



دانشگاه کردستان
University of Kurdistan
زانکۆی کوردستان

تحلیل سازه‌ها

خرپا (Truss)

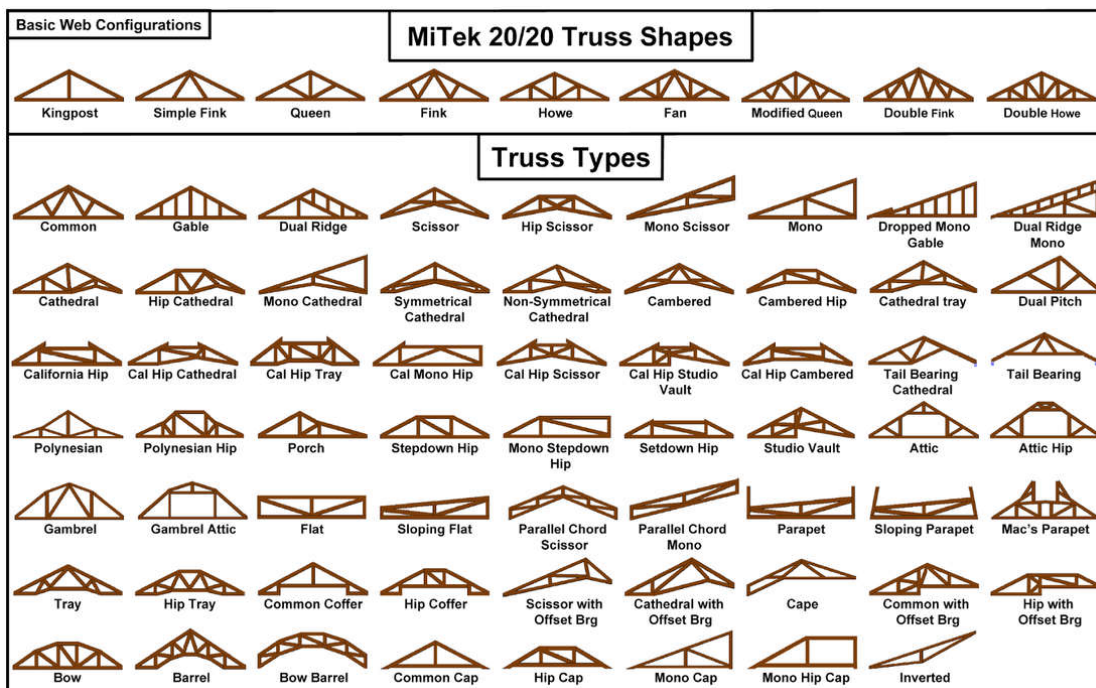
تهیه کننده: کاوه کریمی
دانشیار مهندسی سازه

<https://prof.uok.ac.ir/Ka.Karami>

خرپا (Truss)

خرپا (Truss):

خرپا مجموعه‌ای از اعضای خطی و مستقیم است که توسط مفصل به یکدیگر متصل می‌شوند. معمار ایتالیایی به نام آندره پلادیو اولین کسی است که خرپا را ابداع نموده است.



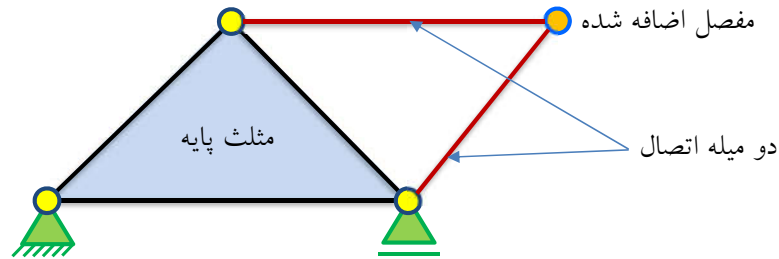
Andrea Palladio

Born: 30 November 1508
Died: 19 August 1580 (aged 71)
Nationality: Italian
Occupation: Architect

خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای ساده (Simple Truss): از یک مثلث پایه شامل سه عضو و سه مفصل شروع شده و به ازای اضافه کردن هر مفصل به خرپا حداقل دو میله اتصال موجود است. خرپای ساده از نظر داخلی پایدار است.



شرط لازم اما نه کافی برای خرپای ساده رابطه زیر است:

$$\frac{m-3}{2} \in N$$

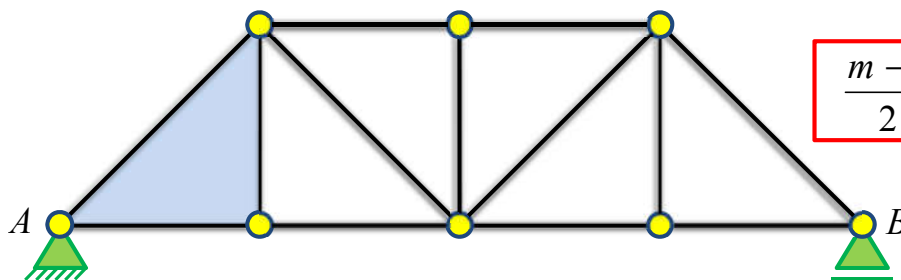
m : تعداد اعضا
 N : اعداد طبیعی

3

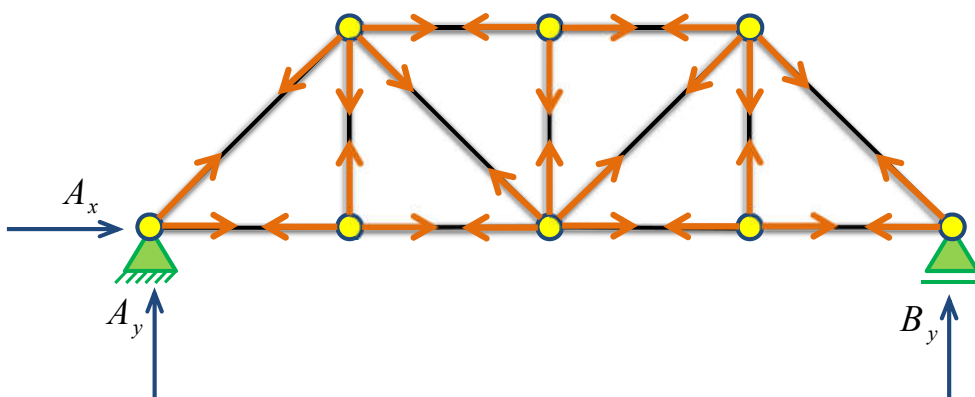
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای ساده (Simple Truss):



$$\frac{m-3}{2} = \frac{13-3}{2} = 5 \in N$$



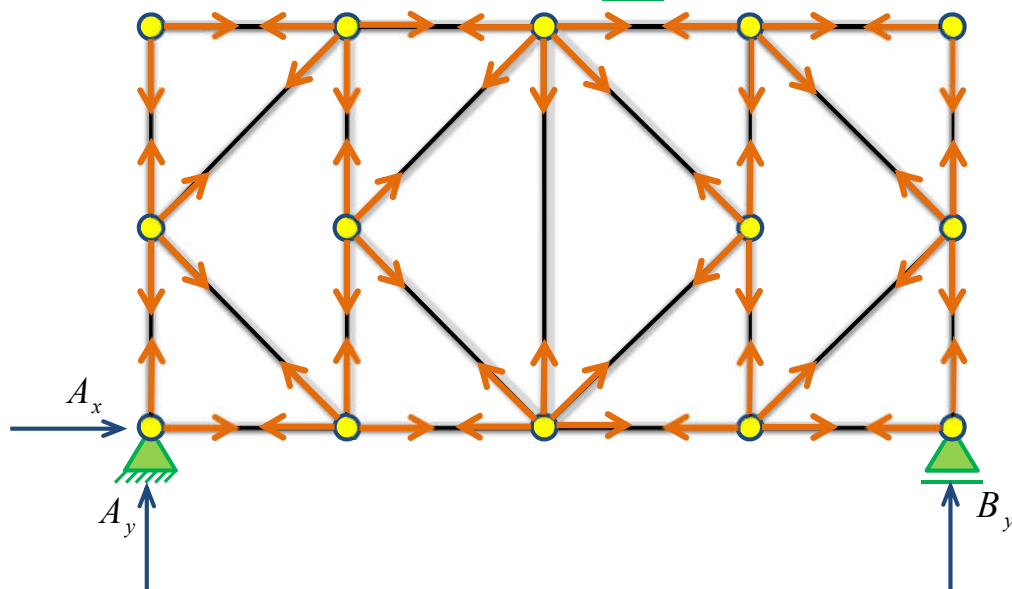
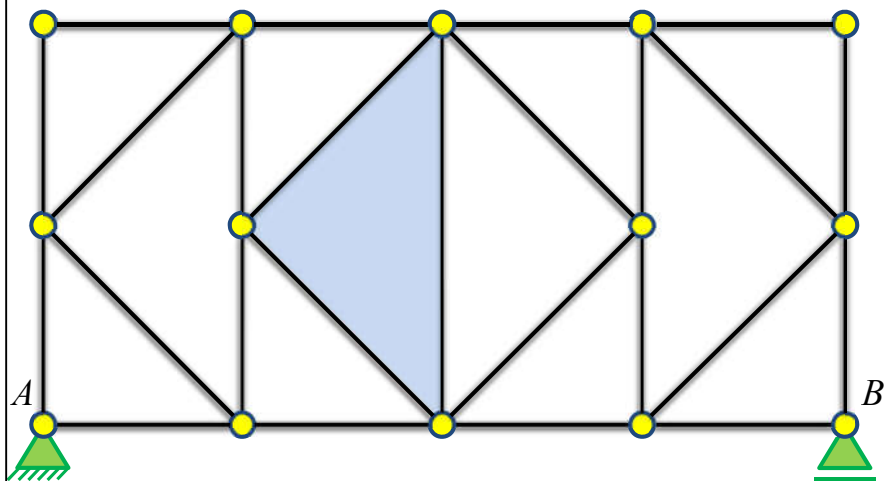
4

خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای ساده (Simple Truss):

$$\frac{m-3}{2} = \frac{25-3}{2} = 11 \in N$$



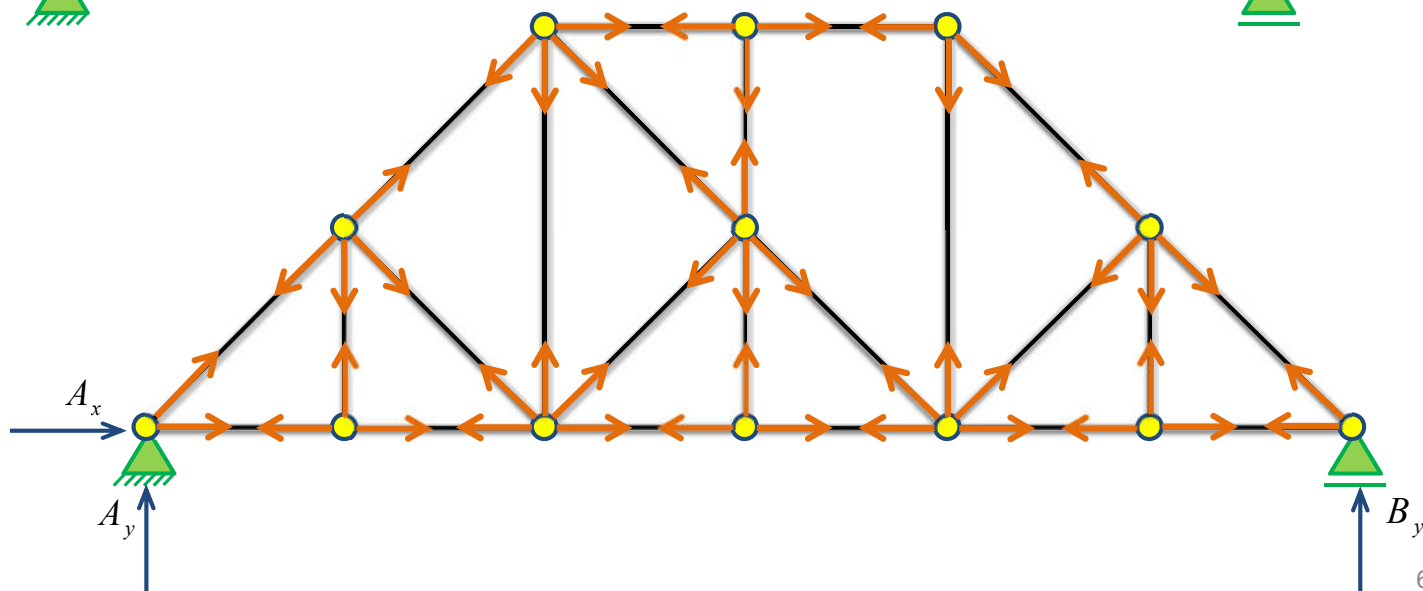
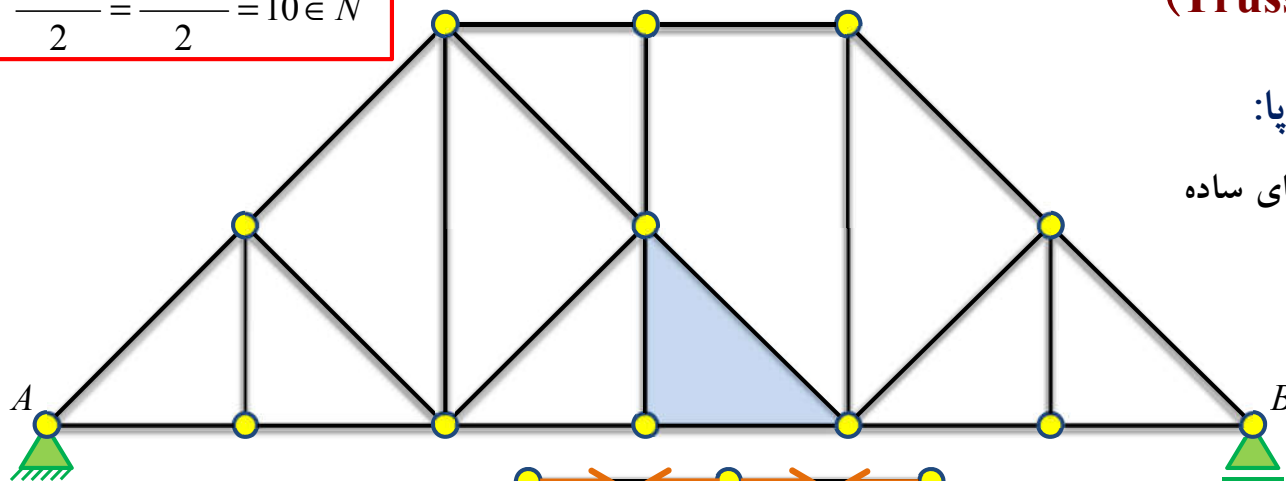
5

خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای ساده

$$\frac{m-3}{2} = \frac{23-3}{2} = 10 \in N$$



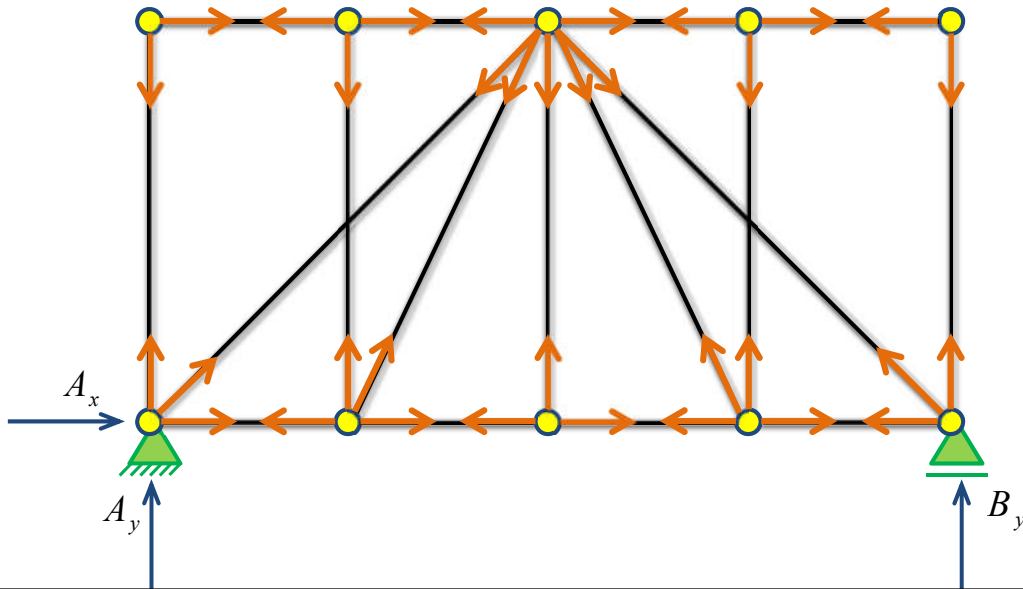
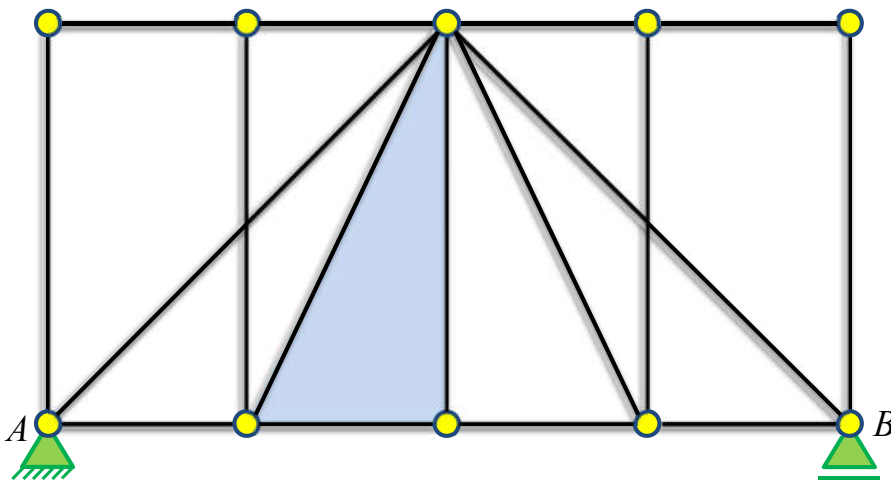
6

خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای ساده (Simple Truss):

$$\frac{m-3}{2} = \frac{17-3}{2} = 7 \in \mathbb{N}$$

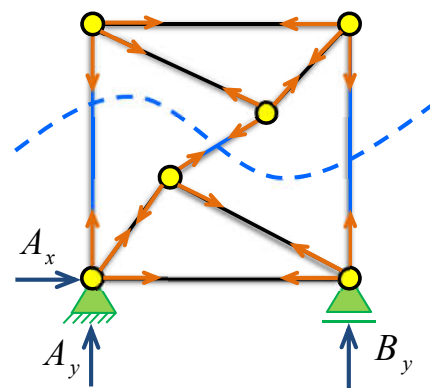
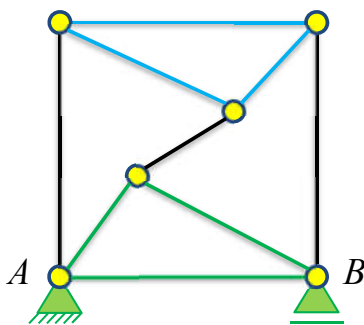


7

خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای مرکب (Compound Truss): خرپایی است که از اتصال دو یا چند خرپای ساده تشکیل شده است. پایداری خرپای مرکب بستگی به اتصال خرپاهای ساده به یکدیگر دارد.



کافی نیست

$$\frac{m-3}{2} = \frac{9-3}{2} = 3 \in \mathbb{N}$$

ترکیب دو خرپای ساده با استفاده از سه میله غیرموازی و غیرمتقارب

8

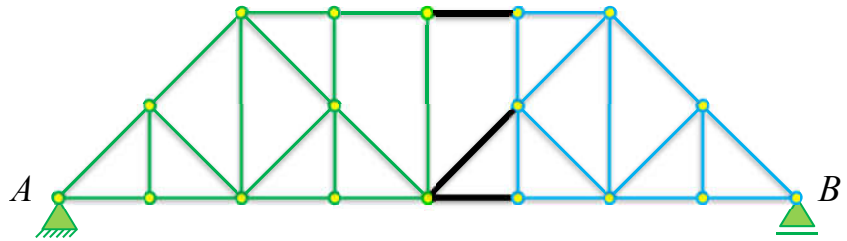
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

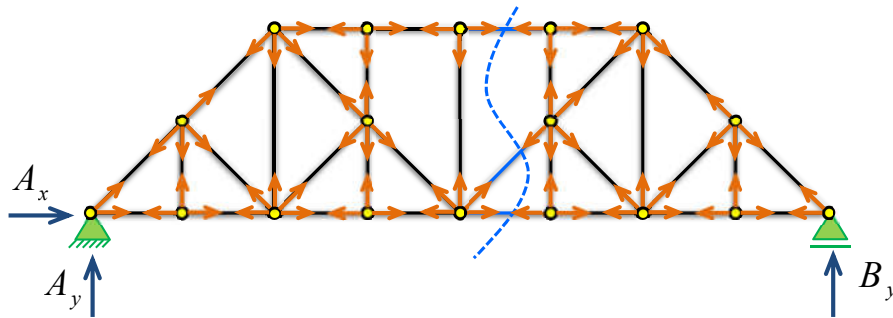
۱- خرپای مرکب (Compound Truss):

$$\frac{m-3}{2} = \frac{33-3}{2} = 15 \in N$$

کافی نیست



ترکیب دو خرپای ساده با استفاده از سه میله غیرموازی و غیرمتقارب



9

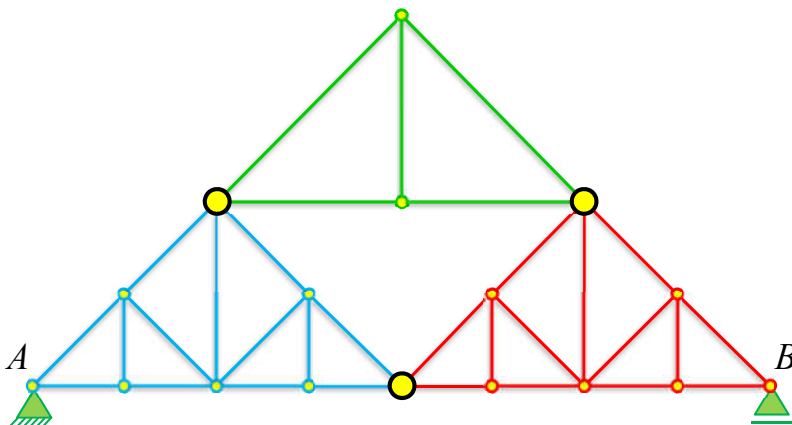
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

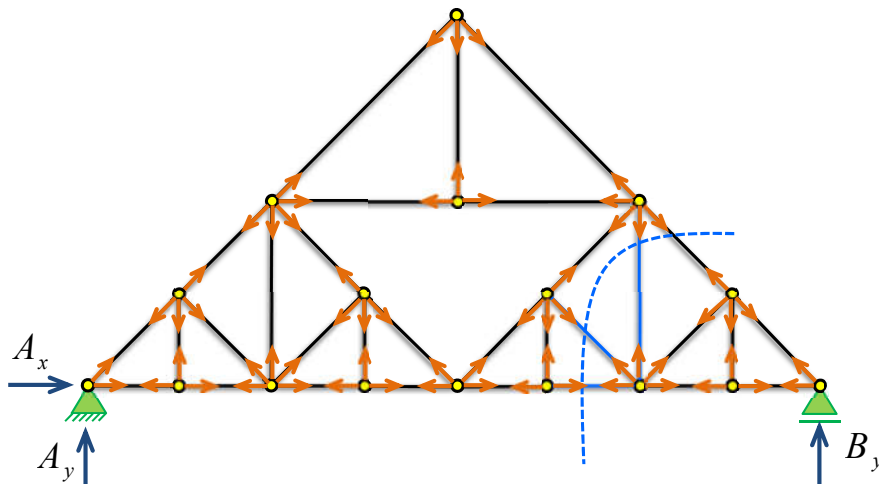
۱- خرپای مرکب

$$\frac{m-3}{2} = \frac{31-3}{2} = 14 \in N$$

کافی نیست



ترکیب سه خرپای ساده به کمک سه مفصل که راستای آن‌ها بر روی یک خط راست قرار ندارد.

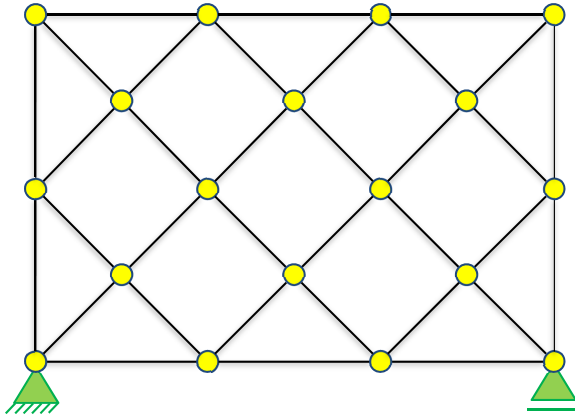


10

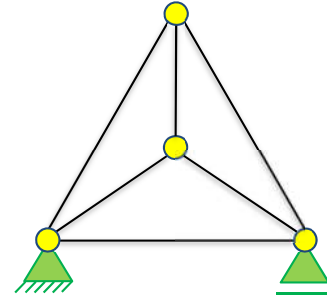
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای پیچیده (بغرنج یا مبهم) (Complex Truss): خرپایی است که نه ساده است و نه مرکب. آنالیز این نوع خرپا به کمک روش گره امکان پذیر نمی باشد. اصولاً بحث پایداری این نوع خرپاها به صورت سیستماتیک امکان پذیر نمی باشد.



$$\frac{m-3}{2} = \frac{34-3}{2} = 15.5 \notin N$$



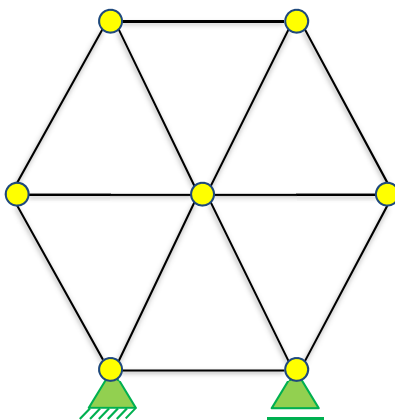
$$\frac{m-3}{2} = \frac{6-3}{2} = 1.5 \notin N$$

11

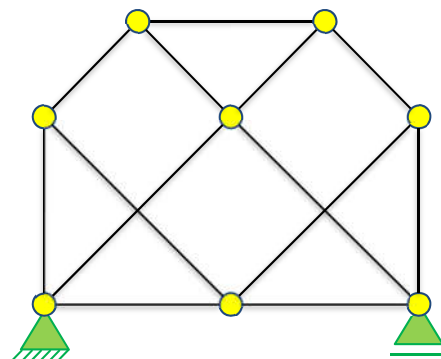
خرپا (Truss)

انواع خرپا:

۱- خرپای پیچیده (بغرنج یا مبهم) (Complex Truss):



$$\frac{m-3}{2} = \frac{12-3}{2} = 4.5 \notin N$$



$$\frac{m-3}{2} = \frac{13-3}{2} = 5 \in N$$

کافی نیست. خرپا ساده نمی باشد چرا که هیچ مثلث پایه ای در این خرپا وجود ندارد. همچنین خرپا مرکب هم نمی باشد.

12

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

۱- روش مقایسه تعداد معادلات و مجهولات (در فصل قبل اشاره شده است).

۲- روش کلاسیک (در فصل قبل اشاره شده است).

۳- روش آزمون بار صفر.

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

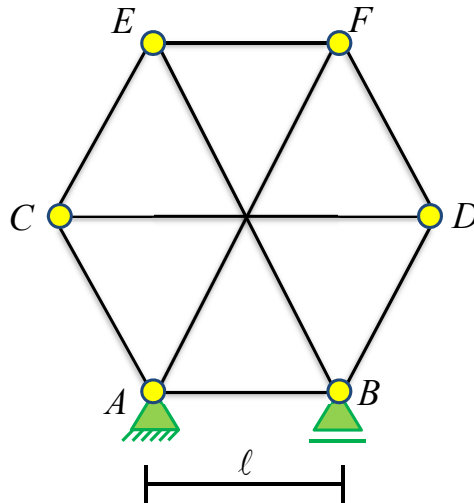
روش آزمون بار صفر:

می‌دانیم که اگر خرپایی تحت اثر بار خارجی قرار نگیرد نیروی داخلی در آن ایجاد نمی‌شود و نیروی همه اعضای آن صفر است. حال فرض می‌کنیم در خرپایی که بارگذاری خارجی ندارد نیروی یکی از اعضا را متغیر و برابر با P در نظر می‌گیریم. در ادامه اگر با تحلیل گره به گره خرپا به معادله $P=0$ رسیدیم نتیجه می‌شود که خرپا پایدار است. در غیر این صورت، یعنی اگر نیروی هر یک از اعضا تابعی از P به دست آمد آن گاه خرپا ناپایدار است؛ زیرا مقدار P می‌تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد.

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

مثال ۱- پایداری خرپای نشان داده را بررسی نمایید. تمامی زوایای خرپا برابر با 60° است.



15

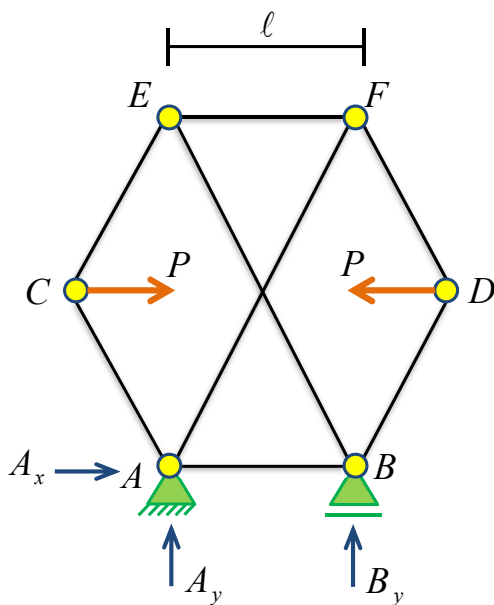
خرپا (Truss)

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

حل مثال ۱- فرض می شود در حالت بدون بارگذاری خارجی

نیروی داخلی عضوی CD برابر با P است.



با نوشتن معادلات تعادل عکس‌العمل‌های تکیه گاهی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P - P = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \ell + P \ell \sin(60) - P \ell \sin(60) = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

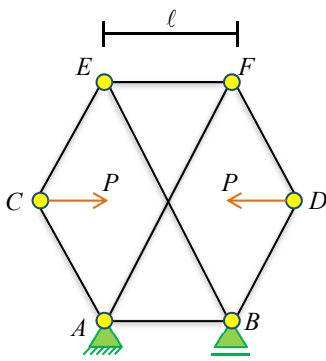
16

خرپا (Truss)

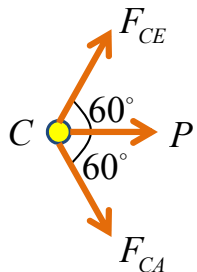
روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

حل مثال ۱-



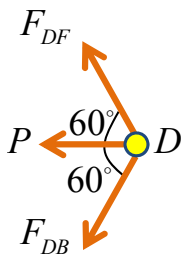
با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\left. \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{CE} \sin(60) - F_{CA} \sin(60) = 0 \Rightarrow F_{CE} = F_{CA} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow P + F_{CE} \cos(60) + F_{CA} \cos(60) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$F_{CE} = F_{CA} = -P$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\left. \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{DF} \sin(60) - F_{DB} \sin(60) = 0 \Rightarrow F_{DF} = F_{DB} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -P - F_{DF} \cos(60) - F_{DB} \cos(60) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$F_{DF} = F_{DB} = -P$$

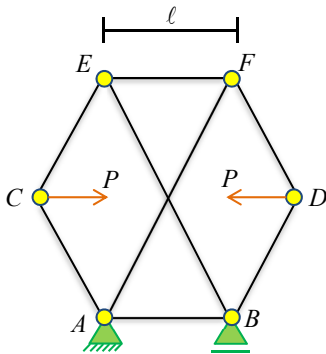
17

خرپا (Truss)

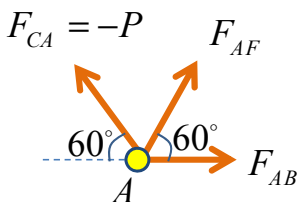
روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

حل مثال ۱-



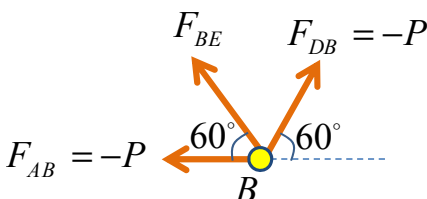
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +(-P) \sin(60) + F_{AF} \sin(60) = 0 \Rightarrow F_{AF} = P$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -(-P) \cos(60) + F_{AF} \cos(60) + F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = -P$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +(-P) \sin(60) + F_{BE} \sin(60) = 0 \Rightarrow F_{BE} = P$$

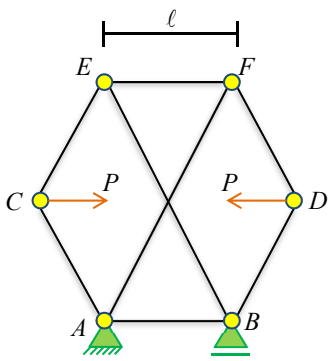
18

خرپا (Truss)

روش‌های تعیین پایداری خرپا:

روش آزمون بار صفر:

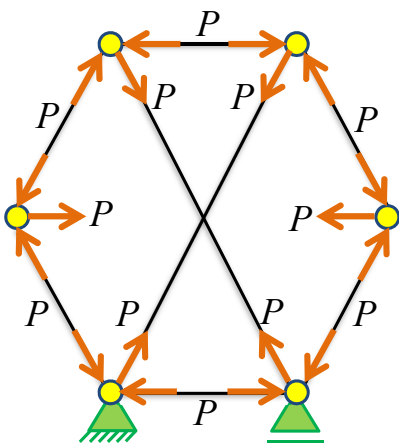
حل مثال ۱-



با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -(-P) \cos(60) + P \cos(60) + F_{EF} = 0 \Rightarrow F_{EF} = -P$$

Free body diagram of node E shows forces: $F_{CE} = -P$ (down-left), $F_{BE} = P$ (down-right), and F_{EF} (right). Angles of 60° are indicated between the horizontal and the diagonal members.



خرپا ناپایدار است. $\Rightarrow P \neq 0$

19

خرپا (Truss)

آنالیز خرپا:

فرضیات:

- ۱- اتصال کلیه اعضا به یکدیگر به صورت مفصلی است.
 - ۲- اعضای خرپا از عضوهای مستقیم تشکیل شده است.
 - ۳- تغییرشکل‌های ایجاد شده در اعضای خرپا ناشی از بارهای وارده ناچیز بوده به طوری که هندسه اولیه خرپا ملاک آنالیز است.
 - ۴- نیروهای وارد بر خرپا همگی در محل مفصل اثر می‌کنند.
- (با توجه به مفروضات بالا، هر عضو خرپا یک عضو دو نیرویی است که به منظور تعادل این عضو، دو نیرو در راستای عضو به صورت فشاری یا کششی بر عضو اثر می‌کند.)

20

انواع روش‌های آنالیز:

۱- روش تعادل گره: این روش مناسب برای تعیین نیروی کلیه اعضای خرپا در خرپاهای ساده و مرکب است.

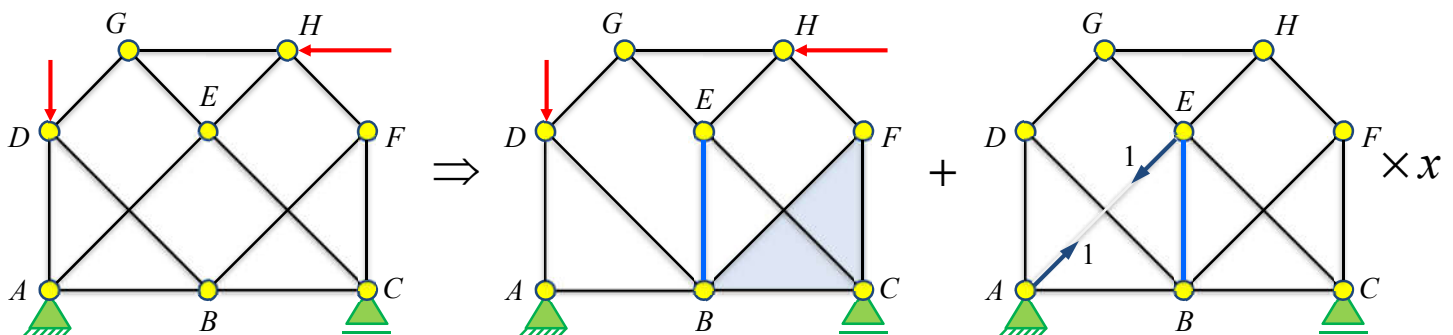
۲- روش مقطع زدن: این روش مناسب برای تعیین نیروی تعداد خاصی از اعضای خرپا در خرپاهای ساده، مرکب و مبهم است.

۳- روش هنبرگ: این روش مناسب برای تعیین نیروی کلیه اعضای خرپا در خرپاهای مبهم و مرکب است. در این روش به صورت فرضی یک یا تعدادی از اعضای خرپا را به گونه‌ای جابجا می‌کنیم که خرپای تبدیل یافته اولاً پایدار و دوماً قابل آنالیز باشد. سپس براساس اصل برهم نهی باید اثر اعضای جابجا شده به صورت مجزا لحاظ شود.

21

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:



F_{ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای اولیه
(مبهم)

F_{1ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای ساده ناشی از بارگذاری خارجی

F_{2ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای ساده ناشی از نیروی داخلی عضو جابجا شده.
توجه: به جای نیروی داخلی عضو جابجا شده نیرویی برابر با واحد قرار می‌دهیم؛ چون مقدار واقعی آن را نمی‌دانیم نتایج در x ضرب شده است.

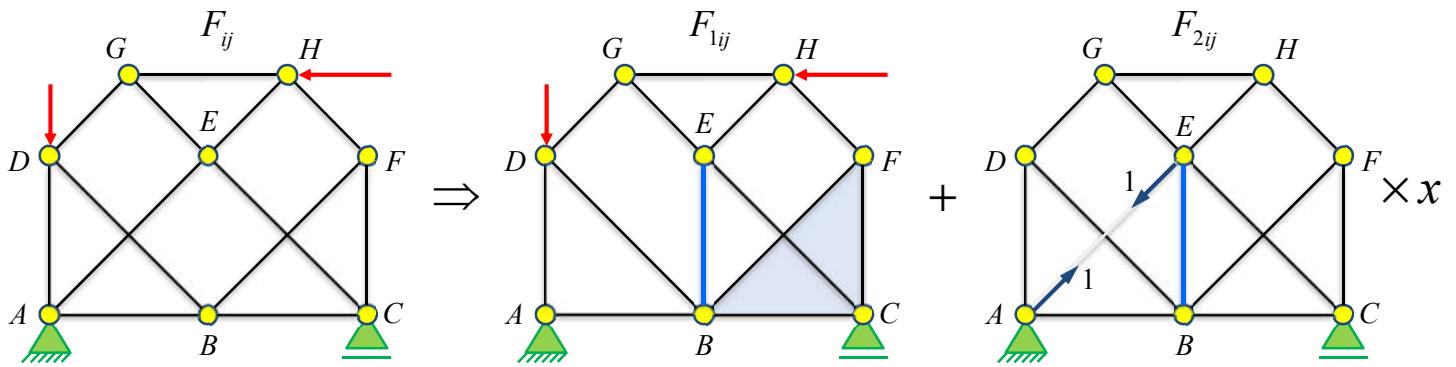
$$\frac{m-3}{2} = \frac{13-3}{2} = 5 \in N$$

با جابجا شدن یک عضو، یک مثلث پایه در خرپا می‌توان پیدا کرد. پس خرپای مبهم تبدیل به یک خرپای ساده شد.

22

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:



با استفاده از اصل برهم نهی خواهیم داشت:

$$F_{ij} = F_{1ij} + x \cdot F_{2ij} \quad (1)$$

از آنجایی که عضو BE در سازه اصلی وجود ندارد بنابراین باید نیروی آن صفر باشد. با نوشتن معادله (۱) برای عضو BE

نتیجه می شود:

$$F_{BE} = F_{1BE} + x \cdot F_{2BE} = 0 \Rightarrow x = -\frac{F_{1BE}}{F_{2BE}} \quad (2)$$

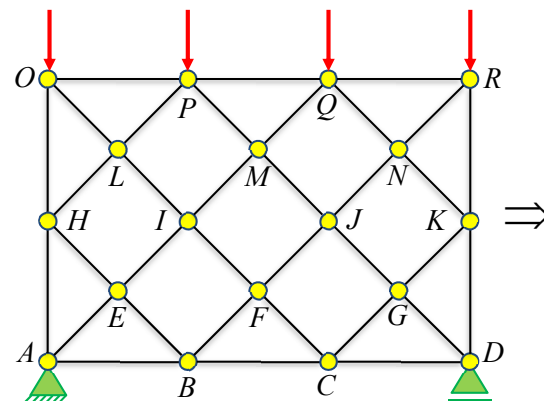
با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) نیروی کلیه اعضای خرپای مبهم تعیین می گردد:

$$(2) \rightarrow (1) \quad F_{ij} = F_{1ij} - \left(\frac{F_{1BE}}{F_{2BE}} \right) F_{2ij} \quad (3)$$

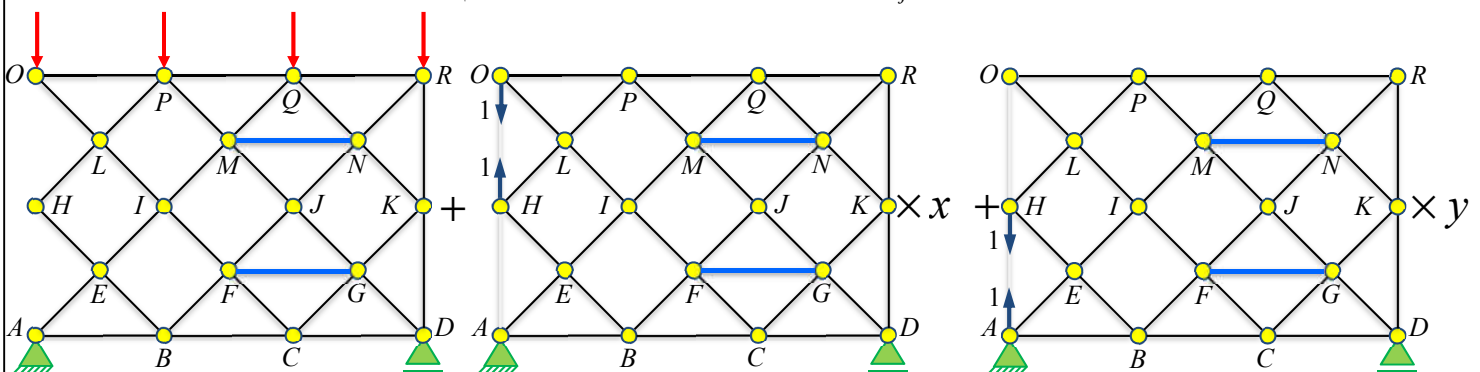
23

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:



F_{ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای اولیه (مبهم)



F_{1ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای

تغییر یافته ناشی از بارگذاری خارجی

F_{2ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای تغییر یافته

ناشی از نیروی داخلی عضو جابجا شده OH.

F_{3ij} : نیروهای داخلی در اعضای خرپای تغییر یافته

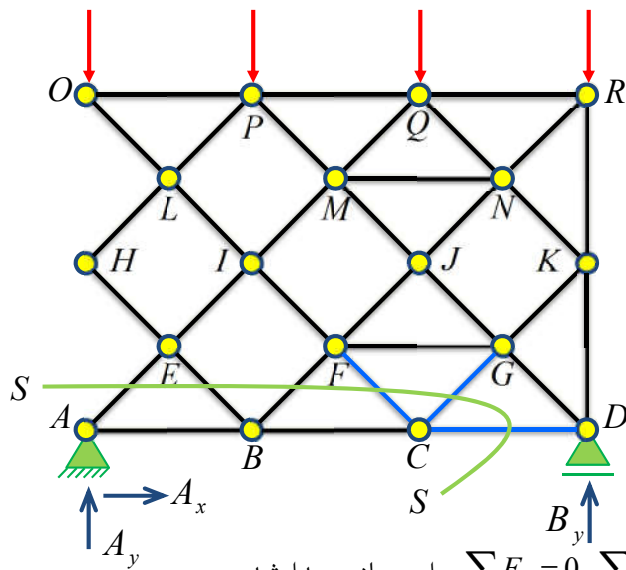
ناشی از نیروی داخلی عضو جابجا شده AH.

24

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

با نوشتن سه معادله تعادل $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$ برای کل خرپا.



با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره O.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره H.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره A.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره L.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره E.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره P.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره I.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره B.

با ایجاد مقطع S-S و نوشتن سه معادله تعادل $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$ برای سازه جدا شده.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره K.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره M.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره N.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره R.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره D.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره F.

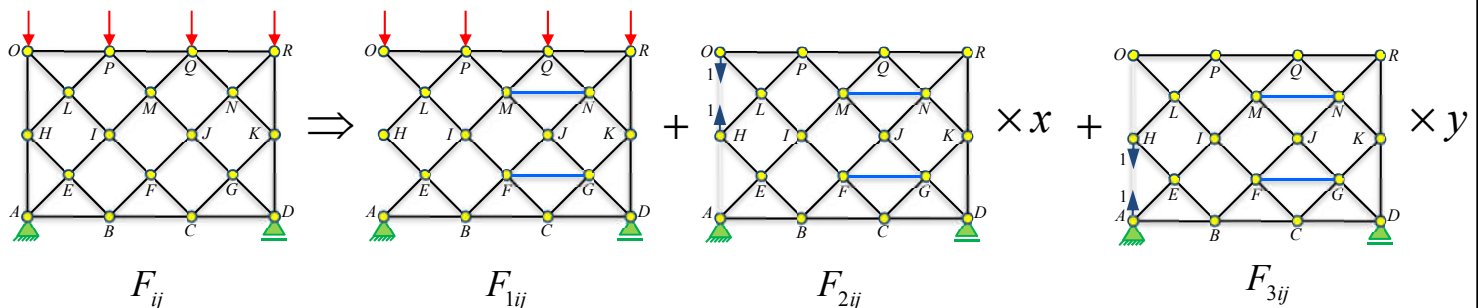
با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره G.

با نوشتن دو معادله $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ در گره J.

25

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:



با استفاده از اصل برهم نهی خواهیم داشت:

$$F_{ij} = F_{1ij} + x \cdot F_{2ij} + y \cdot F_{3ij} \quad (4)$$

از آنجایی که عضوهای MN و FG در سازه اصلی وجود ندارند بنابراین باید نیروی آن‌ها صفر باشد. با نوشتن معادله (۴)

برای این دو عضو نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} F_{MN} &= F_{1MN} + x \cdot F_{2MN} + y \cdot F_{3MN} = 0 \\ F_{FG} &= F_{1FG} + x \cdot F_{2FG} + y \cdot F_{3FG} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

26

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

با نوشتن رابطه (۵) به صورت ماتریسی خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} F_{2MN} & F_{3MN} \\ F_{2FG} & F_{3FG} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{1MN} \\ -F_{1FG} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

با حل رابطه (۶) مجهولات X و Y به دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2MN} & F_{3MN} \\ F_{2FG} & F_{3FG} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -F_{1MN} \\ -F_{1FG} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

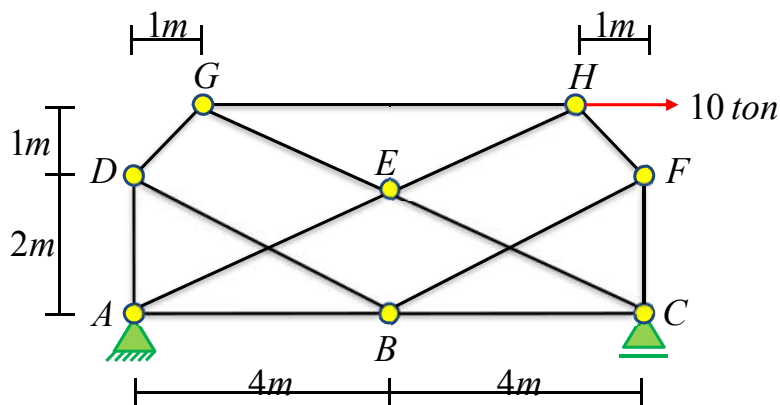
با مشخص شدن مجهولات و جایگذاری آنها در رابطه (۴) نیروی کلیه اعضای خرپای مبهم تعیین می‌گردد.

27

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

مثال ۲- خرپای نشان داده شده را آنالیز نمایید.

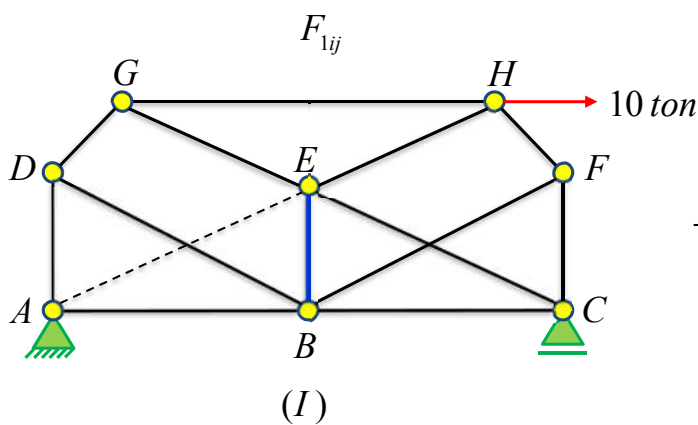
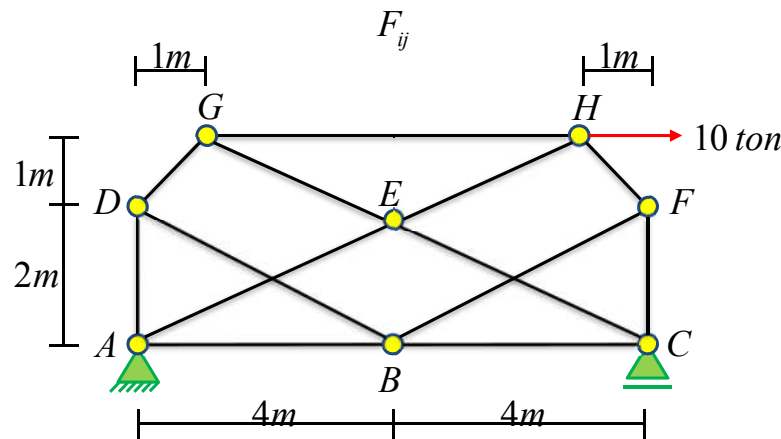


28

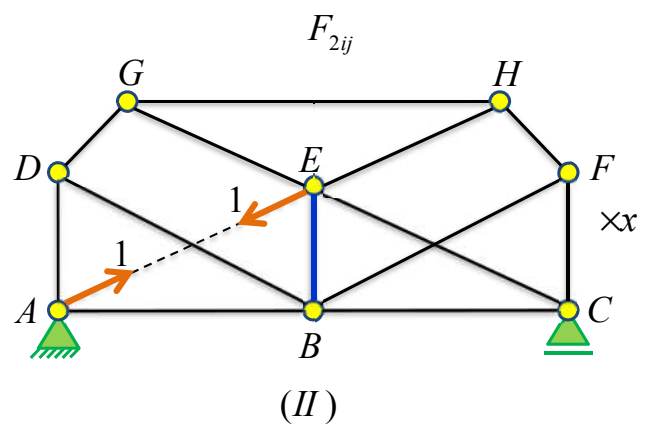
خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲-



+

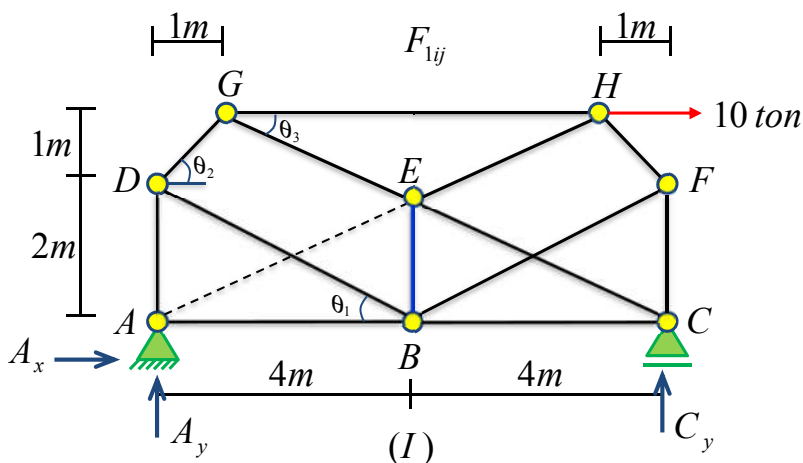


29

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (I)



$$\begin{aligned} \sin(\theta_1) &= \frac{2}{\sqrt{20}} \quad , \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}} \\ \sin(\theta_2) &= \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_3) &= \frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 10 = 0 \Rightarrow A_x = -10 \text{ ton}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow C_y \times 8 - 10 \times 3 = 0 \Rightarrow C_y = 3.75 \text{ ton}$$

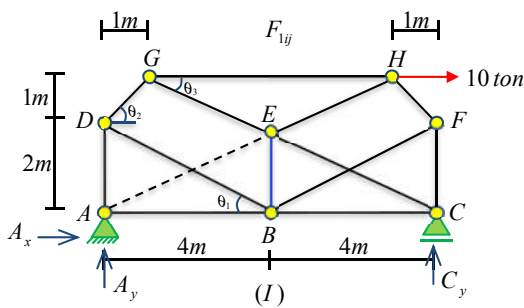
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 3.75 = 0 \Rightarrow A_y = -3.75 \text{ ton}$$

30

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (I)

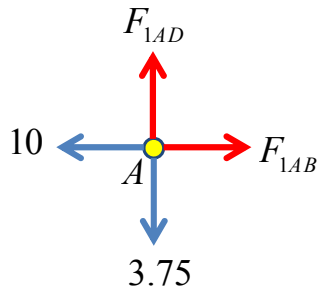


$$\sin(\theta_1) = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

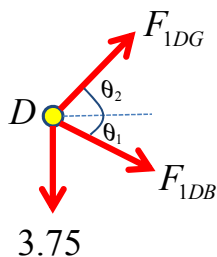
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -10 + F_{1AB} = 0 \Rightarrow F_{1AB} = 10 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3.75 + F_{1AD} = 0 \Rightarrow F_{1AD} = 3.75 \text{ ton}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1DB} \frac{4}{\sqrt{20}} + F_{1DG} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3.75 - F_{1DB} \frac{2}{\sqrt{20}} + F_{1DG} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

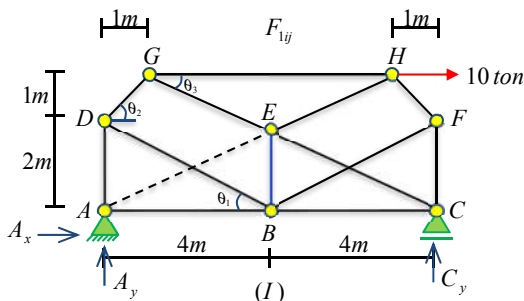
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1DB} = -2.795 \text{ ton} \\ F_{1DG} = 3.536 \text{ ton} \end{cases}$$

31

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (I)

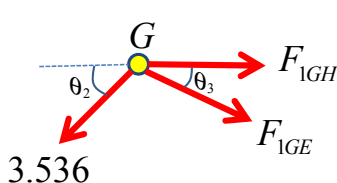


$$\sin(\theta_1) = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:

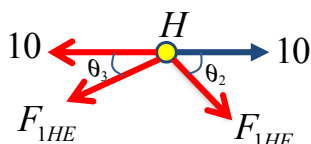


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1GH} + F_{1GE} \frac{3}{\sqrt{10}} - 3.536 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3.536 \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{1GE} \frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1GE} = -7.906 \text{ ton} \\ F_{1GH} = 10 \text{ ton} \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -10 + 10 - F_{1HE} \frac{3}{\sqrt{10}} + F_{1HF} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{1HE} \frac{1}{\sqrt{10}} - F_{1HF} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

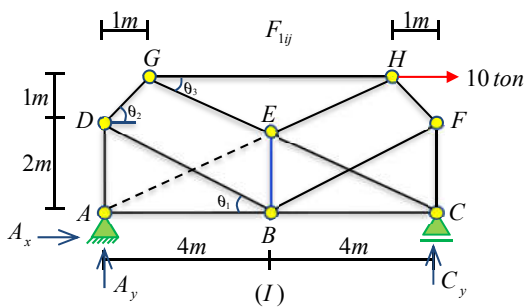
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1HE} = 0 \\ F_{1HF} = 0 \end{cases}$$

32

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (I)

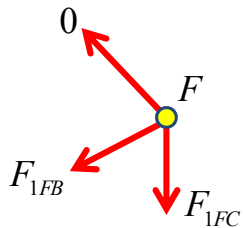


$$\sin(\theta_1) = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

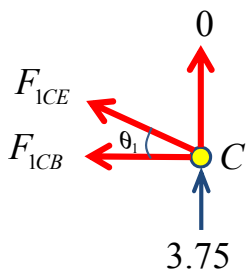
$$\sin(\theta_3) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:



$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1FB} = 0 \\ F_{1FC} = 0 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{1CB} - F_{1CE} \frac{4}{\sqrt{20}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3.75 + F_{1CE} \frac{2}{\sqrt{20}} = 0$$

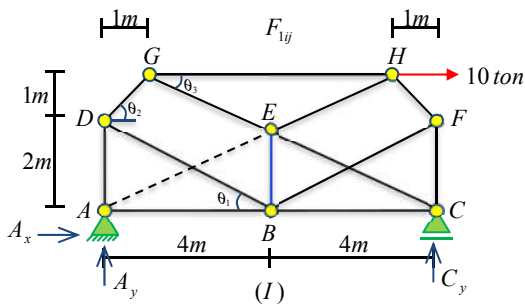
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1CE} = -8.385 \text{ ton} \\ F_{1CB} = 7.5 \text{ ton} \end{cases}$$

33

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (I)

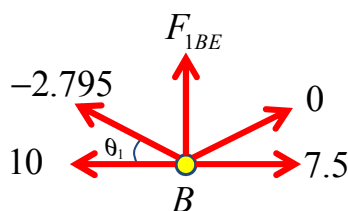


$$\sin(\theta_1) = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

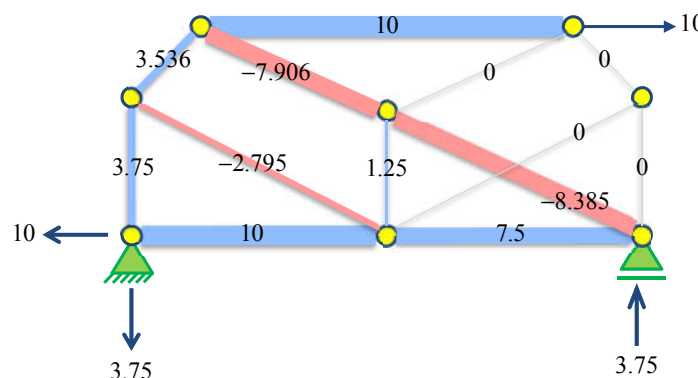
$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{1BE} + (-2.795) \frac{2}{\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow F_{1BE} = 1.25 \text{ ton}$$

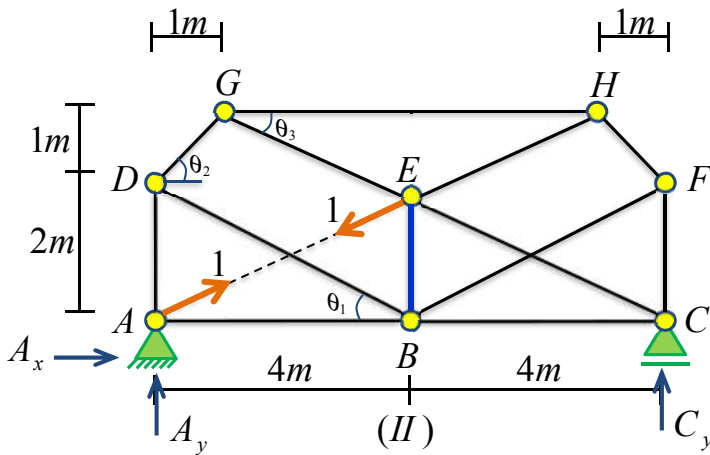


34

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta_1) = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 1\cos(\theta_1) - 1\cos(\theta_1) = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow C_y \times 8 = 0 \Rightarrow C_y = 0$$

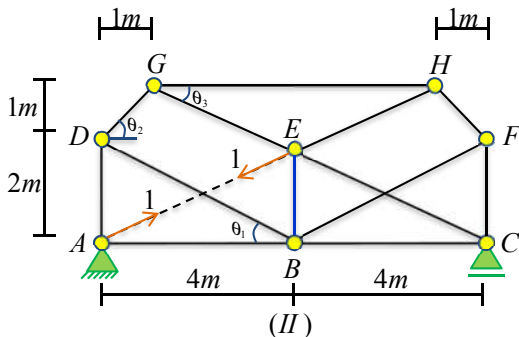
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 1\sin(\theta_1) - 1\sin(\theta_1) = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

35

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (II)

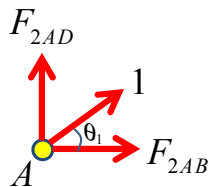


$$\sin(\theta_1) = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta_3) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

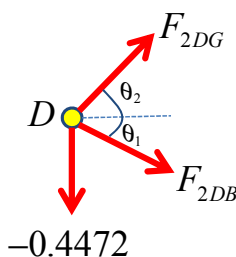
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{2AB} + 1 \times \frac{4}{\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow F_{2AB} = -0.8944 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{2AD} + 1 \times \frac{2}{\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow F_{2AD} = -0.4472 \text{ ton}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{2DB} \frac{4}{\sqrt{20}} + F_{2DG} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -0.4472 - F_{2DB} \frac{2}{\sqrt{20}} + F_{2DG} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

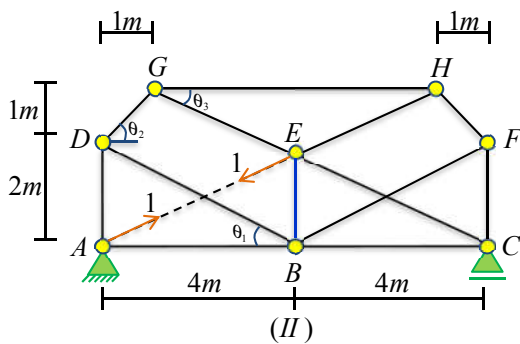
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2DB} = 0.3333 \text{ ton} \\ F_{2DG} = -0.4216 \text{ ton} \end{cases}$$

36

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (II)



$$\begin{aligned}\sin(\theta_1) &= \frac{2}{\sqrt{20}}, & \cos(\theta_1) &= \frac{4}{\sqrt{20}} \\ \sin(\theta_2) &= \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_3) &= \frac{1}{\sqrt{10}}, & \cos(\theta_3) &= \frac{3}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{2GH} + F_{2GE} \frac{3}{\sqrt{10}} - (-0.4216) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -(-0.4216) \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{2GE} \frac{1}{\sqrt{10}} = 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2GE} = 0.9428 \\ F_{2GH} = -1.1926 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:

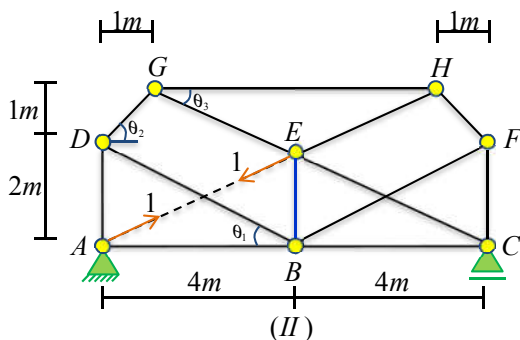
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -(-1.1926) - F_{2HE} \frac{3}{\sqrt{10}} + F_{2HF} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_{2HE} \frac{1}{\sqrt{10}} - F_{2HF} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2HE} = 0.9428 \\ F_{2HF} = -0.4216 \end{cases}$$

37

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (II)



$$\begin{aligned}\sin(\theta_1) &= \frac{2}{\sqrt{20}}, & \cos(\theta_1) &= \frac{4}{\sqrt{20}} \\ \sin(\theta_2) &= \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_3) &= \frac{1}{\sqrt{10}}, & \cos(\theta_3) &= \frac{3}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{2FB} \frac{4}{\sqrt{20}} - (-0.4216) \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_{2FC} - F_{2FB} \frac{2}{\sqrt{20}} + (-0.4216) \frac{1}{\sqrt{2}} = 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2FB} = 0.3333 \\ F_{2FC} = -0.4472 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:

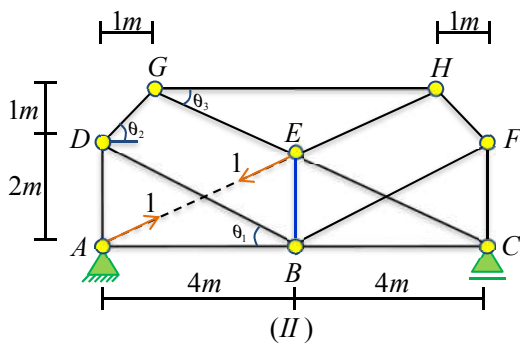
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{2CB} - F_{2CE} \frac{4}{\sqrt{20}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow (-0.4472) + F_{2CE} \frac{2}{\sqrt{20}} = 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2CE} = 1 \\ F_{2CB} = -0.8944 \end{cases}$$

38

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

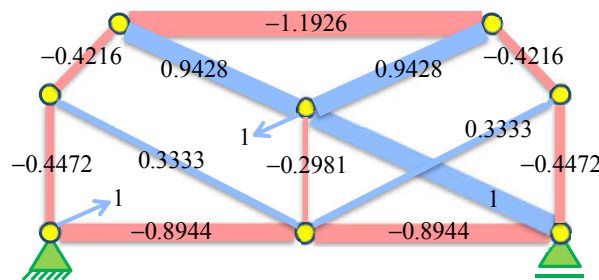
حل مثال ۲- آنالیز سازه شماره (II)



$$\begin{aligned}\sin(\theta_1) &= \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{4}{\sqrt{20}} \\ \sin(\theta_2) &= \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_3) &= \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\theta_3) = \frac{3}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{2BE} + 2(0.3333) \frac{2}{\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow F_{2BE} = -0.2981$$



39

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲-

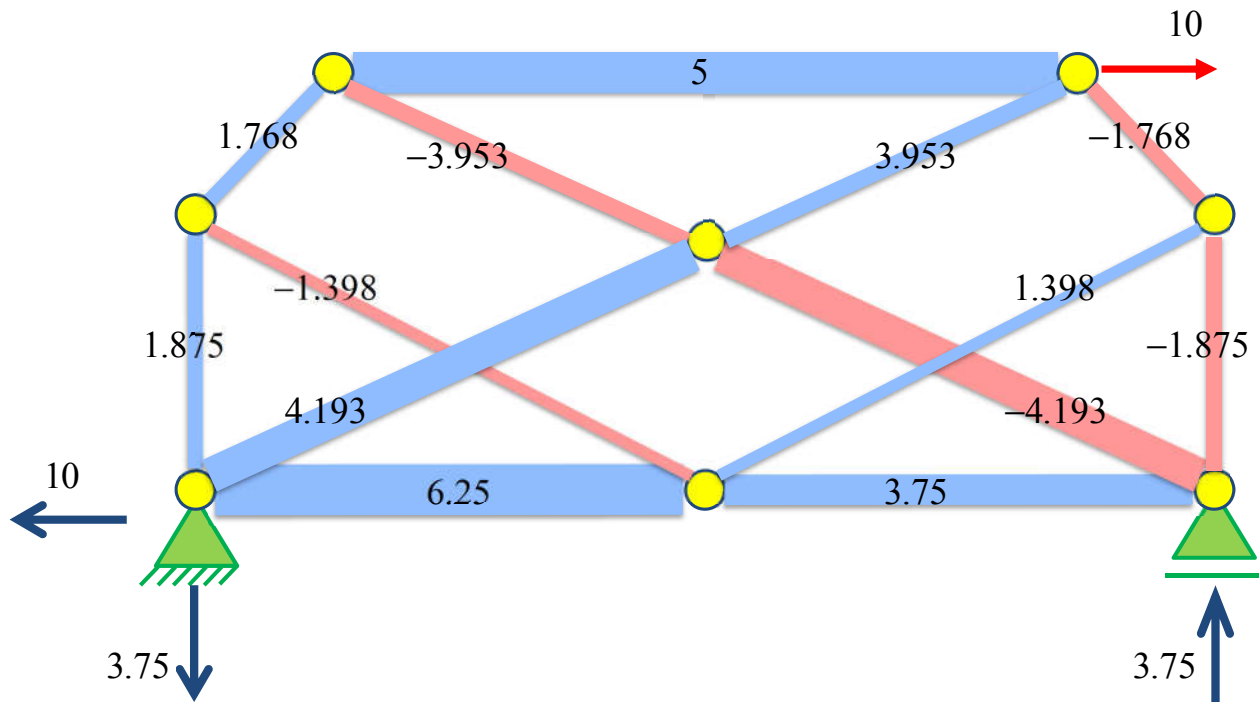
عضو	$F_{1ij} \text{ (ton)}$	$F_{2ij} \text{ (ton)}$	$F_{ij} \text{ (ton)} = F_{1ij} + 4.193F_{2ij}$
AB	10	-0.8944	6.250
AD	3.75	-0.4472	1.875
DB	-2.795	0.3333	-1.398
DG	3.536	-0.4216	1.768
GE	-7.906	0.9428	-3.953
GH	10	-1.1926	5
HE	0	0.9428	3.953
HF	0	-0.4216	-1.768
FB	0	0.3333	1.398
FC	0	-0.4472	-1.875
CE	-8.385	1	-4.193
CB	7.5	-0.8944	3.750

40

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۲-

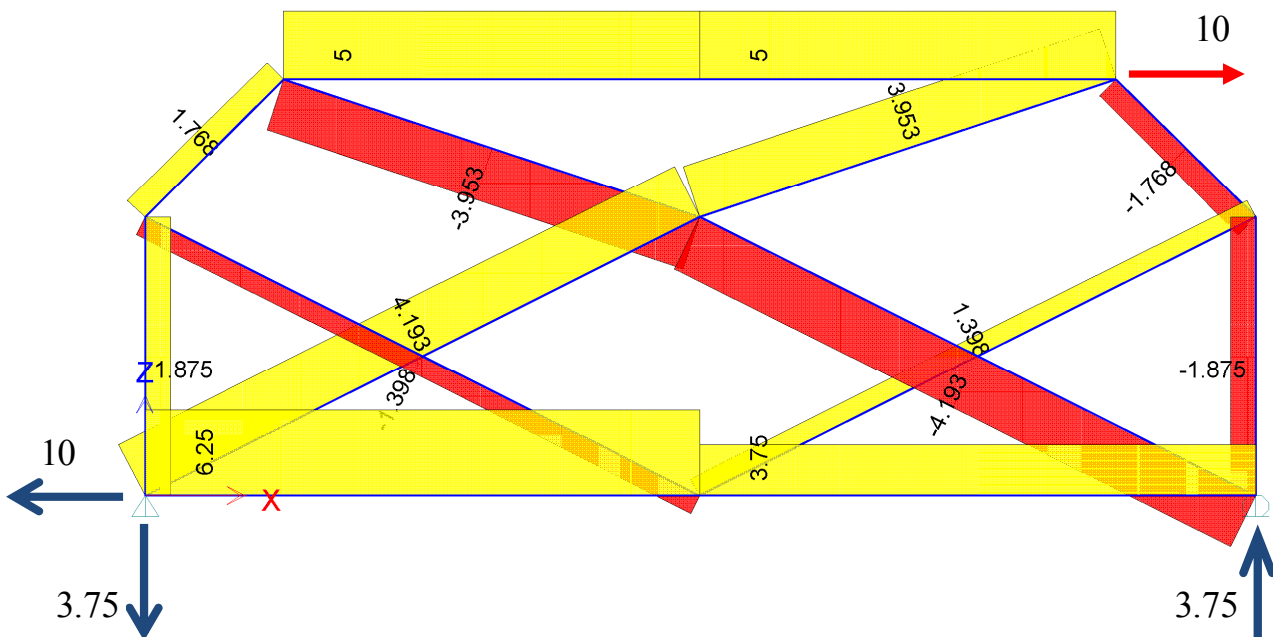


41

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

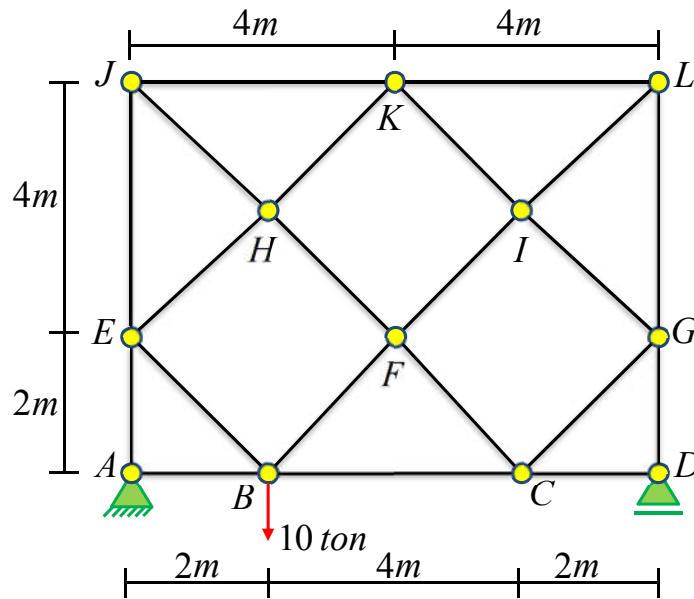
حل مثال ۲-



خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

مثال ۳- خرابی نشان داده شده را آنالیز نمایید.

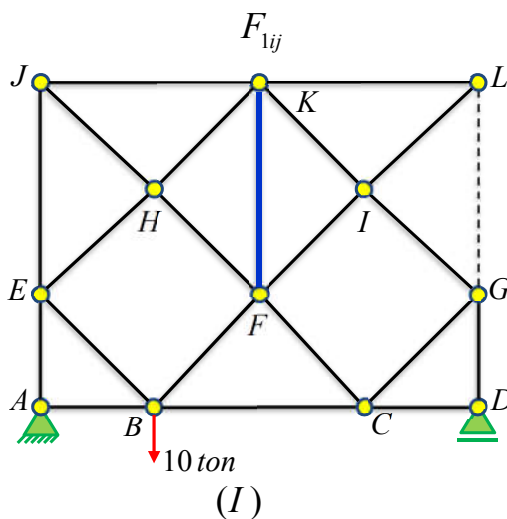
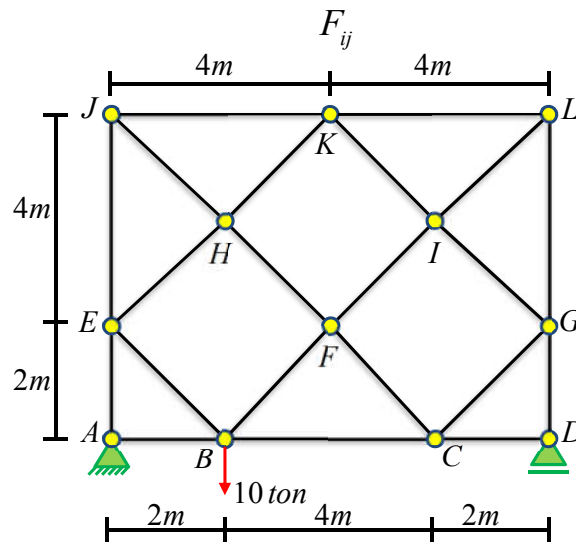


43

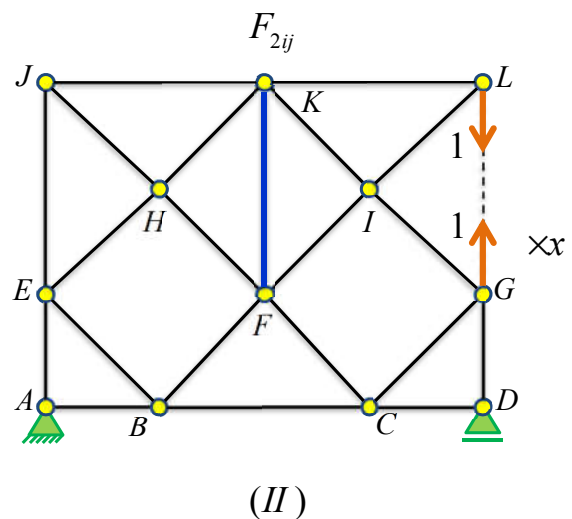
خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳-



+

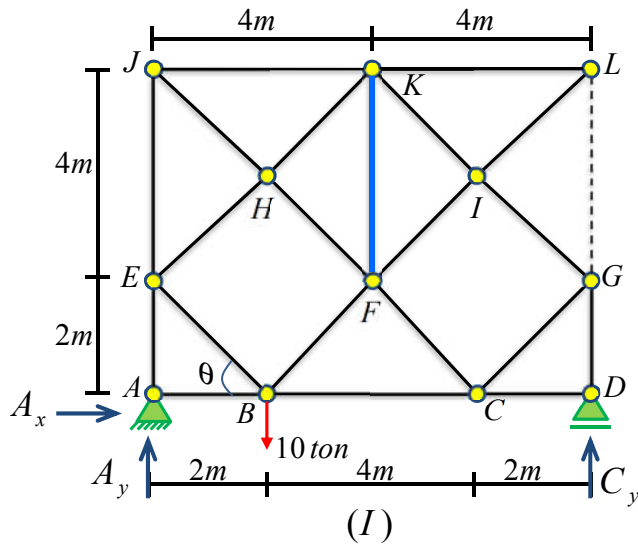


44

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow C_y \times 8 - 10 \times 2 = 0 \Rightarrow C_y = 2.5 \text{ ton}$$

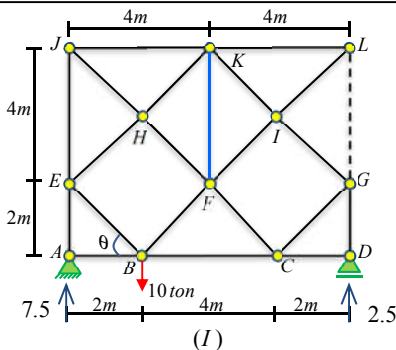
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 2.5 - 10 = 0 \Rightarrow A_y = 7.5 \text{ ton}$$

45

خرپا (Truss)

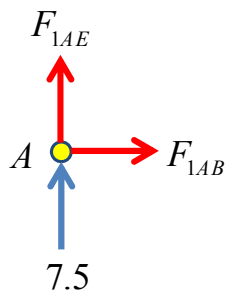
روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (I)



$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

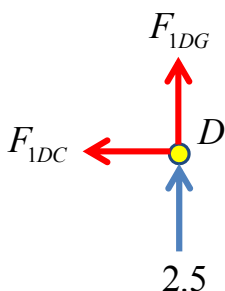
با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 7.5 + F_{1AE} = 0 \Rightarrow F_{1AE} = -7.5 \text{ ton}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1DC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2.5 + F_{1DG} = 0 \Rightarrow F_{1DG} = -2.5$$

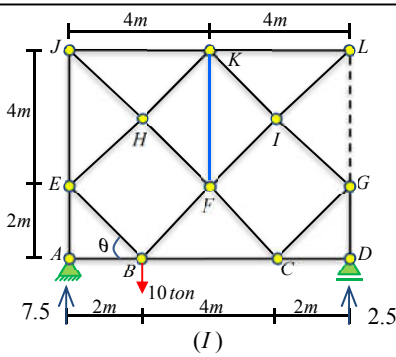
46

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (I)

$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{IGC} \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{IGI} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{IGI} \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{IGC} \frac{1}{\sqrt{2}} - (-2.5) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{IGI} = -1.7678 \\ F_{IGC} = 1.7678 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره L خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{LKL} = 0 \\ F_{LLI} = 0 \end{cases} \quad (\text{اعضای صفر نیرویی})$$

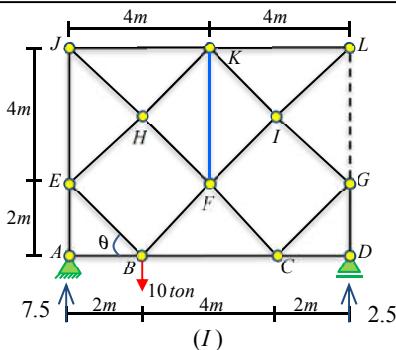
47

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (I)

$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{ICB} - F_{ICF} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1.7678 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{ICF} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1.7678 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{ICF} = -1.7678 \\ F_{ICB} = 2.5 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow 2.5 + F_{1BF} \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{1BE} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{1BE} \frac{1}{\sqrt{2}} + F_{1BF} \frac{1}{\sqrt{2}} - 10 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{1BF} = 5.3033 \\ F_{1BE} = 8.8388 \end{cases}$$

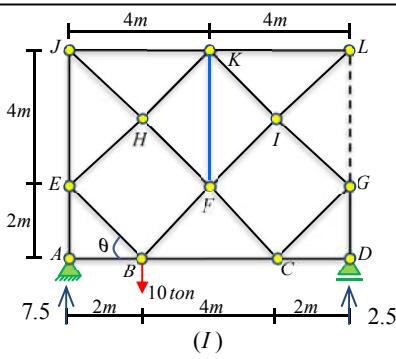
48

خرپا (Truss)

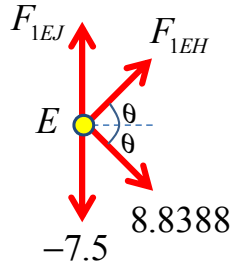
روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (I)

$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:

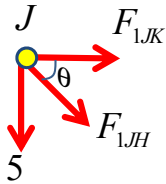


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1EH} \frac{1}{\sqrt{2}} + 8.8388 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{1EJ} + F_{1EH} \frac{1}{\sqrt{2}} - 8.8388 \frac{1}{\sqrt{2}} - (-7.5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1EH} = -8.8388 \\ F_{1EJ} = 5 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره J خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1JK} + F_{1JH} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{1JH} \frac{1}{\sqrt{2}} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1JH} = -7.0711 \\ F_{1JK} = 5 \end{cases}$$

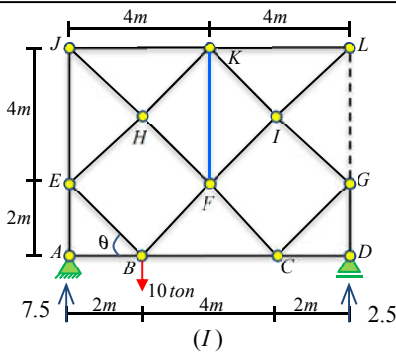
49

خرپا (Truss)

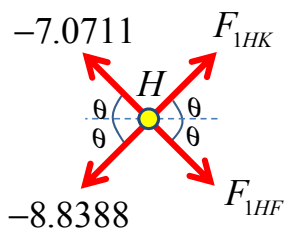
روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (I)

$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0$$

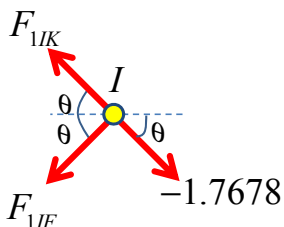
$$\sum F_y = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} F_{1HK} = -8.8388 \\ F_{1HF} = -7.0711 \end{cases}$$

(گره چهار نیرویی با اعضای هم راستا)

با نوشتن معادلات تعادل در گره I خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} F_{1IF} = 0 \\ F_{1IK} = -1.7678 \end{cases}$$

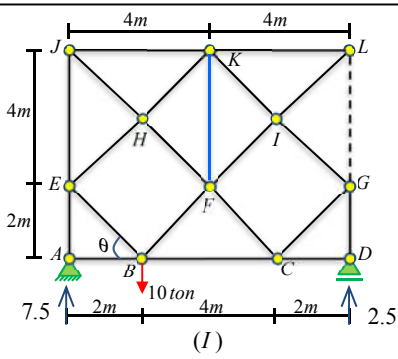
(گره سه نیرویی با اعضای هم راستا)

50

خړپا (Truss)

روش ہنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (I)

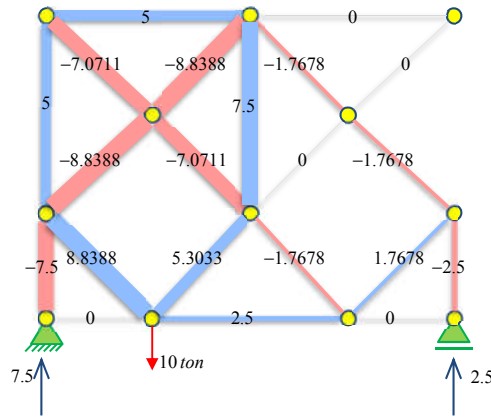


$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{1FK} + (-7.0711) \frac{1}{\sqrt{2}} - (5.3033) \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1.7678) \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow F_{FK} = 7.5$$

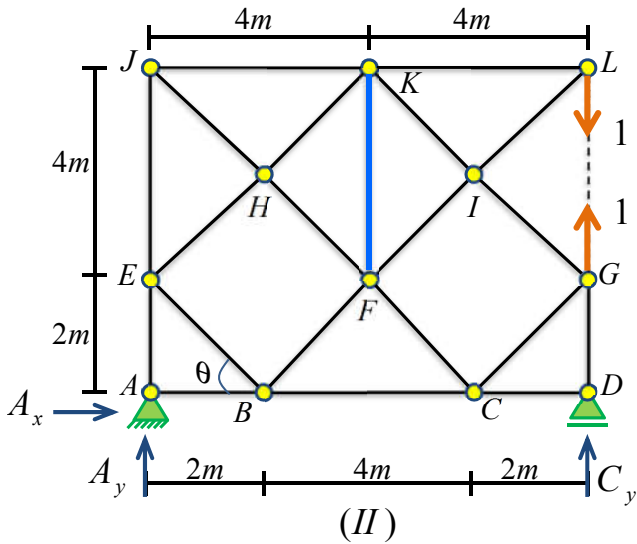


51

خرپا (Truss)

روش ہنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow C_y \times 8 - 1 \times 8 + 1 \times 8 = 0 \Rightarrow C_y = 0$$

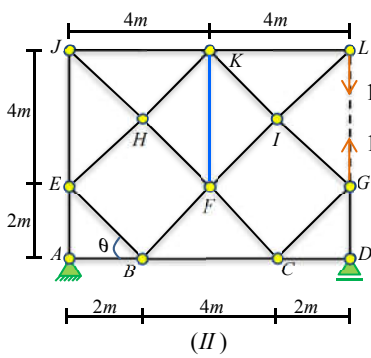
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 1 - 1 = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

52

خرپا (Truss)

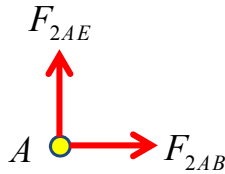
روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (II)



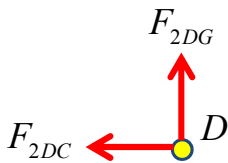
$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره A خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{2AB} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{2AE} = 0 \end{aligned}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره D خواهیم داشت:



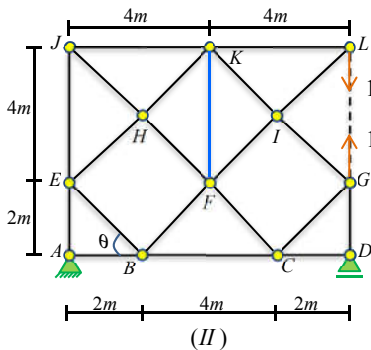
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{2DC} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{2DG} = 0 \end{aligned}$$

53

خرپا (Truss)

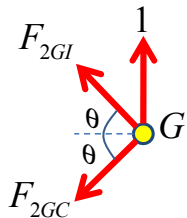
روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

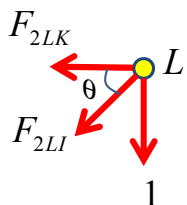
با نوشتن معادلات تعادل در گره G خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{2GC} \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{2GI} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{2GI} \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{2GC} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2GI} = -0.7071 \\ F_{2GC} = 0.7071 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره L خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{2LK} - F_{2LI} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_{2LI} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 0 \end{aligned}$$

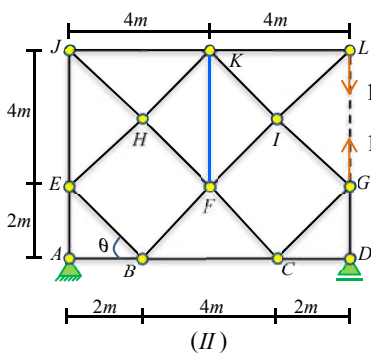
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2LK} = 1 \\ F_{2LI} = -1.4142 \end{cases}$$

54

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره C خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{2CB} - F_{2CF} \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.7071 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{2CF} \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.7071 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2CF} = -0.7071 \\ F_{2CB} = 1 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره B خواهیم داشت:

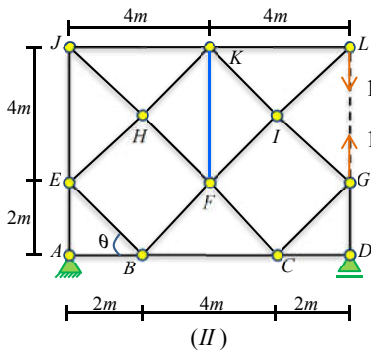
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow 1 + F_{2BF} \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{2BE} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{2BE} \frac{1}{\sqrt{2}} + F_{2BF} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2BF} = -0.7071 \\ F_{2BE} = 0.7071 \end{cases}$$

55

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره E خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{2EH} \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.7071 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{2EJ} + F_{2EH} \frac{1}{\sqrt{2}} - 0.7071 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2EH} = -0.7071 \\ F_{2EJ} = 1 \end{cases}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره J خواهیم داشت:

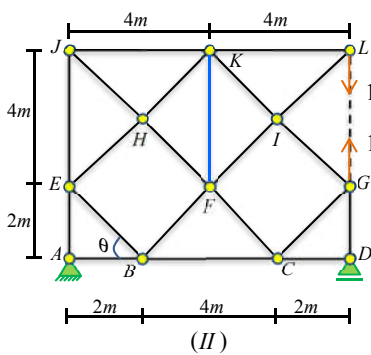
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{2JK} + F_{2JH} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_{2JH} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{2JH} = -1.4142 \\ F_{2JK} = 1 \end{cases}$$

56

خرپا (Truss)

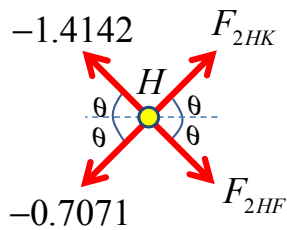
روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (II)



$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره H خواهیم داشت:



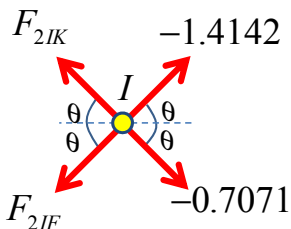
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} F_{2HK} = -0.7071 \\ F_{2HF} = -1.4142 \end{cases}$$

(گره چهار نیرویی با اعضای هم راستا)

با نوشتن معادلات تعادل در گره I خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} F_{2IF} = -1.4142 \\ F_{2IK} = -0.7071 \end{cases}$$

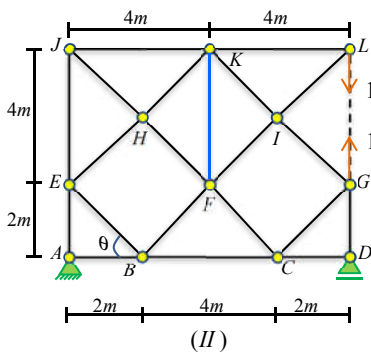
(گره چهار نیرویی با اعضای هم راستا)

57

خرپا (Truss)

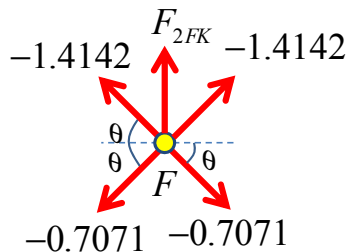
روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه شماره (II)



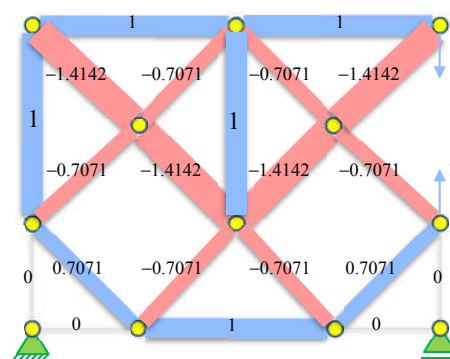
$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره F خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{2FK} + 2(-1.4142)\frac{1}{\sqrt{2}} - 2(-0.7071)\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow F_{2FK} = 1$$



58

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه

عضو	$F_{1ij} \text{ (ton)}$	$F_{2ij} \text{ (ton)}$	$F_{ij} \text{ (ton)} = F_{1ij} - 7.5F_{2ij}$
AB	0	0	0
AE	-7.5	0	-7.5
DC	0	0	0
DG	-2.5	0	-2.5
GI	-1.7678	-0.7071	3.5355
GC	1.7678	0.7071	-3.5355
LK	0	1	-7.5
LI	0	-1.4142	10.6066
CF	-1.7678	-0.7071	3.5355
CB	2.5	1	-5

59

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳- آنالیز سازه

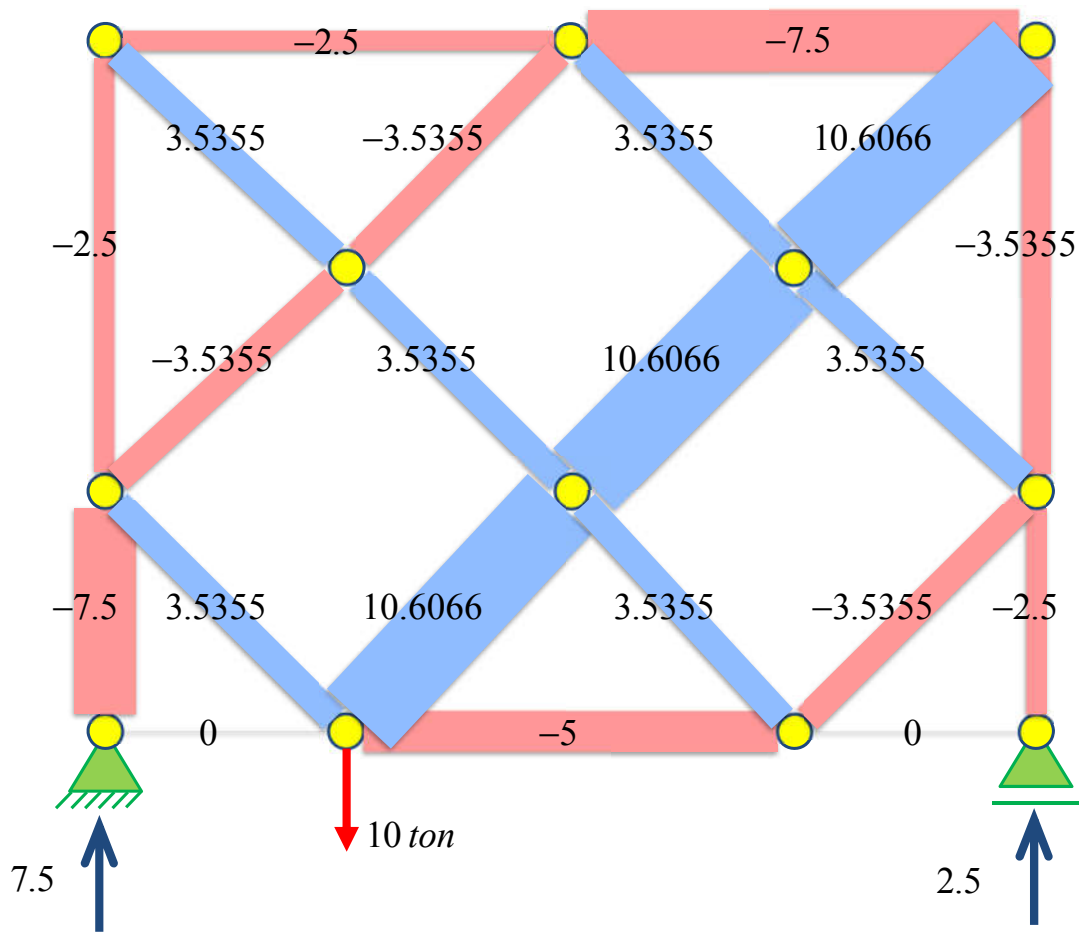
عضو	$F_{1ij} \text{ (ton)}$	$F_{2ij} \text{ (ton)}$	$F_{ij} \text{ (ton)} = F_{1ij} - 7.5F_{2ij}$
BF	5.3033	-0.7071	10.6066
BE	8.8388	0.7071	3.5355
EH	-8.8388	-0.7071	-3.5355
EJ	5	1	-2.5
JH	-7.0711	-1.4142	3.5355
JK	5	1	-2.5
HK	-8.8388	-0.7071	-3.5355
HF	-7.0711	-1.4142	3.5355
IF	0	-1.4142	10.6066
IK	-1.7678	-0.7071	3.5355

60

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳-



61

خرپا (Truss)

روش هنبرگ:

حل مثال ۳-

