD}=k_{DC}=37.5\sqrt{2}\ ton.m}$$

محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$\boxed{FEM_{AB}=-FEM_{BA}=-5\ ton.m}$$

$$FEM_{BC}=-FEM_{CB}=-\frac{\omega\ell^2}{12}=-\frac{3(4)^2}{12}\Rightarrow \boxed{FEM_{BC}=-FEM_{CB}=-4\ ton.m}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۶–

محاسبه ψ_{ij} هر یک از اعضا

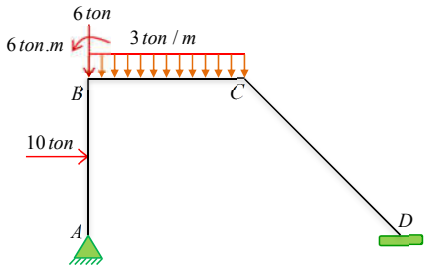
$$(22) \Rightarrow \sum (x_j - x_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_{BC} + \psi_{CD} = 0} \quad (16.1)$$

$$(22) \Rightarrow \sum (y_j - y_i)\psi_{ij} = 0 \Rightarrow$$

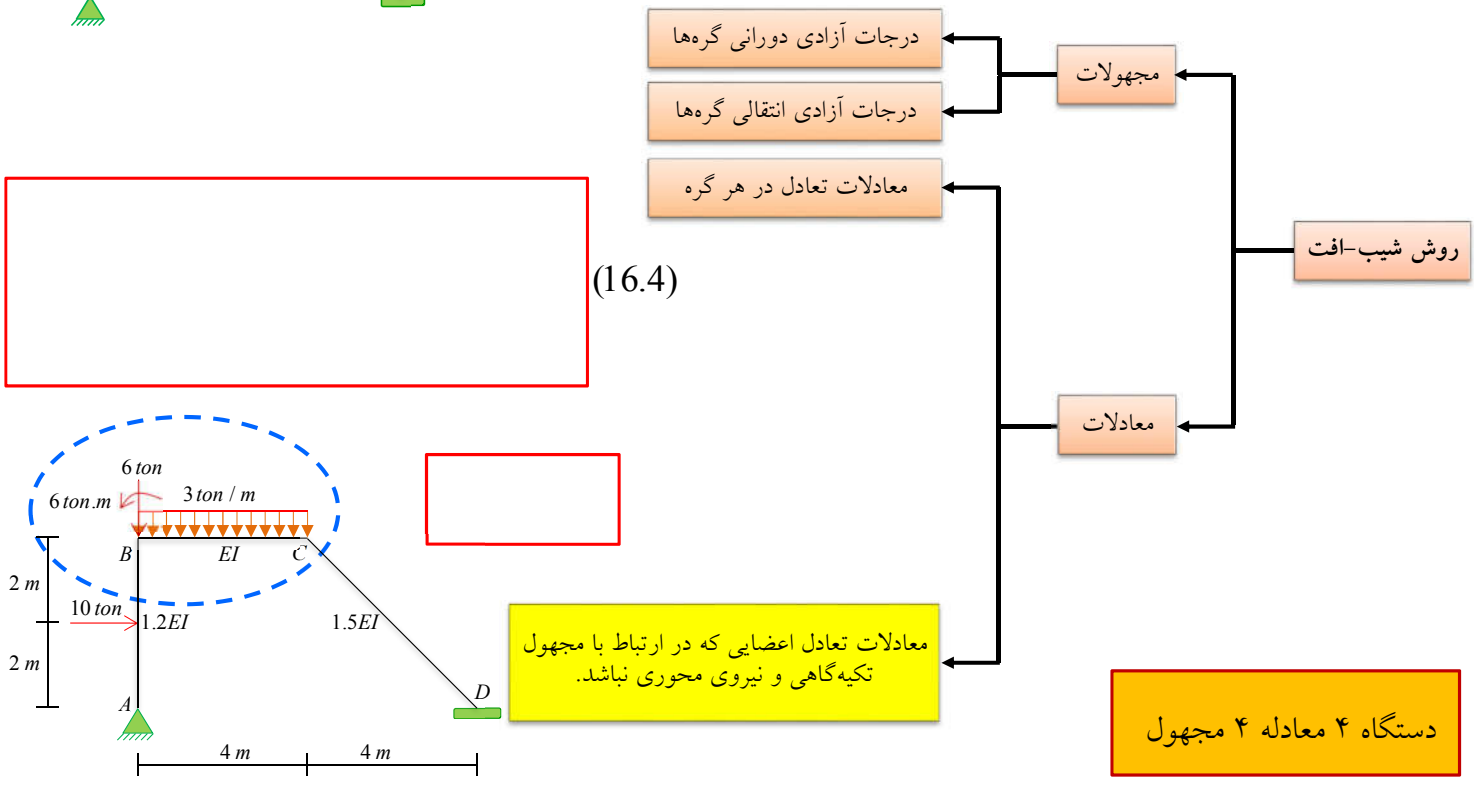
$$\Rightarrow \boxed{\psi_{AB} - \psi_{CD} = 0} \quad (16.2)$$

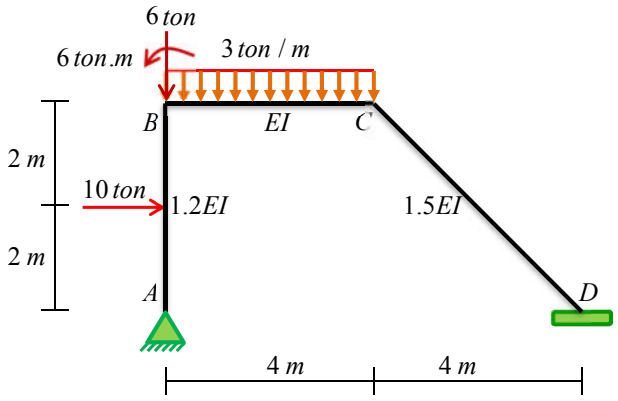
$$\boxed{if \quad \psi_{AB} = \psi_1 \xrightarrow{(16.1)\&(16.2)} \psi_{BC} = -\psi_1 \;,\; \psi_{CD} = \psi_1} \quad (16.3)$$



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۶–





پاسخ مثال ۱۶–

نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{AB}=2(EI/\ell)_{AB}(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB})+FEM_{AB} \Rightarrow \boxed{M_{AB}=k_{AB}(4\theta_A+2\theta_B-6\psi_{AB})+FEM_{AB}}$$

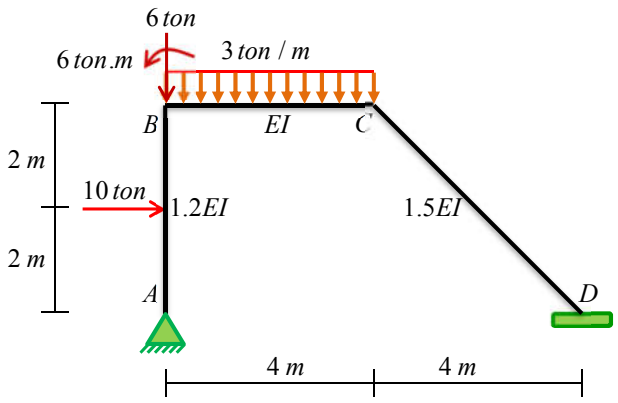
$$M_{BA}=2(EI/\ell)_{BA}(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{BA})+FEM_{BA} \Rightarrow \boxed{M_{BA}=k_{BA}(4\theta_B+2\theta_A-6\psi_{BA})+FEM_{BA}}$$

$$M_{BC}=2(EI/\ell)_{BC}(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC})+FEM_{BC} \Rightarrow \boxed{M_{BC}=k_{BC}(4\theta_B+2\theta_C-6\psi_{BC})+FEM_{BC}}$$

$$M_{CB}=2(EI/\ell)_{CB}(2\theta_C+\theta_B-3\psi_{CB})+FEM_{CB} \Rightarrow \boxed{M_{CB}=k_{CB}(4\theta_C+2\theta_B-6\psi_{CB})+FEM_{CB}}$$

$$M_{CD}=2(EI/\ell)_{CD}(2\theta_C+\theta_D-3\psi_{CD})+FEM_{CD} \Rightarrow \boxed{M_{CD}=k_{CD}(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_{CD})+FEM_{CD}}$$

$$M_{DC}=2(EI/\ell)_{DC}(2\theta_D+\theta_C-3\psi_{DC})+FEM_{DC} \Rightarrow \boxed{M_{DC}=k_{DC}(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_{DC})+FEM_{DC}}$$



پاسخ مثال ۱۶–

با جایگذاری مقادیر ψ_{ij} به دست آمده از رابطه (16.3) در روابط لنگر مقادیر لنگر ابتدا و انتهای اعضا به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
M_{AB}&=k_{AB}(4\theta_A+2\theta_B-6\psi_1)+FEM_{AB}\\
M_{BA}&=k_{BA}(4\theta_B+2\theta_A-6\psi_1)+FEM_{BA}\\
M_{BC}&=k_{BC}(4\theta_B+2\theta_C+6\psi_1)+FEM_{BC}\\
M_{CB}&=k_{CB}(4\theta_C+2\theta_B+6\psi_1)+FEM_{CB}\\
M_{CD}&=k_{CD}(4\theta_C+2\theta_D-6\psi_1)+FEM_{CD}\\
M_{DC}&=k_{DC}(4\theta_D+2\theta_C-6\psi_1)+FEM_{DC}
\end{aligned} \qquad (16.5)$$

پاسخ مثال ۱۶– معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.

Fig 3

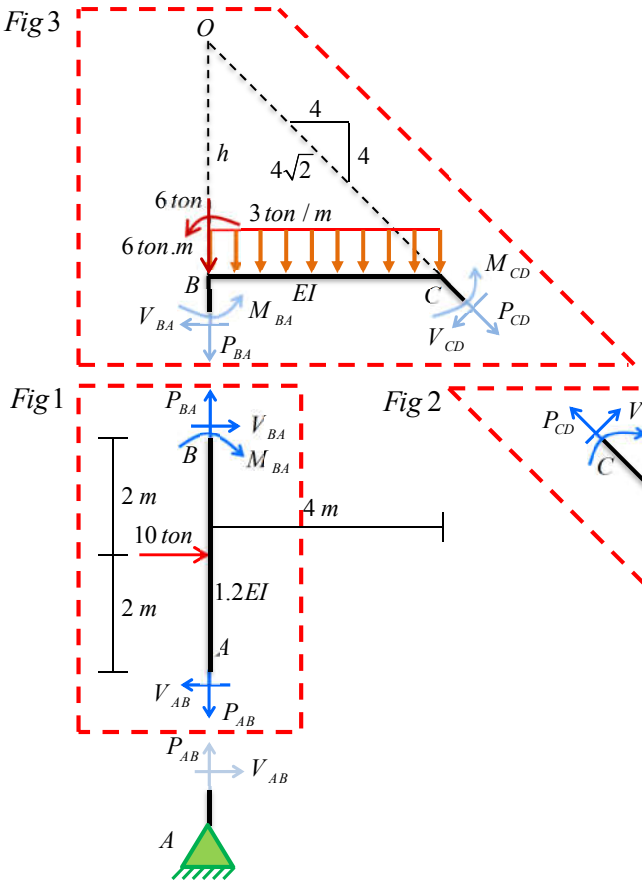
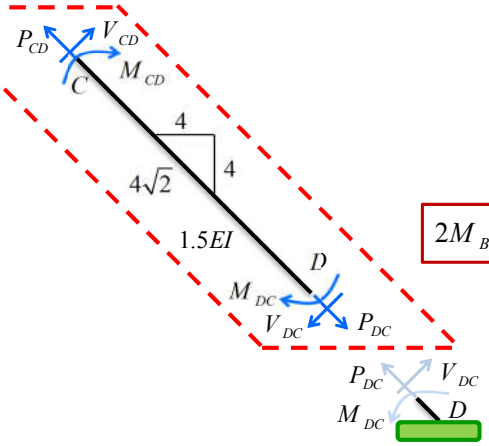


Fig 1

Fig 2



$$V_{BA} = -\frac{M_{BA} + 20}{4} \quad (16.6)$$

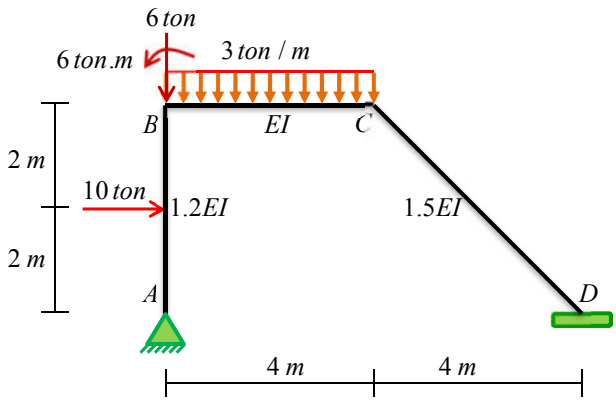
(16.7)

$$V_{CD} = -\frac{M_{DC} + M_{CD}}{4\sqrt{2}}$$

Fig 3 $\Rightarrow$

$$h = 4\,m \quad (16.8)$$

$$2M_{BA} + 2M_{CD} + M_{DC} = -2 \quad (16.9)$$

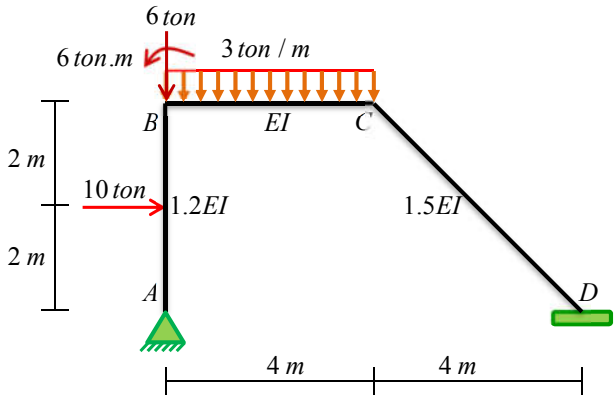


پاسخ مثال ۱۶–

با جایگذاری مقادیر لنگر از روابط (16.5) در معادلات (16.4) و (16.9) نتیجه می‌شود:

$$(16.5) \rightarrow (16.4)\ \&\ (16.9) \quad \Rightarrow$$

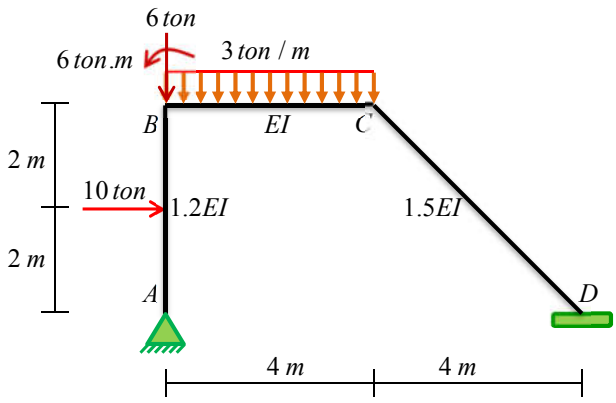
$$\begin{aligned}
&4k_{AB}\theta_A + 2k_{AB}\theta_B - 6k_{AB}\psi_1 = -FEM_{AB} \\
&2k_{BA}\theta_A + (4k_{BA} + 4k_{BC})\theta_B + 2k_{BC}\theta_C + (6k_{BC} - 6k_{BA})\psi_1 = -6 - FEM_{BA} - FEM_{BC} \\
&2k_{CB}\theta_B + (4k_{CD} + 4k_{CB})\theta_C + (6k_{CB} - 6k_{CD})\psi_1 = -2k_{CD}\theta_D - FEM_{CB} - FEM_{CD} \\
&4k_{BA}\theta_A + 8k_{BA}\theta_B + (8k_{CD} + 2k_{DC})\theta_C - (12k_{BA} + 12k_{CD} + 6k_{DC})\psi_1 = \\
&\qquad -2 - (4k_{CD} + 4k_{DC})\theta_D - 2FEM_{BA} - 2FEM_{CD} - FEM_{DC}
\end{aligned} \quad (16.10)$$



پاسخ مثال ۱۶–

فرم ماتریسی معادلات (16.10) به صورت زیر نوشته می‌شود:

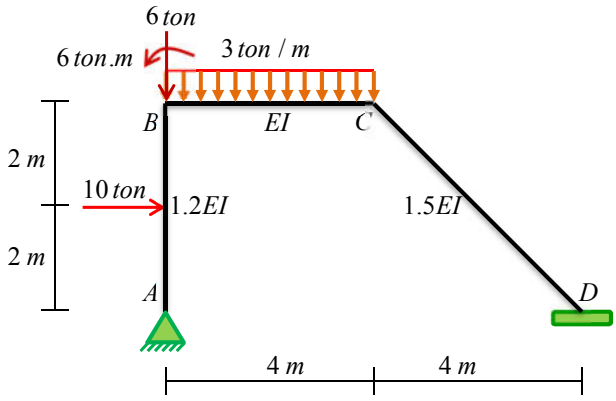
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ \psi_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & \psi_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4k_{AB} & 2k_{AB} & 0 & -6k_{AB} \\ 2k_{BA} & 4k_{BA}+4k_{BC} & 2k_{BC} & 6k_{BC}-6k_{BA} \\ 0 & 2k_{CB} & 4k_{CD}+4k_{CB} & 6k_{CB}-6k_{CD} \\ 4k_{BA} & 8k_{BA} & 8k_{CD}+2k_{DC} & -12k_{BA}-12k_{CD}-6k_{DC} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -FEM_{AB} \\ -6-FEM_{BA}-FEM_{BC} \\ -2k_{CD}\theta_D - FEM_{CB}-FEM_{CD} \\ -2-(4k_{CD}+4k_{DC})\theta_D - 2FEM_{BA}-2FEM_{CD}-FEM_{DC} \end{Bmatrix} \quad (16.11)$$



پاسخ مثال ۱۶–

با جایگذاری مقادیر هر یک از پارامترها در رابطه (16.11) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 4(60) & 2(60) & 0 & -6(60) \\ 2(60) & 4(60)+4(50) & 2(50) & 6(50)-6(60) \\ 0 & 2(50) & 4\left(37.5\sqrt{2}\right)+4(50) & 6(50)-6\left(37.5\sqrt{2}\right) \\ 4(60) & 8(60) & 8\left(37.5\sqrt{2}\right)+2\left(37.5\sqrt{2}\right) & -12(60)-12\left(37.5\sqrt{2}\right)-6\left(37.5\sqrt{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(-5) \\ -6-5-(-4) \\ -2\left(37.5\sqrt{2}\right)(0)-4-0 \\ -2-\left[4\left(37.5\sqrt{2}\right)+4\left(37.5\sqrt{2}\right)\right](0)-2(5)-2(0)-0 \end{Bmatrix} \quad (16.12)$$



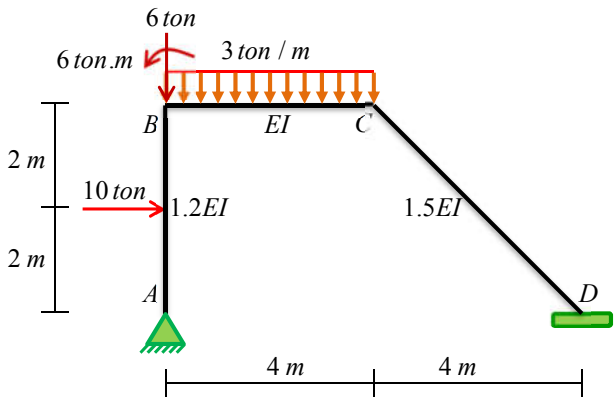
پاسخ مثال ۱۶–

با ساده سازی رابطه (16.12) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 240 & 120 & 0 & -360 \\ 120 & 440 & 100 & -60 \\ 0 & 100 & 200+150\sqrt{2} & 300-225\sqrt{2} \\ 480 & 600 & 375\sqrt{2} & -1080-675\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \\ -7 \end{Bmatrix} \qquad (16.13)$$

با حل رابطه (16.13) نتیجه می‌شود:

$$(16.13) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 120 & 0 & -360 \\ 120 & 440 & 100 & -60 \\ 0 & 100 & 200+150\sqrt{2} & 300-225\sqrt{2} \\ 480 & 600 & 375\sqrt{2} & -1080-675\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \\ -7 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 405.2 \\ -255.84 \\ -32.949 \\ 45.963 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \ (rad) \qquad (16.14)$$



پاسخ مثال ۱۶–

با جایگذاری مجهولات به دست آمده از رابطه (16.14) در روابط لنگر (16.5) مقادیر لنگرهای ابتدا و انتهای تیرها به دست می‌آید:

$$M_{AB} = k_{AB}\left(4\theta_A + 2\theta_B - 6\psi_1\right) + FEM_{AB} = 60\times\left(4(405.2)+2(-255.84)-6(45.963)\right)\times10^{-4} - 5 \Rightarrow \boxed{M_{AB} = 0}$$

$$M_{BA} = k_{BA}\left(4\theta_B + 2\theta_A - 6\psi_1\right) + FEM_{BA} = 60\times\left(4(-255.84)+2(405.2)-6(45.963)\right)\times10^{-4} + 5 \Rightarrow \boxed{M_{BA} = 2.07\,ton.m}$$

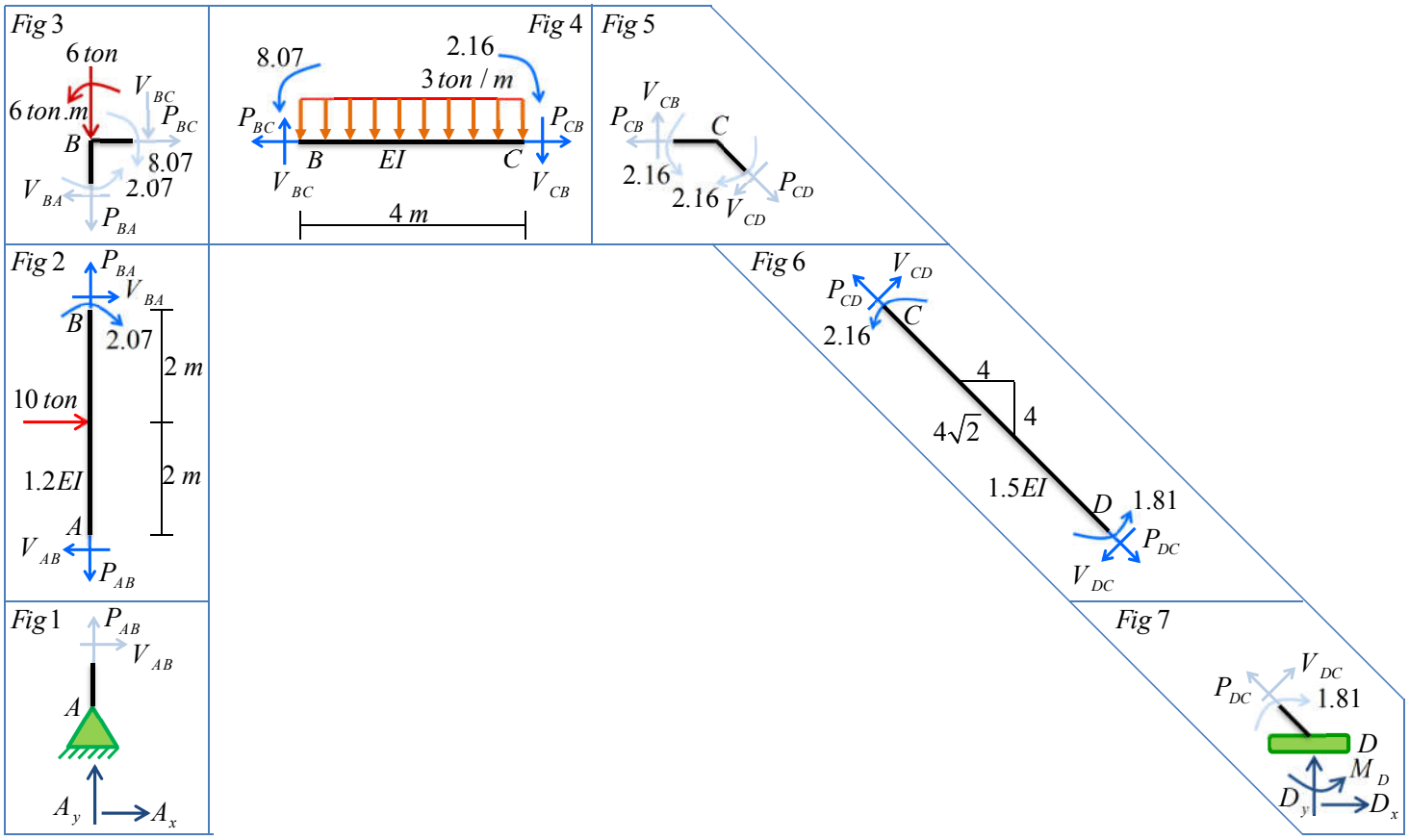
$$M_{BC} = k_{BC}\left(4\theta_B + 2\theta_C + 6\psi_1\right) + FEM_{BC} = 50\times\left(4(-255.84)+2(-32.949)+6(45.963)\right)\times10^{-4} - 4 \Rightarrow \boxed{M_{BC} = -8.07\,ton.m}$$

$$M_{CB} = k_{CB}\left(4\theta_C + 2\theta_B + 6\psi_1\right) + FEM_{CB} = 50\times\left(4(-32.949)+2(-255.84)+6(45.963)\right)\times10^{-4} + 4 \Rightarrow \boxed{M_{CB} = 2.16\,ton.m}$$

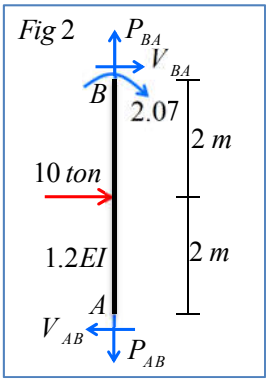
$$M_{CD} = k_{CD}\left(4\theta_C + 2\theta_D - 6\psi_1\right) + FEM_{CD} = 37.5\sqrt{2}\times\left(4(-32.949)+2(0)-6(45.963)\right)\times10^{-4} + 0 \Rightarrow \boxed{M_{CD} = -2.16\,ton.m}$$

$$M_{DC} = k_{DC}\left(4\theta_D + 2\theta_C - 6\psi_1\right) + FEM_{DC} = 37.5\sqrt{2}\times\left(4(0)+2(-32.949)-6(45.963)\right)\times10^{-4} + 0 \Rightarrow \boxed{M_{DC} = -1.81\,ton.m}$$

پاسخ مثال ۱۶– برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی، دیاگرام جسم آزاد تمامی اعضا به همراه تکیه‌گاه‌ها را رسم می‌کنیم:



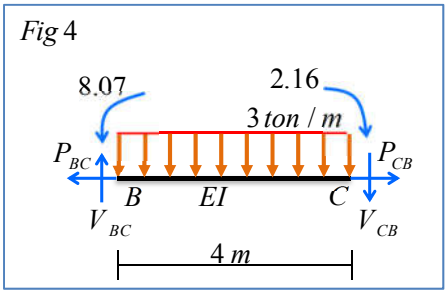
پاسخ مثال ۱۶–



با بررسی شکل (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_{BA}\times 4 - 2.07 - 10\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{BA} = -5.52\ ton} \qquad (16.15)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{AB} + V_{BA} + 10 = 0 \quad \overset{(16.15)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{AB} = 4.48\ ton} \qquad (16.16)$$

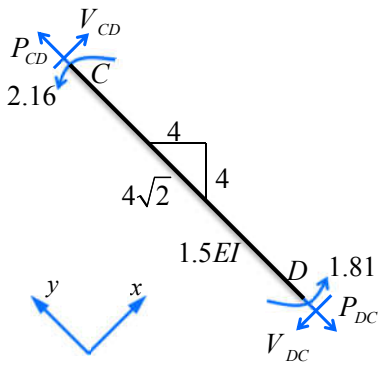


با بررسی شکل (۴) نتیجه می‌شود:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -2.16 - V_{CB}\times 4 - (3\times 4)\times\left(\frac{4}{2}\right) + 8.07 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{CB} = -4.52 \quad ton} \qquad (16.17)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} - V_{CB} - (3\times 4) = 0 \quad \overset{(16.17)}{\Rightarrow} \quad \boxed{V_{BC} = 7.48\ ton} \qquad (16.18)$$

Fig 6



پاسخ مثال ۱۶–

با بررسی شکل (۶) نتیجه می‌شود:

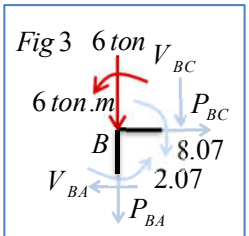
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_{CD} \times 4\sqrt{2} + 2.16 + 1.81 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{CD} = 0.7\,ton} \quad (16.19)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{CD} - V_{DC} = 0 \overset{(16.19)}{\Rightarrow} \boxed{V_{DC} = 0.7\,ton} \quad (16.20)$$

با بررسی شکل (۳) نتیجه می‌شود:

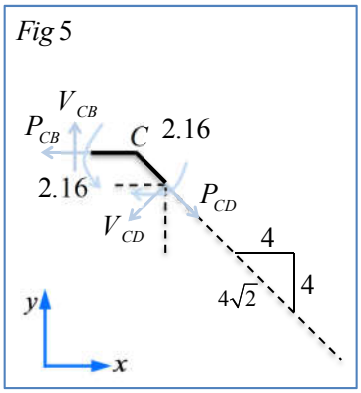
Fig 3



$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow P_{BC} - V_{BA} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -6 - V_{BC} - P_{BA} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{(16.15)\&(16.18)}{\Rightarrow} \boxed{\begin{aligned} P_{BC} &= P_{CB} = -5.52\,ton \\ P_{BA} &= P_{AB} = -13.48\,ton \end{aligned}}$$

(16.21)

Fig 5



پاسخ مثال ۱۶–

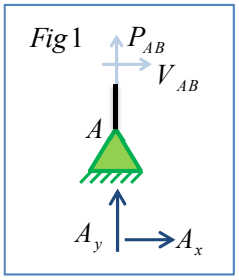
با بررسی شکل (۵) نتیجه می‌شود:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{BC} - V_{CD} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + P_{CD} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\overset{(16.19)\&(16.21)}{\Rightarrow} \boxed{P_{CD} = -7.10\,ton} \quad (16.22)$$

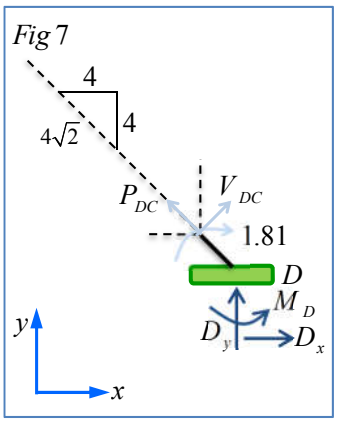
با بررسی شکل (۱) نتیجه می‌شود:

Fig 1



$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x + V_{AB} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + P_{AB} = 0 \end{aligned}\right\} \overset{(16.16)\&(16.21)}{\Rightarrow} \boxed{\begin{aligned} A_x &= -4.48\,ton \\ A_y &= 13.48\,ton \end{aligned}} \quad (16.23)$$

پاسخ مثال ۱۶–



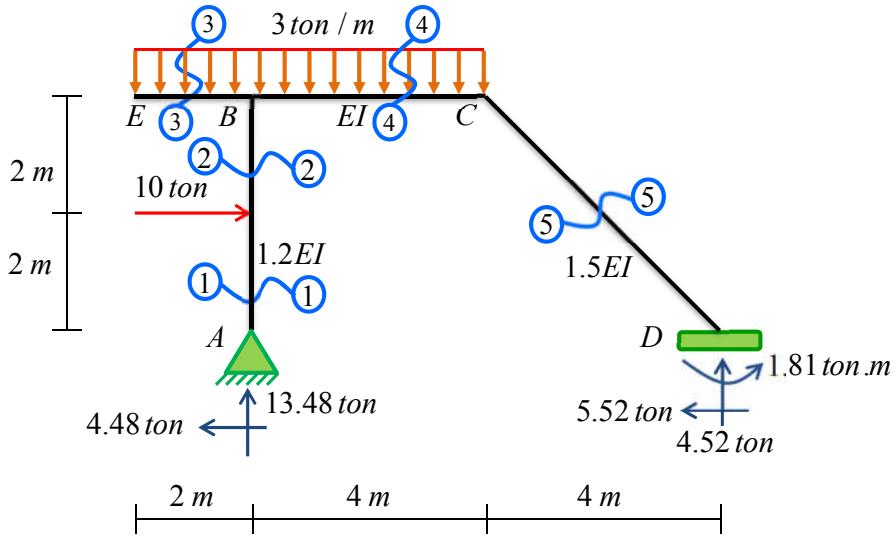
با بررسی شکل (۷) نتیجه می‌شود:

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; D_x - P_{DC}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + V_{DC}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\\ \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; D_y + P_{DC}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + V_{DC}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(16.20)\&(16.22)} \boxed{\begin{aligned}D_x &= -5.52\,ton\\ D_y &= 4.52\,ton\end{aligned}} \quad (16.24)$$

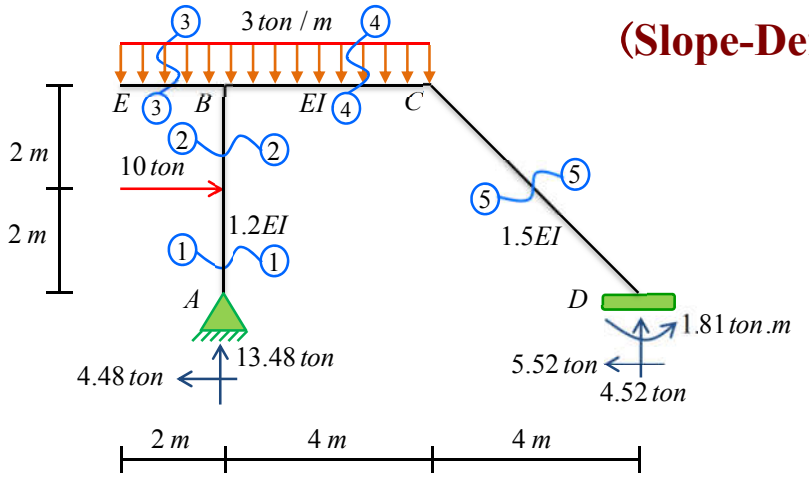
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_D - 1.81 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_D = 1.81\,ton.m} \quad (16.25)$$

پاسخ مثال ۱۶–

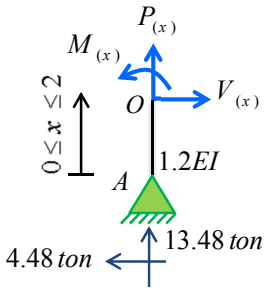
عکس العمل‌های تکیه‌گاهی محاسبه شده در شکل زیر نشان داده شده است:



پاسخ مثال ۱۶–



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۱–۱ خواهیم داشت:

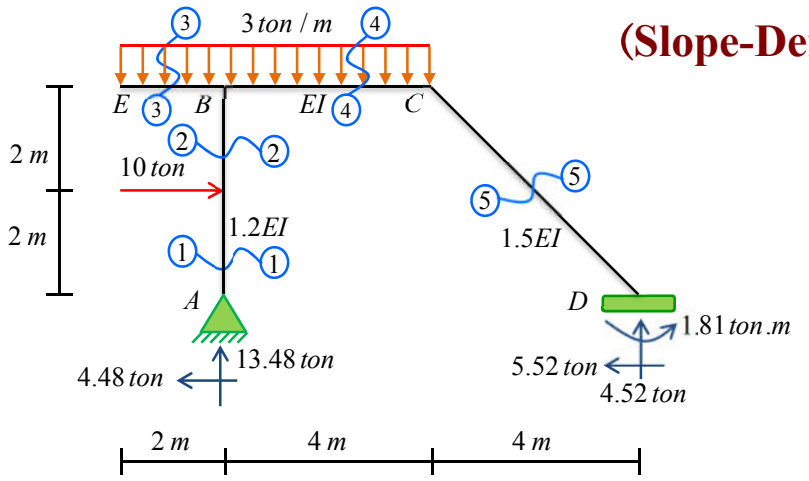


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 4.48 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 4.48x}$$

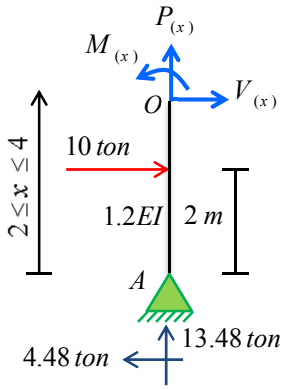
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 4.48 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 4.48\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 13.48 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -13.48\,ton}$$

پاسخ مثال ۱۶–



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۲–۲ خواهیم داشت:

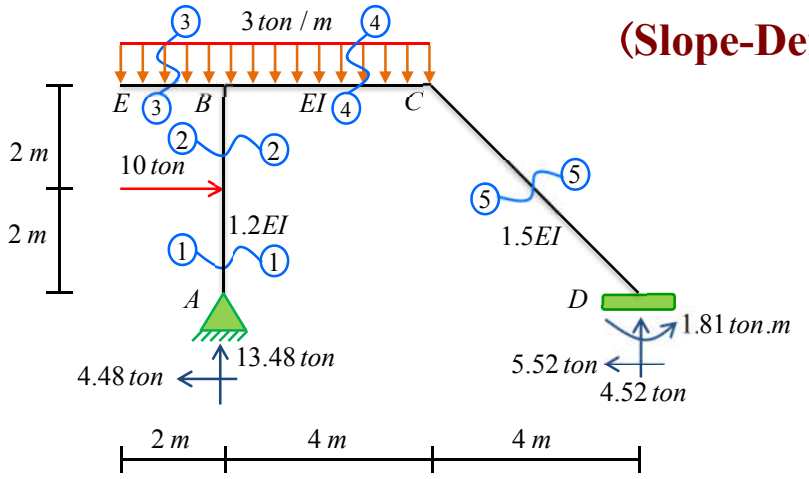


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 10 \times (x-2) - 4.48 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -5.52x + 20}$$

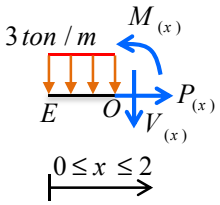
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + 10 - 4.48 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -5.52\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 13.48 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -13.48\,ton}$$

پاسخ مثال ۱۶–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳–۳ خواهیم داشت:

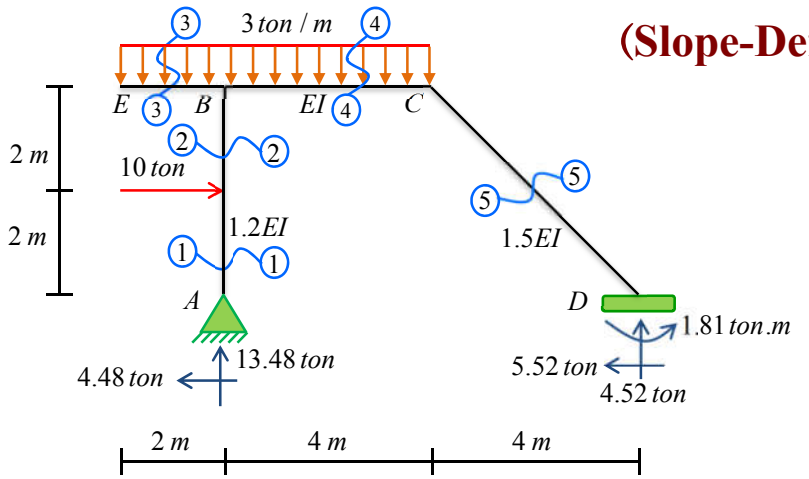


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (3\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2}$$

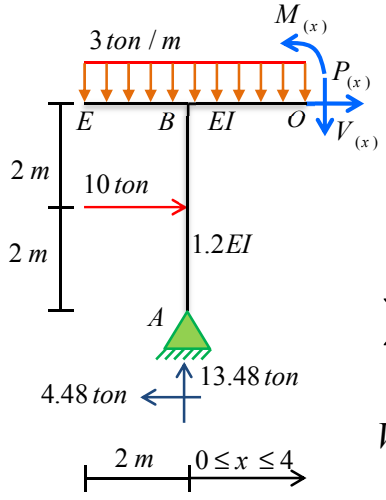
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - (3\times x) = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -3x}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 0}$$

پاسخ مثال ۱۶–



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۴–۴ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 3\times(2+x)\times\left(\frac{2+x}{2}\right) + 10\times 2 - 13.48\times x - 4.48\times 4 = 0$$

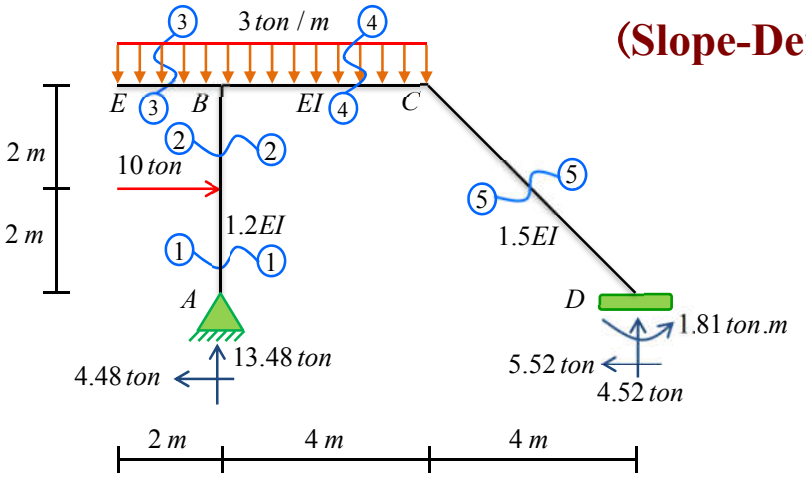
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 7.48x - 8.08} \quad ; \quad M_{(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 1.58\ m \\ x = 3.4\ m \end{matrix}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 3\times(2+x) + 13.48 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -3x + 7.48}$$

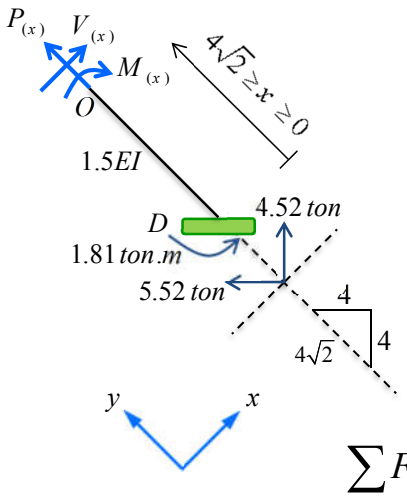
$$V_{(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2.49\ m} \Rightarrow \boxed{M_{(x=2.49\,m)} = 1.25\ ton.m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} + 10 - 4.48 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -5.52\ ton}$$

پاسخ مثال ۱۶–



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۵–۵ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 1.81 + \left(4.52 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times x - \left(5.52 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times x = 0$$

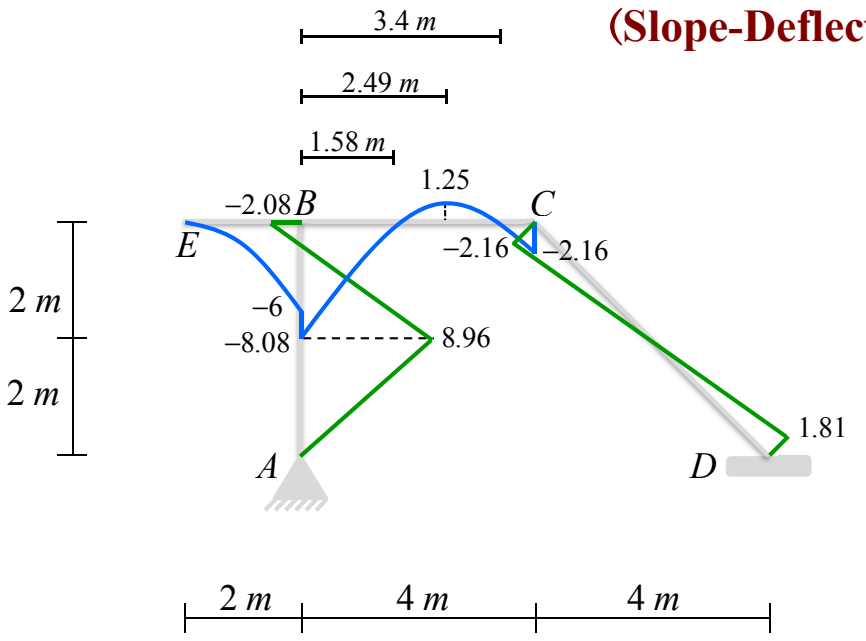
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -0.71x + 1.81}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_{(x)} + \left(4.52 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(5.52 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -0.71\,ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + \left(4.52 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(5.52 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -7.1\,ton}$$

پاسخ مثال ۱۶–



نمودار لنگر خمشی ($ton.m$)

$$AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = 4.48x$$

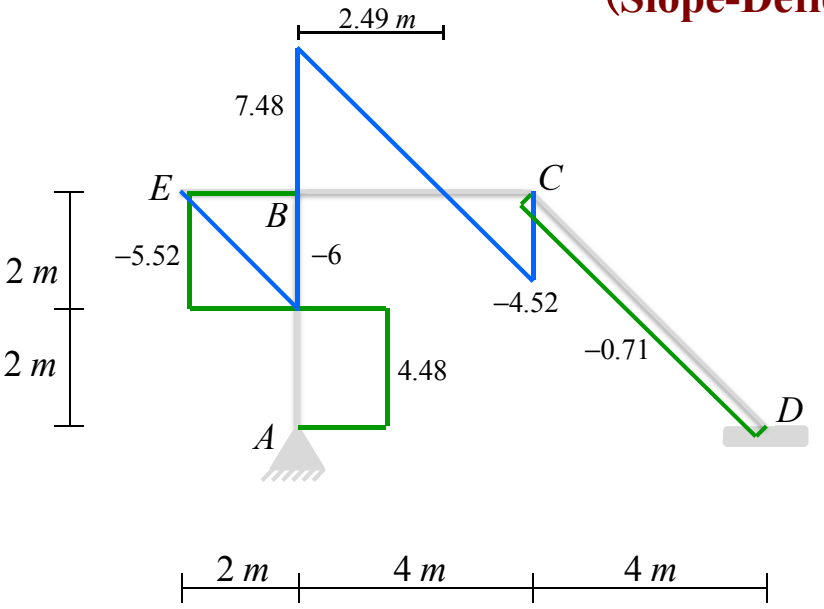
$$AB: \quad 2 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -5.52x + 20$$

$$EB: \quad 0 \le x \le 2 \quad M_{(x)} = -1.5x^2$$

$$BC: \quad 0 \le x \le 4 \quad M_{(x)} = -1.5x^2 + 7.48x - 8.08$$

$$DC: \quad 4\sqrt{2} \ge x \ge 0 \quad M_{(x)} = -0.71x + 1.81$$

پاسخ مثال ۱۶–



نمودار نیروی برشی (ton)

$AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = 4.48\,ton$

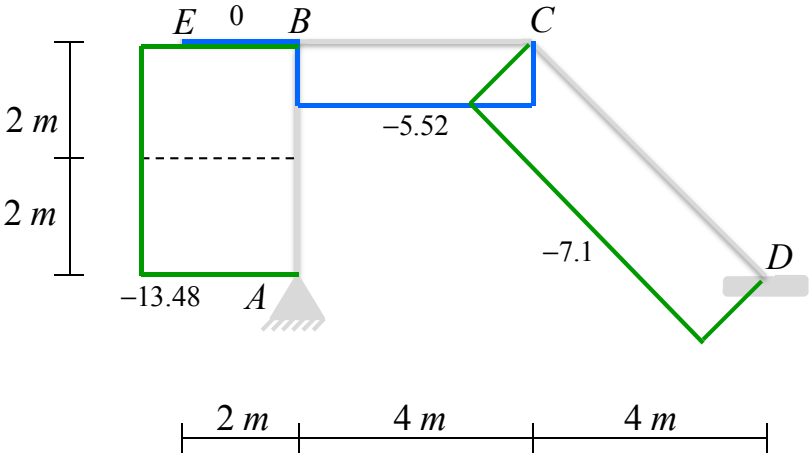
$AB: \quad 2 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -5.52\,ton$

$EB: \quad 0 \le x \le 2 \quad V_{(x)} = -3x$

$BC: \quad 0 \le x \le 4 \quad V_{(x)} = -3x + 7.48$

$DC: \quad 4\sqrt{2} \ge x \ge 0 \quad V_{(x)} = -0.71\,ton$

پاسخ مثال ۱۶–



نمودار نیروی محوری (ton)

$AB: \quad 0 \le x \le 2 \quad P_{(x)} = -13.48\,ton$

$AB: \quad 2 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = -13.48\,ton$

$EB: \quad 0 \le x \le 2 \quad P_{(x)} = 0$

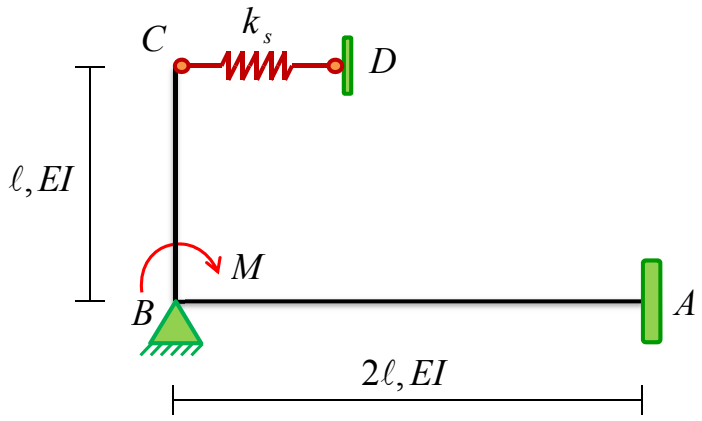
$BC: \quad 0 \le x \le 4 \quad P_{(x)} = -5.52\,ton$

$DC: \quad 4\sqrt{2} \ge x \ge 0 \quad P_{(x)} = -7.1\,ton$

ETABS File Name: **07-Example-16.EDB**

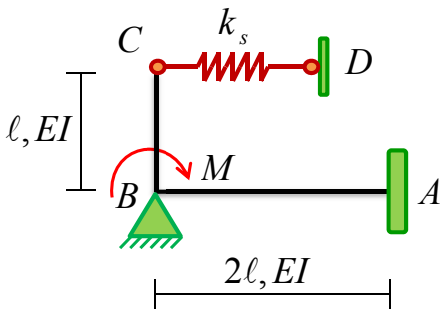
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

مثال ۱۷– در سازه نشان داده شده مقدار تغییر مکان افقی گره C را محاسبه نمایید.



$$EI = 200\ ton.m^2$$
$$k_s = 25\ ton/m$$
$$\ell = 2\ m$$
$$M = \frac{11}{3} ton.m$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



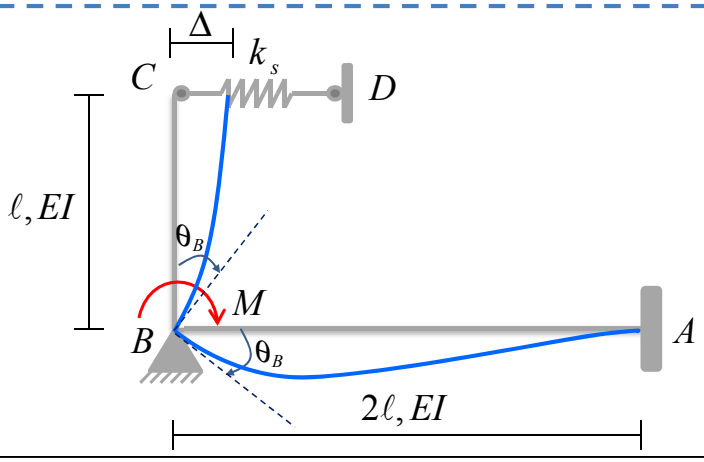
پاسخ مثال ۱۷– محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$k_{BA} = k_{AB} = \frac{EI}{2\ell}$$

$$k_{CB} = k_{BC} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC} = \frac{EI}{\ell} \Rightarrow k_{CB} = k_{BC} = \frac{EI}{\ell}$$

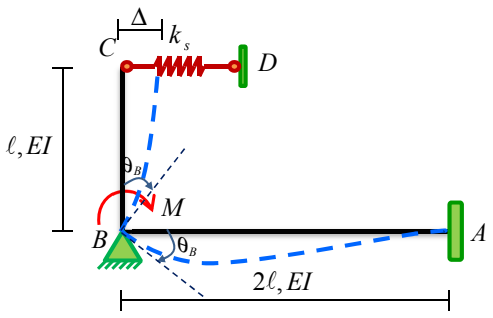
محاسبه لنگرهای گیرداری:

محاسبه ψ اعضا:



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۷–

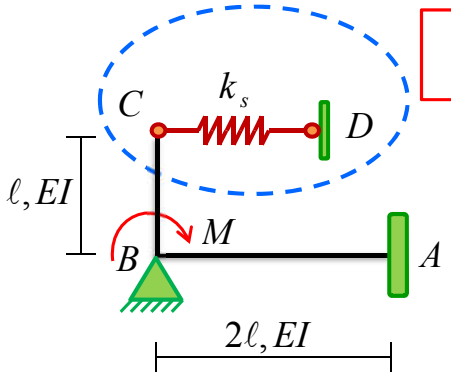


- مجهولات
  - درجات آزادی دورانی گره‌ها
  - درجات آزادی انتقالی گره‌ها
- معادلات
  - معادلات تعادل در هر گره
  - معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نباشد.

روش شیب–افت

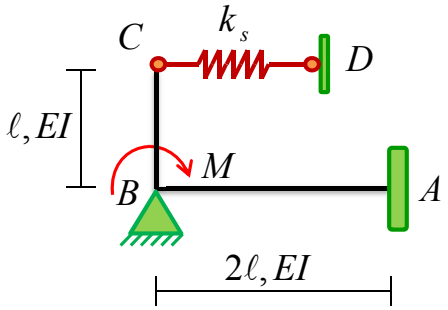
دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول

(17.1)



روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۷–



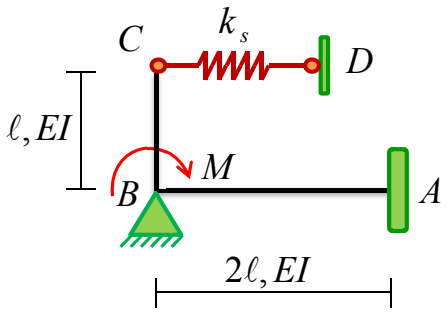
نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{AB} = 2(EI/\ell)_{AB}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + FEM_{AB} \Rightarrow M_{AB} = \frac{EI}{2\ell}(4(0) + 2\theta_B - 6(0)) + 0$$

$$M_{BA} = 2(EI/\ell)_{BA}(2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{EI}{2\ell}(4\theta_B + 2(0) - 6(0)) + 0$$

$$M_{BC} = 2(EI/\ell)_{BC}(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_{BC}) + FEM_{BC} \Rightarrow M_{BC} = \frac{EI}{\ell}\left(4\theta_B + 2\theta_C - 6\left(+\frac{\Delta}{\ell}\right)\right) + 0$$

$$M_{CB} = 2(EI/\ell)_{CB}(2\theta_C + \theta_B - 3\psi_{CB}) + FEM_{CB} \Rightarrow M_{CB} = \frac{EI}{\ell}\left(4\theta_C + 2\theta_B - 6\left(+\frac{\Delta}{\ell}\right)\right) + 0$$

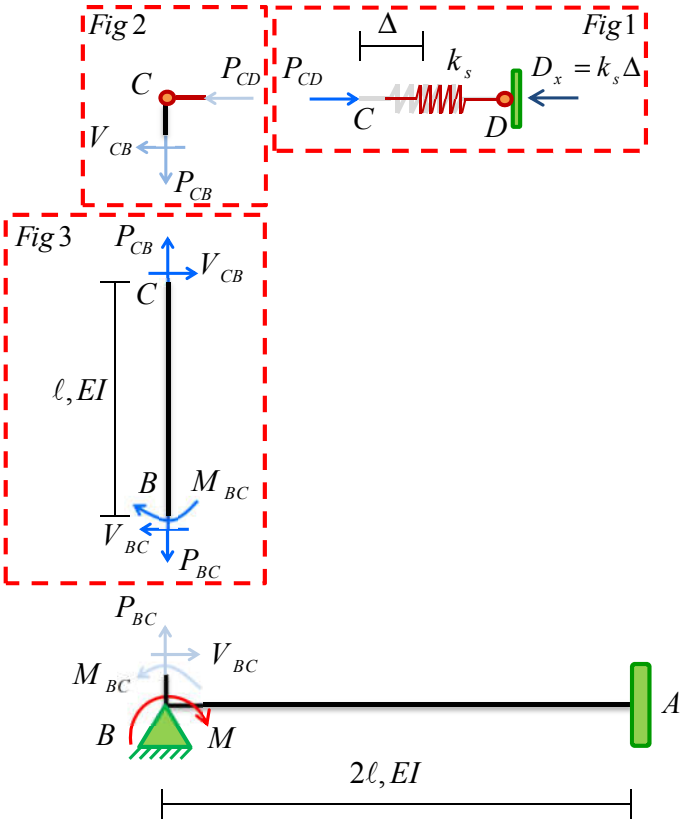


پاسخ مثال ۱۷–

لنگر ابتدا و انتهای اعضا در رابطه (17.2) به طور خلاصه آمده است:

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{EI}{\ell}\theta_B \\
M_{BA} &= \frac{2EI}{\ell}\theta_B \\
M_{BC} &= \frac{4EI}{\ell}\theta_B + \frac{2EI}{\ell}\theta_C - \frac{6EI}{\ell^2}\Delta \\
M_{CB} &= \frac{4EI}{\ell}\theta_C + \frac{2EI}{\ell}\theta_B - \frac{6EI}{\ell^2}\Delta
\end{aligned}
\qquad (17.2)
$$

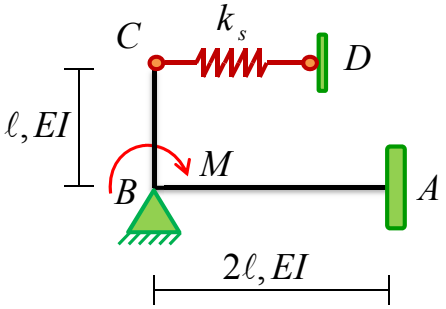
پاسخ مثال ۱۷– معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.



$$P_{CD} = k_s\Delta \qquad (17.3)$$

$$V_{CB} = -k_s\Delta \qquad (17.4)$$

$$M_{BC} = k_s\Delta\ell \qquad (17.5)$$



پاسخ مثال ۱۷–

با جایگذاری مقادیر لنگر از روابط (17.2) در معادلات (17.1) و (17.5) نتیجه می‌شود:

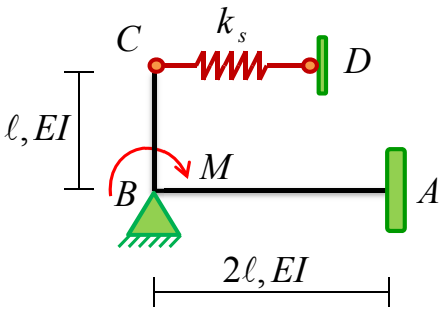
$$(17.2) \rightarrow (17.1)\,\&\,(17.5) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{4EI}{\ell}\theta_C + \frac{2EI}{\ell}\theta_B - \frac{6EI}{\ell^2}\Delta = 0 \qquad (17.6)$$

$$\frac{6EI}{\ell}\theta_B + \frac{2EI}{\ell}\theta_C - \frac{6EI}{\ell^2}\Delta = M \qquad (17.7)$$

$$\frac{4EI}{\ell}\theta_B + \frac{2EI}{\ell}\theta_C - \left(\frac{6EI}{\ell^2} + k_s\ell\right)\Delta = 0 \qquad (17.8)$$

$$(17.6) \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{3}{\ell}\Delta - 2\theta_C \qquad (17.9)$$



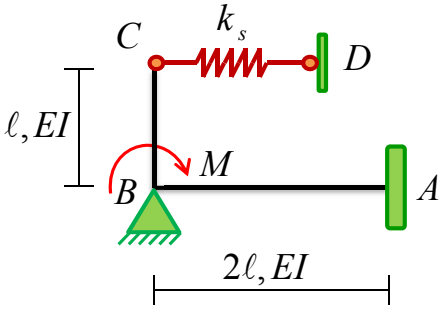
پاسخ مثال ۱۷–

با جایگذاری رابطه (17.9) در معادلات (17.7) و (17.8) نتیجه می‌شود:

$$(17.9) \rightarrow (17.7)\,\&\,(17.8) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{12}{\ell^2}\Delta - \dfrac{10}{\ell}\theta_C = \dfrac{M}{EI} \\ \left(\dfrac{6}{\ell^2} - \dfrac{k_s\ell}{EI}\right)\Delta - \dfrac{6}{\ell}\theta_C = 0 \end{cases} \qquad (17.10)$$

با حل معادلات (17.10) خواهیم داشت:

$$\Delta = \frac{3M}{\dfrac{6EI}{\ell^2} + 5k_s\ell} \qquad (17.11)$$



پاسخ مثال ۱۷–

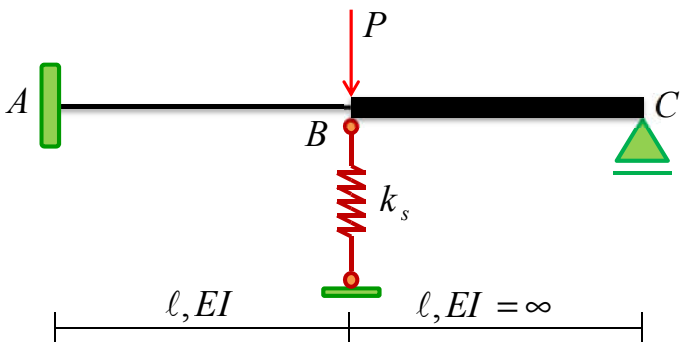
با جایگذاری مقادیر هریک از پارامترها، میزان تغییر طول فنر یا جابجایی افقی C به دست خواهد آمد:

$$EI = 200\ ton.m^2 \quad , \quad k_s = 25\ ton/m \quad , \quad \ell = 2\,m \quad , \quad M = \frac{11}{3} ton.m$$

$$(17.11) \Rightarrow \Delta = \frac{3M}{\frac{6EI}{\ell^2} + 5k_s\ell} = \frac{3\left(\frac{11}{3}\right)}{\frac{6(200)}{(2)^2} + 5(25)(2)} \times 10^2 (cm) \Rightarrow \boxed{\Delta = 2\,cm}$$

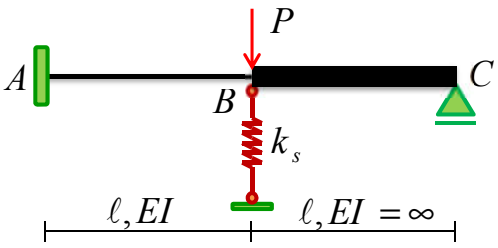
ETABS File Name: **07-Example-17.EDB**

مثال ۱۸– در سازه نشان داده شده نیروی فنر و واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید.



$EI = 200\ ton.m^2$
$k_s = 25\ ton/m$
$\ell = 5\,m$
$P = 5\,ton$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

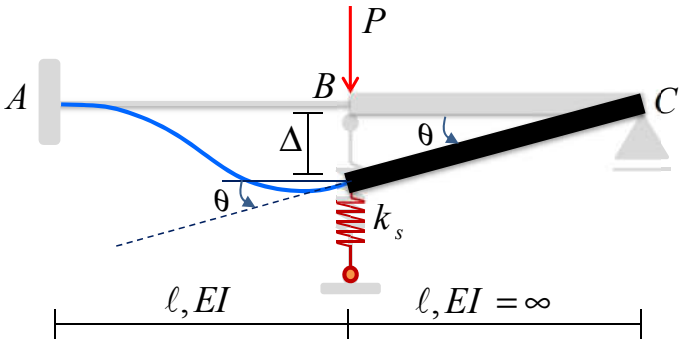


پاسخ مثال ۱۸– محاسبه سختی نسبی اعضا:

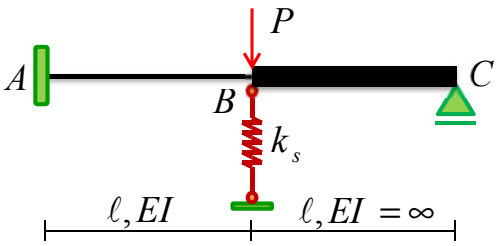
$$k_{BA} = k_{AB} = \frac{EI}{\ell}$$

محاسبه لنگرهای گیرداری:

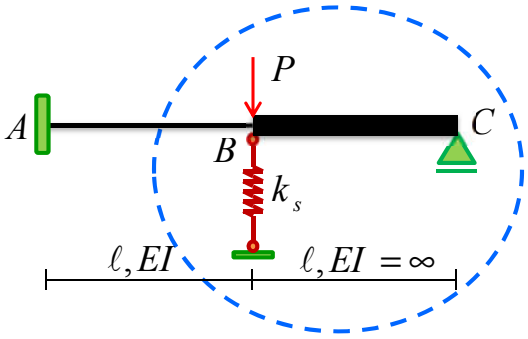
محاسبه ψ اعضا:

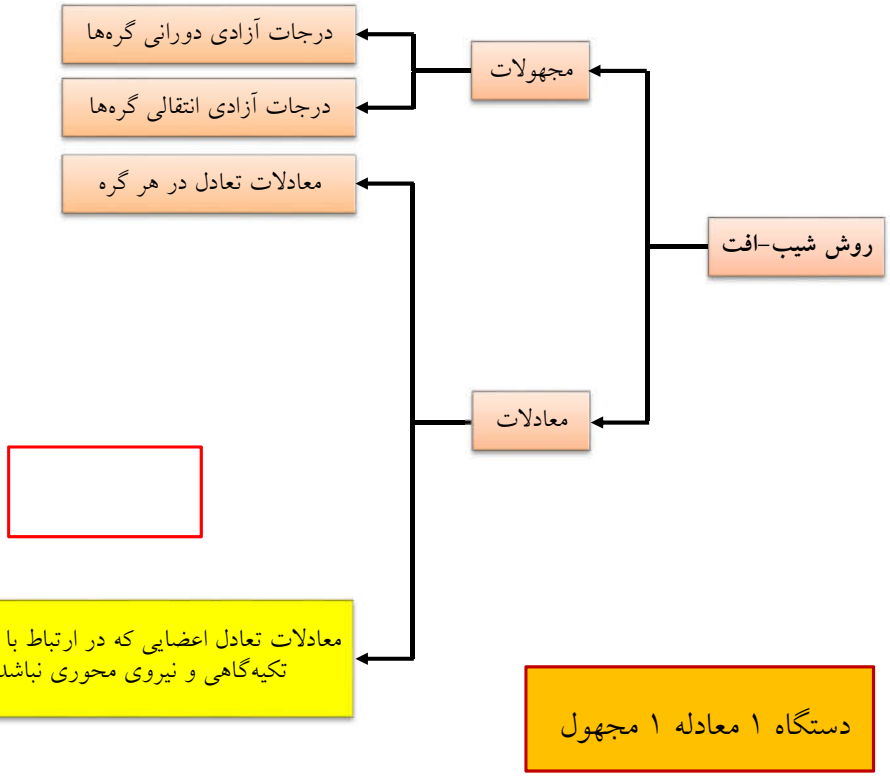


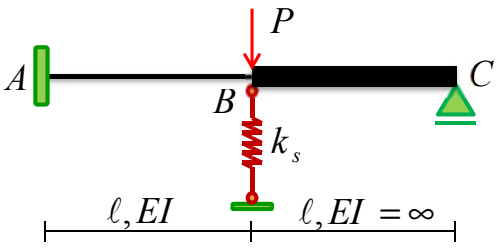
روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)



پاسخ مثال ۱۸–







پاسخ مثال ۱۸–

نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

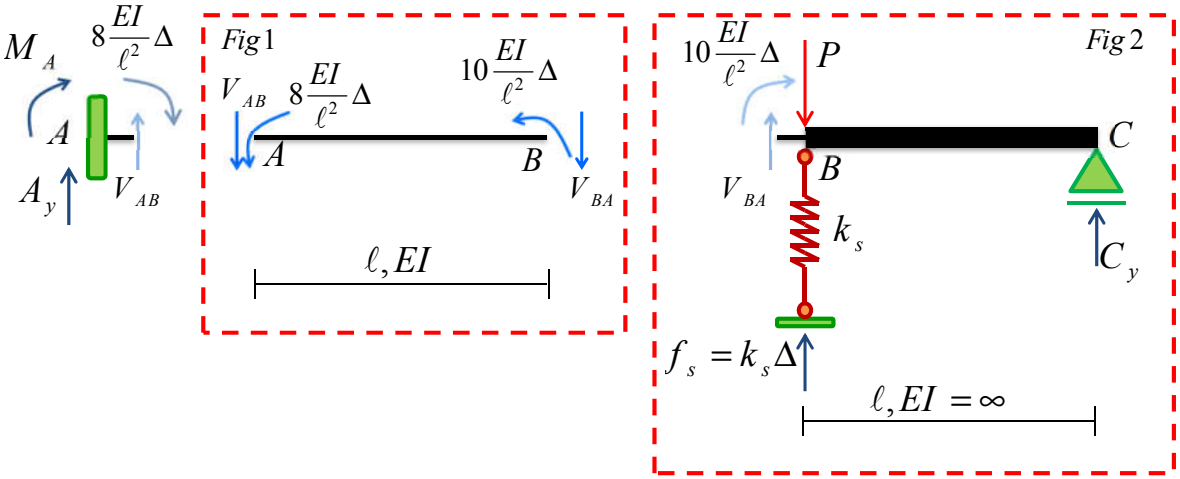
$$M_{AB} = 2(EI/\ell)_{AB}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + FEM_{AB} \Rightarrow \boxed{M_{AB} = \frac{EI}{\ell}\left(4(0) + 2\left(-\frac{\Delta}{\ell}\right) - 6\left(\frac{\Delta}{\ell}\right)\right) + 0}$$

$$M_{BA} = 2(EI/\ell)_{BA}(2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{BA}) + FEM_{BA} \Rightarrow \boxed{M_{BA} = \frac{EI}{\ell}\left(4\left(-\frac{\Delta}{\ell}\right) + 2(0) - 6\left(\frac{\Delta}{\ell}\right)\right) + 0}$$

لنگر ابتدا و انتهای اعضا در رابطه (18.1) به طور خلاصه آمده است:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{AB} &= -8\frac{EI}{\ell^2}\Delta \\ M_{BA} &= -10\frac{EI}{\ell^2}\Delta \end{aligned}} \quad (18.1)$$

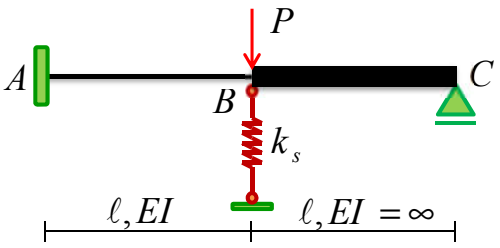
پاسخ مثال ۱۸– معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.



$$\boxed{V_{BA} = 18\frac{EI}{\ell^3}\Delta} \quad (18.2)$$

$$\boxed{\Delta = \frac{P}{\frac{28EI}{\ell^3} + k_s}} \quad (18.3)$$

پاسخ مثال ۱۸–



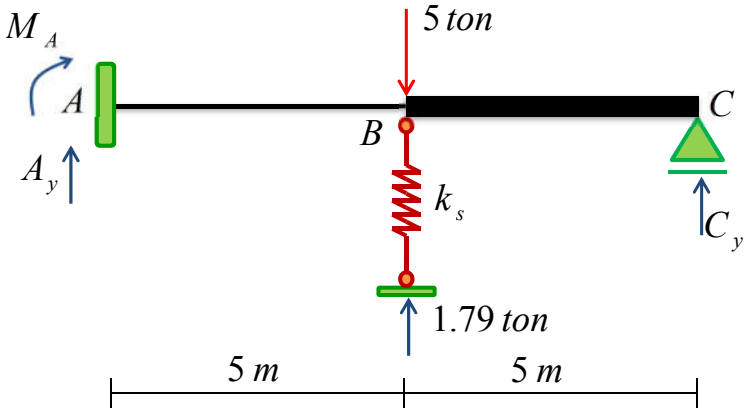
با جایگذاری مقادیر هریک از پارامترها، میزان تغییر طول فنر و نیروی فنر به دست خواهد آمد:

$$EI = 200\ ton.m^2 \quad , \quad k_s = 25\ ton/m \quad , \quad \ell = 5\ m \quad , \quad P = 5\ ton$$

$$(18.3) \Rightarrow \Delta = \frac{P}{\frac{28EI}{\ell^3} + k_s} = \frac{5}{\frac{28(200)}{(5)^3} + 25} \times 10^2 (cm) \Rightarrow \boxed{\Delta = 7.16\ cm} \quad (18.4)$$

$$\boxed{f_s = 1.79\ ton}$$

پاسخ مثال ۱۸– با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:



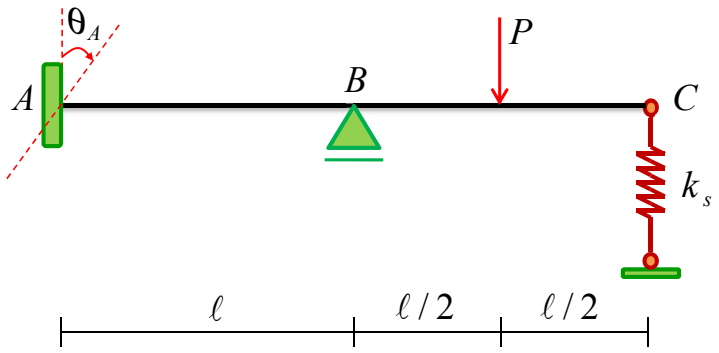
$$\boxed{M_A = 4.58\ ton.m} \quad (18.5)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 1.79 \times 5 - 5 \times 5 + C_y \times 10 = 0 \overset{(18.5)}{\Rightarrow} \boxed{C_y = 2.06\ ton} \quad (18.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 1.79 + C_y - 5 = 0 \overset{(18.6)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = 1.15\ ton}$$

ETABS File Name: **07-Example-18.EDB**

مثال ۱۹– مقدار تغییر طول ایجاد شده در فنر را محاسبه نمایید. تکیه‌گاه A در جهت ساعتگرد دوران دارد.



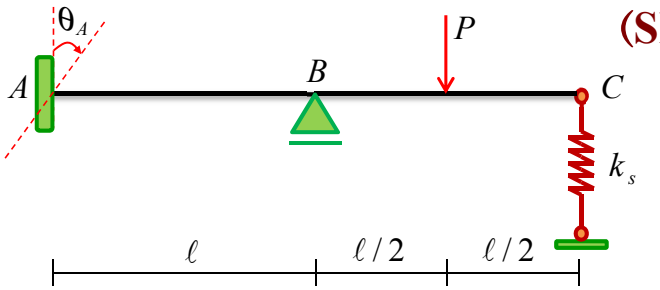
$EI = 200\ ton.m^2$

$k_s = 25\ ton/m$

$\ell = 4\ m$

$P = 2\ ton$

$\theta_A = 1.5\times10^{-3}\ rad$



پاسخ مثال ۱۹–

محاسبه سختی نسبی اعضا:

$$k_{BA} = k_{AB} = \frac{EI}{\ell}$$

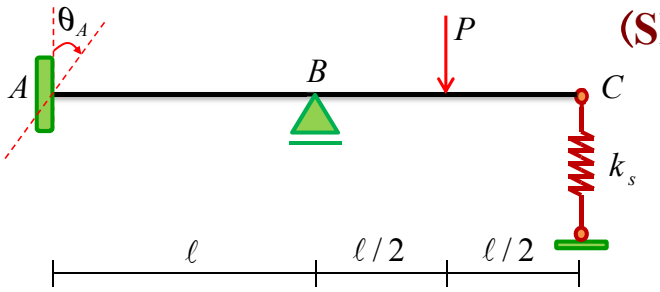
$$k_{CB} = k_{BC} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{BC} = \frac{EI}{\ell} \quad \Rightarrow \quad k_{CB} = k_{BC} = \frac{EI}{\ell}$$

محاسبه لنگرهای گیرداری:

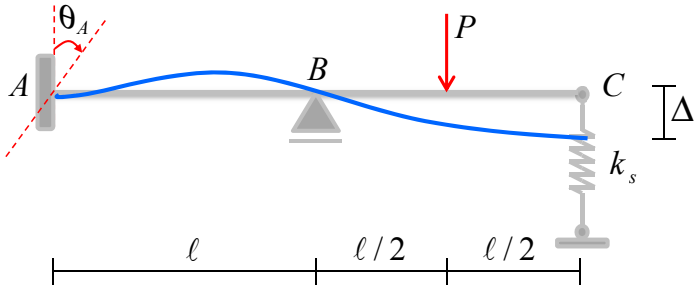
$$FEM_{BC} = -FEM_{CB} = -\frac{P\ell}{8}$$

روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۹–

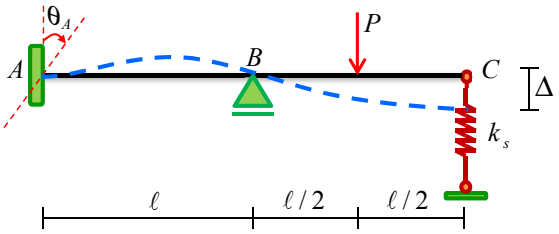


محاسبه ۷ اعضا:

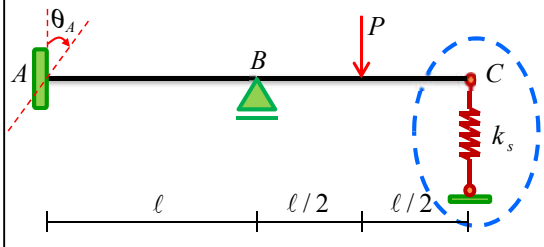


روش شیب–افت (Slope-Deflection Method)

پاسخ مثال ۱۹–

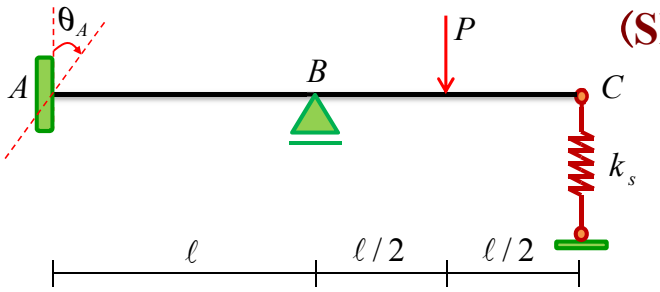


(19.1)



- روش شیب–افت
  - مجهولات
    - درجات آزادی دورانی گره‌ها
    - درجات آزادی انتقالی گره‌ها
  - معادلات
    - معادلات تعادل در هر گره
    - معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نباشد.

دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول



پاسخ مثال ۱۹–

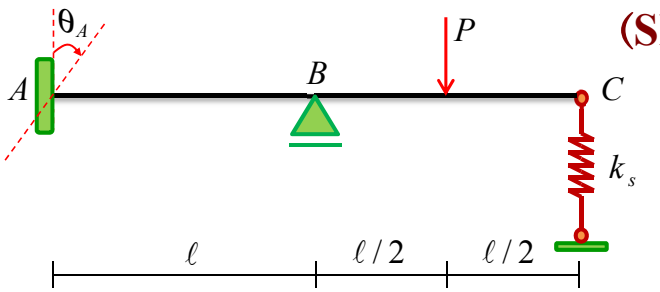
نوشتن معادلات شیب–افت به کمک روابط (۱۶):

$$M_{AB}=2(EI/\ell)_{AB}(2\theta_A+\theta_B-3\psi_{AB})+FEM_{AB} \Rightarrow \boxed{M_{AB}=\frac{EI}{\ell}(4(\theta_A)+2\theta_B-6(0))+0}$$

$$M_{BA}=2(EI/\ell)_{BA}(2\theta_B+\theta_A-3\psi_{BA})+FEM_{BA} \Rightarrow \boxed{M_{BA}=\frac{EI}{\ell}(4\theta_B+2(\theta_A)-6(0))+0}$$

$$M_{BC}=2(EI/\ell)_{BC}(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC})+FEM_{BC} \Rightarrow \boxed{M_{BC}=\frac{EI}{\ell}\left(4\theta_B+2\theta_C-6\left(+\frac{\Delta}{\ell}\right)\right)-\frac{P\ell}{8}}$$

$$M_{CB}=2(EI/\ell)_{CB}(2\theta_C+\theta_B-3\psi_{CB})+FEM_{CB} \Rightarrow \boxed{M_{CB}=\frac{EI}{\ell}\left(4\theta_C+2\theta_B-6\left(+\frac{\Delta}{\ell}\right)\right)+\frac{P\ell}{8}}$$

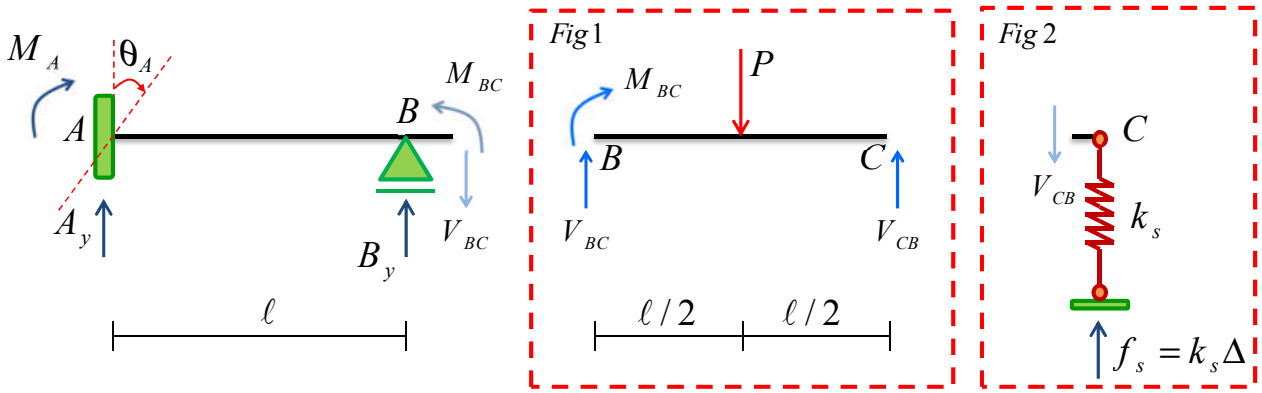


پاسخ مثال ۱۹–

لنگر ابتدا و انتهای اعضا در رابطه (19.2) به طور خلاصه آمده است:

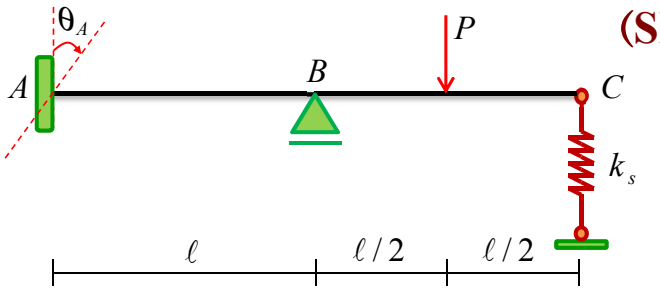
$$\boxed{\begin{aligned}
M_{AB}&=\frac{EI}{\ell}(4\theta_A+2\theta_B)\\
M_{BA}&=\frac{EI}{\ell}(4\theta_B+2\theta_A)\\
M_{BC}&=\frac{EI}{\ell}\left(4\theta_B+2\theta_C-6\frac{\Delta}{\ell}\right)-\frac{P\ell}{8}\\
M_{CB}&=\frac{EI}{\ell}\left(4\theta_C+2\theta_B-6\frac{\Delta}{\ell}\right)+\frac{P\ell}{8}
\end{aligned}} \qquad (19.2)$$

پاسخ مثال ۱۹– معادلات تعادل اعضایی که در ارتباط با مجهول تکیه‌گاهی و نیروی محوری نمی‌باشد.



$$V_{CB} = \frac{P}{2} + \frac{M_{BC}}{\ell} \qquad (19.3)$$

$$M_{BC} - k_s \ell \Delta = -\frac{P\ell}{2} \qquad (19.4)$$



پاسخ مثال ۱۹–

با جایگذاری مقادیر لنگر از روابط (19.2) در معادلات (19.1) و (19.4) نتیجه می‌شود:

$$(19.2) \rightarrow (19.1)\,\&\,(19.4) \quad \Rightarrow$$

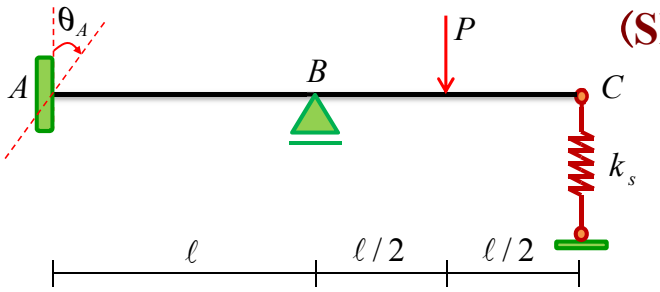
$$4\theta_C + 2\theta_B - 6\frac{\Delta}{\ell} = -\frac{P\ell^2}{8EI} \qquad (19.5)$$

$$8\theta_B + 2\theta_C - 6\frac{\Delta}{\ell} = \frac{P\ell^2}{8EI} - 2\theta_A \qquad (19.6)$$

$$4\theta_B + 2\theta_C + \left(-\frac{6}{\ell} - \frac{k_s\ell^2}{EI}\right)\Delta = -\frac{3P\ell^2}{8EI} \qquad (19.7)$$

$$(19.5) \quad \Rightarrow \quad \theta_B = -2\theta_C - \frac{P\ell^2}{16EI} + \frac{3\Delta}{\ell} \qquad (19.8)$$

پاسخ مثال ۱۹–



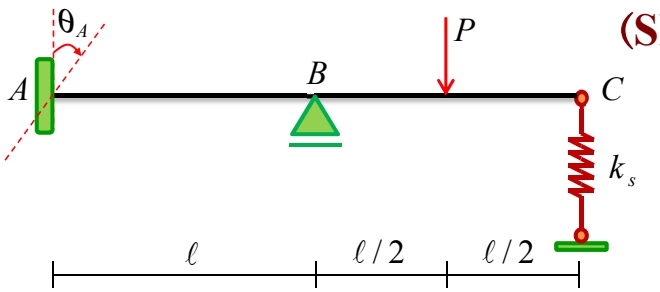
با جایگذاری رابطه (19.8) در معادلات (19.6) و (19.7) نتیجه می‌شود:

$$(19.8)\rightarrow(19.6)\,\&\,(19.7)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-14\theta_C+\dfrac{18}{\ell}\Delta=\dfrac{5P\ell^2}{8EI}-2\theta_A\\[2ex]-6\theta_C+\left(\dfrac{6}{\ell}-\dfrac{k_s\ell^2}{EI}\right)\Delta=-\dfrac{P\ell^2}{8EI}\end{cases}\qquad(19.9)$$

با حل معادلات (19.9) خواهیم داشت:

$$\Delta=\frac{5.5P-\dfrac{12EI}{\ell^2}\theta_A}{14k_s+\dfrac{24EI}{\ell^3}}\qquad(19.20)$$

پاسخ مثال ۱۹–



با جایگذاری مقادیر هریک از پارامترها، میزان تغییر طول فنر به دست خواهد آمد:

$$EI=200\ \ ton.m^2$$
$$k_s=25\ \ ton/m$$
$$\ell=4\ m$$
$$P=2\ ton$$
$$\theta_A=1.5\times10^{-3}\ \ rad$$

$$(19.20)\quad\Rightarrow\quad\Delta=\frac{5.5P-\dfrac{12EI}{\ell^2}\theta_A}{14k_s+\dfrac{24EI}{\ell^3}}=\frac{5.5(2)-\dfrac{12(200)}{(4)^2}(1.5\times10^{-3})}{14(25)+\dfrac{24(200)}{(4)^3}}\times10^2(cm)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\Delta=2.535\,cm}$$

ETABS File Name: **07-Example-19.EDB**