دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

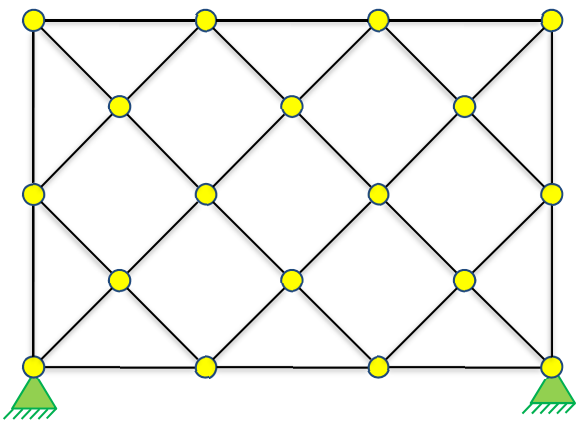
تحلیل سازه‌های نامعین به روش نیرو
(Force Method)

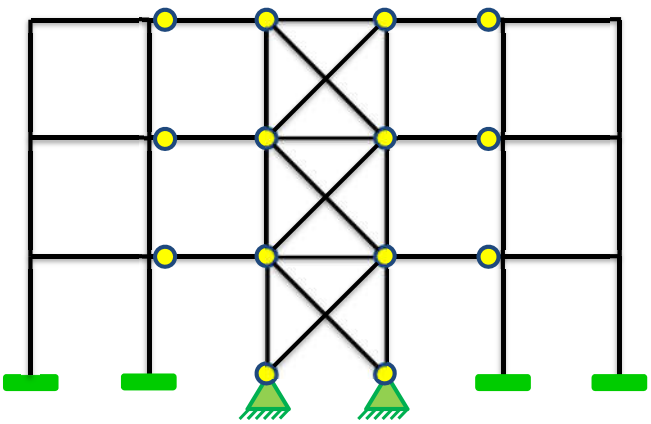
تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه
https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami

روش نیرو (Force Method)

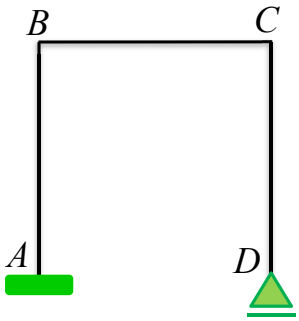
ویژگی‌های سازه‌های نامعین:

- سازه‌های نامعین ایمن‌تر از سازه‌های معین هستند.
- سازه‌های نامعین نسبت به سازه‌های معین، سخت‌تر می‌باشند؛ بنابراین تغییر شکل در آن‌ها کمتر است.
- سازه‌های نامعین نسبت به سازه‌های معین سبک‌تر می‌باشند؛ در نتیجه اقتصادی‌تر هستند.





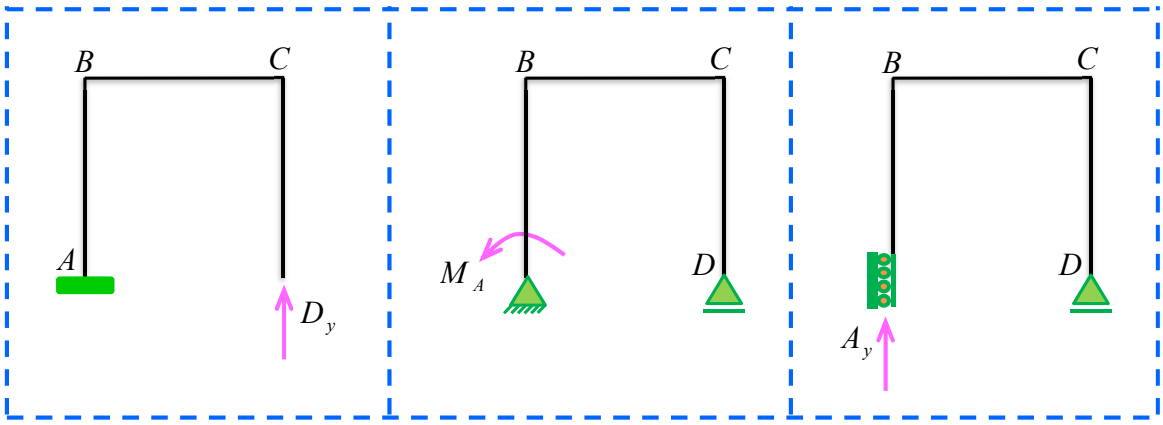
روش نیرو (Force Method)



سازه اولیه

(پایدار و نامعین)

سازه نشان داده شده یک درجه نامعینی دارد. همچنین سازه پایدار است. با در نظر گرفتن دلخواه یکی از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی مجهول به عنوان نیروی خارجی اعمال شده به سازه، می‌توان سازه اولیه را به شکل‌های زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر یک نیروی خارجی مجهول تبدیل نمود:



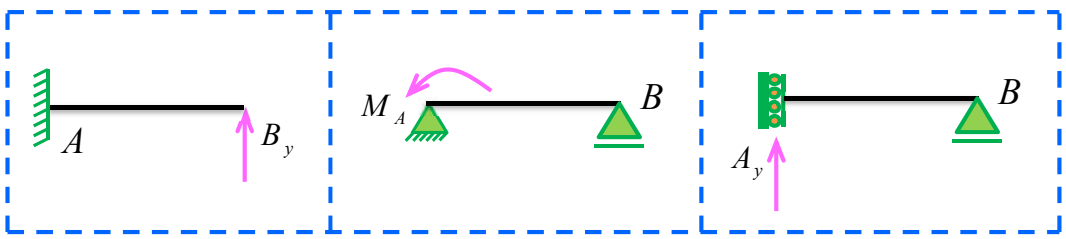
سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

روش نیرو (Force Method)

سازه اولیه

(پایدار و نامعین)

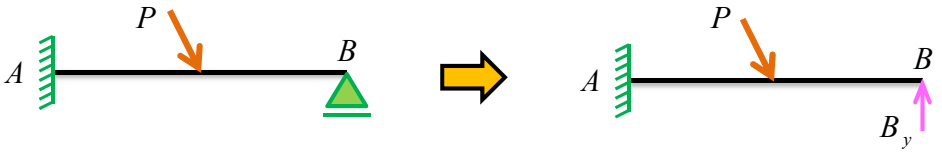
سازه نشان داده شده یک درجه نامعینی دارد. همچنین سازه پایدار است. با در نظر گرفتن دلخواه یکی از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی مجهول به عنوان نیروی خارجی اعمال شده به سازه، می‌توان سازه اولیه را به شکل‌های زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر یک نیروی خارجی مجهول تبدیل نمود:



سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

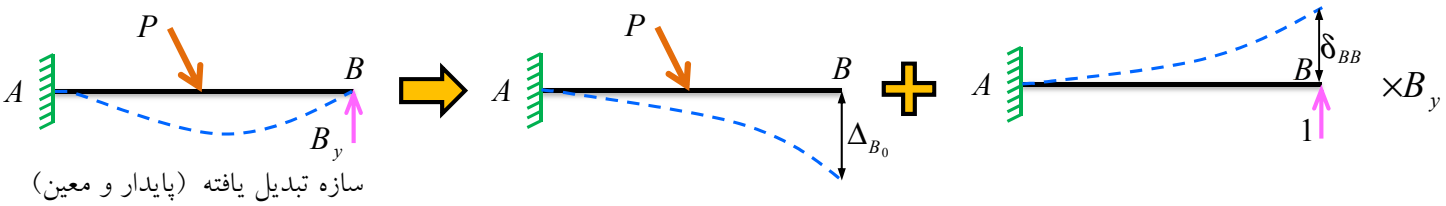
روش نیرو (Force Method)

سازه نشان داده شده یک درجه نامعینی دارد. با در نظر گرفتن عکس‌العمل تکیه‌گاهی مجهول B به عنوان نیروی خارجی اعمال شده به سازه، سازه اولیه به صورت زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر یک نیروی خارجی مجهول تبدیل می‌شود:



سازه اولیه (پایدار و نامعین) — سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در دو حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:



سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

براساس **اصل سازگاری تغییرشکل‌ها**، باید میزان خیز در محل تکیه‌گاه B برابر با صفر باشد:

Δ_B : جابجایی کل گره B

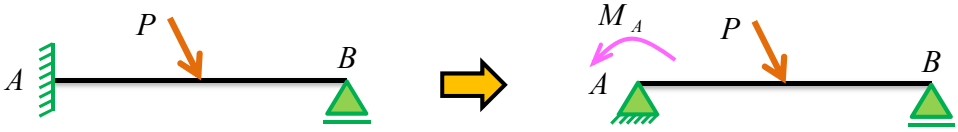
Δ_{B_0} : جابجایی گره B تحت اثر بار خارجی (اولیه)

δ_{BB} : جابجایی گره B تحت اثر بار واحد وارده در گره B

$$\Delta_B = \Delta_{B_0} + B_y \times \delta_{BB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = -\frac{\Delta_{B_0}}{\delta_{BB}}}$$

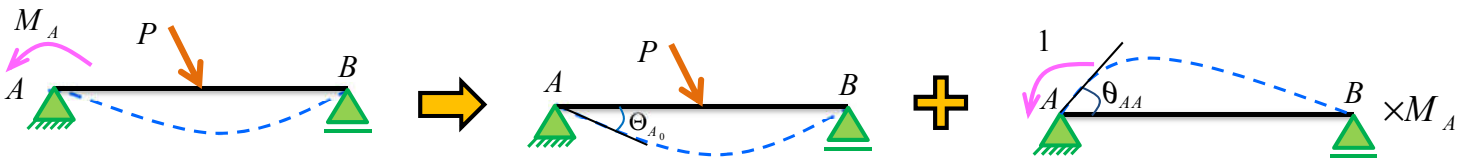
روش نیرو (Force Method)

سازه نشان داده شده یک درجه نامعینی دارد. با در نظر گرفتن عکس‌العمل لنگر تکیه‌گاهی مجهول A به عنوان نیروی خارجی اعمال شده به سازه، سازه اولیه به صورت زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر یک نیروی خارجی مجهول تبدیل می‌شود:



سازه اولیه (پایدار و نامعین) — سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در دو حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:



سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

براساس **اصل سازگاری تغییرشکل‌ها**، باید میزان دوران در محل تکیه‌گاه A برابر با صفر باشد:

Θ_A : دوران کل گره A

Θ_{A_0} : دوران گره A تحت اثر بار خارجی (اولیه)

θ_{AA} : دوران گره A تحت اثر بار واحد وارده در گره A

$$\Theta_A = \Theta_{A_0} + M_A \times \theta_{AA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = -\frac{\Theta_{A_0}}{\theta_{AA}}}$$

روش نیرو (Force Method)

شیوه نامگذاری تغییرشکل‌ها:

Δ_i: جابجایی کلی گره i

Δ_{i_0}: جابجایی گره i تحت اثر بار خارجی (اولیه)

Δ_{iT}: جابجایی گره i تحت تغییرات حرارتی

Δ_{iS}: جابجایی گره i تحت اثر نشست تکیه‌گاهی

δ_{ij}: جابجایی گره i تحت اثر بار واحد وارده در گره j

Θ_i: دوران کلی گره i

Θ_{i_0}: دوران گره i تحت اثر بار خارجی (اولیه)

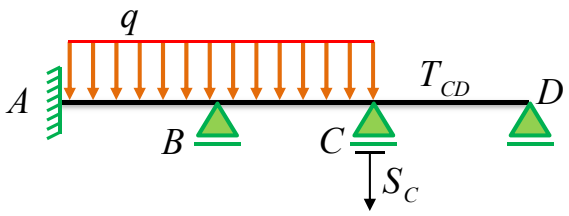
Θ_{iT}: دوران گره i تحت تغییرات حرارتی

Θ_{iS}: دوران گره i تحت اثر نشست تکیه‌گاهی

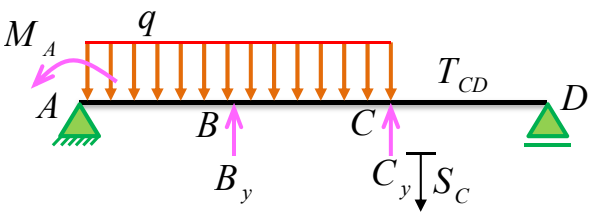
θ_{ij}: دوران گره i تحت اثر بار واحد وارده در گره j

روش نیرو (Force Method)

تیر نشان داده شده تحت اثر بارگذاری‌های متفاوتی قرار دارد. دمای قسمت CD به اندازه T_{CD} تغییر می‌کند. تکیه‌گاه C به اندازه S_C نشست دارد. این تیر سه درجه نامعین است. با در نظر گرفتن سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مجهول به دلخواه (به طور مثال M_A، B_y و C_y) به عنوان نیروهای خارجی اعمال شده به سازه، سازه اولیه به صورت زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر سه نیروی خارجی مجهول تبدیل می‌شود:



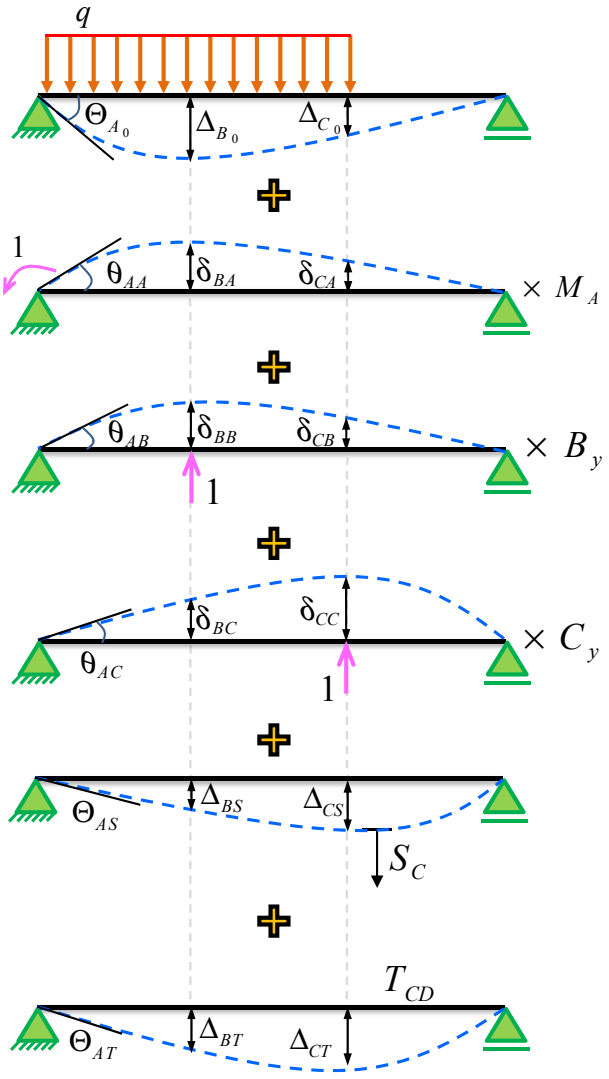
سازه اولیه (پایدار و نامعین)

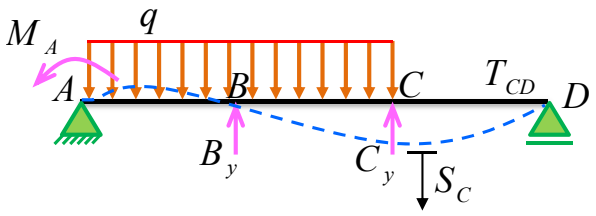


سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

روش نیرو (Force Method)

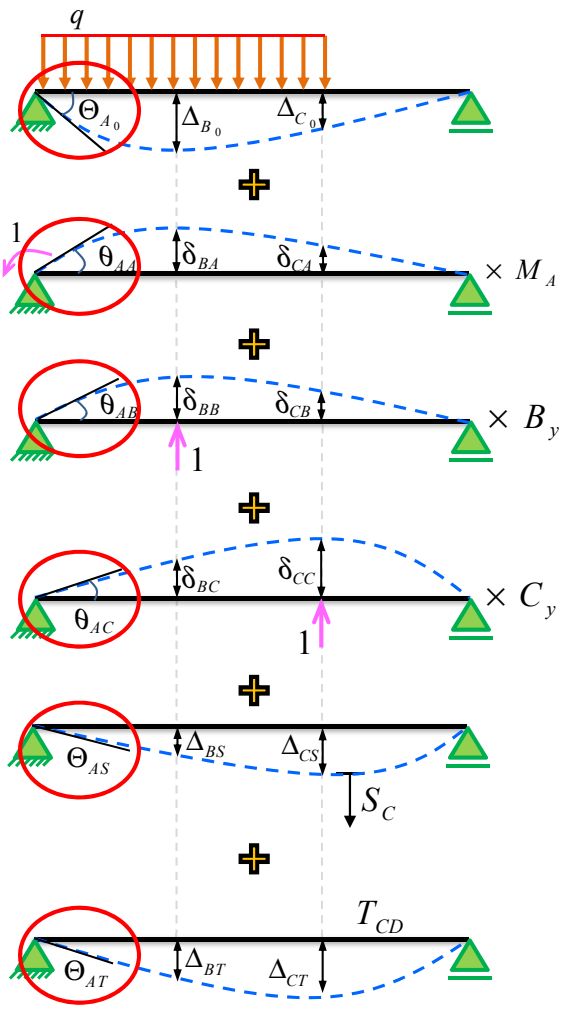
اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در شش حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:

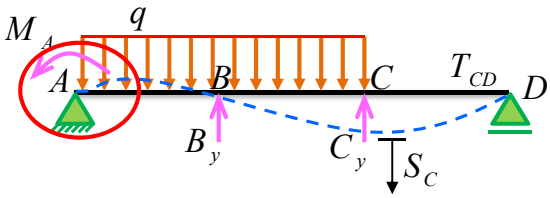




سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

روش نیرو (Force Method)





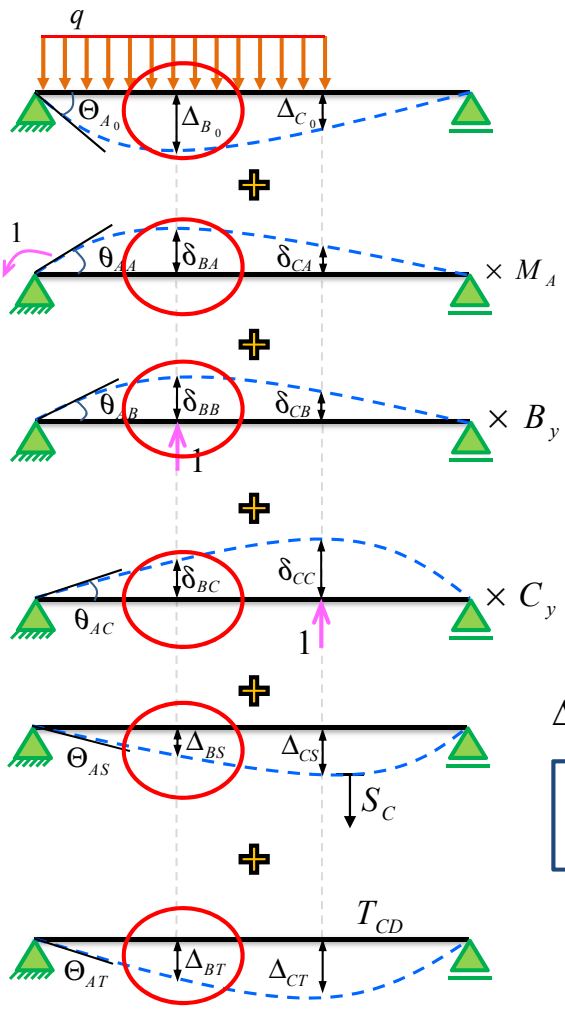
سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

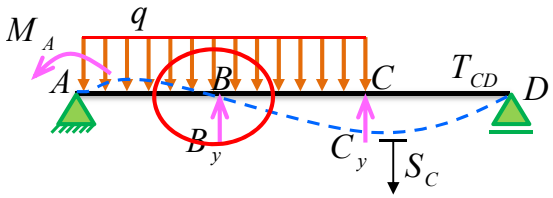
براساس **اصل سازگاری تغییرشکل‌ها**، باید میزان دوران در محل تکیه‌گاه A برابر با صفر باشد:

$$\Theta_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Theta_{A_0} + M_A \times \theta_{AA} + B_y \times \theta_{AB} + C_y \times \theta_{AC} + \Theta_{AS} + \Theta_{AT} = 0 \qquad (1)$$

روش نیرو (Force Method)





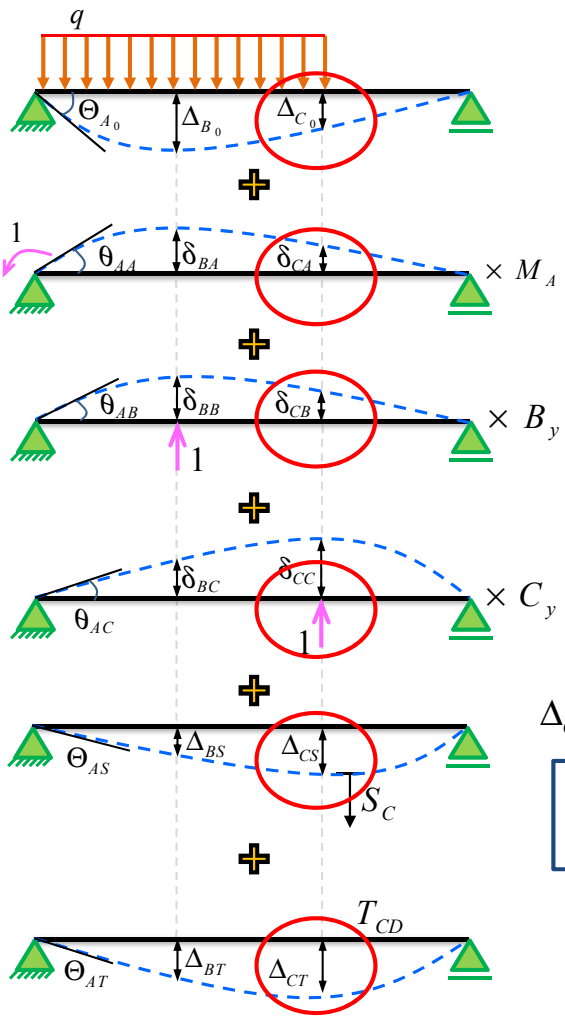
سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

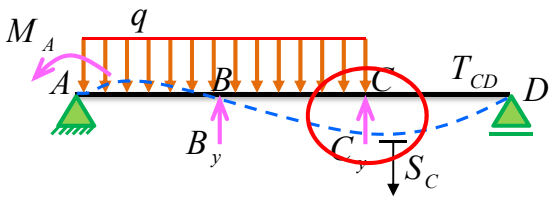
براساس **اصل سازگاری تغییرشکل‌ها**، باید میزان تغییرمکان در محل تکیه‌گاه B برابر با صفر باشد:

$$\Delta_B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta_{B_0} + M_A \times \delta_{BA} + B_y \times \delta_{BB} + C_y \times \delta_{BC} + \Delta_{BS} + \Delta_{BT} = 0 \qquad (2)$$

روش نیرو (Force Method)





سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

براساس **اصل سازگاری تغییرشکل‌ها**، باید میزان تغییرمکان در محل تکیه‌گاه C برابر با میزان نشست تکیه‌گاهی S_C باشد:

$$\Delta_C = S_C \quad \Rightarrow$$

$$\Delta_{C_0} + M_A \times \delta_{CA} + B_y \times \delta_{CB} + C_y \times \delta_{CC} + \Delta_{CS} + \Delta_{CT} = S_C \qquad (3)$$

روش نیرو (Force Method)

با در اختیار داشتن معادله‌های (۱) تا (۳) به دستگاه سه معادله سه مجهول می‌رسیم:

$$(1)\ to\ (3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{A_0} + M_A \times \theta_{AA} + B_y \times \theta_{AB} + C_y \times \theta_{AC} + \Theta_{AS} + \Theta_{AT} = 0 \\ \Delta_{B_0} + M_A \times \delta_{BA} + B_y \times \delta_{BB} + C_y \times \delta_{BC} + \Delta_{BS} + \Delta_{BT} = 0 \\ \Delta_{C_0} + M_A \times \delta_{CA} + B_y \times \delta_{CB} + C_y \times \delta_{CC} + \Delta_{CS} + \Delta_{CT} = S_C \end{cases} \quad (4)$$

فرم ماتریسی رابطه (۴) به صورت زیر است:

$$(4) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \theta_{AA} & \theta_{AB} & \theta_{AC} \\ \delta_{BA} & \delta_{BB} & \delta_{BC} \\ \delta_{CA} & \delta_{CB} & \delta_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ B_y \\ C_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Theta_{A_0} - \Theta_{AS} - \Theta_{AT} \\ -\Delta_{B_0} - \Delta_{BS} - \Delta_{BT} \\ S_C - \Delta_{C_0} - \Delta_{CS} - \Delta_{CT} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

با حل رابطه (۵) مجهولات که همان عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی M_A، B_y و C_y هستند به دست می‌آید:

$$(5) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} M_A \\ B_y \\ C_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \theta_{AA} & \theta_{AB} & \theta_{AC} \\ \delta_{BA} & \delta_{BB} & \delta_{BC} \\ \delta_{CA} & \delta_{CB} & \delta_{CC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Theta_{A_0} + \Theta_{AS} + \Theta_{AT} \\ \Delta_{B_0} + \Delta_{BS} + \Delta_{BT} \\ \Delta_{C_0} + \Delta_{CS} + \Delta_{CT} - S_C \end{Bmatrix} \quad (6)$$

روش نیرو (Force Method)

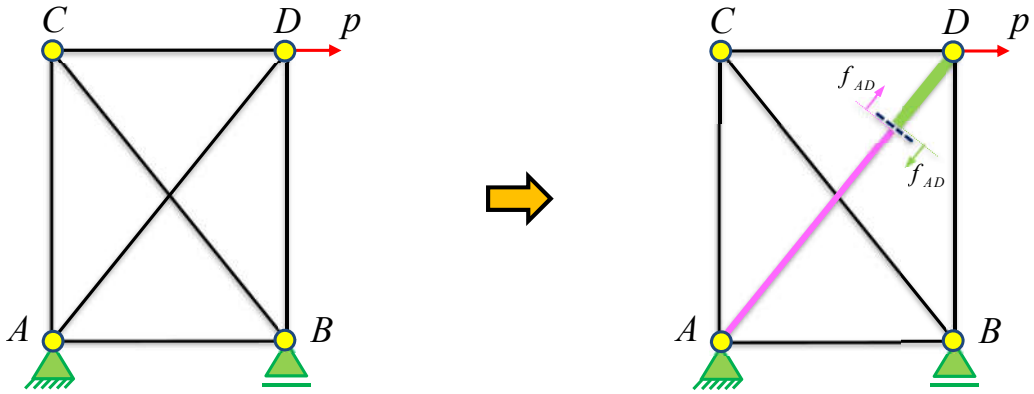
با دقت در رابطه (۶) متوجه خواهیم شد که

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ B_y \\ C_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \theta_{AA} & \theta_{AB} & \theta_{AC} \\ \delta_{BA} & \delta_{BB} & \delta_{BC} \\ \delta_{CA} & \delta_{CB} & \delta_{CC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Theta_{A_0} + \Theta_{AS} + \Theta_{AT} \\ \Delta_{B_0} + \Delta_{BS} + \Delta_{BT} \\ \Delta_{C_0} + \Delta_{CS} + \Delta_{CT} - S_C \end{Bmatrix}$$

۱۸ **پارامتر تغییر شکلی مجهول** وجود دارد که باید محاسبه شود. برای محاسبه هریک از این تغییرشکل‌ها می‌توان از یکی از روش‌های، انتگرال‌گیری مستقیم، لنگر سطح، تیر مزدوج، انرژی و کار مجازی استفاده کرد. مشاهده می‌شود که با حجم وسیعی از محاسبات رو به رو هستیم.

روش نیرو (Force Method)

خرپای نشان داده شده تحت اثر یک بار متمرکز قرار دارد. این خرپا از نظر خارجی معین اما از نظر داخلی یک درجه نامعین است. از آنجایی که خرپا از نظر خارجی معین می‌باشد در نتیجه حذف هر کدام از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی باعث ناپایداری سازه تبدیل یافته می‌گردد. از این رو، نیروی داخلی یکی از اعضا را به عنوان مجهول اضافه در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم نیروی عضو AD اضافه باشد پس قید مربوط به نیروی این عضو را از روی سازه حذف می‌کنیم. این کار را می توان با قطع کردن عضو AD انجام داد.

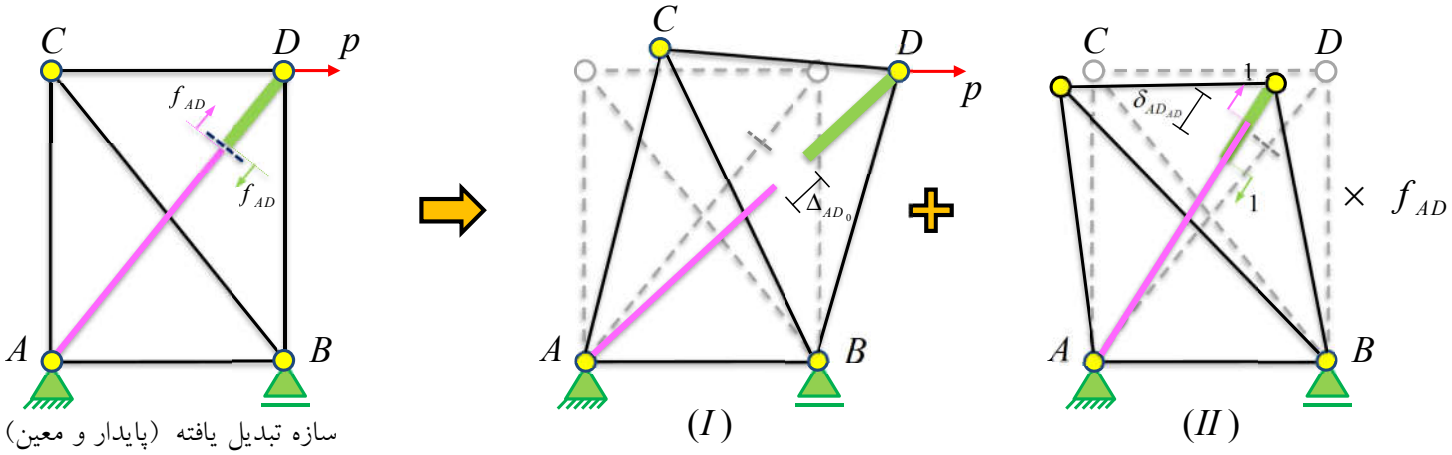


سازه اولیه (پایدار و نامعین)

سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

روش نیرو (Force Method)

اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در دو حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:



سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

(I)

(II)

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در سازه شماره (I) در اثر بار خارجی یک جدا شدگی (Gap) در محل قطع عضو AD ایجاد خواهد شد که در سازه اصلی این جدا شدگی وجود ندارد. بنابراین، در سازه شماره (II) نیروی‌های واحد باید به گونه‌ای وارد شوند که جدا شدگی ایجاد شده را جبران نمایند در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta_{AD_0} + f_{AD} \times \delta_{AD_{AD}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{AD} = -\frac{\Delta_{AD_0}}{\delta_{AD_{AD}}}}$$

Δ_{AD_0} : میزان جداشدگی در عضو AD تحت اثر بار خارجی (اولیه)

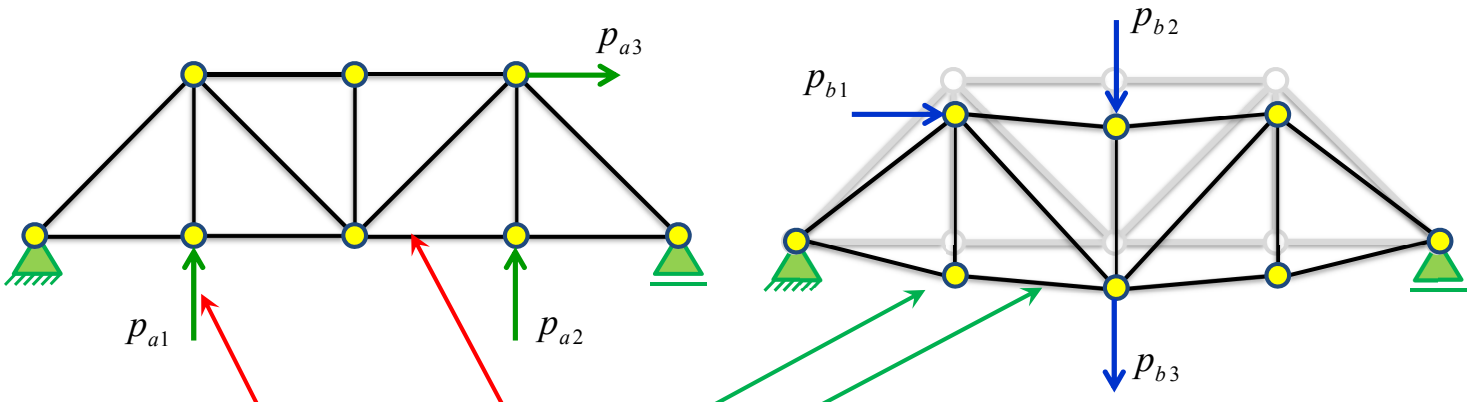
$\delta_{AD_{AD}}$: میزان همپوشانی در عضو AD تحت اثر بارهای واحد وارده در مقطع جدا شده در عضو AD

روش نیرو (Force Method)

قانون بتی- قانون ماکسول (Betti's law – Maxwell's law):

در شکل زیر با فرض آن که تکیه‌گاه‌ها بدون تغییرشکل و درجه حرارت ثابت باشد دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف- فرض می‌شود که سیستم نیروهای p_a مجازی و سیستم نیروهای p_b واقعی باشد.



نیروهای داخلی F_a ناشی از بارهای p_a

نیروهای داخلی F_b ناشی از بارهای p_b

با بکار گیری قانون کار مجازی خواهیم داشت:

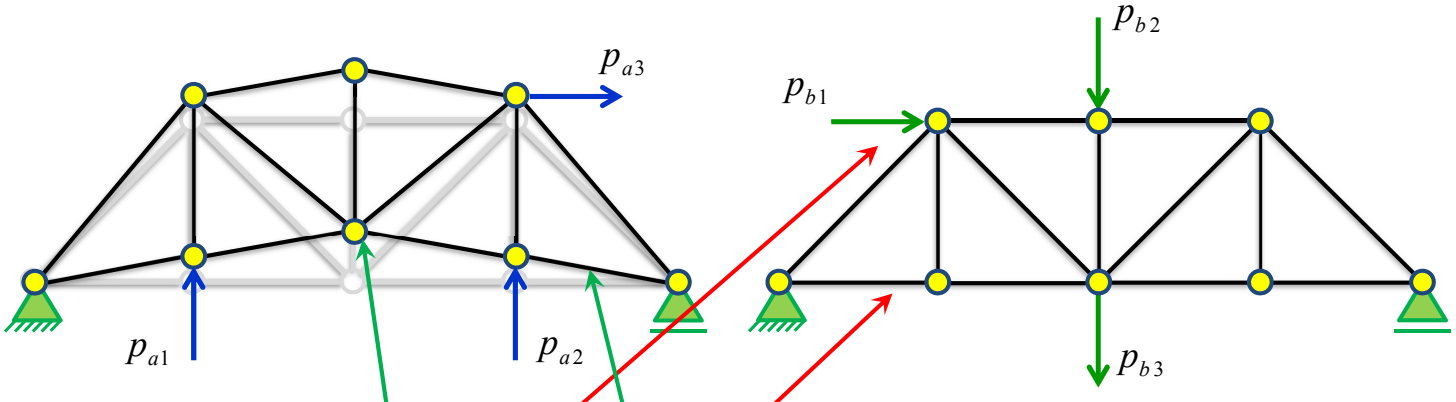
$$\sum p_a \Delta_{ab} = \sum F_a \frac{F_b \ell}{EA} \qquad (7)$$

Δ_{ab}: تغییر شکل خارجی خرپا ناشی از بارهای p_b در محل اثر بارهای p_a

روش نیرو (Force Method)

قانون بتی- قانون ماکسول (Betti's law – Maxwell's law):

ب- فرض می‌شود که سیستم نیروهای p_b مجازی و سیستم نیروهای p_a واقعی باشد.



نیروهای داخلی F_a ناشی از بارهای p_a

نیروهای داخلی F_b ناشی از بارهای p_b

با بکار گیری قانون کار مجازی خواهیم داشت:

$$\sum p_b \Delta_{ba} = \sum F_b \frac{F_a \ell}{EA} \qquad (8)$$

Δ_{ba}: تغییر شکل خارجی خرپا ناشی از بارهای p_a در محل اثر بارهای p_b

روش نیرو (Force Method)

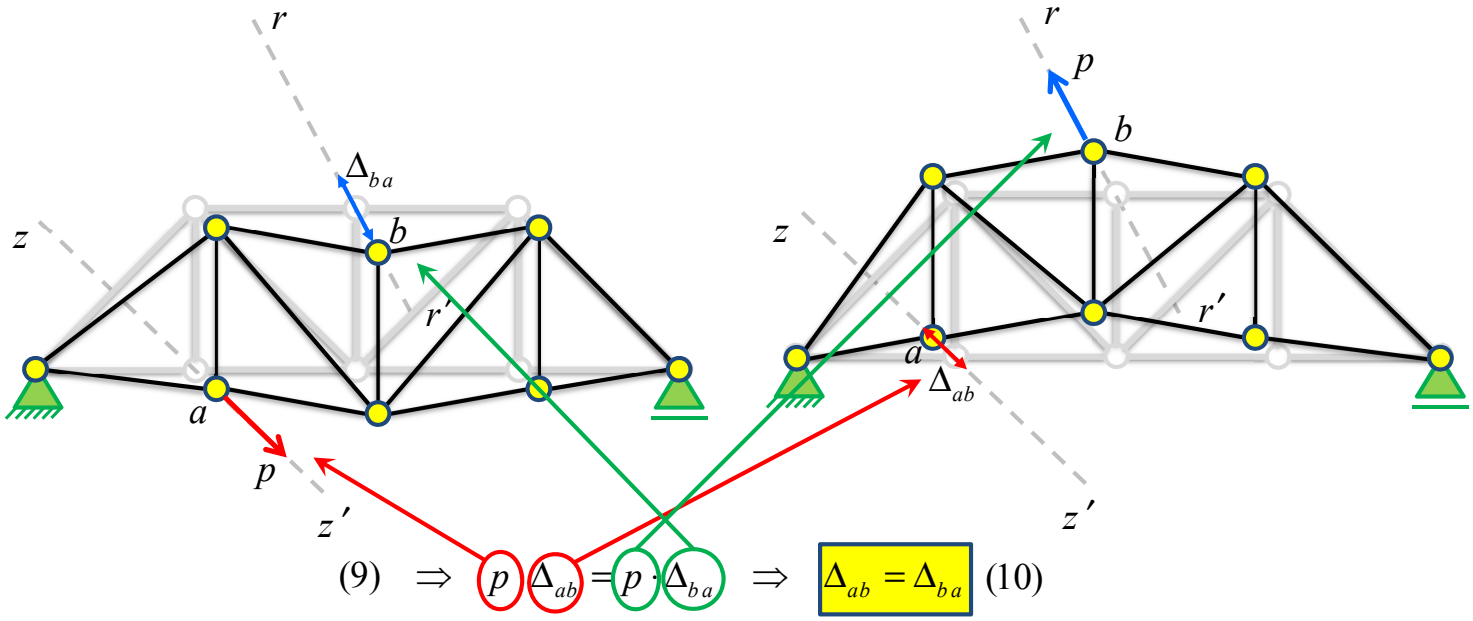
قانون بتی- قانون ماکسول (Betti's law – Maxwell's law):

$$(7)\,\&\,(8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum p_a \cdot \Delta_{ab} = \sum p_b \cdot \Delta_{ba}} \quad (9)$$

قانون بتی: در هر سازه‌ای که رفتار آن خطی بوده (در ناحیه الاستیک باشد) مشروط بر آن که تکیه‌گاه‌های سیستم غیرقابل تغییرشکل بوده و درجه حرارت نیز ثابت باشد؛ در آن صورت کار مجازی خارجی انجام شده توسط سیستم نیروهای p_a به علت تغییرشکل سازه در نتیجه تاثیر سیستم نیروهای p_b (یعنی همان Δ_{ab}) برابر است با کار مجازی خارجی انجام شده توسط سیستم نیروهای p_b به علت تغییرشکل سازه در نتیجه تاثیر سیستم نیروهای p_a (یعنی همان Δ_{ba}) می‌باشد.

روش نیرو (Force Method)

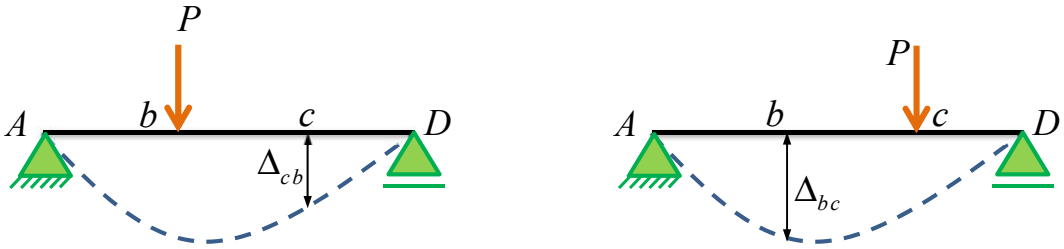
قانون بتی- قانون ماکسول (Betti's law – Maxwell's law):



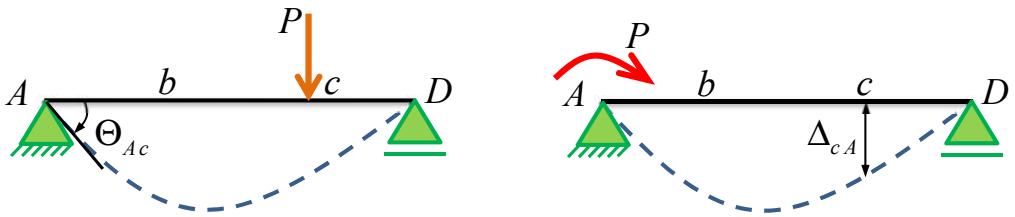
$$(9) \quad \Rightarrow \quad p\,\Delta_{ab} = p\,\Delta_{ba} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{ab} = \Delta_{ba}} \quad (10)$$

قانون ماکسول: در هر سازه‌ای که رفتار آن خطی بوده (در ناحیه الاستیک باشد) مشروط بر آن که تکیه‌گاه‌های سیستم غیرقابل تغییرشکل بوده و درجه حرارت نیز ثابت باشد؛ در آن صورت Δ_{ab} تغییرمکان نقطه a در امتداد خط zz' به علت نیروی p در نقطه b که در امتداد rr' اثر می‌کند برابر است با Δ_{ba} تغییرمکان نقطه b در امتداد خط rr' به علت اعمال نیروی p در نقطه a در امتداد zz' است.

قانون بتی – قانون ماکسول (Betti's law – Maxwell's law):

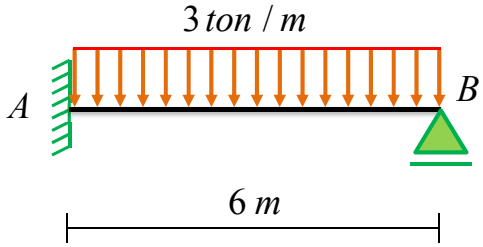


قانون ماکسول $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta_{cb} = \Delta_{bc}}$



قانون ماکسول $\Rightarrow$ $p \cdot \Theta_{Ac} = p \cdot \Delta_{cA}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Theta_{Ac} = \Delta_{cA}}$

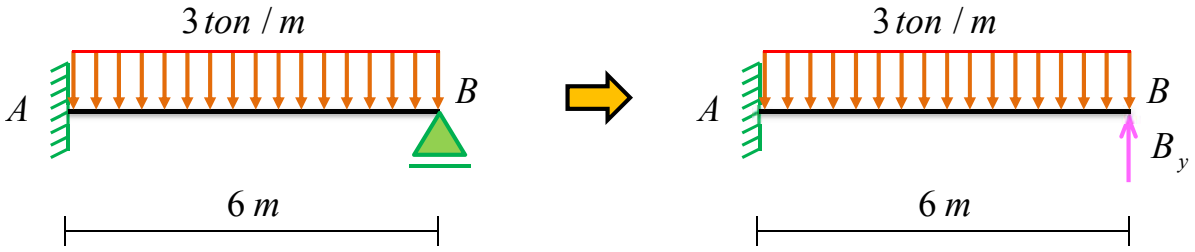
مثال ۱– نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید.



$EI = 200\, ton.m^2$

پاسخ مثال ۱-

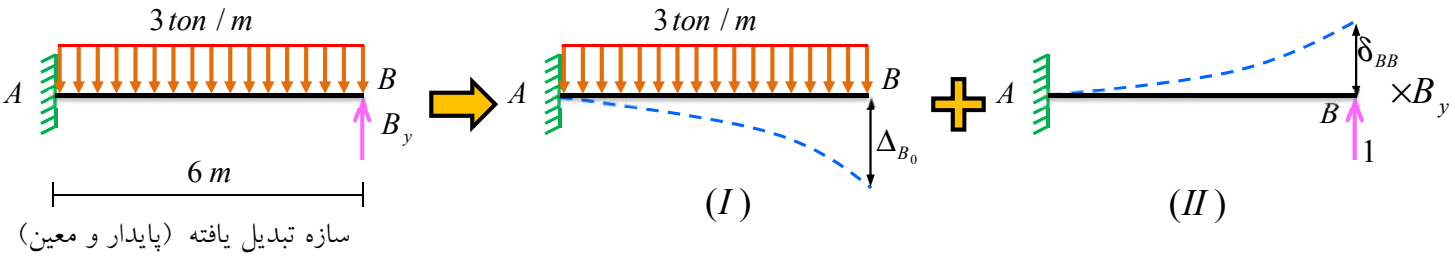
سازه مورد نظر یک درجه نامعینی دارد. با در نظر گرفتن عکس‌العمل تکیه‌گاهی مجهول B به عنوان نیروی خارجی اعمال شده به سازه، سازه اولیه به صورت زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر یک نیروی خارجی مجهول تبدیل می‌شود:



سازه اولیه (پایدار و نامعین) — سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

پاسخ مثال ۱-

اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در دو حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:

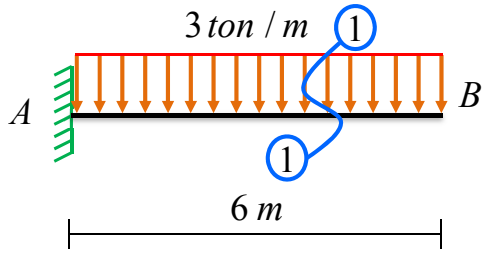


سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

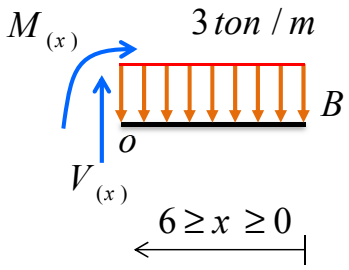
براساس **اصل سازگاری تغییرشکل‌ها**، باید میزان خیز در محل تکیه‌گاه B برابر با صفر باشد:

$$B_y = -\frac{\Delta_{B_0}}{\delta_{BB}} \quad (1.1)$$

پاسخ مثال ۱-



آنالیز سازه شماره (I)- معادله لنگر در سازه (I) محاسبه می‌شود:

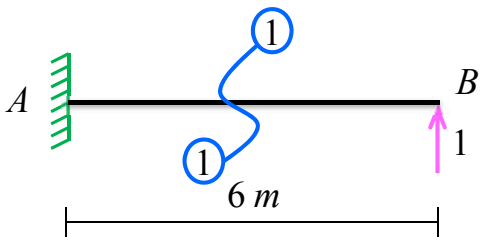


با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

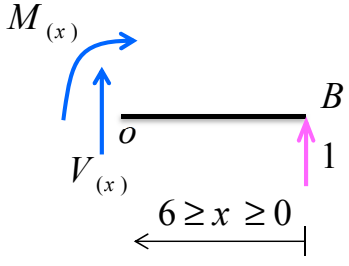
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} - 3x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2} \quad (1.2)$$

پاسخ مثال ۱-



آنالیز سازه شماره (II)- معادله لنگر در سازه (II) محاسبه می‌شود:



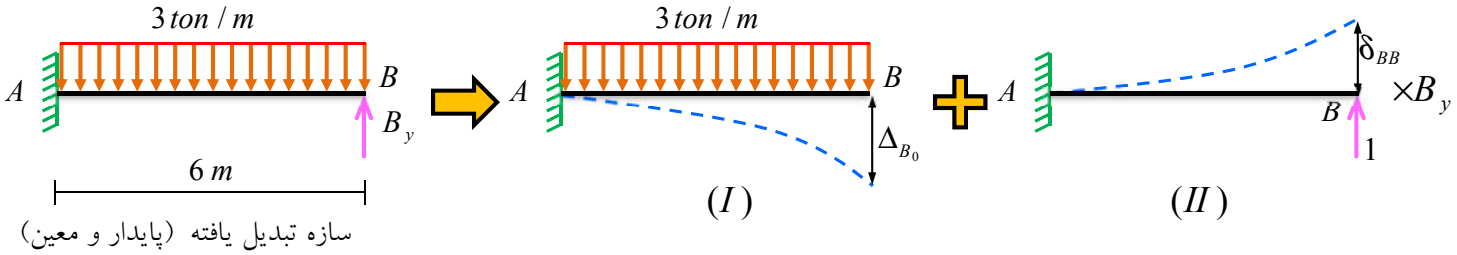
با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} + 1.x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = x} \quad (1.3)$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۱-

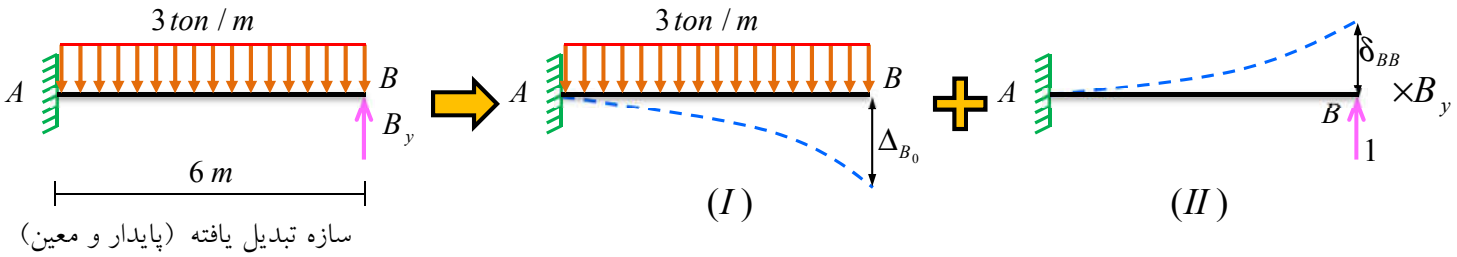


برای محاسبه Δ_{B_0} اگر بخواهیم از روش کار مجازی استفاده کنیم باید ابتدا سازه شماره (I) را تحت اثر بار خارجی و سپس سازه شماره (I) را تحت اثر بار واحد متمرکز مجازی قائم در نقطه B آنالیز نماییم. اما از آنجایی که آنالیز سازه شماره (I) تحت اثر بار واحد متمرکز مجازی شبیه به آنالیز سازه شماره (II) می‌باشد؛ پس می‌توان از نتایج آنالیز سازه شماره (II) استفاده کرد.

$$= -\frac{1.5x^4}{4EI}\Big]_0^6 \Rightarrow \boxed{\Delta_{B_0} = -\frac{486}{EI}} \quad (1.4)$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۱-

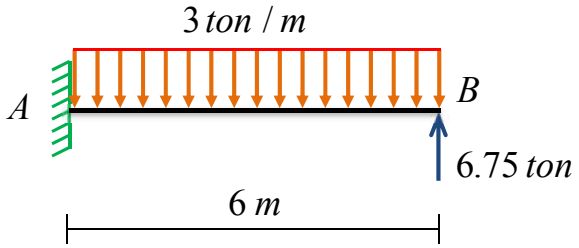


برای محاسبه δ_{BB} اگر بخواهیم از روش کار مجازی استفاده کنیم باید ابتدا سازه شماره (II) را تحت اثر بار خارجی و سپس سازه شماره (II) را تحت اثر بار واحد متمرکز مجازی قائم در نقطه B آنالیز نماییم. اما از آنجایی که آنالیز سازه شماره (II) تحت اثر بار واحد متمرکز مجازی شبیه به آنالیز تحت اثر بار خارجی می‌باشد؛ پس دو بار از نتایج آنالیز سازه شماره (II) استفاده می‌کنیم.

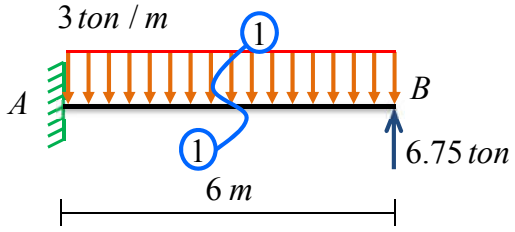
$$= \frac{x^3}{3EI}\Big]_0^6 \Rightarrow \boxed{\delta_{BB} = \frac{72}{EI}} \quad (1.5)$$

پاسخ مثال ۱-

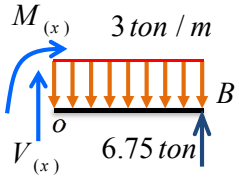
$$\boxed{B_y = 6.75\,ton} \quad (1.6)$$



پاسخ مثال ۱-



برای رسم نمودارهای لنگر و برش سازه آنالیز می‌شود:



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{(x)} - 3x + 6.75 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{V_{(x)} = 3x - 6.75} \quad (1.7)$$

$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; -M_{(x)} - 3x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) + 6.75x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x)} = -1.5x^2 + 6.75x} \quad (1.8)$$

محل برش صفر یا لنگر ماکزیمم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx}\left(M_{(x)}\right) = 0 \quad or \quad V_{(x)} = 0 \overset{(1.7)}{\Rightarrow} V_{(x)} = 3x - 6.75 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 2.25\ m} \quad (1.9)$$

مقدار لنگر ماکزیمم برابر است با:

$$(1.9) \rightarrow (1.8) \;\Rightarrow\; M_{(x=2.25)} = -1.5(2.25)^2 + 6.75(2.25) \;\Rightarrow\; \boxed{M_{(x=2.25)} = 7.594\,ton.m} \quad (1.10)$$

پاسخ مثال ۱-

$(1.7) \Rightarrow$

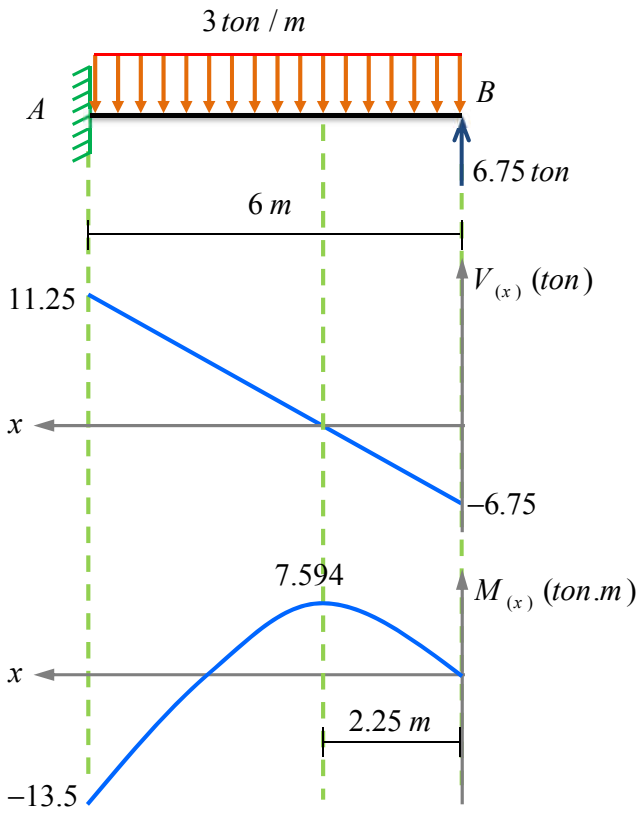
$V_{(x=0)} = 3(0) - 6.75 \Rightarrow \boxed{V_{(x=0)} = -6.75\,ton}$

$V_{(x=6)} = 3(6) - 6.75 \Rightarrow \boxed{V_{(x=6)} = 11.25\,ton}$

$(1.8) \Rightarrow$

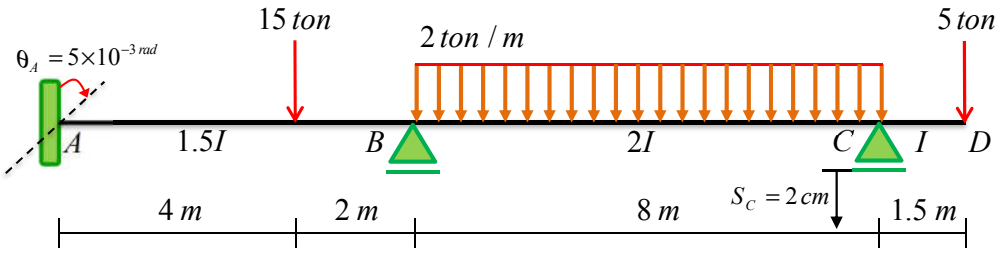
$M_{(x=0)} = -1.5(0)^2 + 6.75(0) \Rightarrow \boxed{M_{(x=0)} = 0}$

$M_{(x=6)} = -1.5(6)^2 + 6.75(6) \Rightarrow \boxed{M_{(x=6)} = -13.5\,ton.m}$



ETABS File Name: **06-Example-01.EDB**

مثال ۲- نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر نشان داده شده را رسم نمایید. تکیه‌گاه A به اندازه 5×10^{-3} رادیان در جهت ساعتگرد دوران دارد. همچنین تکیه‌گاه C نیز به اندازه ۲ سانتیمتر در راستای قائم نشست می‌کند.

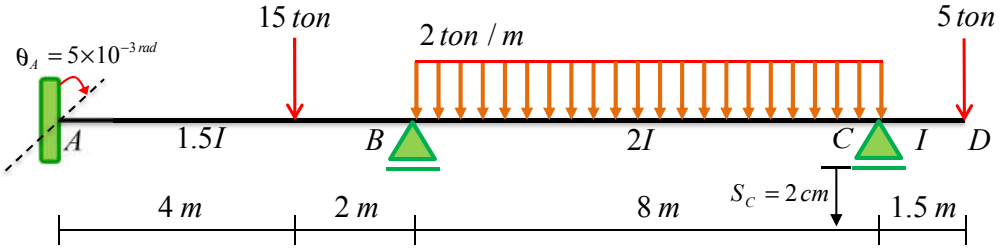


$EI = 200\,ton.m^2$

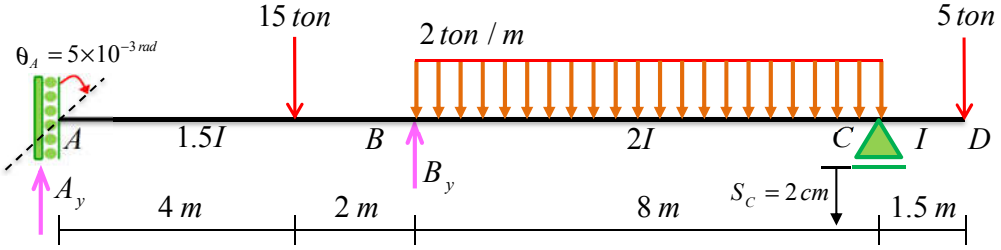
روش نیرو (Force Method)

حل مثال ۲-

سازه مورد نظر دو درجه نامعینی دارد. با در نظر گرفتن عکس‌العمل‌های قائم مجهول در تکیه‌گاه‌های A و B به عنوان نیروی خارجی اعمال شده به سازه، سازه اولیه به صورت زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر دو نیروی خارجی مجهول تبدیل می‌شود:



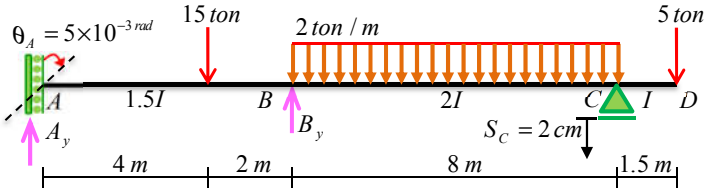
سازه اولیه (پایدار و نامعین)

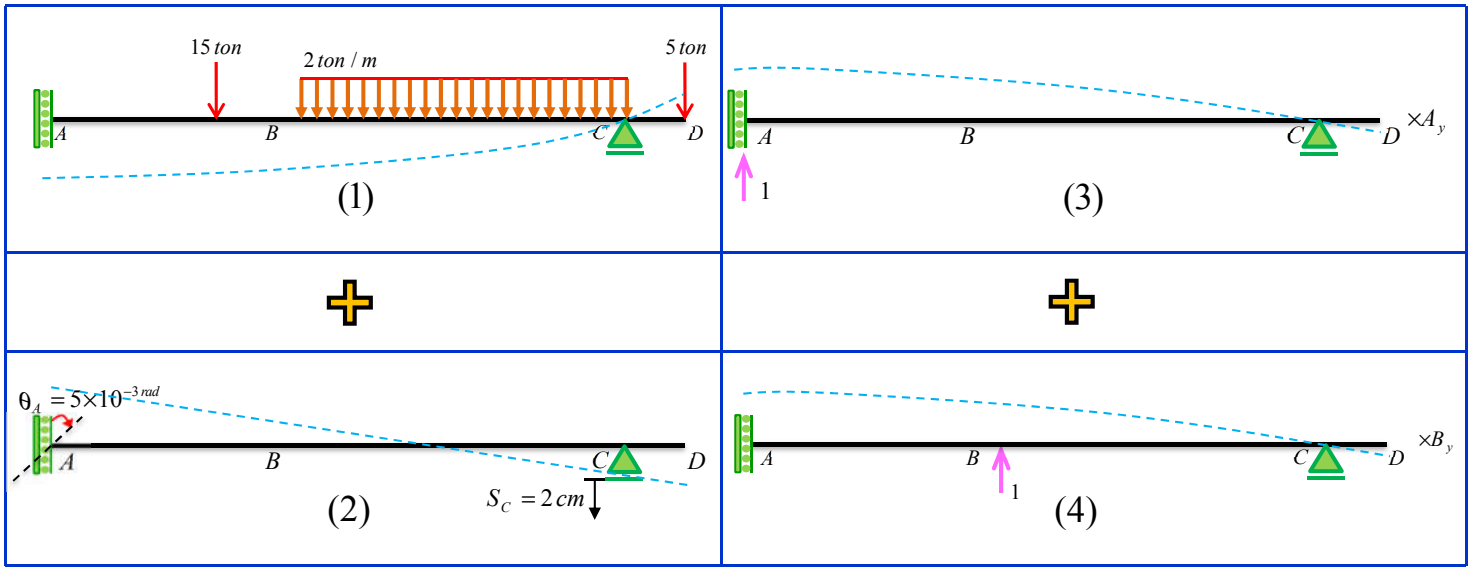


سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

روش نیرو (Force Method)

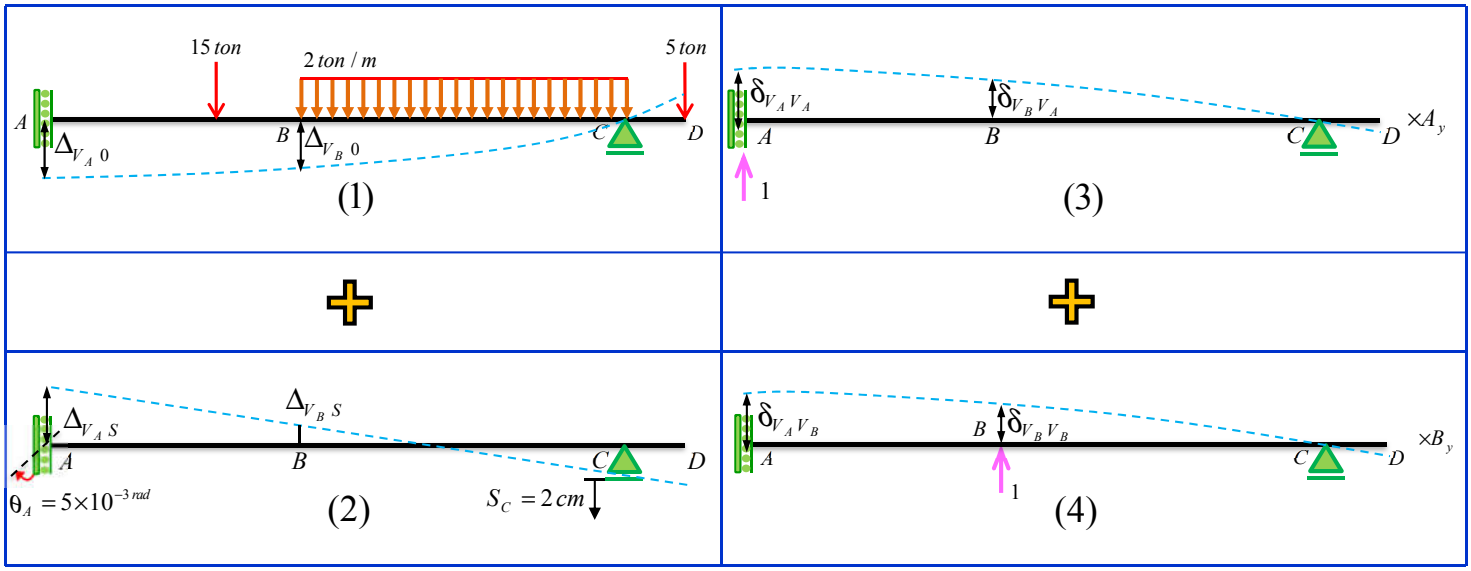
حل مثال ۲- اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در چهار حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:





روش نیرو (Force Method)

حل مثال ۲-



براساس اصل سازگاری تغییرشکل‌ها، باید تغییر مکان قائم در هر دو تکیه‌گاه A و B برابر با صفر باشد:

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

فرم ماتریسی رابطه (2.1) به صورت زیر است:

$$(2.1) \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_{V_A V_A} & \delta_{V_A V_B} \\ \delta_{V_B V_A} & \delta_{V_B V_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_y \\ B_y \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \Delta_{V_A 0} + \Delta_{V_A S} \\ \Delta_{V_B 0} + \Delta_{V_B S} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

با حل رابطه (2.2) واکنش‌های تکیه‌گاهی مجهول به دست می‌آیند:

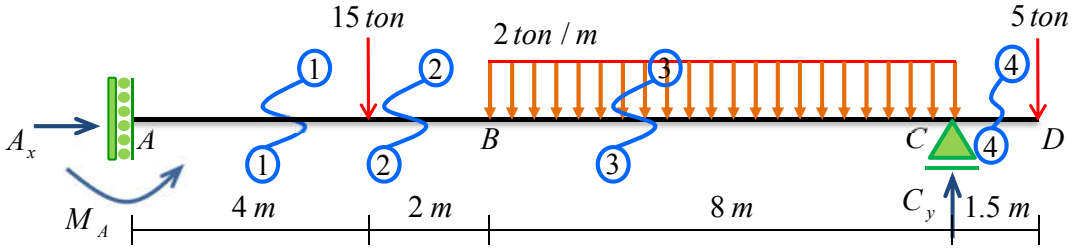
$$(2.2) \Rightarrow \begin{Bmatrix} A_y \\ B_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{V_A V_A} & \delta_{V_A V_B} \\ \delta_{V_B V_A} & \delta_{V_B V_B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta_{V_A 0} + \Delta_{V_A S} \\ \Delta_{V_B 0} + \Delta_{V_B S} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

همانطور که در رابطه (2.3) نمایان است باید ۸ پارامتر تغییرشکلی محاسبه گردد. در این‌جا پارامترهای تغییرشکل با استفاده از روش کار مجازی محاسبه خواهند شد. برای این منظور در ابتدا باید هر یک از چهار سازه را به طور مجزا آنالیز نماییم. اما از آن‌جایی که در سازه شماره ۲ بار خارجی نداریم بنابراین نیازی به آنالیز این سازه نمی‌باشد.

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۱):



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

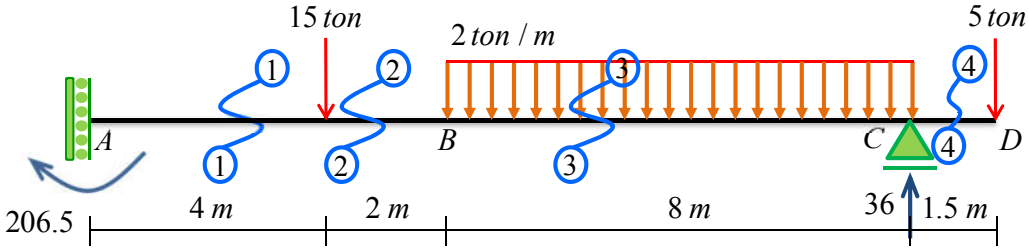
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -15-(2)(8)+C_y-5=0 \Rightarrow \boxed{C_y = 36} \quad (2.4)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 15\times 4-(2)(8)\times\left(\frac{8}{2}+6\right)+C_y\times 14-5\times 15.5=0 \overset{(2.4)}{\Rightarrow} \boxed{M_A = -206.5}$$

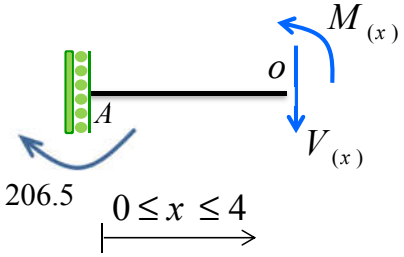
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۱):

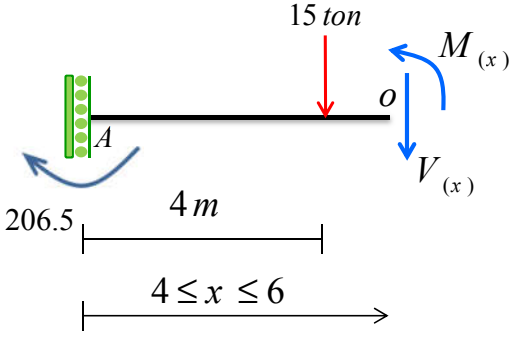


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 206.5 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 206.5}$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

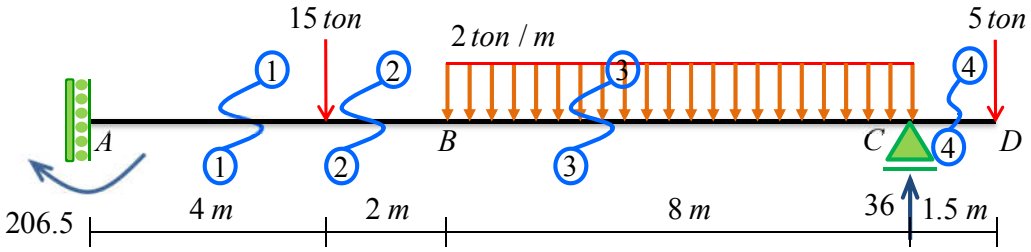


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 206.5 + 15\times(x-4) = 0$$

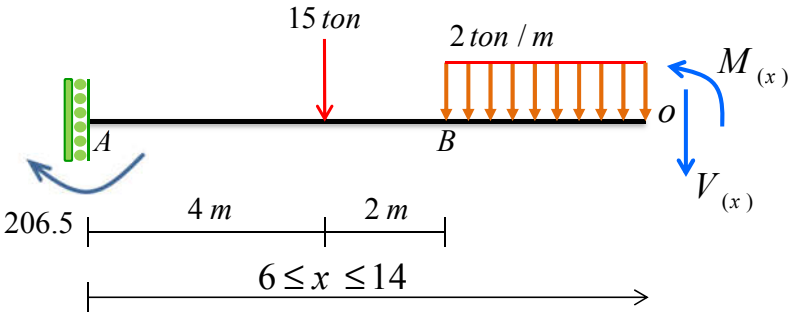
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -15x + 266.5}$$

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۱):



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

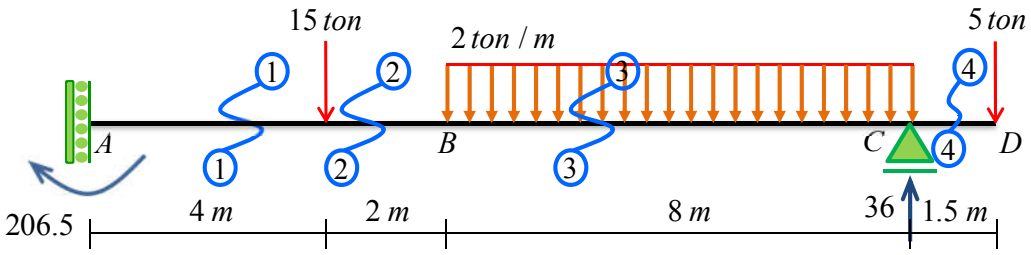


$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} - 206.5 + 15\times(x-4) + 2\times(x-6)\times\left(\frac{x-6}{2}\right) = 0$$

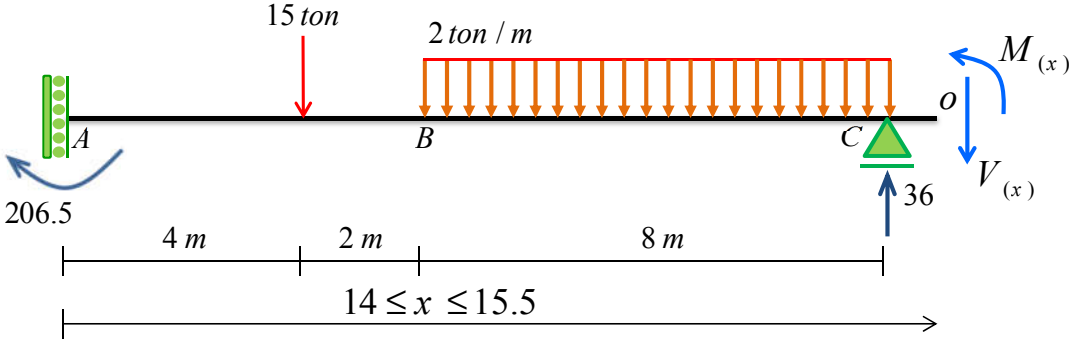
$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = -x^2 - 3x + 230.5}$$

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۱):



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۴-۴ خواهیم داشت:



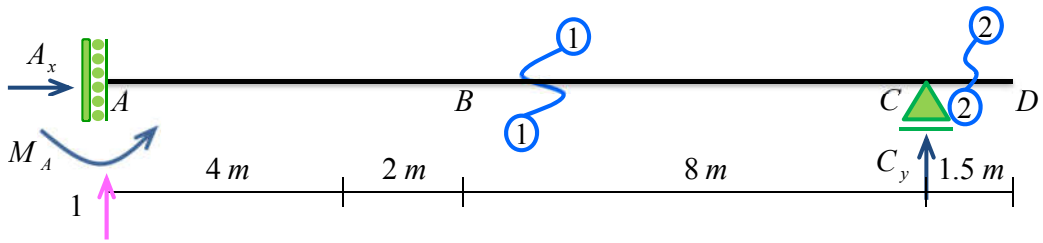
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} - 206.5 + 15\times(x-4) + (2\times 8)\times\left(x-6-\frac{8}{2}\right) - 36\times(x-14) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 5x - 77.5}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۳):



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

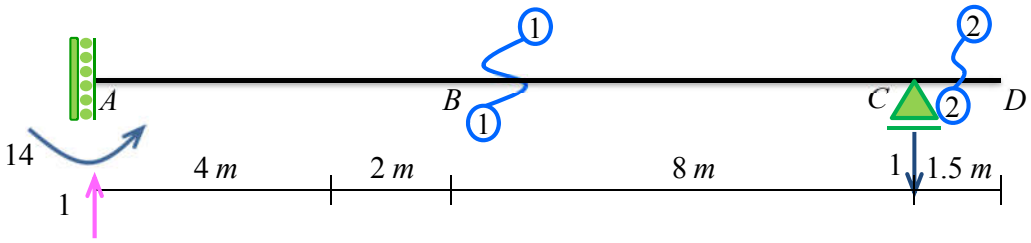
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1 + C_y = 0 \Rightarrow \boxed{C_y = -1} \quad (2.5)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + C_y \times 14 = 0 \overset{(2.5)}{\Rightarrow} \boxed{M_A = 14}$$

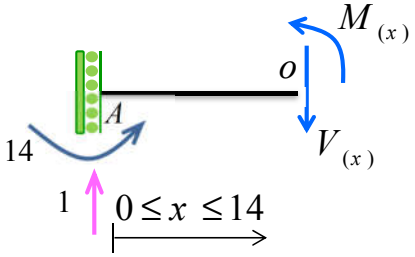
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۳):

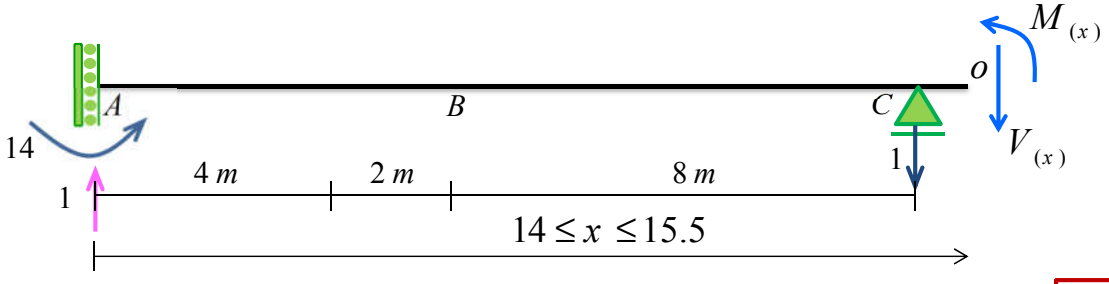


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 14 - 1 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = x - 14}$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

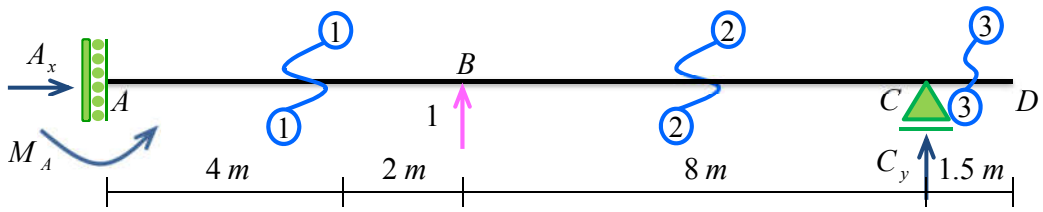


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 14 + 1 \times (x - 14) - 1 \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۴):



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

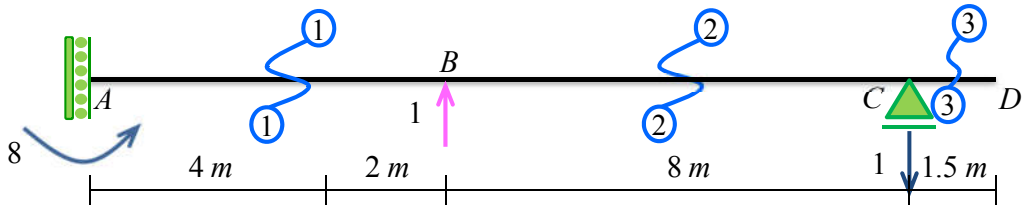
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1 + C_y = 0 \Rightarrow \boxed{C_y = -1} \quad (2.6)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1\times 6 + C_y \times 14 = 0 \overset{(2.6)}{\Rightarrow} \boxed{M_A = 8}$$

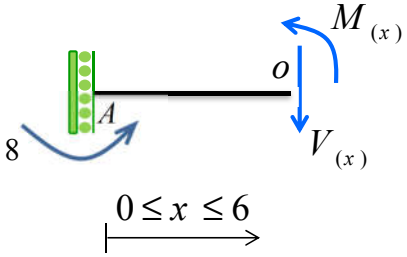
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۴):

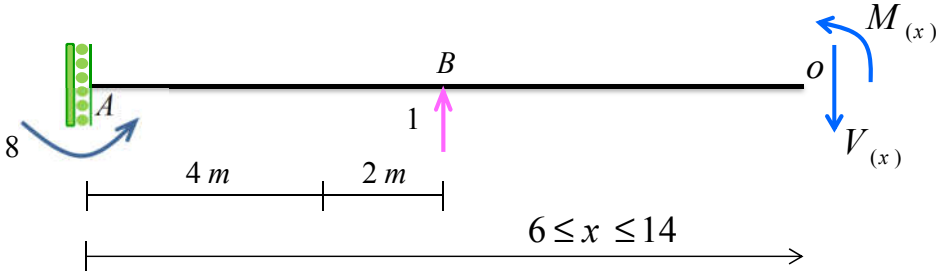


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -8}$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

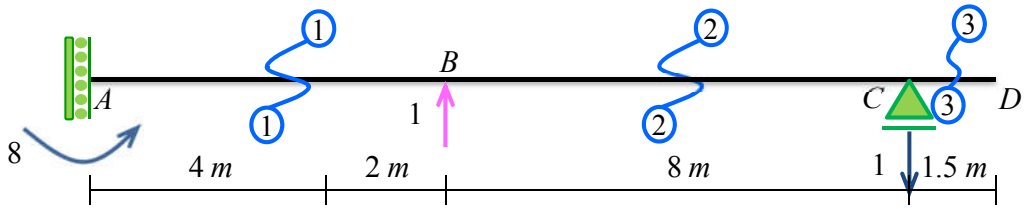


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 8 - 1\times(x-6) = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = x - 14}$$

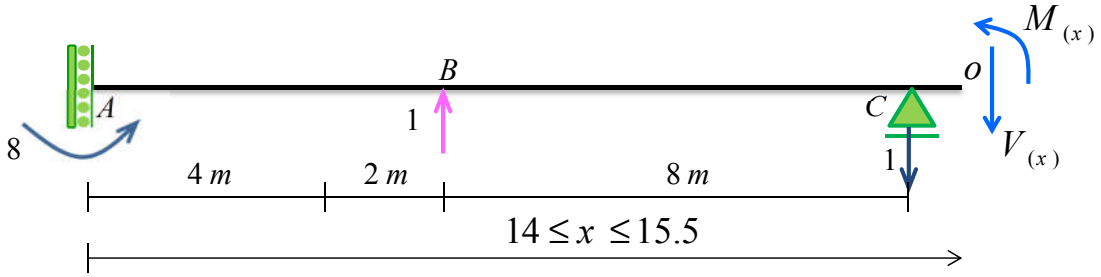
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

آنالیز سازه شماره (۴):



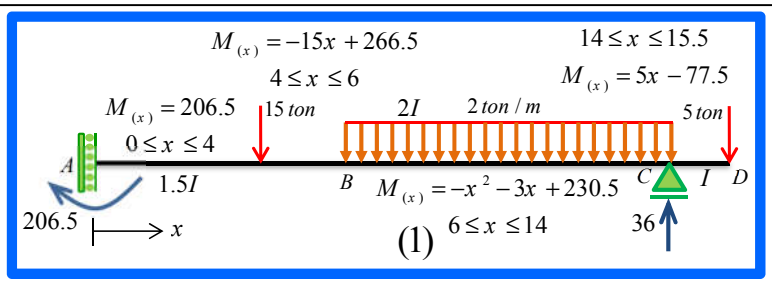
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

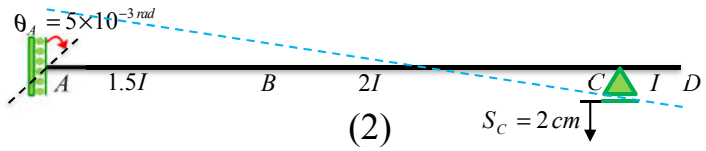


$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} + 8 + 1\times(x-14) - 1\times(x-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = 0}$$

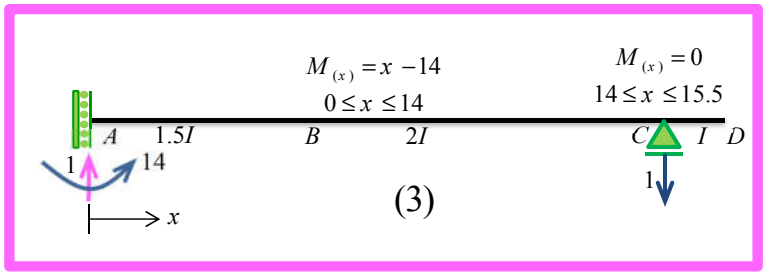
روش نیرو (Force Method)

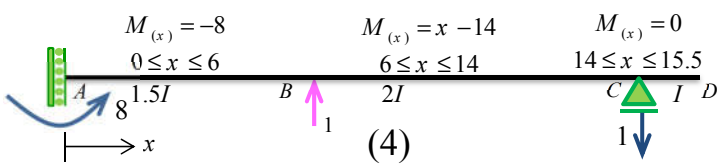
پاسخ مثال ۲-



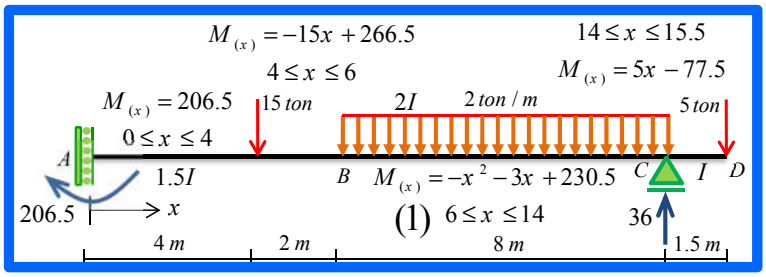


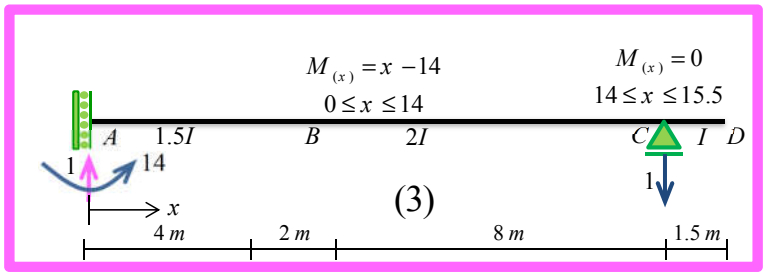
$\Delta_{V_A\,0}$: جابجایی قائم گره A در اثر بار خارجی





پاسخ مثال ۲-

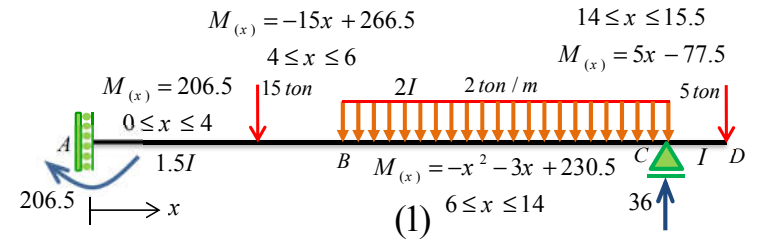


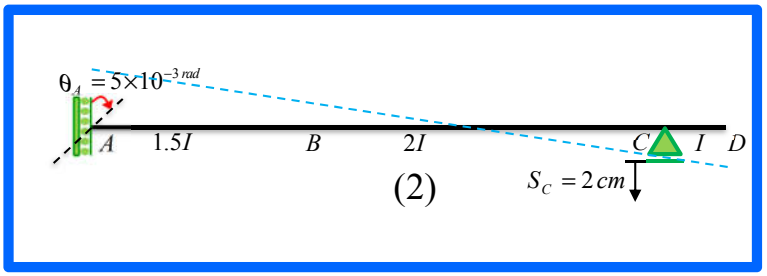


$$= \frac{103.25x^2 - 2891x}{1.5EI}\Big]_0^4 + \frac{-5x^3 + 238.25x^2 - 3731x}{1.5EI}\Big]_4^6 + \frac{-0.75x^4 + 11x^3 + 408.75x^2 - 9681x}{6EI}\Big]_6^{14}$$

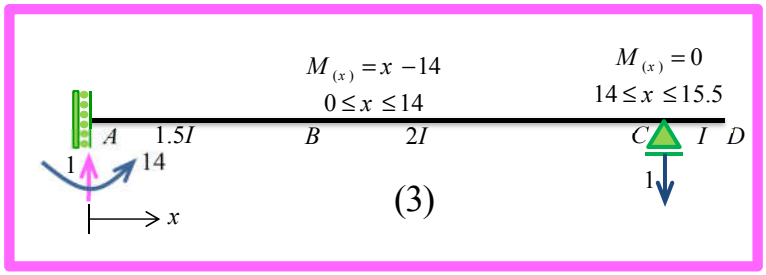
$$= -\frac{6608}{EI} - \frac{6914}{3EI} - \frac{6040}{3EI} \Rightarrow \boxed{\Delta_{V_A\,0} = -\frac{32778}{3EI}}$$

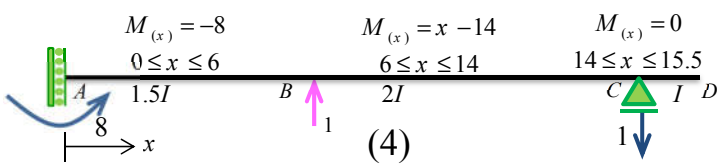
پاسخ مثال ۲-





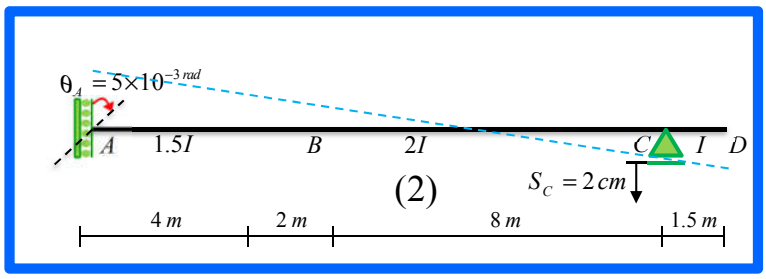
$\Delta_{V_A S}$: جابجایی قائم گره A در اثر نشست تکیه‌گاهی

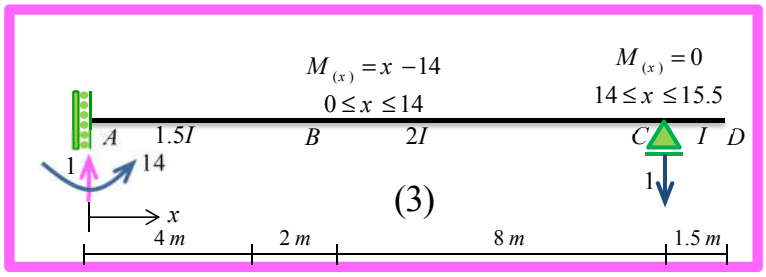




روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

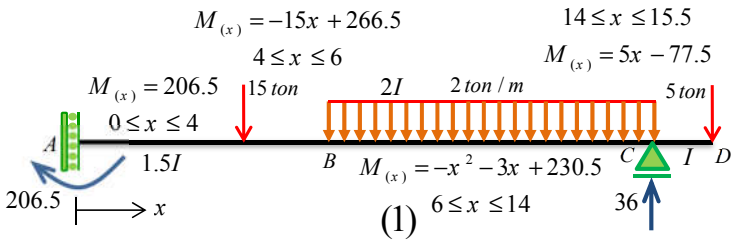


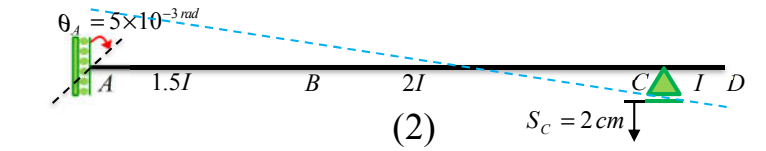


$$\Delta_{V_A S} = 0.05\ m$$

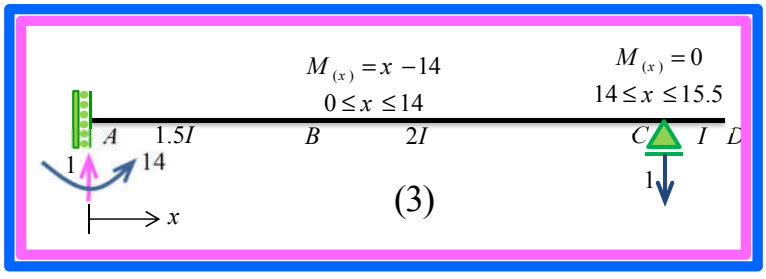
روش نیرو (Force Method)

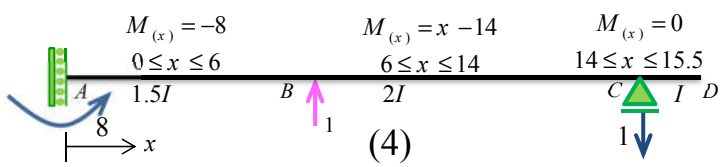
پاسخ مثال ۲-





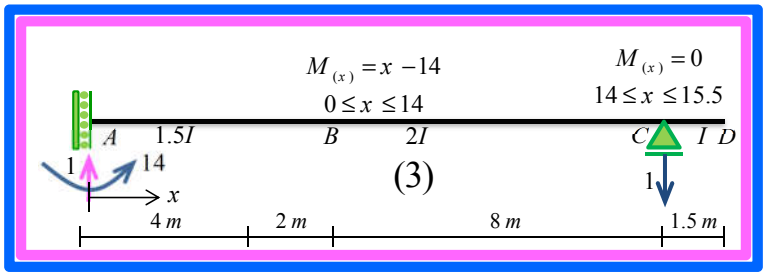
$\delta_{V_A V_A}$: جابجایی قائم گره A در اثر بار قائم واحد در گره A





روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

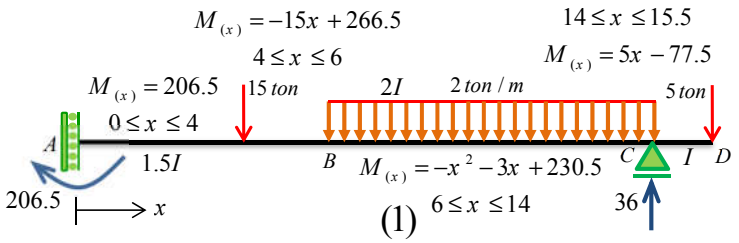


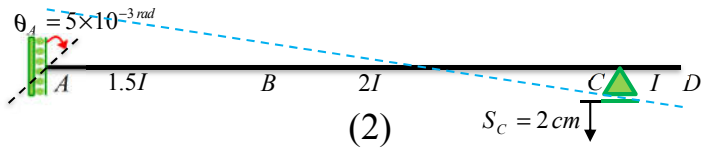
$$= \frac{x^3 - 42x^2 + 588x}{4.5EI}\Big]_0^6 + \frac{x^3 - 42x^2 + 588x}{6EI}\Big]_6^{14}$$

$$= \frac{496}{EI} + \frac{256}{3EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{V_A V_A} = \frac{1744}{3EI}}$$

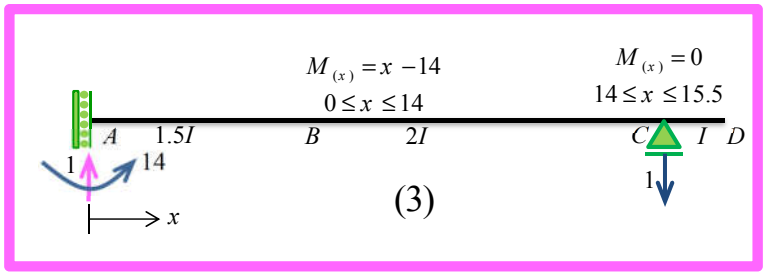
روش نیرو (Force Method)

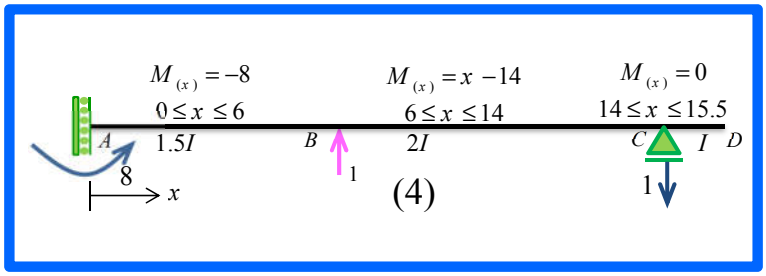
پاسخ مثال ۲-





$\delta_{V_A V_B}$: جابجایی قائم گره A در اثر بار قائم واحد در گره B



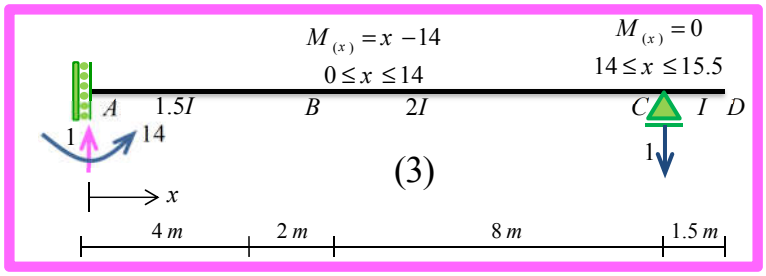


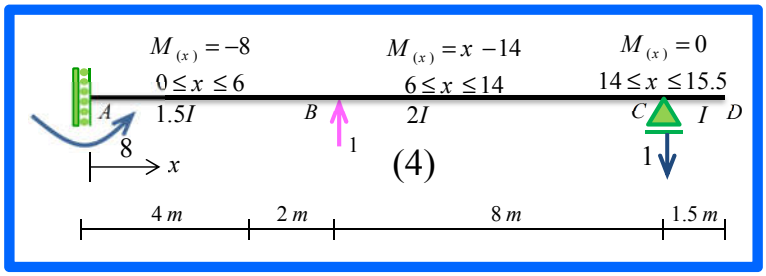
حقیقی مجازی

$$\Rightarrow \boxed{M_4} \;\&\; \boxed{\bar{m}_3}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-





$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\delta_{V_A V_B} = \int_0^{\ell} \frac{\bar{m}_3 M_4}{EI} \cdot d_x \Rightarrow$$

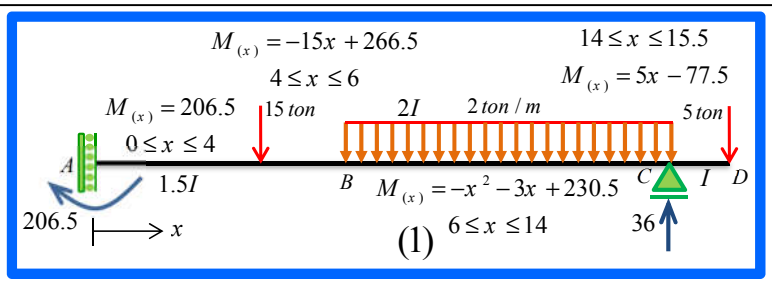
$$\delta_{V_A V_B} = \int_0^6 \frac{(x-14)(-8)}{1.5EI} \cdot d_x + \int_6^{14} \frac{(x-14)(x-14)}{2EI} \cdot d_x + \int_{14}^{15.5} \frac{(0)(0)}{EI} \cdot d_x$$

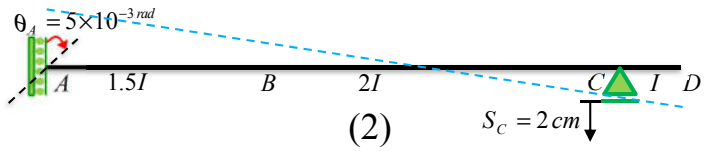
$$= \frac{-4x^2 + 112x}{1.5EI}\Big]_0^6 + \frac{x^3 - 42x^2 + 588x}{6EI}\Big]_6^{14}$$

$$= \frac{352}{EI} + \frac{256}{3EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{V_A V_B} = \frac{1312}{3EI}}$$

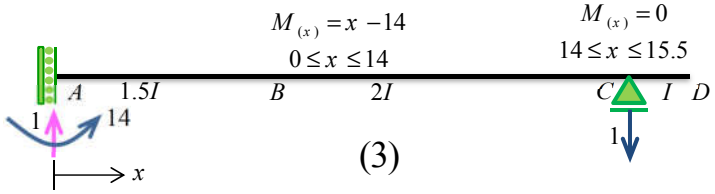
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-



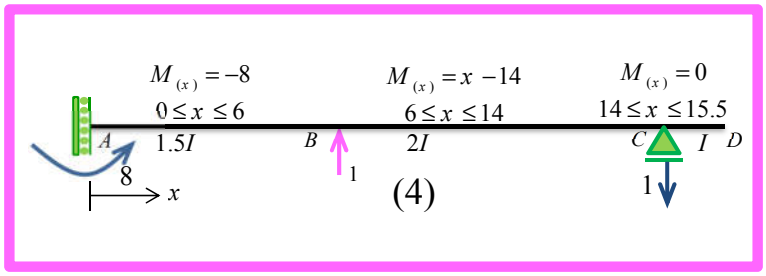


$\Delta_{V_B 0}$: جابجایی قائم گره B در اثر بار خارجی



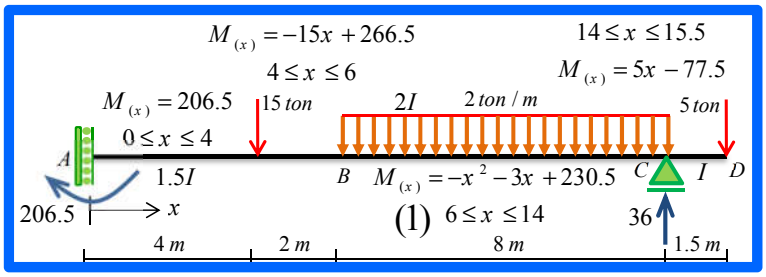
حقیقی مجازی

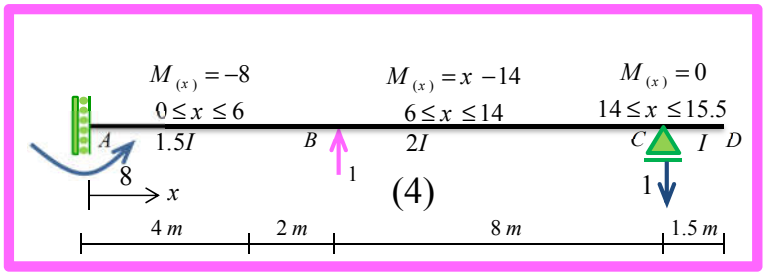
$$\Rightarrow \boxed{M_1} \;\&\; \boxed{\bar{m}_4}$$



روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-





$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\Delta_{V_B\,0} = \int_0^{\ell} \frac{\bar{m}_4 M_1}{EI}\cdot d_x \Rightarrow \Delta_{V_B\,0} = \int_0^4 \frac{(-8)(206.5)}{1.5EI}\cdot d_x$$

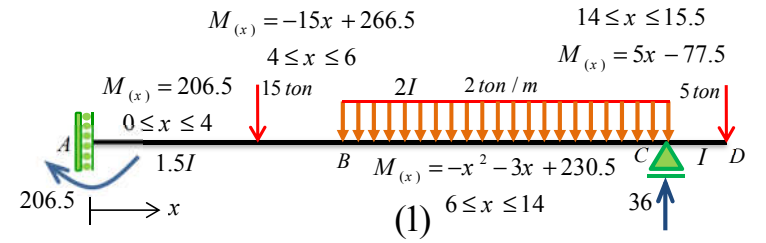
$$+\int_4^6 \frac{(-8)(-15x+266.5)}{1.5EI}\cdot d_x + \int_6^{14} \frac{(x-14)(-x^2-3x+230.5)}{2EI}\cdot d_x + \int_{14}^{15.5} \frac{(0)(5x-77.5)}{EI}\cdot d_x$$

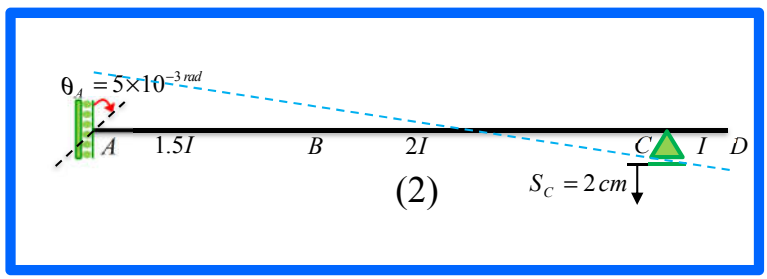
$$= \frac{-1652x}{1.5EI}\Big]_0^4 + \frac{60x^2-2132x}{1.5EI}\Big]_4^6 + \frac{-0.75x^4+11x^3+408.75x^2-9681x}{6EI}\Big]_6^{14}$$

$$= -\frac{6608}{1.5EI} - \frac{3064}{1.5EI} - \frac{6040}{3EI} \Rightarrow \boxed{\Delta_{V_B\,0} = -\frac{25384}{3EI}}$$

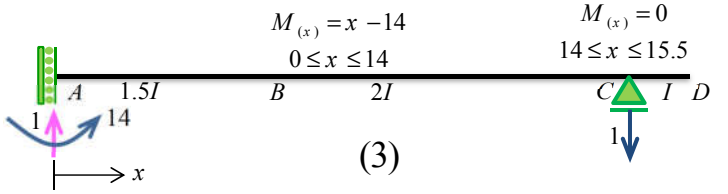
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-



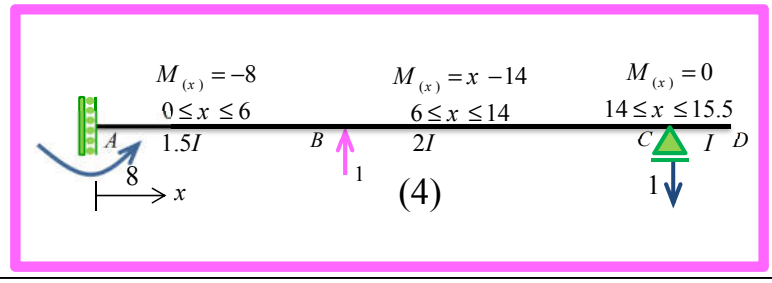


$\Delta_{V_B S}$: جابجایی قائم گره B در اثر نشست تکیه‌گاهی



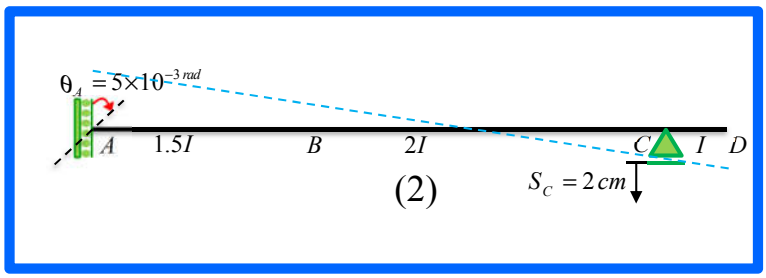
حقیقی مجازی

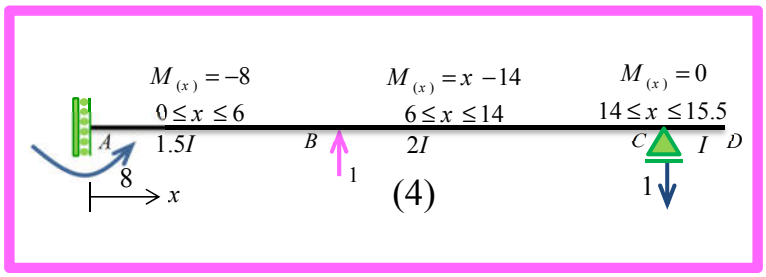
$$\Rightarrow \boxed{M_2} \;\&\; \boxed{\bar{m}_4}$$



روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

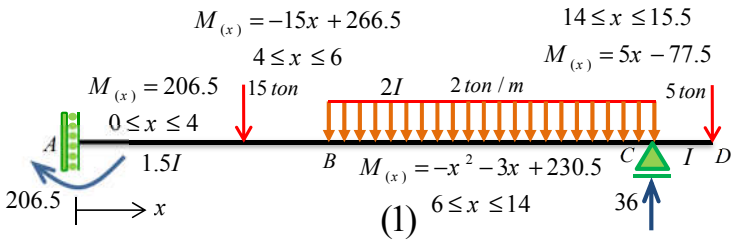


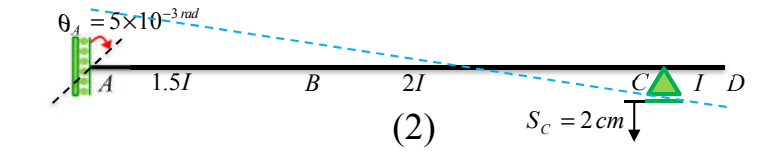


$$\Delta_{V_B S} = 0.02\ m$$

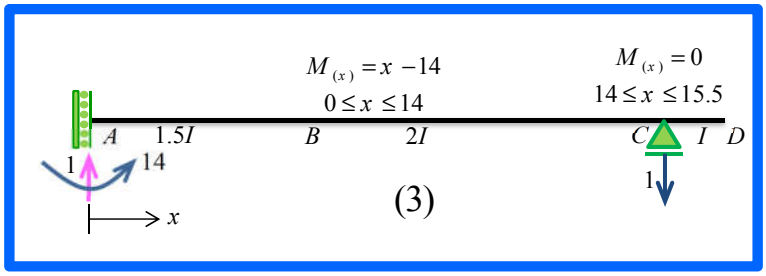
روش نیرو (Force Method)

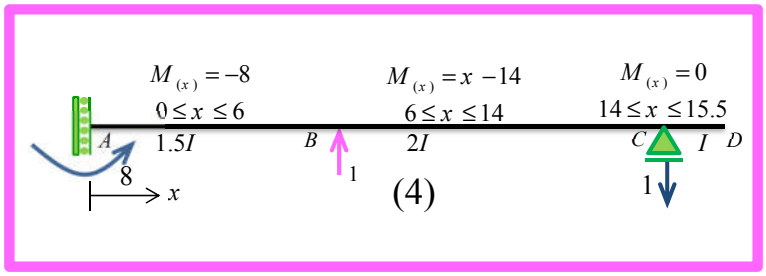
پاسخ مثال ۲-





$\delta_{V_B V_A}$: جابجایی قائم گره B در اثر بار قائم واحد در گره A



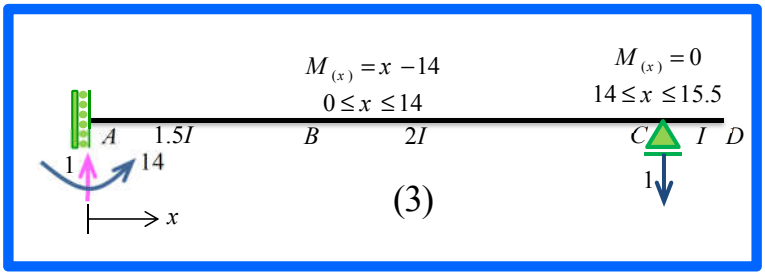


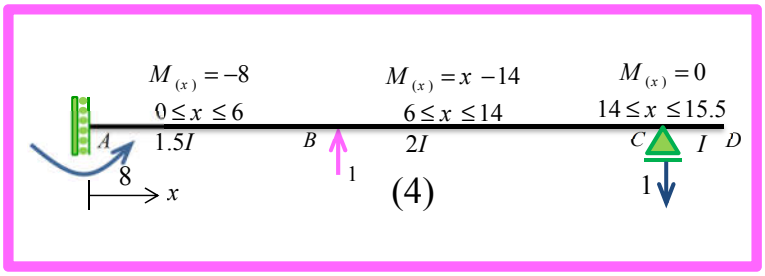
حقیقی مجازی

$$\Rightarrow \boxed{M_3} \;\&\; \boxed{\bar{m}_4}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

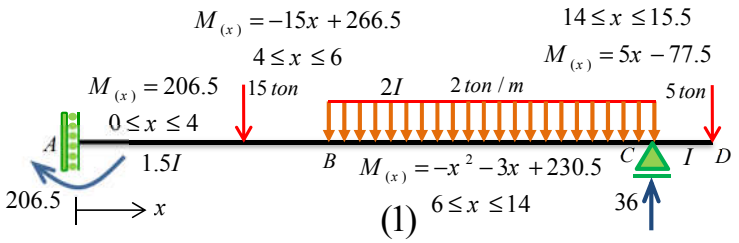


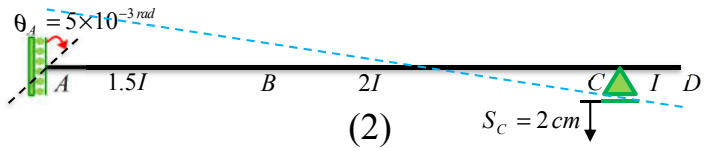


$$\delta_{V_B V_A} = \frac{1312}{3EI}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

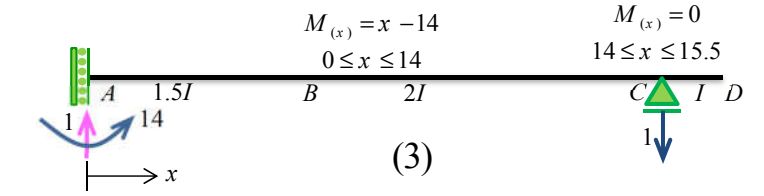


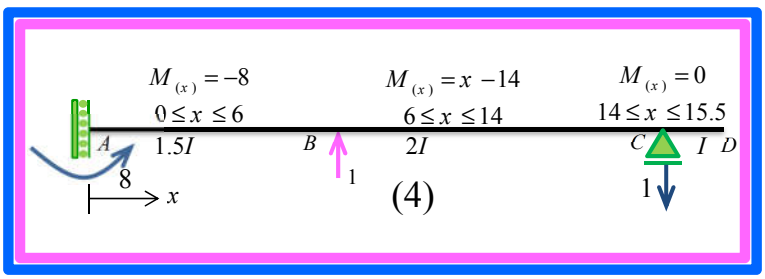


$\delta_{V_B V_B}$: جابجایی قائم گره B در اثر بار قائم واحد در گره B

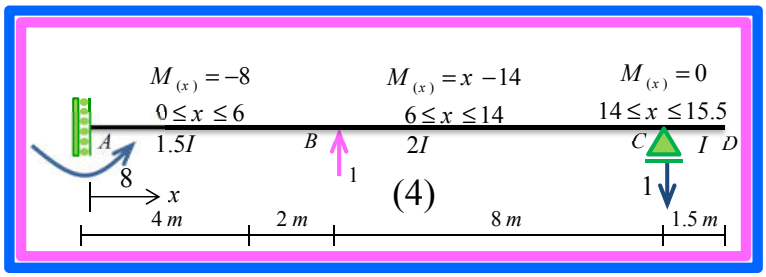
مجازی حقیقی

$$\Rightarrow \boxed{M_4} \;\&\; \boxed{\bar{m}_4}$$





پاسخ مثال ۲-



$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\delta_{V_B V_B}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_4 M_4}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

$$\delta_{V_B V_B}=\int_0^{6}\frac{(-8)(-8)}{1.5EI}\cdot d_x+\int_6^{14}\frac{(x-14)(x-14)}{2EI}\cdot d_x+\int_{14}^{15.5}\frac{(0)(0)}{EI}\cdot d_x$$

$$=\frac{64x}{1.5EI}\Big]_0^6+\frac{x^3-42x^2+588x}{6EI}\Big]_6^{14}$$

$$=\frac{256}{EI}+\frac{256}{3EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{V_B V_B}=\frac{1024}{3EI}}$$

پاسخ مثال ۲-

$$(2.3) \Rightarrow \begin{Bmatrix}A_y\\B_y\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\delta_{V_A V_A} & \delta_{V_A V_B}\\ \delta_{V_B V_A} & \delta_{V_B V_B}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta_{V_A 0}+\Delta_{V_A S}\\ \Delta_{V_B 0}+\Delta_{V_B S}\end{Bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}\frac{1744}{3EI} & \frac{1312}{3EI}\\ \frac{1312}{3EI} & \frac{1024}{3EI}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}-\frac{32778}{3EI}+0.05\\ -\frac{25384}{3EI}+0.02\end{Bmatrix}$$

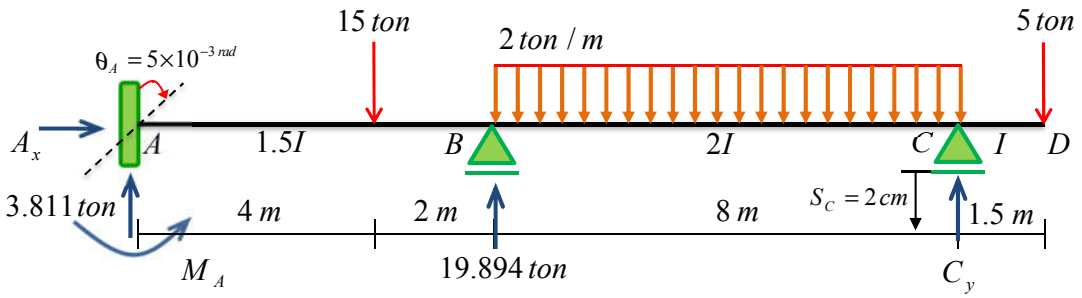
$$=-\left(\frac{1}{EI}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1744}{3} & \frac{1312}{3}\\ \frac{1312}{3} & \frac{1024}{3}\end{bmatrix}^{-1}\left(\frac{1}{EI}\right)\begin{Bmatrix}-\frac{32778}{3}+0.05EI\\ -\frac{25384}{3}+0.02EI\end{Bmatrix}$$

$$\overset{EI=200\,ton.m^2}{\Rightarrow} \begin{Bmatrix}A_y\\B_y\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{1744}{3} & \frac{1312}{3}\\ \frac{1312}{3} & \frac{1024}{3}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}-\frac{32778}{3}+0.05(200)\\ -\frac{25384}{3}+0.02(200)\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix}A_y\\B_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3.8115\\19.8938\end{Bmatrix}(ton)}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

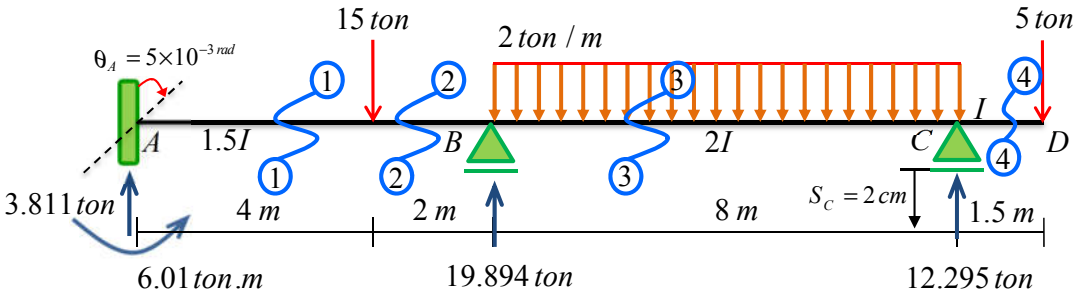
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3.811 - 15 + 19{,}894 - (2)(8) + C_y - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{C_y = 12.295\,(ton)} \quad (2.7)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 15\times 4 + 19.894\times 6 - (2)(8)\times\left(6 + \frac{8}{2}\right) - 5\times 15.5 + C_y \times 14 = 0$$

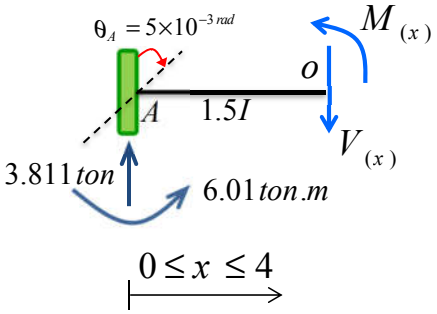
$$\overset{(2.7)}{\Rightarrow} \boxed{M_A = 6.01\,(ton.m)}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

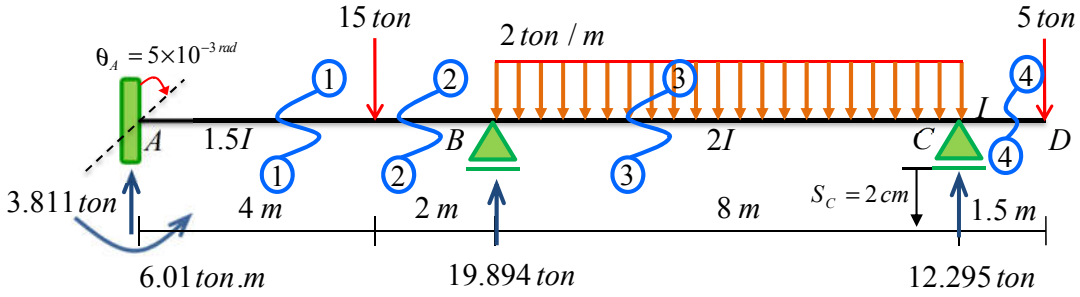


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 6.01 - 3.811\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 3.811x - 6.01}$$

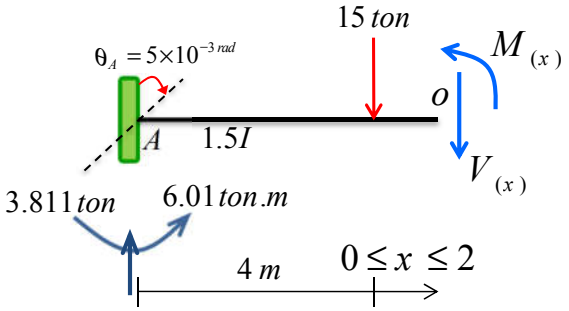
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3.811 - V_{(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 3.811}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

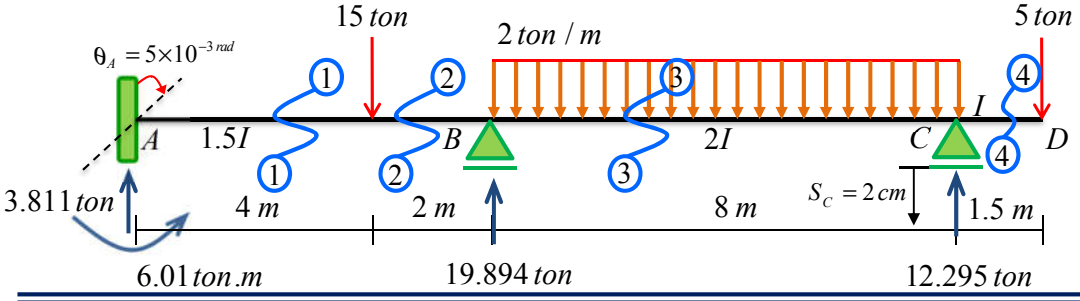


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 6.01 - 3.811\times(4+x) + 15\times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -11.189x + 9.234}$$

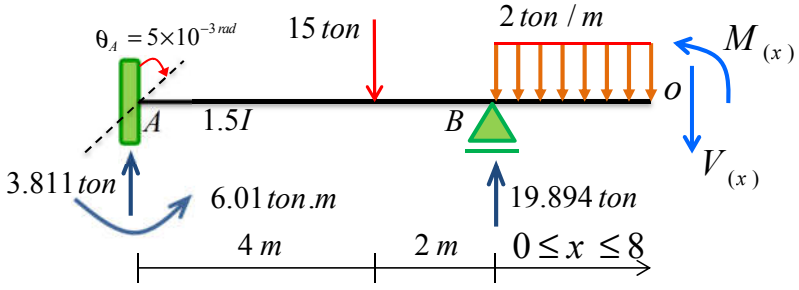
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3.811 - 15 - V_{(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -11.189}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 6.01 - 3.811\times(6+x) + 15\times(2+x) - 19.894\times x + (2\times x)\times\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -x^2 + 8.705x - 13.144}$$

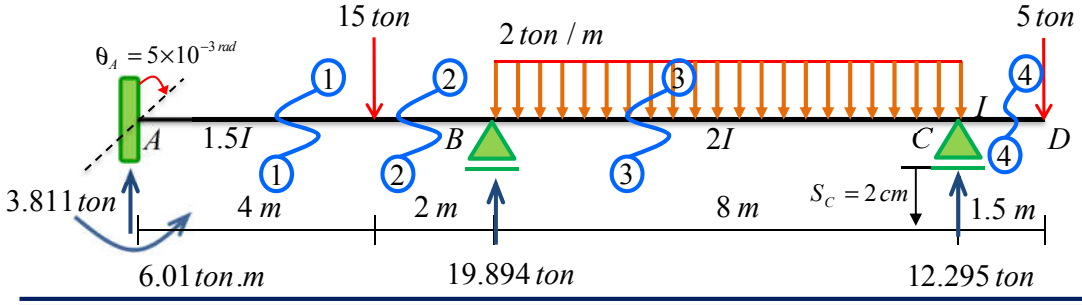
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3.811 - 15 + 19.894 - 2\times x - V_{(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -2x + 8.705}$$

$$@V_{(x)} = 0 \Rightarrow -2x + 8.705 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4.353\,m}$$

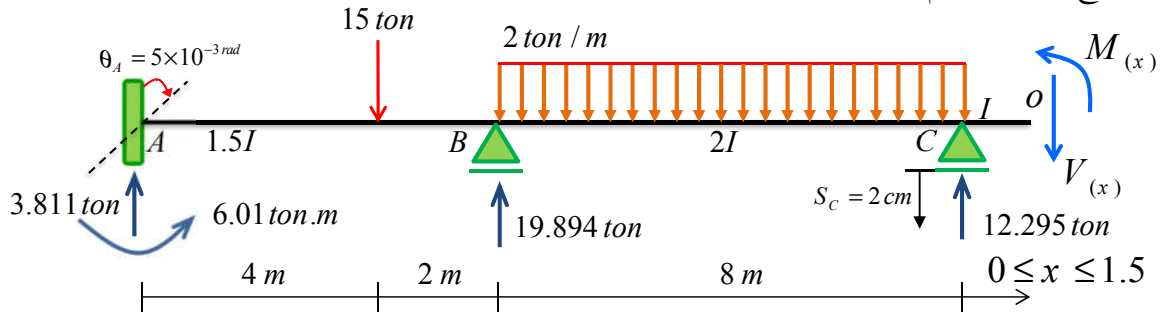
$$@x = 4.353\,m \Rightarrow M_{(4.353)} = -4.353^2 + 8.705(4.353) - 13.144 \Rightarrow \boxed{M_{(4.353)} = 5.8\,ton.m}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۴-۴ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

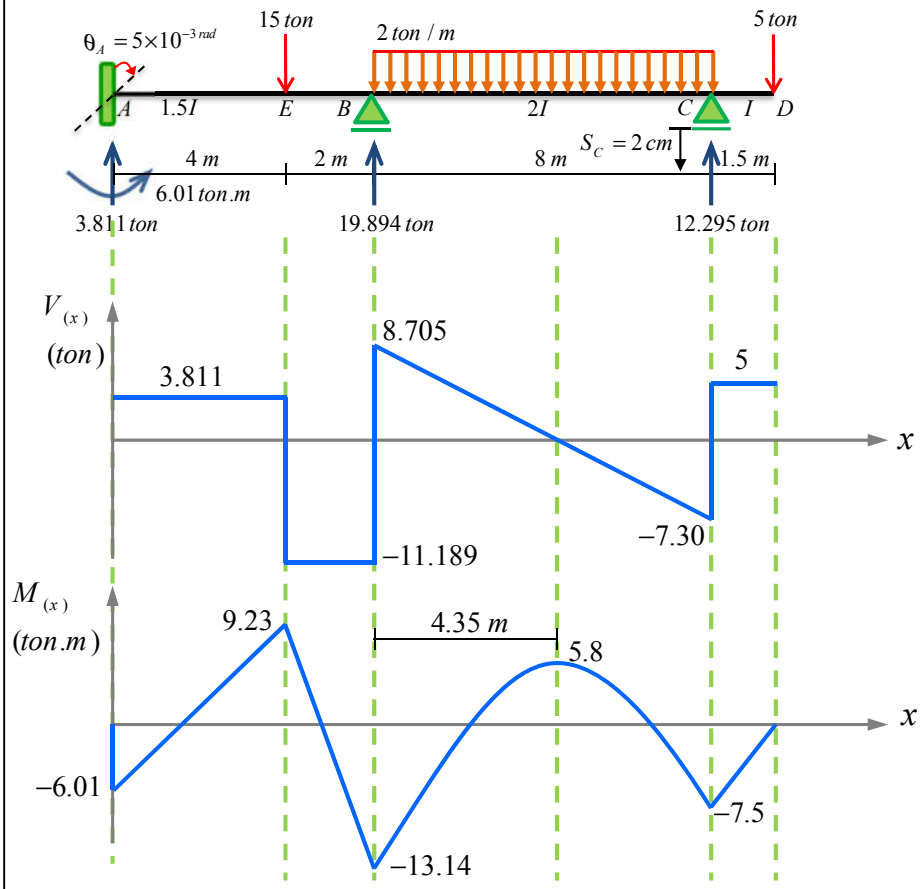
$$M_{(x)} + 6.01 - 3.811\times(14+x) + 15\times(10+x) - 19.894\times(8+x) + (2\times 8)\times\left(\frac{8}{2}+x\right) - 12.295\times x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -7.5 + 5x}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.811 - 15 + 19.894 - 2\times 8 + 12.295 - V_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = 5}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۲-

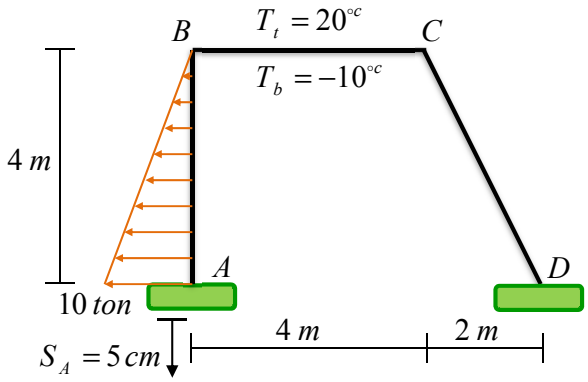


AE :	$0 \le x \le 4$	$V_{(x)} = 3.811$
EB :	$0 \le x \le 2$	$V_{(x)} = -11.189$
BC :	$0 \le x \le 8$	$V_{(x)} = -2x + 8.705$
CD :	$0 \le x \le 1.5$	$V_{(x)} = 5$

AE :	$0 \le x \le 4$	$M_{(x)} = 3.811x - 6.01$
EB :	$0 \le x \le 2$	$M_{(x)} = -11.189x + 9.234$
BC :	$0 \le x \le 8$	$M_{(x)} = -x^2 + 8.705x - 13.144$
CD :	$0 \le x \le 1.5$	$M_{(x)} = -7.5 + 5x$

ETABS File Name: **06-Example-02.EDB**

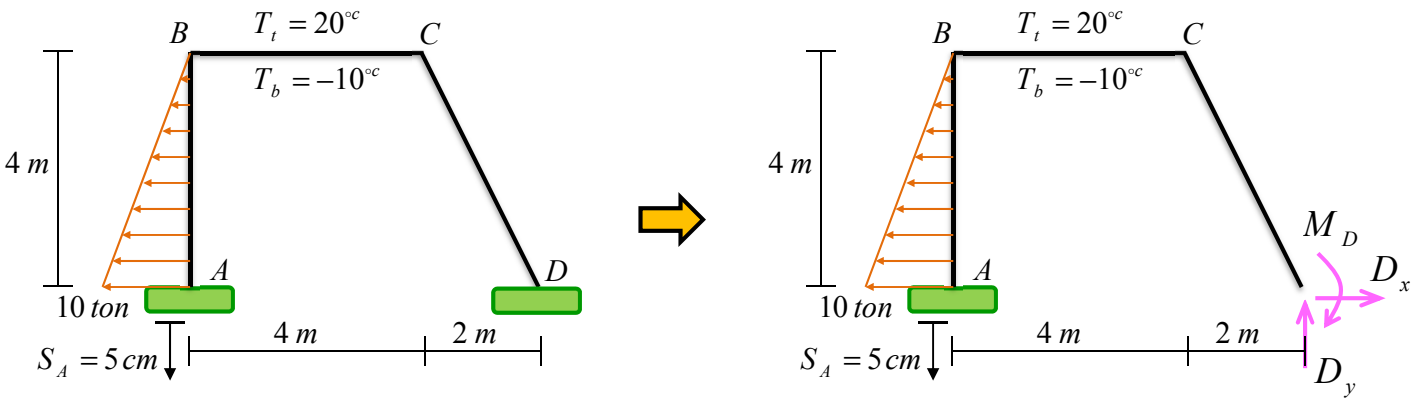
مثال ۳- نمودار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی در قاب نشان داده شده را رسم نمایید. تکیه‌گاه A به اندازه ۵ سانتیمتر در راستای قائم نشست دارد. تیر BC نیز تحت اثر تغییرات حرارتی می باشد.



$$EI = 200\,ton.m^2$$
$$h_{BC} = 20\,cm$$
$$\alpha = 1\times10^{-5}\,{}^{\circ}c^{-1}$$

پاسخ مثال ۳-

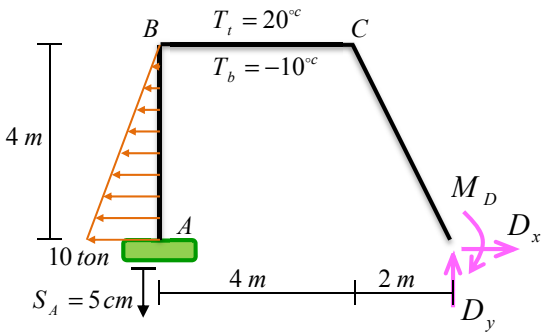
سازه مورد نظر سه درجه نامعینی دارد. با در نظر گرفتن سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مجهول D به عنوان نیروی خارجی اعمال شده به سازه، سازه اولیه به صورت زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر سه نیروی خارجی مجهول تبدیل می‌شود:



سازه اولیه (پایدار و نامعین)

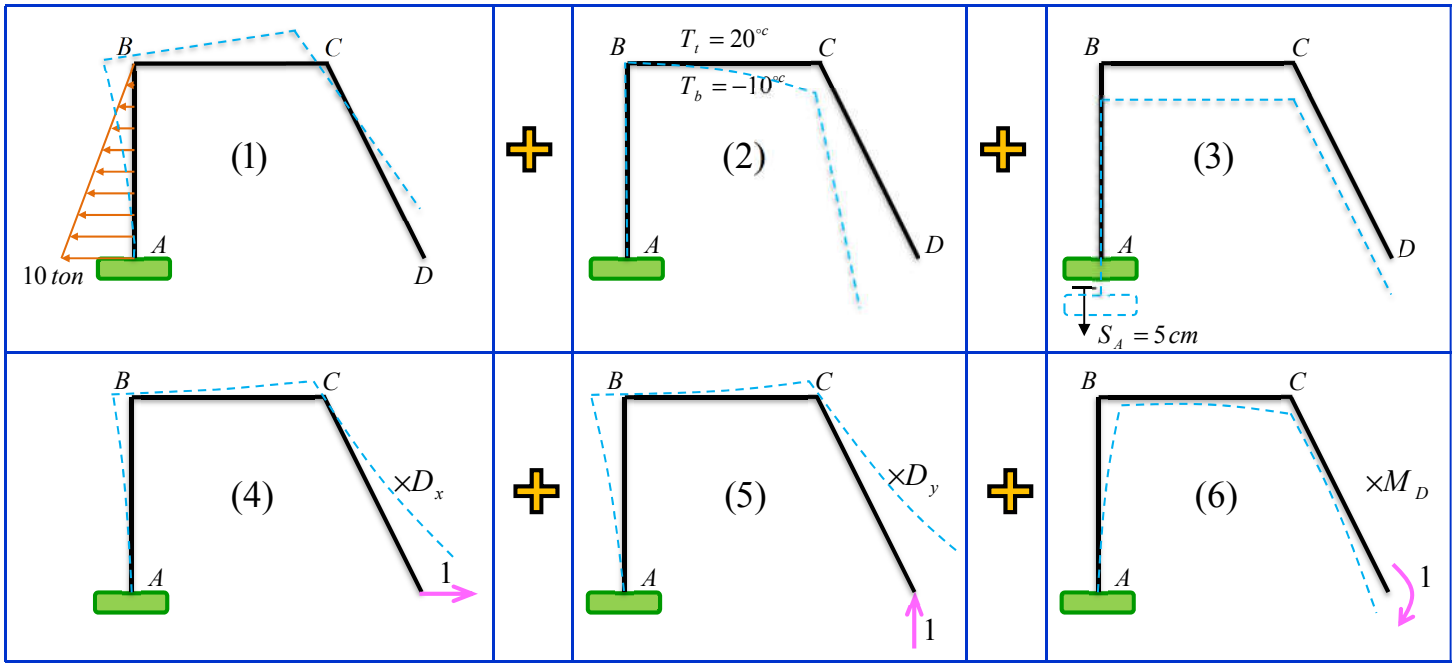
سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

روش نیرو (Force Method)



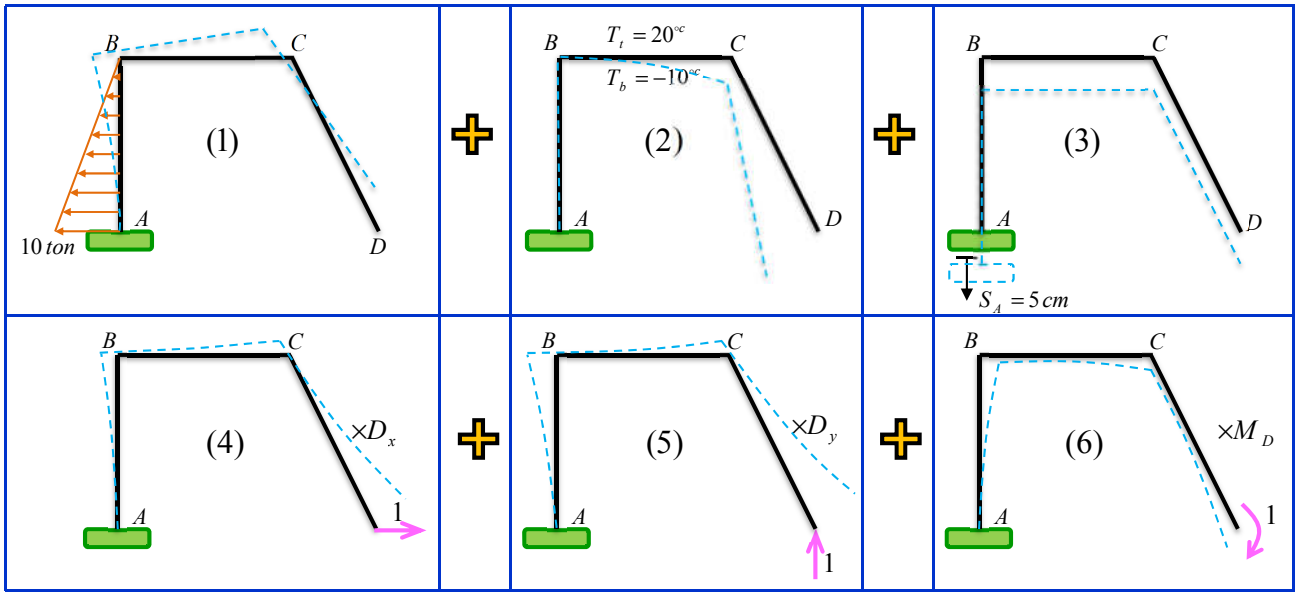
پاسخ مثال ۳-

اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در شش حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:



روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



براساس اصل سازگاری تغییرشکل‌ها، باید تغییر مکان قائم، تغییرمکان افقی و میزان دوران در تکیه‌گاه گیردار D برابر با صفر باشد:

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

فرم ماتریسی رابطه (3.1) به صورت زیر است:

$$(3.1) \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_{V_D H_D} & \delta_{V_D V_D} & \delta_{V_D M_D} \\ \delta_{H_D H_D} & \delta_{H_D V_D} & \delta_{H_D M_D} \\ \theta_{D H_D} & \theta_{D V_D} & \theta_{D M_D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ M_D \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \Delta_{V_D 0} + \Delta_{V_D T} + \Delta_{V_D S} \\ \Delta_{H_D 0} + \Delta_{H_D T} + \Delta_{H_D S} \\ \Theta_{D 0} + \Theta_{D T} + \Theta_{D S} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

با حل رابطه (3.2) واکنش‌های تکیه‌گاهی مجهول به دست می‌آیند:

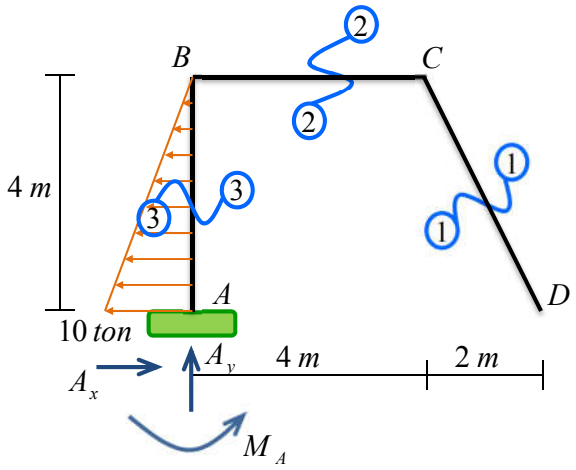
$$(3.2) \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ M_D \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{V_D H_D} & \delta_{V_D V_D} & \delta_{V_D M_D} \\ \delta_{H_D H_D} & \delta_{H_D V_D} & \delta_{H_D M_D} \\ \theta_{D H_D} & \theta_{D V_D} & \theta_{D M_D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta_{V_D 0} + \Delta_{V_D T} + \Delta_{V_D S} \\ \Delta_{H_D 0} + \Delta_{H_D T} + \Delta_{H_D S} \\ \Theta_{D 0} + \Theta_{D T} + \Theta_{D S} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

همانطور که در رابطه (3.3) نمایان است باید ۱۸ پارامتر تغییرشکلی محاسبه گردد. در این‌جا پارامترهای تغییرشکل با استفاده از روش کار مجازی محاسبه خواهند شد. برای این منظور در ابتدا باید هر یک از شش سازه را به طور مجزا آنالیز نماییم. اما از آن‌جایی که در سازه‌های شماره ۲ و ۳ بار خارجی نداریم بنابراین نیازی به آنالیز این دو سازه نمی‌باشد.

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۱):



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + \frac{1}{2}(10)(4)\times\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -26.67}$$

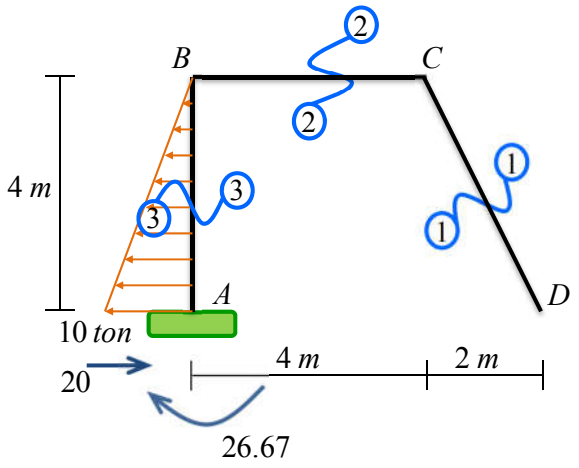
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - \frac{1}{2}(10)(4) = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 20}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 0}$$

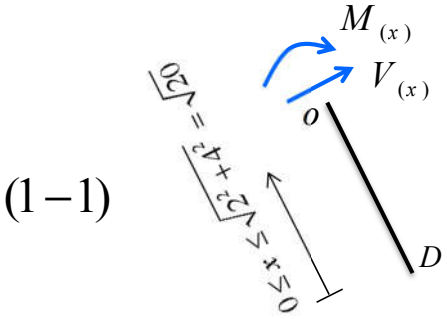
روش نیرو (Force Method)

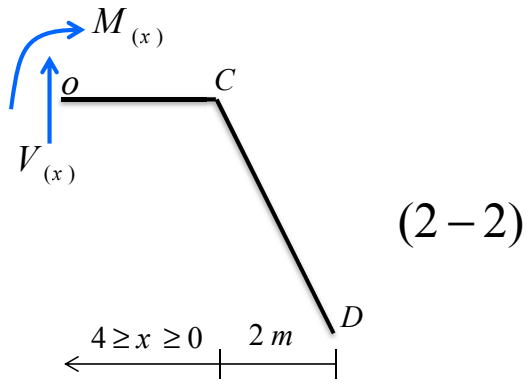
پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۱):



با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۱-۱ و ۲-۲ خواهیم داشت:



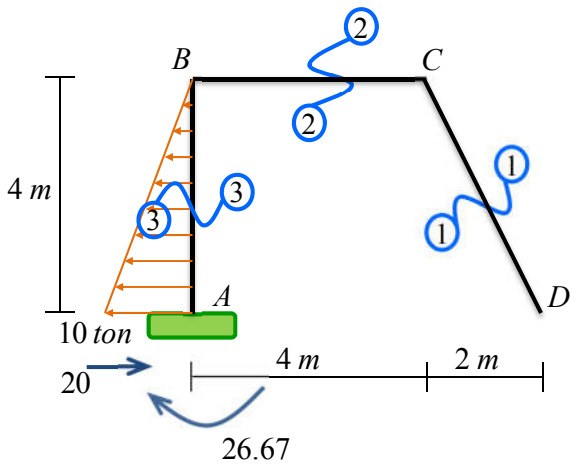


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0}$$

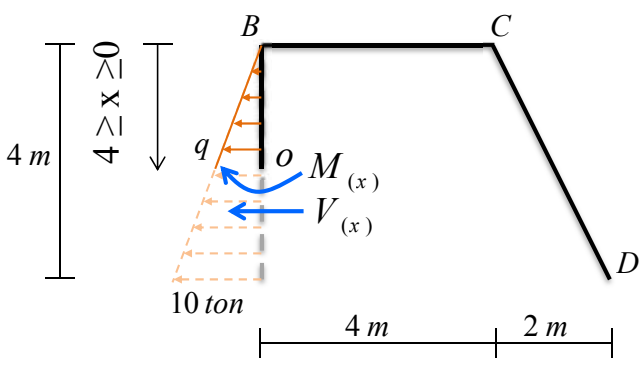
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۱):



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:



قضیه تالس : $\Rightarrow \quad \frac{q}{10} = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 2.5x}$

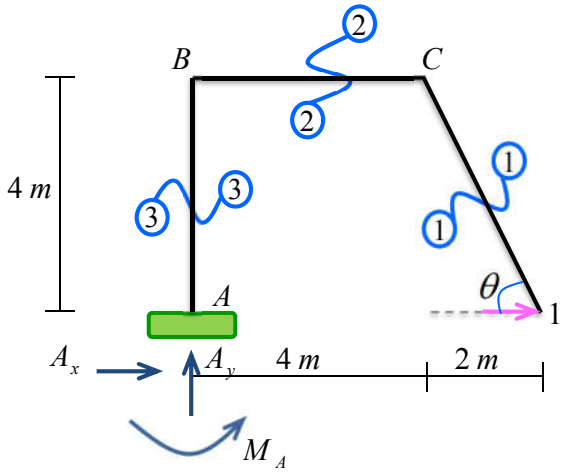
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{(x)} + \frac{1}{2}(2.5x)(x) \times \left(\frac{x}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = \frac{2.5}{6} x^3}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۴):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 0}$$

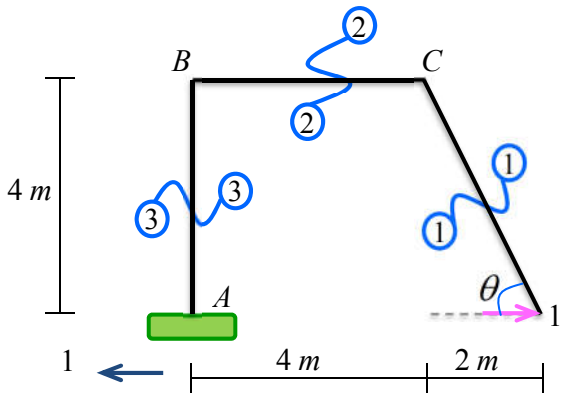
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = -1}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 0}$$

روش نیرو (Force Method)

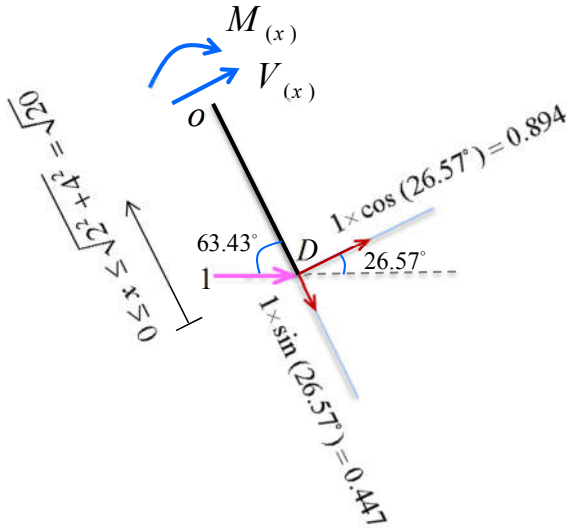
پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۴):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۱-۱ خواهیم داشت:



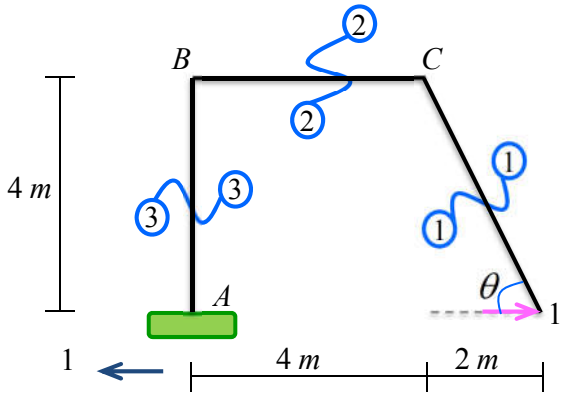
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 0.894x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0.894x}$$

روش نیرو (Force Method)

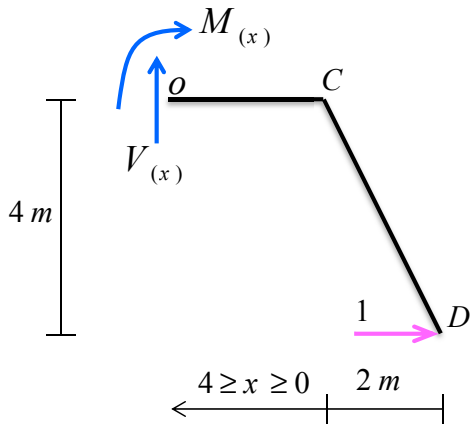
پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۴):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۲-۲ خواهیم داشت:



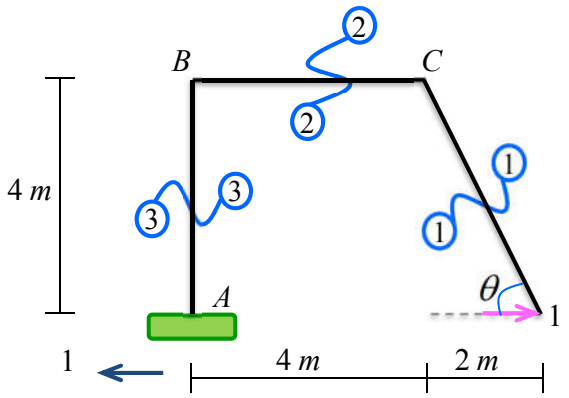
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 1\times 4 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 4}$$

روش نیرو (Force Method)

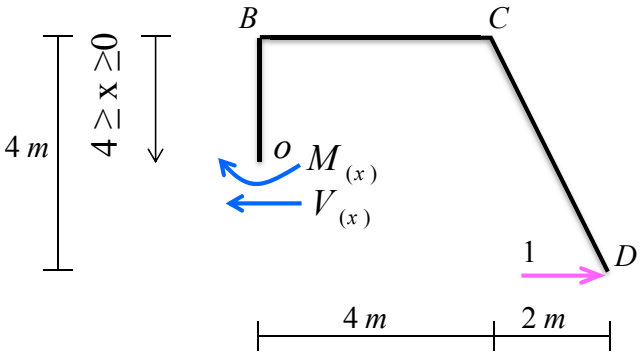
پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۴):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:



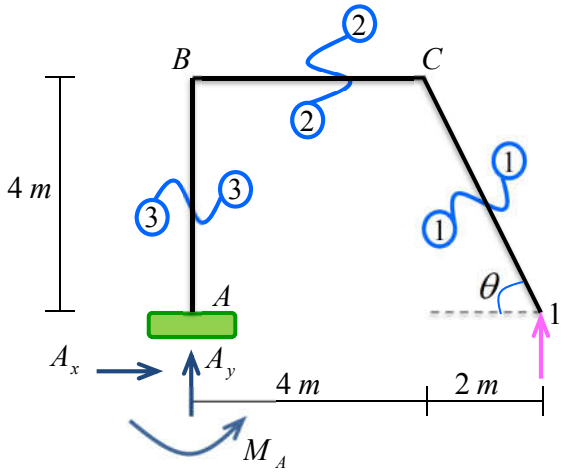
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 1\times(4-x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 4-x}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1\times 6 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -6}$$

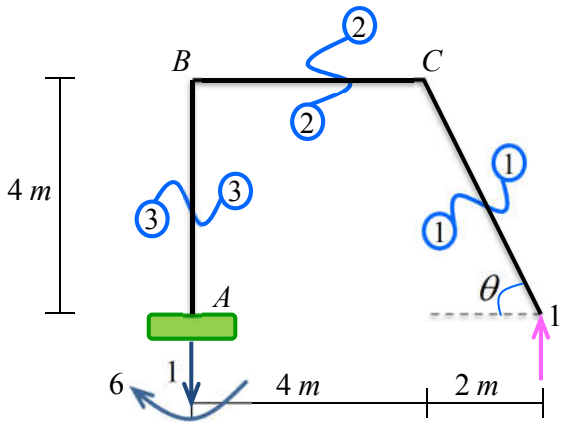
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -1}$$

روش نیرو (Force Method)

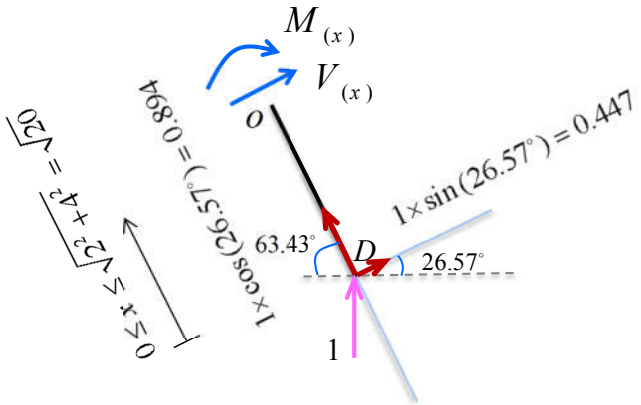
پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۱-۱ خواهیم داشت:



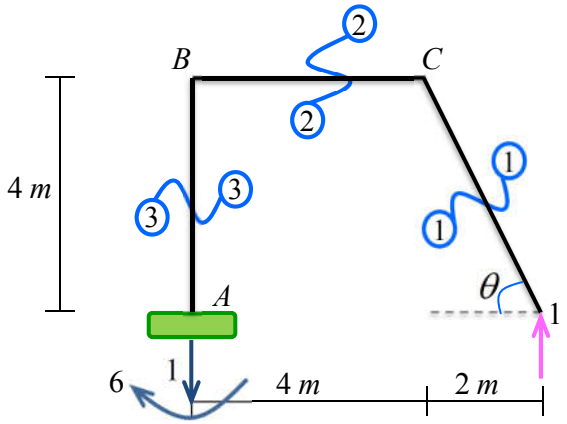
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 0.447x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0.447x}$$

روش نیرو (Force Method)

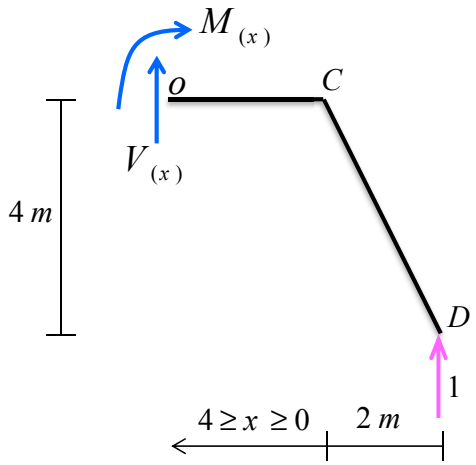
پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۲-۲ خواهیم داشت:



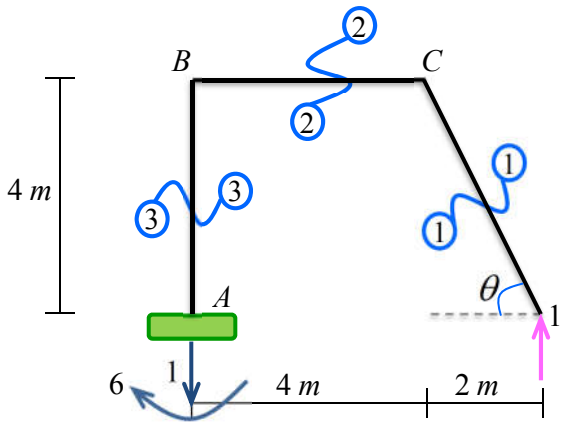
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 1\times(2+x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = x + 2}$$

روش نیرو (Force Method)

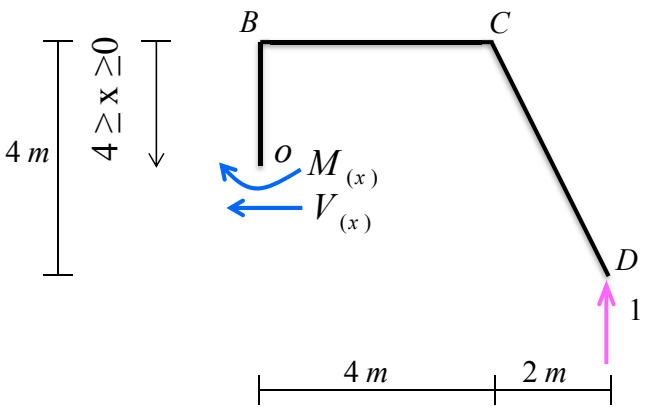
پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^\circ}$$

با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:



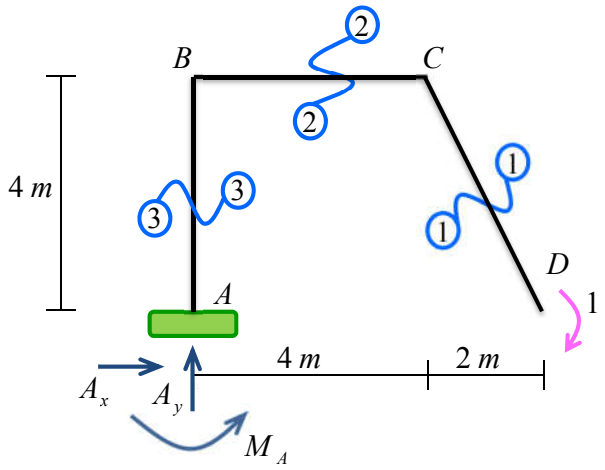
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 1\times 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 6}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۶):



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 1}$$

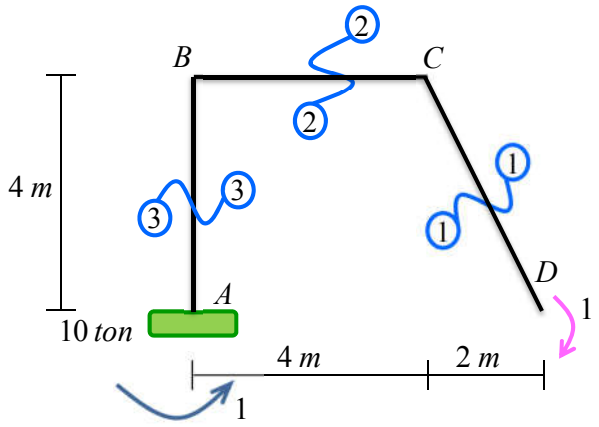
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 0}$$

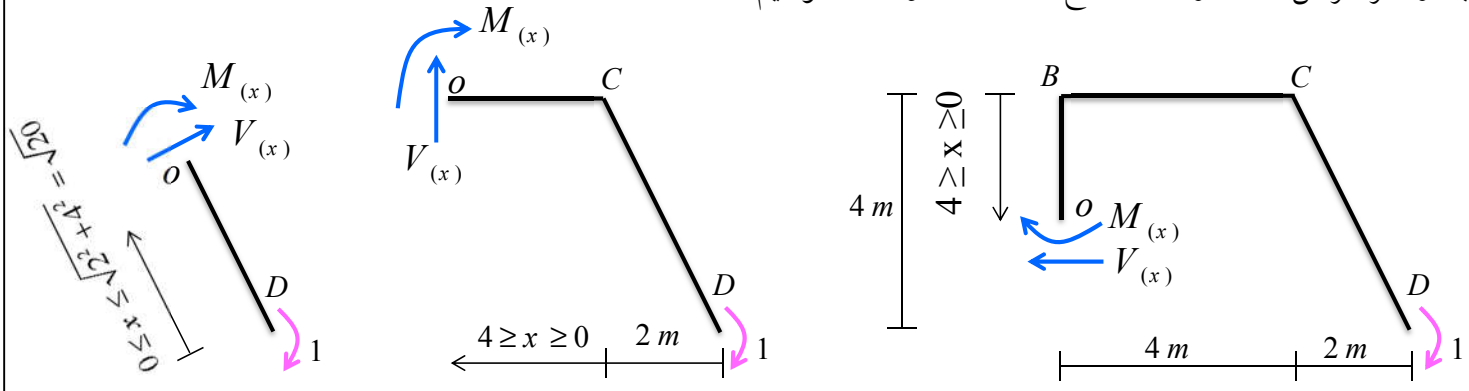
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

آنالیز سازه شماره (۶):



با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۱-۱ ، ۲-۲ و ۳-۳ خواهیم داشت:

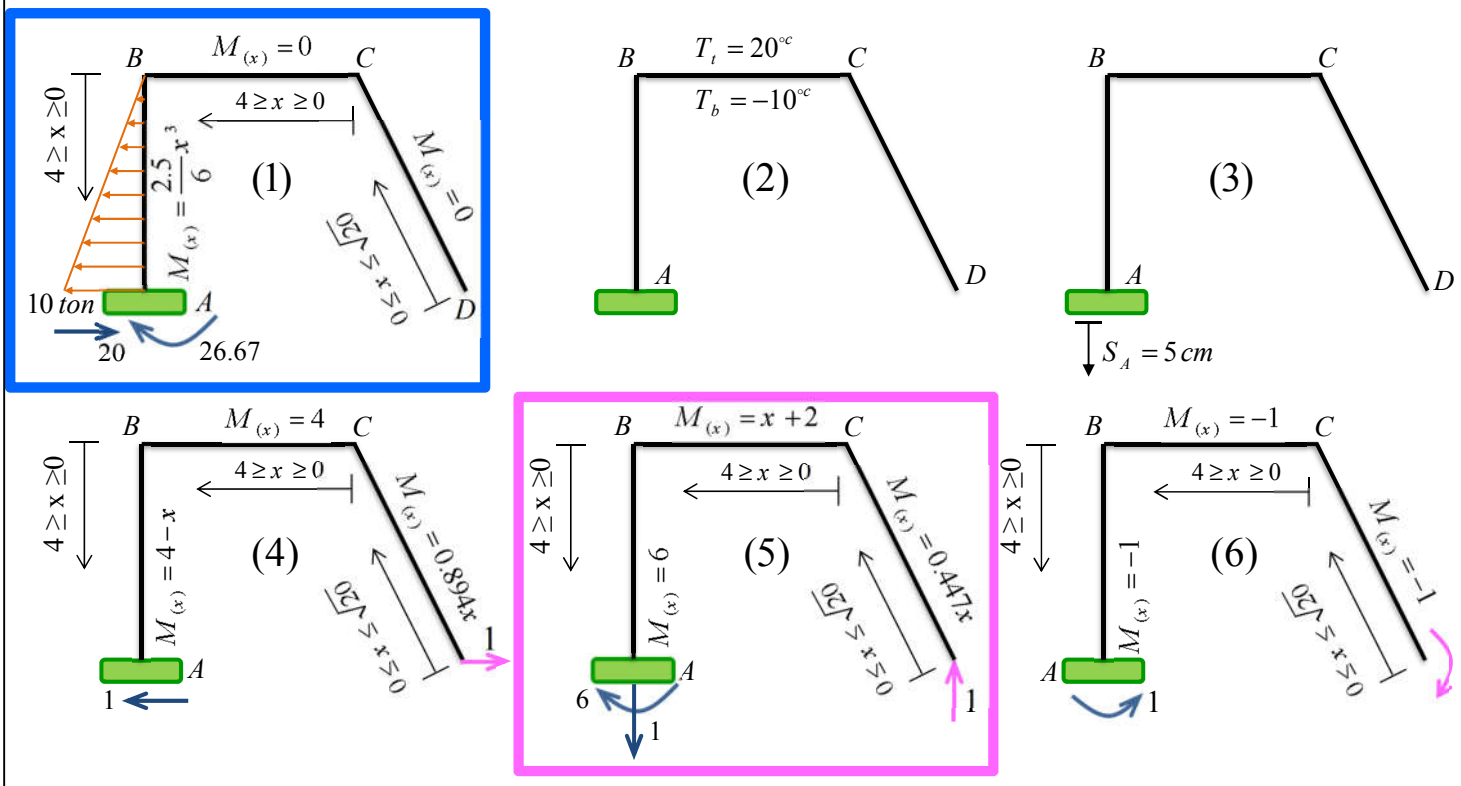


(1-1) (2-2) (3-3)

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1}$$

روش نیرو (Force Method)

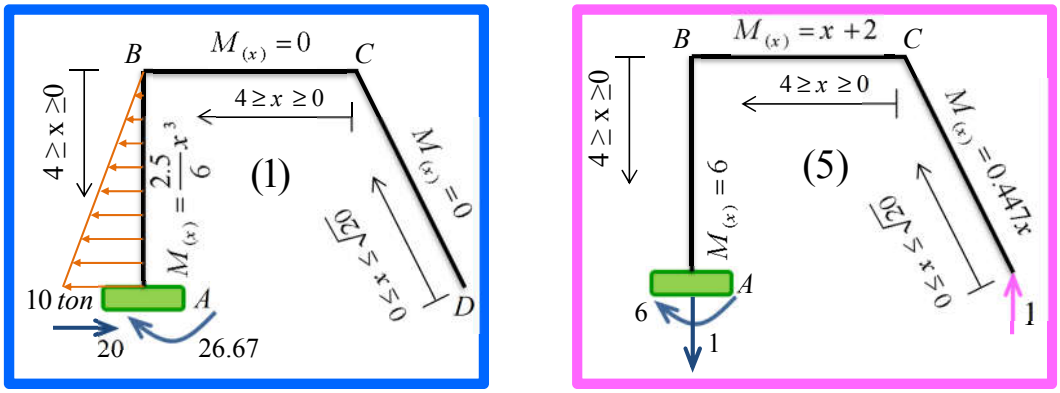
پاسخ مثال ۳-



جابجایی قائم گره D در اثر بار خارجی : $\Delta_{V_D\,0}$

روش نیرو (Force Method)

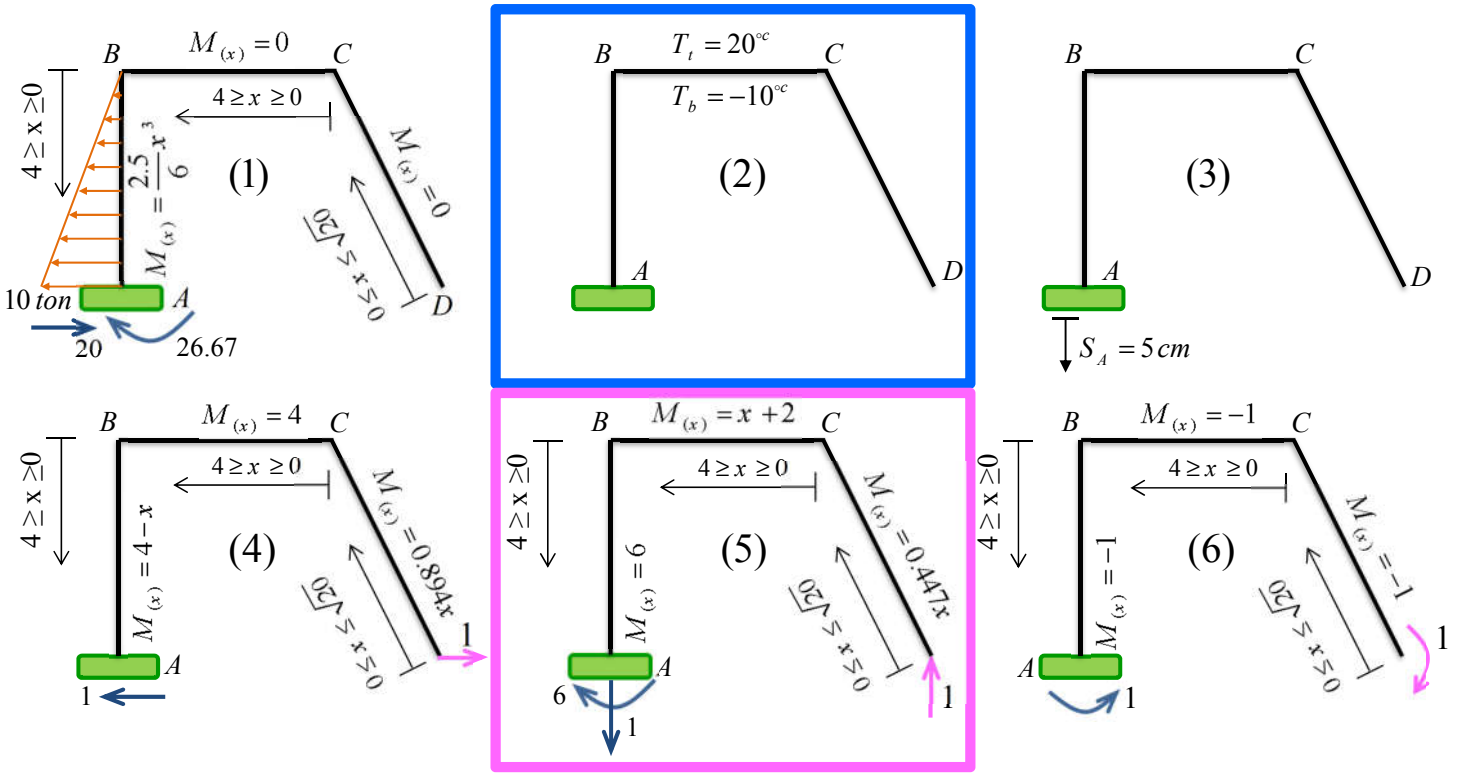
پاسخ مثال ۳-



$$= \frac{2.5}{4EI}x^4\Big]_0^4 \Rightarrow \boxed{\Delta_{V_D\,0}=\frac{160}{EI}}$$

روش نیرو (Force Method)

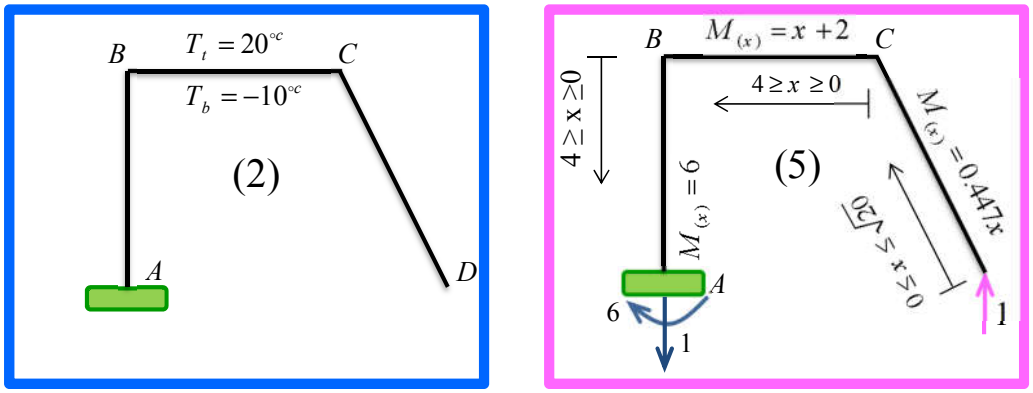
پاسخ مثال ۳-



جابجایی قائم گره D در اثر تغییرات حرارت در تیر BC : $\Delta_{V_D T}$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

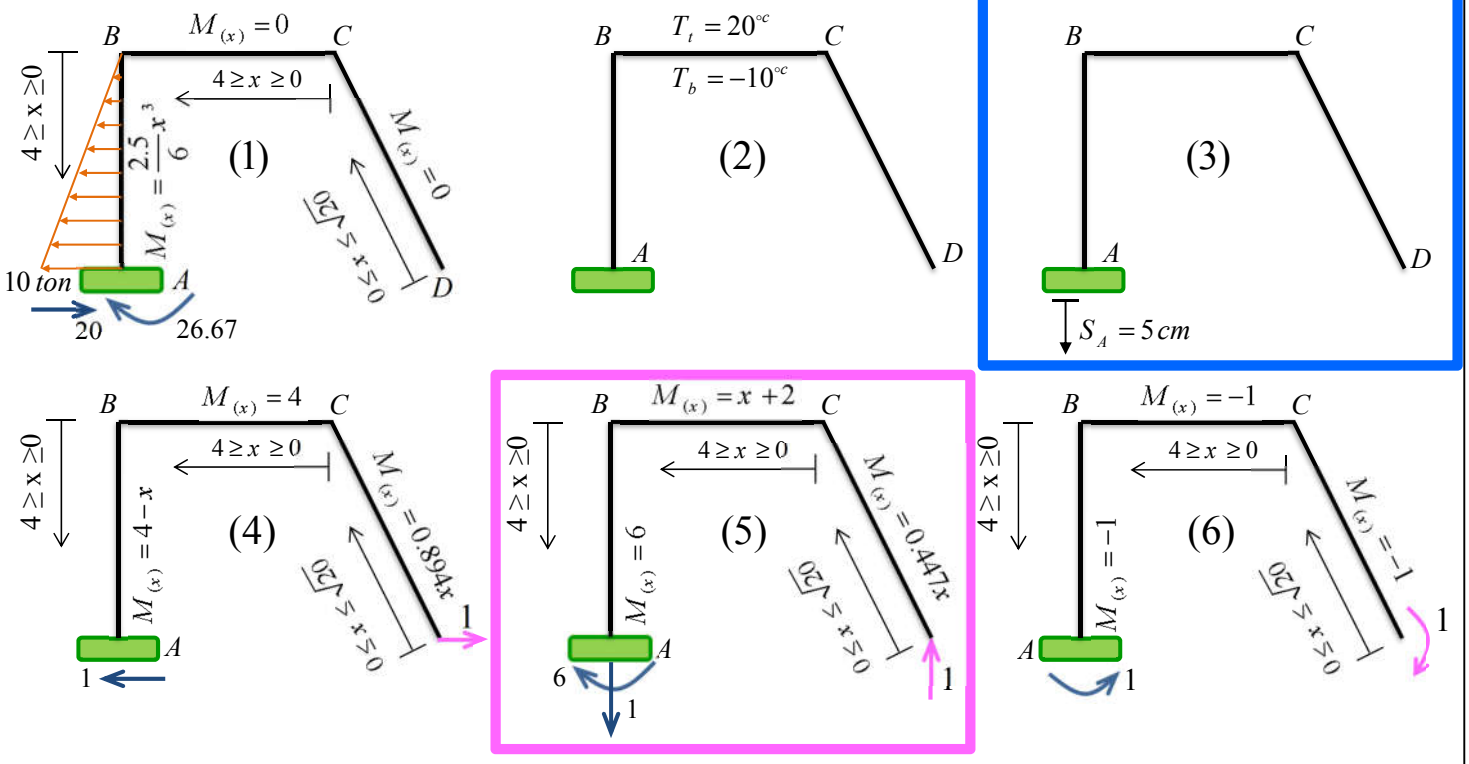


$$=-1.5\times10^{-3}\int_0^4(x+2)\cdot d_x$$

$$=-1.5\times10^{-3}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big]_0^4 \Rightarrow \boxed{\Delta_{V_D T}=-0.024\,m}$$

روش نیرو (Force Method)

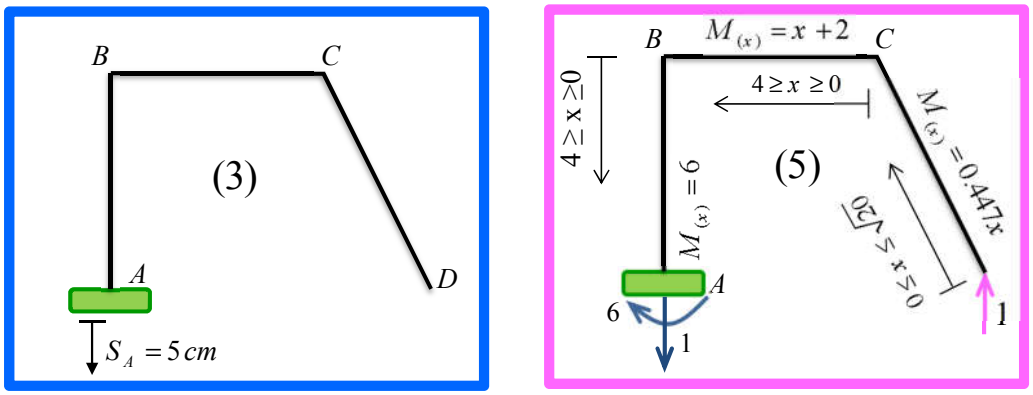
پاسخ مثال ۳-



جابجایی قائم گره D در اثر نشست قائم تکیه‌گاه A : $\Delta_{V_D\,S}$

روش نیرو (Force Method)

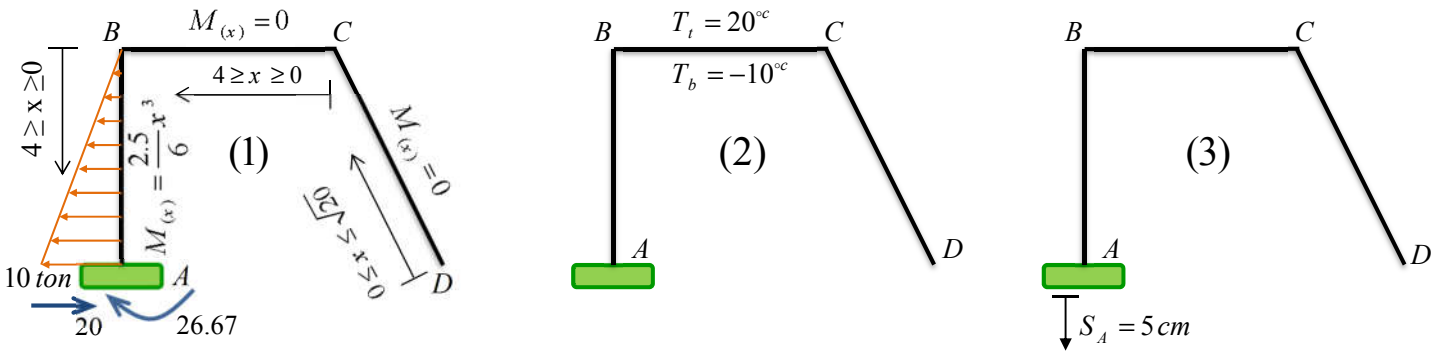
پاسخ مثال ۳-

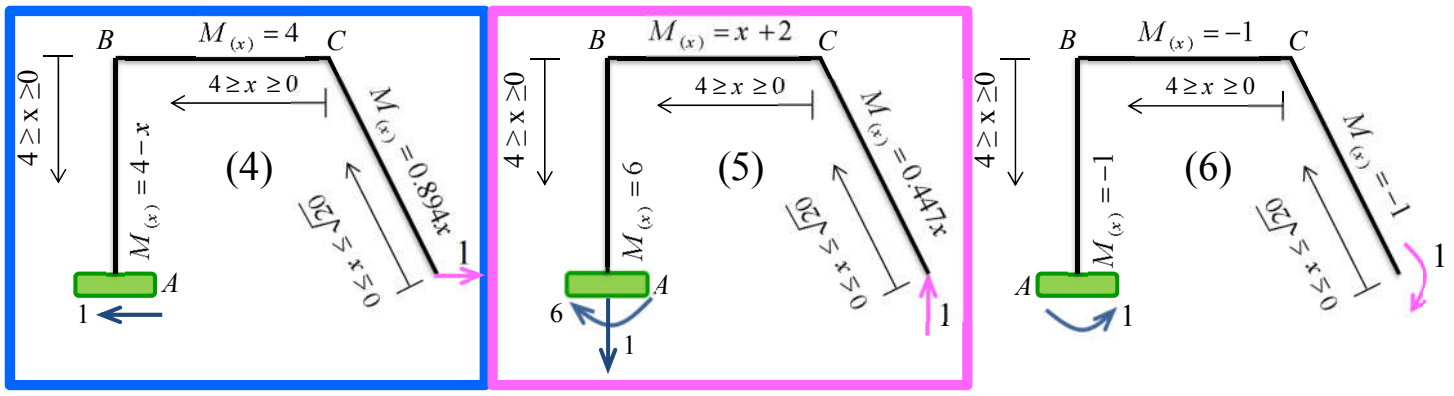


$$\Delta_{V_D\,S}=-0.05\ m$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

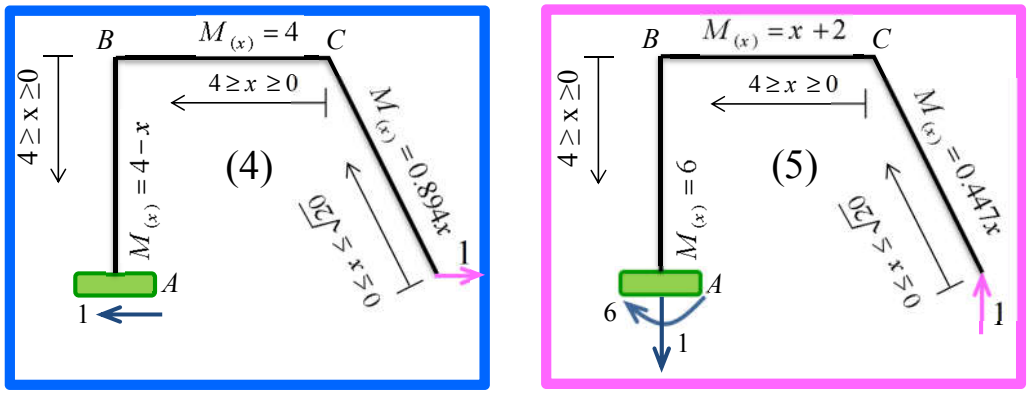




$\delta_{V_D H_D}$: جابجایی قائم گره D در اثر بار افقی واحد در گره D $\Rightarrow$ حقیقی M_4 & مجازی $\bar{m}_5$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\delta_{V_D H_D}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_5 M_4}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

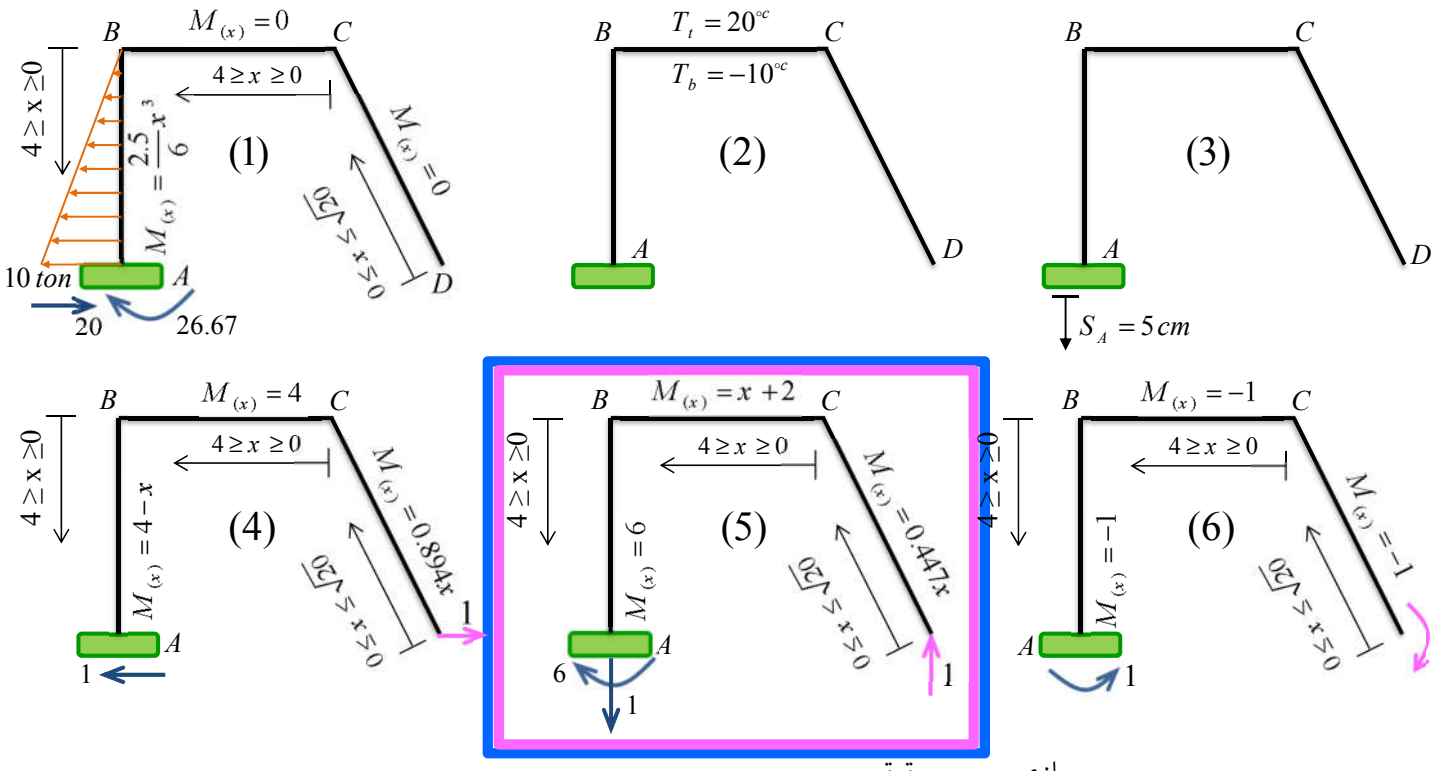
$$\delta_{V_D H_D}=\int_0^{\sqrt{20}}\frac{(0.447x)(0.894x)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(x+2)(4)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(6)(4-x)}{EI}\cdot d_x$$

$$=\frac{0.4x^3}{3EI}\Big]_0^{\sqrt{20}}+\frac{2x^2+8x}{EI}\Big]_0^{4}+\frac{24x-3x^2}{EI}\Big]_0^{4}$$

$$=\frac{11.914}{EI}+\frac{64}{EI}+\frac{48}{EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{V_D H_D}=\frac{123.914}{EI}}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

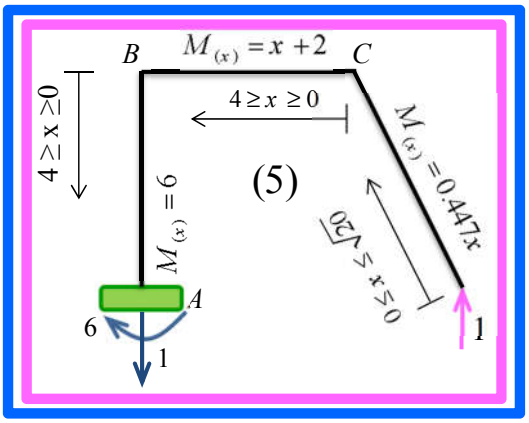


حقیقی مجازی

$\delta_{V_D V_D}$: جابجایی قائم گره D در اثر بار قائم واحد در گره D $\Rightarrow$ M_5 & $\bar{m}_5$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



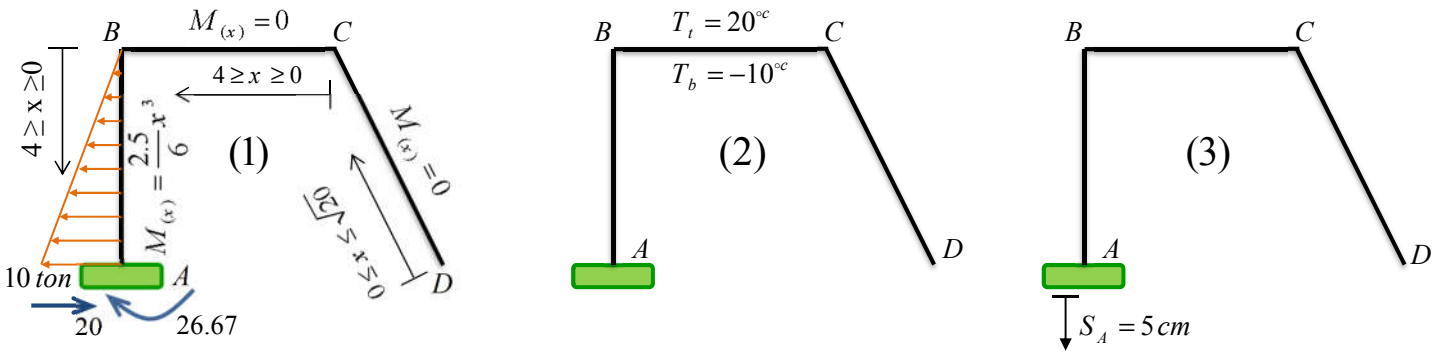
$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\delta_{V_D V_D}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_5 M_5}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

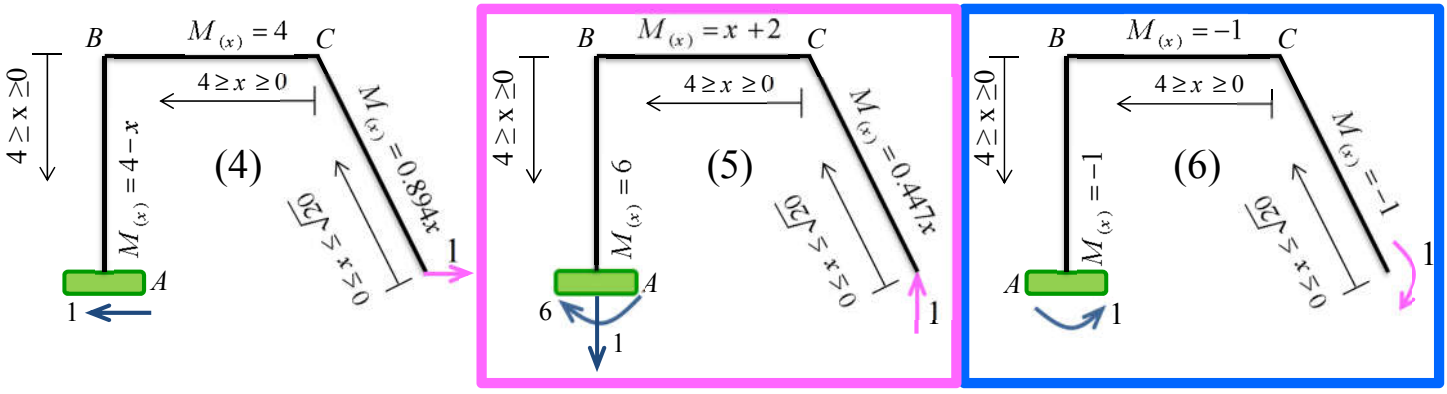
$$\delta_{V_D V_D}=\int_0^{\sqrt{20}}\frac{(0.447x)(0.447x)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(x+2)(x+2)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(6)(6)}{EI}\cdot d_x$$

$$=\frac{(0.447)^2x^3}{3EI}\Big]_0^{\sqrt{20}}+\frac{x^3+6x^2+12x}{3EI}\Big]_0^{4}+\frac{36x}{EI}\Big]_0^{4}$$

$$=\frac{5.957}{EI}+\frac{69.333}{EI}+\frac{144}{EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{V_D V_D}=\frac{219.29}{EI}}$$

پاسخ مثال ۳-

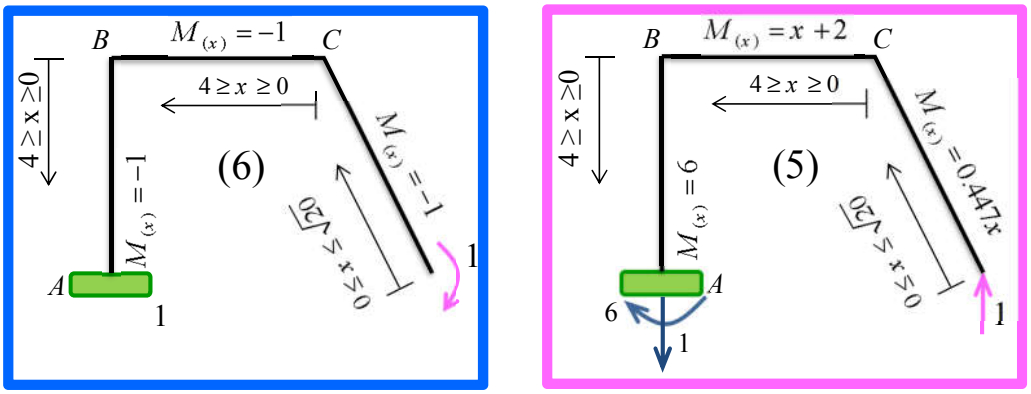




حقیقی مجازی

$\delta_{V_D M_D}$: جابجایی قائم گره D در اثر لنگر واحد در گره D $\Rightarrow$ M_6 & $\bar{m}_5$

پاسخ مثال ۳-



$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\delta_{V_D M_D}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_5 M_6}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

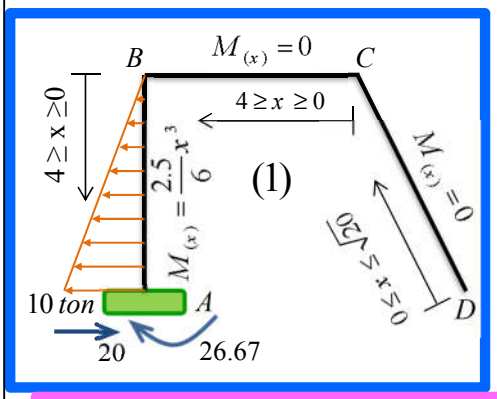
$$\delta_{V_D M_D}=\int_0^{\sqrt{20}}\frac{(0.447x)(-1)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(x+2)(-1)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(6)(-1)}{EI}\cdot d_x$$

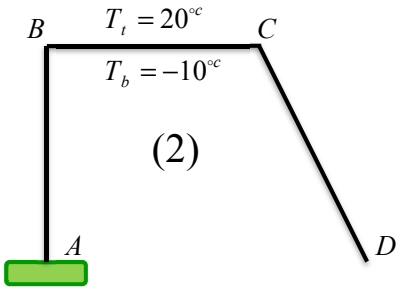
$$=-\frac{0.447x^2}{2EI}\Big]_0^{\sqrt{20}}-\frac{x^2+4x}{2EI}\Big]_0^{4}-\frac{6x}{EI}\Big]_0^{4}$$

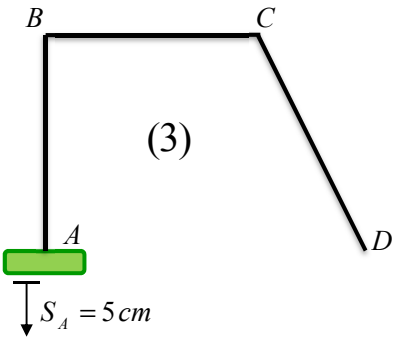
$$=-\frac{4.47}{EI}-\frac{16}{EI}-\frac{24}{EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{V_D M_D}=-\frac{44.47}{EI}}$$

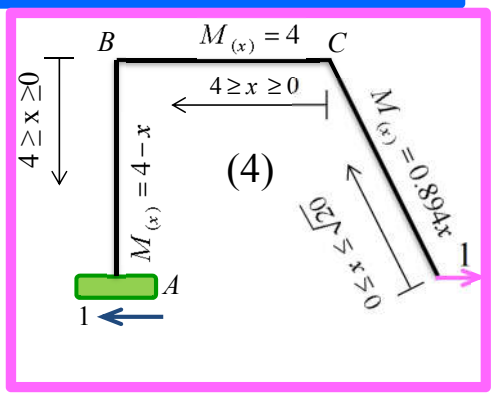
روش نیرو (Force Method)

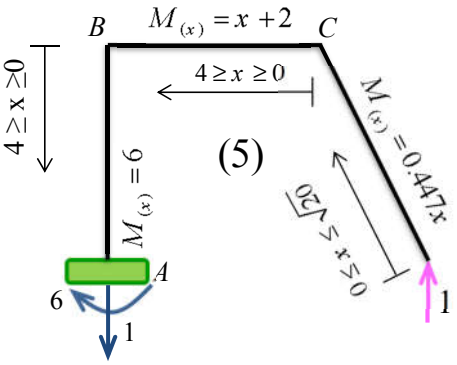
پاسخ مثال ۳-

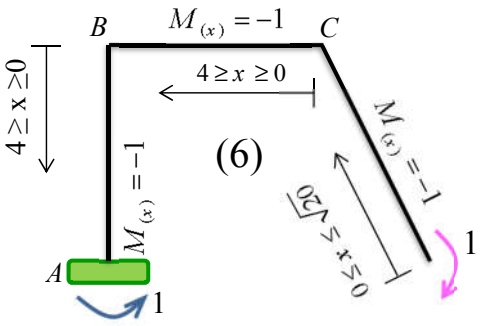








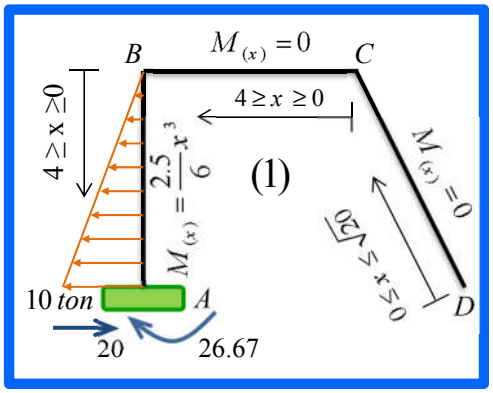


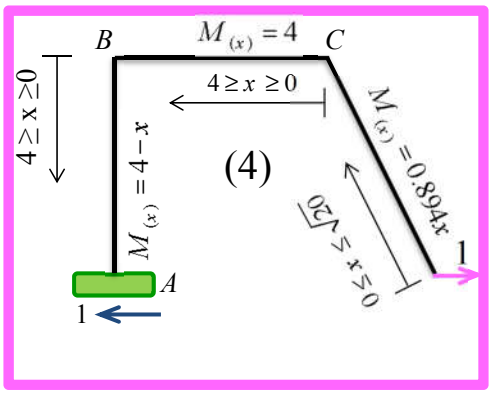


$\Delta_{H_D\,0}$: جابجایی افقی گره D در اثر بار خارجی $\Rightarrow$ حقیقی M_1 & مجازی $\bar{m}_4$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-





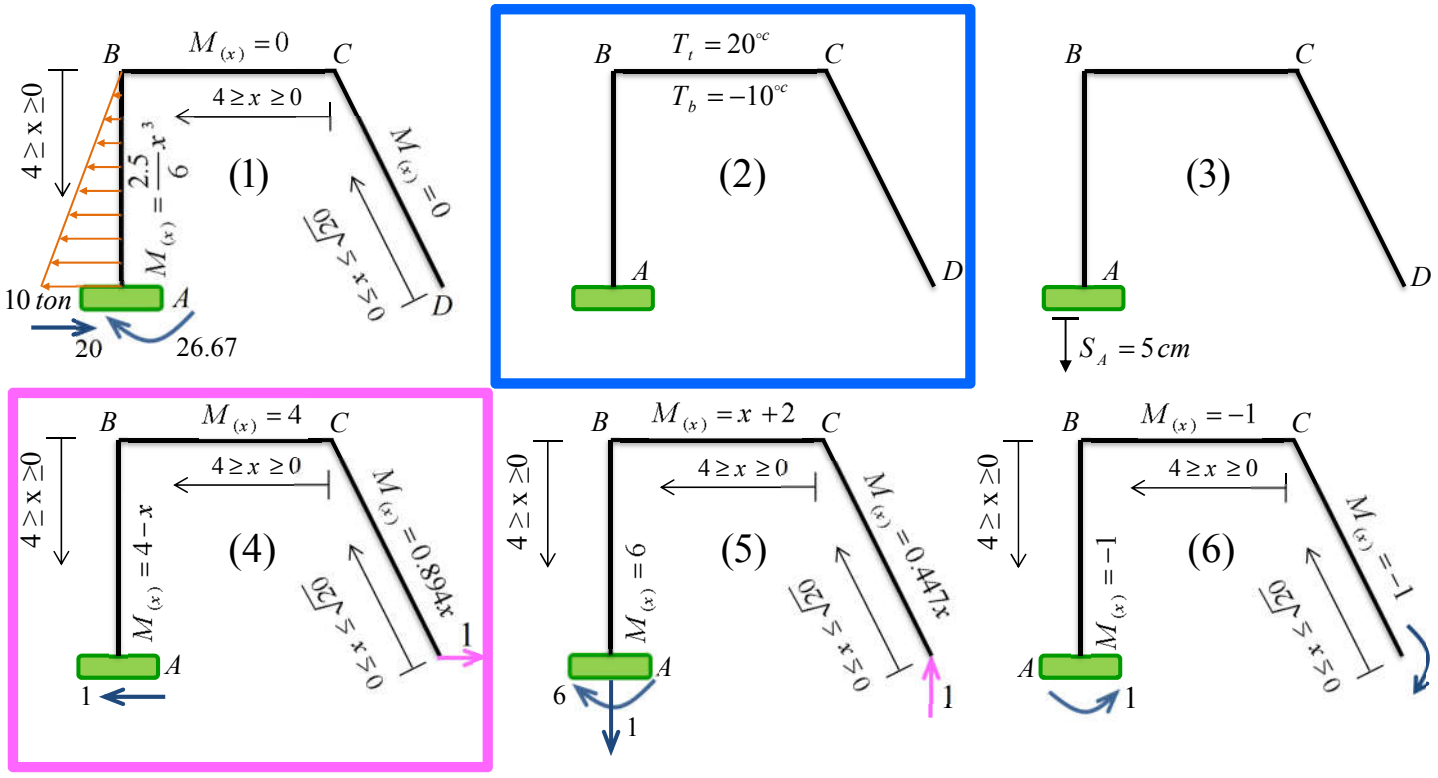
$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\Delta_{H_D\,0}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_4 M_1}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

$$\Delta_{H_D\,0}=\int_0^{\sqrt{20}}\frac{(0.894x)(0)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(4)(0)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(4-x)\left(\frac{2.5}{6}x^3\right)}{EI}\cdot d_x$$

$$=\frac{5x^4-x^5}{12EI}\Big]_0^4 \Rightarrow \boxed{\Delta_{H_D\,0}=\frac{21.333}{EI}}$$

روش نیرو (Force Method)

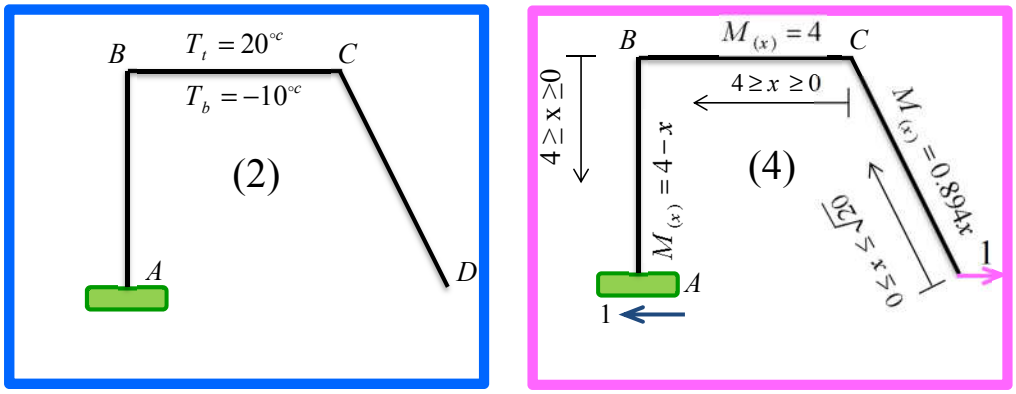
پاسخ مثال ۳-



جابجایی افقی گره D در اثر تغییرات حرارت در تیر BC : $\Delta_{H_D T} \Rightarrow$ حقیقی M_2 & مجازی $\bar{m}_4$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

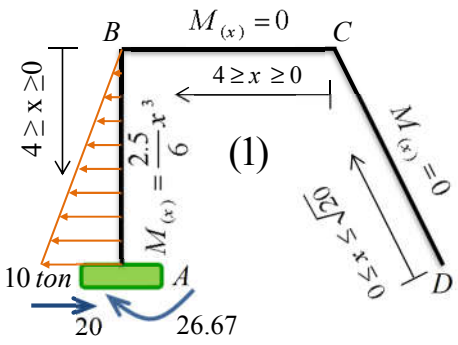


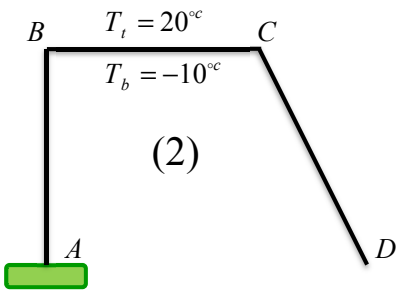
$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\Delta_{H_D T}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_4\alpha(T_b-T_t)}{h}\cdot d_x \Rightarrow$$

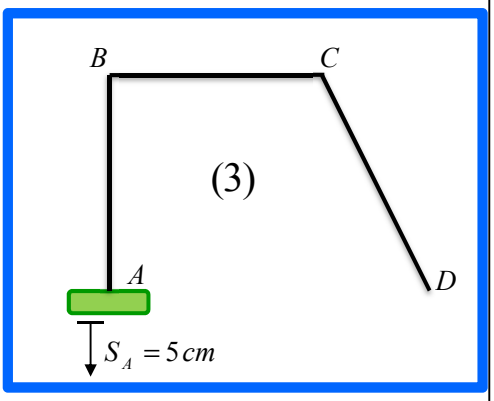
$$\Delta_{H_D T}=\int_0^4\frac{(4)(1\times10^{-5})(-10-20)}{20\times10^{-2}}\cdot d_x=\int_0^4-6\times10^{-3}\cdot d_x$$

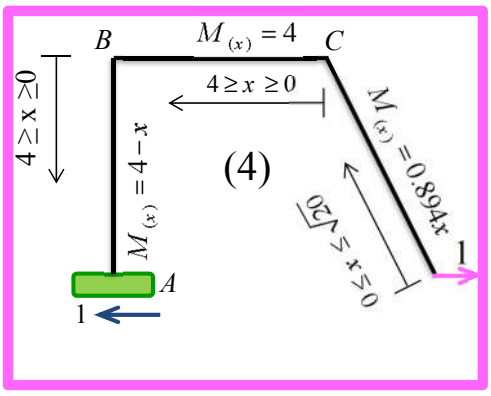
$$=-6\times10^{-3}x\Big]_0^4 \Rightarrow \boxed{\Delta_{H_D T}=-0.024\,m}$$

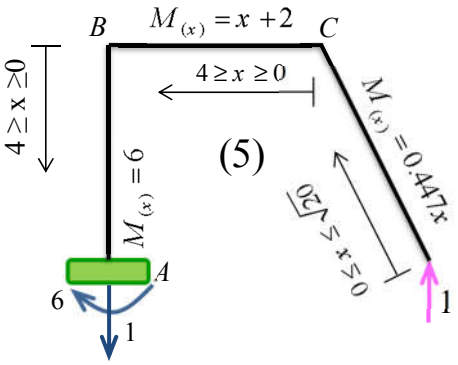
پاسخ مثال ۳-

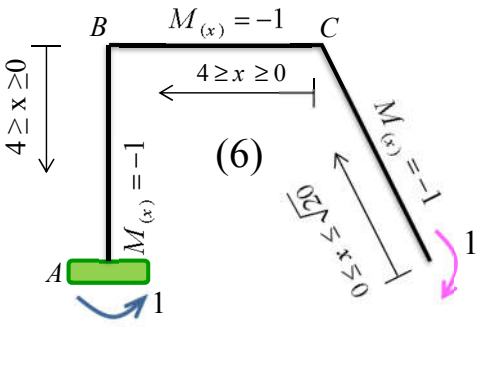








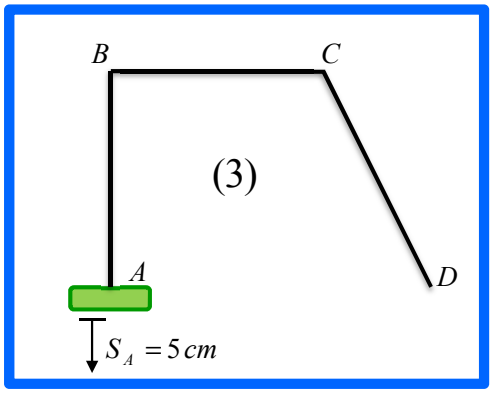


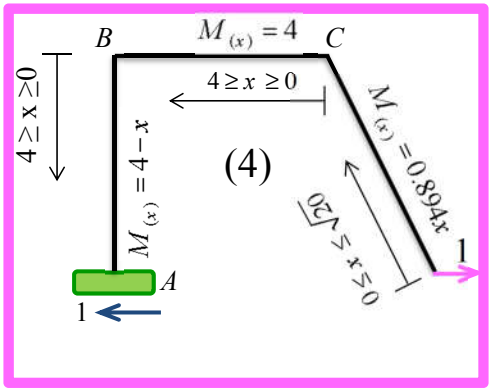


حقیقی مجازی

$\Delta_{H_D S}$: جابجایی افقی گره D در اثر نشست قائم تکیه‌گاه A $\Rightarrow$ M_3 & $\bar{m}_4$

پاسخ مثال ۳-

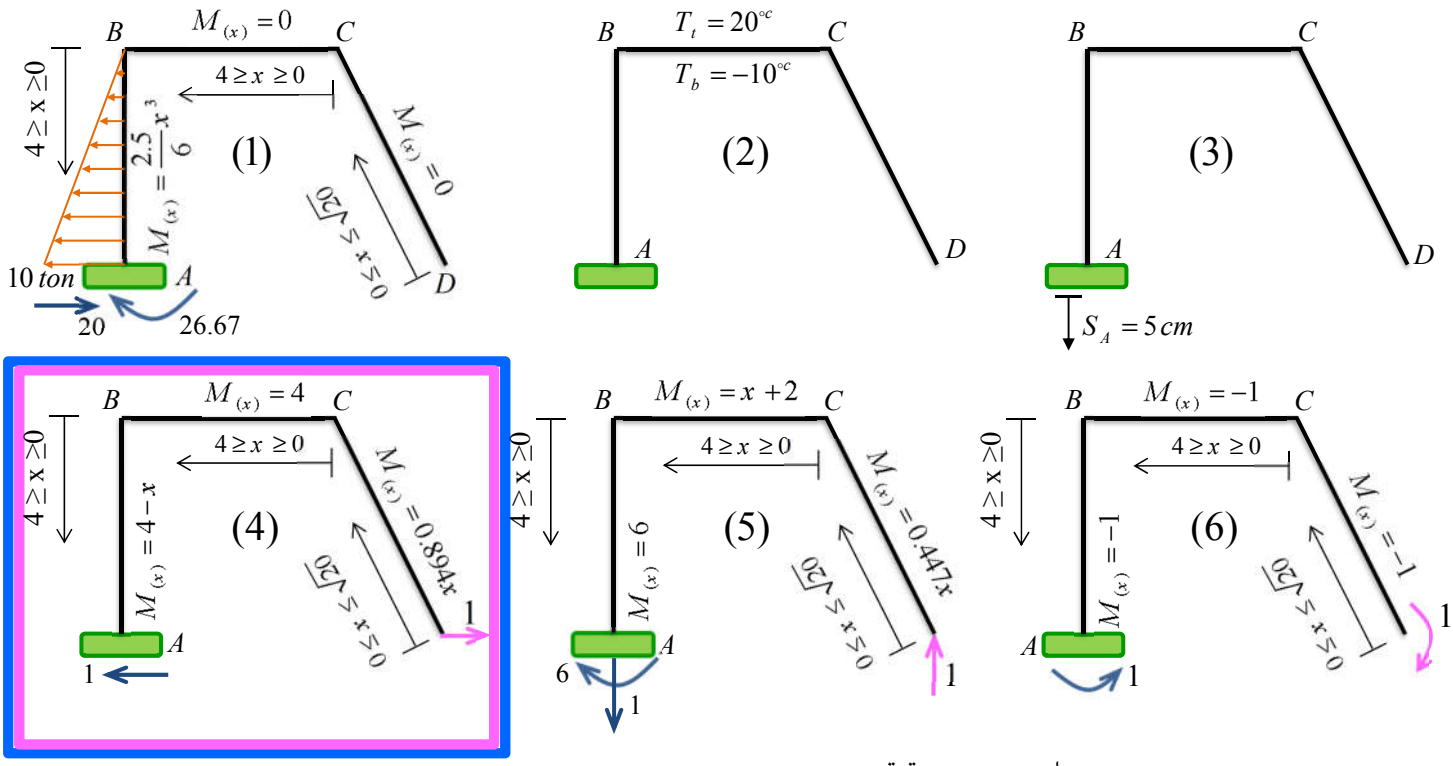




$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\Delta_{H_D S}+\sum \bar{R}_i\Delta_{S_i}=0 \Rightarrow \Delta_{H_D S}+(0)(5\times10^{-2})=0 \Rightarrow \boxed{\Delta_{H_D S}=0}$$

روش نیرو (Force Method)

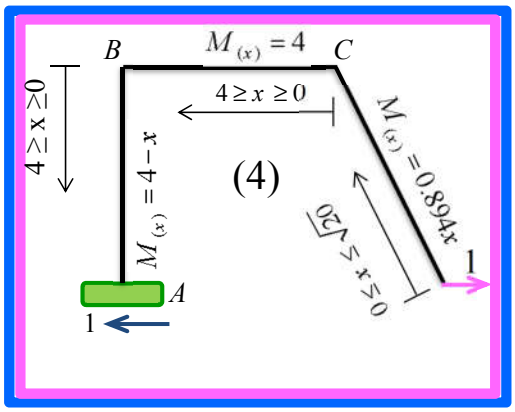
پاسخ مثال ۳-



جابجایی افقی گره D در اثر بار افقی واحد در گره D: $\delta_{H_D H_D}$ $\Rightarrow$ حقیقی M_4 & مجازی $\bar{m}_4$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\delta_{H_D H_D}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_4 M_4}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

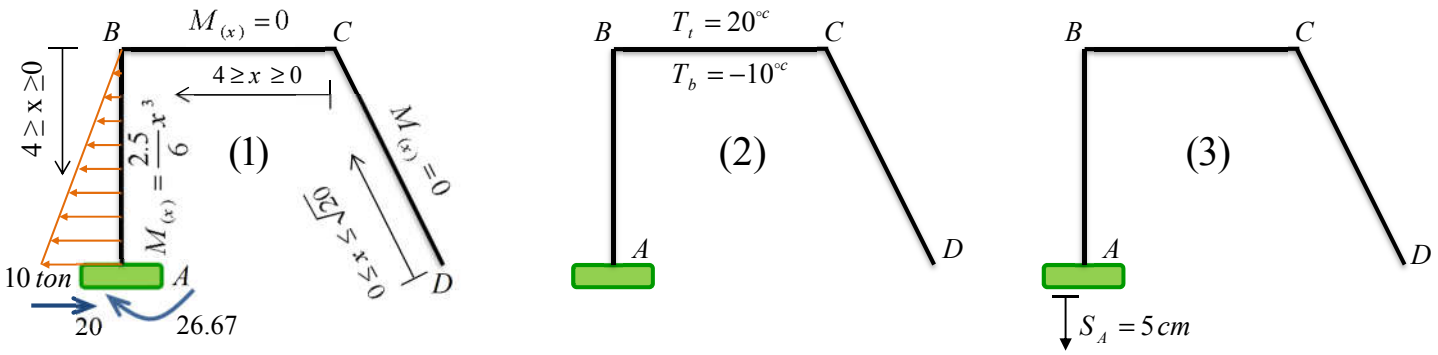
$$\delta_{H_D H_D}=\int_0^{\sqrt{20}}\frac{(0.894x)(0.894x)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(4)(4)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(4-x)(4-x)}{EI}\cdot d_x$$

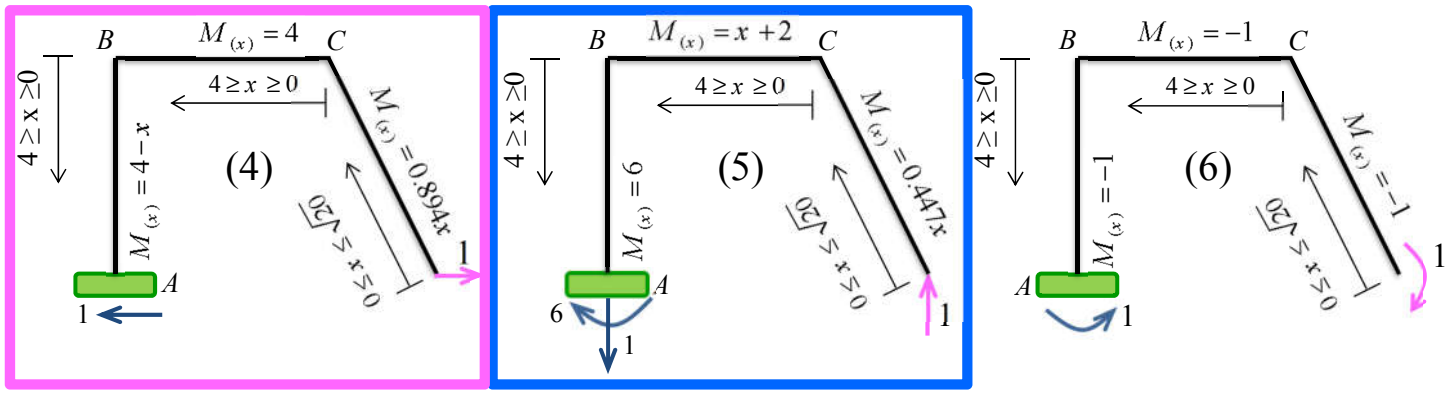
$$=\frac{(0.894)^2x^3}{3EI}\Big]_0^{\sqrt{20}}+\frac{16x}{EI}\Big]_0^{4}+\frac{48x-12x^2+x^3}{3EI}\Big]_0^{4}$$

$$=\frac{23.829}{EI}+\frac{64}{EI}+\frac{21.333}{EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{H_D H_D}=\frac{109.162}{EI}}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



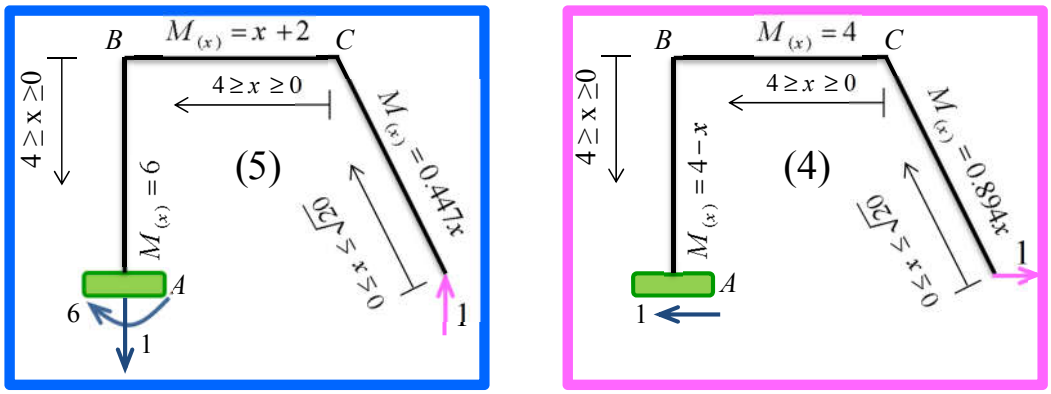


حقیقی مجازی

$\delta_{H_D V_D}$: جابجایی افقی گره D در اثر بار قائم واحد در گره D $\Rightarrow$ M_5 & $\bar{m}_4$

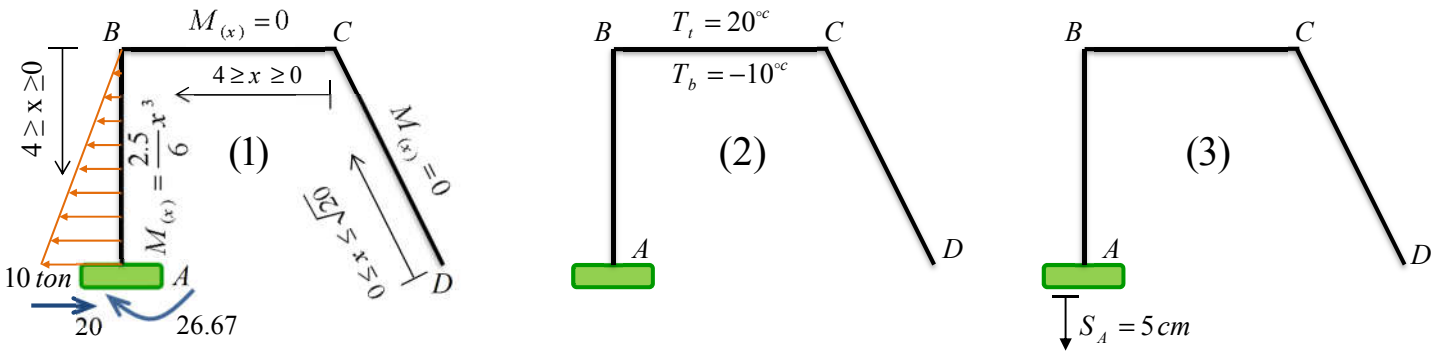
روش نیرو (Force Method)

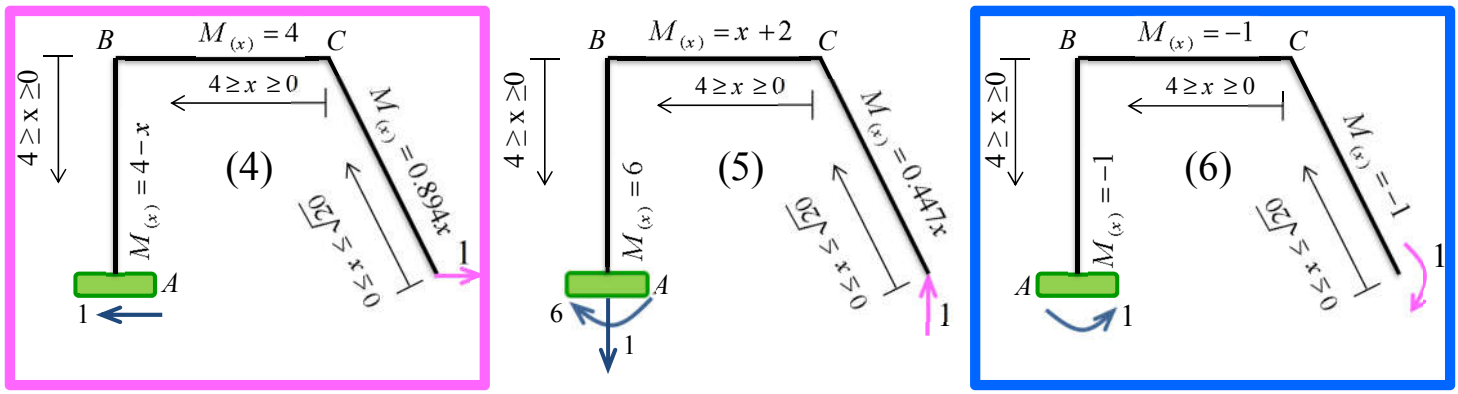
پاسخ مثال ۳-



$$\delta_{H_D V_D}=\frac{123.914}{EI}$$

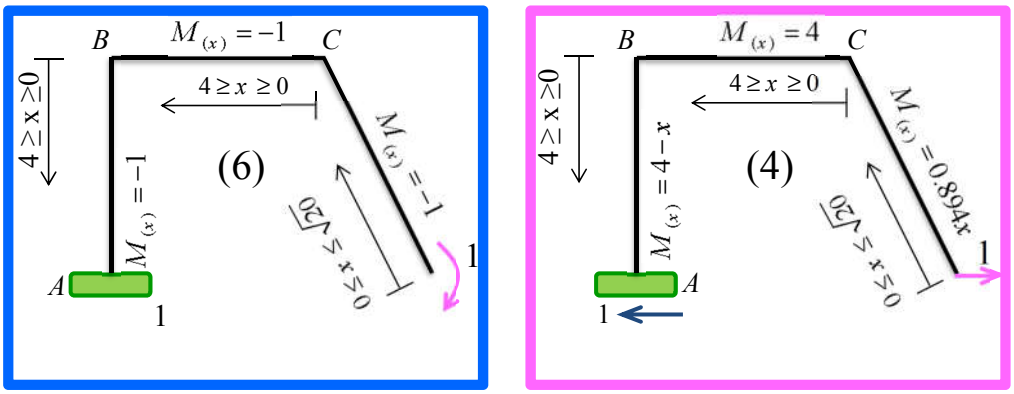
پاسخ مثال ۳-





$\delta_{H_D M_D}$: جابجایی افقی گره D در اثر لنگر واحد در گره D $\Rightarrow$ حقیقی M_6 & مجازی $\bar{m}_4$

پاسخ مثال ۳-



$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\delta_{H_D M_D}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_4 M_6}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

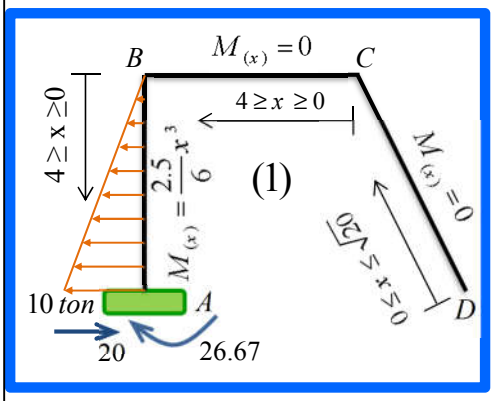
$$\delta_{H_D M_D}=\int_0^{\sqrt{20}}\frac{(0.894x)(-1)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(4)(-1)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(4-x)(-1)}{EI}\cdot d_x$$

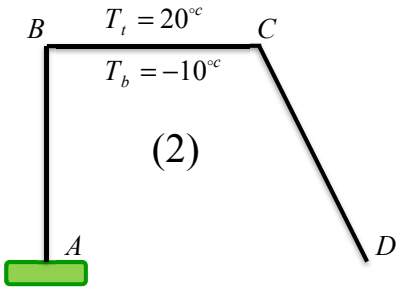
$$=-\frac{0.894x^2}{2EI}\Big]_0^{\sqrt{20}}-\frac{4x}{EI}\Big]_0^{4}-\frac{8x-x^2}{2EI}\Big]_0^{4}$$

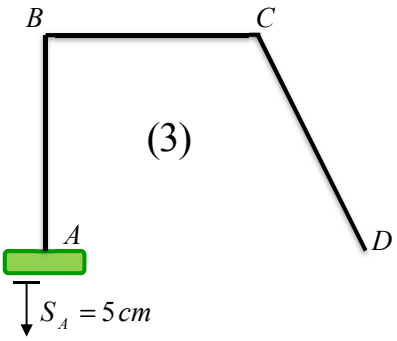
$$=-\frac{8.94}{EI}-\frac{16}{EI}-\frac{8}{EI} \Rightarrow \boxed{\delta_{H_D M_D}=-\frac{32.94}{EI}}$$

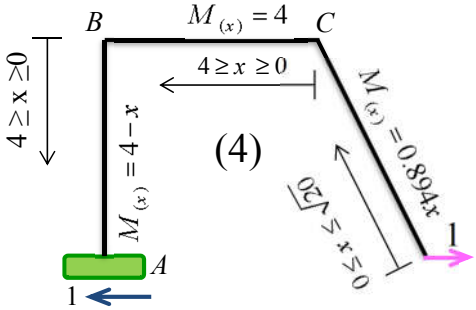
روش نیرو (Force Method)

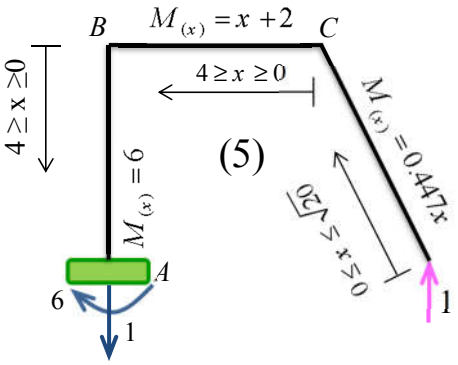
پاسخ مثال ۳-

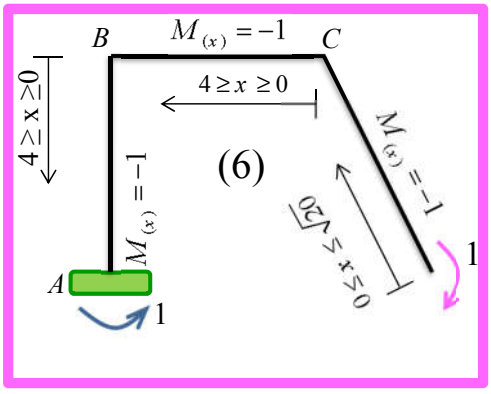








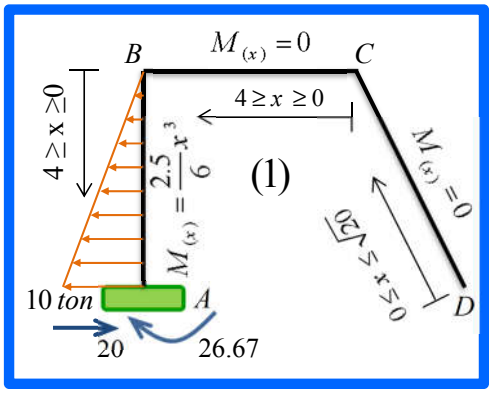


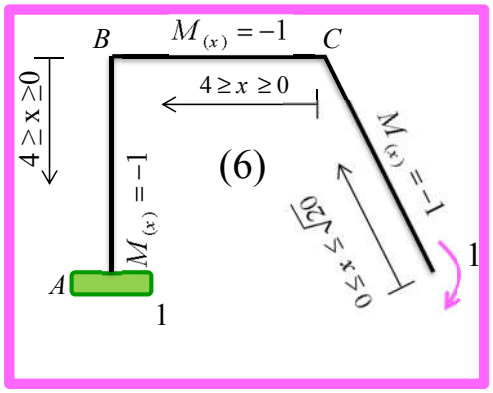


$\Theta_{D\,0}$: دوران گره D در اثر بار خارجی

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

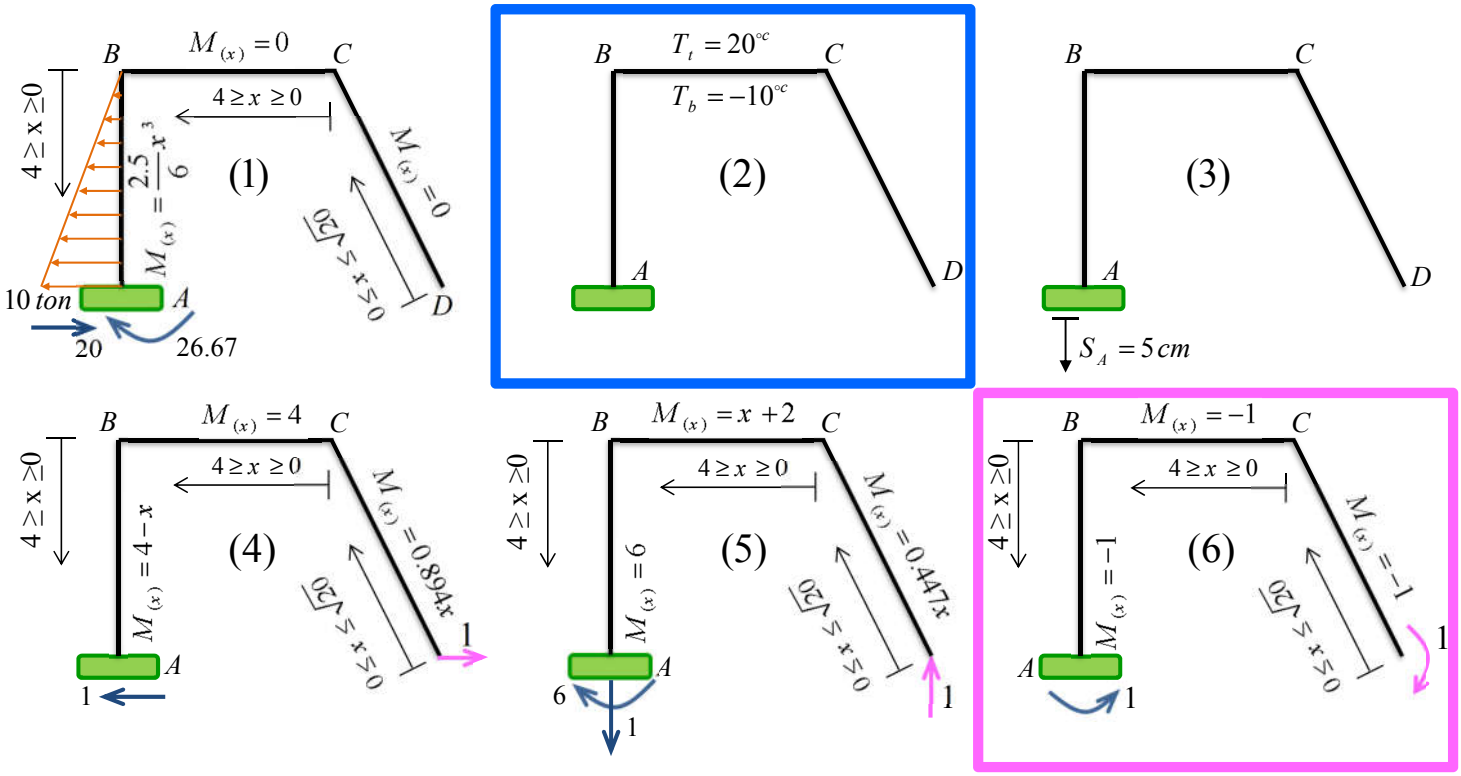




$$=-\frac{2.5}{24}x^4\Big]_0^4 \Rightarrow \boxed{\Theta_{D\,0}=-\frac{26.667}{EI}}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

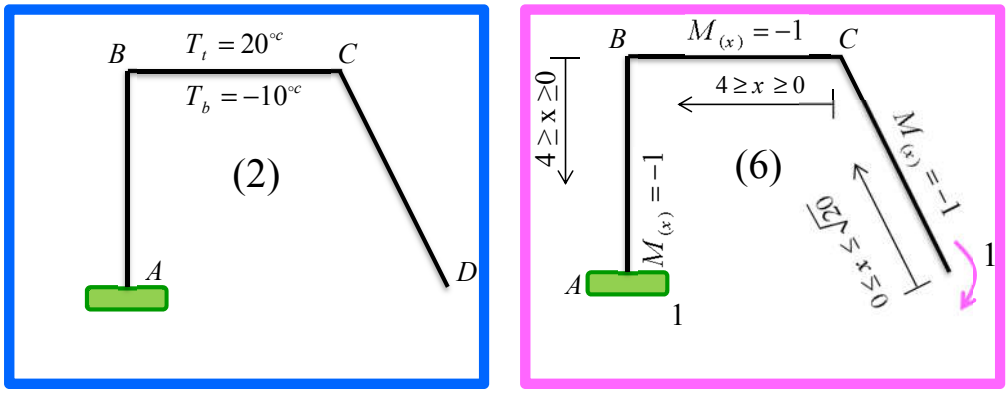


حقیقی مجازی

Θ_{DT} : دوران گره D در اثر تغییرات حرارت در تیر BC $\Rightarrow$ M_2 & $\bar{m}_6$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



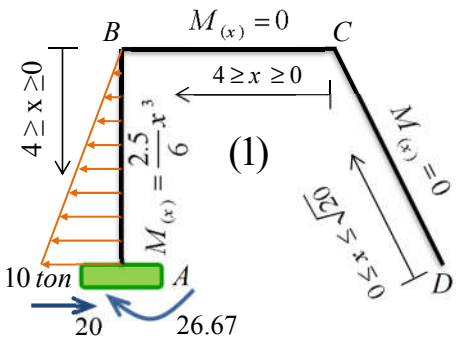
$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}.\Theta_{DT}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_6\alpha(T_b-T_t)}{h}\cdot d_x \Rightarrow$$

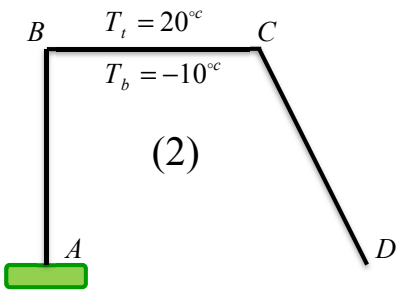
$$\Theta_{DT}=\int_0^4\frac{(-1)(1\times10^{-5})(-10-20)}{20\times10^{-2}}\cdot d_x=\int_0^4 1.5\times10^{-3}\cdot d_x$$

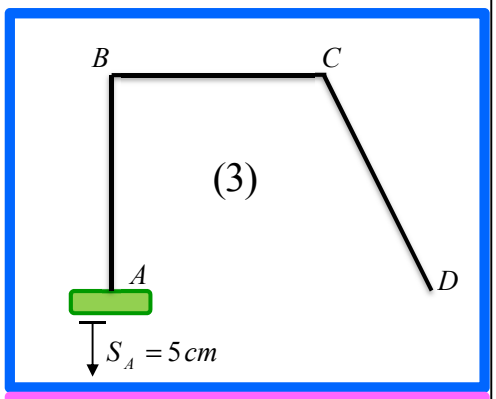
$$=1.5\times10^{-3}x\Big]_0^4 \Rightarrow \boxed{\Theta_{DT}=0.006^{rad}}$$

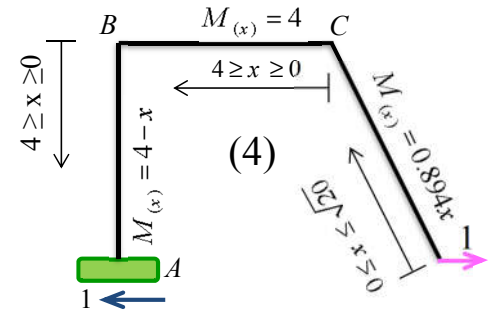
روش نیرو (Force Method)

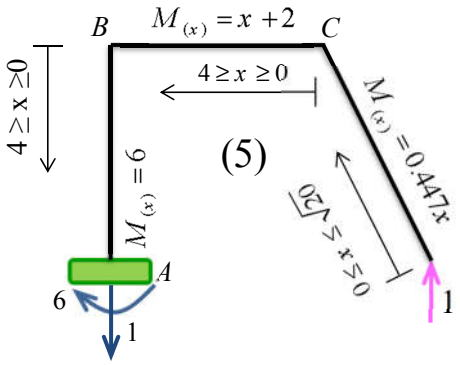
پاسخ مثال ۳-

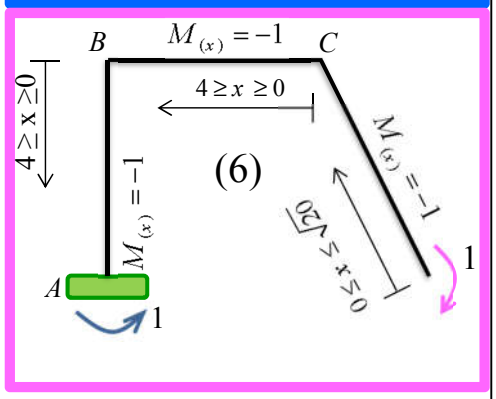










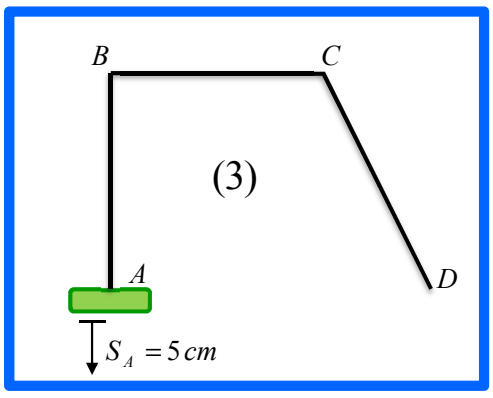


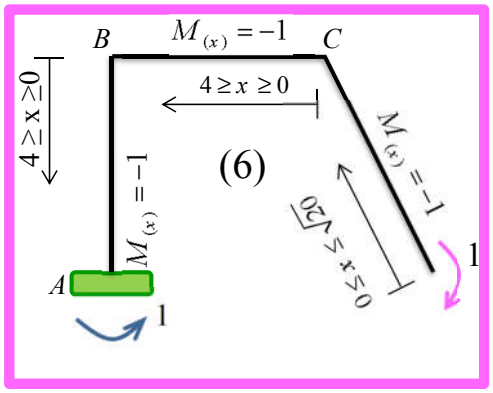
حقیقی مجازی

دوران گره D در اثر نشست قائم تکیه‌گاه A : $\Theta_{DS} \Rightarrow$ M_3 & $\bar{m}_6$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

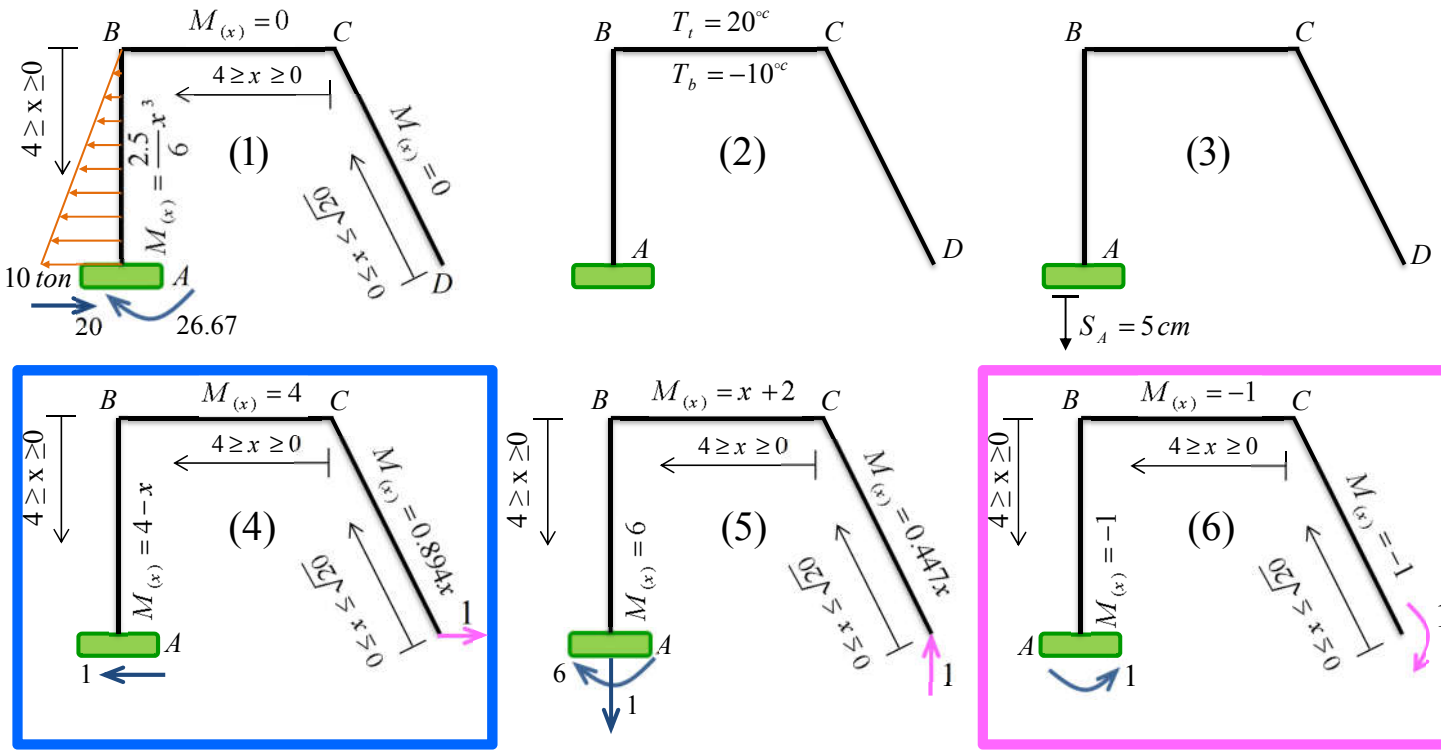




$\Theta_{DS}=0$

روش نیرو (Force Method)

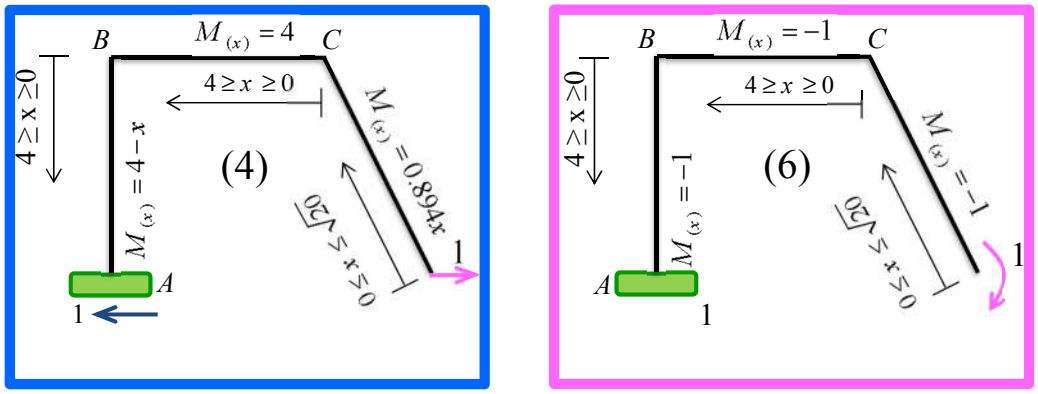
پاسخ مثال ۳-



$\theta_{D\,H_D}$: دوران گره D در اثر بار افقی واحد در گره D $\Rightarrow$ حقیقی M_4 & مجازی $\bar{m}_6$

روش نیرو (Force Method)

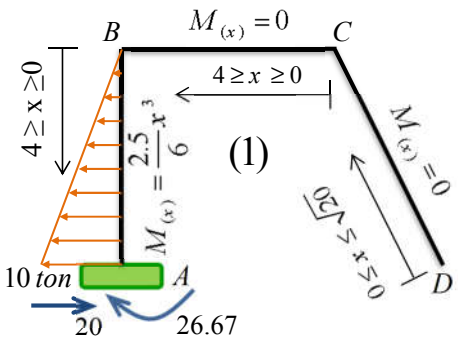
پاسخ مثال ۳-

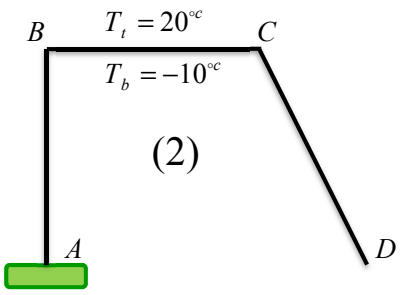


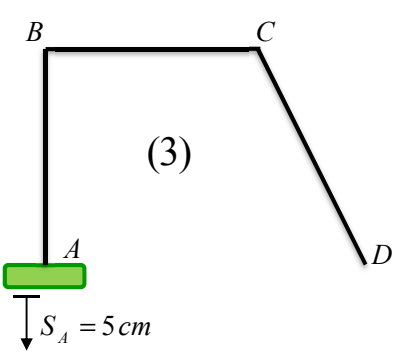
$$\theta_{D\,H_D}=-\frac{32.94}{EI}$$

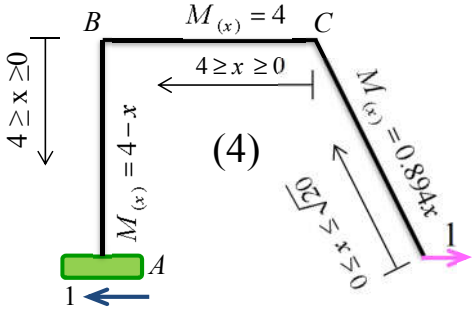
روش نیرو (Force Method)

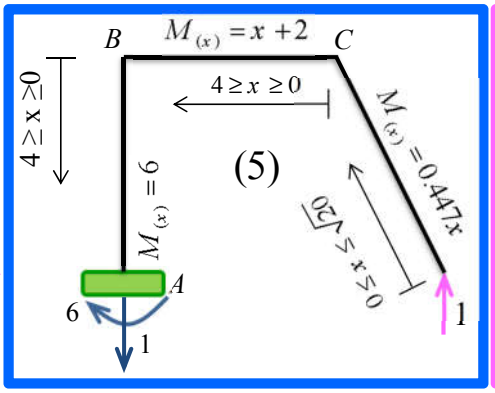
پاسخ مثال ۳-

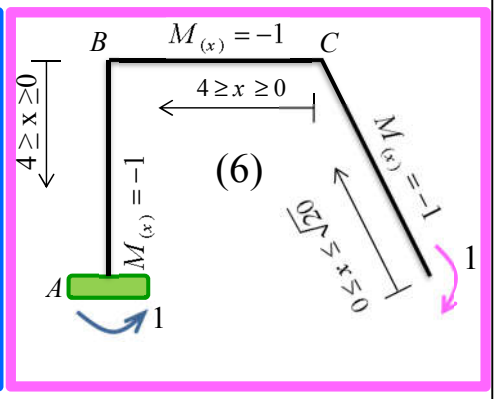










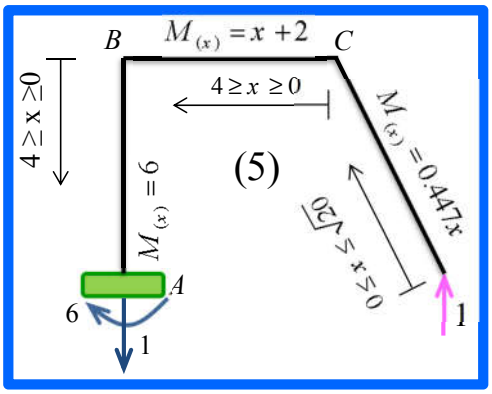


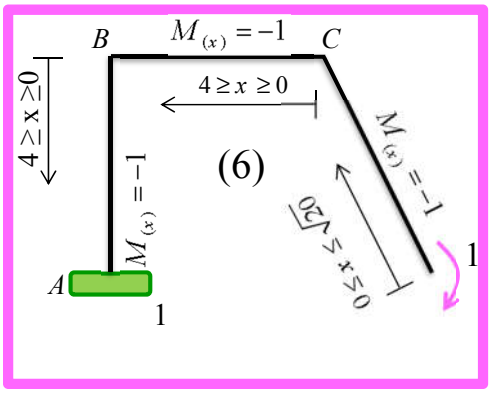
حقیقی مجازی

θ_{DV_D} : دوران گره D در اثر بار قائم واحد در گره D $\Rightarrow$ M_5 & $\bar{m}_6$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

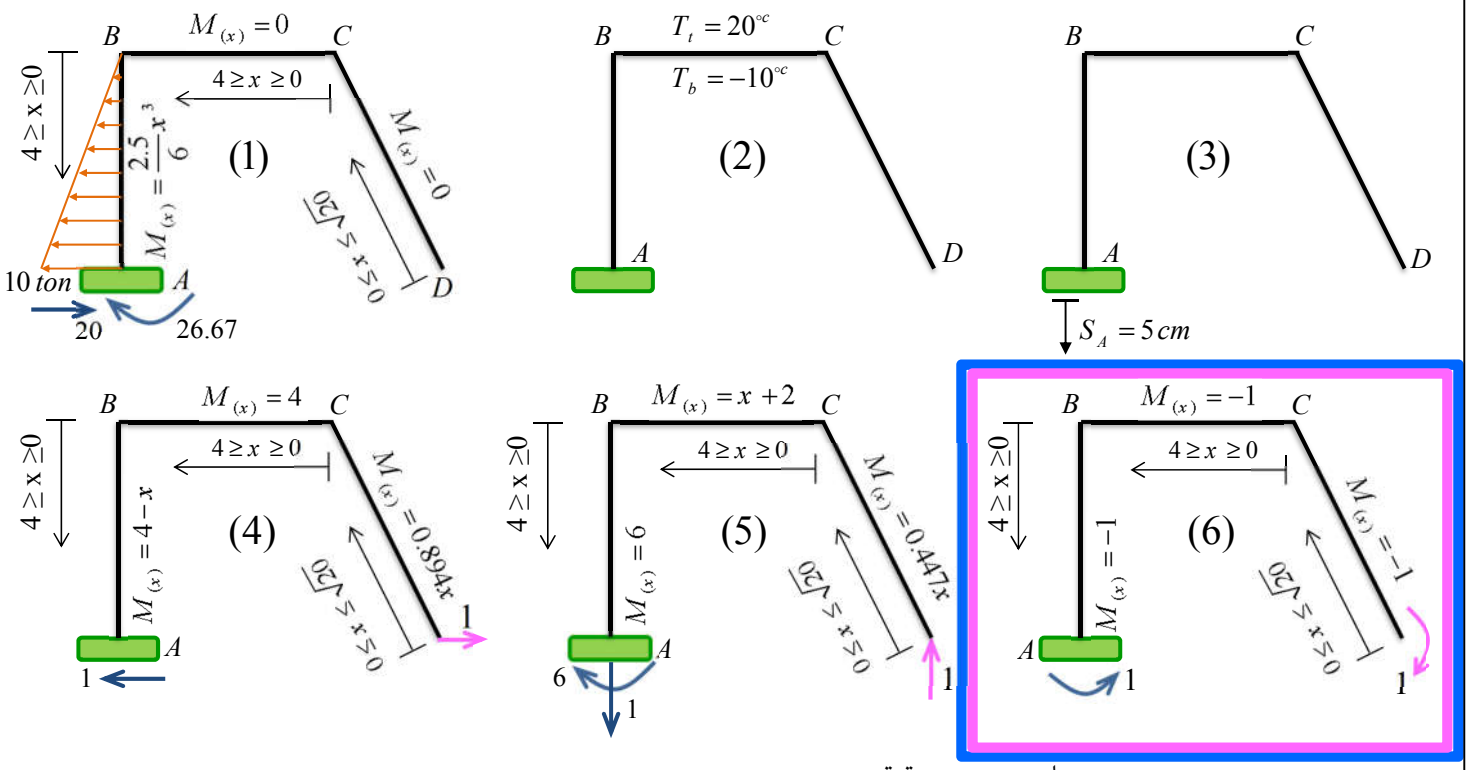




$$\theta_{DV_D}=-\frac{44.47}{EI}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-

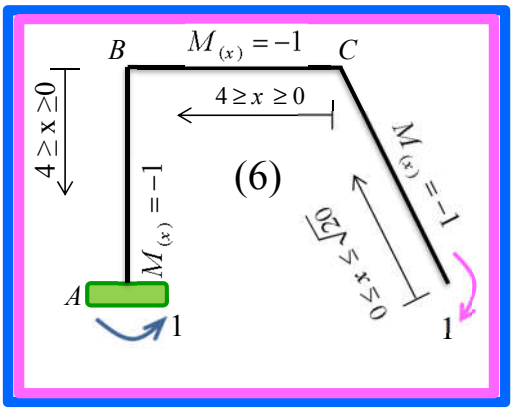


حقیقی مجازی

$\theta_{D\,M_D}$: دوران گره D در اثر لنگر واحد در گره D $\Rightarrow$ M_6 & $\bar{m}_6$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



$$(L5.17) \Rightarrow \bar{1}\theta_{D\,M_D}=\int_0^{\ell}\frac{\bar{m}_6 M_6}{EI}\cdot d_x \Rightarrow$$

$$\theta_{D\,M_D}=\int_0^{\sqrt{20}}\frac{(-1)(-1)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(-1)(-1)}{EI}\cdot d_x+\int_0^{4}\frac{(-1)(-1)}{EI}\cdot d_x$$

$$=\frac{x}{EI}\Big]_0^{\sqrt{20}}+\frac{x}{EI}\Big]_0^{4}+\frac{x}{EI}\Big]_0^{4}$$

$$=\frac{4.472}{EI}+\frac{4}{EI}+\frac{4}{EI} \Rightarrow \boxed{\theta_{D\,M_D}=\frac{12.472}{EI}}$$

پاسخ مثال ۳-

$$(3.3) \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ M_D \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{V_D H_D} & \delta_{V_D V_D} & \delta_{V_D M_D} \\ \delta_{H_D H_D} & \delta_{H_D V_D} & \delta_{H_D M_D} \\ \theta_{D H_D} & \theta_{D V_D} & \theta_{D M_D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta_{V_D 0} + \Delta_{V_D T} + \Delta_{V_D S} \\ \Delta_{H_D 0} + \Delta_{H_D T} + \Delta_{H_D S} \\ \Theta_{D 0} + \Theta_{D T} + \Theta_{D S} \end{Bmatrix}$$

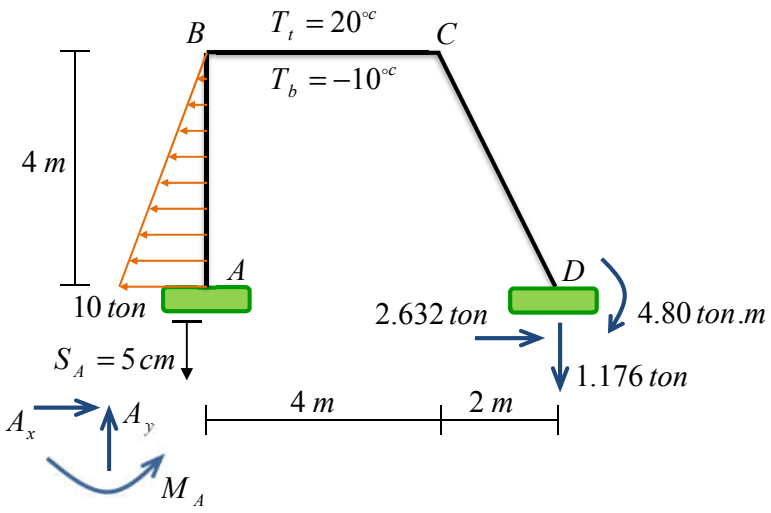
$$= -\begin{bmatrix} \frac{123.914}{EI} & \frac{219.29}{EI} & -\frac{44.47}{EI} \\ \frac{109.162}{EI} & \frac{123.914}{EI} & -\frac{32.94}{EI} \\ -\frac{32.94}{EI} & -\frac{44.47}{EI} & \frac{12.472}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{160}{EI} - 0.024 - 0.05 \\ \frac{21.333}{EI} - 0.024 + 0 \\ -\frac{26.667}{EI} + 0.006 + 0 \end{Bmatrix}$$

$$= -\left(\frac{1}{EI}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 123.914 & 219.29 & -44.47 \\ 109.162 & 123.914 & -32.94 \\ -32.94 & -44.47 & 12.472 \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{1}{EI}\right) \begin{Bmatrix} 160 - 0.024EI - 0.05EI \\ 21.333 - 0.024EI \\ -26.667 + 0.006EI \end{Bmatrix}$$

$$EI = 200\ ton.m^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ M_D \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 123.914 & 219.29 & -44.47 \\ 109.162 & 123.914 & -32.94 \\ -32.94 & -44.47 & 12.472 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 160 - 0.024 \times (200) - 0.05 \times (200) \\ 21.333 - 0.024 \times (200) \\ -26.667 + 0.006 \times (200) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.6317 & (ton) \\ -1.1758 & (ton) \\ 4.8001 & (ton.m) \end{Bmatrix}}$$

پاسخ مثال ۳-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

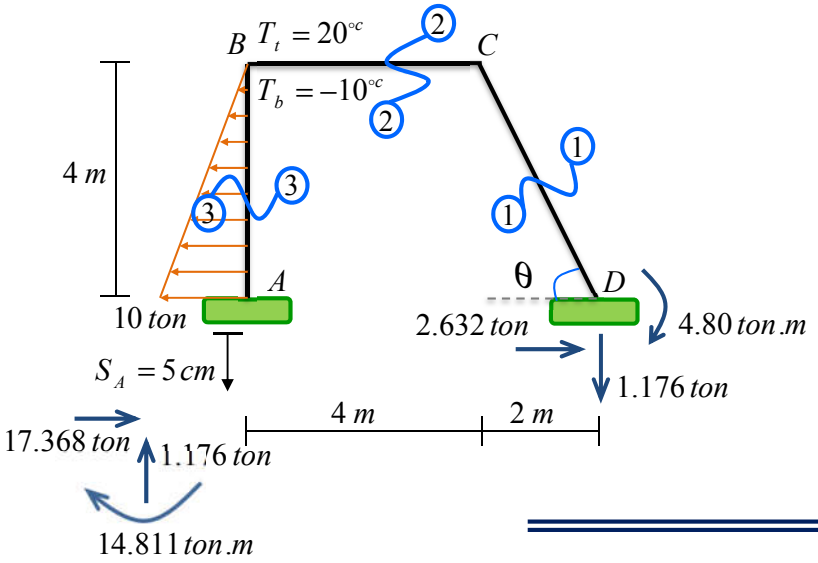
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 2.632 - \frac{1}{2}(10)(4) = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 17.368\,(ton)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1.176 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 1.176\,(ton)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + \frac{1}{2}(10)(4) \times \left(\frac{4}{3}\right) - 4.8 - 1.176 \times 6 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -14.811\,(ton.m)}$$

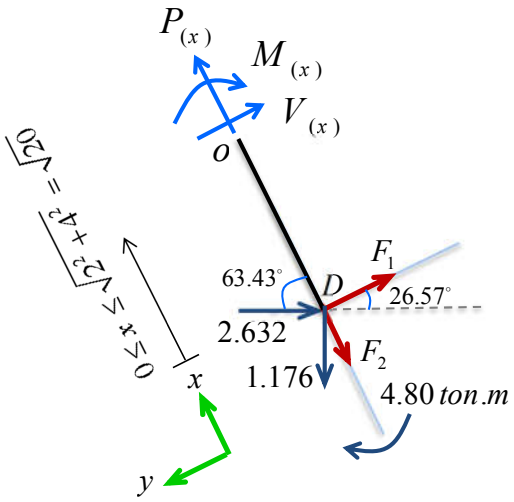
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^{\circ}}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$F_1 = 2.632\cos(26.57^{\circ}) - 1.176\sin(26.57^{\circ}) \Rightarrow \boxed{F_1 = 1.828\,ton}$$

$$F_2 = 2.632\sin(26.57^{\circ}) + 1.176\cos(26.57^{\circ}) \Rightarrow \boxed{F_2 = 2.229\,ton}$$

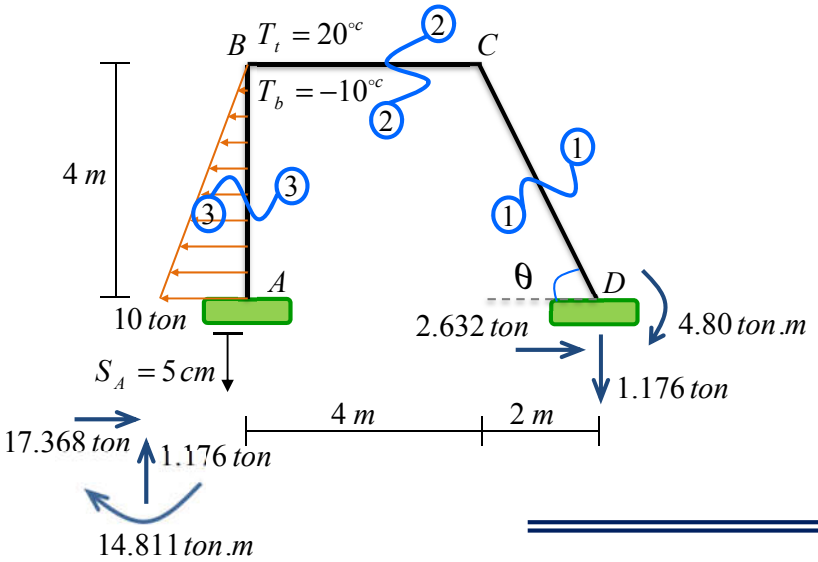
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 1.828x - 4.8 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 1.828x - 4.8}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_{(x)} - 1.828 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = -1.828}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{(x)} - 2.229 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 2.229}$$

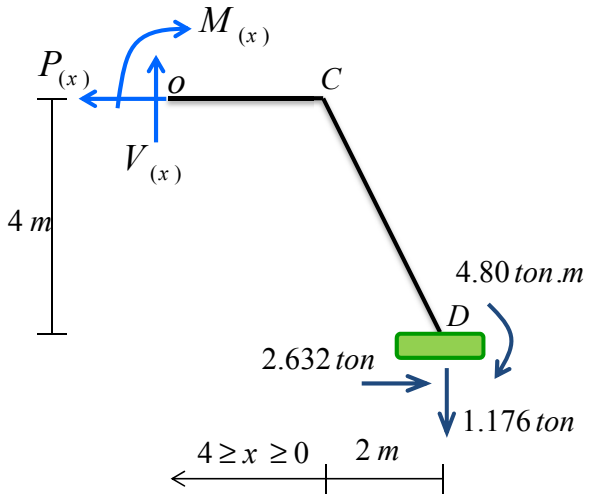
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 63.43^{\circ}}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقاطع ۲-۲ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 4.8 - 1.176\times(2+x) + 2.632\times 4 = 0$$

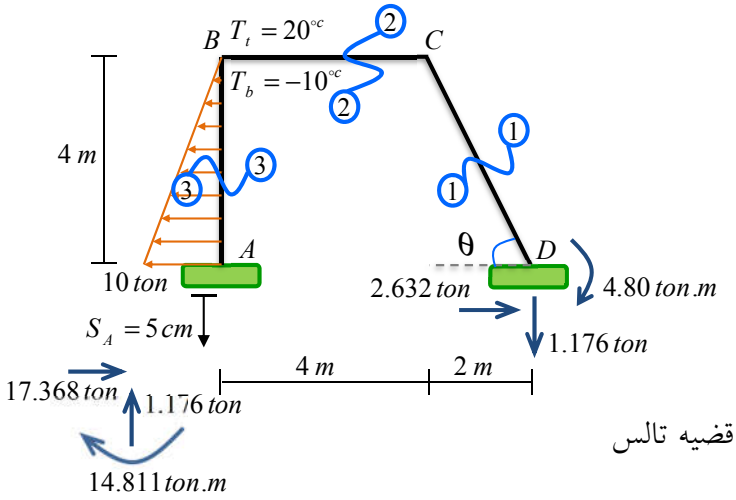
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -1.176x + 3.376}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{(x)} - 1.176 = 0 \Rightarrow \boxed{V_{(x)} = 1.176}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_{(x)} + 2.632 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = 2.632}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



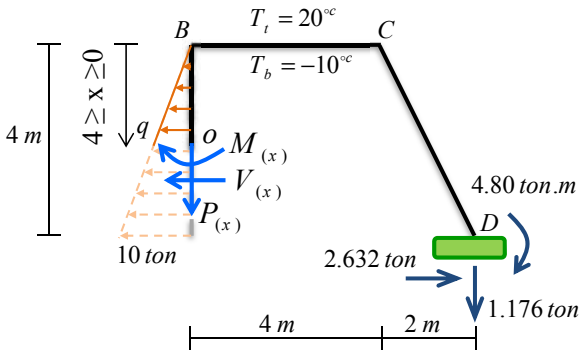
با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

قضیه تالس : $\Rightarrow \quad \frac{q}{10} = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 2.5x}$

$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-M_{(x)} + \frac{1}{2}(2.5x)(x) \times \left(\frac{x}{3}\right) - 4.8 - 1.176 \times 6 + 2.632(4-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{(x)} = \frac{2.5}{6}x^3 - 2.632x - 1.328}$$



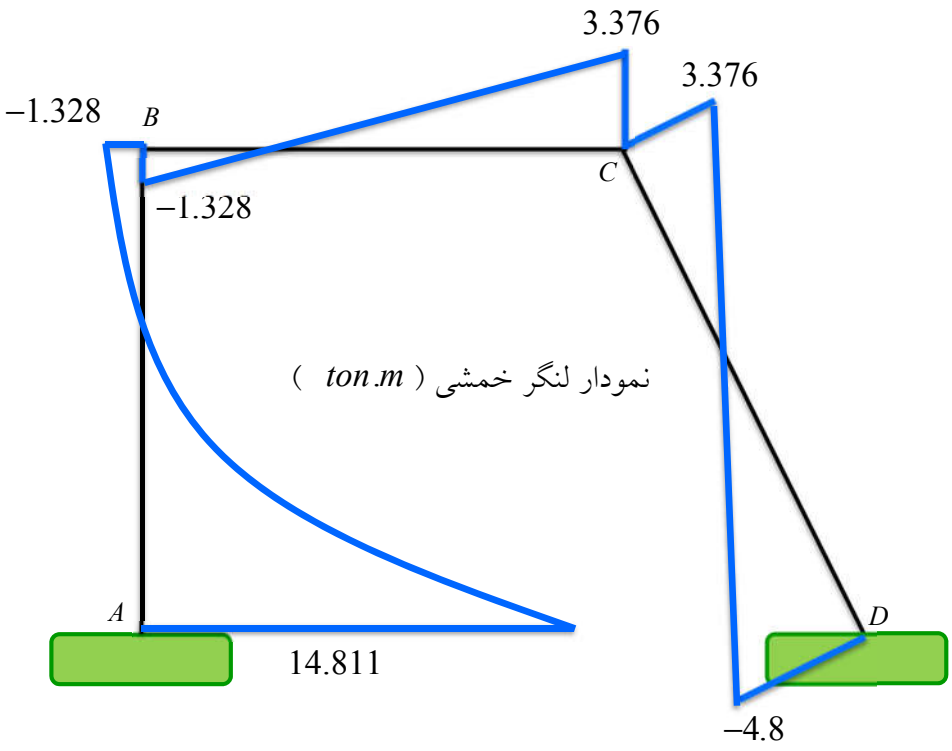
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{(x)} - \frac{1}{2}(2.5x)(x) + 2.632 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{(x)} = -1.25x^2 + 2.632}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_{(x)} - 1.176 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(x)} = -1.176}$$

روش نیرو (Force Method)

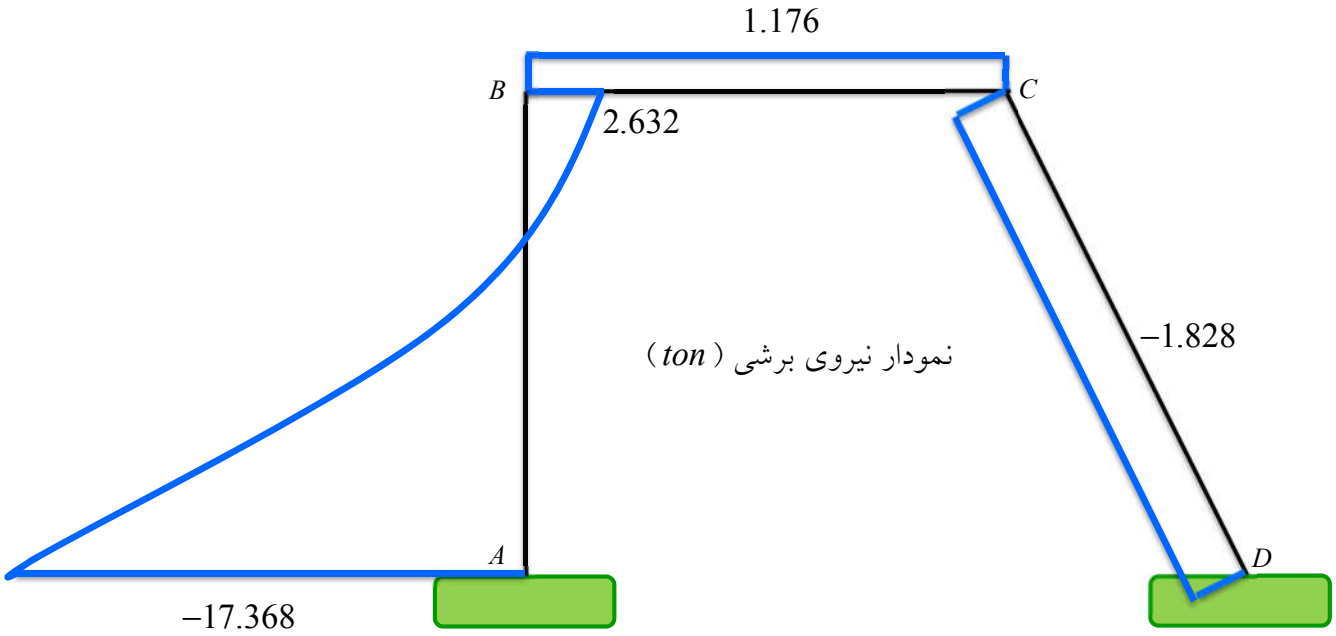
پاسخ مثال ۳-



DC :	$M_{(x)} = 1.828x - 4.8$	$\sqrt{20} \geq x \geq 0$
CB :	$M_{(x)} = -1.176x + 3.376$	$4 \geq x \geq 0$
BA :	$M_{(x)} = \frac{2.5}{6}x^3 - 2.632x - 1.328$	$4 \geq x \geq 0$

روش نیرو (Force Method)

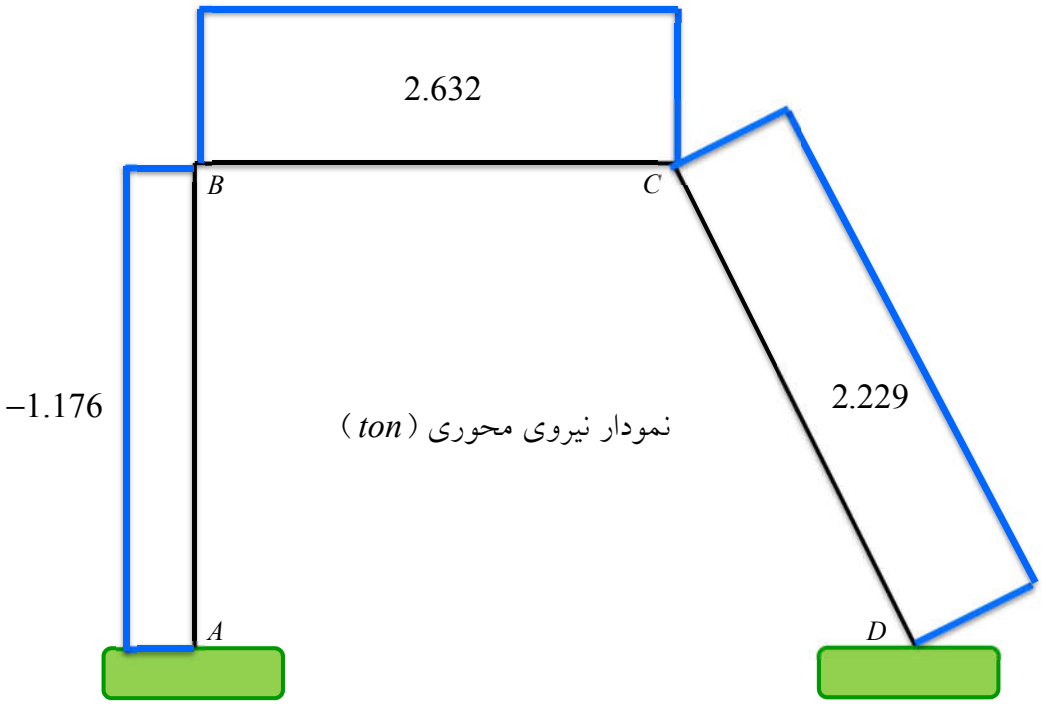
پاسخ مثال ۳-



$$
\begin{aligned}
&DC: && V_{(x)} = -1.828 && \sqrt{20} \geq x \geq 0 \\
&CB: && V_{(x)} = 1.176 && 4 \geq x \geq 0 \\
&BA: && V_{(x)} = -1.25x^2 + 2.632 && 4 \geq x \geq 0
\end{aligned}
$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۳-



$$
\begin{aligned}
&DC: && P_{(x)} = 2.229 && \sqrt{20} \geq x \geq 0 \\
&CB: && P_{(x)} = 2.632 && 4 \geq x \geq 0 \\
&BA: && P_{(x)} = -1.176 && 4 \geq x \geq 0
\end{aligned}
$$

پاسخ مثال ۳-

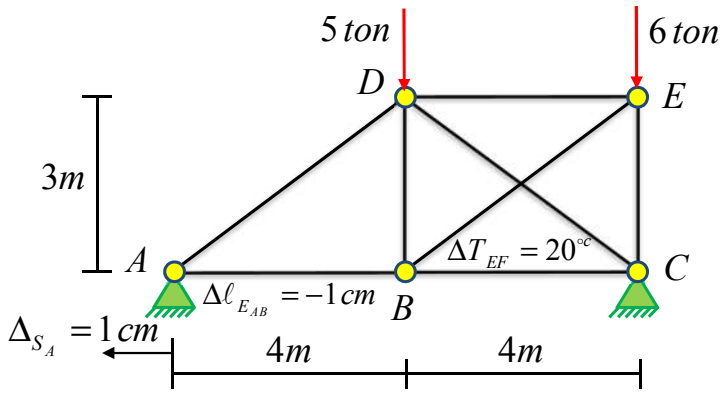
مدل سازی در ETABS:

از آنجایی که حرارت غیریکنواخت را نمی‌توان در ETABS مدل کرد از این رو تغییرشکل‌های ناشی از حرارت در تکیه‌گاه D را به عنوان جابجایی گره‌ای با علامت منفی وارد می‌کنیم.

$$\Delta_{V_D T} = -0.024 \qquad Ground\ Displacement - y = 0.024\,(m)$$
$$\Delta_{H_D T} = -0.024 \Rightarrow Ground\ Displacement - x = 0.024\,(m)$$
$$\Theta_{D T} = +0.006 \qquad Ground\ Rotation = -0.006^{\,rad}$$

ETABS File Name: **06-Example-03.EDB**

مثال ۴- در خرپای نشان داده شده تکیه‌گاه A در راستای افق به اندازه 1cm به سمت چپ حرکت دارد. عضو AB در کارخانه 1 cm کوتاه‌تر ساخته شده است. همچنین، دمای عضو BC به اندازه ۲۰ درجه سانتیگراد افزایش پیدا می‌کند. نیروی داخلی اعضای خرپا را محاسبه نمایید.

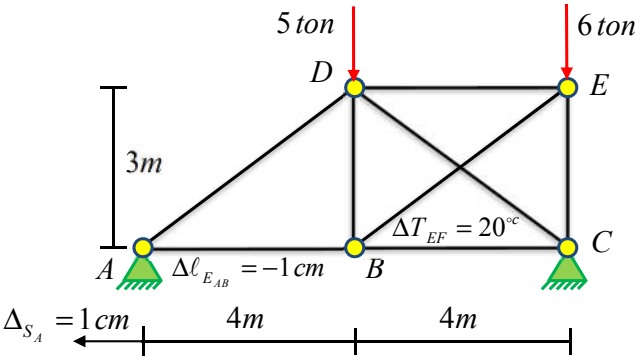


$$EA = 6\times10^{3}\ (ton)$$
$$\alpha = 1\times10^{-4}\left(\frac{1}{^{\circ c}}\right)$$

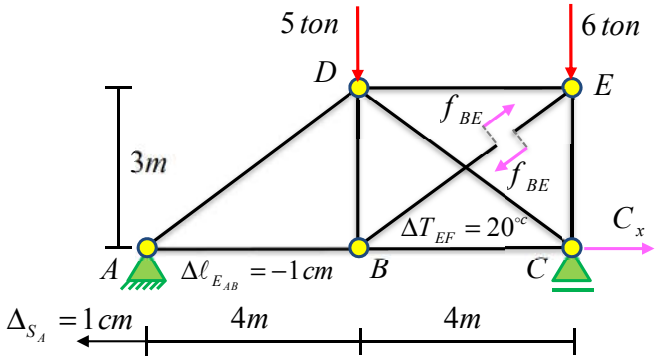
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

سازه مورد نظر دو درجه نامعینی دارد. یک درجه نامعینی داخلی و یک درجه نامعینی خارجی است. با در نظر گرفتن عکس‌العمل افقی مجهول تکیه‌گاه C به عنوان بار خارجی و همچنین نیروی داخلی مجهول عضو BE به عنوان بار داخلی اعمال شده به سازه، سازه اولیه به صورت زیر به یک سازه **پایدار و معین** تحت اثر دو نیروی مجهول تبدیل می‌شود:



سازه اولیه (پایدار و نامعین)

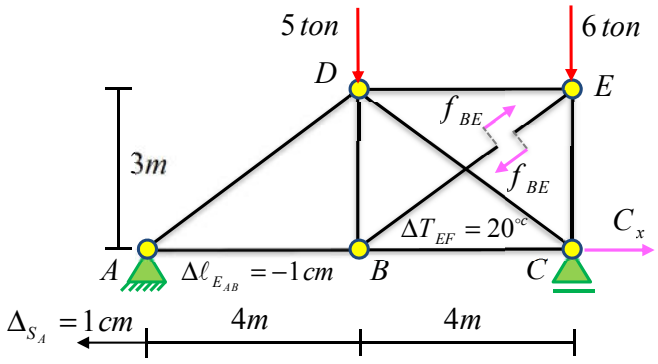


سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)

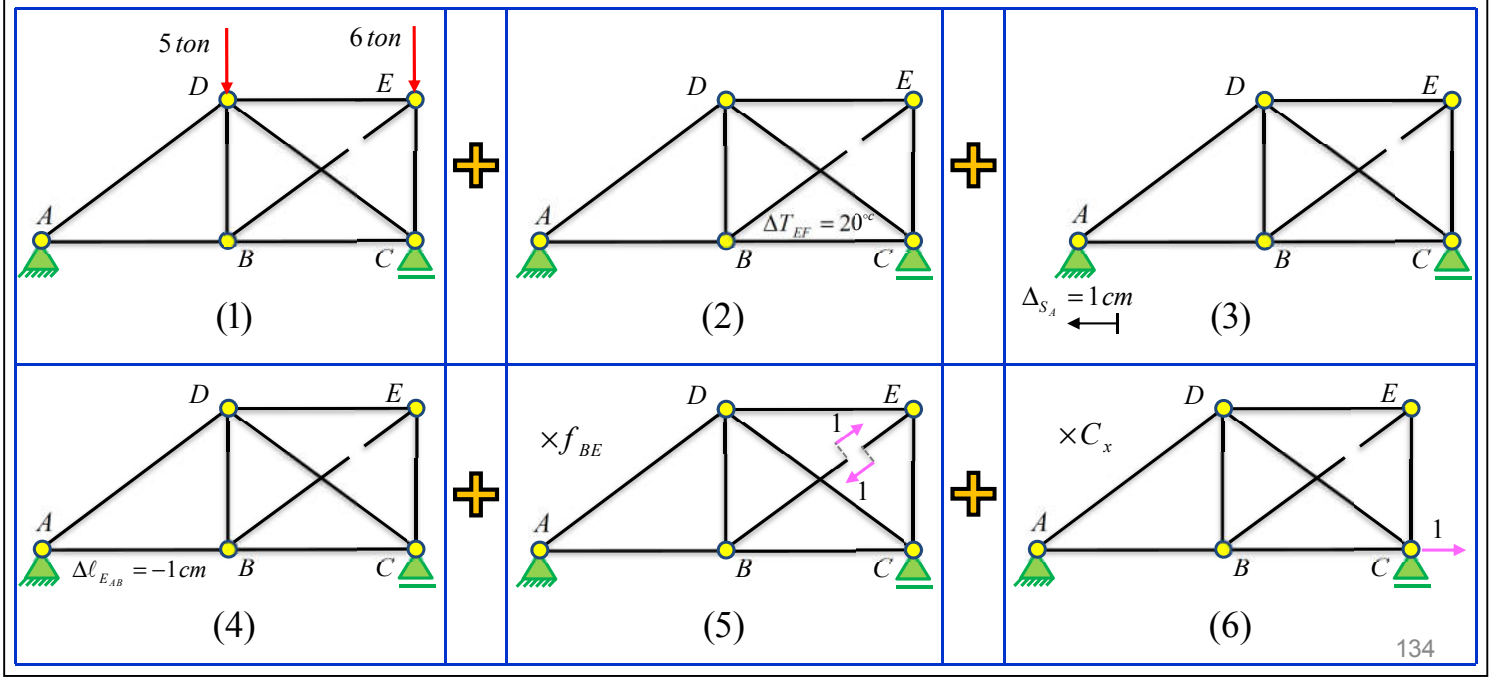
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

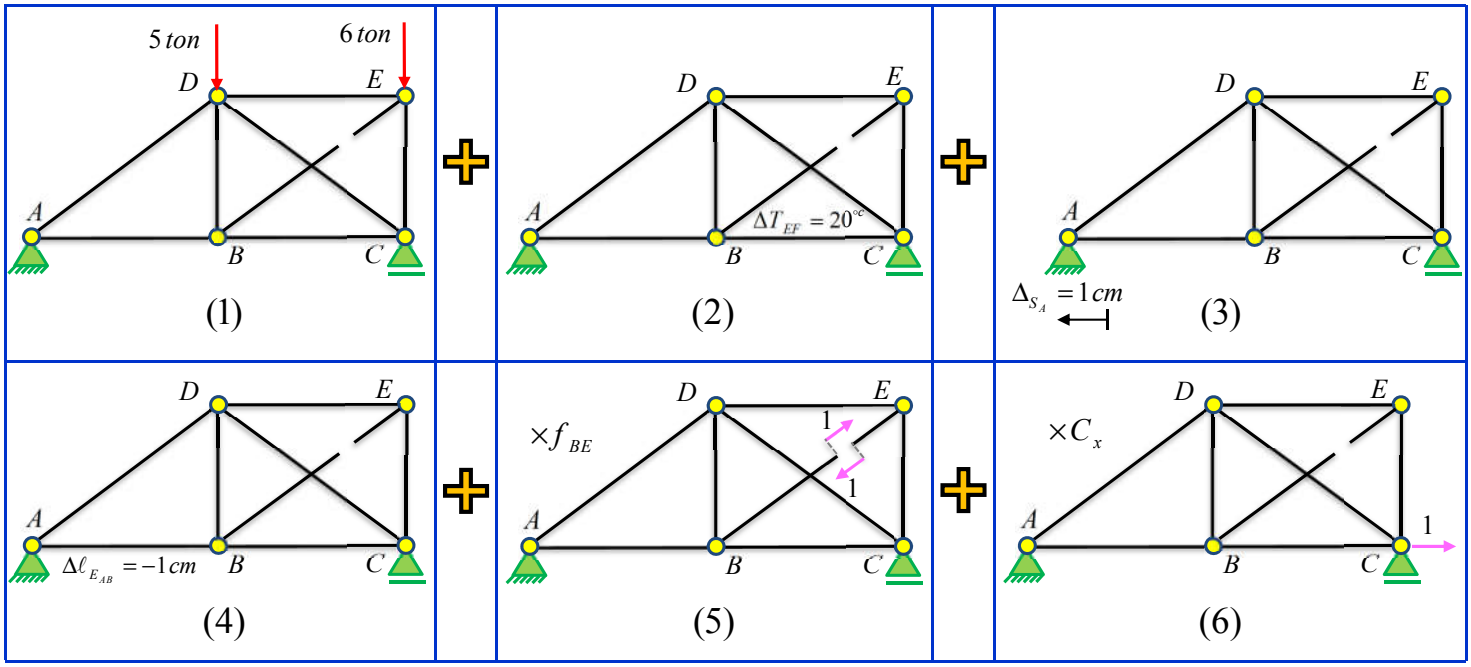
اکنون با استفاده از **اصل برهم نهی**، سازه تبدیل یافته را می‌توان در شش حالت زیر به صورت مجزا بررسی نمود:



سازه تبدیل یافته (پایدار و معین)



پاسخ مثال ۴-



براساس اصل سازگاری تغییرشکل‌ها، باید تغییر مکان افقی تکیه‌گاه C و مقدار جدا شدگی در عضو BE برابر با صفر باشد:

پاسخ مثال ۴-

فرم ماتریسی رابطه (4.1) به صورت زیر است:

$$(4.1) \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_{H_C BE} & \delta_{H_C H_C} \\ \delta_{BE_{BE}} & \delta_{BE_{H_C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{BE} \\ C_x \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \Delta_{H_C 0} + \Delta_{H_C T} + \Delta_{H_C S} + \Delta_{H_C E} \\ \Delta_{BE_0} + \Delta_{BE_T} + \Delta_{BE_S} + \Delta_{BE_E} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

با حل رابطه (4.2) واکنش‌های تکیه‌گاهی مجهول به دست می‌آیند:

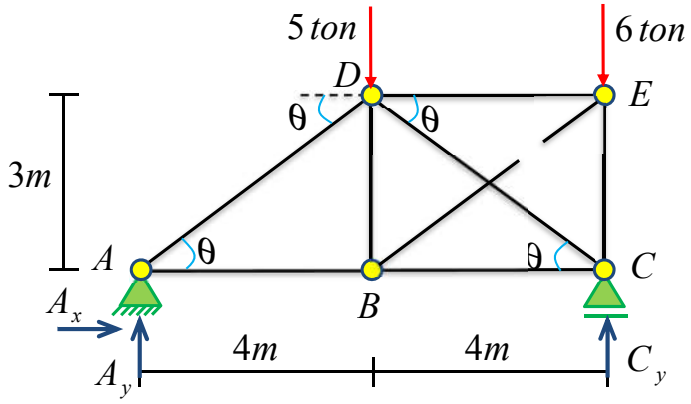
$$(4.2) \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{BE} \\ C_x \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{H_C BE} & \delta_{H_C H_C} \\ \delta_{BE_{BE}} & \delta_{BE_{H_C}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta_{H_C 0} + \Delta_{H_C T} + \Delta_{H_C S} + \Delta_{H_C E} \\ \Delta_{BE_0} + \Delta_{BE_T} + \Delta_{BE_S} + \Delta_{BE_E} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

همانطور که در رابطه (4.3) نمایان است باید ۱۲ پارامتر تغییرشکلی محاسبه گردد. در این‌جا پارامترهای تغییرشکل با استفاده از روش کار مجازی محاسبه خواهند شد. برای این منظور در ابتدا باید هر یک از شش سازه را به طور مجزا آنالیز نماییم. اما از آن‌جایی که در سازه‌های شماره ۲، ۳ و ۴ بار خارجی نداریم بنابراین نیازی به آنالیز این سه سازه نمی‌باشد.

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۱):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow A_x=0 \Rightarrow \boxed{A_x=0}$$

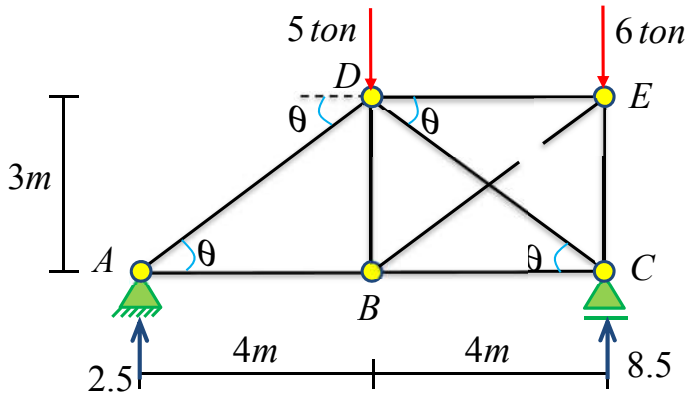
$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow C_y\times 8-5\times 4-6\times 8=0 \Rightarrow \boxed{C_y=8.5\,ton} \qquad (4.4)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+C_y-5-6=0 \overset{(4.4)}{\Rightarrow} \boxed{A_y=2.5\,ton}$$

روش نیرو (Force Method)

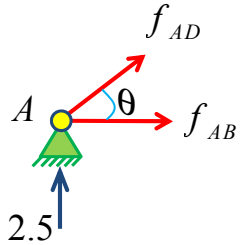
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۱):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow f_{AB}+f_{AD}\times\frac{4}{5}=0$$

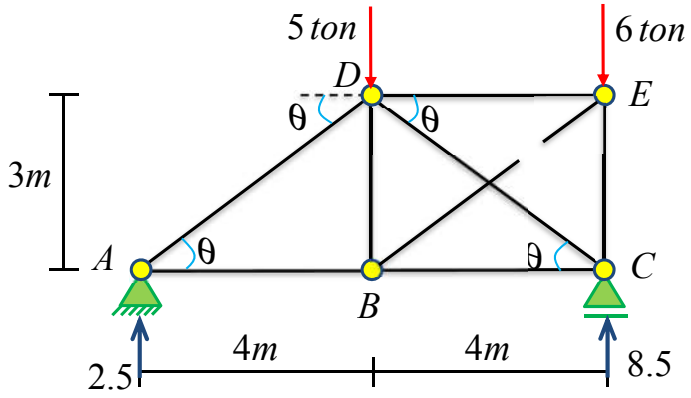
$$\sum F_y=0 \Rightarrow 2.5+f_{AD}\times\frac{3}{5}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{AB}=3.333 \\ f_{AD}=-4.167 \end{cases}$$

روش نیرو (Force Method)

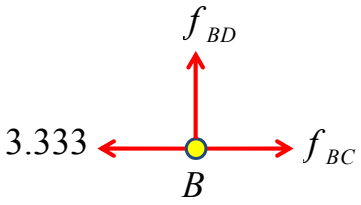
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۱):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



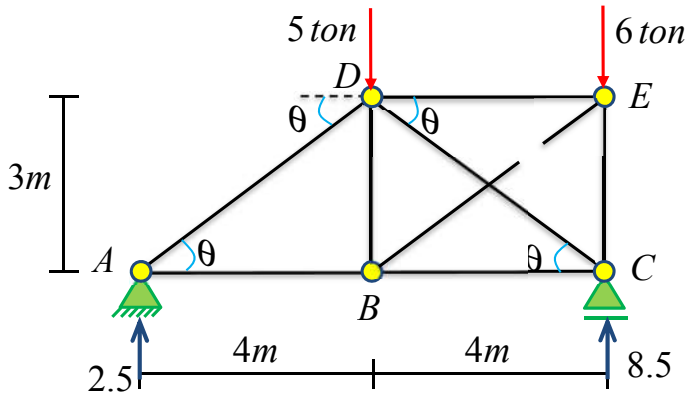
$$\sum F_x=0 \Rightarrow -3.333+f_{BC}=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow f_{BD}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BC}=3.333 \\ f_{BD}=0 \end{cases}$$

روش نیرو (Force Method)

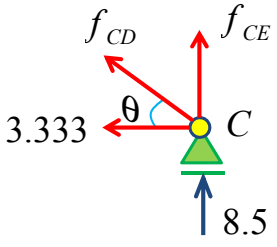
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۱):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



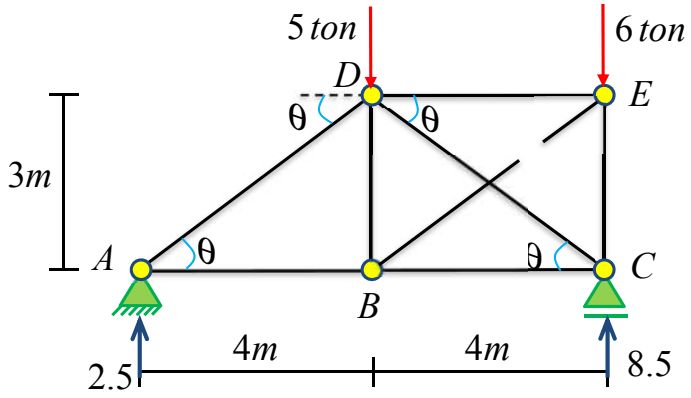
$$\sum F_x=0 \Rightarrow -3.333-f_{CD}\times\frac{4}{5}=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow f_{CD}\times\frac{3}{5}+f_{CE}+8.5=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{CD}=-4.167 \\ f_{CE}=-6 \end{cases}$$

روش نیرو (Force Method)

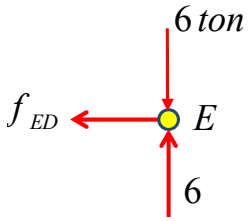
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۱):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:



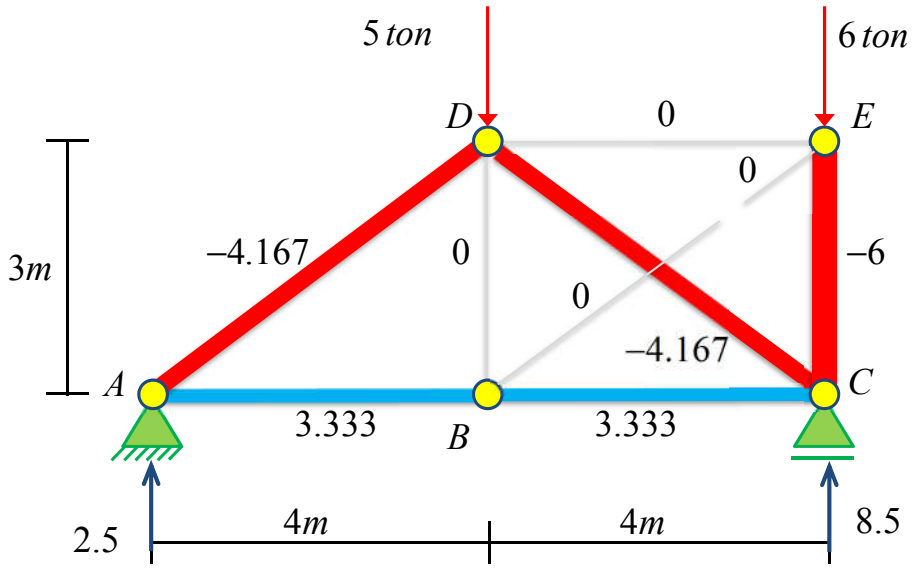
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -f_{ED} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 6-6=0$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{ED}=0}$$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

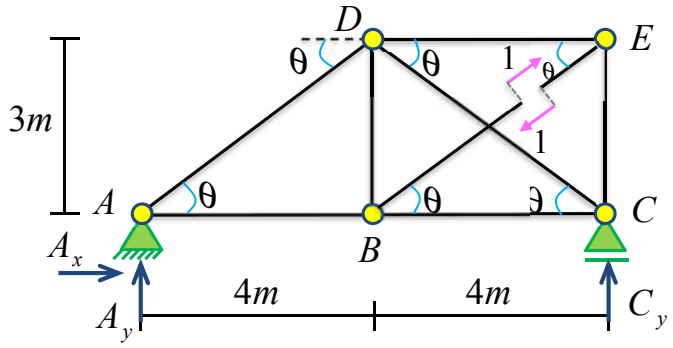
آنالیز سازه شماره (۱):



روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

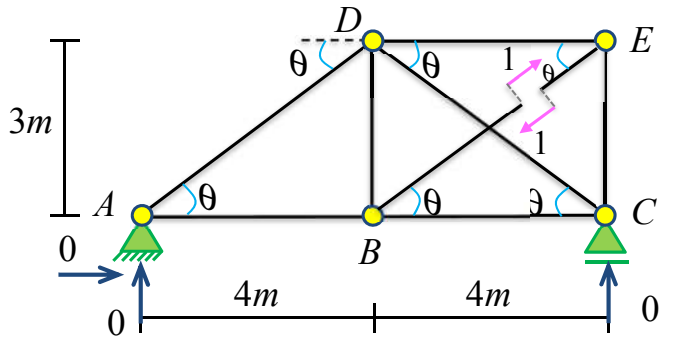
از آنجایی که خرپا تحت اثر نیروی داخلی قرار دارد از این رو عکس‌العمل تکیه‌گاهی ایجاد نخواهد شد:

$$A_x = A_y = C_y = 0$$

روش نیرو (Force Method)

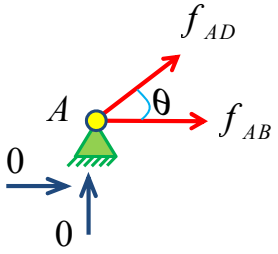
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_{AB} + f_{AD} \times \frac{4}{5} = 0$$

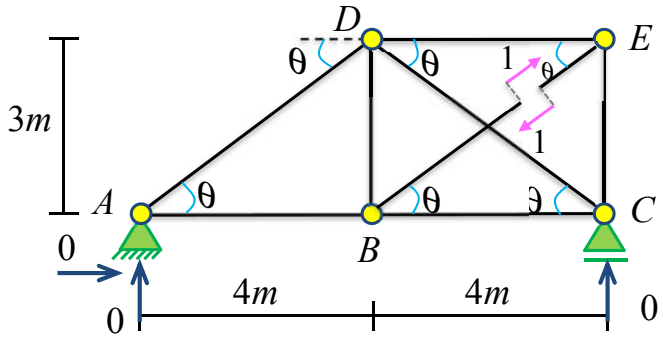
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow f_{AD} \times \frac{3}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{AB} = 0 \\ f_{AD} = 0 \end{cases}$$

روش نیرو (Force Method)

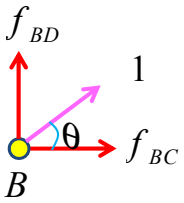
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_x=0 \Rightarrow 1\times\frac{4}{5}+f_{BC}=0$$

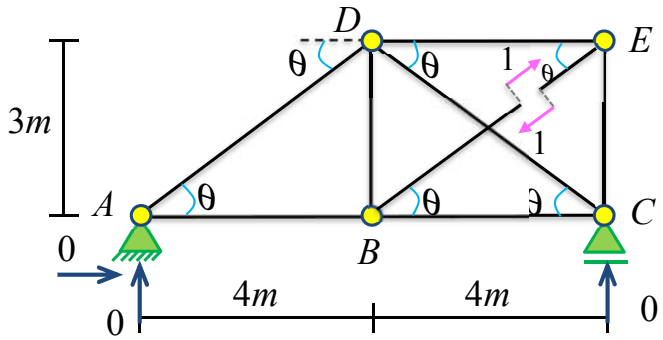
$$\sum F_y=0 \Rightarrow 1\times\frac{3}{5}+f_{BD}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BC}=-0.8 \\ f_{BD}=-0.6 \end{cases}$$

روش نیرو (Force Method)

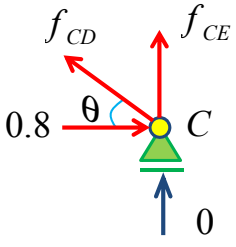
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



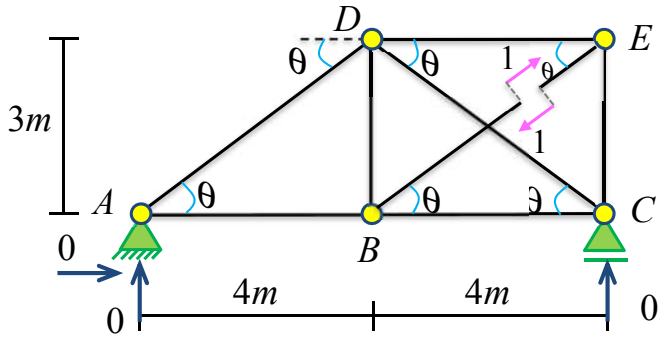
$$\sum F_x=0 \Rightarrow 0.8-f_{CD}\times\frac{4}{5}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow f_{CD}\times\frac{3}{5}+f_{CE}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{CD}=1 \\ f_{CE}=-0.6 \end{cases}$$

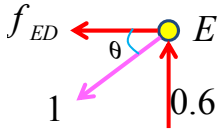
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۵):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:



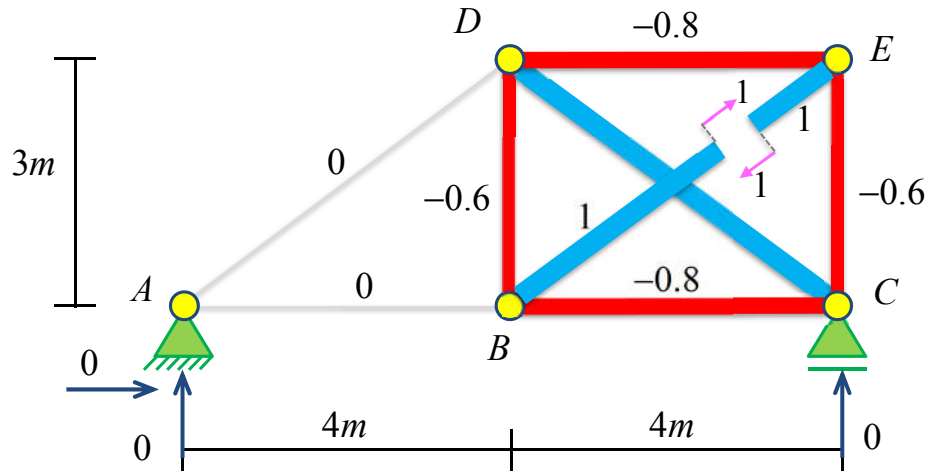
$$\sum F_x=0 \Rightarrow -1\times\frac{4}{5}-f_{ED}=0$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow 0.6-1\times\frac{3}{5}=0$$

$$\Rightarrow f_{ED}=-0.8$$

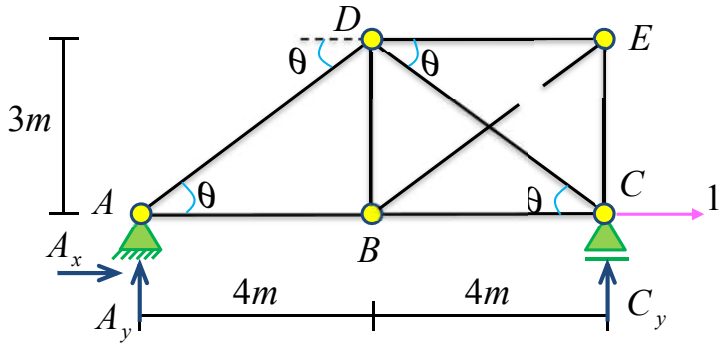
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۵):



پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۶):



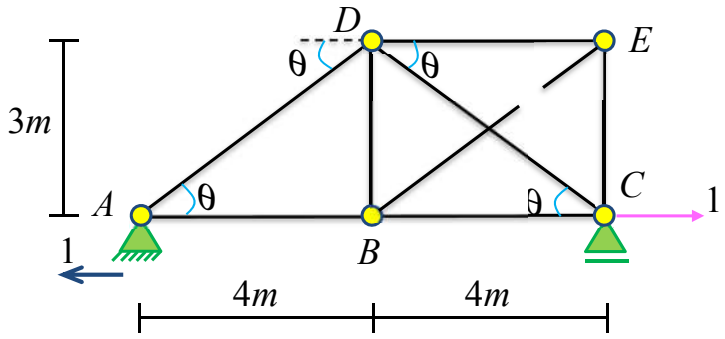
$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow A_x-1=0 \Rightarrow \boxed{A_x=-1}$$
$$\sum M_{/A}=0 \Rightarrow C_y\times 8=0 \Rightarrow \boxed{C_y=0} \quad (4.5)$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+C_y=0 \overset{(4.5)}{\Rightarrow} \boxed{A_y=0}$$

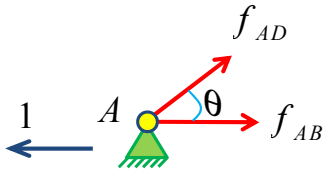
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۶):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5}\quad,\quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



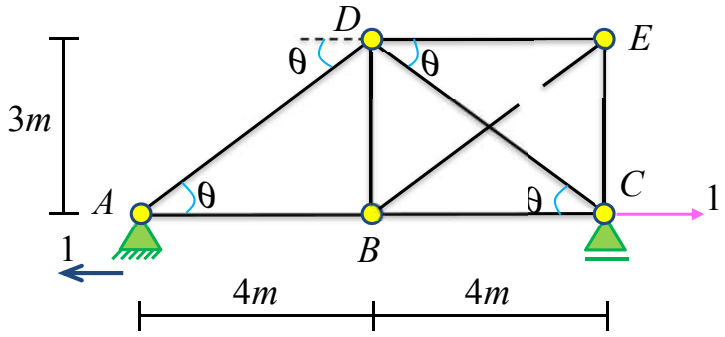
$$\sum F_x=0 \Rightarrow f_{AB}+f_{AD}\times\frac{4}{5}-1=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow f_{AD}\times\frac{3}{5}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} f_{AB}=1 \\ f_{AD}=0 \end{cases}}$$

روش نیرو (Force Method)

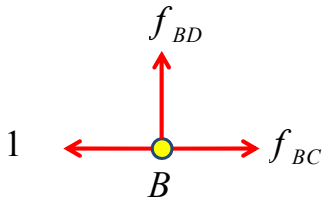
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۶):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



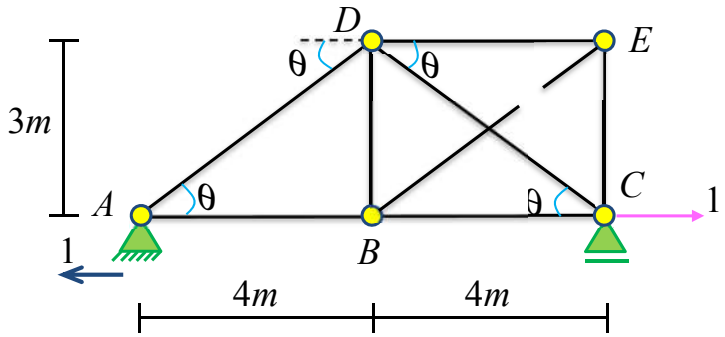
$$\sum F_x=0 \Rightarrow -1+f_{BC}=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow f_{BD}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BC}=1 \\ f_{BD}=0 \end{cases}$$

روش نیرو (Force Method)

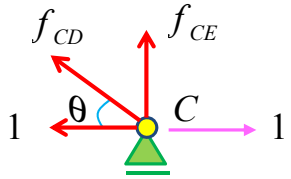
پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۶):



$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:

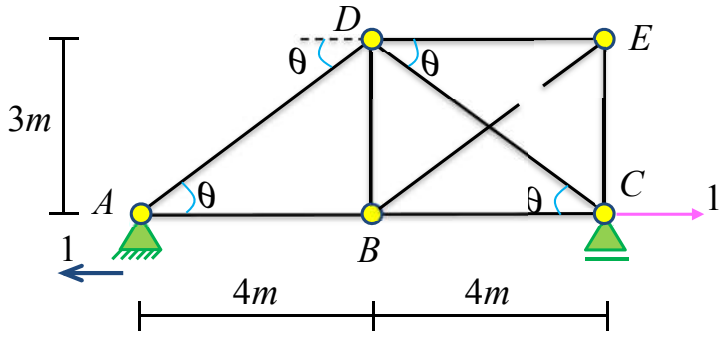


$$\sum F_x=0 \Rightarrow -1-f_{CD}\times\frac{4}{5}+1=0$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow f_{CD}\times\frac{3}{5}+f_{CE}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{CD}=0 \\ f_{CE}=0 \end{cases}$$

پاسخ مثال ۴-

آنالیز سازه شماره (۶):



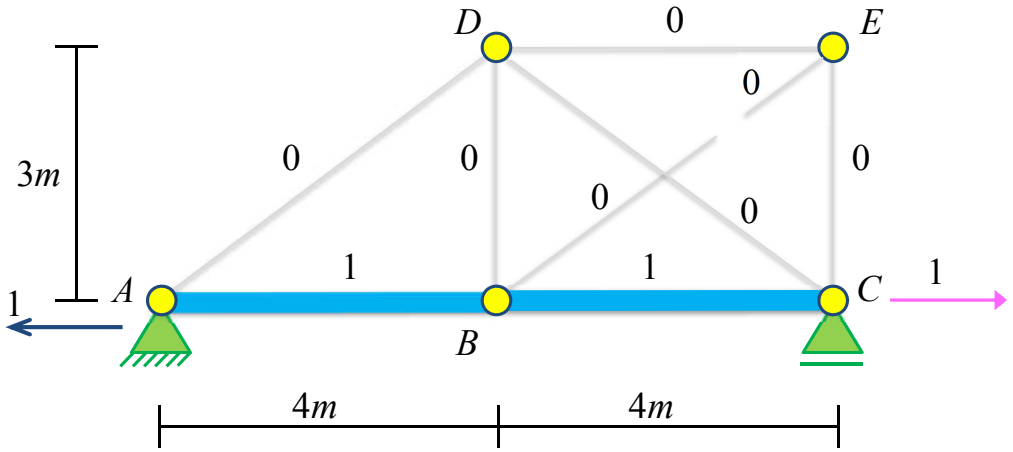
$$\sin(\theta)=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta)=\frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -f_{ED} = 0 \;\Rightarrow\; f_{ED} = 0$$

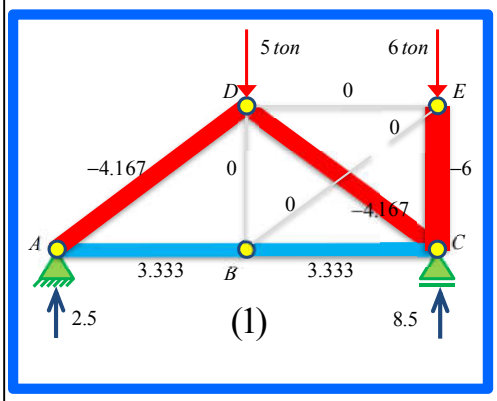
پاسخ مثال ۴-

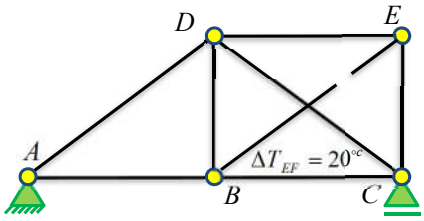
آنالیز سازه شماره (۶):

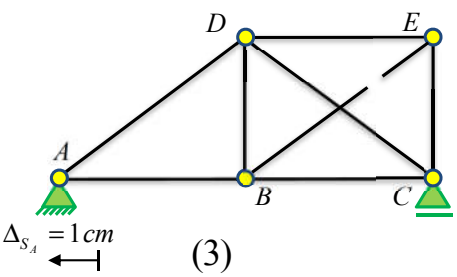


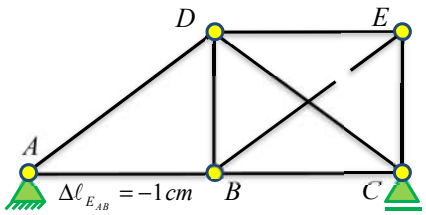
روش نیرو (Force Method)

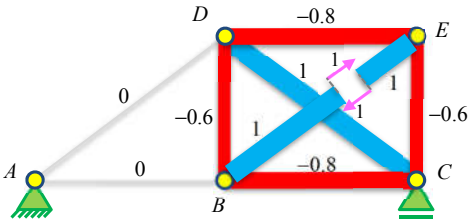
پاسخ مثال ۴-

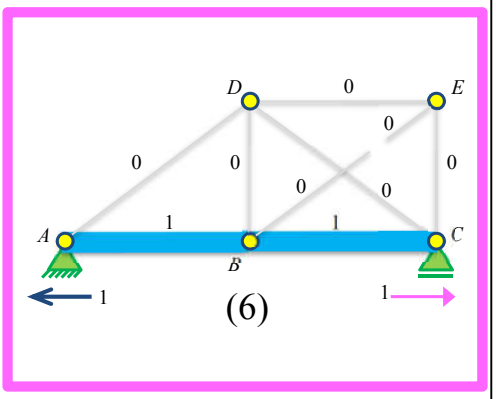










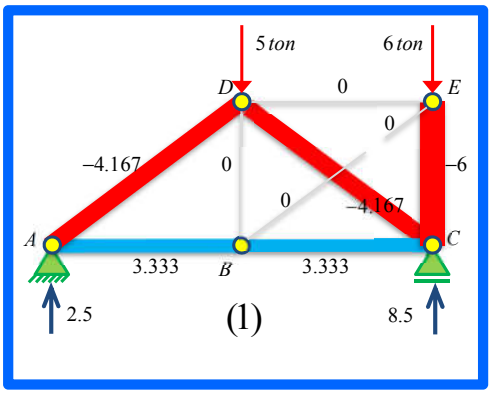


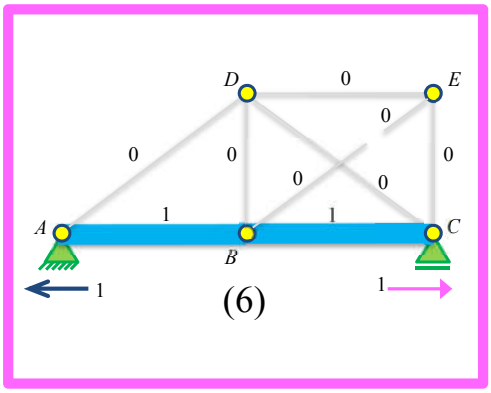
$\Delta_{H_C\,0}$: جابجایی افقی گره C در اثر بار خارجی

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_6$	$f_1\,(ton)$	$\bar{f}_6.(f_1\ell)$
AB	4	1	3.333	13.332
AD	5	0	−4.167	0
BC	4	1	3.333	13.332
BD	3	0	0	0
BE	5	0	0	0
CD	5	0	−4.167	0
CE	3	0	−6	0
ED	4	0	0	0
			$\sum$	26.664

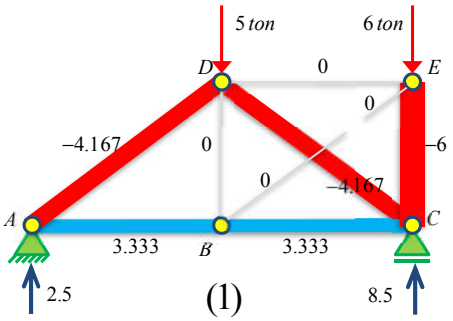




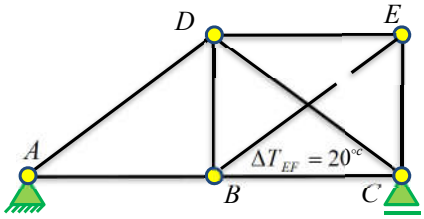
$$= \frac{26.664}{6\times10^3}\times10^2(cm) \Rightarrow \boxed{\Delta_{H_C\,0} = 0.444\,(cm)}$$

روش نیرو (Force Method)

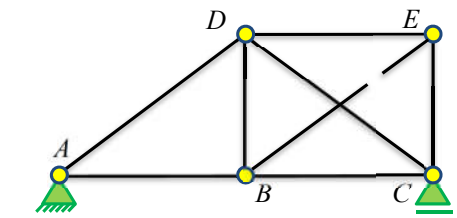
پاسخ مثال ۴-



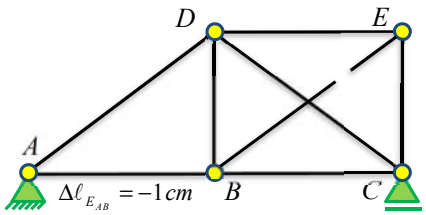
(1)



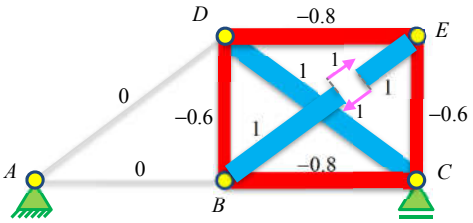
(2)



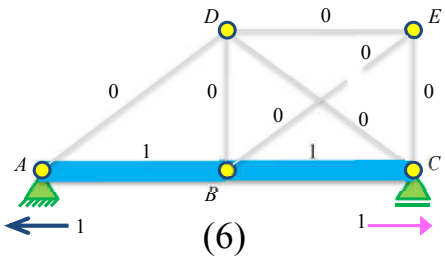
(3)



(4)



(5)



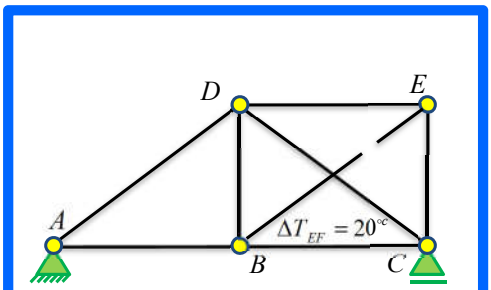
(6)

$\Delta_{H_C T}$: جابجایی افقی گره C در اثر تغییرات حرارت

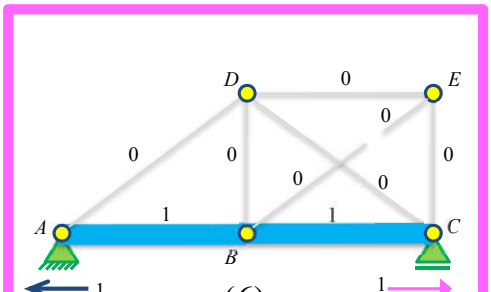
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_6$	ΔT_2	$\bar{f}_6.(\ell\Delta T_2)$
AB	4	1	0	0
AD	5	0	0	0
BC	4	1	20	80
BD	3	0	0	0
BE	5	0	0	0
CD	5	0	0	0
CE	3	0	0	0
ED	4	0	0	0
			$\sum$	80



(2)



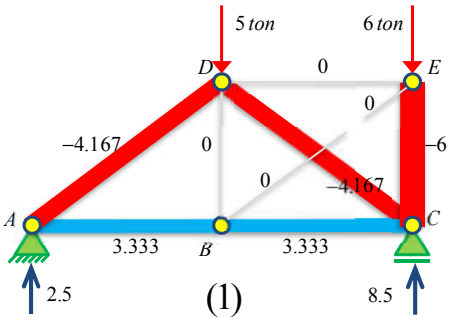
(6)

$$(L5-2):\quad \bar{1}.\Delta_{H_C T} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

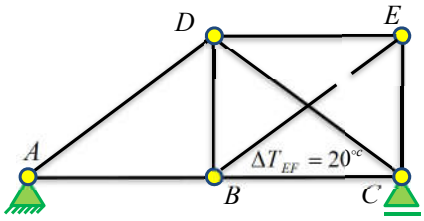
$$= 1\times 10^{-4} \times 80 \times 10^{2}\,(cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{H_C T} = 0.8\,(cm)}$$

روش نیرو (Force Method)

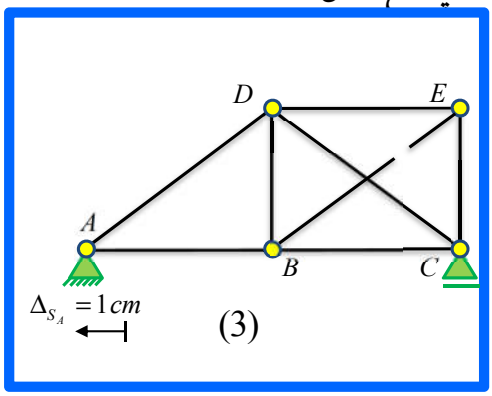
پاسخ مثال ۴-



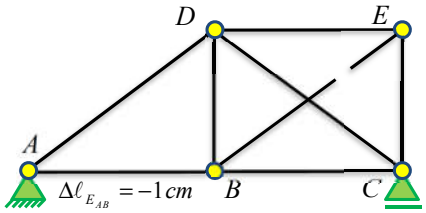
(1)



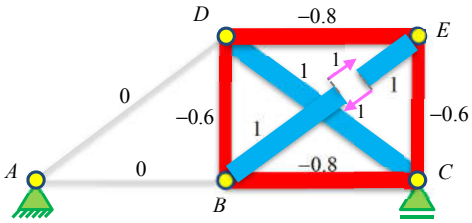
(2)



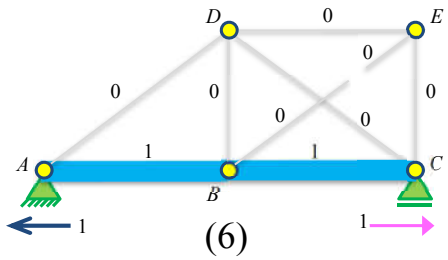
(3)



(4)



(5)



(6)

مجازی حقیقی

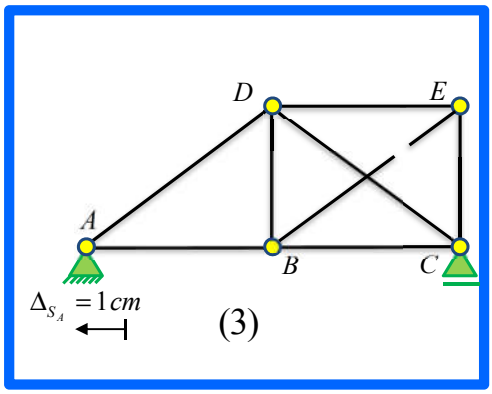
$\Delta_{H_C\,S}$: جابجایی افقی گره C در اثر نشست تکیه‌گاهی $\Rightarrow$ f_3 & $\bar{f}_6$

روش نیرو (Force Method)

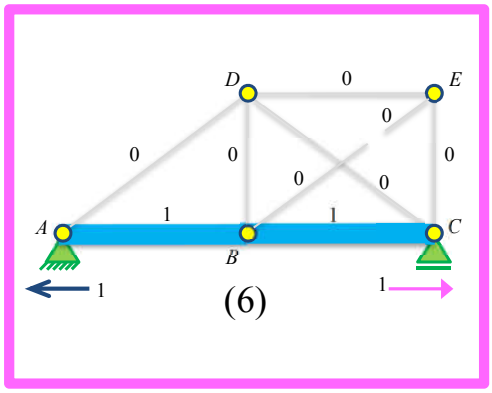
پاسخ مثال ۴-

$$(L5-2):\quad \bar{1}.\Delta_{H_C\,S} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

$$= -(1)(0.01)\times 10^2 (cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{H_C\,S} = -1\,(cm)}$$



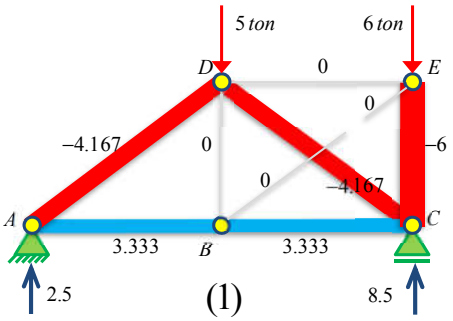
(3)



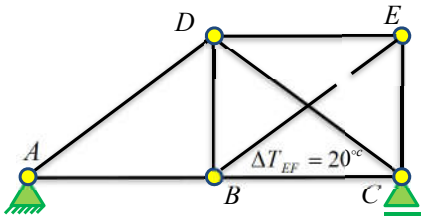
(6)

روش نیرو (Force Method)

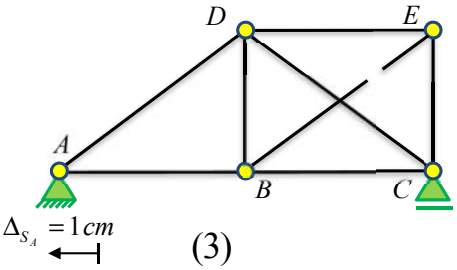
پاسخ مثال ۴-



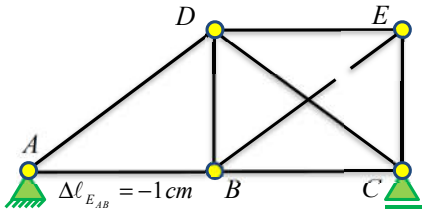
(1)



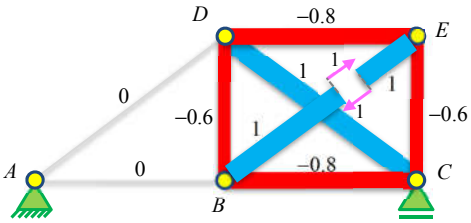
(2)



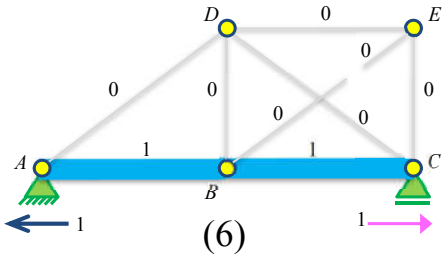
(3)



(4)



(5)



(6)

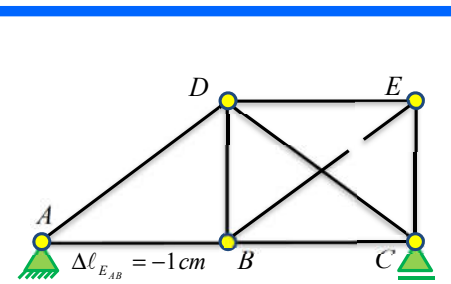
حقیقی مجازی

$\Delta_{H_C\,E}$: جابجایی افقی گره C در اثر نقص عضو $\Rightarrow$ f_4 & $\bar{f}_6$

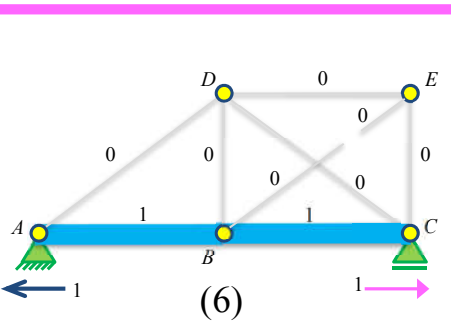
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_6$	$\Delta\ell_{E_4}$	$\bar{f}_6.(\Delta\ell_{E_4})$
AB	4	1	−0.01	−0.01
AD	5	0	0	0
BC	4	1	0	0
BD	3	0	0	0
BE	5	0	0	0
CD	5	0	0	0
CE	3	0	0	0
ED	4	0	0	0
			$\sum$	−0.01



(4)



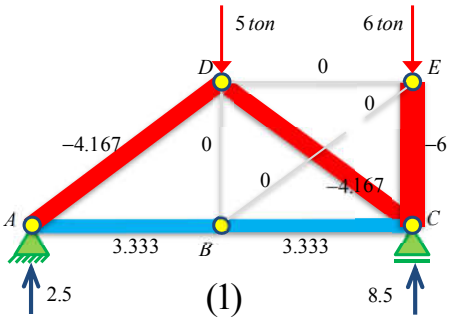
(6)

$$(L5-2):\quad \bar{1}.\Delta_{H_C\,E} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta\ell_{E_i} \right)$$

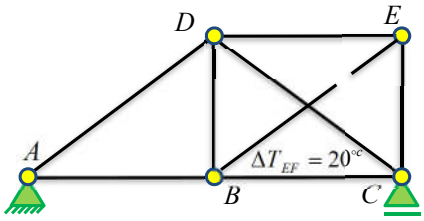
$$= -0.01 \times 10^2 (cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{H_C\,E} = -1\,(cm)}$$

روش نیرو (Force Method)

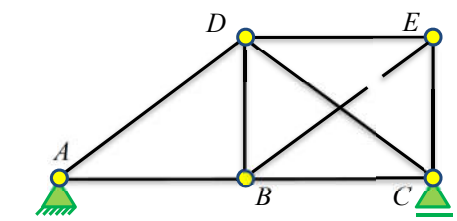
پاسخ مثال ۴-



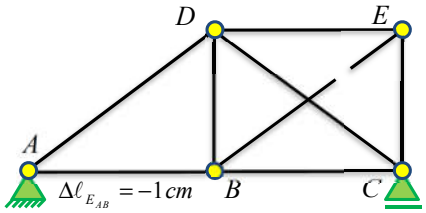
(1)



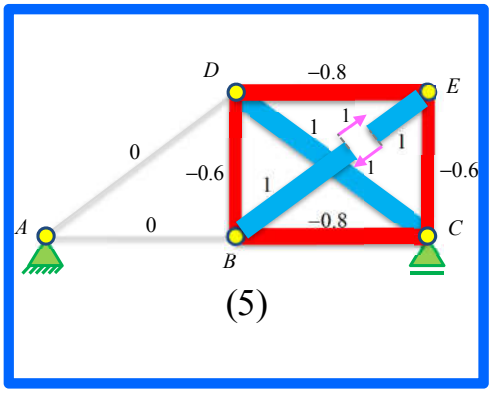
(2)



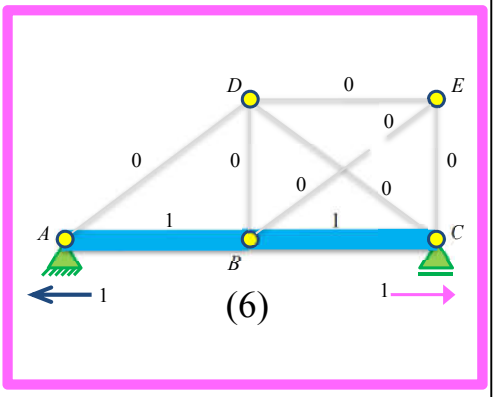
(3)



(4)



(5)



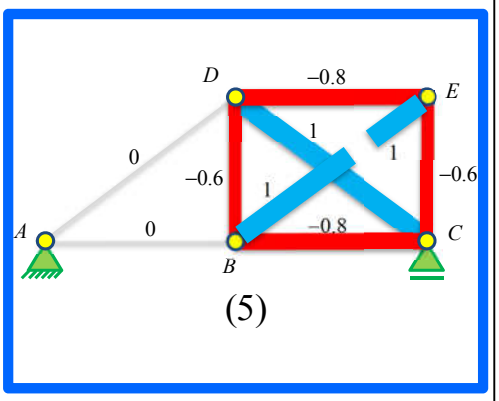
(6)

$\delta_{H_C\,BE}$: جابجایی افقی گره C در اثر بار واحد داخلی BE $\Rightarrow$ حقیقی f_5 & مجازی $\bar{f}_6$

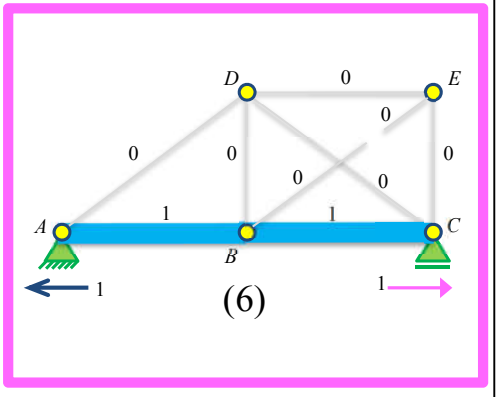
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_6$	$f_5\,(ton)$	$\bar{f}_6.(f_5\ell)$
AB	4	1	0	0
AD	5	0	0	0
BC	4	1	-0.8	-3.2
BD	3	0	-0.6	0
BE	5	0	1	0
CD	5	0	1	0
CE	3	0	-0.6	0
ED	4	0	-0.8	0
			$\sum$	-3.2



(5)



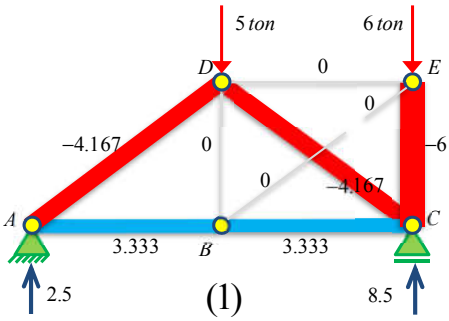
(6)

$$(L5-2):\quad \bar{1}.\delta_{H_C\,BE} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

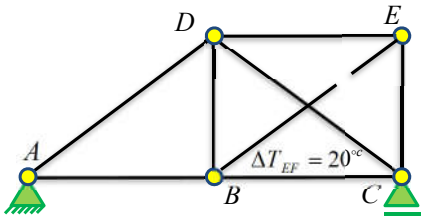
$$= \frac{-3.2}{6\times 10^3} \times 10^2 (cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{H_C\,BE} = -0.053\,(cm)}$$

روش نیرو (Force Method)

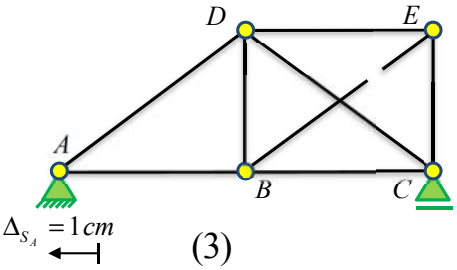
پاسخ مثال ۴-



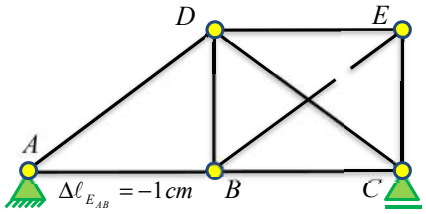
(1)



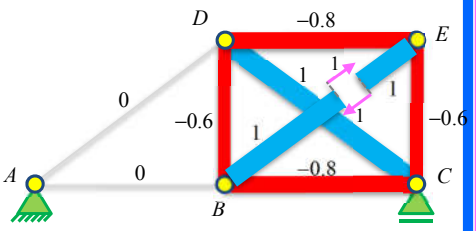
(2)



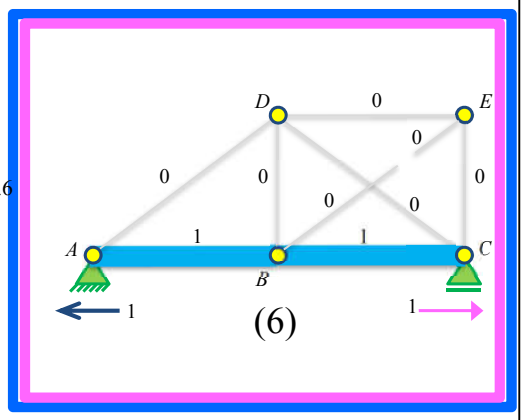
(3)



(4)



(5)



(6)

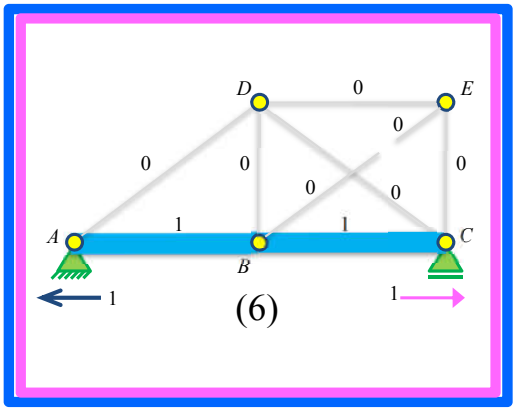
حقیقی مجازی

$\delta_{H_C H_C}$: جابجایی افقی گره C در اثر بار افقی واحد در گره C $\Rightarrow$ f_6 & $\bar{f}_6$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_6$	$f_6\,(ton)$	$\bar{f}_6.(f_6\ell)$
AB	4	1	1	4
AD	5	0	0	0
BC	4	1	1	4
BD	3	0	0	0
BE	5	0	0	0
CD	5	0	0	0
CE	3	0	0	0
ED	4	0	0	0
			$\sum$	8



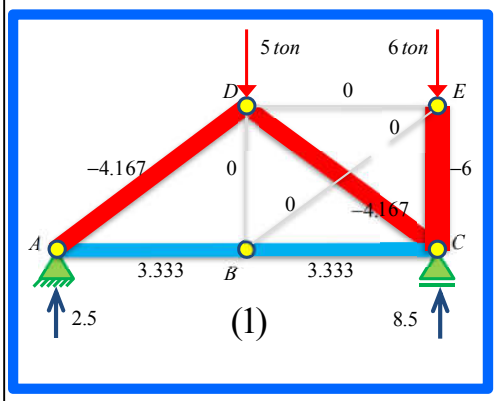
(6)

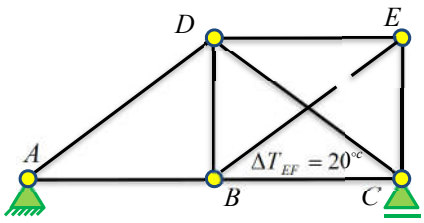
$$(L5-2):\quad \bar{1}.\delta_{H_C H_C} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i \cdot \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

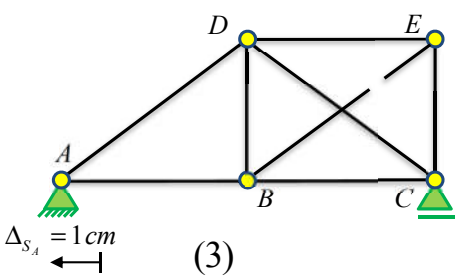
$$= \frac{8}{6\times 10^3} \times 10^2 (cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{H_C H_C} = 0.133\,(cm)}$$

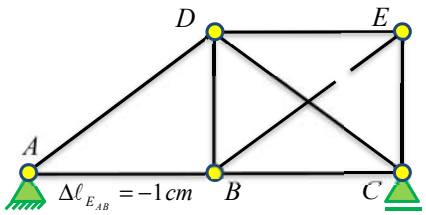
روش نیرو (Force Method)

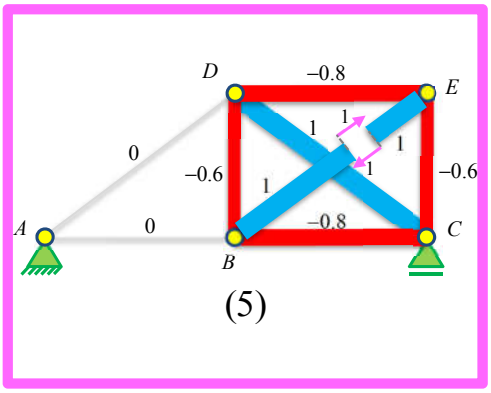
پاسخ مثال ۴-

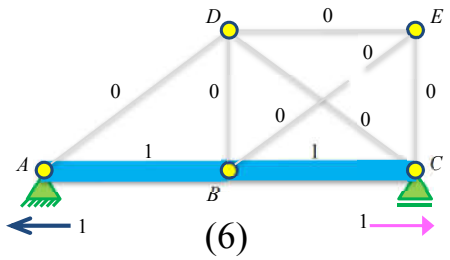












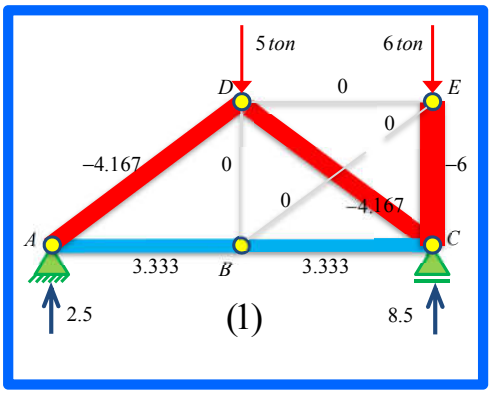
مجازی حقیقی

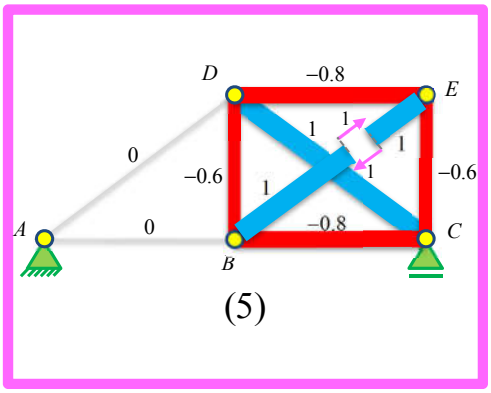
Δ_{BE_0} : جابجایی نسبی BE در اثر بار خارجی $\Rightarrow$ f_1 & $\bar{f}_5$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_5$	$f_1\,(ton)$	$\bar{f}_5.(f_1\ell)$
AB	4	0	3.333	0
AD	5	0	−4.167	0
BC	4	−0.8	3.333	−10.666
BD	3	−0.6	0	0
BE	5	1	0	0
CD	5	1	−4.167	−20.835
CE	3	−0.6	−6	10.8
ED	4	−0.8	0	0
			$\sum$	−20.701



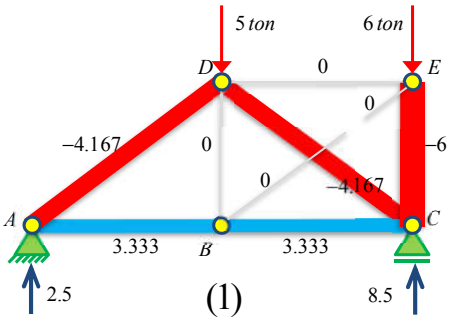


$$(L5-2):\quad \bar{1}.\Delta_{BE_0} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

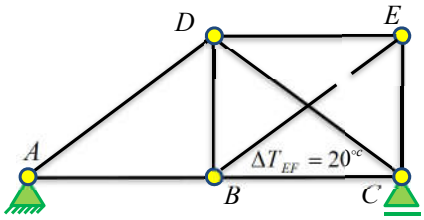
$$= \frac{-20.701}{6\times 10^3} \times 10^2 (cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{BE_0} = -0.345\,(cm)}$$

روش نیرو (Force Method)

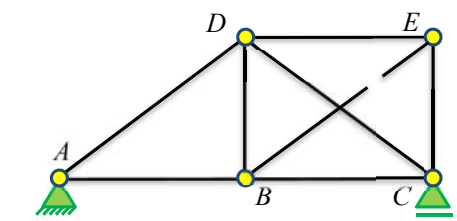
پاسخ مثال ۴-



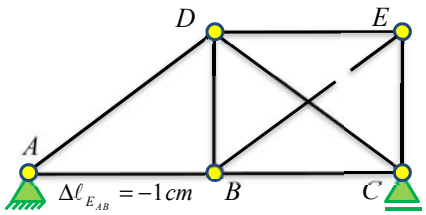
(1)



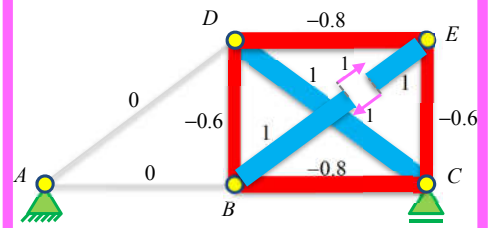
(2)



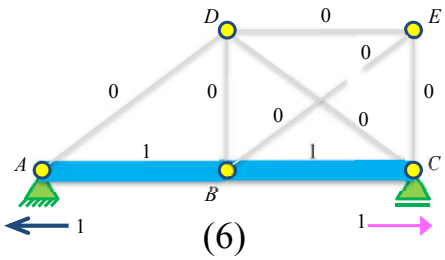
(3)



(4)



(5)



(6)

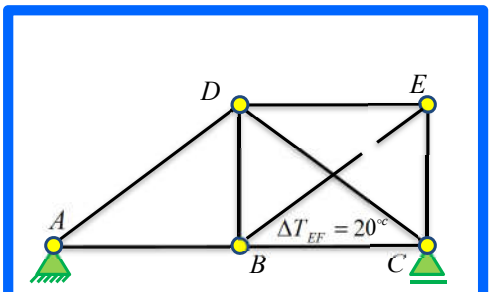
مجازی حقیقی

Δ_{BE_T} : جابجایی نسبی BE در اثر تغییرات حرارتی $\Rightarrow$ f_2 & $\bar{f}_5$

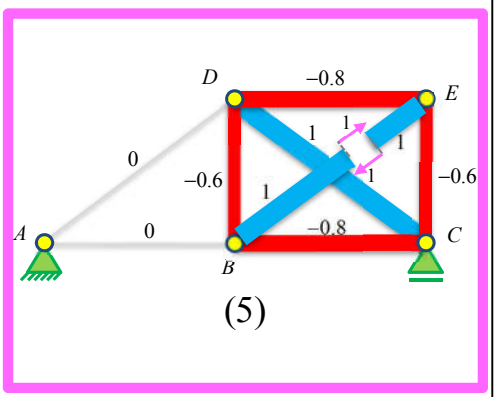
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_5$	ΔT_2	$\bar{f}_5.(\ell\Delta T_2)$
AB	4	0	0	0
AD	5	0	0	0
BC	4	−0.8	20	−64
BD	3	−0.6	0	0
BE	5	1	0	0
CD	5	1	0	0
CE	3	−0.6	0	0
ED	4	−0.8	0	0
			$\sum$	−64



(2)



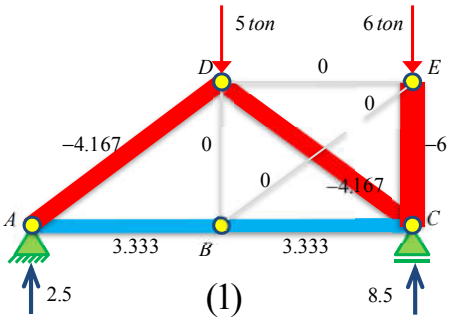
(5)

$$(L5-2):\quad \bar{1}.\Delta_{BE_T} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

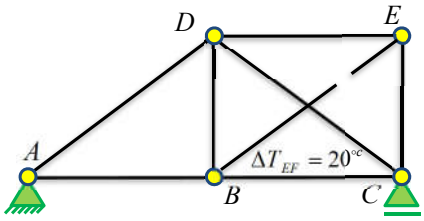
$$= 1\times 10^{-4} \times (-64) \times 10^{2}\,(cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{BE_T} = -0.64\,(cm)}$$

روش نیرو (Force Method)

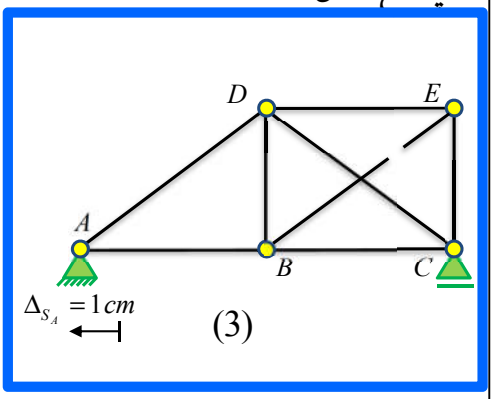
پاسخ مثال ۴-



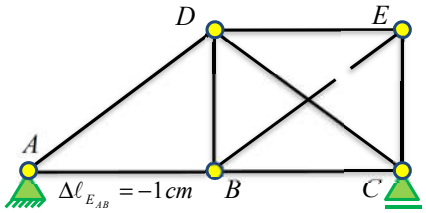
(1)



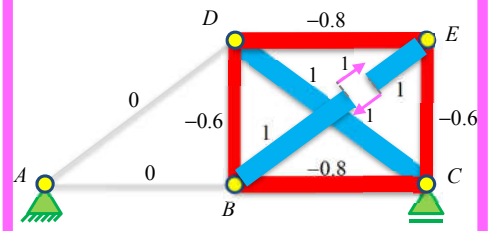
(2)



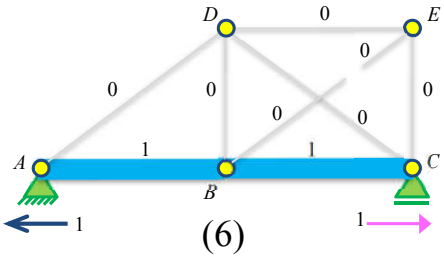
(3)



(4)



(5)



(6)

حقیقی مجازی

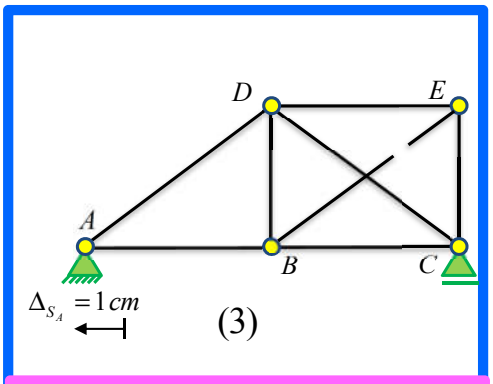
جابجایی نسبی BE در اثر نشست تکیه‌گاهی : Δ_{BE_S} $\Rightarrow$ f_3 & $\bar{f}_5$

روش نیرو (Force Method)

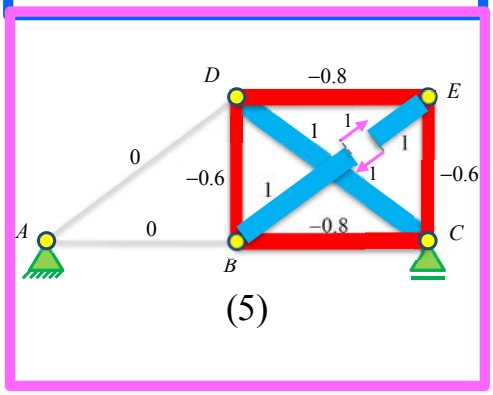
پاسخ مثال ۴-

$$(L5-2):\quad \bar{1}.\Delta_{BE_S} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i \cdot \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

$$= (0)(0.01) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{BE_S} = 0}$$



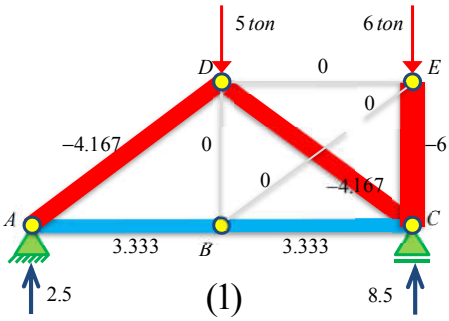
(3)



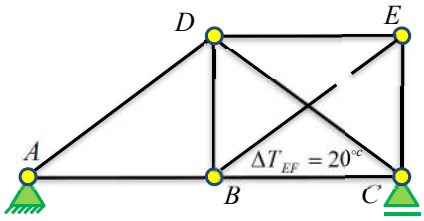
(5)

روش نیرو (Force Method)

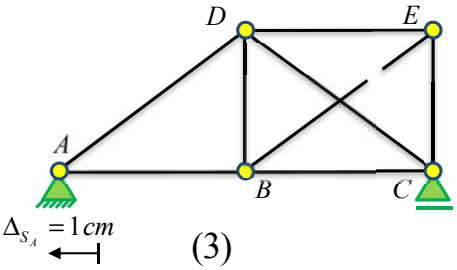
پاسخ مثال ۴-



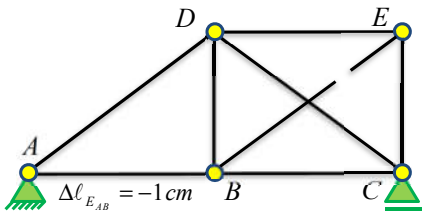
(1)



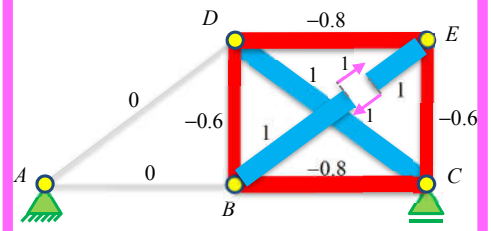
(2)



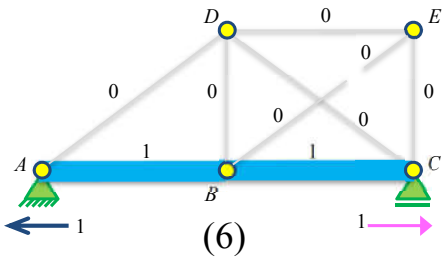
(3)



(4)



(5)



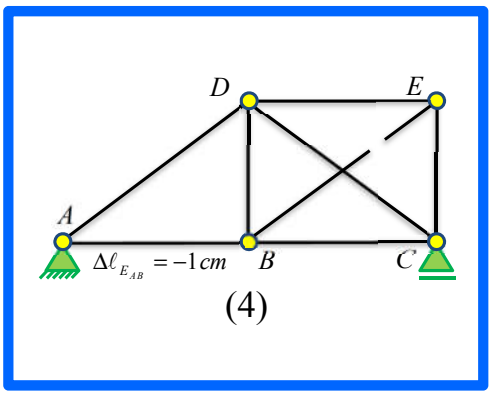
(6)

Δ_{BE_E} : جابجایی نسبی BE در اثر نقص عضو $\Rightarrow$ حقیقی f_4 & مجازی $\bar{f}_5$

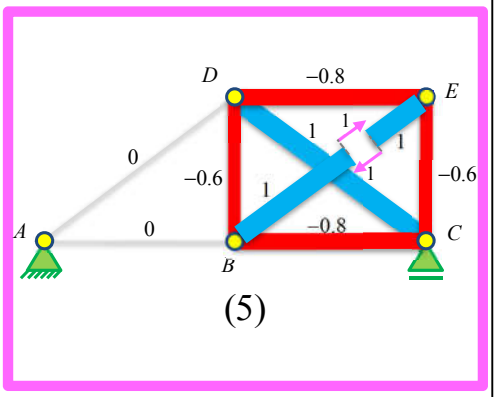
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_5$	$\Delta\ell_{E_4}$	$\bar{f}_5.(\Delta\ell_{E_4})$
AB	4	0	−0.01	0
AD	5	0	0	0
BC	4	−0.8	0	0
BD	3	−0.6	0	0
BE	5	1	0	0
CD	5	1	0	0
CE	3	−0.6	0	0
ED	4	−0.8	0	0
			$\sum$	0



(4)



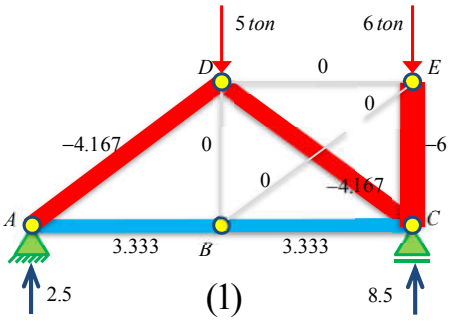
(5)

$$(L5-2):\quad \overline{1}.\Delta_{BE_E} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta\ell_{E_i} \right)$$

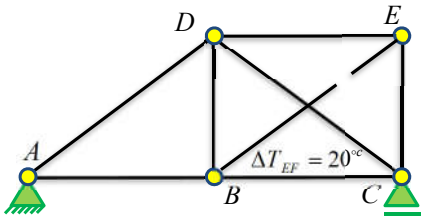
$$= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta_{BE_E} = 0}$$

روش نیرو (Force Method)

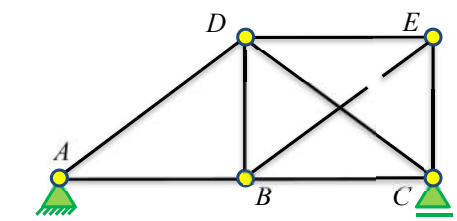
پاسخ مثال ۴-



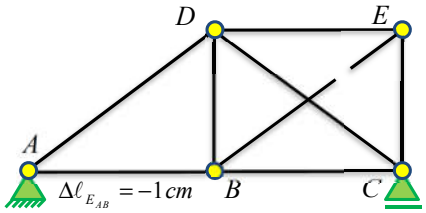
(1)



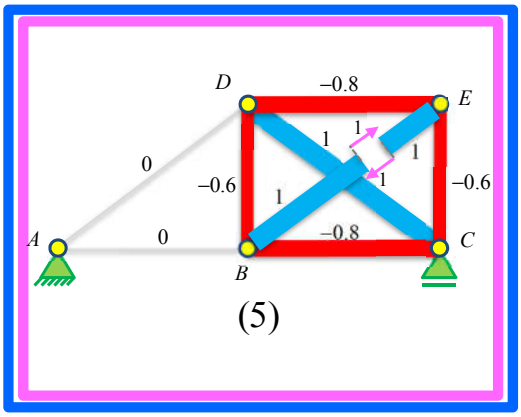
(2)



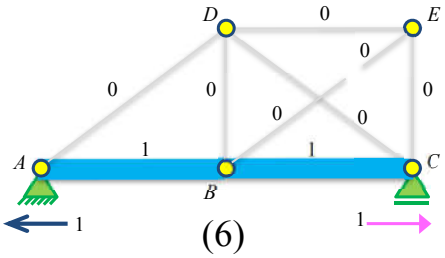
(3)



(4)



(5)



(6)

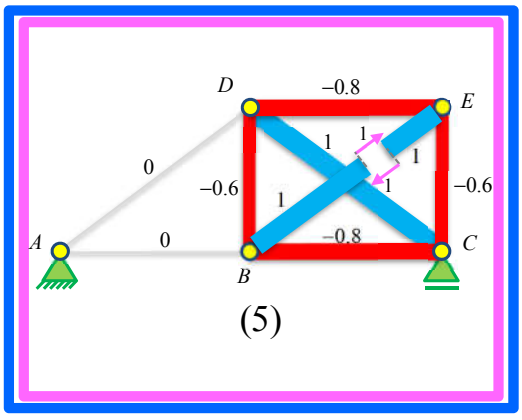
حقیقی مجازی

جابجایی نسبی BE در اثر بار واحد داخلی BE : $\delta_{BE_{BE}} \Rightarrow \boxed{f_5}$ & $\boxed{\bar{f}_5}$

روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\ell\,(m)$	$\bar{f}_5$	$f_5\,(ton)$	$\bar{f}_5.(f_5\ell)$
AB	4	0	0	0
AD	5	0	0	0
BC	4	-0.8	-0.8	2.56
BD	3	-0.6	-0.6	1.08
BE	5	1	1	5
CD	5	1	1	5
CE	3	-0.6	-0.6	1.08
ED	4	-0.8	-0.8	2.56
			$\sum$	17.28



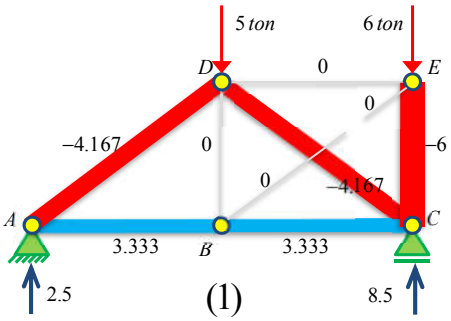
(5)

$$(L5-2):\quad \bar{1}.\delta_{BE_{BE}} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i . \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right)$$

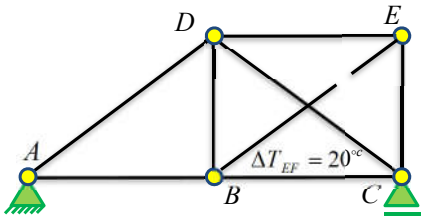
$$= \frac{17.28}{6\times 10^3} \times 10^2 (cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{BE_{BE}} = 0.288\,(cm)}$$

روش نیرو (Force Method)

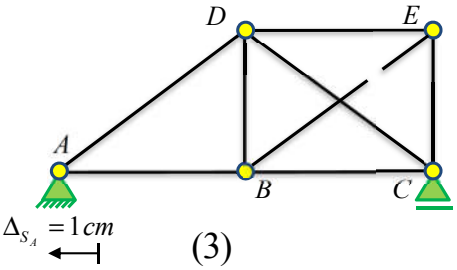
پاسخ مثال ۴-



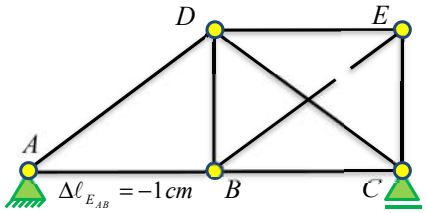
(1)



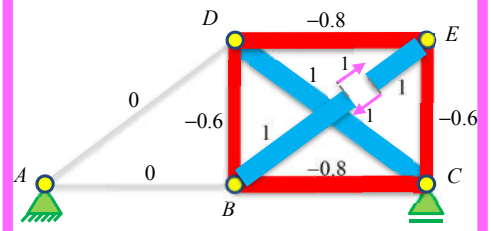
(2)



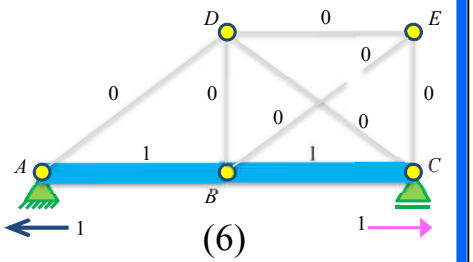
(3)



(4)



(5)



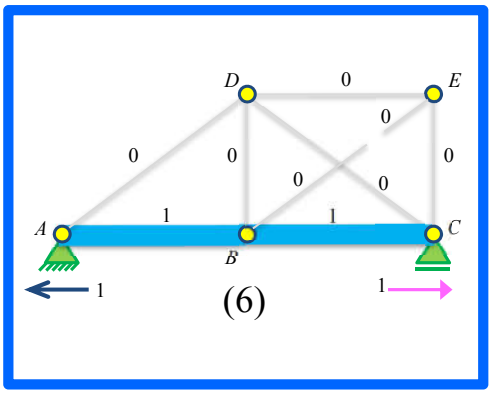
(6)

حقیقی مجازی

$\delta_{BE_{H_C}}$: جابجایی نسبی BE در اثر بار افقی واحد در گره C $\Rightarrow$ f_6 & $\bar{f}_5$

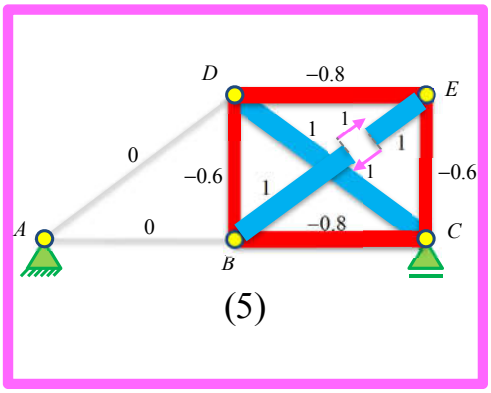
روش نیرو (Force Method)

پاسخ مثال ۴-



(6)

$$\delta_{BE_{H_C}} = -0.053\,(cm)$$



(5)

پاسخ مثال ۴-

$$(4.3) \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{BE} \\ C_x \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{H_C\,BE} & \delta_{H_C\,H_C} \\ \delta_{BE_{BE}} & \delta_{BE_{H_C}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta_{H_C\,0} + \Delta_{H_C\,T} + \Delta_{H_C\,S} + \Delta_{H_C\,E} \\ \Delta_{BE\,0} + \Delta_{BE\,T} + \Delta_{BE\,S} + \Delta_{BE\,E} \end{Bmatrix}$$

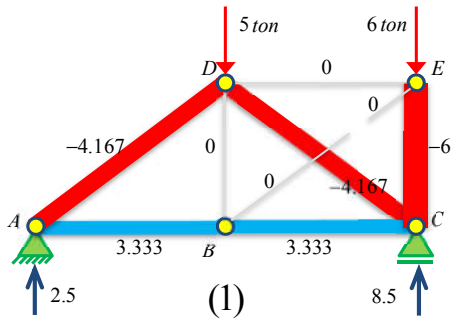
$$= -\begin{bmatrix} -0.053 & 0.133 \\ 0.288 & -0.053 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0.444 + 0.8 - 1 - 1 \\ -0.345 - 0.64 \end{Bmatrix}$$

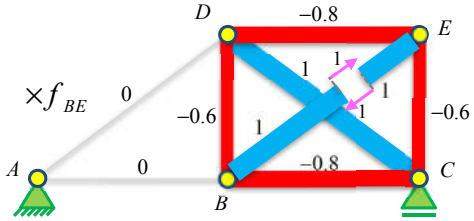
$$= -\begin{bmatrix} -0.053 & 0.133 \\ 0.288 & -0.053 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -0.756 \\ -0.985 \end{Bmatrix}$$

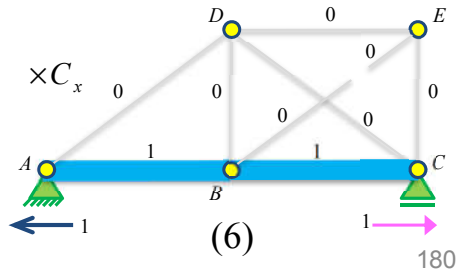
$$\Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} f_{BE} \\ C_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.82 & (ton) \\ 7.60 & (ton) \end{Bmatrix}}$$

پاسخ مثال ۴-

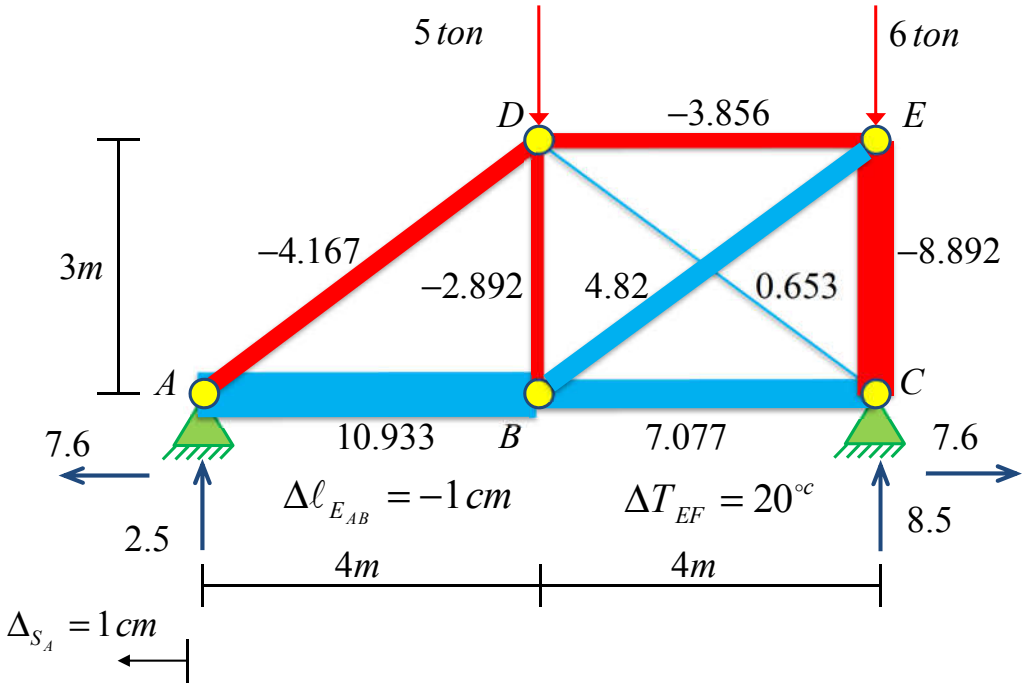
عضو	f_1	f_5	f_6	$f = f_1 + (4.82)f_5 + (7.6)f_6$
AB	3.333	0	1	10.933
AD	−4.167	0	0	−4.167
BC	3.333	−0.8	1	7.077
BD	0	−0.6	0	−2.892
BE	0	1	0	4.82
CD	−4.167	1	0	0.653
CE	−6	−0.6	0	−8.892
ED	0	−0.8	0	−3.856
A_x	0	0	−1	−7.6
A_y	2.5	0	0	2.5
C_x	0	0	1	7.6
C_y	8.5	0	0	8.5







پاسخ مثال ۴-



پاسخ مثال ۴-

مدل سازی در ETABS:

برای مدل سازی نقص عضو، نیروی معادل تغییر طول ناشی از نقص عضو در دو گره ابتدا و انتهای عضو AB به صورت فشاری در ETABS وارد شده است:

$$F_{\Delta\ell_E} = \left(\frac{EA}{\ell}\right)_{AB} \times \Delta\ell_{E_{AB}} = \left(\frac{6\times10^3}{4}\right)_{AB} \times(-0.01) \;\Rightarrow\; F_{\Delta\ell_E} = -15\,ton$$

از آنجایی که اثر نقص عضو در ETABS به صورت نیروی گره‌ای مدل شده است بنابراین در بخش نمایش نیروهای داخلی اعضا، نیروی 15 ton نمایش داده نمی‌شود. از این رو، نیروی عضو AB به دست آمده از نتیجه آنالیز کامپیوتری باید با 15 ton جمع شود؛ تا نتایج آنالیز دستی و کامپیوتری یکی شود.

ETABS File Name: **06-Example-04.EDB**