



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

تغییر شکل در تیرهای معین

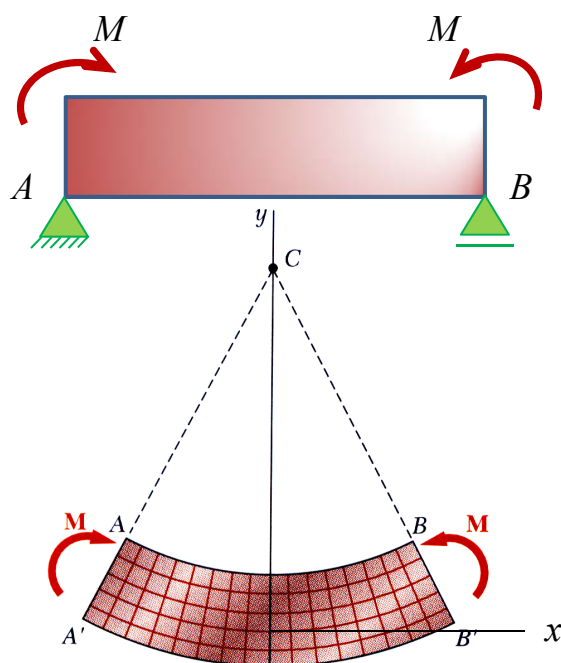
تهیه کننده: کاوه کرمی

دانشیار مهندسی سازه

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

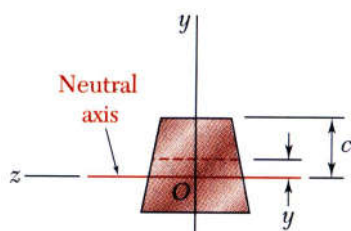
تغییر شکل در تیرهای معین

خمش خالص:



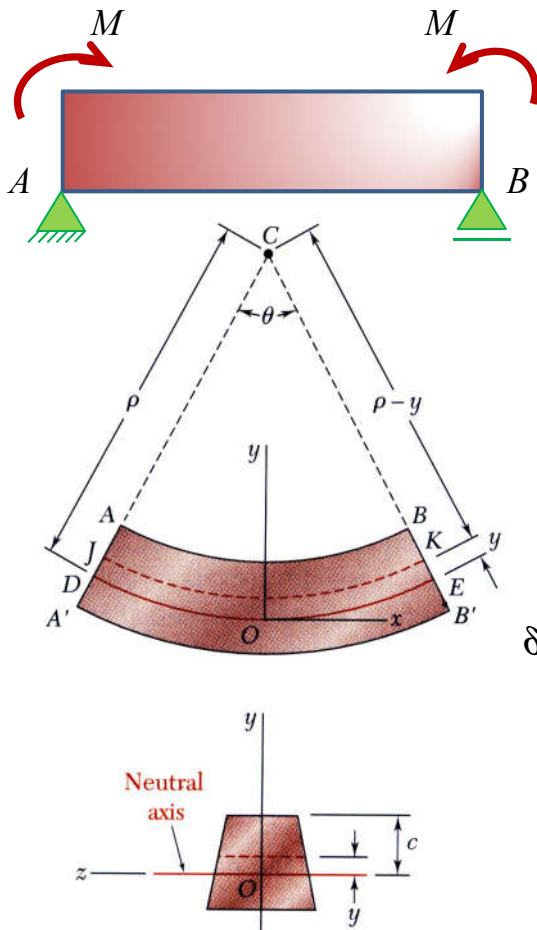
در شکل نشان داده شده یک تیر متقارن (با صفحه تقارن عمود بر محور Z) تحت اثر خمش خالص دارد:

- بعد از خمش عضو به صورت متقارن باقی می‌ماند.
- عضو به صورت یکنواخت خم شده و هر تار آن تشکیل یک کمان دایره‌ای می‌دهد.
- صفحه مقطع عرضی که از مرکز کمان عبور می‌کند بعد از خم شدن به صورت صفحه‌ای باقی می‌ماند.
- طول تارهای طولی بالایی و پایینی به ترتیب کم و زیاد می‌شود.
- یک تار خنثی باید وجود داشته باشد به طوریکه طول آن تغییری نمی‌کند.
- تنش‌های ایجاد شده در بالای تار خنثی فشاری و در پایین آن کششی می‌باشند.



تغییر شکل در تیرهای معین

خمش خالص:



طول تار خنثی $\overline{DE}$ در اثر خمش تغییر نمی‌کند و برابر با طول اولیه میله L_1 است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L_1 = \rho \theta \quad (1)$$

ρ : شعاع انحنای تیر در حالت تغییر شکل یافته

طول ثانویه تیر در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی به صورت زیر است:

$$L_2 = (\rho - y) \theta \quad (2)$$

مقدار تغییر طول تیر در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی برابر است با:

$$\delta = L_2 - L_1 \stackrel{(1) \& (2)}{\Rightarrow} \delta = (\rho - y) \theta - \rho \theta \Rightarrow \boxed{\delta = -y \theta} \quad (3)$$

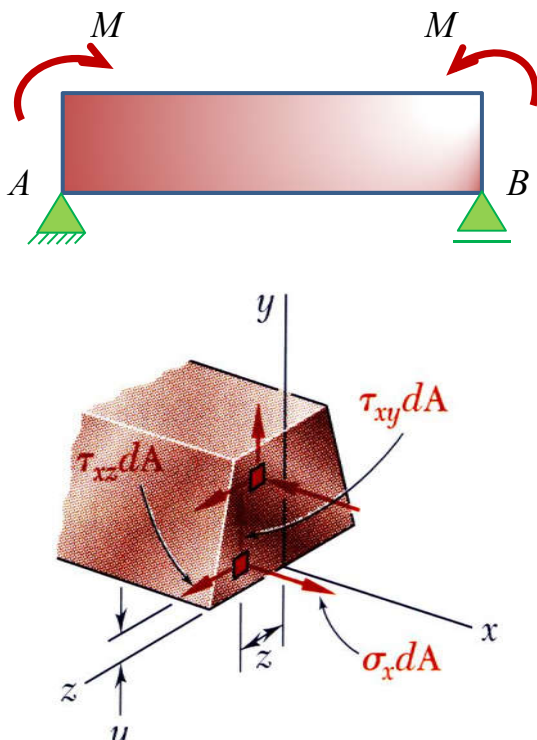
مقدار کرنش در جهت x در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی برابر است با:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L_1} \stackrel{(1) \& (3)}{\Rightarrow} \epsilon_x = \frac{-y \theta}{\rho \theta} \Rightarrow \boxed{\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}} \quad (4)$$

3

تغییر شکل در تیرهای معین

خمش خالص:



به کمک قانون هوک $\sigma = E \epsilon$ مقدار تنش در جهت x در تار دلخواه $\overline{JK}$ به فاصله y از تار خنثی برابر است با:

$$\text{Hook Law : } \sigma_x = E \epsilon_x \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \boxed{\sigma_x = -\frac{y}{\rho} E} \quad (5)$$

تنش نرمال ناشی از لنگر خمشی $M_{(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_{(x)}}{I} y} \quad (6)$$

$M_{(x)}$: لنگر حول محور z که تابعی از طول تیر x می‌باشد.

I : ممان اینرسی نسبت به محور z .

با جایگذاری رابطه (۶) در (۵) خواهیم داشت:

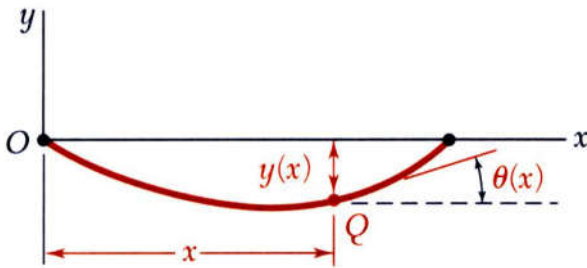
$$(6) \rightarrow (5) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI}} \quad (7)$$

4

تغییر شکل در تیرهای معین

خمش خالص:

شعاع انحنای منحنی $y(x)$ از رابطه زیر به دست می آید:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (8)$$

از آنجایی که در تیرها مقادیر تغییر شکل بسیار کوچک است از این رو:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{verys mall} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0 \xRightarrow{(8)} \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (9)$$

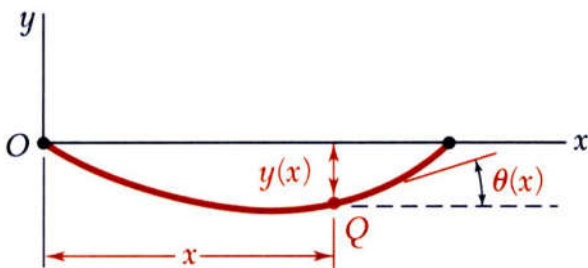
با جایگذاری رابطه (۹) در (۷) خواهیم داشت:

$$(9) \rightarrow (7) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \quad (10)$$

5

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم



شیب ایجاد شده در تیر با انتگرال گیری از رابطه (۱۰) به دست می آید:

$$(10) \Rightarrow EI \int \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) dx = \int M_{(x)} dx \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \int M_{(x)} dx \Rightarrow EI \theta_{(x)} = \int_0^x M_{(x)} dx + C_1 \quad (11)$$

خیز ایجاد شده در تیر با انتگرال گیری از شیب (رابطه ۱۱) به دست می آید:

$$(11) \Rightarrow EI \int \theta_{(x)} dx = \int \left(\int_0^x M_{(x)} dx + C_1 \right) dx \Rightarrow EI y_{(x)} = \int_0^x \left(\int_0^x M_{(x)} dx \right) dx + C_1 x + C_2 \quad (12)$$

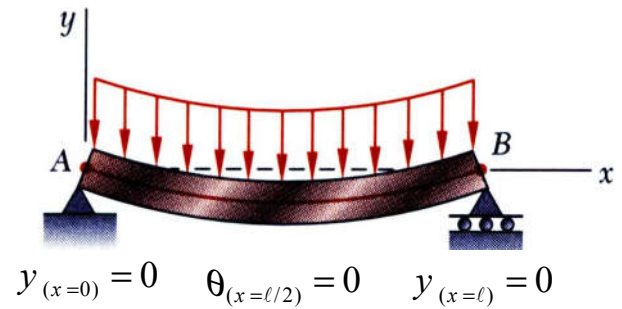
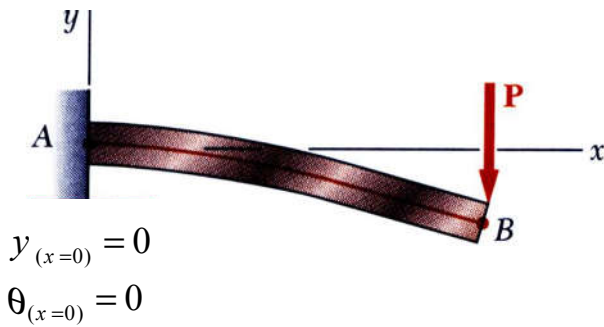
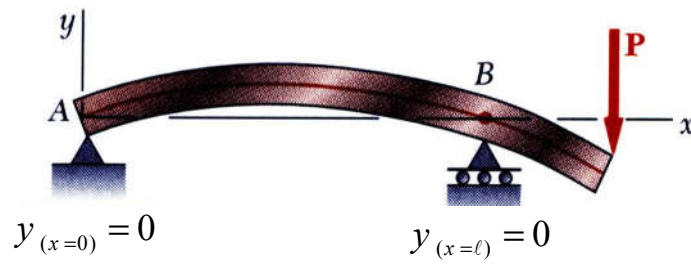
پارامترهای C_1 و C_2 در روابط بالا به کمک احراز شرایط مرزی به دست می آید.

6

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

شرایط مرزی:



7

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

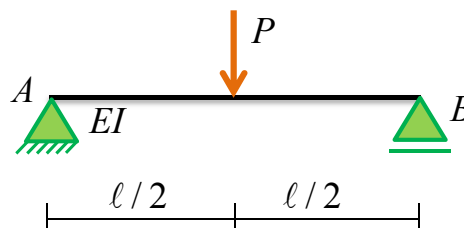
مثال ۱- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- معادله شیب در طول تیر. $\theta_{(x)} = ?$

ب- معادله خیز در طول تیر. $y_{(x)} = ?$

ج- مقدار شیب در دو انتهای تیر. $\theta_A = ?$ & $\theta_B = ?$

د- مقدار خیز در وسط تیر. $y_{(x=l/2)} = ?$



$$P = 4 \text{ ton}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg / cm}^2$$

$$I = 1000 \text{ cm}^4$$

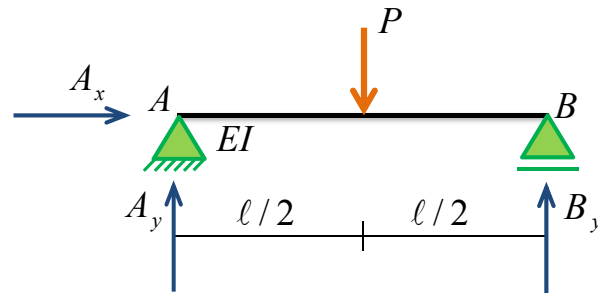
$$l = 6 \text{ m}$$

8

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \ell - P \ell / 2 = 0 \Rightarrow B_y = P / 2$$

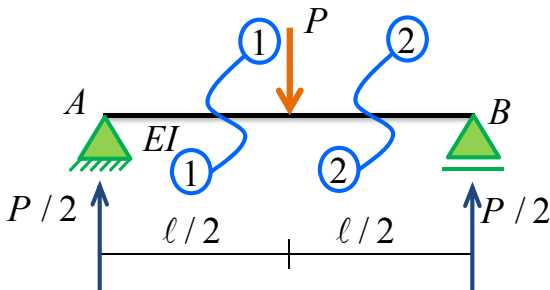
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + P / 2 = P \Rightarrow A_y = P / 2$$

9

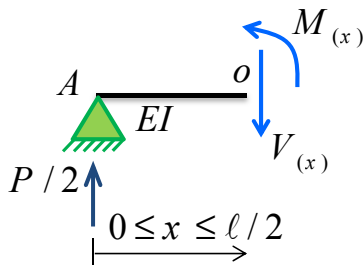
تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-

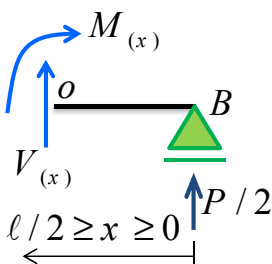


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} = Px / 2$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



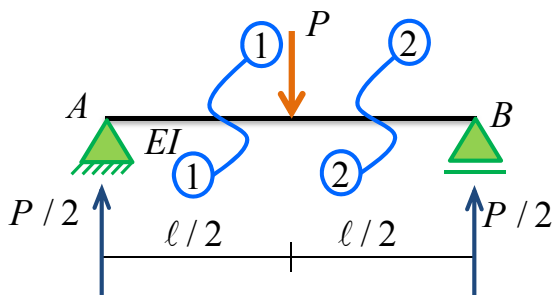
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} = Px / 2$$

10

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-



در ناحیه $0 \leq x \leq \ell/2$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می آید:

$$@0 \leq x \leq \ell/2 \Rightarrow M_{(x)} = Px/2$$

$$EI \theta_{(x)} = \frac{Px^2}{4} + C_1 \quad (I)$$

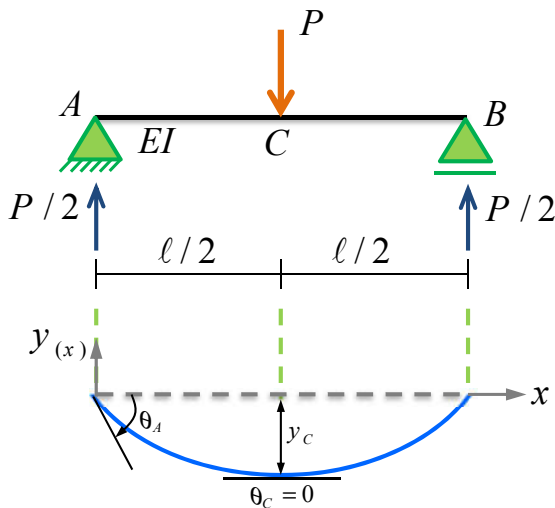
$$EI y_{(x)} = \frac{Px^3}{12} + C_1 x + C_2 \quad (II)$$

11

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-



برای محاسبه ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می شود:

به دلیل تقارن مقدار شیب در وسط تیر صفر است.

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} EI \theta_C = \frac{P(\ell/2)^2}{4} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{P\ell^2}{16} \quad (III)$$

به دلیل وجود تکیه گاه در ابتدای تیر مقدار خیز صفر است.

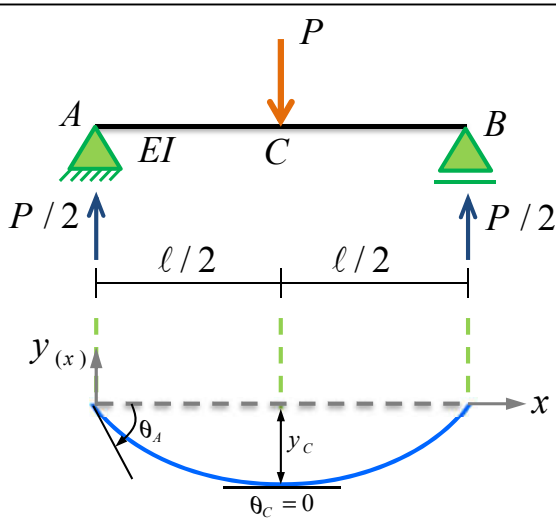
$$\stackrel{(II) \& (III)}{\Rightarrow} EI y_A = \frac{P(0)^3}{12} + \left(-\frac{P\ell^2}{16}\right)(0) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (IV)$$

12

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-



با جایگذاری ضرایب C_1 و C_2 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

$$(III) \rightarrow (I) \Rightarrow \theta_{(x)} = \frac{Px^2}{4EI} - \frac{P\ell^2}{16EI} \quad (V)$$

@ $0 \leq x \leq \ell/2$

$$(III) \& (IV) \rightarrow (II) \Rightarrow y_{(x)} = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}x \quad (VI)$$

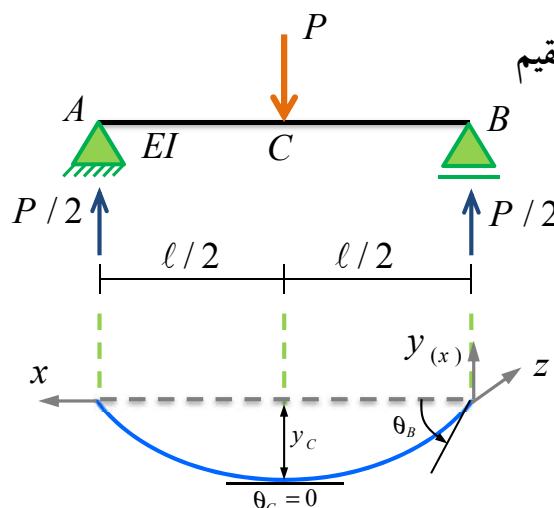
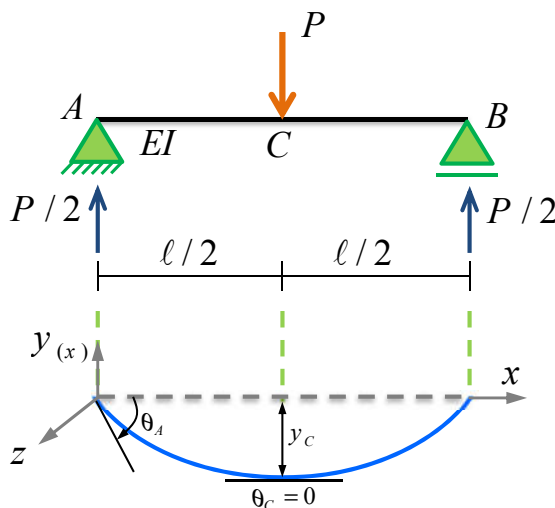
@ $0 \leq x \leq \ell/2$

13

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-



به دلیل تقارن روابط خیز و شیب در ناحیه مقطع ۲-۲ نیز به طور مشابه به دست می آید و نیازی به محاسبه مجدد نیست. به این نکته توجه شود علامت شیب در ناحیه ۲-۲ براساس دستگاه مختصات مربوطه خود به دست می آید.

$$\ell/2 \geq x \geq 0 @$$

$$\theta_{(x)} = \frac{Px^2}{4EI} - \frac{P\ell^2}{16EI}$$

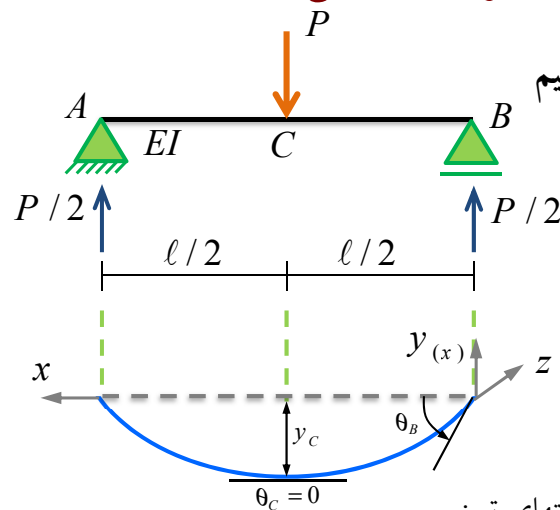
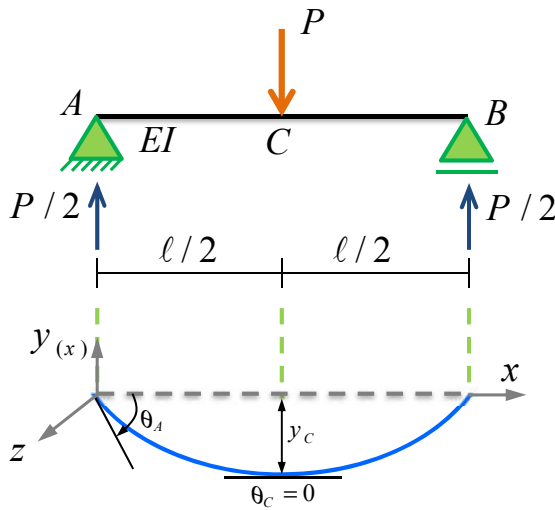
$$y_{(x)} = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}x$$

14

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-



محاسبه شیب در دو انتهای تیر:

$$\stackrel{(V)}{\Rightarrow} \theta_A = \frac{P(0)^2}{4EI} - \frac{P\ell^2}{16EI} \Rightarrow \theta_A = -\frac{P\ell^2}{16EI} \quad \text{دوران حول منفی محور } z$$

$$\theta_B = -\frac{P\ell^2}{16EI} \quad \text{دوران حول منفی محور } z$$

محاسبه خیز در وسط تیر:

$$\stackrel{(VI)}{\Rightarrow} y_C = \frac{P}{12EI}(\ell/2)^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}(\ell/2) \Rightarrow y_C = -\frac{P\ell^3}{48EI}$$

15

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۱-

$$P = 4 \text{ ton}$$

$$\left. \begin{aligned} E &= 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ I &= 1000 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\ell = 6 \text{ m}$$

$$= -\frac{4(6)^2}{16(200)} \Rightarrow \theta_A = -0.045^{\text{rad}}$$

$$\theta_B = \theta_A = -0.045^{\text{rad}}$$

$$= -\frac{4(6)^3}{48(200)} \times 10^2 (\text{cm}) \Rightarrow y_C = -9 \text{ cm}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

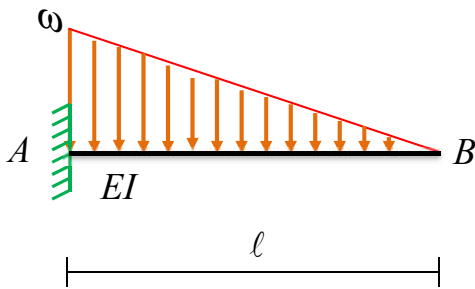
انتگرال گیری مستقیم

مثال ۲- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- مقدار شیب در انتهای آزاد B. $\theta_B = ?$

ب- معادله خیز در طول تیر. $y_{(x)} = ?$

ج- مقدار خیز در انتهای کنسول. $y_B = ?$



$$\omega = 0.4 \text{ ton / m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg / cm}^2$$

$$I = 1000 \text{ cm}^4$$

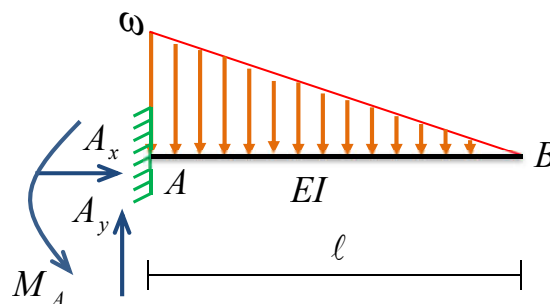
$$l = 6 \text{ m}$$

17

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۲-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$M_A = \omega l^2 / 6$$

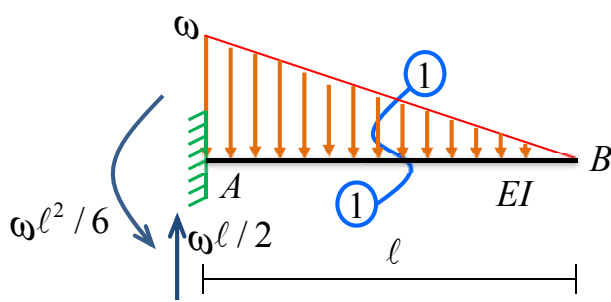
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{1}{2} \ell \omega = 0 \Rightarrow A_y = \omega \ell / 2$$

18

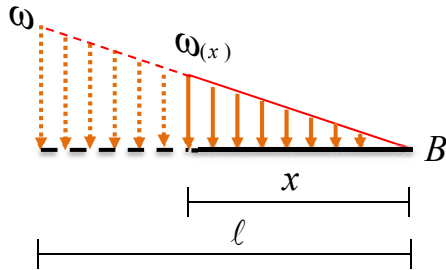
تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

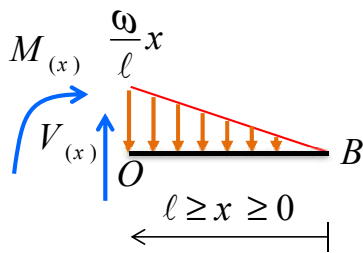
پاسخ مثال ۲-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\omega_{(x)} = \frac{\omega}{\ell} x$$



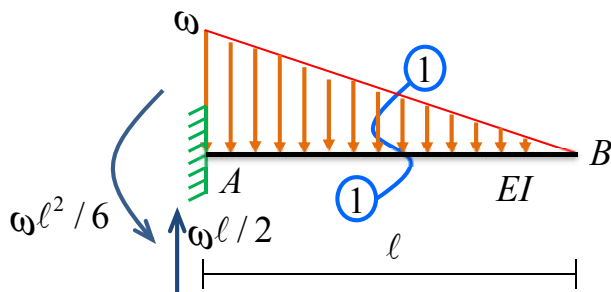
$$M_{(x)} = -\frac{\omega x^3}{6\ell}$$

19

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۲-



در ناحیه $\ell \geq x \geq 0$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می آید:

$$M_{(x)} = -\frac{\omega x^3}{6\ell} \quad \Leftarrow \quad \ell \geq x \geq 0 @$$

$$EI \theta_{(x)} = -\frac{\omega x^4}{24\ell} + C_1 \quad (I)$$

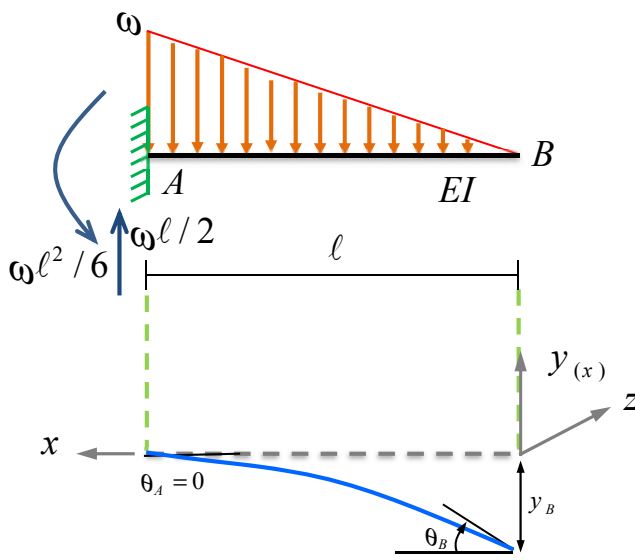
$$EI y_{(x)} = -\frac{\omega x^5}{120\ell} + C_1 x + C_2 \quad (II)$$

20

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۲-



برای محاسبه ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می شود:

به دلیل وجود تکیه گاه گیردار، شیب در گره A برابر با صفر است.

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} EI \theta_A = -\frac{\omega(\ell)^4}{24\ell} + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\omega\ell^3}{24}} \quad (III)$$

به دلیل وجود تکیه گاه در در گره A مقدار خیز صفر است.

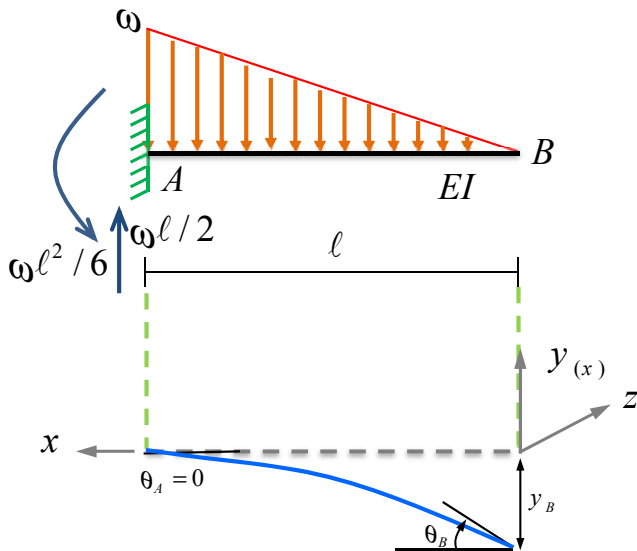
$$\stackrel{(II) \& (III)}{\Rightarrow} EI y_A = -\frac{\omega(\ell)^5}{120\ell} + \frac{\omega\ell^3}{24}(\ell) + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{\omega\ell^4}{30}} \quad (IV)$$

21

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۲-



با جایگذاری ضرایب C_1 و C_2 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

$$(III) \rightarrow (I) \Rightarrow \boxed{\theta_{(x)} = -\frac{\omega x^4}{24EI\ell} + \frac{\omega\ell^3}{24EI}} \quad (V)$$

$\ell \geq x \geq 0 @$

$$(III) \& (IV) \rightarrow (II) \Rightarrow \boxed{y_{(x)} = -\frac{\omega x^5}{120EI\ell} + \frac{\omega\ell^3 x}{24EI} - \frac{\omega\ell^4}{30EI}} \quad (VI)$$

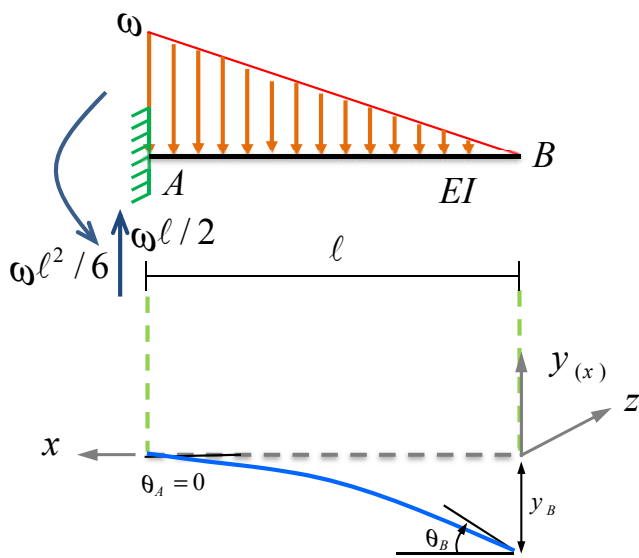
$\ell \geq x \geq 0 @$

22

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۲-



محاسبه شیب در انتهای آزاد تیر:

$$\stackrel{(V)}{\Rightarrow} \theta_B = -\frac{\omega(0)^4}{24EI \ell} + \frac{\omega \ell^3}{24EI} \Rightarrow \boxed{\theta_B = \frac{\omega \ell^3}{24EI}} \quad (\text{ساعتگرد})$$

محاسبه خیز در انتهای آزاد تیر:

$$\stackrel{(VI)}{\Rightarrow} y_B = -\frac{\omega(0)^5}{120EI \ell} + \frac{\omega \ell^3(0)}{24EI} - \frac{\omega \ell^4}{30EI} \Rightarrow \boxed{y_B = -\frac{\omega \ell^4}{30EI}}$$

23

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۲-

$$\omega = 0.4 \text{ ton} / \text{m}$$

$$\left. \begin{array}{l} E = 2 \times 10^6 \text{ kg} / \text{cm}^2 \\ I = 1000 \text{ cm}^4 \end{array} \right\} \Rightarrow EI = 2 \times 10^6 \times 1000 (\text{kg} \cdot \text{cm}^2) \times 10^{-7} \Rightarrow EI = 200 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

$$\ell = 6 \text{ m}$$

$$= \frac{0.4(6)^3}{24(200)} \Rightarrow \boxed{\theta_B = 0.018^{\text{rad}}}$$

$$= -\frac{(0.4)(6)^4}{30(200)} \times 10^2 (\text{cm}) \Rightarrow \boxed{y_B = -8.64 \text{ cm}}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

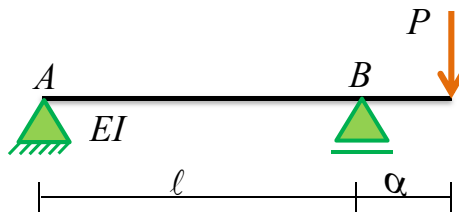
انتگرال گیری مستقیم

مثال ۳- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- معادله خیز در طول تیر. $y_{(x)} = ?$

ب- مقدار خیز ماکزیمم. $y_{\max} = ?$

ج- مقدار شیب در گره A. $\theta_A = ?$



$$P = 5 \text{ ton}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg / cm}^2$$

$$I = 1000 \text{ cm}^4$$

$$l = 6 \text{ m}$$

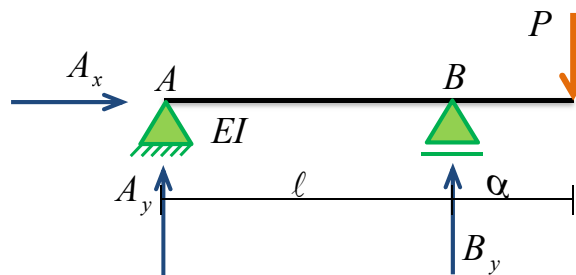
$$\alpha = 1 \text{ m}$$

25

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y l - P(l + \alpha) = 0 \Rightarrow B_y = P\left(1 + \frac{\alpha}{l}\right)$$

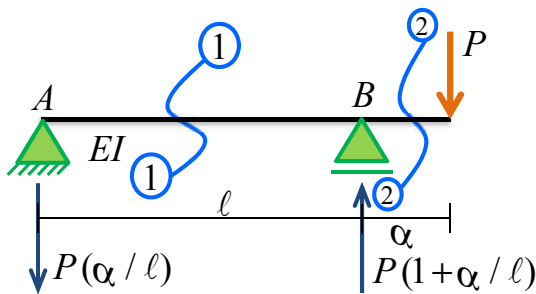
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + P\left(1 + \frac{\alpha}{l}\right) = P \Rightarrow A_y = -\frac{\alpha}{l} P$$

26

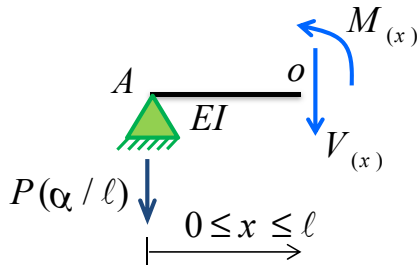
تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-

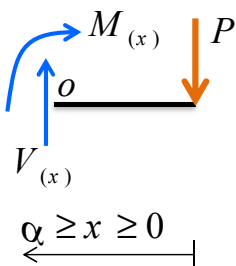


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -P(\alpha / \ell)x$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



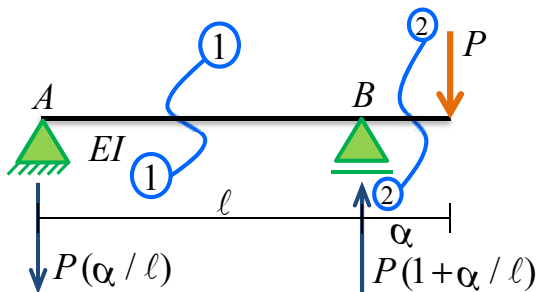
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -Px$$

27

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



در ناحیه $0 \leq x \leq \ell$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می آید:

$$@ 0 \leq x \leq \ell \Rightarrow M_{(x)} = -P(\alpha / \ell)x$$

$$EI \theta_{(x)} = -P(\alpha / \ell) \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (3.1)$$

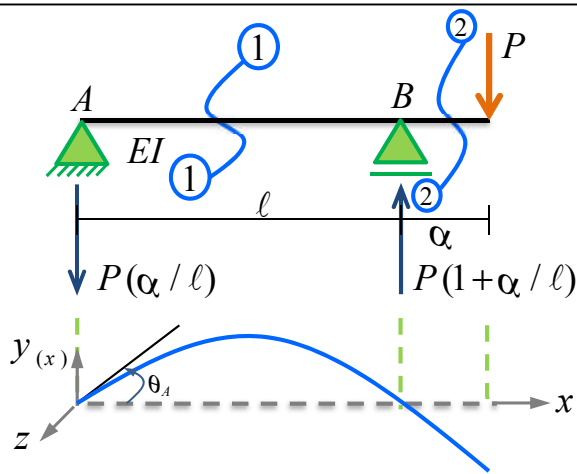
$$EI y_{(x)} = -P(\alpha / \ell) \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (3.2)$$

28

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



برای محاسبه ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می شود:

به دلیل وجود تکیه گاه در نقاط A و B تیر مقدار خیز صفر است.

$$\stackrel{(3.2)}{\Rightarrow} EI(0) = -P(\alpha/l) \frac{(0)^3}{6} + C_1(0) + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \quad (3.3)$$

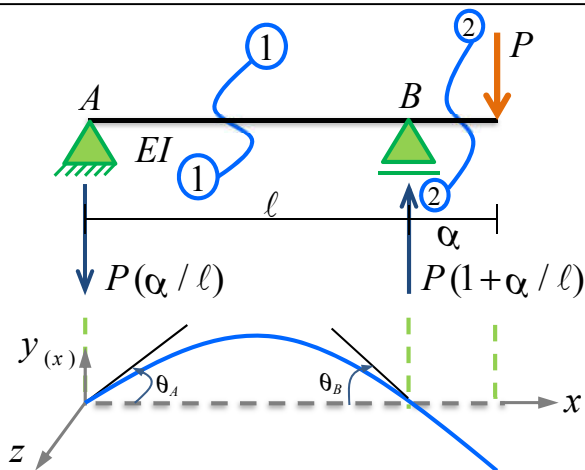
$$\stackrel{(3.2) \& (3.3)}{\Rightarrow} EI(0) = -P(\alpha/l) \frac{(\ell)^3}{6} + C_1(\ell) + 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = P\alpha\ell/6} \quad (3.4)$$

29

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



با جایگذاری ضرایب C_1 و C_2 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

$$(3.4) \rightarrow (3.1) \Rightarrow \boxed{\theta_{(x)} = -\frac{P\alpha x^2}{2EI\ell} + \frac{P\alpha\ell}{6EI}} \quad (3.5)$$

@ $0 \leq x \leq \ell$

$$(3.3) \& (3.4) \rightarrow (3.2) \Rightarrow \boxed{y_{(x)} = -\frac{P\alpha x^3}{6EI\ell} + \frac{P\alpha\ell x}{6EI}} \quad (3.6)$$

@ $0 \leq x \leq \ell$

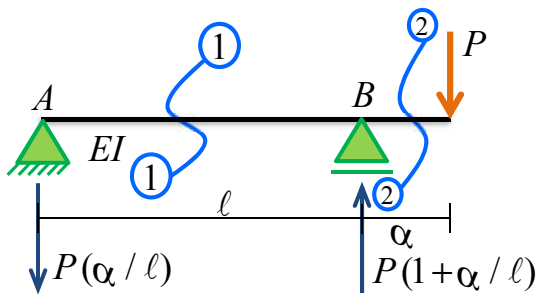
$$\boxed{\theta_B = -\frac{P\alpha\ell}{3EI}} \quad (I)$$

30

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



در ناحیه $\alpha \geq x \geq 0$ معادله شیب و خیز در طول تیر به صورت زیر به دست می آید:

$$M_{(x)} = -Px \quad \Leftarrow \quad \alpha \geq x \geq 0 @$$

$$EI \theta_{(x)} = -\frac{Px^2}{2} + C_3 \quad (3.7)$$

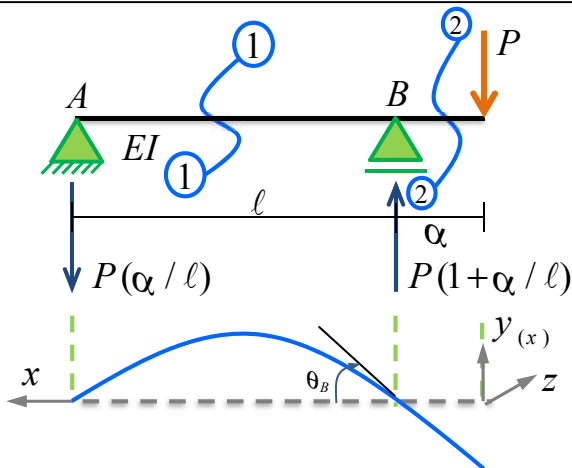
$$EI y_{(x)} = -\frac{Px^3}{6} + C_3 x + C_4 \quad (3.8)$$

31

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



برای محاسبه ضرایب C_3 و C_4 از شرایط مرزی استفاده می شود:

به دلیل وجود تکیه گاه در گره B مقدار خیز صفر است.

$$\stackrel{(3.8)}{\Rightarrow} EI y_B = -\frac{P\alpha^3}{6} + C_3\alpha + C_4 = 0 \Rightarrow C_3\alpha + C_4 = \frac{P\alpha^3}{6} \quad (3.9)$$

مقدار شیب در گره B در هر دو معادله شیب باید صدق نماید.

به این نکته دقت شود مقدار شیب در گره B در دستگاه مختصات سمت راست مثبت است (حول مثبت محور z)

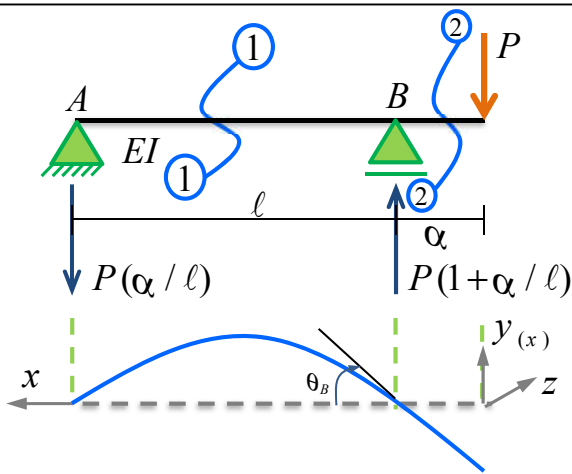
$$\Rightarrow C_3 = \frac{P\alpha\ell}{3} + \frac{P\alpha^2}{2} \quad (3.10)$$

32

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



$$C_4 = -\frac{P\alpha^2\ell}{3} - \frac{P\alpha^3}{3} \quad (3.11)$$

با جایگذاری ضرایب C_3 و C_4 در روابط شیب و خیز خواهیم داشت:

$$(3.10) \rightarrow (3.7) \Rightarrow \theta_{(x)} = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{P\alpha\ell}{3EI} + \frac{P\alpha^2}{2EI} \quad (3.12)$$

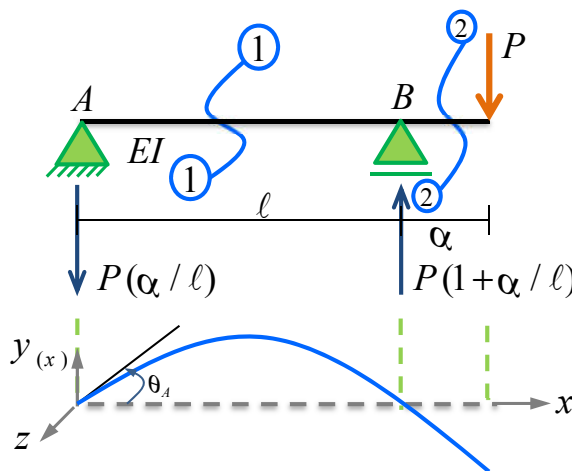
$$(3.10) \& (3.11) \rightarrow (3.8) \Rightarrow y_{(x)} = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{P\alpha\ell x}{3EI} + \frac{P\alpha^2 x}{2EI} - \frac{P\alpha^2\ell}{3EI} - \frac{P\alpha^3}{3EI} \quad (3.13)$$

33

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

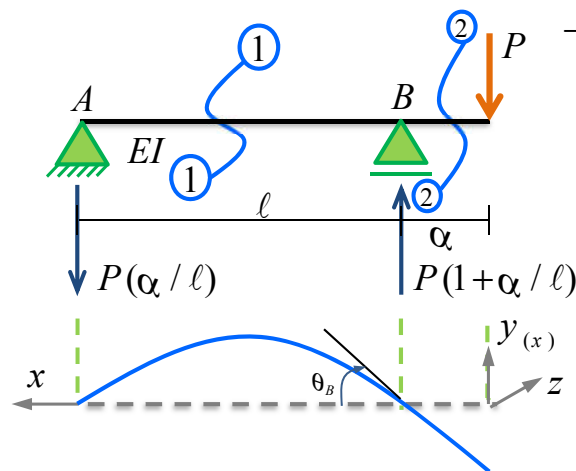
پاسخ مثال ۳-



$$@ 0 \leq x \leq \ell \Rightarrow M_{(x)} = -P(\alpha/\ell)x$$

$$\theta_{(x)} = -\frac{P\alpha x^2}{2EI\ell} + \frac{P\alpha\ell}{6EI} \quad (3.5)$$

$$y_{(x)} = -\frac{P\alpha x^3}{6EI\ell} + \frac{P\alpha\ell x}{6EI} \quad (3.6)$$



$$M_{(x)} = -Px \quad @ \alpha \geq x \geq 0$$

$$\theta_{(x)} = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{P\alpha\ell}{3EI} + \frac{P\alpha^2}{2EI} \quad (3.12)$$

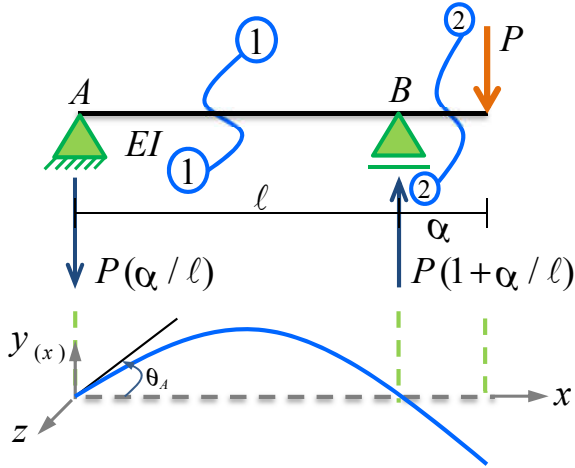
$$y_{(x)} = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{P\alpha\ell x}{3EI} + \frac{P\alpha^2 x}{2EI} - \frac{P\alpha^2\ell}{3EI} - \frac{P\alpha^3}{3EI} \quad (3.13)$$

34

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



$$P = 5 \text{ ton}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 1000 \text{ cm}^4$$

$$l = 6 \text{ m}$$

$$\alpha = 1 \text{ m}$$

$$@ 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow M_{(x)} = -5(1/6)x \Rightarrow M_{(x)} = -\frac{5}{6}x \quad (3.14)$$

$$(3.5) \Rightarrow \theta_{(x)} = -\frac{(5)(1)x^2}{2(200)(6)} + \frac{(5)(1)(6)}{6(200)} \Rightarrow \theta_{(x)} = -\frac{x^2}{480} + \frac{1}{40} \quad (3.15)$$

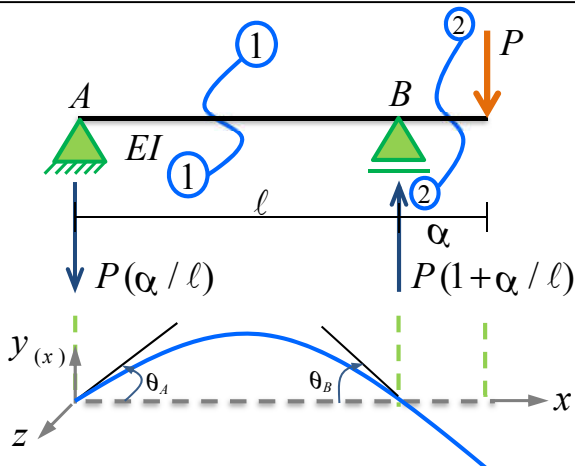
$$(3.6) \Rightarrow y_{(x)} = -\frac{(5)(1)x^3}{6(200)(6)} + \frac{(5)(1)(6)x}{6(200)} \Rightarrow y_{(x)} = -\frac{x^3}{1440} + \frac{x}{40} \quad (3.16)$$

35

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



در ناحیه $@ 0 \leq x \leq 6$

مقدار شیب در گره A.

$$\Rightarrow \theta_A = -\frac{(0)^2}{480} + \frac{1}{40} \Rightarrow \theta_A = 0.025^{\text{rad}}$$

مقدار شیب در گره B.

$$\Rightarrow \theta_B = -\frac{(6)^2}{480} + \frac{1}{40} \Rightarrow \theta_B = -0.05^{\text{rad}}$$

در نقطه خیز ماکزیمم مقدار مشتق خیز یعنی شیب (نقطه اکسترمم) برابر با صفر است:

$$0 \leq x = 2\sqrt{3} \text{ m} \leq 6 \quad \text{قابل قبول}$$

$$y_{\max} = 0.0577 \text{ m}$$

36

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-

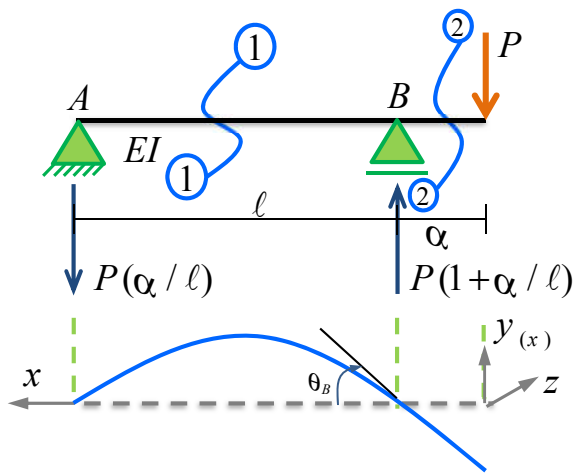
$$P = 5 \text{ ton}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 1000 \text{ cm}^4$$

$$\ell = 6 \text{ m}$$

$$\alpha = 1 \text{ m}$$



$$M_{(x)} = -5x \quad \Leftarrow \quad 1 \geq x \geq 0 @$$

$$(3.12) \Rightarrow \theta_{(x)} = -\frac{5x^2}{2(200)} + \frac{(5)(1)(6)}{3(200)} + \frac{(5)(1)^2}{2(200)} \Rightarrow \theta_{(x)} = -\frac{x^2}{80} + \frac{1}{16} \quad (3.17)$$

$$(3.13) \Rightarrow y_{(x)} = -\frac{5x^3}{6(200)} + \frac{(5)(1)(6)x}{3(200)} + \frac{(5)(1)^2x}{2(200)} - \frac{(5)(1)^2(6)}{3(200)} - \frac{(5)(1)^3}{3(200)} \Rightarrow y_{(x)} = -\frac{x^3}{240} + \frac{x}{16} - \frac{7}{120} \quad (3.18)$$

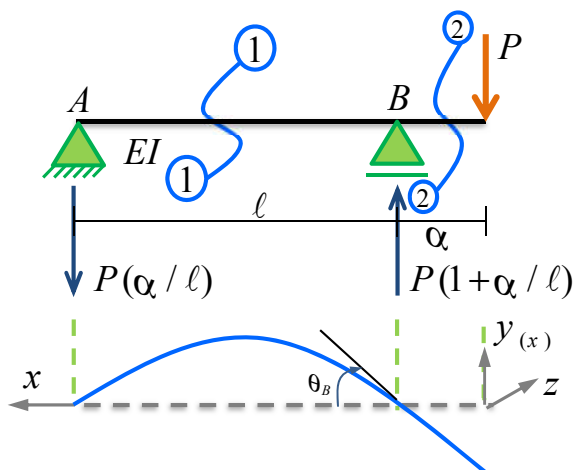
37

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-

در ناحیه $1 \geq x \geq 0 @$



مقدار شیب در گره B.

$$\Rightarrow \theta_B = -\frac{(1)^2}{80} + \frac{1}{16} \Rightarrow \theta_B = 0.05^{\text{rad}}$$

در گره خیز ماکزیمم مقدار مشتق خیز یعنی شیب (گره اکسترمم) برابر با صفر است:

$$1 \geq x = \sqrt{5} \text{ m} \geq 0 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

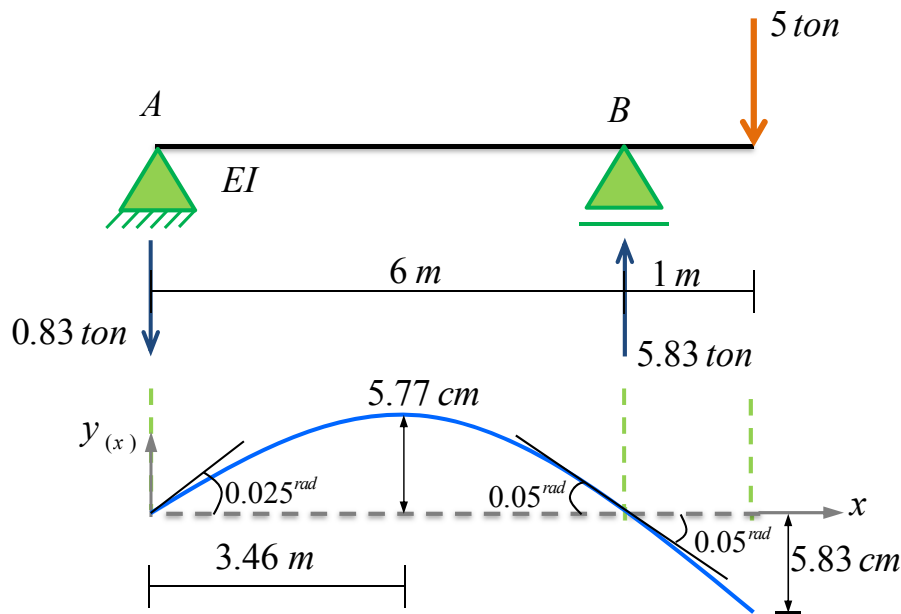
$$\Rightarrow y_{\max 2} = -\frac{(0)^3}{240} + \frac{(0)}{16} - \frac{7}{120} \Rightarrow y_{\max 2} = -0.0583 \text{ m}$$

38

تغییر شکل در تیرهای معین

انتگرال گیری مستقیم

پاسخ مثال ۳-



ETABS File Name: 03-Example-03.EDB

39

تغییر شکل در تیرهای معین

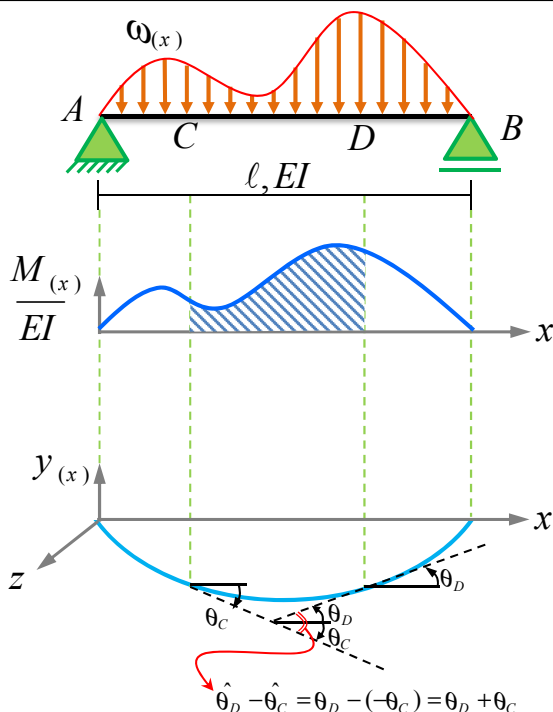
روش لنگر سطح

تیر دو سر مفصل نشان داده شده تحت اثر بار

گسترده دلخواهی قرار دارد

$$(10): \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{M_{(x)}}{EI} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \theta_{(x)}$$

$$\frac{d\theta_{(x)}}{dx} = \frac{M_{(x)}}{EI} \Rightarrow \boxed{d\theta_{(x)} = \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (12)$$



$$(12) \Rightarrow \int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta_{(x)} = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M_{(x)}}{EI} dx \Rightarrow \boxed{\theta_{D/C} = \hat{\theta}_D - \hat{\theta}_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M_{(x)}}{EI} dx} \quad (13)$$

قضیه اول لنگر سطح:
 سطح زیر منحنی تغییرات $\frac{M_{(x)}}{EI}$ بین نقاط D و C برابر است با اختلاف شیب بین نقاط D و C

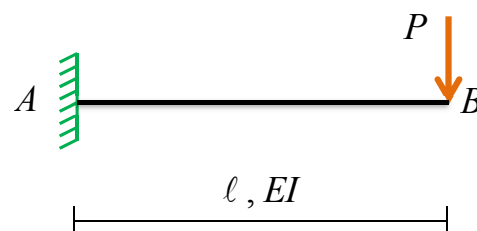
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

مثال ۴- با استفاده از روش لنگر سطح در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$



$$\int dt = \int_{x_C}^{x_D} \bar{x} \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \Rightarrow t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (14)$$

قضیه دوم لنگر سطح:

گشتاور اول سطح زیر نمودار $\frac{M(x)}{EI}$ بین نقاط C و D نسبت به محور قائم در گره C برابر است با مقدار فاصله قائم انحراف گره C از خط مماس بر گره D.

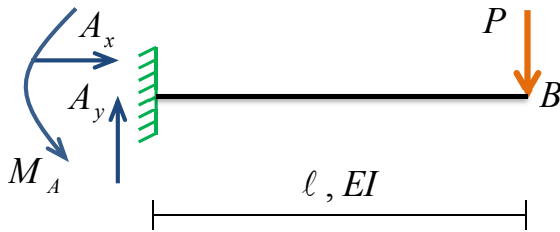
$$t_{C/D} = A \times \bar{x}_O$$

$$t_{C/D} = A \times \bar{x}_O$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

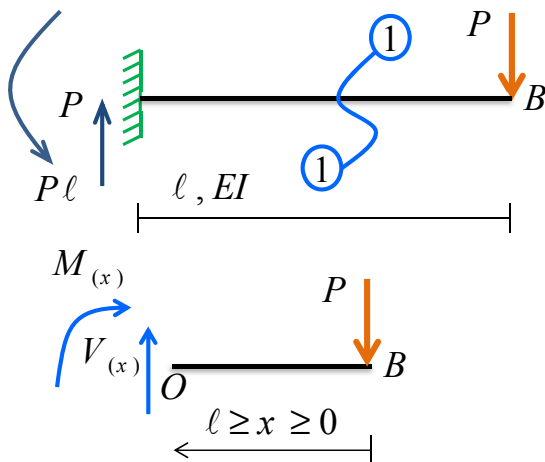
پاسخ مثال ۴-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - P \times l = 0 \Rightarrow M_A = P l$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P = 0 \Rightarrow A_y = P$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + P \times x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -Px \quad (4.1)$$

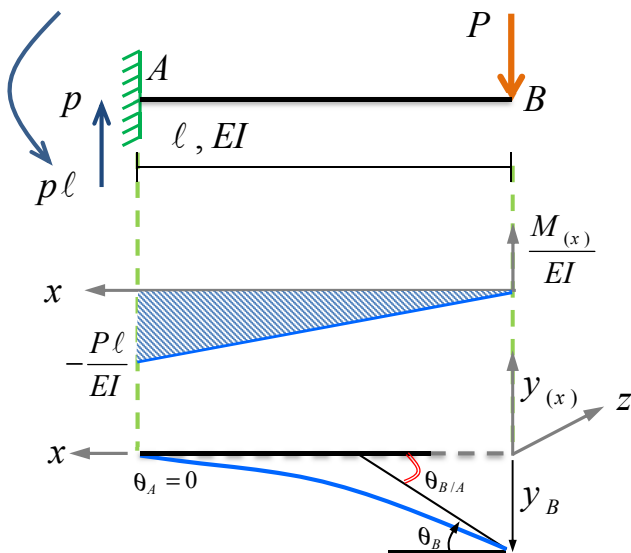
$l \geq x \geq 0$

43

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۴-



برای استفاده از قضیه اول لنگر سطح بهتر آن است دو گره‌ای که انتخاب می‌شود شیب یکی از آن‌ها معلوم باشد تا در رابطه (۱۳) تنها یک مجهول ظاهر شود. به همین منظور، در این مثال گره A به عنوان گره دوم انتخاب می‌شود:

$$\theta_B = \frac{P l^2}{2EI}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان‌پذیر است. از

این رو خواهیم داشت:

$$\theta_B = \frac{P l^2}{2EI}$$

تعریف قضیه اول لنگر سطح

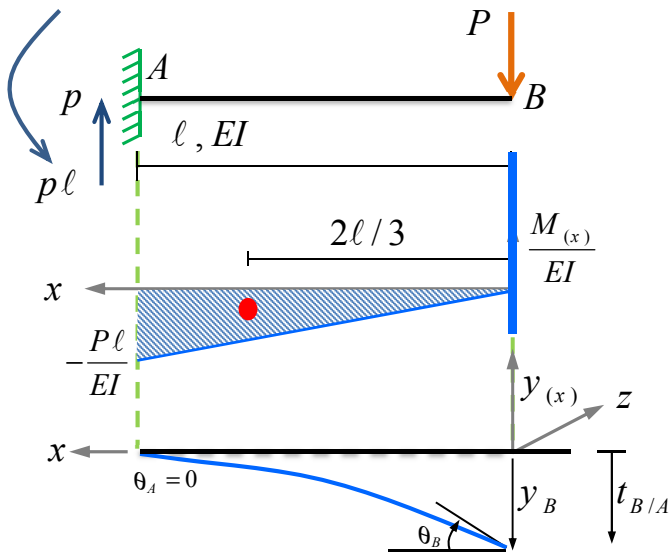
در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می‌شود

44

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۴-



$$y_B = -\frac{p\ell^3}{3EI}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M(x)}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان پذیر است. از این رو خواهیم داشت:

تعریف قضیه دوم لنگر سطح

$$y_B = -\frac{p\ell^3}{3EI}$$

در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می شود

45

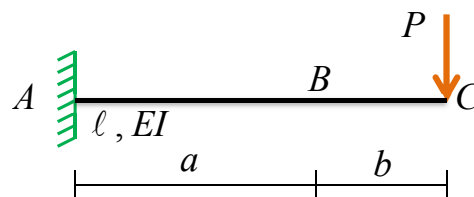
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

مثال ۵- با استفاده از روش لنگر سطح در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$

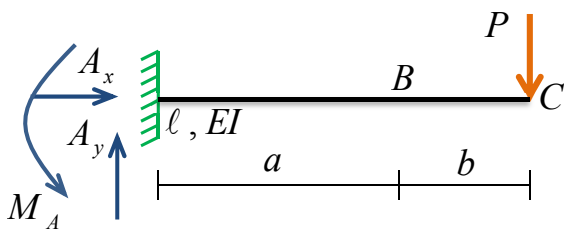


46

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۵-

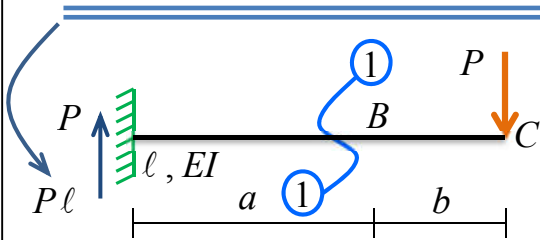


با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

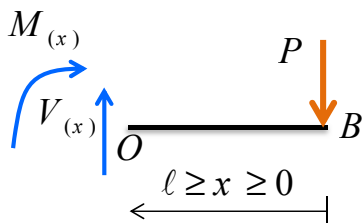
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - P \times \ell = 0 \Rightarrow M_A = P\ell$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P = 0 \Rightarrow A_y = P$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + P \times x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -Px \quad (5.1)$$

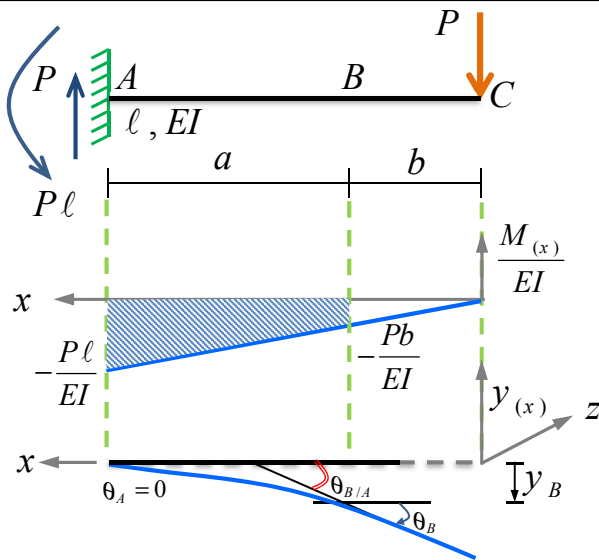
$\ell \geq x \geq 0$

47

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۵-



برای استفاده از قضیه اول لنگر سطح بهتر آن است دو گره‌ای که انتخاب می‌شود شیب یکی از آن‌ها معلوم باشد تا در رابطه (۱۳) تنها یک مجهول ظاهر شود. به همین منظور، در این مثال گره A به عنوان گره دوم انتخاب می‌شود:

$$\theta_B = \frac{Pa(\ell + b)}{2EI}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان‌پذیر است. از این رو خواهیم داشت:

تعریف قضیه اول لنگر سطح

$$\theta_B = \frac{Pa(\ell + b)}{2EI}$$

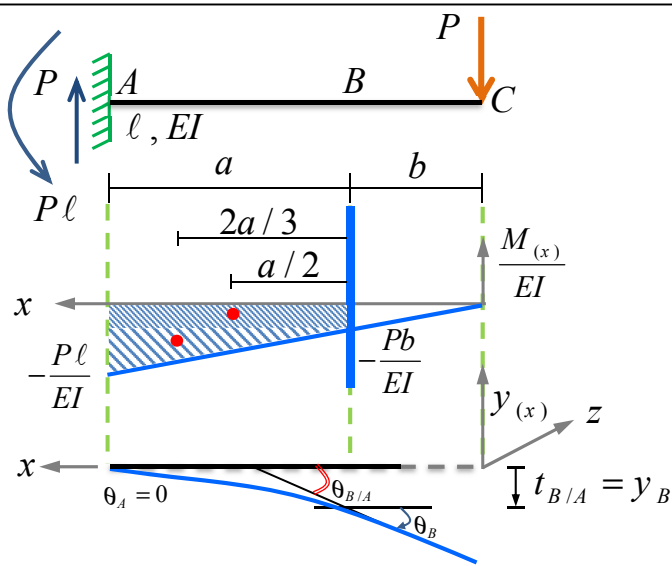
در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می‌شود

48

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۵-



$$y_B = -\frac{Pa^2(2\ell + b)}{6EI}$$

با توجه به خطی بودن معادله لنگر، محاسبه لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M(x)}{EI}$ با بررسی هندسه شکل به راحتی امکان پذیر است. از این رو خواهیم داشت:

⇒ تعریف قضیه دوم لنگر سطح

$$y_B = -\frac{Pa^2(2\ell + b)}{6EI}$$

در صورتی که جهت دستگاه مختصات انتخابی از راست به چپ بود یک علامت منفی ظاهر می شود

49

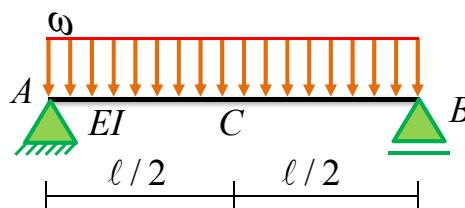
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

مثال ۶- با استفاده از روش لنگر سطح در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$

ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$

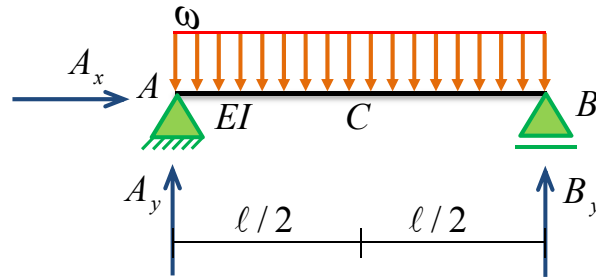


50

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۶-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \ell - (w\ell)\ell/2 = 0 \Rightarrow B_y = w\ell/2$$

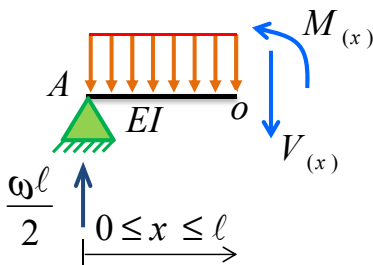
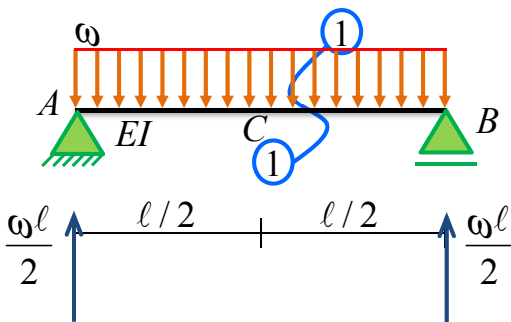
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + w\ell/2 = w\ell \Rightarrow A_y = w\ell/2$$

51

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۶-



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$M_{(x)} = -\frac{wx^2}{2} + \frac{w\ell x}{2} \quad (6.1)$$

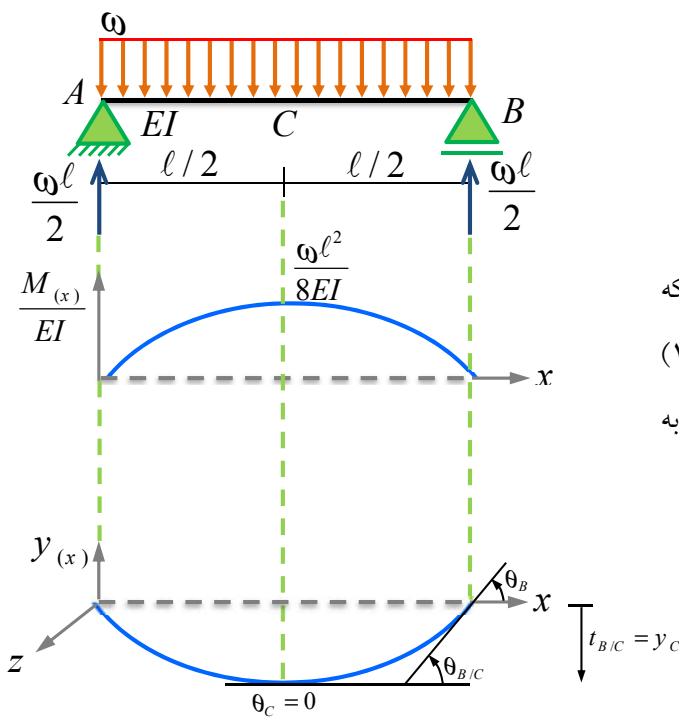
52

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۶-

برای استفاده از قضیه اول لنگر سطح بهتر آن است دو گره‌ای که انتخاب می‌شود شیب یکی از آن‌ها معلوم باشد تا در رابطه (۱۳) تنها یک مجهول ظاهر شود. به همین منظور، در این مثال گره C به عنوان گره دوم انتخاب می‌شود:



$$\theta_B = \frac{w l^3}{24 EI}$$

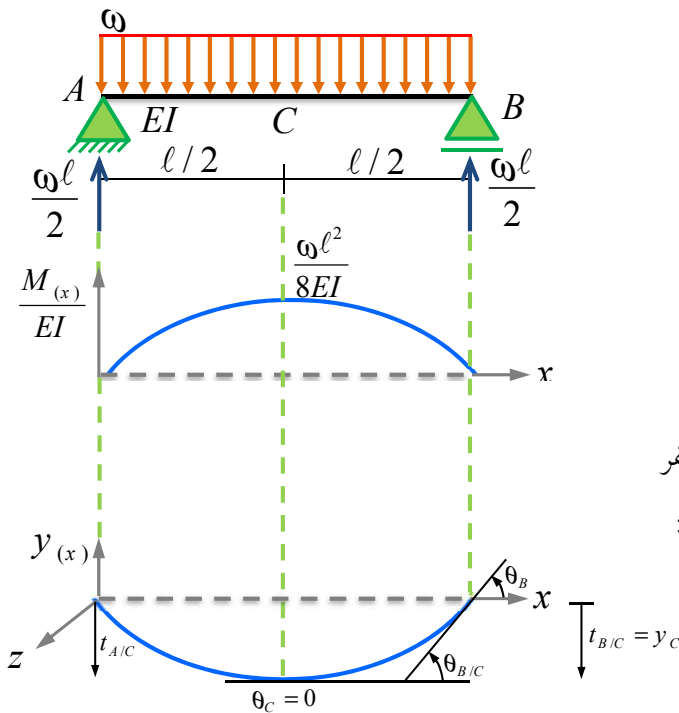
53

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۶-

همانطور که از شکل پیدا است مقدار $y_C = t_{B/C} = t_{A/C}$ اما از آنجایی که که کران پایین انتگرال گیری در $t_{A/C}$ از صفر شروع می‌شود با محاسبات ساده‌تری مواجه خواهیم شد از این رو:



$$y_C = -\frac{5 w l^4}{384 EI}$$

54

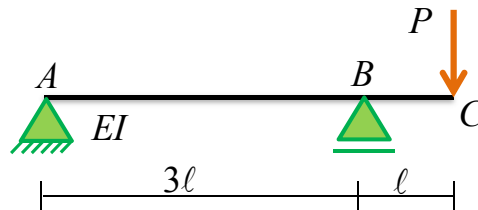
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

مثال ۷- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در A. $\theta_A = ?$

ب- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$

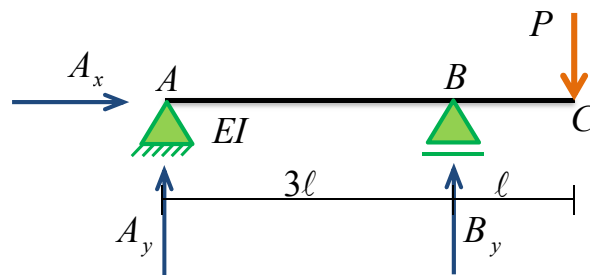


55

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۷-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(3l) - P(3l + l) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{4P}{3}$$

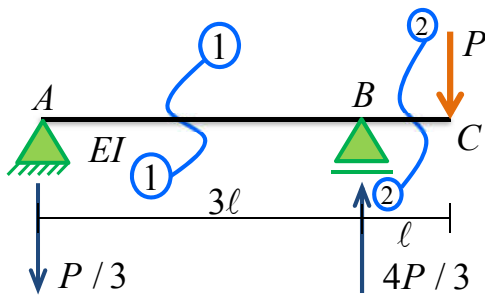
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{4P}{3} = P \Rightarrow A_y = -\frac{P}{3}$$

56

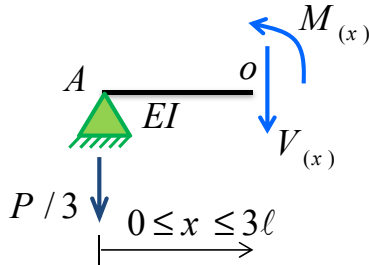
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۷-۷

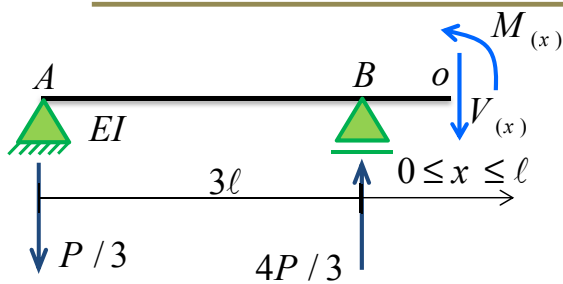


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -Px / 3$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (P/3)(3l + x) - (4P/3)x = 0$$

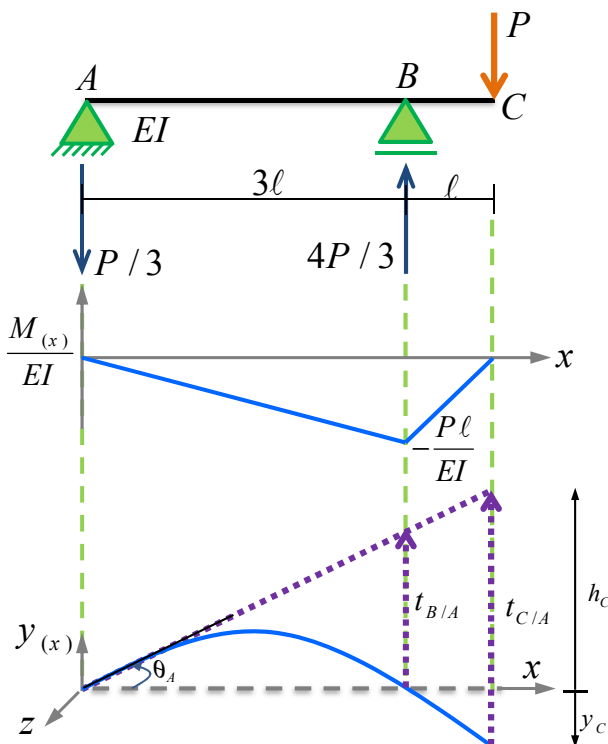
$$\Rightarrow M_{(x)} = Px - P\ell$$

57

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۷-۷



$$(7.1)$$

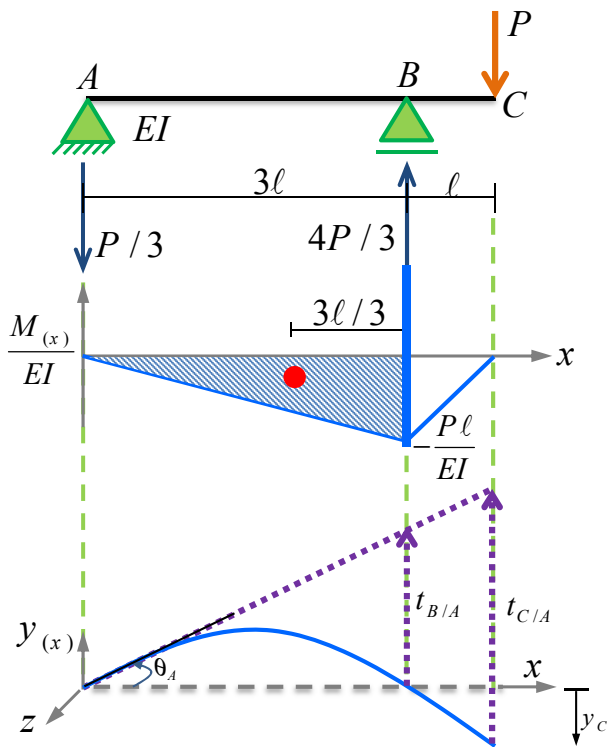
$$y_C = \frac{4}{3}t_{B/A} - t_{C/A} \quad (7.2)$$

58

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۷-۷



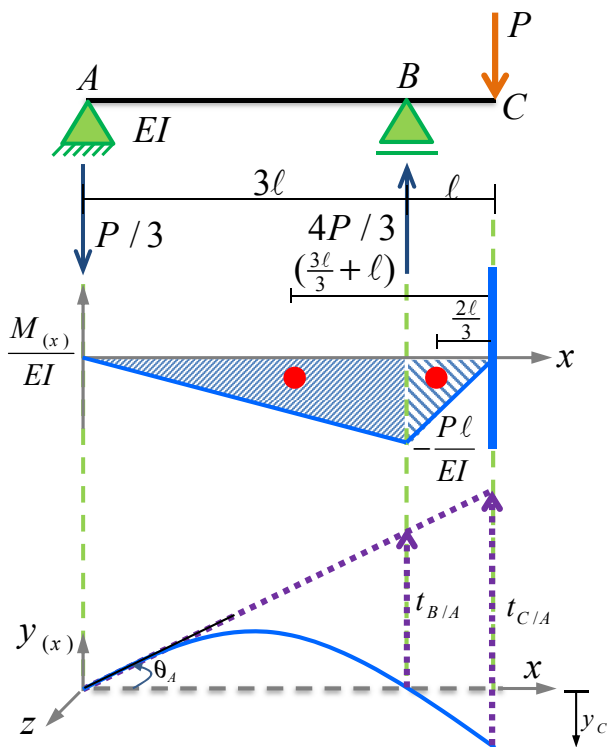
$$t_{B/A} = \frac{3P\ell^3}{2EI} \quad (7.3)$$

59

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۷-۷



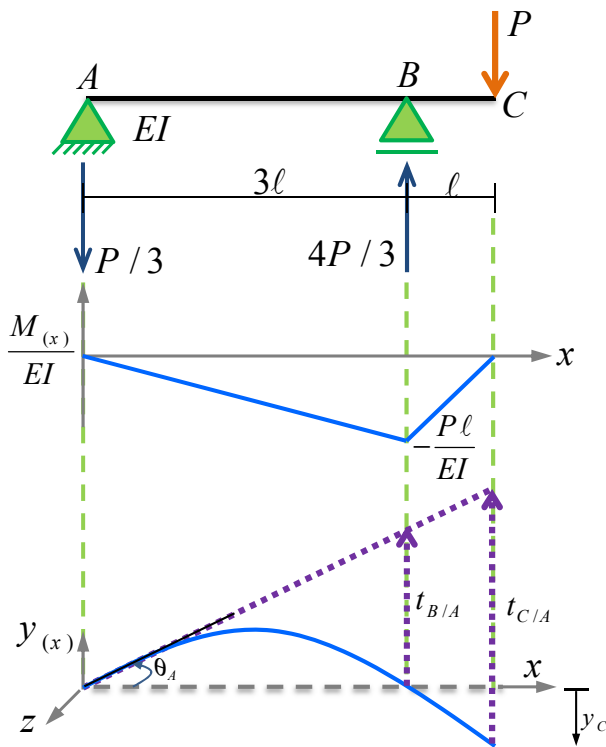
$$t_{C/A} = \frac{10P\ell^3}{3EI} \quad (7.4)$$

60

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۷-



$$(7.3) \rightarrow (7.1) \Rightarrow \theta_A = \frac{\left(\frac{3P\ell^3}{2EI}\right)}{3\ell} \Rightarrow \theta_A = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، علامت شیب مثبت است.

$$(7.3) \& (7.4) \rightarrow (7.2) \Rightarrow y_C = \frac{4}{3} \left(\frac{3P\ell^3}{2EI} \right) - \left(\frac{10P\ell^3}{3EI} \right) \Rightarrow y_C = -\frac{4P\ell^3}{3EI}$$

61

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

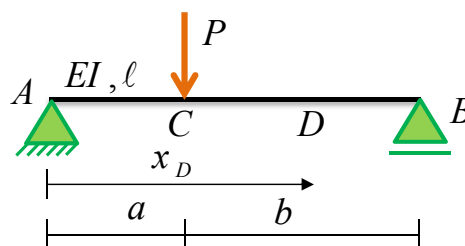
مثال ۸- در تیر نشان داده شده مطلوب است:

الف- مقدار شیب در گره دلخواه D. $\theta_D = ?$

ب- مقدار خیز در گره دلخواه D. $y_D = ?$

پ- مقدار شیب در دو انتهای تیر. $\theta_A = ?$ & $\theta_B = ?$

چ- مقدار شیب و خیز در گره C. $\theta_C = ?$ & $y_C = ?$

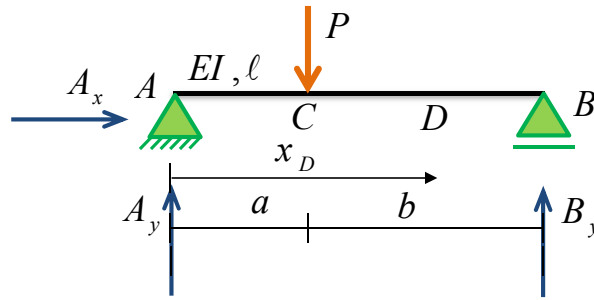


62

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۸-



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \ell - Pa = 0 \Rightarrow B_y = \frac{Pa}{\ell}$$

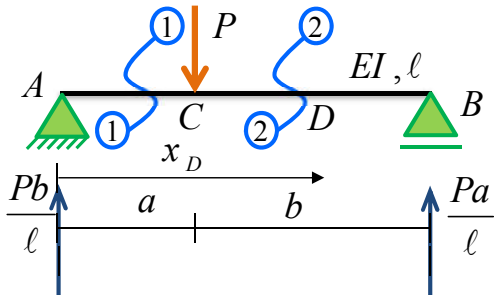
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + Pa / \ell = P \Rightarrow A_y = \frac{Pb}{\ell}$$

63

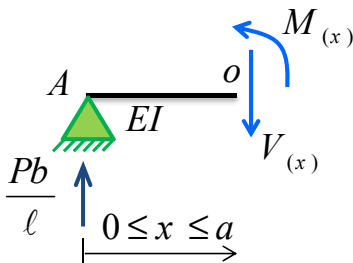
تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۸-

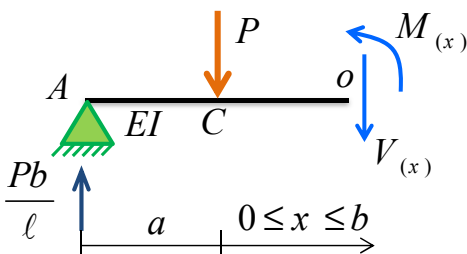


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} = \frac{Pbx}{\ell}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \sum M_o = 0 &\Rightarrow M_{(x)} + Px - \frac{Pb}{\ell}(x + a) = 0 \\ &\Rightarrow M_{(x)} = -\frac{Pa}{\ell}x + \frac{Pba}{\ell} \end{aligned}$$

64

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

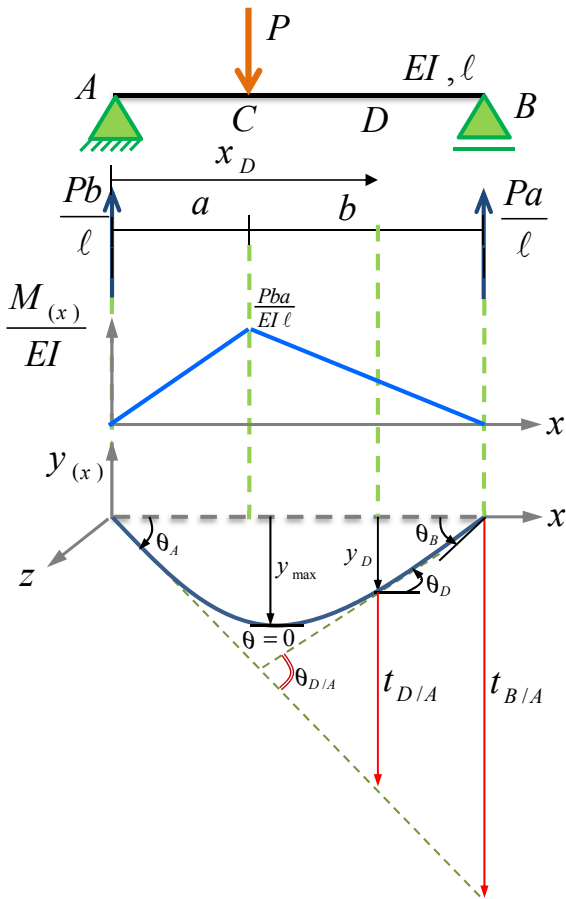
پاسخ مثال ۸-

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{\ell} \quad (8.1)$$

$$\theta_D = \theta_{D/A} + \frac{t_{B/A}}{\ell} \quad (8.2)$$

$$y_D = \frac{x_D}{\ell} t_{B/A} - t_{D/A} \quad (8.3)$$

65

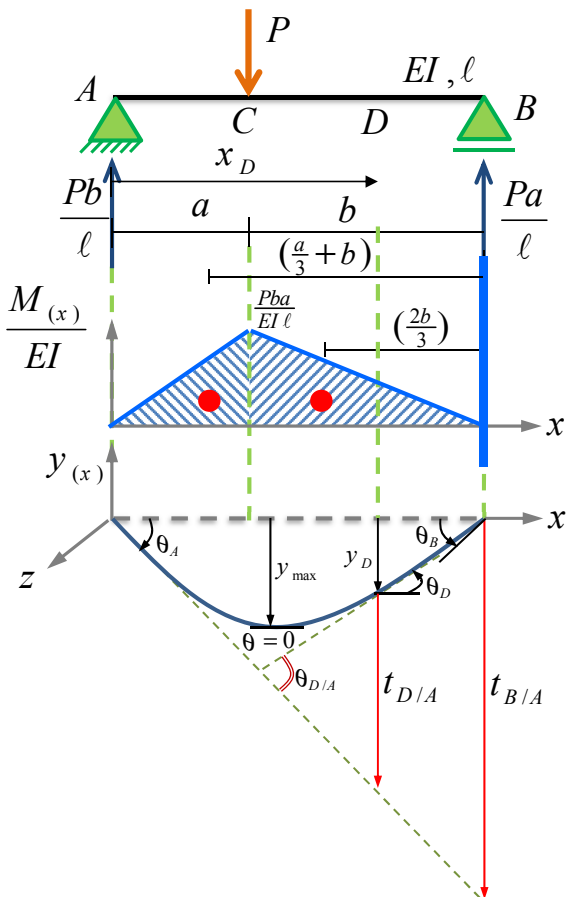


تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۸-

$$t_{B/A} = -\frac{Pab(\ell + b)}{6EI} \quad (8.4)$$

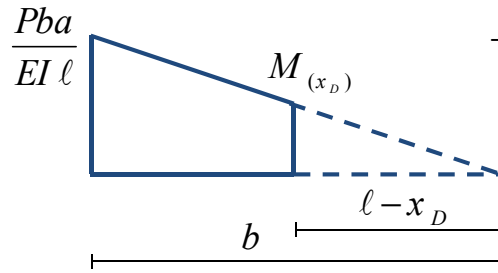
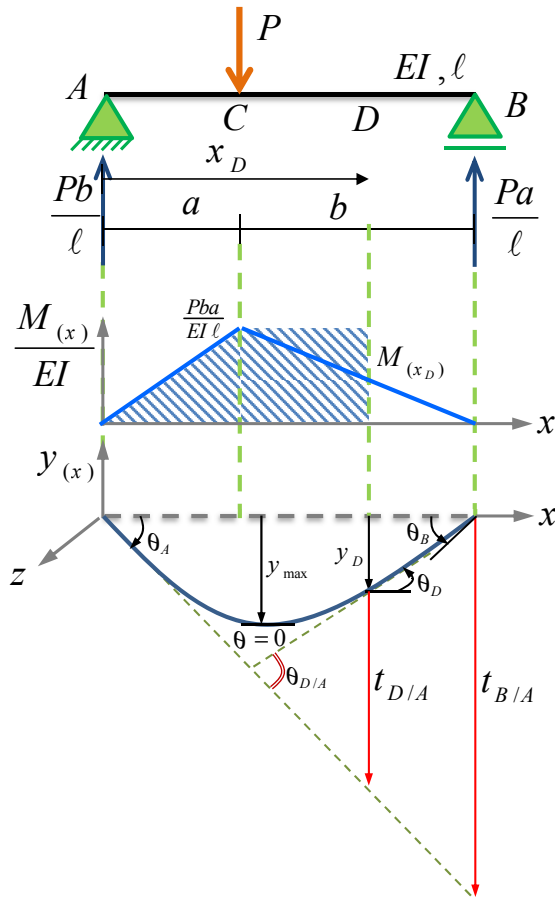


66

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۸-



$$M_{(x_D)} = \frac{Pa(\ell - x_D)}{EI \ell}$$

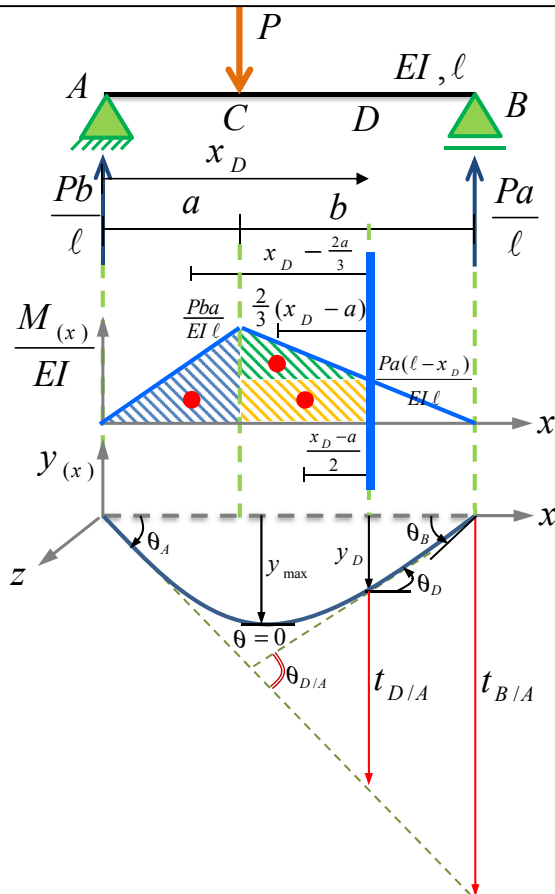
$$\theta_{D/A} = \left(\frac{Pba^2}{2EI \ell} \right) + \left(\frac{Pa(b + \ell - x_D)(x_D - a)}{2EI \ell} \right) \quad (8.5)$$

67

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۸-



$$t_{D/A} = \frac{-Pa}{6EI \ell} \left(-x_D^3 + (3a + 3b)x_D^2 - (3a^2 + 3ba)x_D + a^3 + ba^2 \right) \quad (8.6)$$

68

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۸-

$$(8.4) \rightarrow (8.1) \Rightarrow \theta_A = -\frac{Pab(\ell+b)}{6EI\ell} \Rightarrow \theta_A = -\frac{Pab(\ell+b)}{6EI\ell}$$

$$(8.4) \& (8.5) \rightarrow (8.2) \Rightarrow \theta_D = \left(\frac{Pba^2}{2EI\ell} \right) + \left(\frac{Pa(b+\ell-x_D)(x_D-a)}{2EI\ell} \right) + \frac{-\frac{Pab(\ell+b)}{6EI\ell}}{\ell}$$

$$\Rightarrow \theta_D = \left(\frac{Pba^2}{2EI\ell} \right) + \frac{Pa}{6EI\ell} (3(b+\ell-x_D)(x_D-a) - b(\ell+b)) \quad (8.7)$$

$$(8.4) \& (8.6) \rightarrow (8.3)$$

$$\Rightarrow y_D = \frac{x_D}{\ell} \left(-\frac{Pab(\ell+b)}{6EI} \right) - \frac{-Pa}{6EI\ell} (3ax_D^2 + 3bx_D^2 - 3a^2x_D - 3bax_D + a^3 + ba^2 - x_D^3)$$

$$\Rightarrow y_D = -\frac{Pa}{6EI\ell} (-a^3 - ba^2 + abx_D + 2b^2x_D + 3a^2x_D + 3bax_D - 3ax_D^2 - 3bx_D^2 + x_D^3) \quad (8.8)$$

69

تغییر شکل در تیرهای معین

روش لنگر سطح

پاسخ مثال ۸-

$$\stackrel{(8.7)}{\Rightarrow} \theta_B = \left(\frac{Pba^2}{2EI\ell} \right) + \frac{Pa}{6EI\ell} (3(b+\ell-\ell)(\ell-a) - b(\ell+b)) \Rightarrow \theta_B = \frac{Pba(\ell+a)}{6EI\ell}$$

$$\stackrel{(8.7)}{\Rightarrow} \theta_C = \left(\frac{Pba^2}{2EI\ell} \right) + \frac{Pa}{6EI\ell} (3(b+\ell-a)(a-a) - b(\ell+b)) \Rightarrow \theta_C = \frac{Pba^2}{2EI\ell} - \frac{Pab(\ell+b)}{6EI\ell}$$

$$\stackrel{(8.8)}{\Rightarrow} y_C = -\frac{Pa}{6EI\ell} (-a^3 - ba^2 + ba^2 + 2b^2a + 3a^3 + 3ba^2 - 3a^3 - 3ba^2 + a^3)$$

$$\Rightarrow y_C = -\frac{Pa^2b^2}{3EI\ell}$$

70

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر نشان داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار تغییر شکل تیر خواهیم داشت:

$$(14) \Rightarrow t_{B/A} = \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (15)$$

با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، علامت شیب منفی است.

$$\theta_A = \tan^{-1}(\theta_A) = \frac{t_{B/A}}{\ell} \Rightarrow \theta_A = -\frac{t_{B/A}}{\ell} \quad (16)$$

$$(15) \rightarrow (16) \Rightarrow \theta_A = -\frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (17)$$

$$(13) \Rightarrow \theta_{C/A} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M(x)}{EI} dx \quad (18)$$

71

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

$$(13) \Rightarrow \theta_{C/A} = \hat{\theta}_C - \hat{\theta}_A \Rightarrow \hat{\theta}_C = \theta_{C/A} + \hat{\theta}_A \quad (19)$$

$$(17) \& (18) \rightarrow (19) \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}_C = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M(x)}{EI} dx - \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (20)$$

$$\theta_A = \tan^{-1}(\theta_A) = \frac{y_C + t_{C/A}}{x_C} \Rightarrow \theta_A = \frac{y_C + t_{C/A}}{x_C} \Rightarrow$$

با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده،

$$y_C = x_C \theta_A - t_{C/A} \Rightarrow y_C = -x_C \theta_A + t_{C/A} \quad (21)$$

$$(14) \Rightarrow t_{C/A} = \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (22)$$

$$(17) \& (22) \rightarrow (21) \Rightarrow$$

$$y_C = -\frac{x_C}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (23)$$

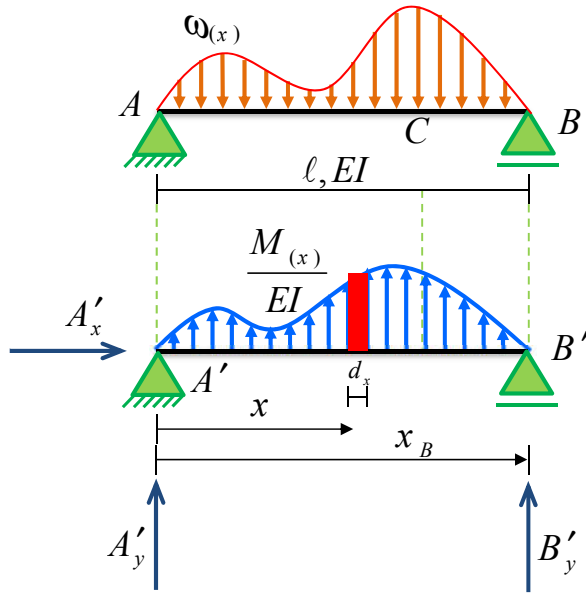
72

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

بار الاستیک: همان نمودار $\frac{M(x)}{EI}$ است که جهت آن همواره از سمت محور تیر به سمت منحنی لنگر می‌باشد.

تیر مزدوج: تیری که بار الاستیک بر روی آن قرار می‌گیرد را تیر مزدوج می‌نامند.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A'_y \ell - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx = 0$$

$$\Rightarrow A'_y = -\frac{1}{\ell} \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx$$

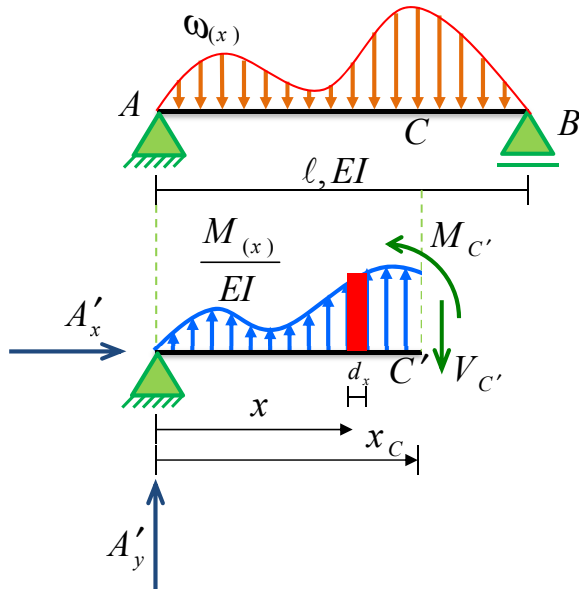
$$\Rightarrow A'_y = \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x_B - x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\Rightarrow A'_y = -\frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (24)$$

73

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A'_y + \int_{x_A}^{x_C} \frac{M(x)}{EI} dx - V_{C'} = 0$$

$$\Rightarrow V_{C'} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M(x)}{EI} dx + A'_y$$

$$\Rightarrow V_{C'} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M(x)}{EI} dx - \frac{1}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (25)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$-A'_y x_C - \int_{x_A}^{x_C} (x_C - x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx + M_{C'} = 0 \Rightarrow M_{C'} = A'_y x_C + \int_{x_A}^{x_C} (x_C - x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx$$

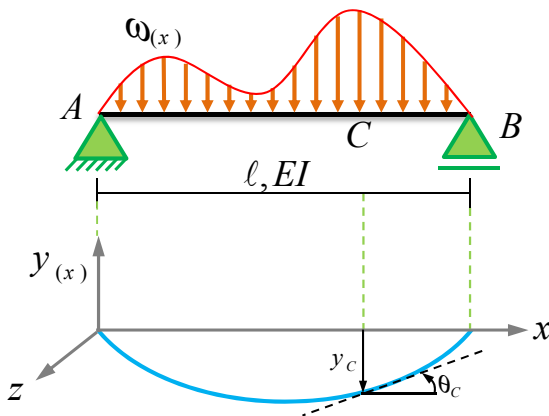
$$\Rightarrow M_{C'} = A'_y x_C - \int_{x_C}^{x_A} (x_C - x) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \Rightarrow M_{C'} = A'_y x_C + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\Rightarrow M_{C'} = -\frac{x_C}{\ell} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M(x)}{EI} dx \quad (26)$$

74

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)



$$\hat{\theta}_C = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx - \frac{1}{l} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (20)$$

$$V_{C'} = \int_{x_A}^{x_C} \frac{M_{(x)}}{EI} dx - \frac{1}{l} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (25)$$

(20) & (25) $\Rightarrow \theta_C = V_{C'}$

نیروی برشی در تیر مزدوج معادل شیب در تیر اصلی است.

$$y_C = -\frac{x_C}{l} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (23)$$

$$M_{C'} = -\frac{x_C}{l} \int_{x_B}^{x_A} (x - x_B) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx + \int_{x_C}^{x_A} (x - x_C) \cdot \frac{M_{(x)}}{EI} dx \quad (26)$$

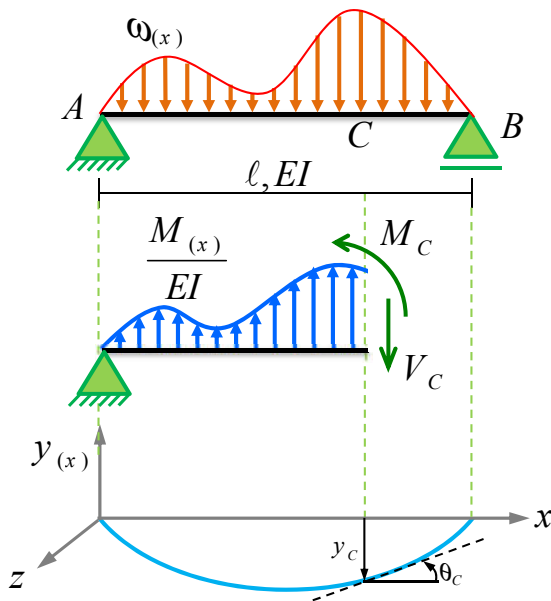
(23) & (26) $\Rightarrow y_C = M_{C'}$

لنگر خمشی در تیر مزدوج معادل خیز در تیر اصلی است.

75

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)



روش تیر مزدوج: در این روش مساله تعیین شیب‌ها و تغییر مکان‌های یک تیر در اثر بارهای وارده (بارهای حقیقی) به مساله تعیین نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی یک تیر مزدوج تحت اثر بار الاستیک تبدیل می‌شود. منظور از بار الاستیک یا ارتجاعی همان نمودار $\frac{M_{(x)}}{EI}$ است که دیمانسیون آن برابر با L^{-1} می‌باشد. بنابراین باید ترتیب تکیه‌گاه‌ها و اتصالات در تیر مزدوج به گونه‌ای باشد که نیروی برشی و گشتاور خمشی ایجاد شده در آن تیر با شیب و تغییر مکان ایجاد شده در مقاطع مربوطه از تیر حقیقی تطابق کامل داشته باشد.

76

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر حقیقی	شرایط مرزی در تیر حقیقی	شرایط مرزی در تیر مزدوج	تیر مزدوج
	$y = 0 \quad \theta \neq 0$	$M = 0 \quad V \neq 0$	
	$y = 0 \quad \theta = 0$	$M = 0 \quad V = 0$	
	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$	$M \neq 0 \quad V \neq 0$	
	$y \neq 0 \quad \theta = 0$	$M \neq 0 \quad V = 0$	
	$y = \frac{f}{k} \quad \theta \neq 0$	$M = \frac{f}{k} \quad V \neq 0$ جهت لنگر هم جهت با دوران سازه است.	

77

تغییر شکل در تیرهای معین

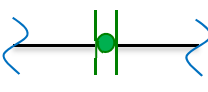
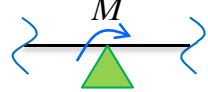
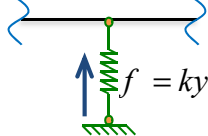
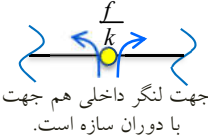
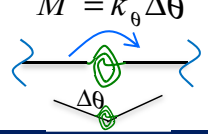
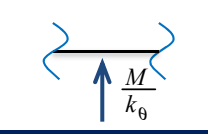
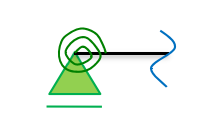
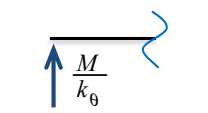
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر حقیقی	شرایط مرزی در تیر حقیقی	شرایط مرزی در تیر مزدوج	تیر مزدوج
$M = k_{\theta} \theta$ 	$y \neq 0 \quad \theta = \frac{M}{k_{\theta}}$	$M \neq 0 \quad V = \frac{M}{k_{\theta}}$	
	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$	$M \neq 0 \quad V \neq 0$	
	$y = 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y = 0 \quad \Delta \theta = 0$	$M = 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M = 0 \quad \Delta V = 0$ $(V_L = V_R)$	
	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y = 0 \quad \Delta \theta \neq 0$	$M \neq 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M = 0 \quad \Delta V \neq 0$ $(V_L + V_R = R)$	
	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y \neq 0 \quad \Delta \theta = 0$	$M \neq 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M \neq 0 \quad \Delta V = 0$	

78

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

تیر حقیقی	شرایط مرزی در تیر حقیقی	شرایط مرزی در تیر مزدوج	تیر مزدوج
	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y \neq 0 \quad \Delta \theta \neq 0$	$M \neq 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M \neq 0 \quad \Delta V \neq 0$	
	$y = \frac{f}{k} \quad \theta \neq 0$ $\Delta y = 0 \quad \Delta \theta = 0$	$M = \frac{f}{k} \quad V \neq 0$ $\Delta M = 0 \quad \Delta V = 0$	
	$y \neq 0 \quad \theta \neq 0$ $\Delta y = 0 \quad \Delta \theta = \frac{M}{k_\theta}$	$M \neq 0 \quad V \neq 0$ $\Delta M = 0 \quad \Delta V = \frac{M}{k_\theta}$	
	$y = 0 \quad \theta = \frac{M}{k_\theta}$	$M = 0 \quad V = \frac{M}{k_\theta}$	

اگر سازه معین باشد مزدوج آن معین خواهد بود.

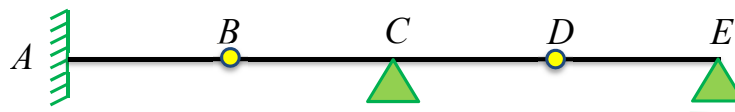
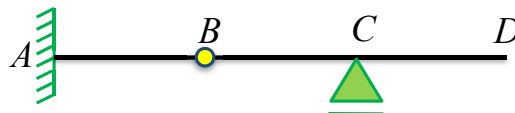
اگر سازه نامعین باشد مزدوج آن ناپایدار خواهد بود. در این حالت خود بارگذاری الاستیک باعث پایداری می‌گردد.

79

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال ۹- مزدوج هریک از تیرهای زیر را رسم نمایید.

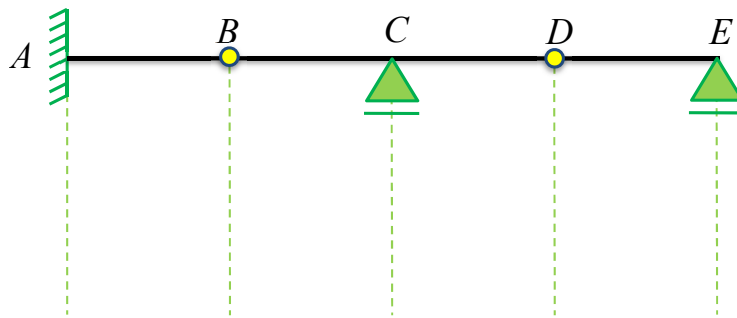
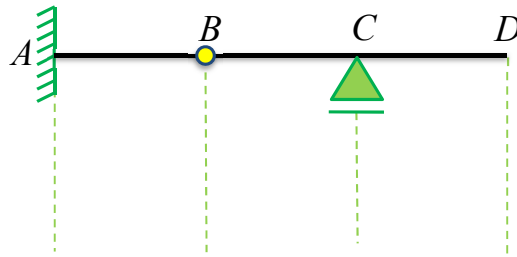


80

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۹-



81

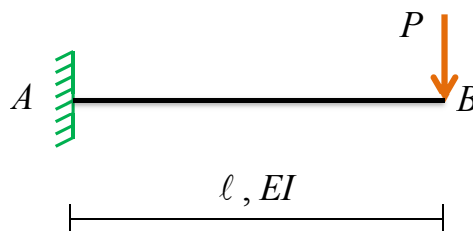
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال ۱۰- با استفاده از روش تیر مزدوج در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$

ب- مقدار شیب در گره B. $\theta_B = ?$

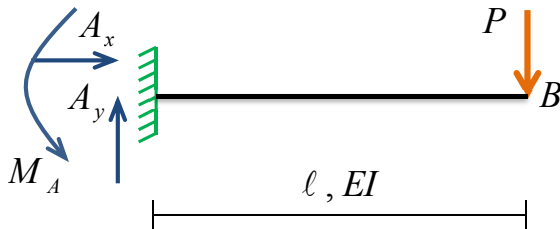


82

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۰-

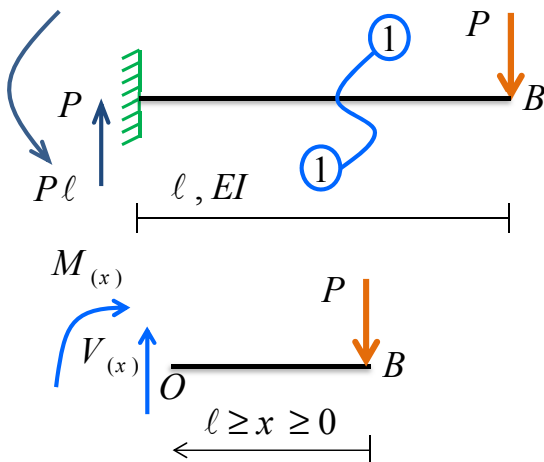


با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - P \times l = 0 \Rightarrow M_A = P l$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P = 0 \Rightarrow A_y = P$$



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + P \times x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -Px \quad (4.1)$$

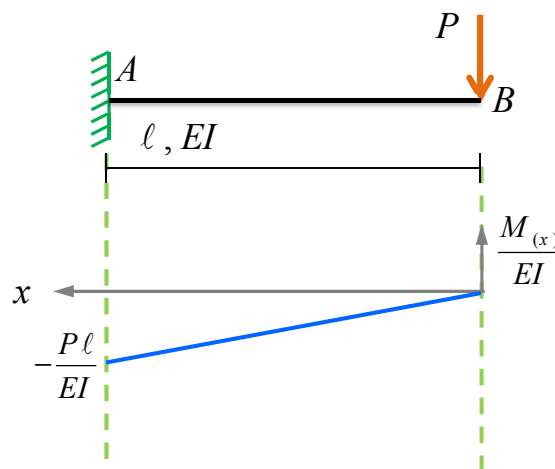
$l \geq x \geq 0$

83

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۰-



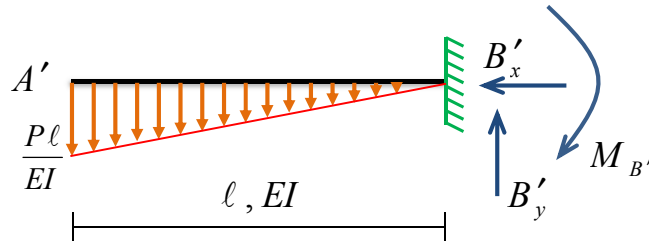
84

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۰-

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر مزدوج تعیین می‌گردد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B'_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B'_y - \frac{1}{2} \times \frac{P\ell}{EI} \times \ell = 0 \Rightarrow B'_y = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

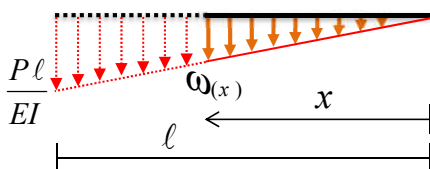
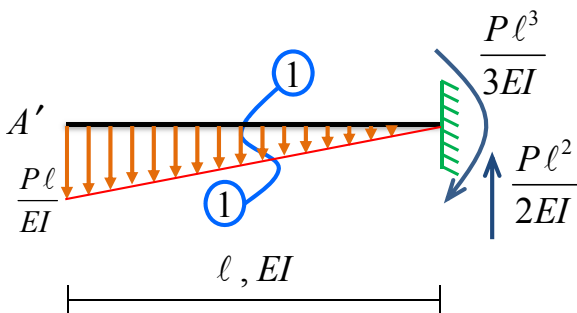
$$\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow -M_{B'} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{P\ell}{EI} \times \ell \right) \times \left(\frac{2\ell}{3} \right) = 0 \Rightarrow M_{B'} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

85

تغییر شکل در تیرهای معین

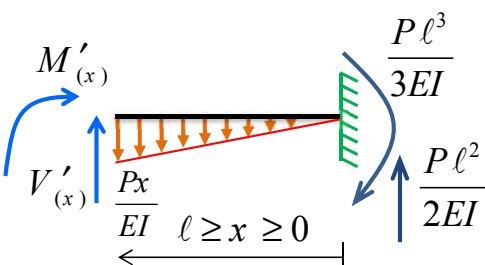
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۰-



$$w_{(x)} = \frac{Px}{EI}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$M'_{(x)} = \frac{P\ell^2 x}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} - \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (10.1)$$

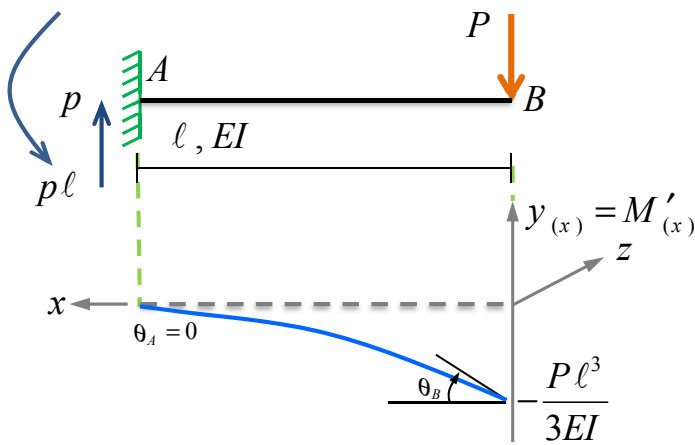
$$V'_{(x)} = \frac{Px^2}{2EI} - \frac{P\ell^2}{2EI} \quad (10.2)$$

86

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۰-



$$(10.1) \Rightarrow y_B = M'_B = \frac{P \ell^2(0)}{2EI} - \frac{P(0)^3}{6EI} - \frac{P \ell^3}{3EI} \Rightarrow y_B = -\frac{P \ell^3}{3EI}$$

$$(10.2) \Rightarrow \theta_B = V'_B = \frac{P(0)^2}{2EI} - \frac{P \ell^2}{2EI} \Rightarrow \theta_B = -\frac{P \ell^2}{2EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{P \ell^2}{2EI}$$

با توجه به در نظر گرفتن جهت دستگاه مختصات (در نظر گرفتن

بخش سمت راست در محاسبه برش و لنگر در تیر مزدوج) علامت

شیب یا برش در یک منفی ضرب می‌شود.

87

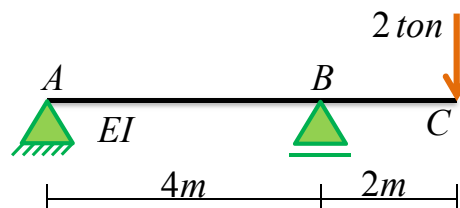
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال ۱۱- در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف- مقدار شیب در C. $\theta_C = ?$

ب- مقدار خیز در گره C. $y_C = ?$



$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

88

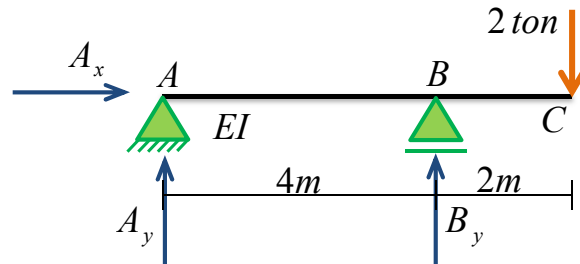
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۱-

$$EI = 2 \times 10^6 \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right) \times 10^3 (\text{cm}^4) = 2 \times 10^9 (\text{kg} \cdot \text{cm}^2) \times \left(\frac{\text{ton}}{10^3 \text{kg}} \right) \times \left(\frac{\text{m}^2}{10^4 \text{cm}^2} \right) = 2 \times 10^9 \times 10^{-7} (\text{ton} \cdot \text{m}^2)$$

$$EI = 200 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$



با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 4 - 2 \times 6 = 0 \Rightarrow B_y = 3 \text{ ton}$$

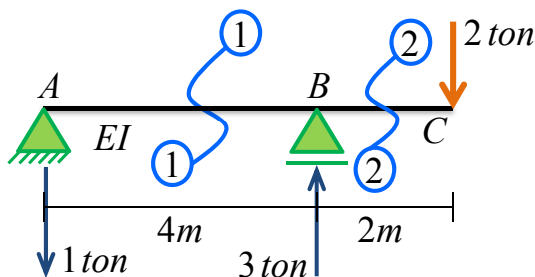
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 3 = 2 \Rightarrow A_y = -1$$

89

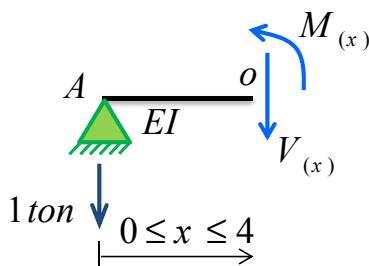
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۱-

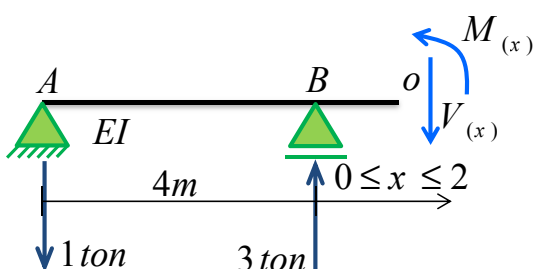


با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -x$$

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + 1 \times (4 + x) - 3 \times x = 0$$

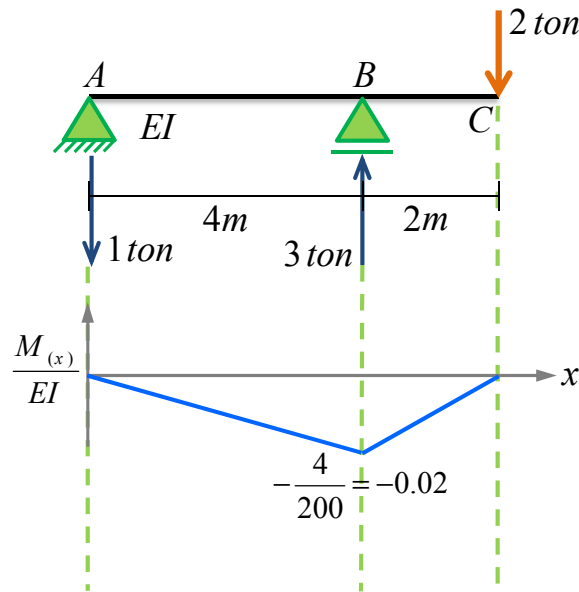
$$\Rightarrow M_{(x)} = 2x - 4$$

90

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۱ -



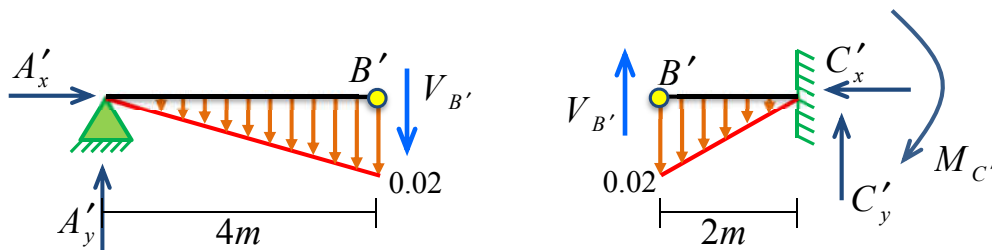
91

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۱ -

برای آنالیز تیر مزدوج و تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر را از محل مفصل جدا می‌کنیم:



با در نظر گرفتن بخش سمت چپ تیر:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A'_x = 0$$

$$V_{B'} = -\frac{0.08}{3} \quad (11.1)$$

$$A'_y - \left(\frac{1}{2} \times 0.02 \times 4 \right) - \left(-\frac{0.08}{3} \right) = 0$$

$$A'_y = \frac{0.04}{3}$$

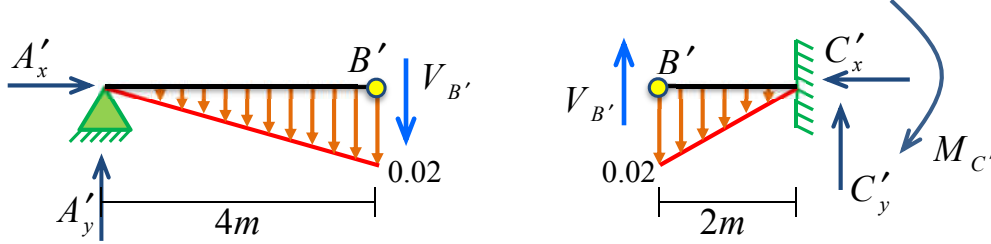
92

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۱-

برای آنالیز تیر مزدوج و تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر را از محل مفصل جدا می‌کنیم:



با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C'_x = 0$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(11.1)}{\Rightarrow} -\left(-\frac{0.08}{3}\right) \times 2 + \left(\frac{1}{2} \times 0.02 \times 2\right) \times \left(\frac{2}{3} \times 2\right) - M_{C'} = 0 &\Rightarrow M_{C'} = 0.08 \\ C'_y - \left(\frac{1}{2} \times 0.02 \times 2\right) + \left(-\frac{0.08}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$C'_y = \frac{0.14}{3}$$

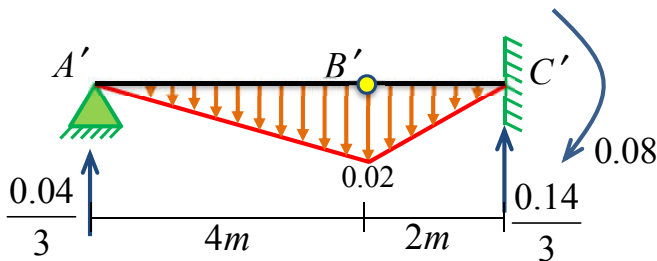
93

تغییر شکل در تیرهای معین

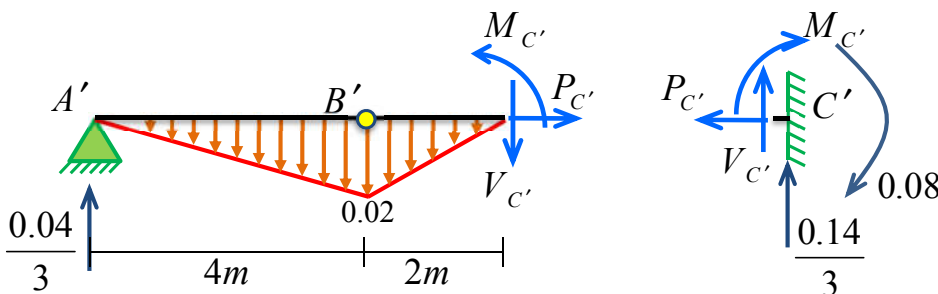
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۱-

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر مزدوج به صورت روبه رو است:



با مقطع زدن تیر در گره C' مقدار لنگر و برش در این محل به صورت زیر به دست می‌آید:



با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{C'} + \frac{0.14}{3} = 0 \Rightarrow V_{C'} = \theta_C = \left(-\frac{0.14}{3}\right)^{rad}$$

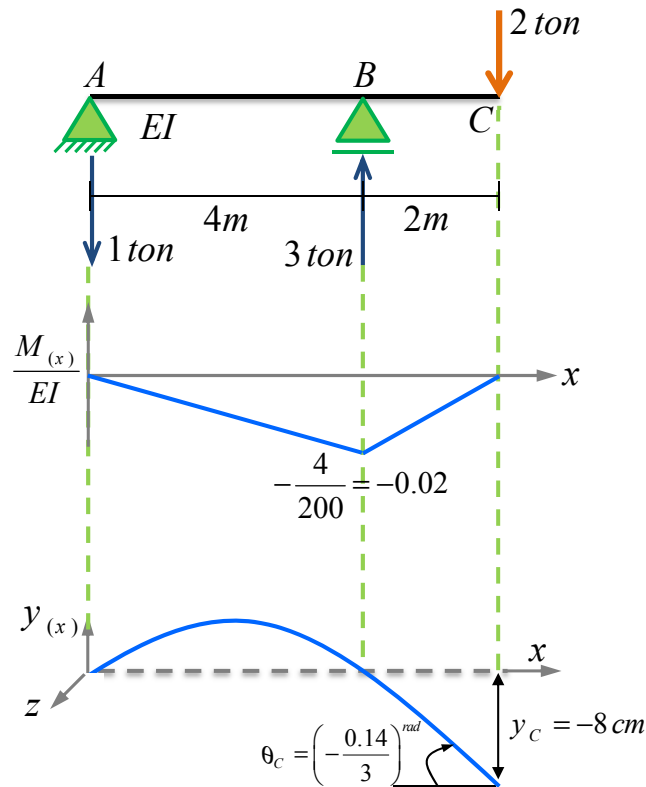
$$\sum M_{C'} = 0 \Rightarrow -M_{C'} - 0.08 = 0 \Rightarrow M_{C'} = y_C = -0.08 \text{ m}$$

94

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۱ -



ETABS File Name: 03-Example-11.EDB

95

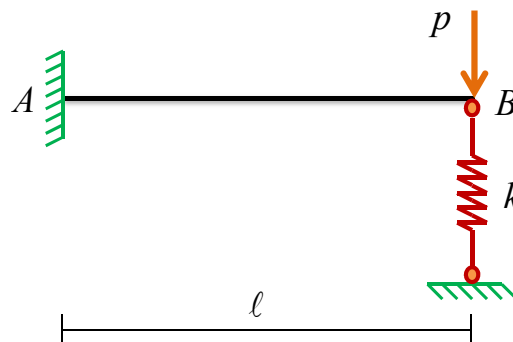
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال ۱۲ - در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف - مقدار شیب در B. $\theta_B = ?$

ب - مقدار خیز در گره B. $y_B = ?$



$$p = 2 \text{ ton}$$

$$l = 5 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

$$k = 5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

96

تغییر شکل در تیرهای معین

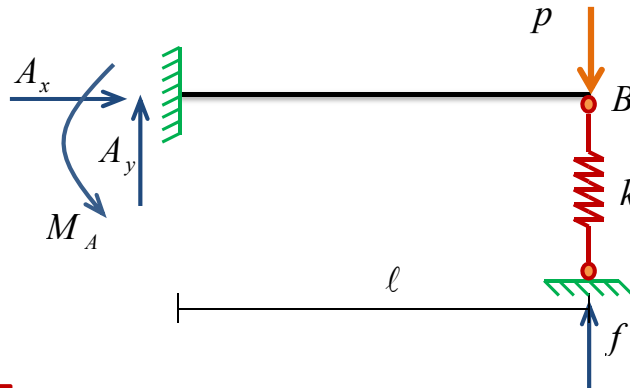
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۲ -

$$EI = 2 \times 10^6 \left(\frac{kg}{cm^2} \right) \times 10^3 (cm^4)$$

$$= 2 \times 10^9 (kg \cdot cm^2) \times \left(\frac{ton}{10^3 kg} \right) \times \left(\frac{m^2}{10^4 cm^2} \right) = 2 \times 10^9 \times 10^{-7} (ton \cdot m^2) \Rightarrow EI = 200 ton \cdot m^2$$

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی بر حسب نیروی ایجاد شده در فنر تعیین می‌گردد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + f \times l - p \times l = 0 \Rightarrow M_A = (p - f)l$$

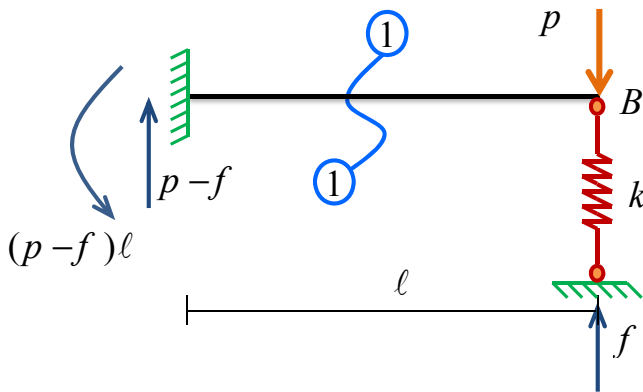
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + f - p = 0 \Rightarrow A_y = p - f$$

97

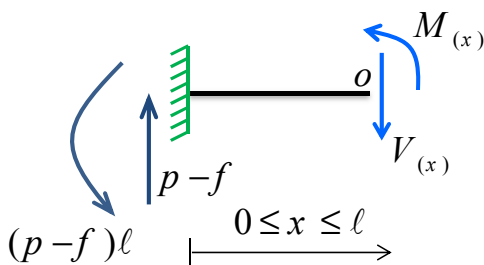
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۲ -



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



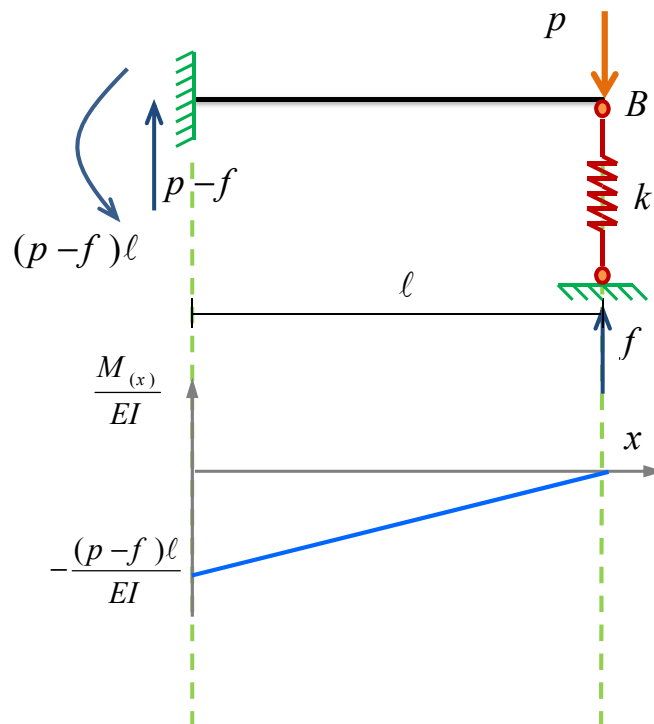
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} + (p - f)l - (p - f) \times x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = (p - f)(x - l)$$

98

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۲ -

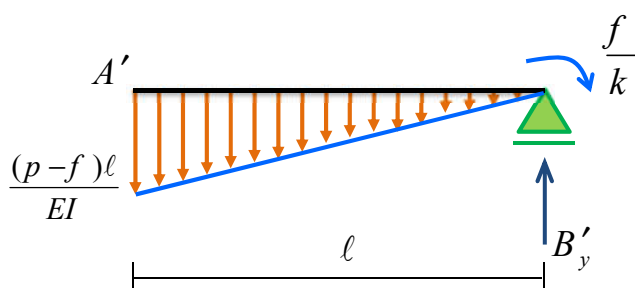


99

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۲ -



از آنجایی که تیر حقیقی نامعین می‌باشد در نتیجه مزدوج آن ناپایدار است. بنابراین بار الاستیک باید تامین کننده پایداری در تیر مزدوج باشد.

$$B'_y = \frac{(p-f)\ell^2}{2EI}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{k} = \frac{(p-f)\ell^3}{3EI}$$

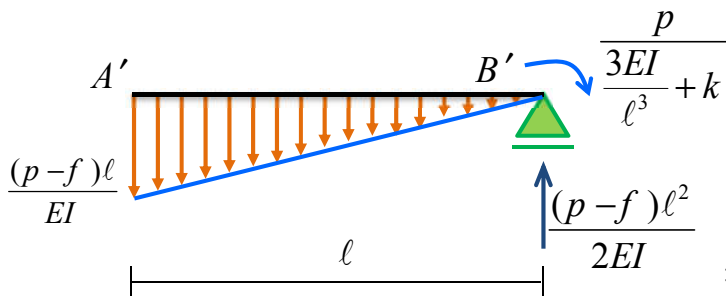
$$\Rightarrow \frac{f}{k} = \frac{p\ell^3}{3EI} - \frac{f\ell^3}{3EI} \Rightarrow \frac{f}{k} \left(1 - \frac{k\ell^3}{3EI} \right) = \frac{p\ell^3}{3EI} \Rightarrow \frac{f}{k} = \frac{p}{\frac{3EI}{\ell^3} + k} \quad (12.1)$$

100

تغییر شکل در تیرهای معین

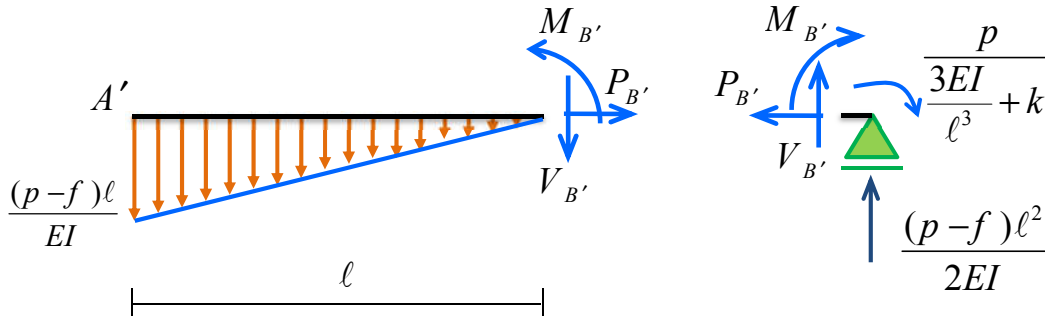
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۲ -



عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر مزدوج به صورت روبه رو است:

با مقطع زدن تیر در گره B' مقدار لنگر و برش در این محل به صورت زیر به دست می‌آید:



با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{B'} + \frac{(p-f)\ell^2}{2EI} = 0 \Rightarrow V_{B'} = \theta_B = -\left(\frac{(p-f)\ell^2}{2EI}\right)^{rad} \quad (12.2)$$

$$\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow -M_{B'} - \frac{p}{\frac{3EI}{\ell^3} + k} = 0 \Rightarrow M_{B'} = y_B = -\frac{p}{\frac{3EI}{\ell^3} + k} \quad (12.3)$$

101

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۲ -

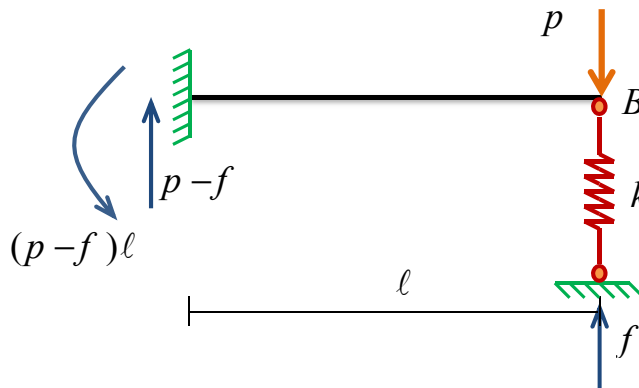
$$p = 2 \text{ ton}$$

$$\ell = 5 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

$$k = 5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$



$$= \frac{2 \times 5.2}{\frac{3(200)}{(5)^3} + 5.2} \Rightarrow f = 1.04 \text{ ton} \quad (12.4)$$

$$(12.2) \& (12.4) \Rightarrow \theta_B = -\left(\frac{(p-f)\ell^2}{2EI}\right)^{rad} = -\left(\frac{(2-1.04)(5)^2}{2(200)}\right) \Rightarrow \theta_B = -0.06^{rad}$$

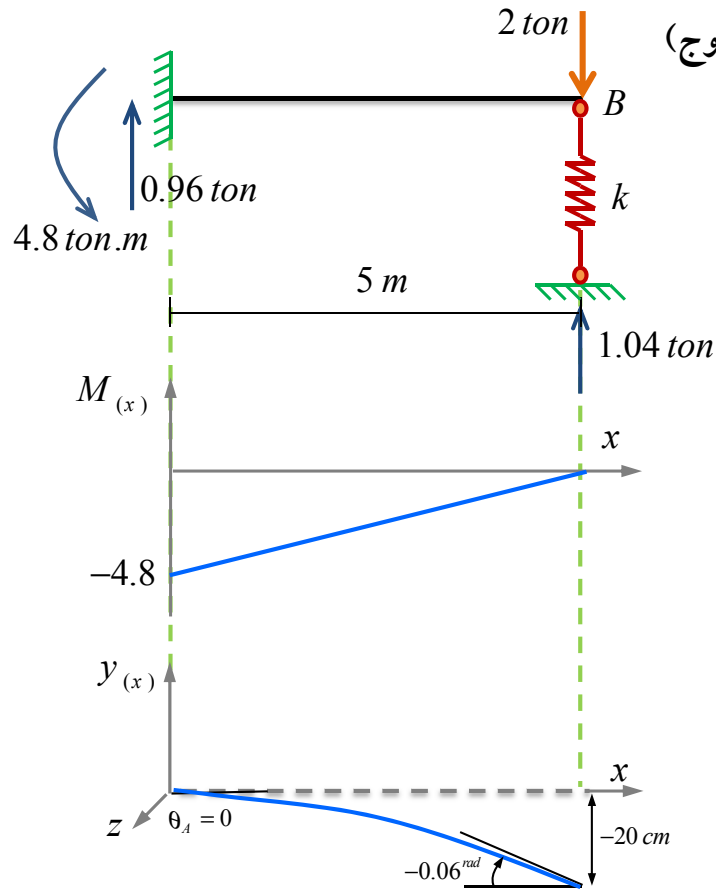
$$(12.3) \Rightarrow y_B = -\frac{p}{\frac{3EI}{\ell^3} + k} = -\frac{2}{\frac{3(200)}{(5)^3} + 5.2} \Rightarrow y_B = -0.2 \text{ m}$$

102

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۲ -



ETABS File Name: 03-Example-12.EDB

103

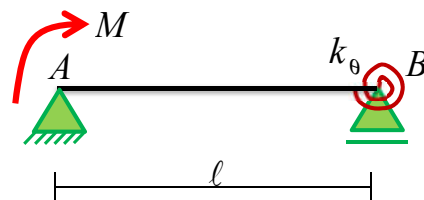
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال ۱۳ - در تیر نشان داده شده مطلوب است تعیین:

الف - مقدار لنگر در فنر پیچشی. $M_\theta = ?$

ب - مقدار شیب در B. $\theta_B = ?$



$$M = 3 \text{ ton.m}$$

$$l = 5 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

$$k_\theta = \frac{6EI}{l}$$

104

تغییر شکل در تیرهای معین

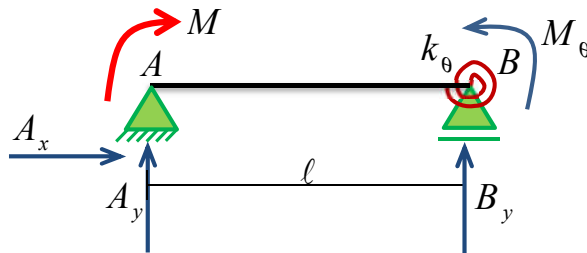
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۳ -

$$EI = 2 \times 10^6 \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right) \times 10^3 (\text{cm}^4)$$

$$= 2 \times 10^9 (\text{kg} \cdot \text{cm}^2) \times \left(\frac{\text{ton}}{10^3 \text{kg}} \right) \times \left(\frac{\text{m}^2}{10^4 \text{cm}^2} \right) = 2 \times 10^9 \times 10^{-7} (\text{ton} \cdot \text{m}^2) \Rightarrow EI = 200 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی بر حسب نیروی ایجاد شده در فنر تعیین می‌گردد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M - A_y \times l + M_\theta = 0 \Rightarrow A_y = \frac{M_\theta - M}{l} \quad (13.1)$$

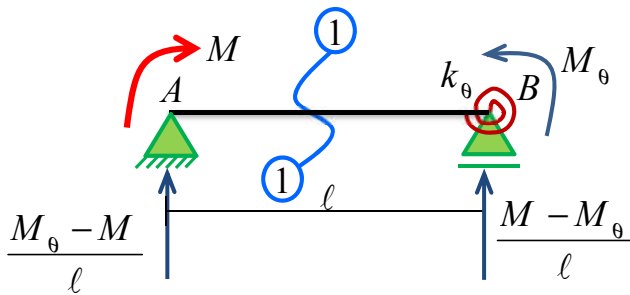
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0 \stackrel{(14.1)}{\Rightarrow} B_y = \frac{M - M_\theta}{l} \quad (13.2)$$

105

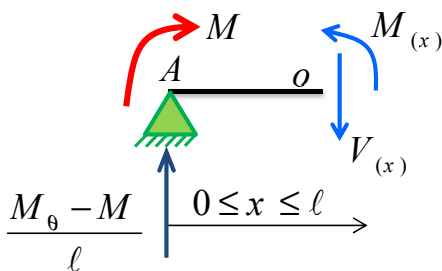
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۳ -



با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



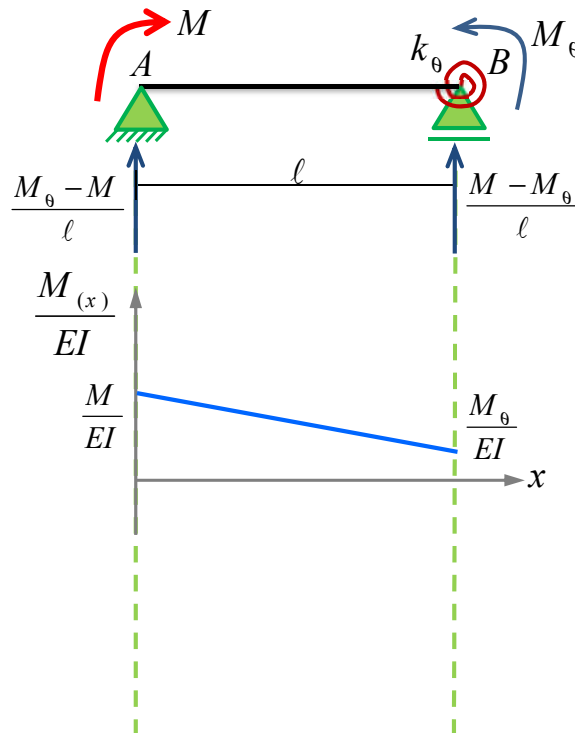
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{(x)} - M - \frac{M_\theta - M}{l} \times x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = M + \frac{(M_\theta - M)}{l} x$$

106

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۳ -



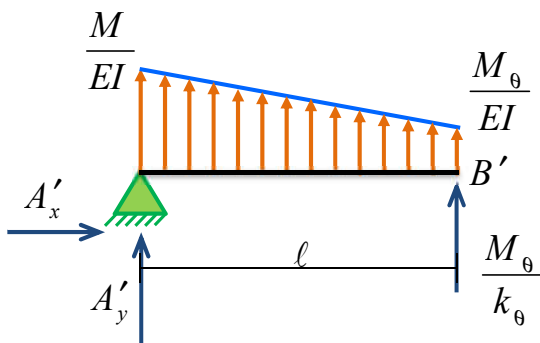
107

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۳ -

از آنجایی که تیر حقیقی نامعین می‌باشد در نتیجه مزدوج آن ناپایدار است. بنابراین بار الاستیک باید تامین کننده پایداری در تیر مزدوج باشد.



$$\Rightarrow \frac{M_\theta \ell}{k_\theta} + \frac{M_\theta \ell^2}{2EI} + \frac{M \ell^2}{6EI} - \frac{M_\theta \ell^2}{6EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_\theta \ell}{\left(\frac{6EI}{\ell}\right)} + \frac{M_\theta \ell^2}{2EI} + \frac{M \ell^2}{6EI} - \frac{M_\theta \ell^2}{6EI} = 0$$

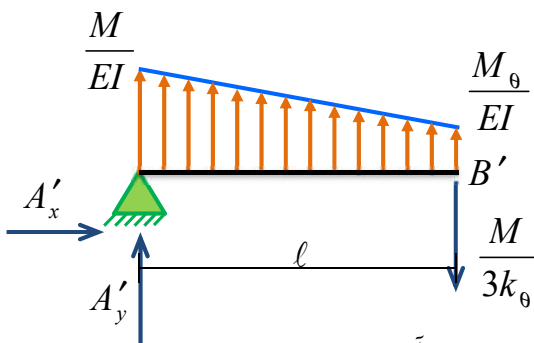
$$\Rightarrow \frac{3M_\theta \ell^2}{6EI} + \frac{M \ell^2}{6EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_\theta = -\frac{M}{3}} \quad (13.3)$$

108

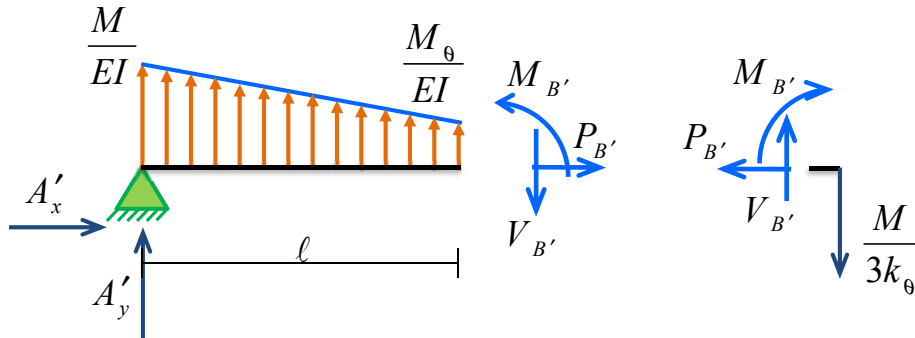
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۳ -



با مقطع زدن تیر در گره B' مقدار لنگر و برش در این محل به صورت زیر به دست می آید:



با در نظر گرفتن بخش سمت راست تیر:

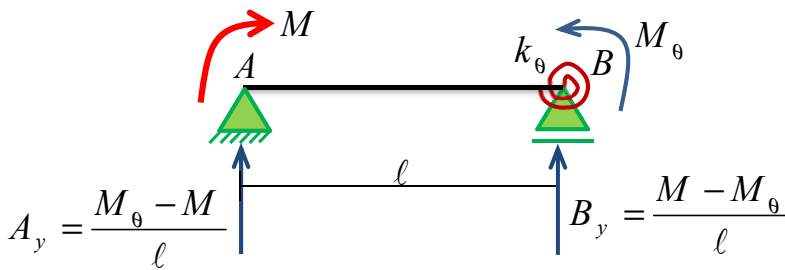
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{B'} - \frac{M}{3k_\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{B'} = \theta_B = \left(\frac{M \ell}{18EI} \right)^{rad} \quad (13.4)$$

109

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۳ -



$$(13.3) \Rightarrow M_\theta = -\frac{M}{3} = -\frac{3}{3} \Rightarrow M_\theta = -1 \text{ ton}$$

$$(13.4) \Rightarrow \theta_B = \frac{M \ell}{18EI} = \frac{(3)(5)}{18(200)} \Rightarrow \theta_B = 0.00417^{rad}$$

$$(13.1) \Rightarrow A_y = \frac{M_\theta - M}{\ell} = \frac{-1 - 3}{5} \Rightarrow A_y = -0.8 \text{ (ton)}$$

$$(13.2) \Rightarrow B_y = \frac{M - M_\theta}{\ell} = \frac{3 - (-1)}{5} \Rightarrow B_y = 0.8 \text{ (ton)}$$

$$M = 3 \text{ ton.m}$$

$$\ell = 5 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$I = 10^3 \text{ cm}^4$$

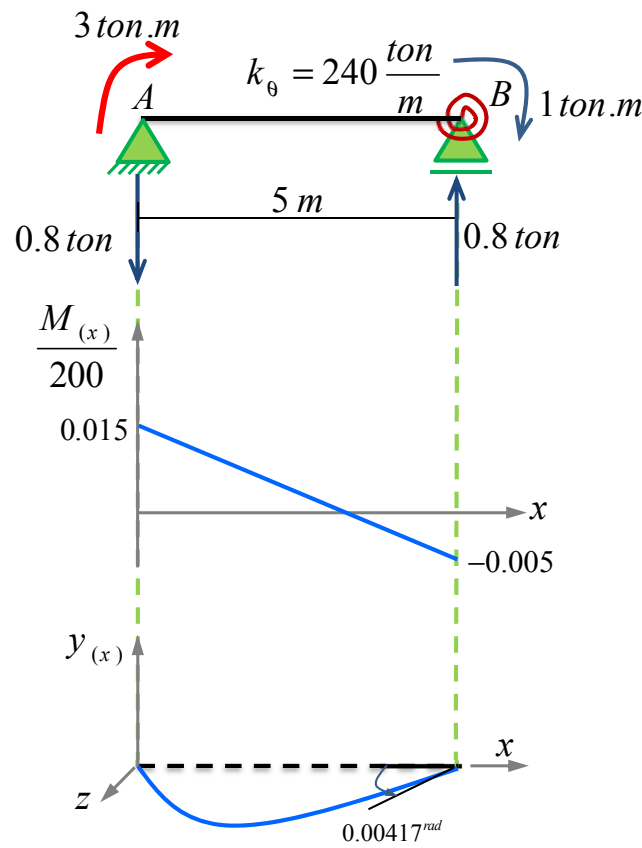
$$k_\theta = \frac{6EI}{\ell}$$

110

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۳ -



ETABS File Name: 03-Example-13.EDB

111

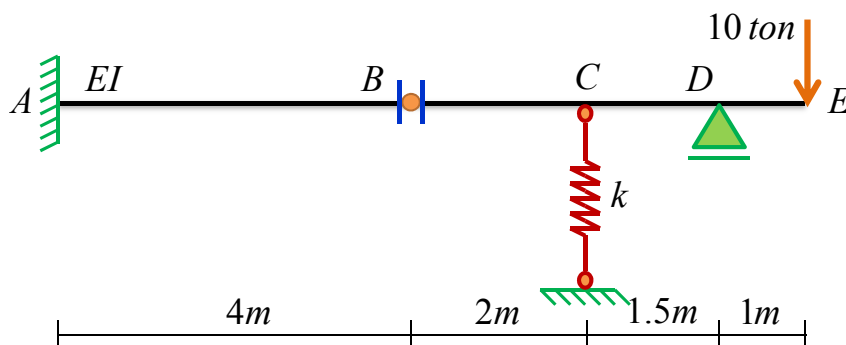
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال ۱۴ - تغییرات شیب و خیز را در طول تیر نشان داده شده رسم نمایید.

$$EI = 200 \text{ ton.m}^2$$

$$k = 200 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

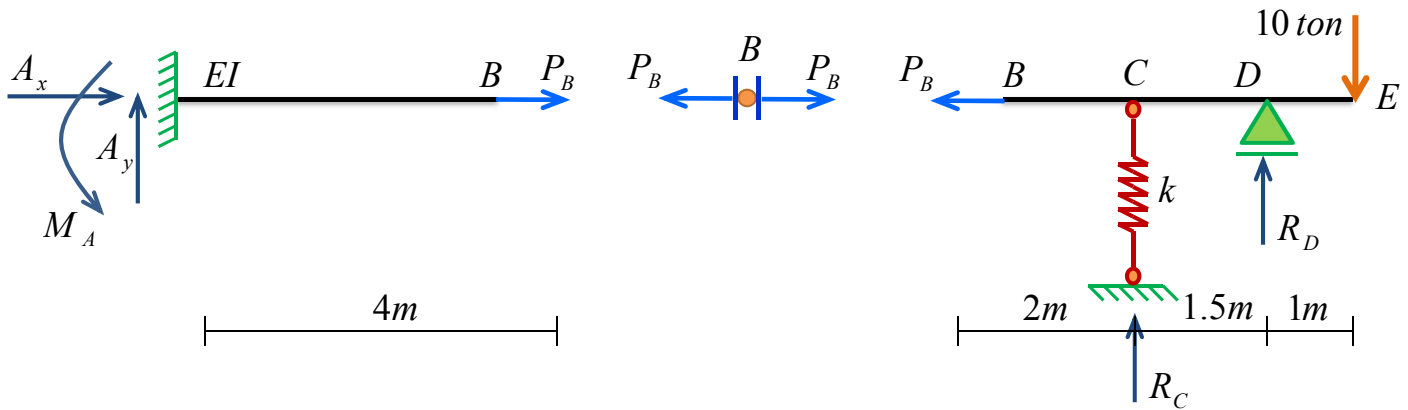


112

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴ - برای تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر را در اتصال B جدا می‌نماییم:



با در نظر گرفتن سمت راست تیر خواهیم داشت:

از آنجایی که نیرویی به بخش AB تیر وارد نمی‌شود در نتیجه کلیه نیروهای داخلی آن و همچنین

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_B = 0 \Rightarrow \sum M_C = 0 \Rightarrow R_D \times 1.5 - 10 \times 2.5 = 0 \Rightarrow R_D = \frac{50}{3} \quad (14.1)$$

عکس العمل‌های تکیه‌گاه A برابر با صفر است.

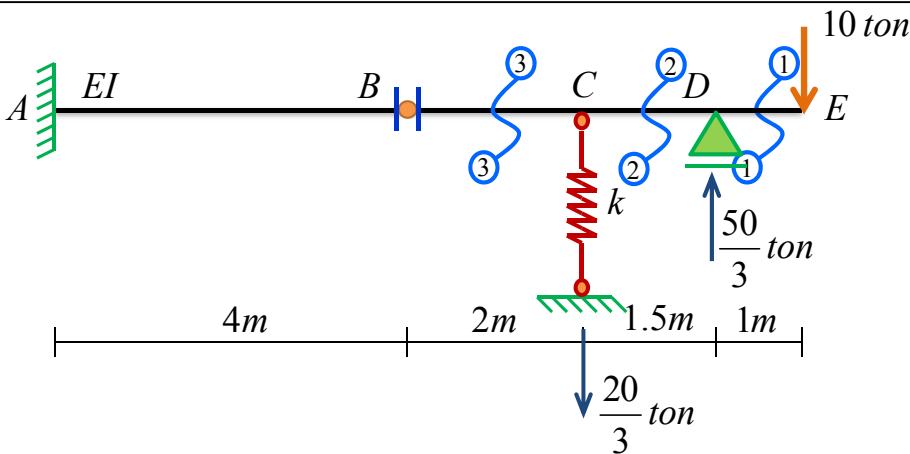
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_D + R_C - 10 = 0 \Rightarrow R_C = -\frac{20}{3}$$

113

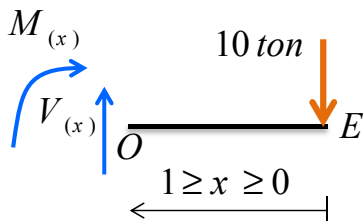
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴ -

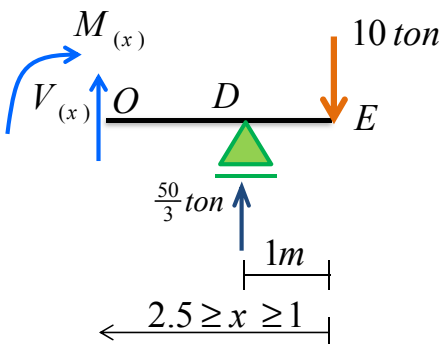


با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 10 \times x = 0 \Rightarrow M_{(x)} = -10x$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - 10 \times x + \frac{50}{3}(x - 1) = 0$$

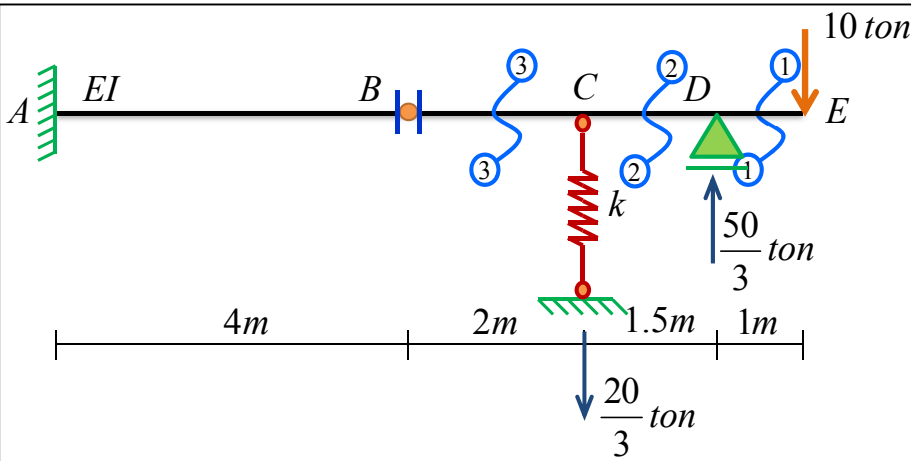
$$\Rightarrow M_{(x)} = \frac{20}{3}x - \frac{50}{3}$$

114

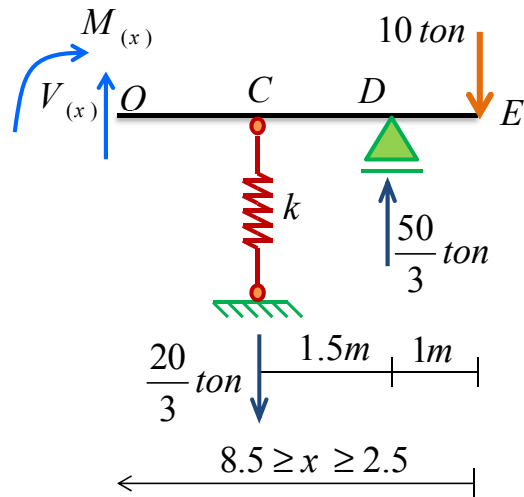
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴-



با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - \frac{20}{3}(x - 2.5) + \frac{50}{3}(x - 1) - 10 \times x = 0$$

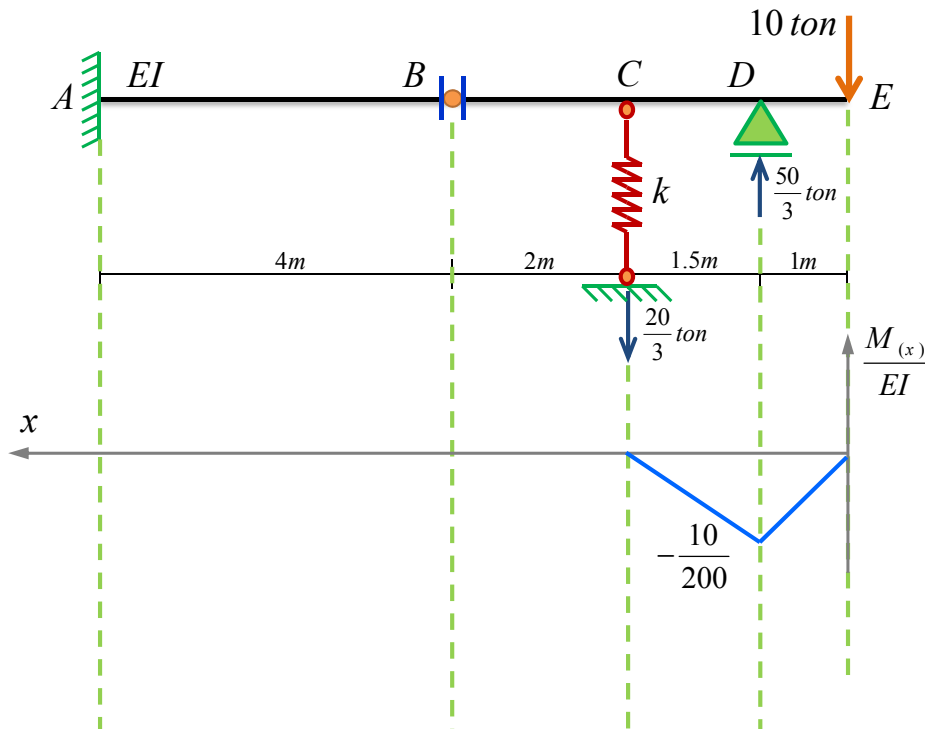
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = 0}$$

115

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴-

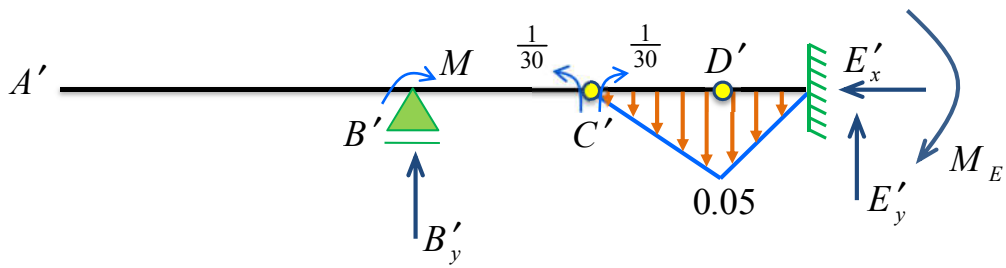


116

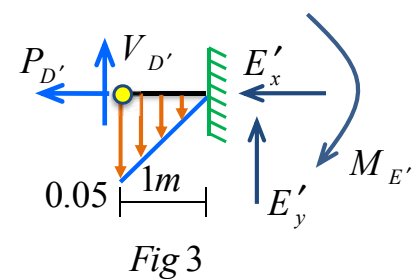
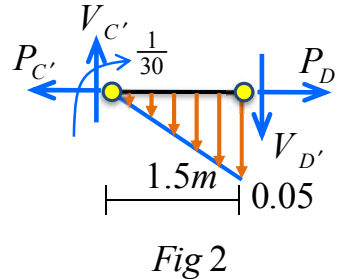
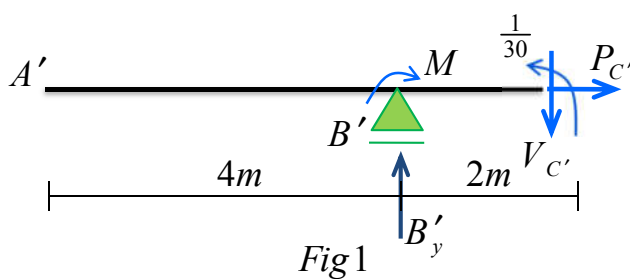
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴ -



برای آنالیز تیر از ناحیه مفصل‌ها جدا می‌شوند.



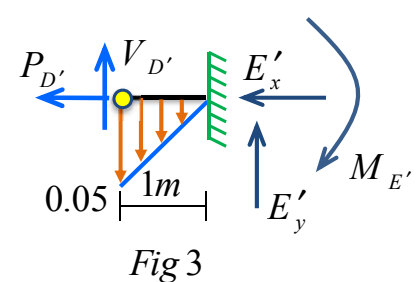
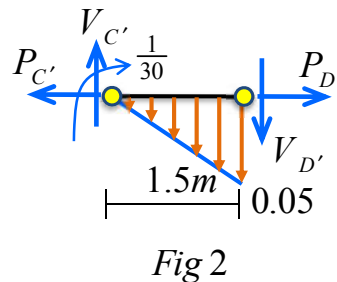
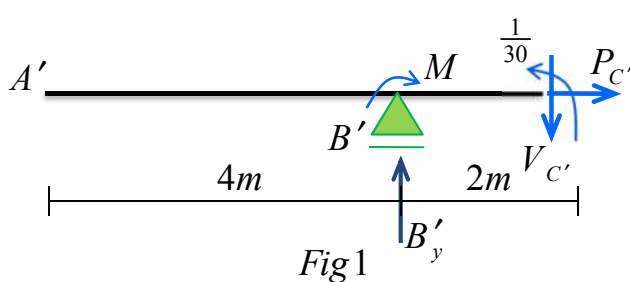
$$V_{C'} = \theta_C = -\frac{7}{720}$$

(14.2) 117

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴ -



$$V_{D'} = \theta_D = -\frac{34}{720} \quad (14.3)$$

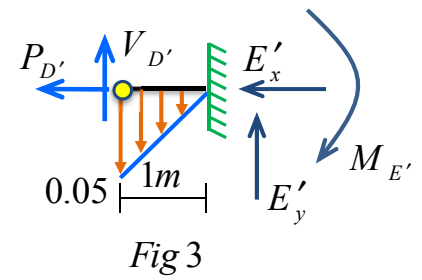
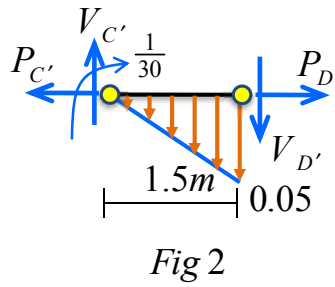
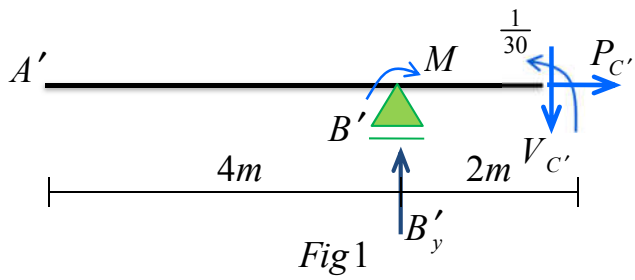
$$B'_y = \theta_B = -\frac{7}{720} \quad (14.4)$$

$$M = \frac{19}{360}$$

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴ -



$$E'_y = \theta_E = \frac{13}{180}$$

$$M_{E'} = y_E = \frac{23}{360}$$

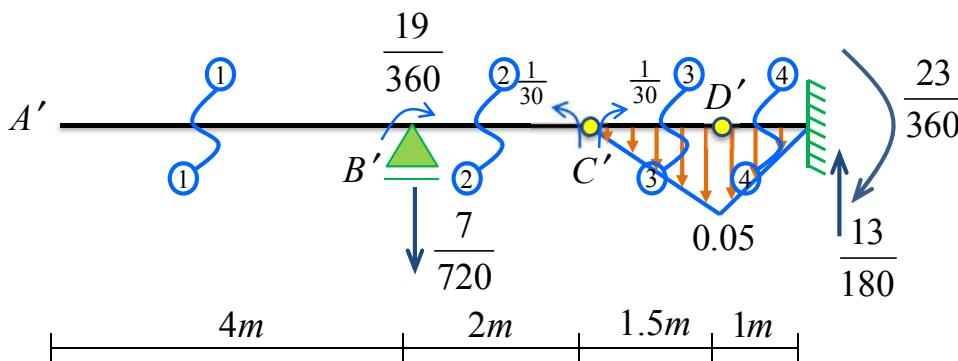
$$\text{Fig 1, 2, 3: } \sum F_x = 0 \Rightarrow P_{C'} = P_{D'} = E'_x = 0$$

119

تغییر شکل در تیرهای معین

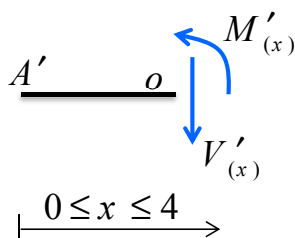
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴ -



با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر و برش در تیر مزدوج محاسبه می گردد:

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:

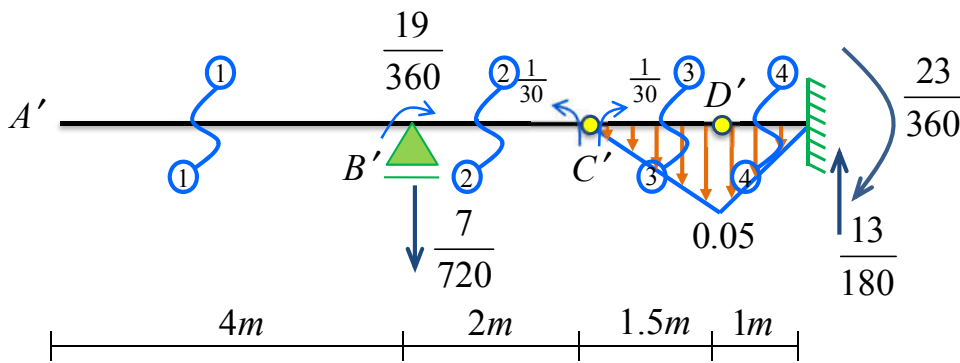


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V'_{(x)} = \theta_{(x)} = 0$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M'_{(x)} = y_{(x)} = 0$$

120

تغییر شکل در تیرهای معین

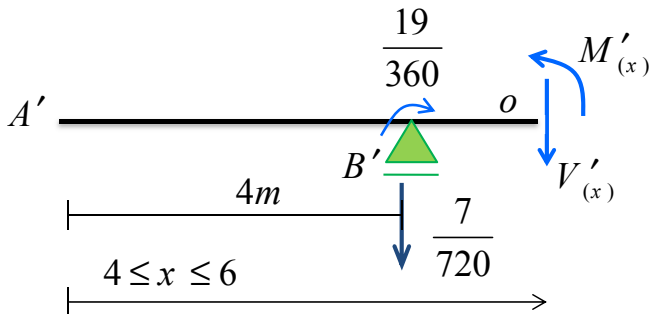


روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴-

با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر و برش در تیر مزدوج محاسبه می گردد:

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V'_{(x)} - \frac{7}{720} = 0$$

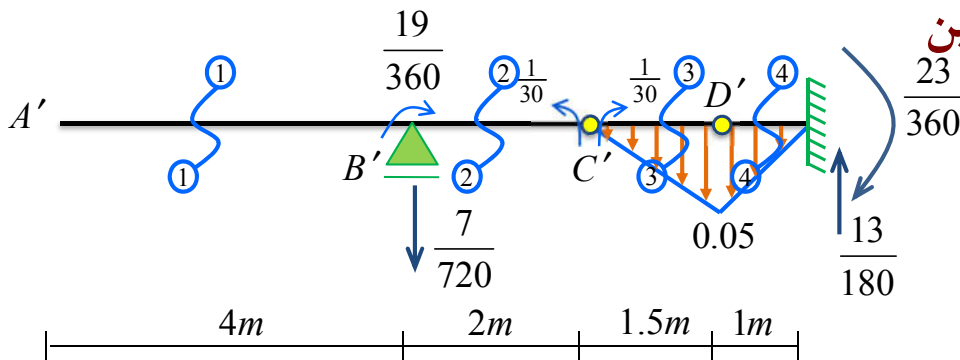
$$\Rightarrow V'_{(x)} = \theta_{(x)} = -9.72 \times 10^{-3}$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M'_{(x)} + \frac{7}{720}(x-4) - \frac{19}{360} = 0$$

$$\Rightarrow M'_{(x)} = y_{(x)} = (-9.72x + 91.67) \times 10^{-3}$$

121

تغییر شکل در تیرهای معین

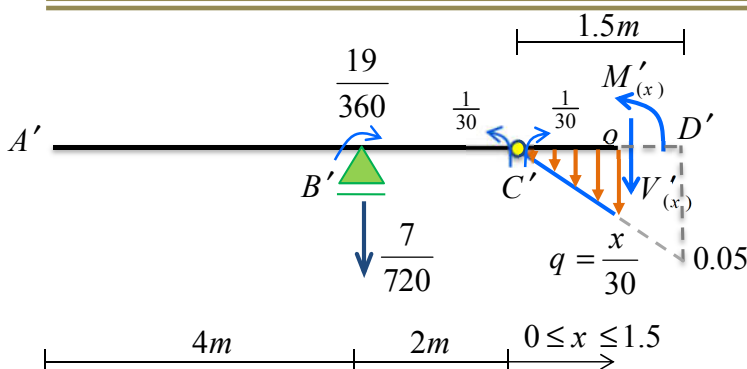


روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴-

با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر و برش در تیر مزدوج محاسبه می گردد:

با در نظر گرفتن سمت چپ مقطع ۳-۳ خواهیم داشت:

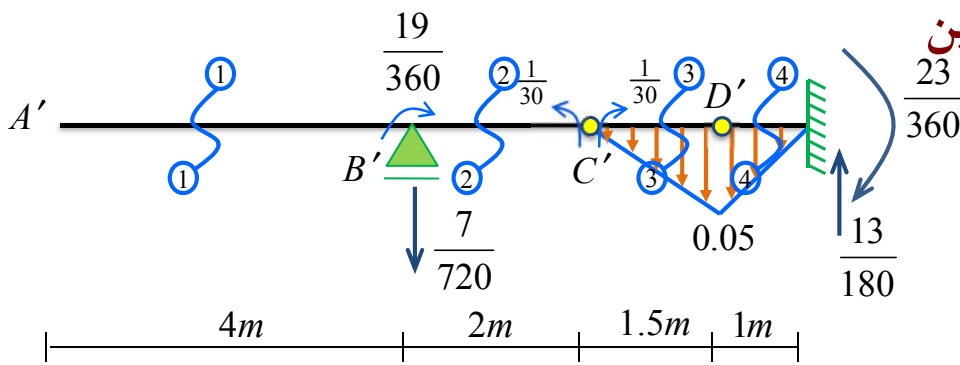


$$V'_{(x)} = \theta_{(x)} = (-16.67x^2 - 9.72) \times 10^{-3}$$

$$M'_{(x)} = y_{(x)} = (-5.56x^3 - 9.72x + 33.33) \times 10^{-3}$$

122

تغییر شکل در تیرهای معین



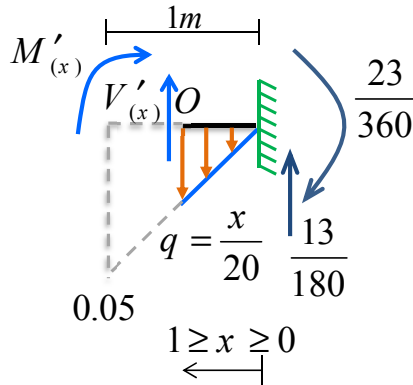
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴-

با مقطع زدن در تیر مزدوج مقادیر لنگر

و برش در تیر مزدوج محاسبه می گردد:

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۴-۴ خواهیم داشت:



$$V'_{(x)} = \theta_{(x)} = (25x^2 - 72.22) \times 10^{-3}$$

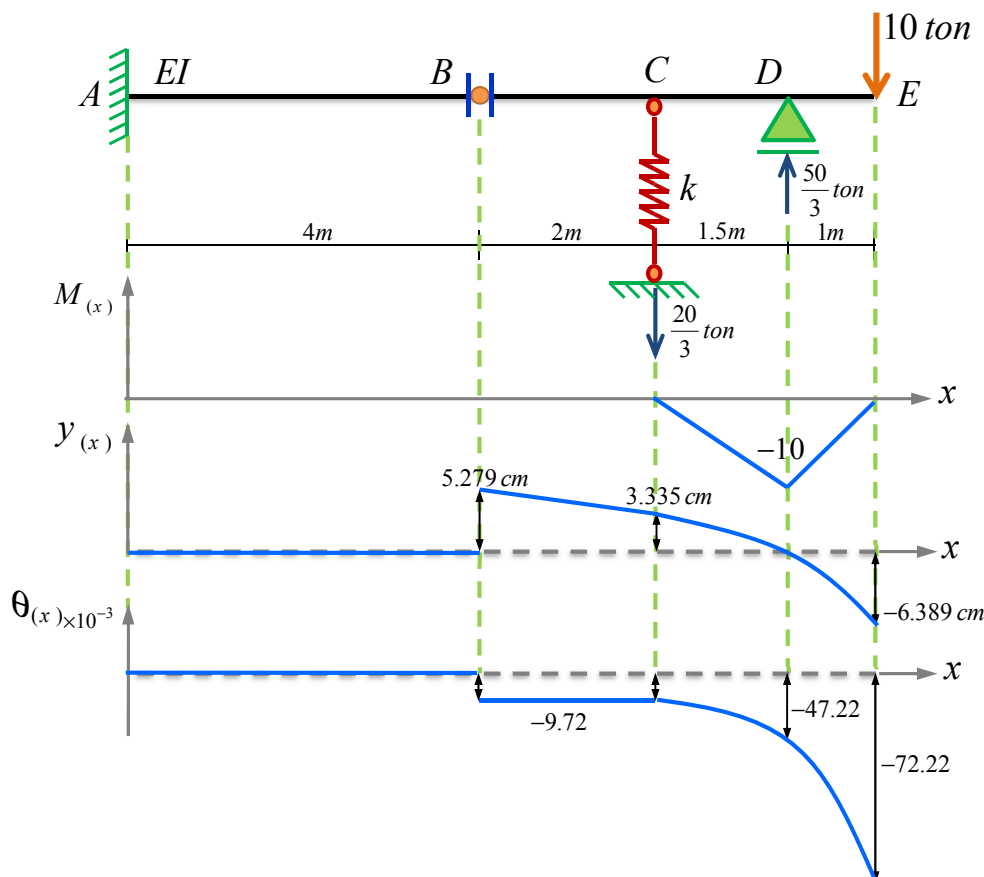
$$M'_{(x)} = y_{(x)} = (-8.33x^3 + 72.22x - 63.89) \times 10^{-3}$$

123

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۴-

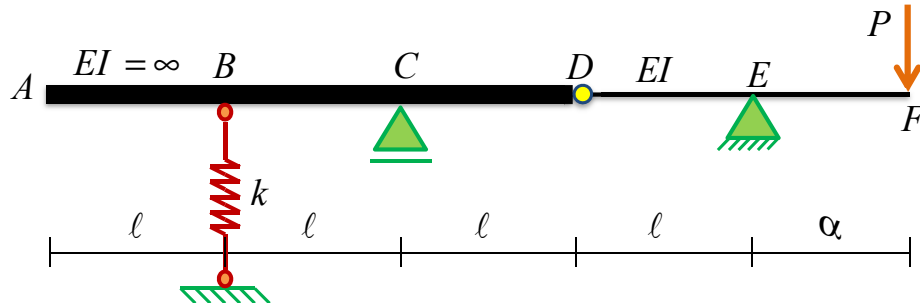


تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

مثال ۱۵- مقدار α را به گونه‌ای تعیین نمایید که خیز در نقاط A و F با هم برابر باشند. تیر AD صلب است.

$$k = \frac{3EI}{\ell^3}$$



125

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۵-

برای تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر را در اتصال D جدا می‌نماییم:

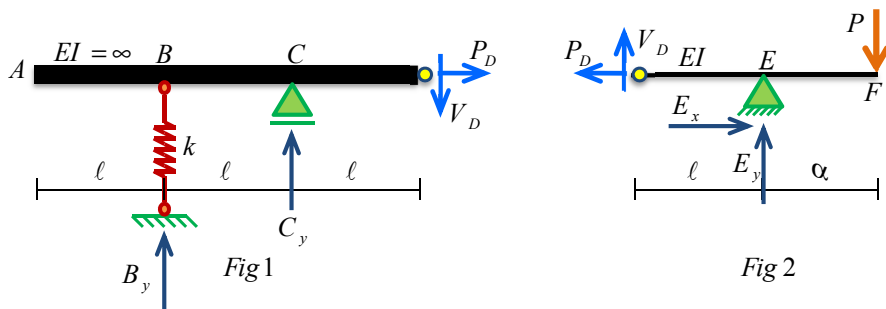


Fig 2

با نوشتن معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌گردد:

$$\text{Fig 1: } \sum F_x = 0 \Rightarrow P_D = 0 \xRightarrow{\text{Fig 2}} \sum F_x = 0 \Rightarrow E_x = 0$$

$$\text{Fig 2: } \sum M_D = 0 \Rightarrow E_y \ell - P(\ell + \alpha) = 0 \Rightarrow E_y = P\left(1 + \frac{\alpha}{\ell}\right) \quad (15.1)$$

$$\text{Fig 2: } \sum F_y = 0 \Rightarrow E_y - P + V_D = 0 \xRightarrow{(15.1)} V_D = -\frac{P\alpha}{\ell} \quad (15.2)$$

$$\text{Fig 1: } \sum M_B = 0 \Rightarrow -V_D \times 2\ell + C_y \times \ell = 0 \xRightarrow{(15.2)} C_y = -\frac{2P\alpha}{\ell} \quad (15.3)$$

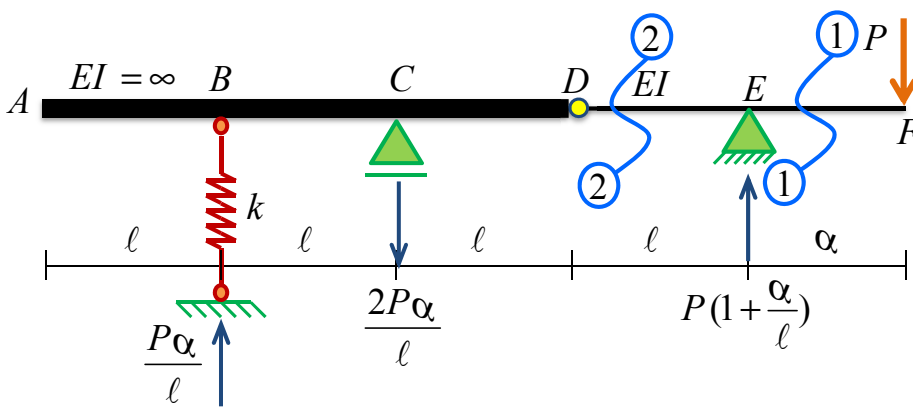
$$\text{Fig 1: } \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - V_D + C_y = 0 \xRightarrow{(15.2) \& (15.3)} B_y = \frac{P\alpha}{\ell}$$

126

تغییر شکل در تیرهای معین

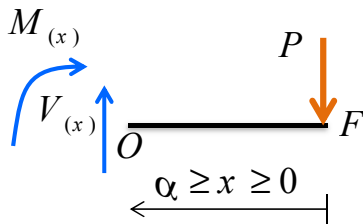
روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۵-



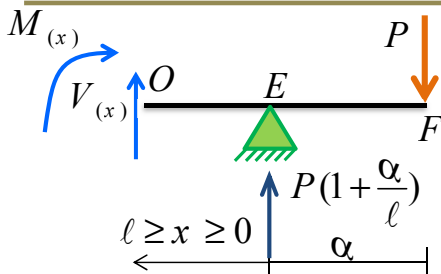
از آنجایی که بخش AD تیر صلب است از این رو در محاسبه بار الاستیک مربوط به این بخش مقدار لنگر به بینهایت تقسیم می شود که برابر با صفر خواهد شد. در نتیجه نیازی به محاسبه نمودار لنگر در بخش AD تیر نیست چون نیازی به آن نمی باشد.

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۱-۱ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - P \times x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{(x)} = -Px}$$

با در نظر گرفتن سمت راست مقطع ۲-۲ خواهیم داشت:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -M_{(x)} - P \times (x + \alpha) + P \left(1 + \frac{\alpha}{l}\right) \times x = 0$$

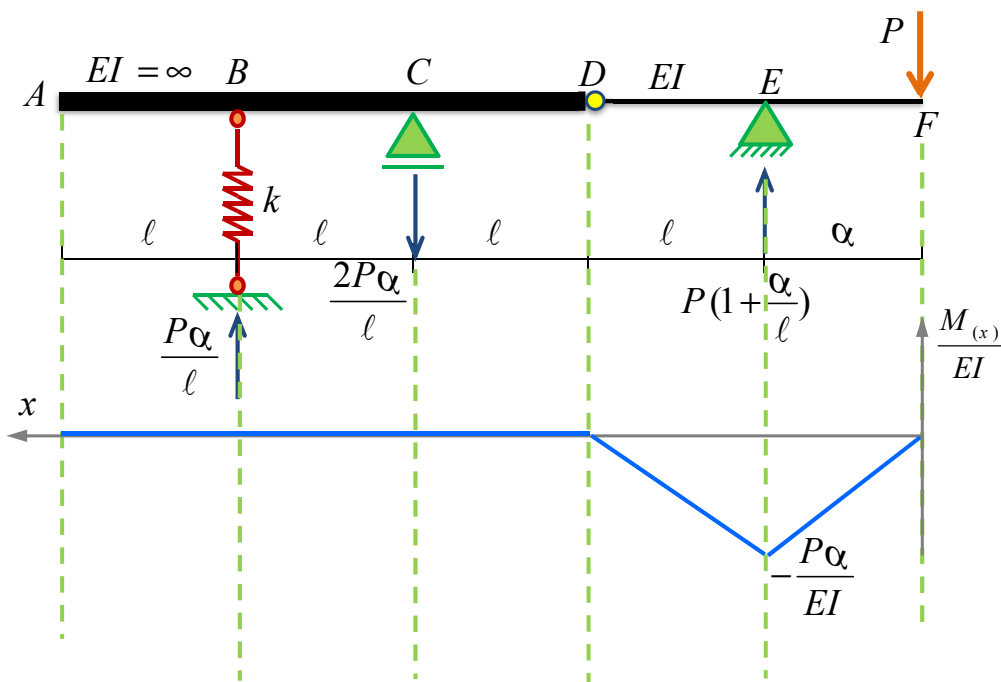
$$\Rightarrow \boxed{M_{(x)} = P\alpha \left(\frac{x}{l} - 1 \right)}$$

127

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۵-

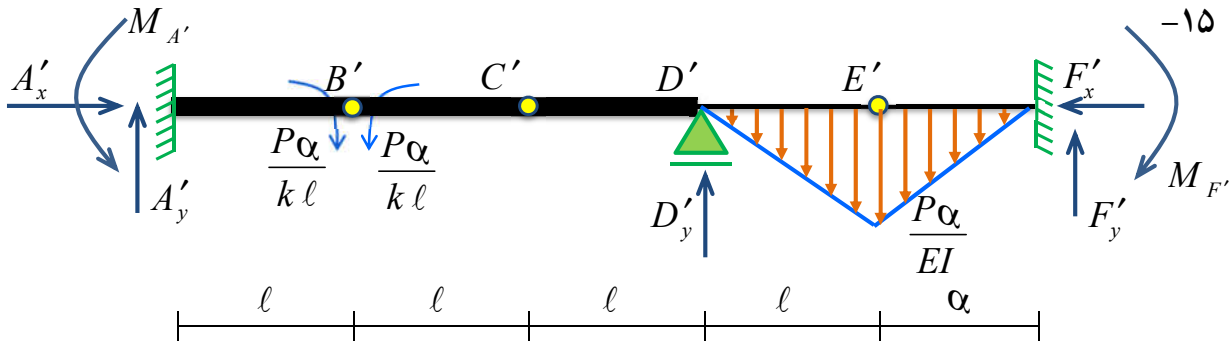


128

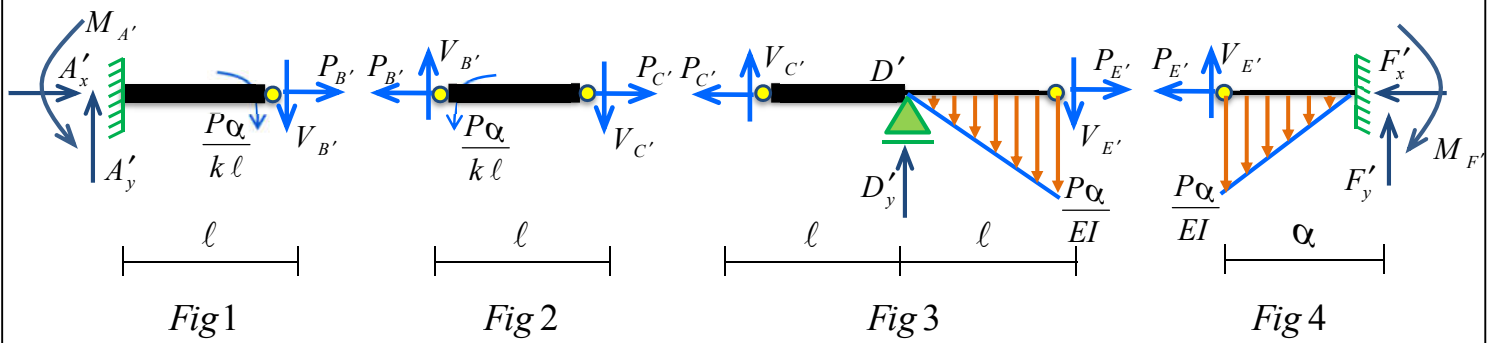
تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۵ -



در ادامه هدف تعیین مقادیر لنگر $M_{A'}$ و $M_{F'}$ است. به همین دلیل تیر را از محل مفصل‌ها جدا می‌کنیم:

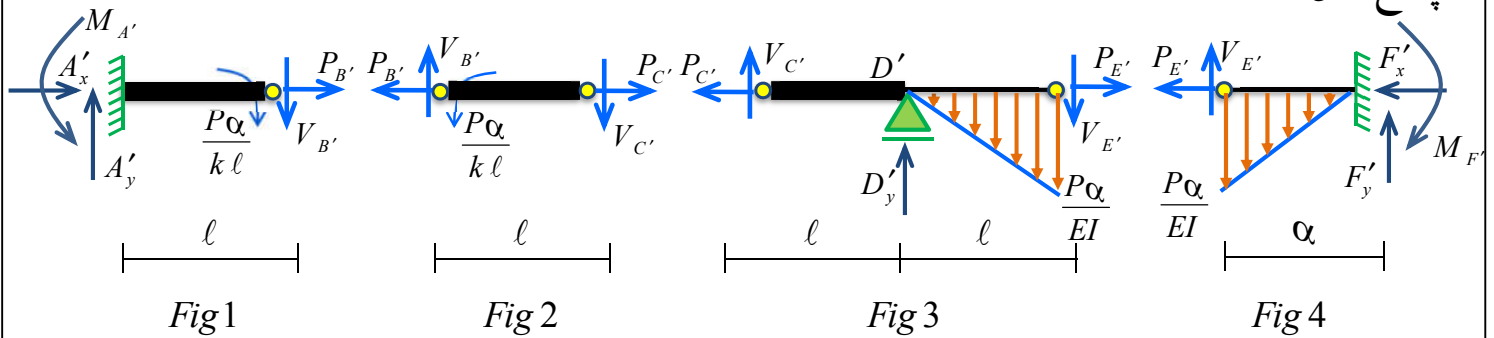


129

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)

پاسخ مثال ۱۵ -



$$V_{C'} = \frac{P\alpha}{k\ell^2} \quad (15.4)$$

$$V_{B'} = \frac{P\alpha}{k\ell^2} \quad (15.5)$$

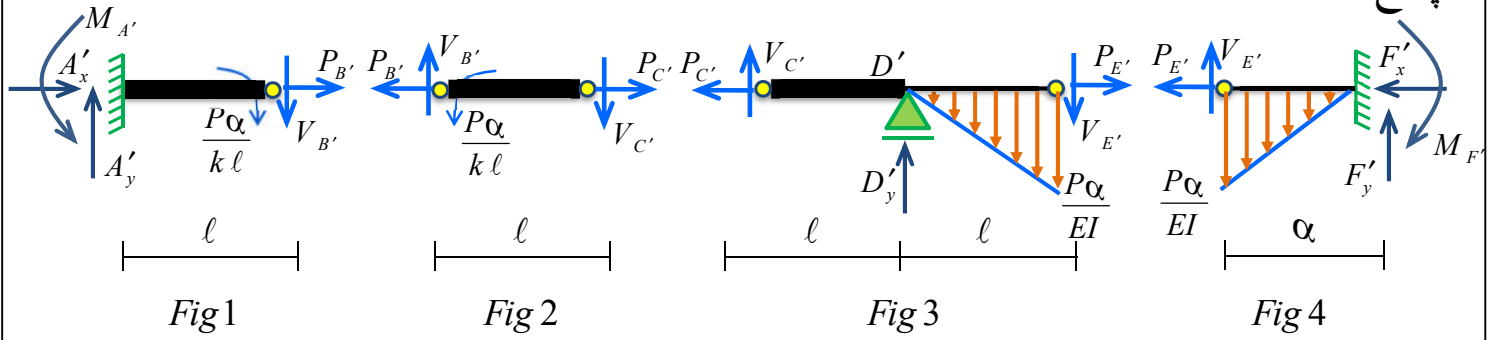
$$\begin{aligned} (15.5) \Rightarrow \\ k = \frac{3EI}{\ell^3} \end{aligned} \quad y_A = M_{A'} = \frac{2P\alpha\ell^2}{3EI} \quad (15.6)$$

$$\begin{aligned} (15.4) \Rightarrow \\ k = \frac{3EI}{\ell^3} \end{aligned} \quad V_{E'} = -\frac{2P\alpha\ell}{3EI} \quad (15.7)$$

130

تغییر شکل در تیرهای معین

روش بار الاستیک (تیر مزدوج)
پاسخ مثال ۱۵-



$$y_F = M_{F'} = \frac{P\alpha^3}{3EI} + \frac{2P\alpha^2\ell}{3EI} \quad (15.8)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\ell\alpha - 2\ell^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-(2\ell) \pm \sqrt{(2\ell)^2 - 4(1)(-2\ell^2)}}{2(1)} \Rightarrow \alpha = (\sqrt{3} - 1)\ell$$