



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها (Virtual Work Method)

تهیه کننده: کاوه کرمی
دانشیار مهندسی سازه

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی: رفع محدودیت‌های روش‌های قبلی

روش کار حقیقی

تغییر شکل در محل اثر
یک نیروی متمرکز واقعی.

روش کاستیلیانو

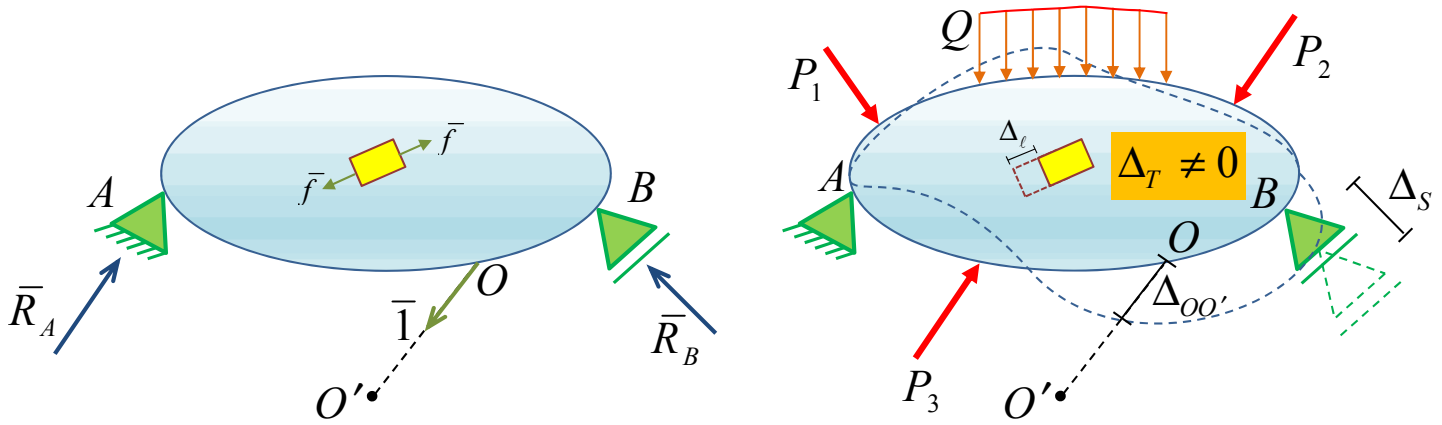
تغییر شکل در هر گره دلخواه از
سازه با فرض عدم نشست تکیه‌گاه‌ها
و ثابت ماندن درجه حرارت.

روش کار مجازی

تغییر شکل در هر گره
دلخواه از سازه



روش کار مجازی (Virtual Work Method)



کار مجازی انجام شده توسط
نیروهای مجازی خارجی



کار مجازی انجام شده توسط
نیروهای مجازی داخلی

$$\bar{1} \cdot \Delta_{OO'} + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \quad (1)$$

Δ_ℓ : تغییر شکل ناشی از نیروهای واقعی، تغییرات حرارتی و نقص عضو

Δ_S : نشست تکیه گاهی ناشی از نیروهای واقعی

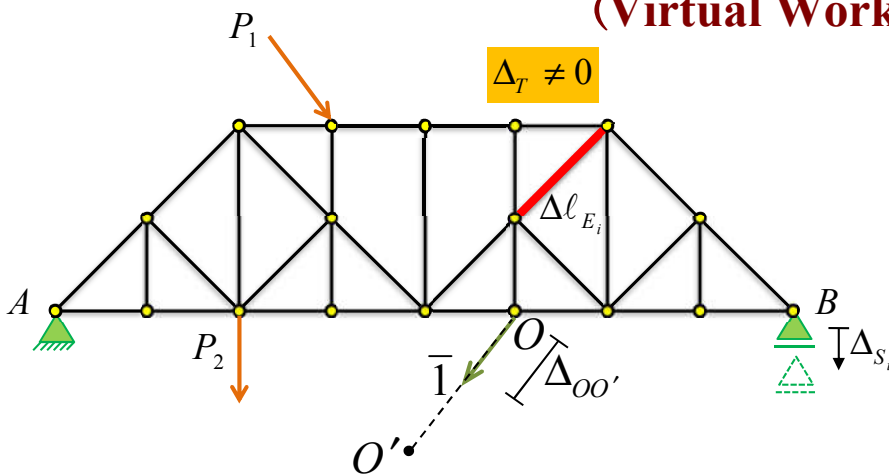
$\bar{f}$: نیروهای داخلی ناشی از بار مجازی واحد
 $\bar{R}_B$: عکس العمل تکیه گاهی ناشی از بار مجازی واحد

$\Delta_{OO'}$: جابجایی گره O در راستای خط OO' ناشی از نیروهای واقعی

3

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا



فرضیات:

- تغییر شکل های واقعی در ناحیه الاستیک (خطی) باشد.
- نیروهای وارد بر خرپا در گره های خرپا اعمال می شود.

$$(1) \Rightarrow \bar{1} \cdot \Delta_{OO'} + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \sum \bar{f}_i \cdot \left(\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i \ell_i \Delta T_i + \Delta \ell_{E_i} \right) \quad (2)$$

ℓ_i : طول عضو i ام

A_i : سطح مقطع عضو i ام

E_i : مدول الاستیسیته عضو i ام

α_i : ضریب انبساط حرارتی عضو i ام

ΔT_i : تغییرات حرارتی عضو i ام

$\frac{f_i \ell_i}{E_i A_i}$: تغییر شکل ناشی از نیروهای واقعی در عضو i ام

$\alpha_i \ell_i \Delta T_i$: تغییر شکل ناشی از تغییرات حرارتی در عضو i ام

f_i : نیروی داخلی عضو i ام ناشی از بارهای واقعی

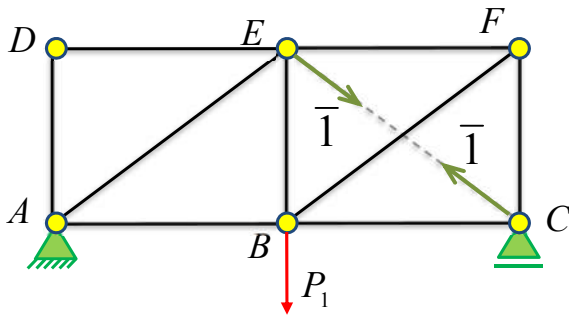
$\bar{f}_i$: نیروی داخلی عضو i ام ناشی از بار واحد مجازی

$\Delta \ell_{E_i}$: تغییر شکل ناشی از نقص عضو i ام (عضو کوتاهتر منفی، عضو با طول بیشتر مثبت)

4

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نحوه اعمال بار مجازی واحد در تعیین سایر تغییر شکل ها

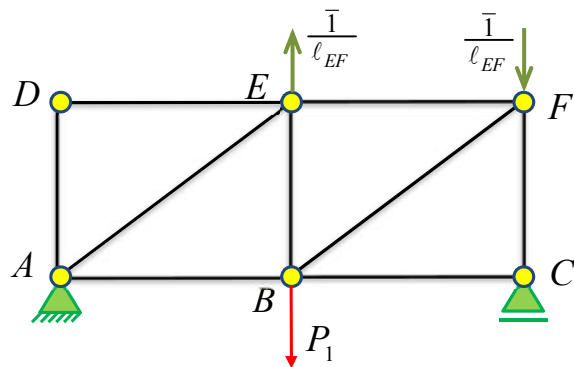


$$(1) \Rightarrow \bar{1} \cdot (\Delta_E^{\searrow}) + \bar{1} \cdot (\Delta_C^{\swarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\bar{1} \cdot (\Delta_E^{\searrow} + \Delta_C^{\swarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{1} \cdot (\Delta_{E-C}^{\swarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell} \quad (3)$$

$\Delta_{E-C}^{\swarrow}$: تغییر شکل نسبی دو گره E و C در امتداد خط اتصال



$$(1) \Rightarrow \frac{\bar{1}}{\ell_{EF}} \cdot (\Delta_E^{\uparrow}) + \frac{\bar{1}}{\ell_{EF}} \cdot (\Delta_F^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{1}}{\ell_{EF}} \cdot (\Delta_E^{\uparrow} + \Delta_F^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\bar{1} \cdot \left(\frac{\Delta_{E-F}^{\downarrow}}{\ell_{EF}} \right) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

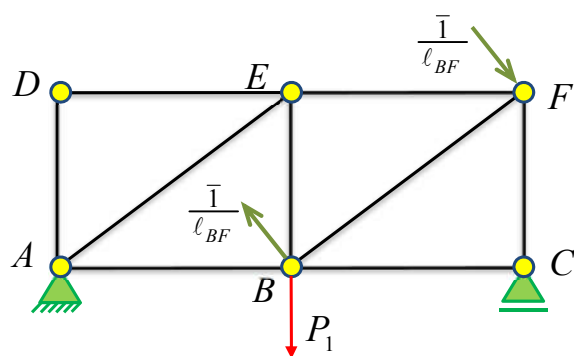
$$\boxed{\bar{1} \cdot (\theta_{EF}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell} \quad (4)$$

θ_{EF} : دوران عضو EF نسبت به خود عضو

5

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نحوه اعمال بار مجازی واحد در تعیین سایر تغییر شکل ها



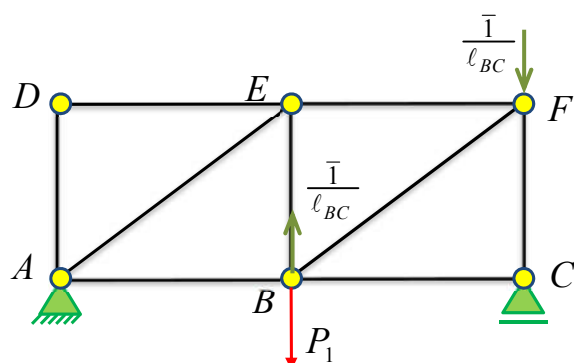
$$(1) \Rightarrow \frac{\bar{1}}{\ell_{BF}} \cdot (\Delta_B^{\swarrow}) + \frac{\bar{1}}{\ell_{BF}} \cdot (\Delta_F^{\searrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{1}}{\ell_{BF}} \cdot (\Delta_B^{\swarrow} + \Delta_F^{\searrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\bar{1} \cdot \left(\frac{\Delta_{B-F}^{\swarrow}}{\ell_{BF}} \right) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{1} \cdot (\theta_{BF}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell} \quad (5)$$

θ_{BF} : دوران عضو BF نسبت به خود عضو



$$(1) \Rightarrow \frac{\bar{1}}{\ell_{BC}} \cdot (\Delta_B^{\uparrow}) + \frac{\bar{1}}{\ell_{BC}} \cdot (\Delta_F^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{1}}{\ell_{BC}} \cdot (\Delta_B^{\uparrow} + \Delta_F^{\downarrow}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\bar{1} \cdot \left(\frac{\Delta_{B-F}^{\downarrow}}{\ell_{BC}} \right) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{1} \cdot (\theta_{BF/BC}) + \bar{R}_B \Delta_S = \sum \bar{f} \cdot \Delta_\ell} \quad (6)$$

$\theta_{BF/BC}$: دوران عضو BF نسبت به عضو BC

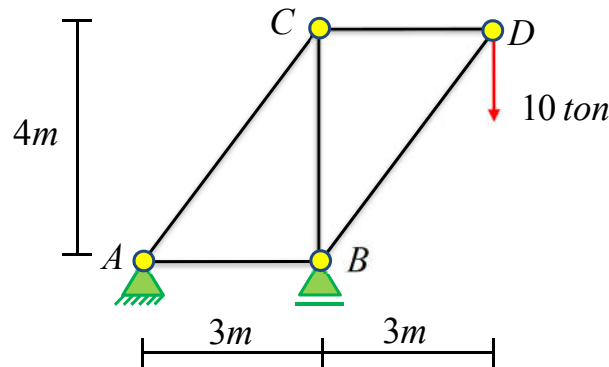
6

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

مثال ۱- در خریای نشان داده شده جابجایی افقی گره C را محاسبه نمایید. $\Delta h_C = ?$

$$EA = 2 \times 10^4 \text{ (ton)}$$



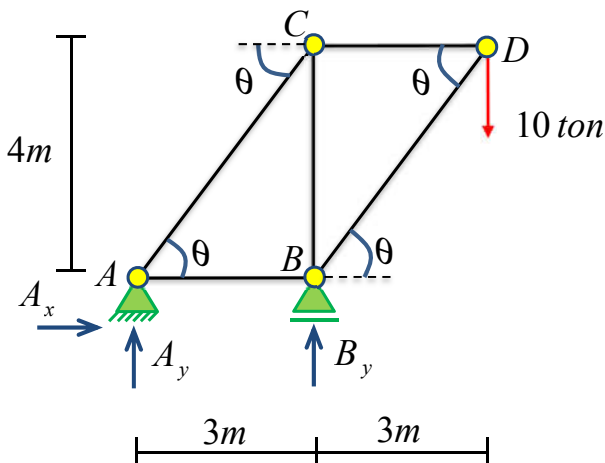
7

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۱-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\sin(\theta) = \frac{4}{5} = 0.8 \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{3}{5} = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خریا عکس العمل های

تکیه گاهی به دست می آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

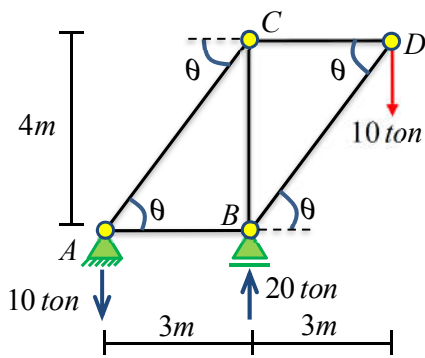
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 3 - 10 \times 6 = 0 \Rightarrow B_y = 20 \text{ ton} \quad (1.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 = 0 \stackrel{(1.1)}{\Rightarrow} A_y = -10 \text{ ton}$$

8

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

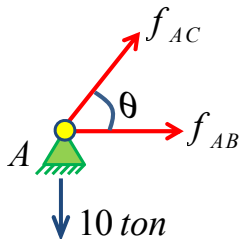


$$\sin(\theta) = 0.8$$

$$\cos(\theta) = 0.6$$

پاسخ مثال ۱-

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

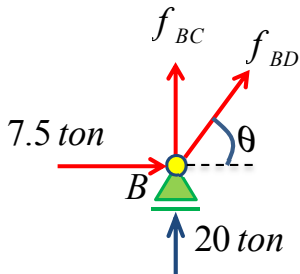


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_{AB} + f_{AC}(0.6) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + f_{AC}(0.8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{AB} = -7.5 \text{ ton} \\ f_{AC} = 12.5 \text{ ton} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 7.5 + f_{BD}(0.6) = 0$$

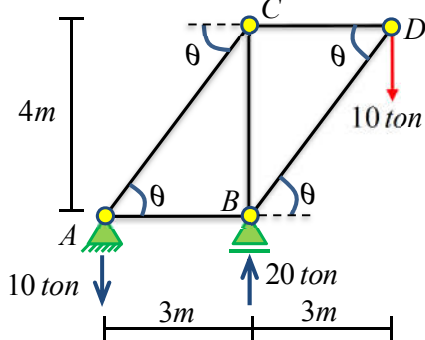
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 20 + f_{BC} + f_{BD}(0.8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BD} = -12.5 \text{ ton} \\ f_{BC} = -10 \text{ ton} \end{cases}$$

9

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

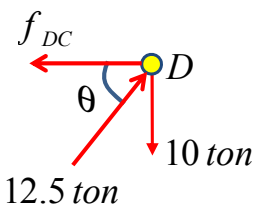


$$\sin(\theta) = 0.8$$

$$\cos(\theta) = 0.6$$

پاسخ مثال ۱-

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -f_{DC} + 12.5(0.6) = 0$$

$$\Rightarrow f_{DC} = 7.5 \text{ ton}$$

10

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۱-

سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی (با مقدار واحد) در گره C اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta) = \frac{4}{5} = 0.8 \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{3}{5} = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خریا عکس عمل‌های

تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{A}_x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x = 1}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{B}_y \times 3 + 1 \times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_y = -\frac{4}{3}} \quad (1.2)$$

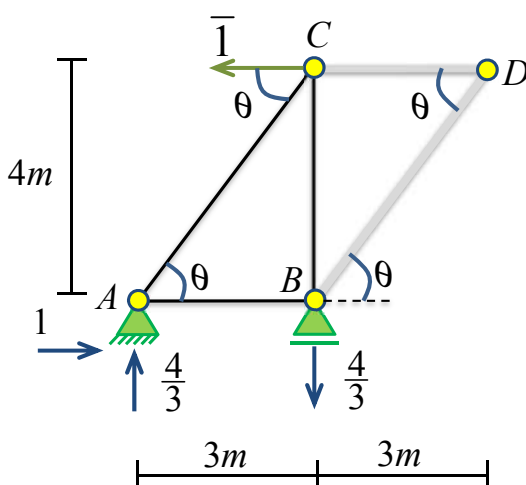
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y + \bar{B}_y = 0 \stackrel{(1.2)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y = \frac{4}{3}}$$

11

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۱-



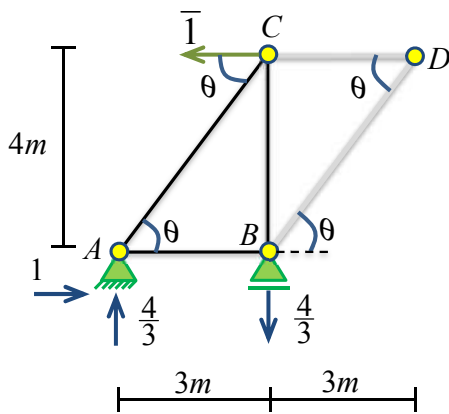
با توجه به آن که در گره D تنها دو عضو به هم متصل شده و همچنین از آنجایی که بار خارجی در این گره اعمال نشده است می‌توان نتیجه گرفت عضوهای CD و BD صفر نیرویی می‌باشند.

12

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

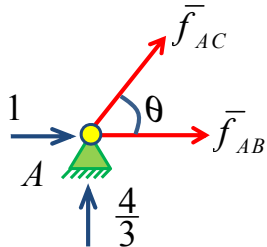
پاسخ مثال ۱-



$$\sin(\theta) = 0.8$$

$$\cos(\theta) = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

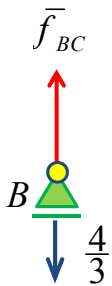


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{f}_{AB} + \bar{f}_{AC}(0.6) + 1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} + \bar{f}_{AC}(0.8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}_{AB} = 0 \\ \bar{f}_{AC} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} + \bar{f}_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{BC} = \frac{4}{3}$$

13

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال ۱-

عضو	ℓ_i (m)	$\bar{f}_i$	f_i (ton)	$\bar{f}_i \cdot (f_i \ell_i)$
AB	3	0	-7.5	0
AC	5	$-\frac{5}{3}$	12.5	-104.167
BD	5	0	-12.5	0
BC	4	$\frac{4}{3}$	-10	-53.333
DC	3	0	7.5	0
Σ				-157.5

$$(1.3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h_c = -0.7875 \text{ (cm)}$$

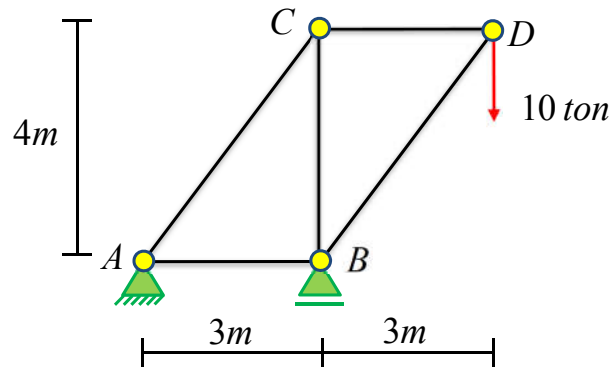
جابجایی در خلاف جهت نیروی واحد مجازی ایجاد می شود.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

مثال ۲- در خریای نشان داده شده جابجایی نسبی دو گره A و D نسبت به هم را محاسبه نمایید. $\Delta_{AD} = ?$

$$EA = 2 \times 10^4 \text{ (ton)}$$



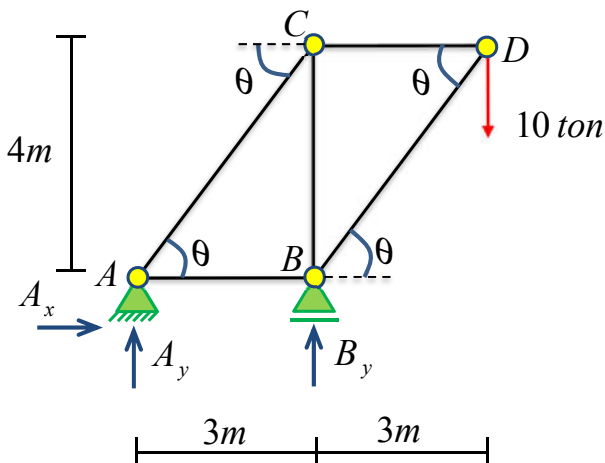
15

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۲-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\sin(\theta) = \frac{4}{5} = 0.8 \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{3}{5} = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خریا عکس العمل های

تکیه گاهی به دست می آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 3 - 10 \times 6 = 0 \Rightarrow B_y = 20 \text{ ton} \quad (2.1)$$

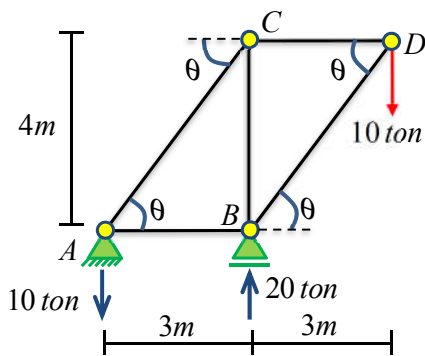
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 = 0 \stackrel{(2.1)}{\Rightarrow} A_y = -10 \text{ ton}$$

16

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

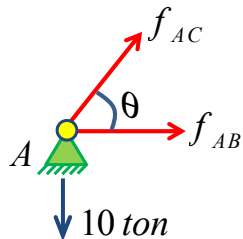
پاسخ مثال ۲-



$$\sin(\theta) = 0.8$$

$$\cos(\theta) = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

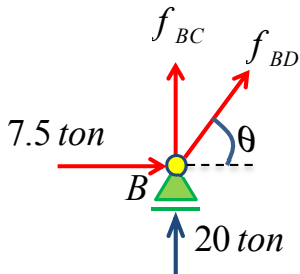


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_{AB} + f_{AC}(0.6) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + f_{AC}(0.8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{AB} = -7.5 \text{ ton} \\ f_{AC} = 12.5 \text{ ton} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 7.5 + f_{BD}(0.6) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 20 + f_{BC} + f_{BD}(0.8) = 0$$

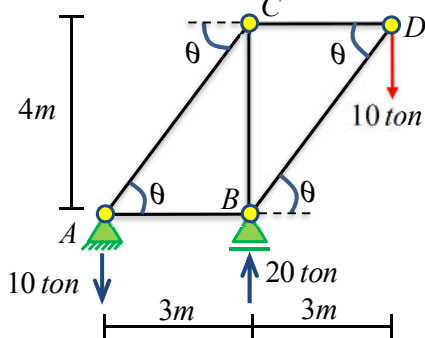
$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BD} = -12.5 \text{ ton} \\ f_{BC} = -10 \text{ ton} \end{cases}$$

17

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

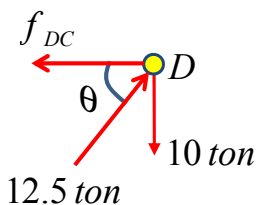
پاسخ مثال ۲-



$$\sin(\theta) = 0.8$$

$$\cos(\theta) = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -f_{DC} + 12.5(0.6) = 0$$

$$\Rightarrow f_{DC} = 7.5 \text{ ton}$$

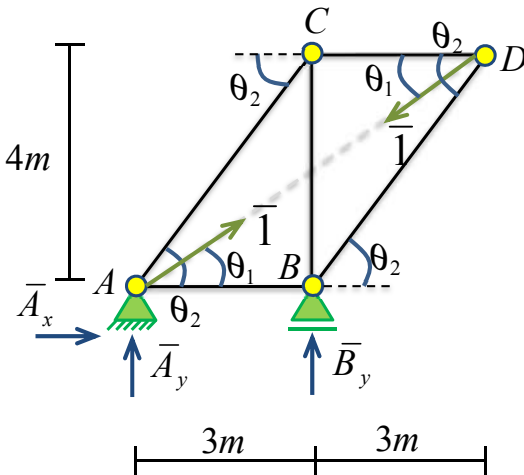
18

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۲-

سپس در ادامه دو نیروی متمرکز مجازی مساوی (با مقدار واحد) و مختلف الجهت در راستای AD در گره های A و D اعمال می کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\bar{A}_x = \bar{B}_y = \bar{A}_y = 0$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

عکس العمل های تکیه گاهی:

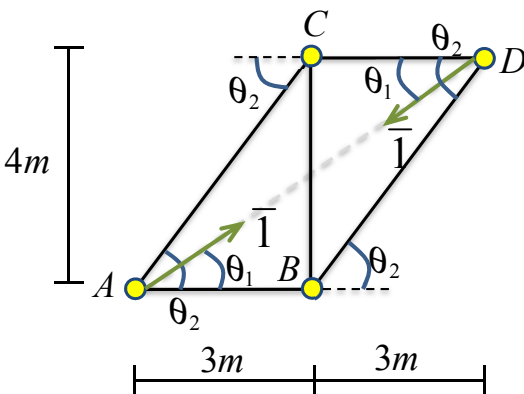
نکته: در یک سیستم سازه ای تحت اثر دو نیروی داخلی مساوی، هم راستا و مختلف الجهت مقدار عکس العمل های تکیه گاهی برابر با صفر خواهد بود.

19

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

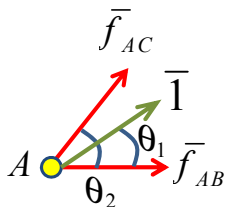
پاسخ مثال ۲-



$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

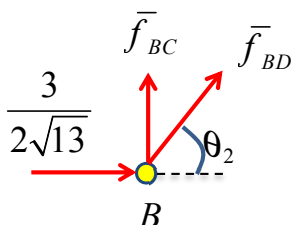


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{f}_{AB} + \bar{f}_{AC}(0.6) + 1 \times \frac{6}{\sqrt{52}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{f}_{AC}(0.8) + 1 \times \frac{4}{\sqrt{52}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}_{AB} = -\frac{3}{2\sqrt{13}} \\ \bar{f}_{AC} = -\frac{5}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{13}} + \bar{f}_{BD}(0.6) = 0$$

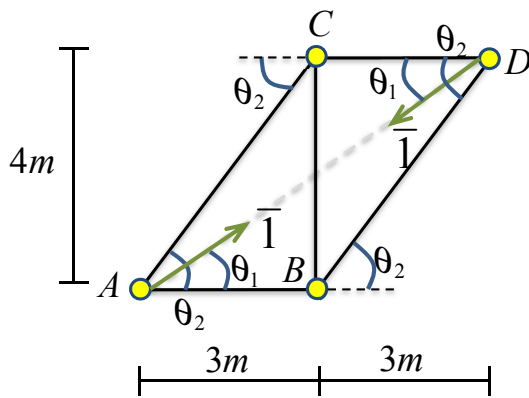
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{f}_{BC} + \bar{f}_{BD}(0.8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}_{BD} = -\frac{5}{2\sqrt{13}} \\ \bar{f}_{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

20

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

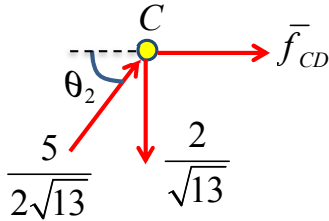


$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

پاسخ مثال ۲-

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{f}_{CD} + \frac{5}{2\sqrt{13}}(0.6) = 0 \Rightarrow \bar{f}_{CD} = -\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

21

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال ۲-

عضو	$\ell_i \text{ (m)}$	$\bar{f}_i$	$f_i \text{ (ton)}$	$\bar{f}_i \cdot (f_i \ell_i)$
AB	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	-7.5	$\frac{33.75}{\sqrt{13}}$
AC	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	12.5	$-\frac{156.25}{\sqrt{13}}$
BD	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	-12.5	$\frac{156.25}{\sqrt{13}}$
BC	4	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	-10	$-\frac{80}{\sqrt{13}}$
CD	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	7.5	$-\frac{33.75}{\sqrt{13}}$
Σ				$-\frac{80}{\sqrt{13}}$

ETABS File Name: 05-Example-02.EDB

$$(2.2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_{AD} = -0.1109 \text{ (cm)}$$

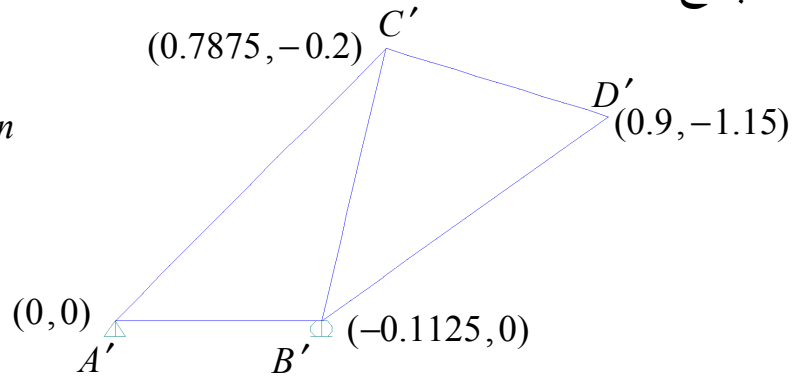
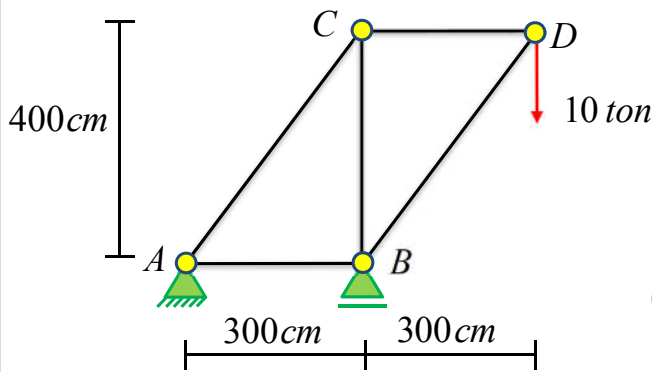
دو گره A و D از همدیگر دور می شوند.

22

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۲-



جابجایی گره‌ای بر حسب سانتیمتر خروجی نرم افزار ETABS

$$\overrightarrow{AD} = (600 - 0)\vec{i} + (400 - 0)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AD} = 600\vec{i} + 400\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{A'D'} = [(600 + 0.9) - (0 + 0)]\vec{i} + [(400 - 1.15) - (0 + 0)]\vec{j} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A'D'} = 600.9\vec{i} + 398.85\vec{j}}$$

$$P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{A'D'} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{(600.9 \times 600) + (398.85 \times 400)}{\sqrt{(600)^2 + (400)^2}} \Rightarrow \boxed{P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = 721.2212 \text{ cm}}$$

$$\Delta_{AD} = |\overrightarrow{AD}| - P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = \sqrt{(600)^2 + (400)^2} - 721.2212 \Rightarrow \boxed{\Delta_{AD} = -0.1109 \text{ (cm)}}$$

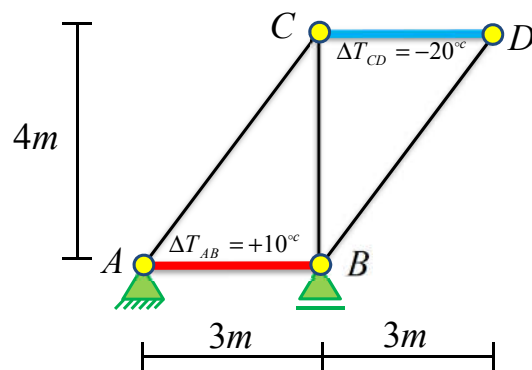
23

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

مثال ۳- در خریای نشان داده شده دمای عضو AB به اندازه ۱۰ درجه سانتیگراد افزایش و دمای عضو CD به

اندازه ۲۰ درجه سانتیگراد کاهش پیدا می‌کند. جابجایی نسبی دو گره A و D نسبت به هم را محاسبه نمایید. $\Delta_{AD} = ?$



$$EA = 2 \times 10^4 \text{ (ton)}$$

$$\alpha = 1 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$$

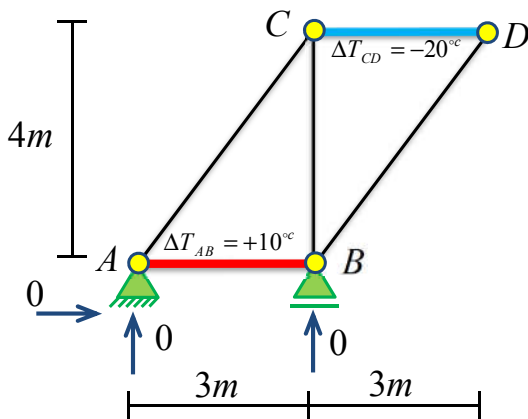
24

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال ۳-

در این سازه چون بار واقعی خارجی وجود ندارد و سازه معین است؛ از این رو نیروی داخلی واقعی و بالتبع تغییر شکل داخلی واقعی ناشی از بار واقعی خارجی در این سازه ایجاد نمی‌شود و برابر با صفر است.



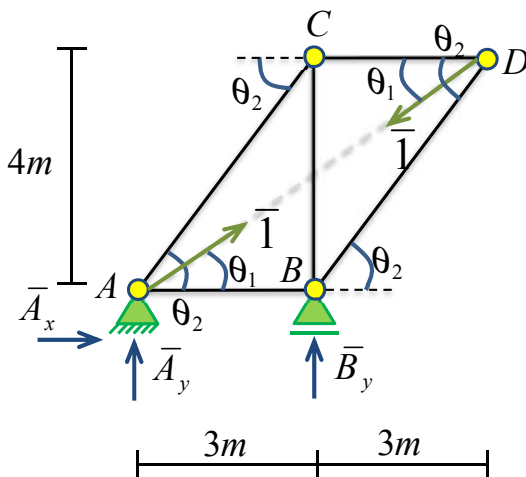
25

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

پاسخ مثال ۳-

سپس در ادامه دو نیروی متمرکز مجازی مساوی (با مقدار واحد) و مختلف الجهت در راستای AD در گره‌های A و D اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\bar{A}_x = \bar{B}_y = \bar{A}_y = 0$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

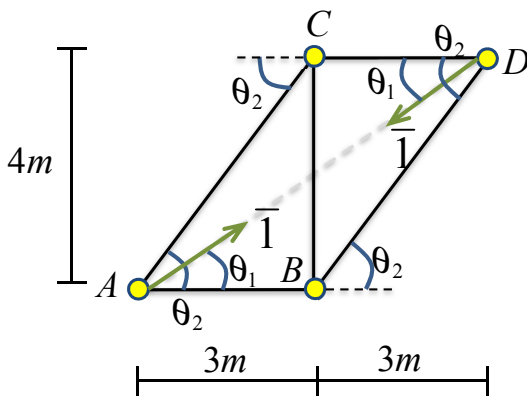
عکس العمل‌های تکیه‌گاهی:

نکته: در یک سیستم سازه‌ای تحت اثر دو نیروی داخلی مساوی، هم راستا و مختلف الجهت مقدار عکس العمل‌های تکیه‌گاهی برابر با صفر خواهد بود.

26

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

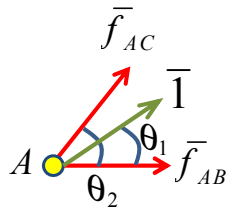


$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

پاسخ مثال ۳-

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

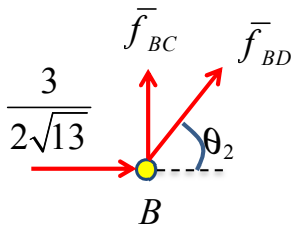


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_{AB} + f_{AC}(0.6) + 1 \times \frac{6}{\sqrt{52}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow f_{AC}(0.8) + 1 \times \frac{4}{\sqrt{52}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{AB} = -\frac{3}{2\sqrt{13}} \\ f_{AC} = -\frac{5}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{13}} + f_{BD}(0.6) = 0$$

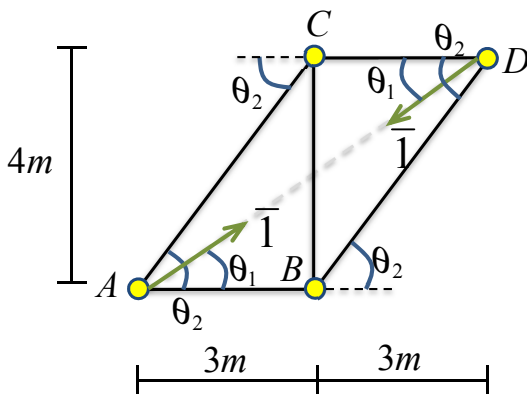
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow f_{BC} + f_{BD}(0.8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{BD} = -\frac{5}{2\sqrt{13}} \\ f_{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

27

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خرپا

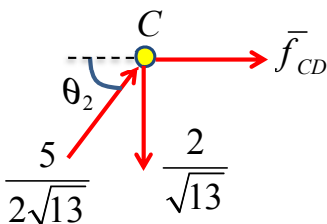


$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

پاسخ مثال ۳-

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_{CD} + \frac{5}{2\sqrt{13}}(0.6) = 0$$

$$\Rightarrow f_{CD} = -\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

28

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۳-

عضو	$\ell_i \text{ (m)}$	$\bar{f}_i$	$\Delta T_i \text{ (}^\circ\text{C)}$	$\bar{f}_i \cdot (\ell_i \Delta T_i)$
AB	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	+10	$-\frac{45}{\sqrt{13}}$
AC	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BD	5	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BC	4	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	0	0
CD	3	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	-20	$+\frac{90}{\sqrt{13}}$
Σ				$\frac{45}{\sqrt{13}}$

ETABS File Name: 05-Example-03.EDB

$\Rightarrow (3.1)$

$$\Rightarrow \Delta_{AD} = 1.2481 \text{ (cm)}$$

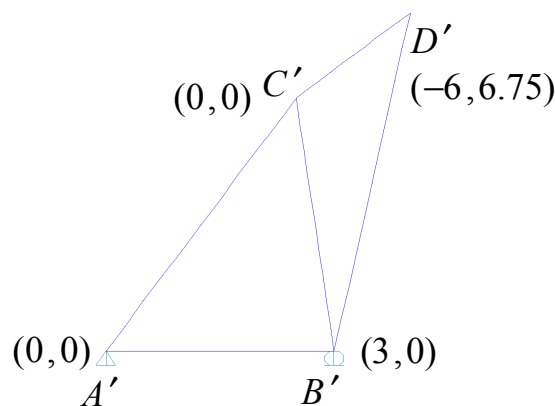
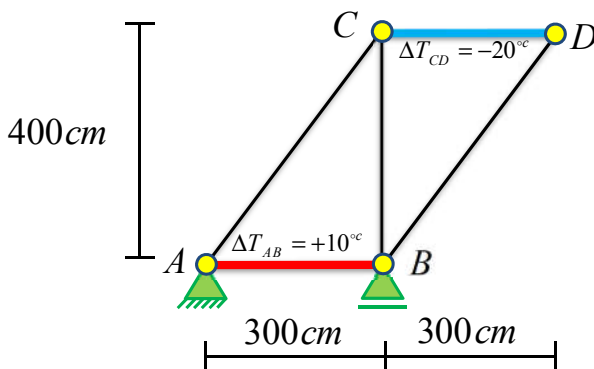
دو گره A و D به همدیگر نزدیک می شوند.

29

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۳-



جابجایی گره‌ای بر حسب سانتیمتر خروجی نرم افزار ETABS

$$\overrightarrow{AD} = (600 - 0)\vec{i} + (400 - 0)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 600\vec{i} + 400\vec{j}$$

$$\overrightarrow{A'D'} = [(600 - 6) - (0 + 0)]\vec{i} + [(400 + 6.75) - (0 + 0)]\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = 594\vec{i} + 406.75\vec{j}$$

$$P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{A'D'} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{(594 \times 600) + (406.75 \times 400)}{\sqrt{(600)^2 + (400)^2}} \Rightarrow P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = 719.8622 \text{ cm}$$

$$\Delta_{AD} = |\overrightarrow{AD}| - P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = \sqrt{(600)^2 + (400)^2} - 719.8622 \Rightarrow \Delta_{AD} = 1.2481 \text{ (cm)}$$

30

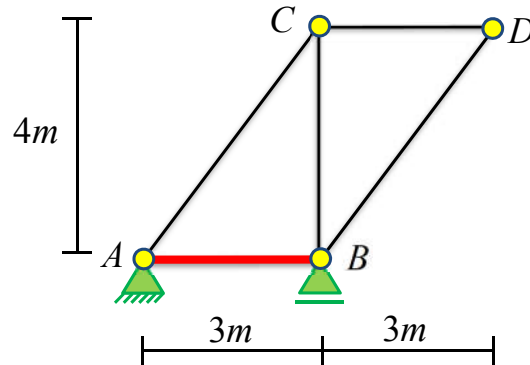
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

مثال ۴- در خریای نشان داده شده عضو AB در کارخانه 5 cm کوتاهتر ساخته شده است. جابجایی نسبی دو

گره A و D نسبت به هم را محاسبه نمایید. $\Delta_{AD} = ?$

$$EA = 2 \times 10^4 \text{ (ton)}$$



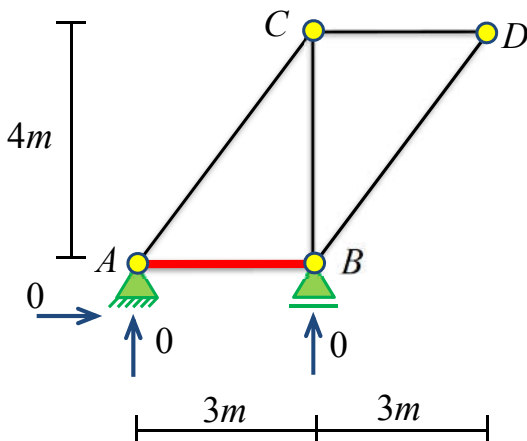
31

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۴-

در این سازه چون بار واقعی خارجی وجود ندارد و سازه معین است؛ از این رو نیروی داخلی واقعی و بالتبع تغییر شکل داخلی واقعی ناشی از بار واقعی خارجی در این سازه ایجاد نمی‌شود و برابر با صفر است.



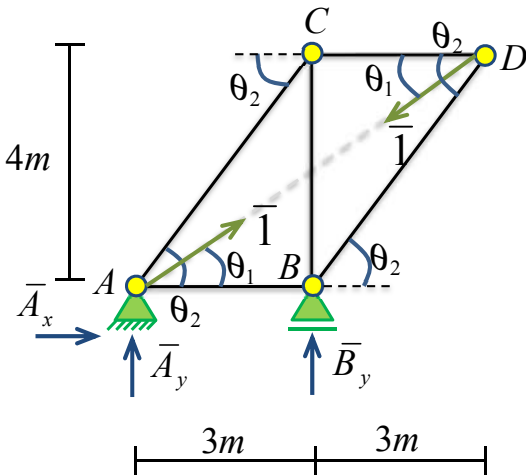
32

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۴-

سپس در ادامه دو نیروی متمرکز مجازی مساوی (با مقدار واحد) و مختلف الجهت در راستای AD در گره های A و D اعمال می کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\bar{A}_x = \bar{B}_y = \bar{A}_y = 0$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

عکس العمل های تکیه گاهی:

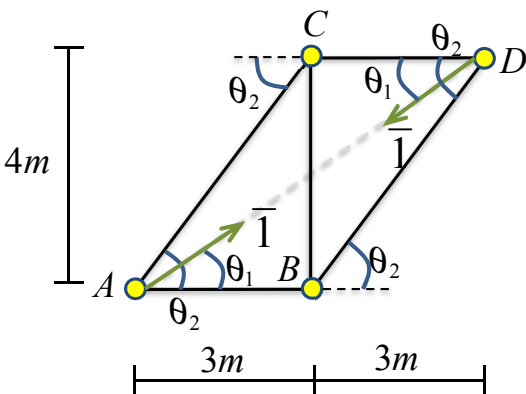
نکته: در یک سیستم سازه ای تحت اثر دو نیروی داخلی مساوی، هم راستا و مختلف الجهت مقدار عکس العمل های تکیه گاهی برابر با صفر خواهد بود.

33

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۴-



$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{f}_{AB} + \bar{f}_{AC}(0.6) + 1 \times \frac{6}{\sqrt{52}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{f}_{AC}(0.8) + 1 \times \frac{4}{\sqrt{52}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}_{AB} = -\frac{3}{2\sqrt{13}} \\ \bar{f}_{AC} = -\frac{5}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{13}} + \bar{f}_{BD}(0.6) = 0$$

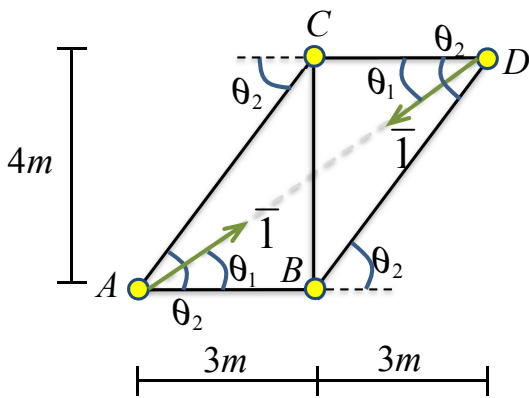
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{f}_{BC} + \bar{f}_{BD}(0.8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}_{BD} = -\frac{5}{2\sqrt{13}} \\ \bar{f}_{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

34

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

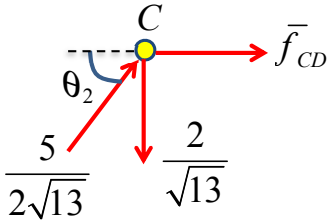


$$\sin(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos(\theta_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$

پاسخ مثال ۴-

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{f}_{CD} + \frac{5}{2\sqrt{13}}(0.6) = 0 \Rightarrow \bar{f}_{CD} = -\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

35

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۴-

عضو	$\bar{f}_i$	$\Delta \ell_{E_i} (m)$	$\bar{f}_i \cdot \Delta \ell_{E_i}$
AB	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	-0.05	$\frac{0.075}{\sqrt{13}}$
AC	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BD	$-\frac{5}{2\sqrt{13}}$	0	0
BC	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	0	0
CD	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	0	0
Σ			$\frac{0.075}{\sqrt{13}}$

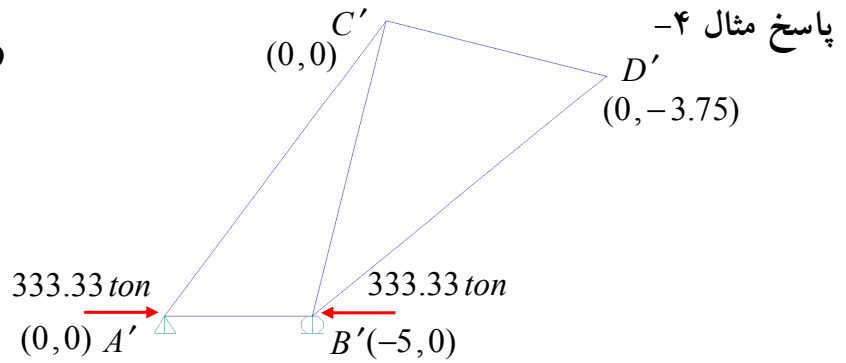
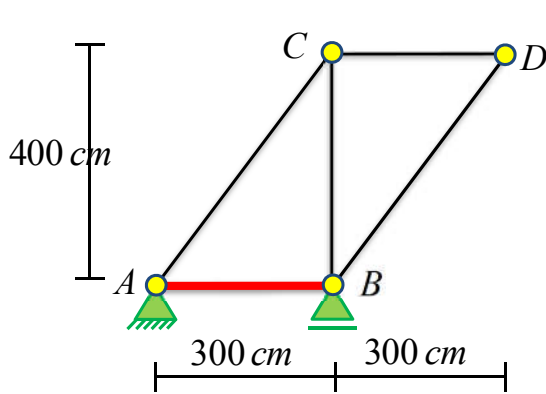
$$(4.1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_{AD} = 2.0801 (cm)$$

دو گره A و D به همدیگر نزدیک می شوند.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا



جابجایی گره‌ای برحسب سانتیمتر خروجی نرم افزار ETABS

$$F_{AB} = \frac{EA}{\ell_{AB}} \Delta \ell_{E_{AB}} = \frac{2 \times 10^4}{3} (-0.05) \Rightarrow F_{AB} = -333.33 \text{ (ton)}$$

نیروی وارد شده در گره های A و B در نرم افزار ETABS جهت مدل سازی نقص عضو

$$\overrightarrow{AD} = (600 - 0)\vec{i} + (400 - 0)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 600\vec{i} + 400\vec{j}$$

$$\overrightarrow{A'D'} = [(600 + 0) - (0 + 0)]\vec{i} + [(400 - 3.75) - (0 + 0)]\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = 600\vec{i} + 396.25\vec{j}$$

$$P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{A'D'} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{(600 \times 600) + (396.25 \times 400)}{\sqrt{(600)^2 + (400)^2}} \Rightarrow P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = 719.0301 \text{ cm}$$

$$\Delta_{AD} = |\overrightarrow{AD}| - P_{\overrightarrow{A'D'} \perp \overrightarrow{AD}} = \sqrt{(600)^2 + (400)^2} - 719.0301 \Rightarrow \Delta_{AD} = 2.0801 \text{ (cm)}$$

37

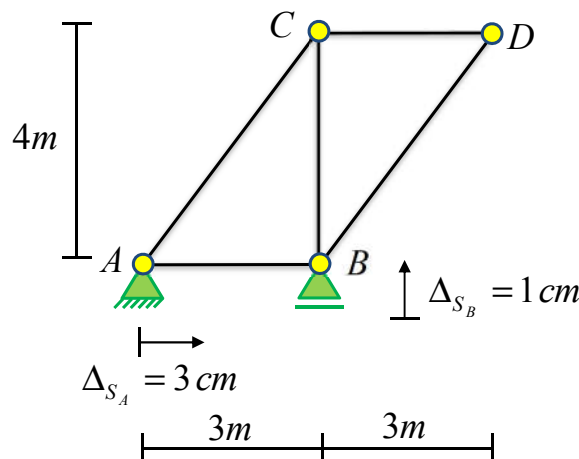
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

مثال ۵- در خریای نشان داده شده تکیه گاه A در راستای افق به مقدار 3cm به سمت راست و تکیه گاه B در

راستای قائم به اندازه 1cm به سمت بالا حرکت داشته است جابجایی افقی گره C را محاسبه نمایید. $\Delta h_C = ?$

$$EA = 2 \times 10^4 \text{ (ton)}$$

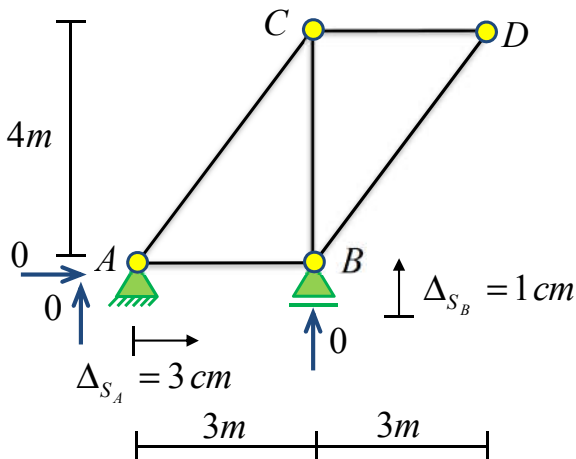


38

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۵-

در این سازه چون بار واقعی خارجی وجود ندارد و سازه معین است؛ از این رو نیروی داخلی واقعی و بالتبع تغییر شکل داخلی واقعی ناشی از بار واقعی خارجی در این سازه ایجاد نمی‌شود و برابر با صفر است.



39

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

رابطه کار مجازی در خریا

پاسخ مثال ۵-

سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی (با مقدار واحد) در گره C اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta) = \frac{4}{5} = 0.8 \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{3}{5} = 0.6$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خریا عکس عمل‌های

تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{A}_x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x = 1}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{B}_y \times 3 + 1 \times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_y = -\frac{4}{3}} \quad (5.1)$$

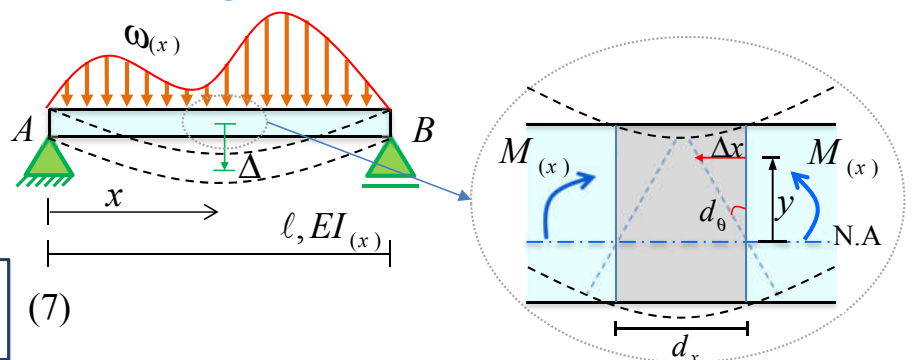
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y + \bar{B}_y = 0 \stackrel{(5.1)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y = \frac{4}{3}}$$

40

جابجایی در خلاف جهت نیروی واحد $\Rightarrow \Delta h_c = -1.67 (cm)$ مجازی ایجاد می شود.

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای خمشی در اثر بارگذاری



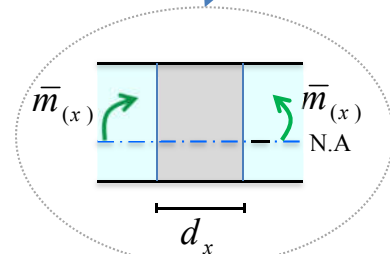
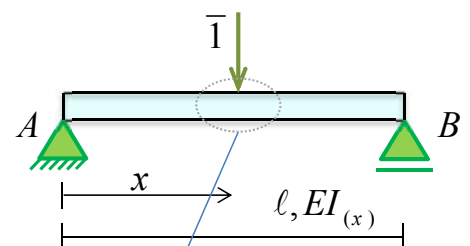
$$(1) \Rightarrow \bar{1} \cdot \Delta + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \int \bar{m}_{(x)} d_{\theta} \quad (7)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \epsilon_x = -\frac{M_{(x)} y}{EI_{(x)}} \quad (8)$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{d_x} \Rightarrow |\Delta x| = |\epsilon_x| \cdot d_x \Rightarrow |\Delta x| = \frac{M_{(x)} y}{EI_{(x)}} \cdot d_x \quad (9)$$

$$\tan(d_{\theta}) \approx d_{\theta} = \frac{|\Delta x|}{y} \Rightarrow d_{\theta} = \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \cdot d_x \quad (10)$$

$$(10) \rightarrow (7) \Rightarrow \bar{1} \cdot \Delta + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \int_0^l \frac{\bar{m}_{(x)} M_{(x)}}{EI_{(x)}} \cdot d_x \quad (11)$$



روش کار مجازی (Virtual Work Method)

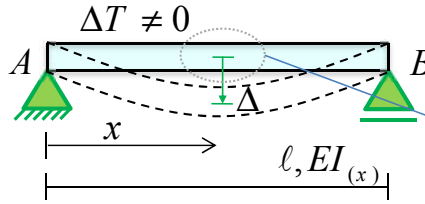
روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای خمشی در اثر حرارت

T_t : دمای بخش بالایی المان

T_0 : دمای زمان ساخت المان

T_b : دمای بخش پایینی المان

h : ارتفاع سطح مقطع



تغییر طول تار پایین (افزایش طول): $\Delta \ell_b = \alpha \cdot d_x \cdot (T_b - T_0)$ (12)

تغییر طول تار بالا (کاهش طول): $\Delta \ell_t = \alpha \cdot d_x \cdot (T_t - T_0)$ (13)

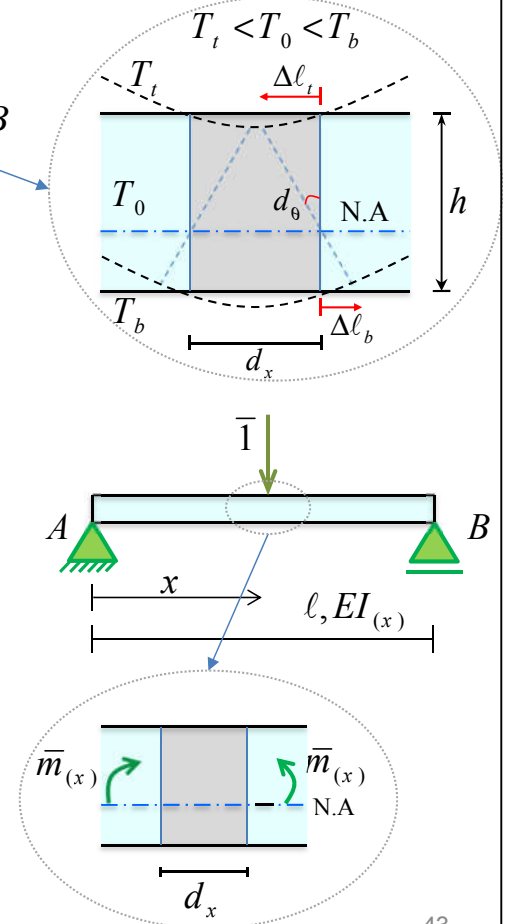
تغییر طول نسبی تارهای بالا و پایین: $\Delta \ell = \Delta \ell_b - \Delta \ell_t$ (12)&(13) $\Rightarrow$

$$\Delta \ell = \alpha \cdot d_x \cdot (T_b - T_0) - \alpha \cdot d_x \cdot (T_t - T_0)$$

$$\Rightarrow \Delta \ell = \alpha \cdot d_x \cdot (T_b - T_t) \quad (14)$$

$$\tan(d_\theta) \approx d_\theta = \frac{\Delta \ell}{h} \stackrel{(14)}{\Rightarrow} d_\theta = \frac{\alpha d_x (T_b - T_t)}{h} \quad (15)$$

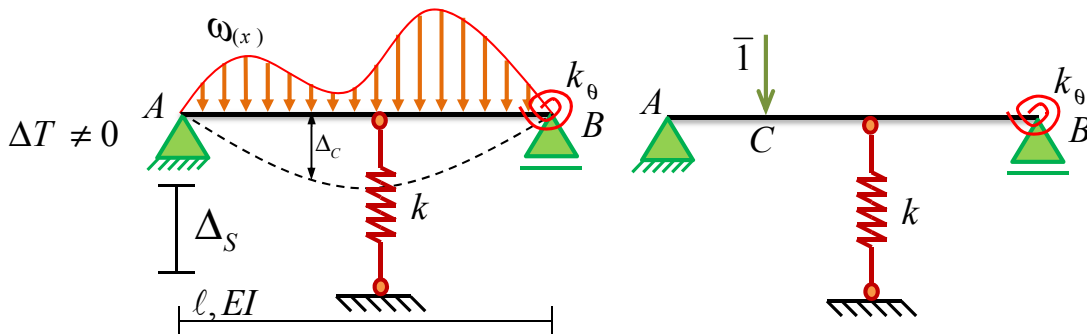
$$(15) \rightarrow (7) \Rightarrow \bar{1} \cdot \Delta + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \int_0^\ell \frac{\bar{m}_{(x)} \alpha (T_b - T_t)}{h} \cdot d_x \quad (16)$$



43

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی



$$(1) \Rightarrow \bar{1} \cdot \Delta_c + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} = \int_0^\ell \frac{\bar{P}_{(x)} P_{(x)}}{EA_{(x)}} \cdot d_x + \int_0^\ell \bar{m}_{(x)} \left(\frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} + \frac{\alpha (T_b - T_t)}{h} \right) \cdot d_x \quad (17)$$

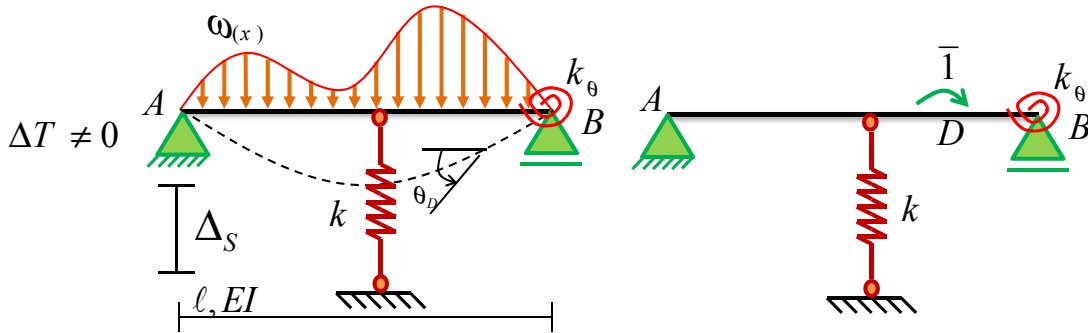
$$+ k \int_0^\ell \frac{\bar{V}_{(x)} V_{(x)}}{GA_{(x)}} \cdot d_x + \int_0^\ell \frac{\bar{t}_{(x)} T_{(x)}}{GJ_{(x)}} \cdot d_x + \sum \bar{f}_s \frac{F_s}{k} + \sum \bar{m}_s \frac{M_s}{k_\theta}$$

نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

44

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی



$$\begin{aligned}
 (1) \Rightarrow & \bar{1} \theta_D + \sum \bar{R}_i \Delta_{S_i} \\
 & = \int_0^\ell \frac{\bar{P}_{(x)} P_{(x)}}{EA_{(x)}} \cdot dx + \int_0^\ell \bar{m}_{(x)} \left(\frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} + \frac{\alpha(T_b - T_t)}{h} \right) \cdot dx \\
 & + k \int_0^\ell \frac{\bar{v}_{(x)} V_{(x)}}{GA_{(x)}} \cdot dx + \int_0^\ell \frac{\bar{t}_{(x)} T_{(x)}}{GJ_{(x)}} \cdot dx + \sum \bar{f}_s \frac{F_s}{k} + \sum \bar{m}_s \frac{M_s}{k_\theta}
 \end{aligned} \quad (18)$$

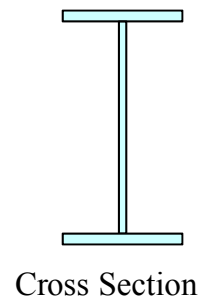
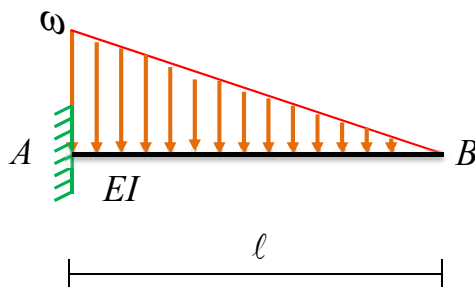
نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

45

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

مثال ۶- در تیر فولادی نشان داده شده مقدار تغییر شکل و دوران تحت اثر بار وارده در گره B را محاسبه نمایید.



$$\begin{aligned}
 w &= 4.5 \text{ ton/m} \\
 l &= 3 \text{ m} \\
 k &= 1
 \end{aligned}
 \quad
 \text{Steel : } \begin{cases} E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\ G = 8 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \end{cases}
 \quad
 \text{IPE 160 : } \begin{cases} A_{web} = 8 \text{ cm}^2 \\ I = 869 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

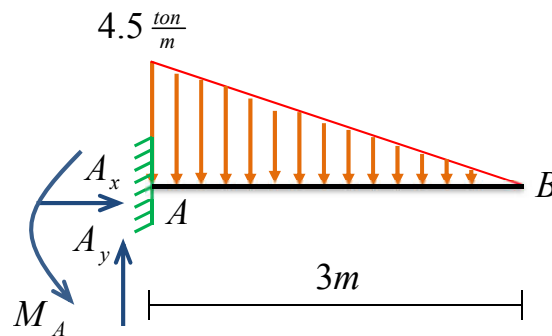
46

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۶-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل های تکیه گاهی تعیین می گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4.5 \right) \times \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) = 0 \Rightarrow M_A = 6.75 \text{ ton.m}$$

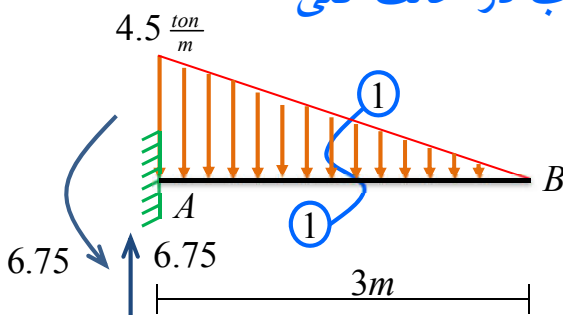
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{1}{2} \times 3 \times 4.5 = 0 \Rightarrow A_y = 6.75 \text{ ton}$$

47

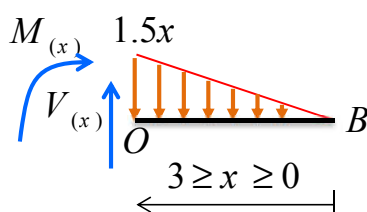
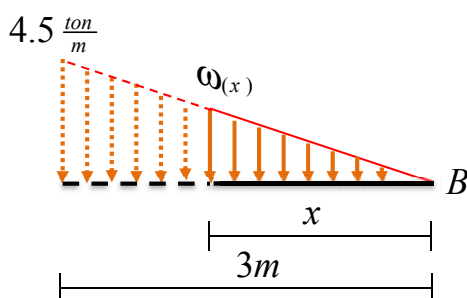
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۶-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$M_{(x)} = -0.25x^3 \quad (6.1)$$

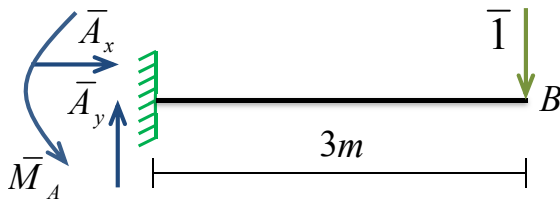
$$V_{(x)} = 0.75x^2 \quad (6.2)$$

48

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۶-

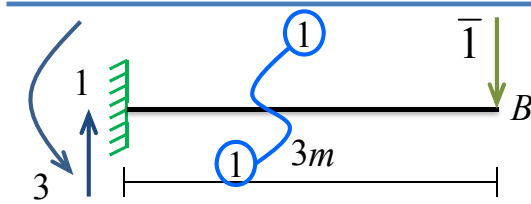


سپس در ادامه برای محاسبه خیز در گره B یک نیروی متمرکز مجازی واحد در گره B اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

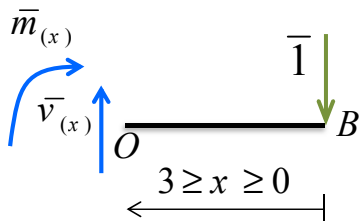
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{A}_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{A}_y = 1 \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A - 1 \times 3 = 0 \Rightarrow \bar{M}_A = 3$$



نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} + 1 \times x = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} = -x \quad (6.3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{v}_{(x)} - 1 = 0 \Rightarrow \bar{v}_{(x)} = 1 \quad (6.4)$$

49

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۶-

$$= \frac{0.05x^5}{EI} \Big|_0^3 + k \frac{0.25x^3}{GA} \Big|_0^3$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{12.15}{EI} + k \frac{6.75}{GA} \quad (6.5)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (6.5) خواهیم داشت:

$$(6.5) \Rightarrow \Delta_B = \frac{12.15}{EI} + k \frac{6.75}{GA} = \frac{12.15}{\left(2 \times 10^6 \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}\right) \left(869 \times 10^{-8} \text{m}^4\right)} + (1) \frac{6.75}{\left(8 \times 10^5 \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}\right) \left(8 \times 10^{-4} \text{m}^2\right)} = (6.99 + 0.1055) \times 10^{-2} (\text{m})$$

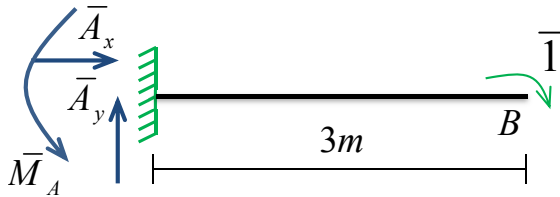
$$\Rightarrow \Delta_B = 7.096 \text{ cm}$$

50

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۶-

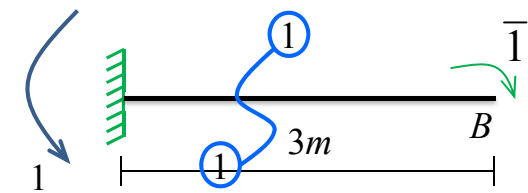


سپس در ادامه برای محاسبه دوران در گره B یک لنگر متمرکز مجازی واحد در گره B اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر لنگر واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

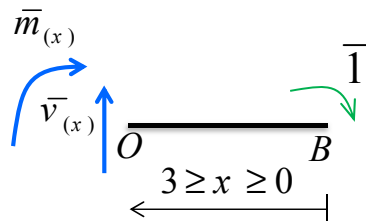
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{A}_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y = 0 \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A - 1 = 0 \Rightarrow \bar{M}_A = 1$$



نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} + 1 = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} = -1 \quad (6.6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{v}_{(x)} = 0 \quad (6.7)$$

51

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۶-

$$= \frac{0.0625x^4}{EI} \Big|_0^3 \Rightarrow \theta_B = \frac{5.0625}{EI} \quad (6.8)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (6.8) خواهیم داشت:

$$(6.8) \Rightarrow \theta_B = \frac{5.0625}{EI} = \frac{5.0625}{\left(2 \times 10^6 \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}\right) (869 \times 10^{-8} \text{m}^4)} \Rightarrow \theta_B = 0.0291 \text{ (rad)}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

مثال ۷- در قاب نشان داده شده عضو CD کابل است. دمای بالا و پایین تیر BC به ترتیب 20°C و -10°C می باشد. تکیه گاه A نیز در راستای عمود بر عضو AB به اندازه ۵ سانتیمتر نشست دارد. ارتفاع سطح مقطع تیر BC ۲۰ سانتیمتر است. تغییر مکان افقی گره C را محاسبه نمایید.

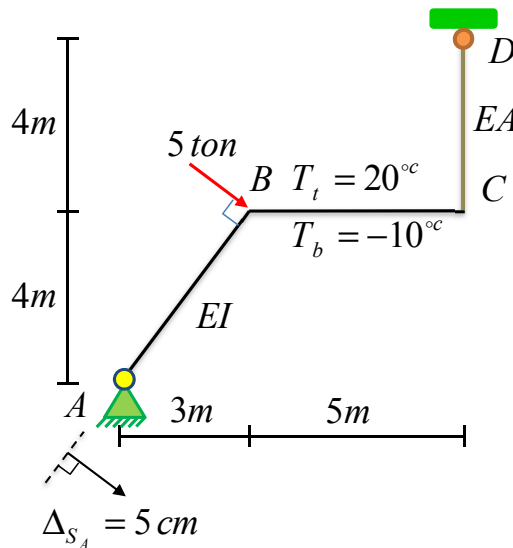
$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 1940 \text{ cm}^4$$

$$A = 5 \text{ cm}^2$$

$$h_{BC} = 20 \text{ cm}$$

$$\alpha = 1 \times 10^{-4} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$



53

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

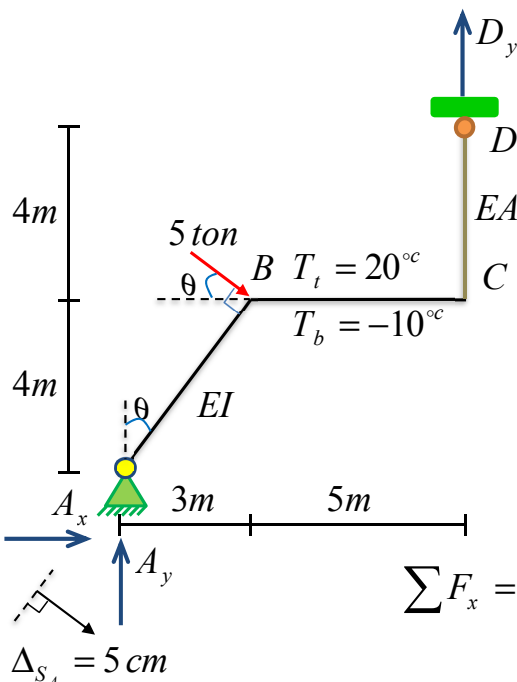
روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}, \quad \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل های تکیه گاهی تعیین می گردد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 5 \times \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow A_x = -4 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow D_y \times 8 - 5 \times 5 = 0 \Rightarrow D_y = 3.125 \text{ ton} \quad (7.1)$$

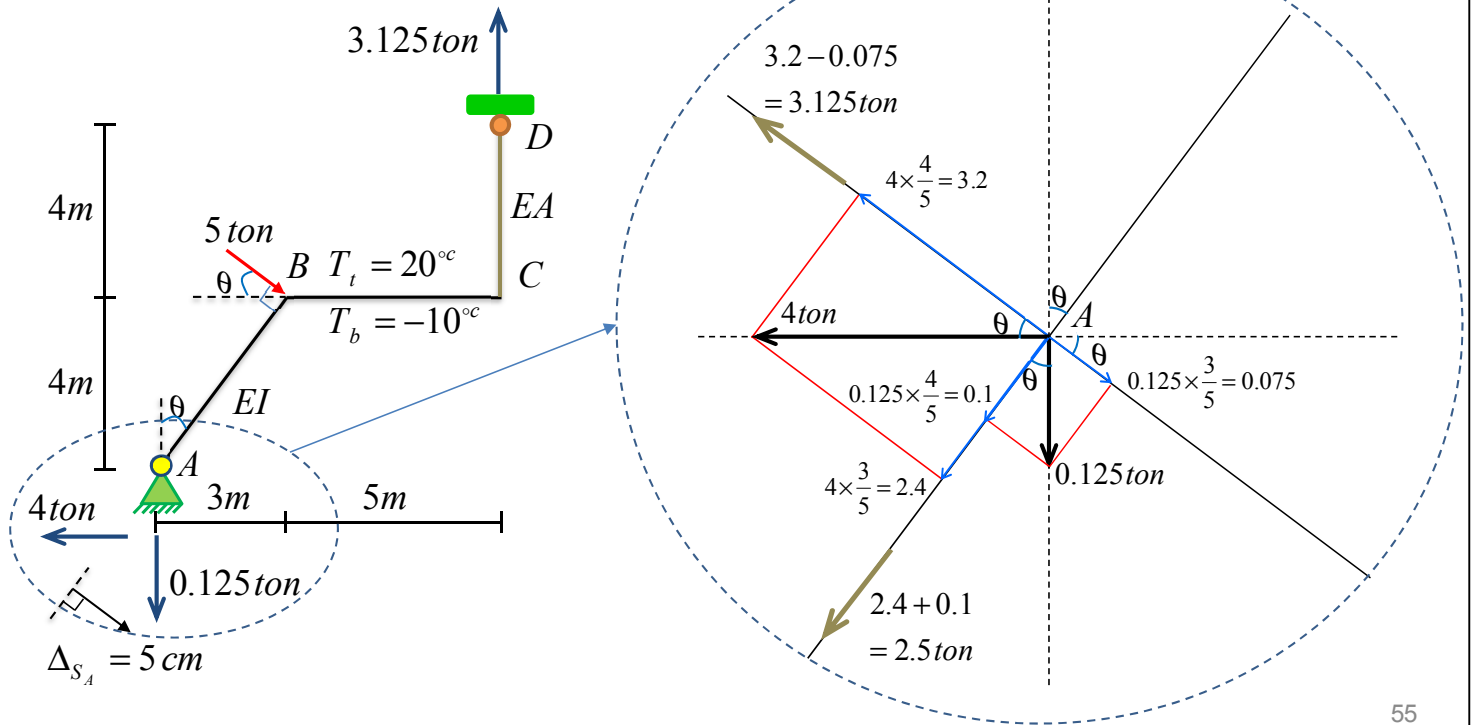
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + D_y - 5 \times \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow A_y = -0.125 \text{ ton} \quad (7.1)$$

54

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷

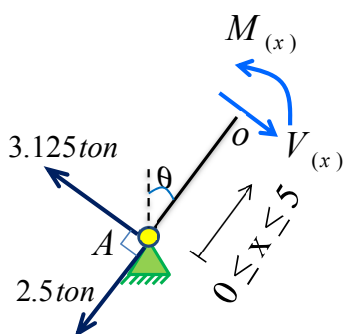
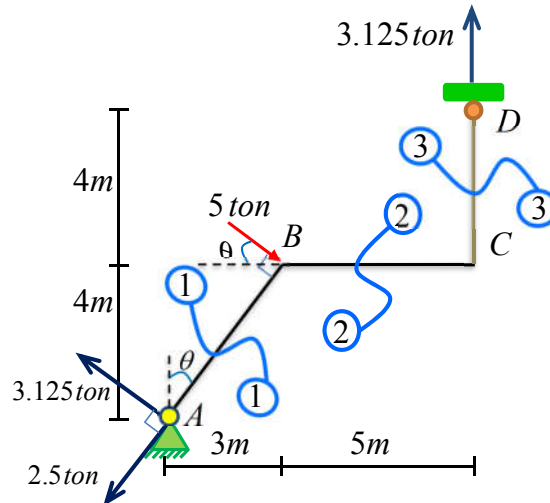


55

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - 3.125x = 0$$

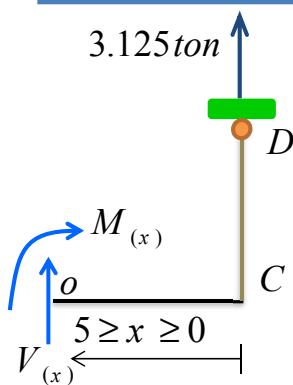
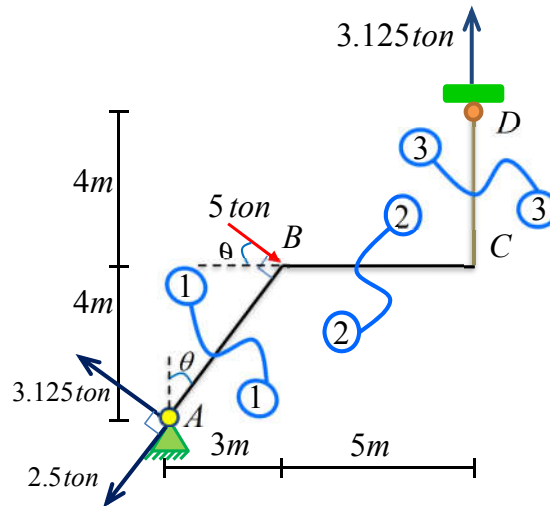
$$\Rightarrow M_{(x)} = 3.125x \quad (7.2)$$

56

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} + 3.125x = 0$$

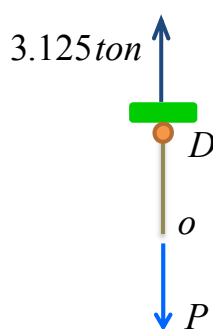
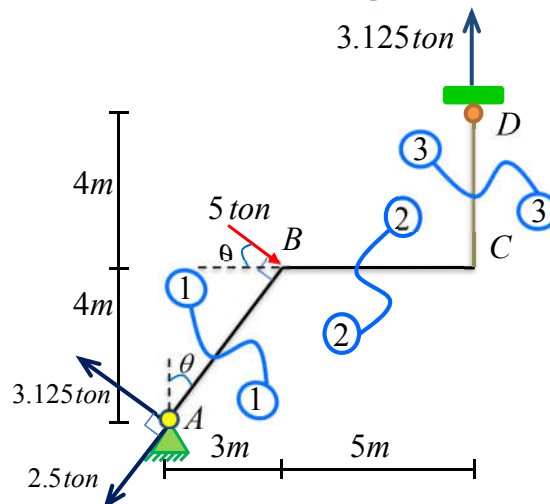
$$\Rightarrow M_{(x)} = 3.125x \quad (7.3)$$

57

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷



با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + 3.125 = 0$$

$$\Rightarrow P = 3.125 \text{ ton} \quad (7.4)$$

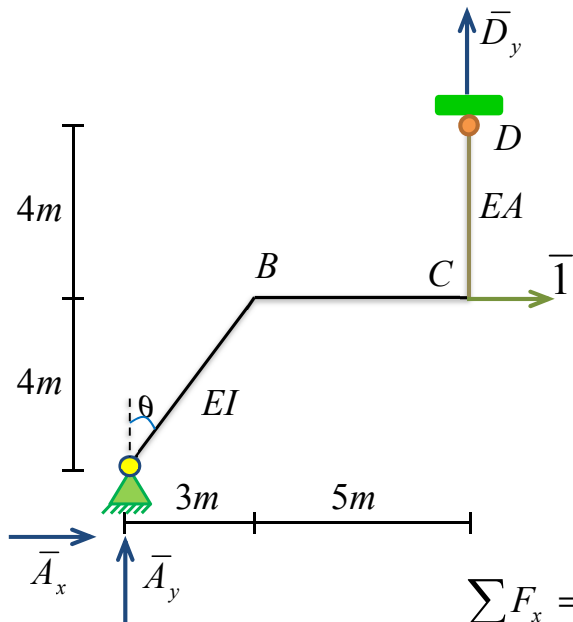
نیروی محوری کابل

58

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷



سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی با مقدار واحد در گره C اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{A}_x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_x = -1}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{D}_y \times 8 - 1 \times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{D}_y = 0.5} \quad (7.5)$$

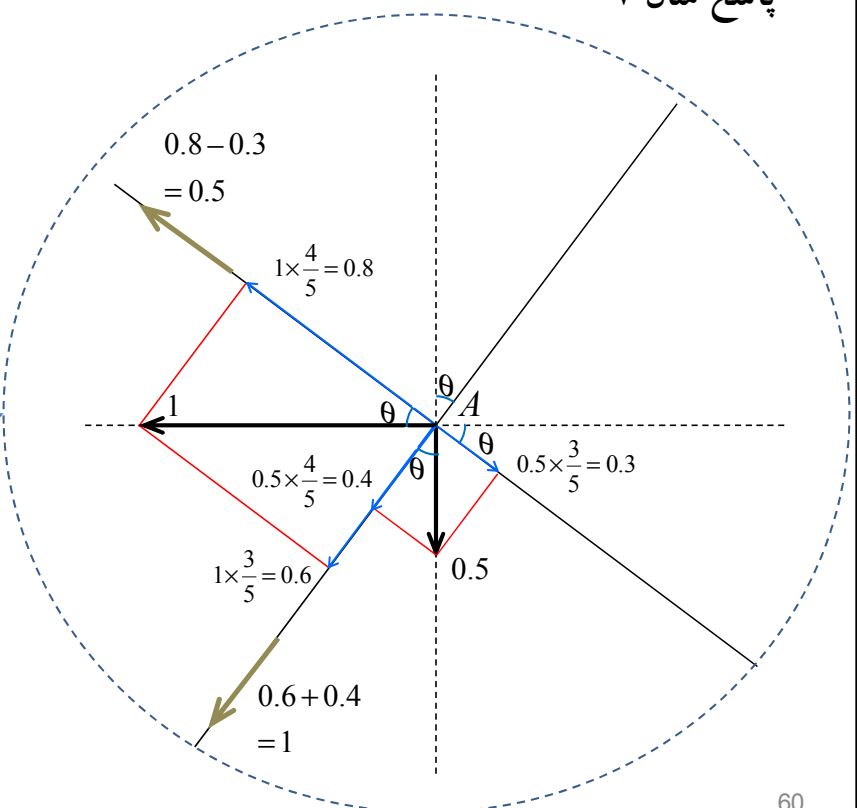
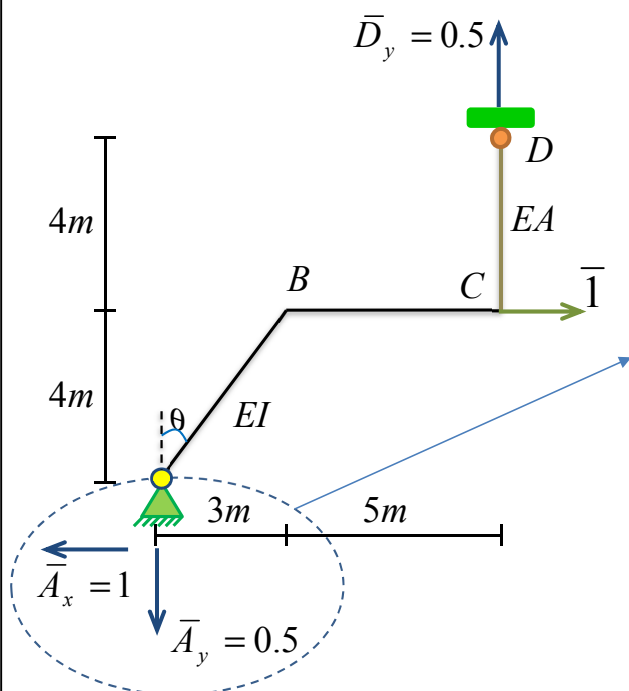
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y + \bar{D}_y = 0 \stackrel{(7.5)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y = -0.5}$$

59

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییرشکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷

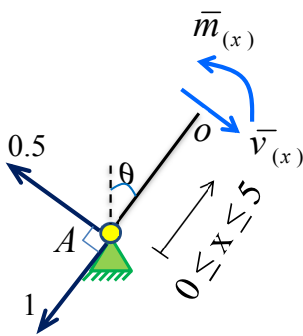
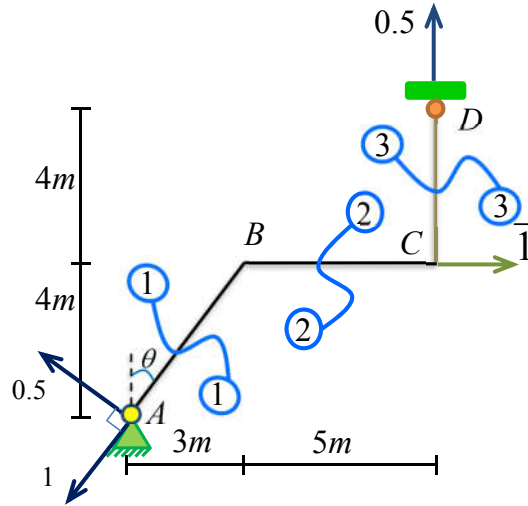


60

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} - 0.5x = 0$$

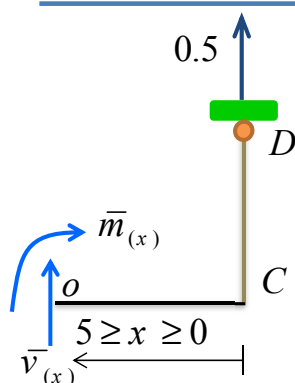
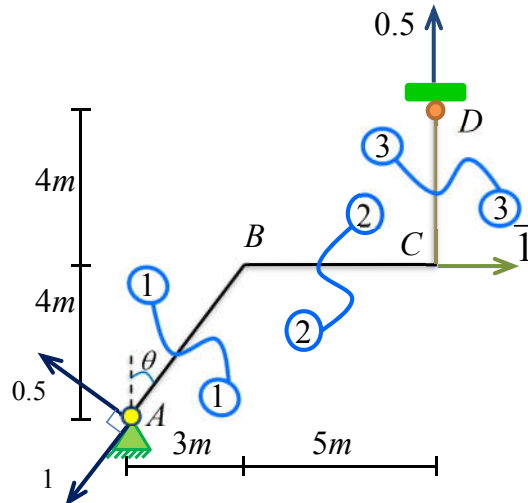
$$\Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0.5x} \quad (7.6)$$

61

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -\bar{m}_{(x)} + 0.5x = 0$$

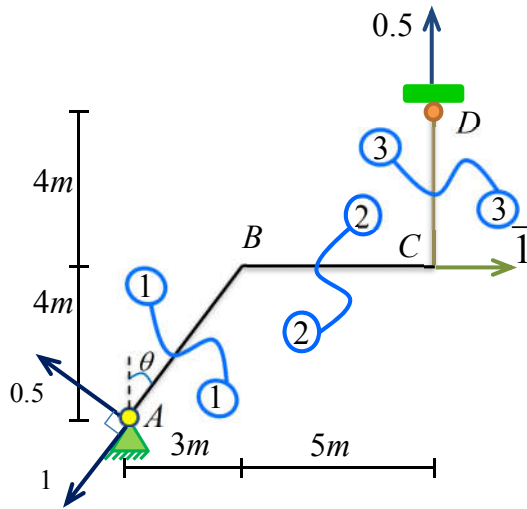
$$\Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0.5x} \quad (7.7)$$

62

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

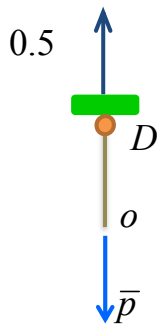
پاسخ مثال ۷-۷



با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\bar{p} + 0.5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{p} = 0.5} \quad (7.8)$$



نیروی محوری کابل

63

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل اعضای قاب در حالت کلی

پاسخ مثال ۷-۷

$$\Rightarrow \Delta_{h_c} + (-0.5)(0.05) = \frac{6.25}{EA} + \frac{1.5625x^3}{3EI} \Bigg|_0^5 + \frac{1.5625x^3}{3EI} \Bigg|_0^5 - (37.5 \times 10^{-4})x^2 \Bigg|_0^5$$

$$\Rightarrow \Delta_{h_c} = \frac{6.25}{EA} + \frac{390.625}{3EI} - 9.365 \times 10^{-2} + 2.5 \times 10^{-2}$$

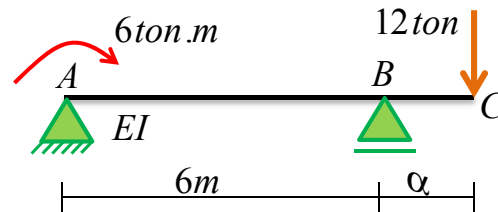
$$\Rightarrow \Delta_{h_c} = \frac{6.25}{\left(2 \times 10^6 \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}\right) \left(5 \times 10^{-4} \text{m}^4\right)} + \frac{390.625}{3 \left(2 \times 10^6 \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}\right) \left(1940 \times 10^{-8} \text{m}^4\right)} - 9.365 \times 10^{-2} + 2.5 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \Delta_{h_c} = (0.0625 + 33.5588 - 9.365 + 2.5) \times 10^{-2} \Rightarrow \boxed{\Delta_{h_c} = 26.7563 \times 10^{-2} \text{m}}$$

↓ نشست تکیه‌گاهی ↓ حرارتی ↓ خمشی ↓ محوری (کابل)

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

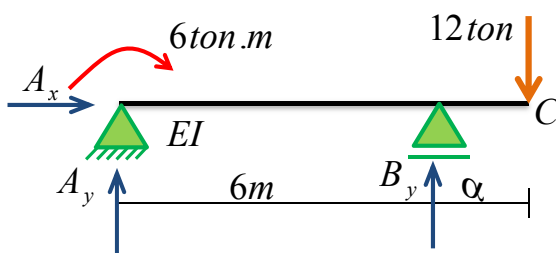
مثال ۸- در تیر نشان داده شده مقدار α را به گونه‌ای تعیین کنید که شیب در A صفر شود.



65

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۸-



در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

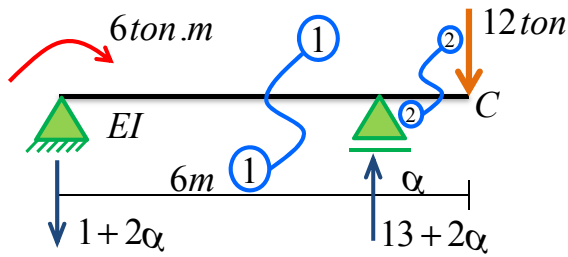
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 6 - 12 \times (6 + \alpha) - 6 = 0 \Rightarrow B_y = 13 + 2\alpha \quad (8.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 12 = 0 \stackrel{(8.1)}{\Rightarrow} A_y = -1 - 2\alpha$$

66

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

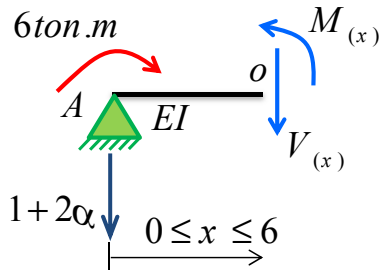
پاسخ مثال ۸-۸



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

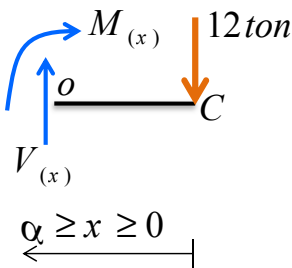
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (1 + 2\alpha)x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow M_{(x)} = 6 - x - 2\alpha x \quad (8.2)$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

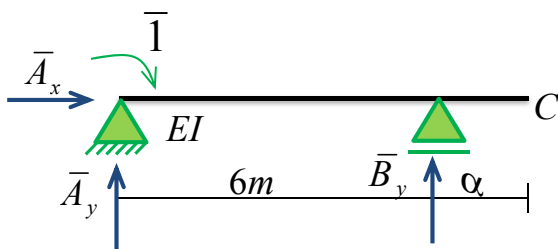
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 12x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -12x \quad (8.3)$$



67

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۸-۸



سپس در ادامه یک لنگر متمرکز مجازی با مقدار واحد در گره A اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر لنگر واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{A}_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{B}_y \times 6 - 1 = 0 \Rightarrow \bar{B}_y = \frac{1}{6} \quad (8.4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y + \bar{B}_y = 0 \stackrel{(2.4)}{\Rightarrow} \bar{A}_y = -\frac{1}{6}$$

68

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۸-

نکته: انتخاب تعداد مقطع‌ها و جهت دستگاه مختصات در هر مقطع در سازه تحت اثر هر دو بارگذاری باید یکسان باشد.

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} + \frac{1}{6}x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = 1 - \frac{1}{6}x} \quad (8.5)$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0} \quad (8.6)$$

69

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۸-

$$= \frac{6x - (1 + \alpha)x^2 + \left(\frac{1 + 2\alpha}{18}\right)x^3}{EI} \bigg|_0^6$$

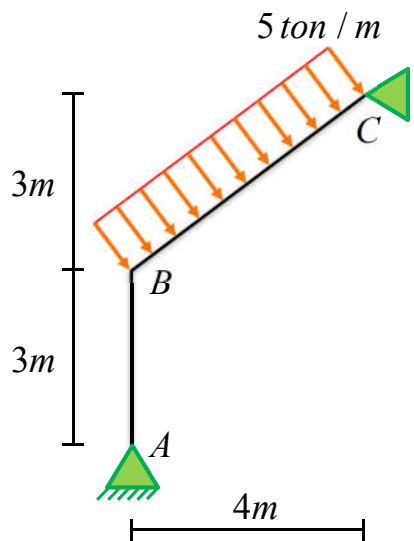
$$\Rightarrow \boxed{\theta_A = \frac{12(1 - \alpha)}{EI}} \quad (8.7)$$

برای صفر شدن شیب در تکیه‌گاه A رابطه بالا باید برابر با صفر قرار داده شود:

$$\theta_A = 0 \xRightarrow{(8.7)} \frac{12(1 - \alpha)}{EI} = 0 \Rightarrow 12(1 - \alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1m}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

مثال ۹- در قاب مقابل تغییر مکان افقی گره B را محاسبه نمایید.



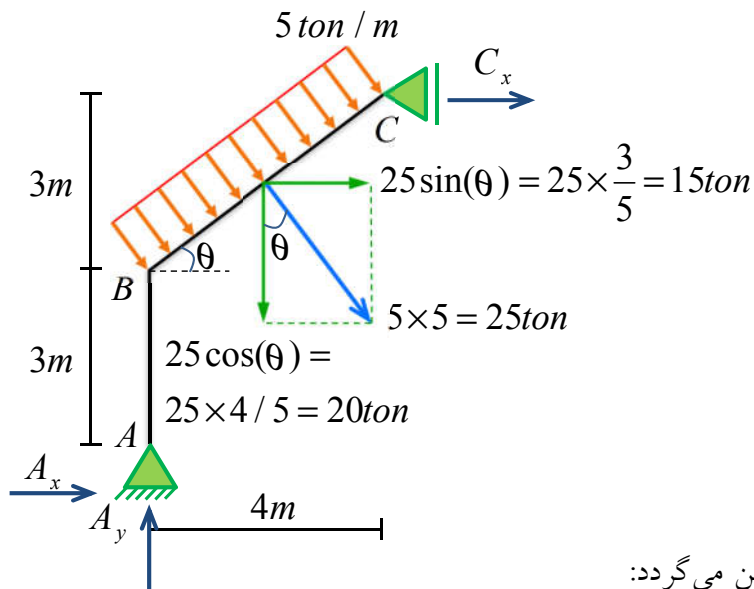
$$EI = 200 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

71

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۹-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.



$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}, \quad \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -C_x \times 6 - 20 \times \left(\frac{4}{2}\right) - 15 \times \left(3 + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_x = -\frac{107.5}{6} \text{ ton} \quad (9.1)$$

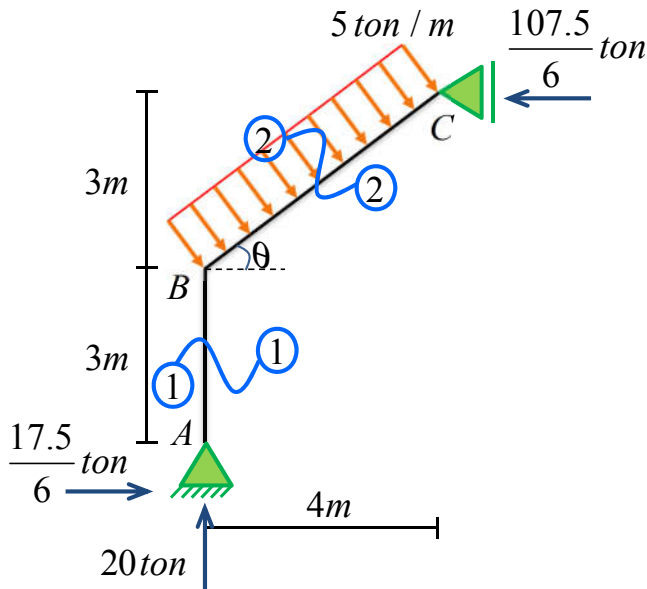
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + C_x + 15 = 0 \stackrel{(9.1)}{\Rightarrow} A_x = \frac{17.5}{6} \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 20 = 0 \Rightarrow A_y = 20 \text{ ton}$$

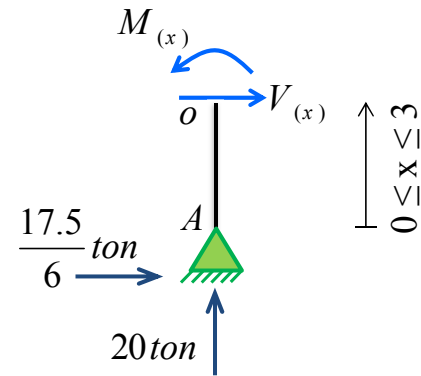
72

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۹-



با در نظر گرفتن قسمت پایین مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

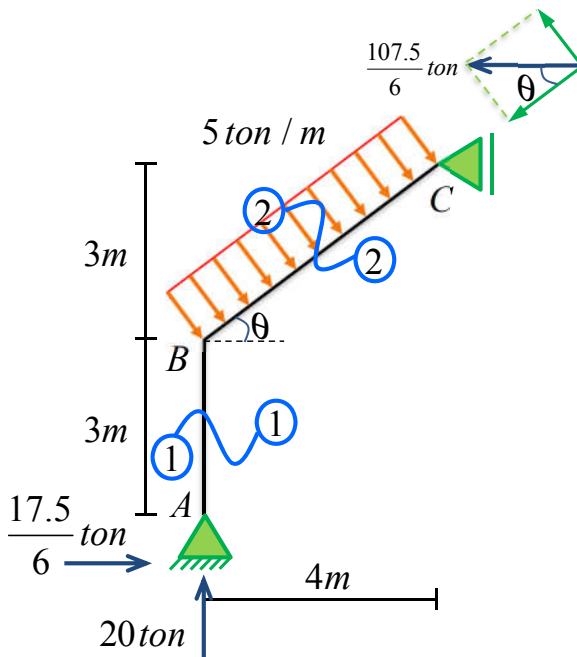


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + \frac{17.5}{6}x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -\frac{17.5}{6}x \quad (9.2)$$

73

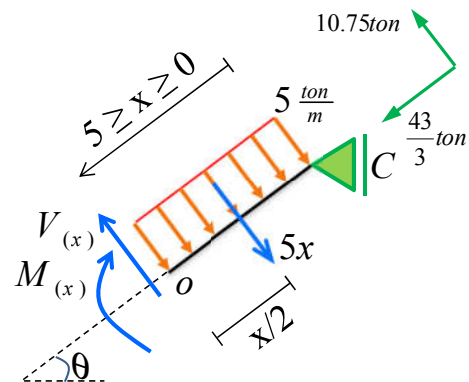
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۹-



$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}, \quad \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

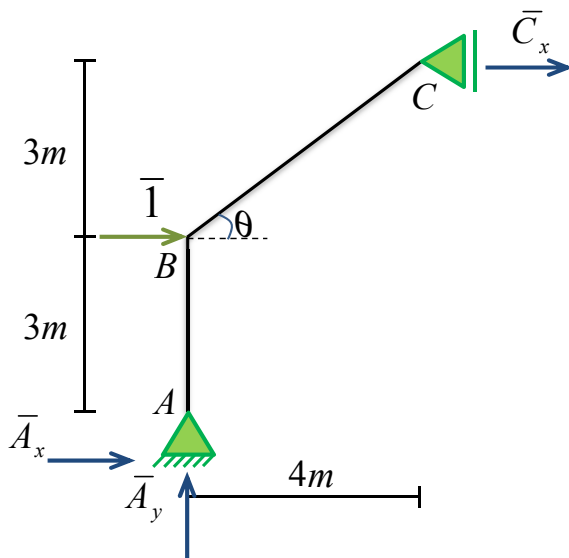


$$M_{(x)} = 10.75x - 2.5x^2 \quad (9.3)$$

74

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۹-



سپس در ادامه یک نیروی متمرکز افقی مجازی با مقدار واحد در گره B اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -\bar{C}_x \times 6 - \bar{1} \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{C}_x = -0.5} \quad (9.4)$$

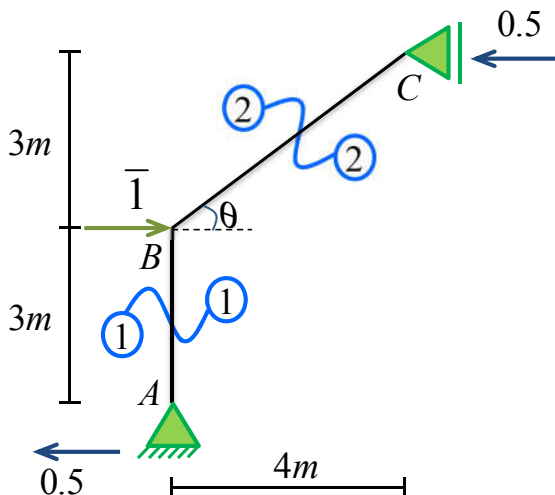
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{A}_x + \bar{C}_x + \bar{1} = 0 \stackrel{(9.4)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_x = -0.5}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}_y = 0}$$

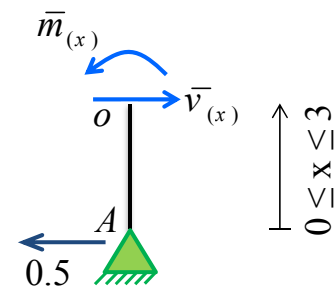
75

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۹-



با در نظر گرفتن قسمت پایین مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

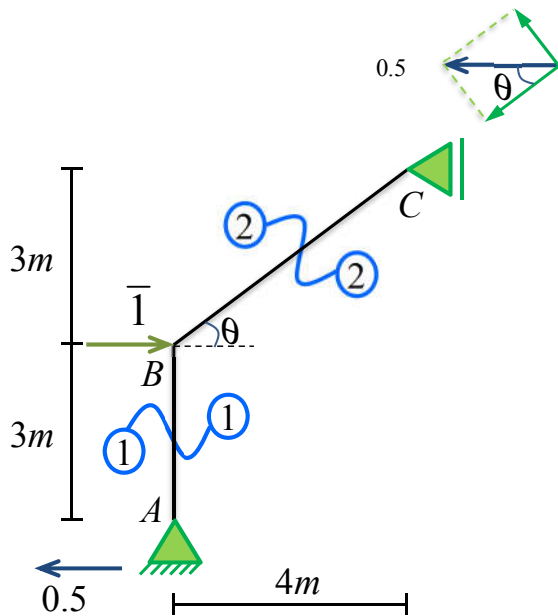


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \bar{m}_{(x)} - 0.5x = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = 0.5x} \quad (9.5)$$

76

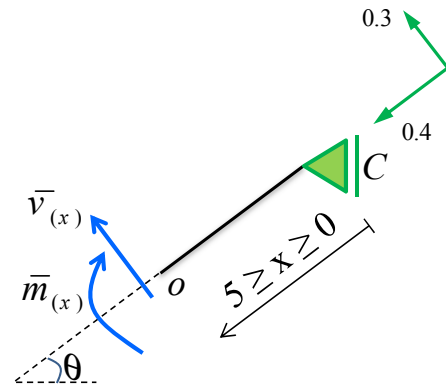
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۹-



$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}, \quad \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

با در نظر گرفتن قسمت بالای مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



$$\bar{m}_{(x)} = 0.3x \quad (9.6)$$

77

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۹-

$$= -\frac{17.5x^3}{36EI} \Big|_0^3 + \left(\frac{3.225}{3EI}x^3 - \frac{0.75}{4EI}x^4 \right) \Big|_0^5$$

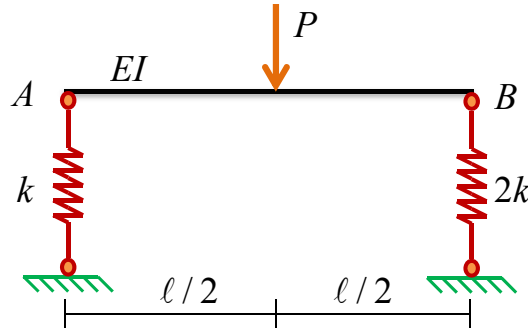
$$\Rightarrow \Delta_{h_B} = -\frac{13.125}{EI} + \frac{17.1875}{EI} \Rightarrow \Delta_{h_B} = \frac{4.0625}{EI} \quad (9.7)$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (9.7) خواهیم داشت:

$$(9.7) \Rightarrow \Delta_{h_B} = \frac{4.0625}{EI} = \frac{4.0625}{200} \Rightarrow \Delta_{h_B} = 2.03 \times 10^{-2} (m)$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

مثال ۱۰- تغییر مکان وسط تیر نشان داده شده را تعیین نمایید:



$$P = 1 \text{ ton}$$

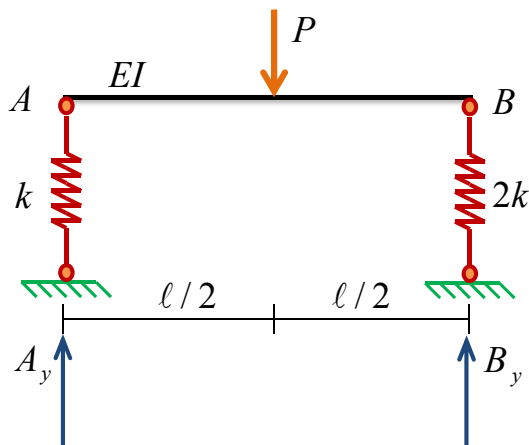
$$EI = 200 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

$$k = 9.375 \text{ ton} / \text{m}$$

$$\ell = 4 \text{ m}$$

79

روش کار مجازی (Virtual Work Method)



پاسخ مثال ۱۰-

در روش کار مجازی ابتدا سازه تحت اثر بارهای واقعی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

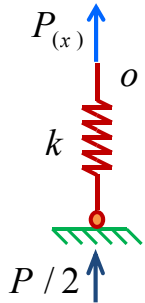
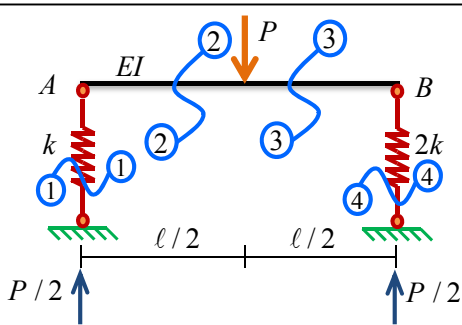
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \ell - P \ell / 2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = P / 2} \quad (10.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P \stackrel{(10.1)}{\Rightarrow} \boxed{A_y = P / 2} \quad (10.2)$$

80

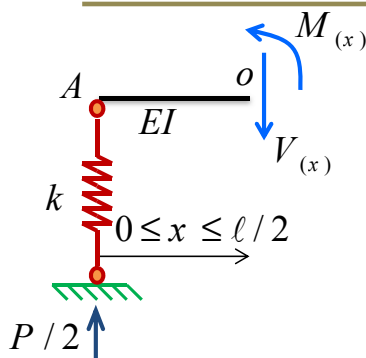
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۱۰-



با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + P/2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -P/2} \quad (10.3)$$



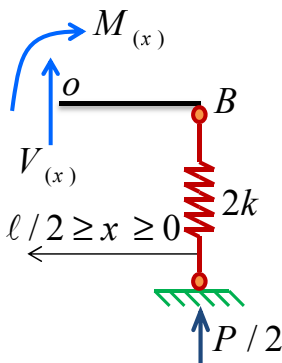
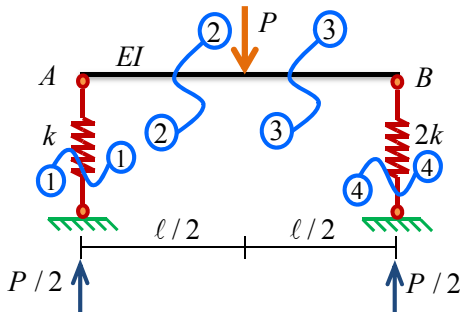
با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = Px/2} \quad (10.4)$$

81

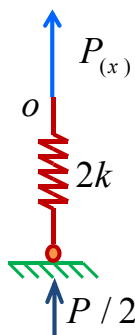
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۱۰-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = Px/2} \quad (10.5)$$

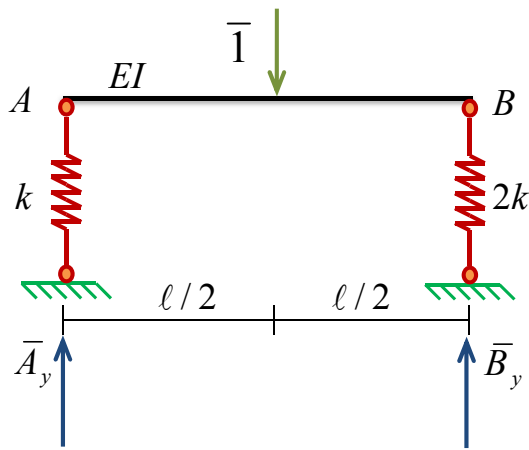


با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع ۴-۴ خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_{(x)} + P/2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{(x)} = -P/2} \quad (10.6)$$

82

روش کار مجازی (Virtual Work Method)



پاسخ مثال ۱۰-

سپس در ادامه یک نیروی متمرکز قائم مجازی با مقدار واحد در وسط تیر اعمال می‌کنیم. حال مجدد سازه تحت اثر بار واحد مجازی آنالیز می‌شود تا نیروهای داخلی محاسبه گردد.

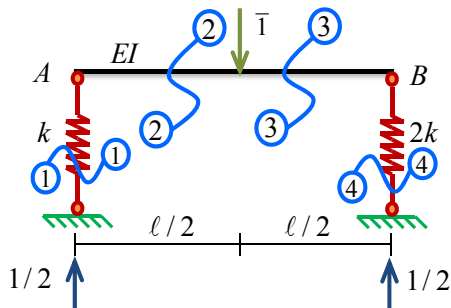
با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{B}_y \ell - \bar{1} \cdot \ell / 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_y = 1/2} \quad (10.7)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{A}_y + \bar{B}_y = \bar{1} \stackrel{(10.7)}{\Rightarrow} \boxed{\bar{A}_y = 1/2} \quad (10.8)$$

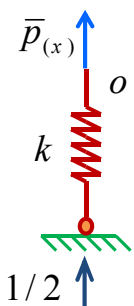
83

روش کار مجازی (Virtual Work Method)



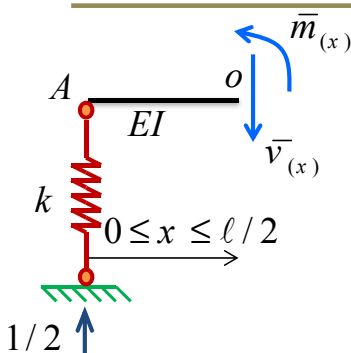
پاسخ مثال ۱۰-

با در نظر گرفتن سمت پایین مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{p}_{(x)} + 1/2 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{p}_{(x)} = -1/2} \quad (10.9)$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:

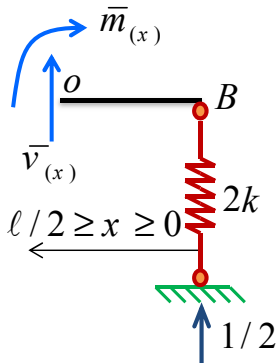
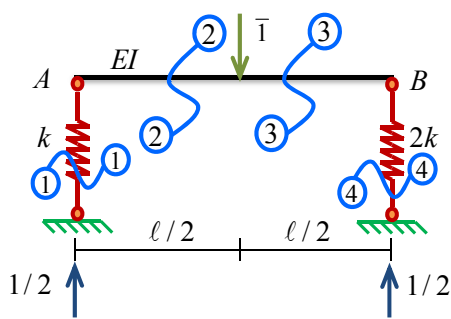


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = x/2} \quad (10.10)$$

84

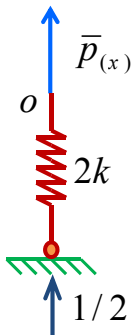
روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۱۰-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{m}_{(x)} = x / 2} \quad (10.11)$$



با در نظر گرفتن سمت بالای مقطع ۴-۴ خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{p}_{(x)} + 1/2 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{p}_{(x)} = -1/2} \quad (10.12)$$

85

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

پاسخ مثال ۱۰-

محاسبه خیز وسط تیر

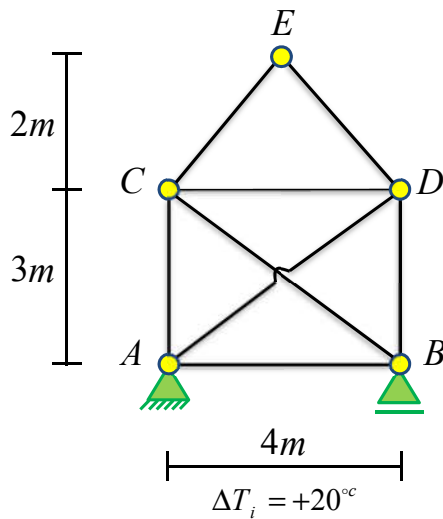
$$\begin{aligned} &= \frac{Px^3}{12EI} \Big|_0^{\ell/2} + \frac{Px^3}{12EI} \Big|_0^{\ell/2} + \frac{P}{4k} + \frac{P}{8k} \\ \Rightarrow \quad &\boxed{\Delta = \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{3P}{8k}} \quad (10.13) \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (10.13) خواهیم داشت:

$$(10.13) \Rightarrow \Delta = \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{3P}{8k} = \left(\frac{(1)(4)^3}{48(200)} + \frac{3(1)}{8(9.375)} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta = 4.67 \times 10^{-2} (m)}$$

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین و همچنین در سازه‌های نامعین داخلی تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.



مثال ۱۱- در خرپای نشان داده شده دمای تمامی اعضا ۲۰ درجه سانتیگراد افزایش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین نیروی داخلی اعضای خرپا.

$$EA = 6 \times 10^4 \text{ (ton)}$$

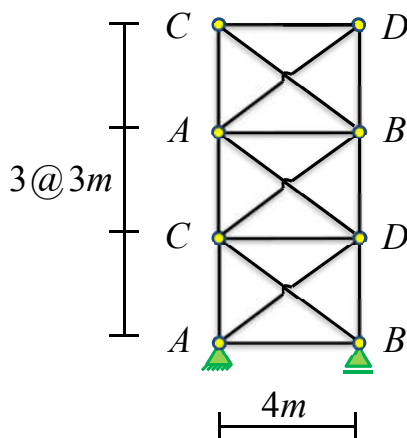
$$\alpha = 1 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$$

حل مثال ۱۱-

سازه از نظر خارجی معین اما از نظر داخلی نامعین است. بنابراین تحت اثر تغییر درجه حرارت، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. 87

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین و همچنین در سازه‌های نامعین داخلی تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.



مثال ۱۲- در خرپای نشان داده شده دمای تمامی اعضا ۴۰ درجه سانتیگراد افزایش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین نیروی داخلی اعضای خرپا.

$$EA = 6 \times 10^4 \text{ (ton)}$$

$$\alpha = 1 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$$

حل مثال ۱۲-

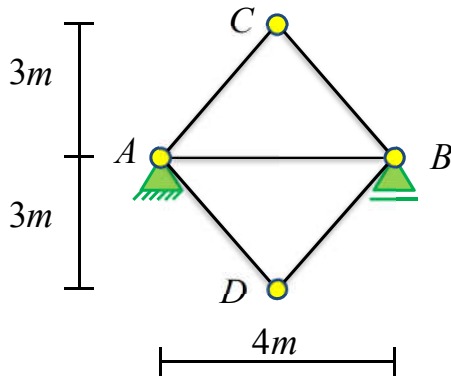
سازه از نظر خارجی معین اما از نظر داخلی نامعین است. بنابراین تحت اثر تغییر درجه حرارت، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. 88

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین و همچنین در سازه‌های نامعین داخلی تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.

مثال ۱۳- در خرابی نشان داده شده عضو AB به اندازه 1 cm انبساط حرارتی

دارد. مطلوب است تعیین نیروی داخلی اعضای خراب.



$$EA = 6 \times 10^4 \text{ (ton)}$$

$$\alpha = 1 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{^\circ\text{C}} \right)$$

حل مثال ۱۳-

درجه نامعینی سازه مورد نظر صفر است. بنابراین در سازه معین تحت اثر تغییر درجه حرارت، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید.

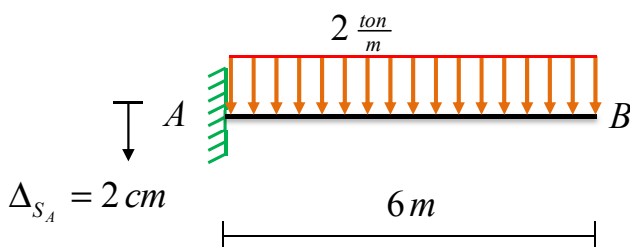
89

روش کار مجازی (Virtual Work Method)

نکته: در سازه‌های معین تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، تغییر درجه حرارت اعضا و خطای ساخت، هیچ تنش و نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید. زیرا اعضای سازه می‌توانند به صورت یک جسم صلب آزادانه حرکت نمایند.

مثال ۱۴- در تیر نشان داده شده اگر تکیه‌گاه A به اندازه 2 cm نشست داشته باشد عکس‌العمل‌های

تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید.



$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

حل مثال ۱۴-

درجه نامعینی سازه مورد نظر صفر است. بنابراین در سازه معین تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید.

90